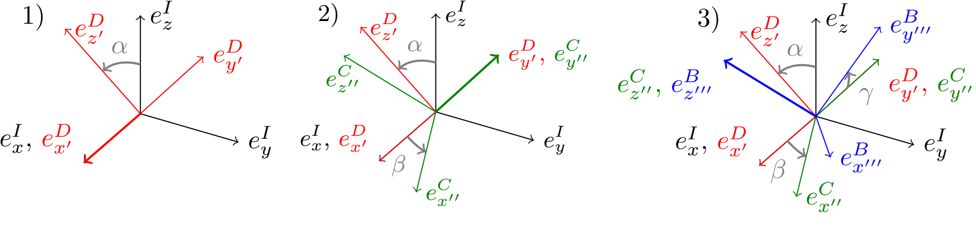

$$\mathbf{A}_{BI} = \mathbf{A}_{BC}\mathbf{A}_{CD}\mathbf{A}_{DI} \quad \Rightarrow \quad {}_B\mathbf{r} = \mathbf{A}_{BI}\,{}_I\mathbf{r} \Leftrightarrow {}_B\mathbf{r} = \mathbf{A}_I^B\,{}_I\mathbf{r}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\gamma + \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma\sin\beta \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\gamma\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta & -\cos\beta\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{IB} = \mathbf{A}_{BI}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma + \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\cos\beta\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma\sin\beta & \cos\gamma\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$