Насыкова Анастасия Артемовна вариант 19

1. $A = \begin{pmatrix} -48 & -27 & -52 & -26 \\ -6 & 54 & 46 & -16 \\ 30 & 0 & -47 & 20 \end{pmatrix}$ $\qquad A = U \Sigma V^T$

Найдем собственные значения и собственные вектора матрицы $A^T A$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3240 & 972 & 810 & 1944 \\ 972 & 3645 & 3888 & -162 \\ 810 & 3888 & 7029 & -324 \\ 1944 & -162 & -324 & 1332 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 9801 \qquad \lambda_2 = 4356 \qquad \lambda_3 = 1089 \qquad \lambda_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2/9 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -9/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем вектора

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2/11 \\ 6/11 \\ 9/11 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 9/11 \\ 0 \\ -2/11 \\ 6/11 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -9/11 \\ 6/11 \\ 2/11 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} -6/11 \\ 2/11 \\ 0 \\ 9/11 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу V:

$$V = \begin{pmatrix} 2/11 & 9/11 & 0 & -6/11 \\ 6/11 & 0 & -9/11 & 2/11 \\ 9/11 & -2/11 & 6/11 & 0 \\ 0 & 6/11 & 2/11 & 9/11 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 & 0 \\ 0 & 66 \end{pmatrix}$$

$A v_i = u_i \cdot \sigma_i \qquad u_i = \dfrac{A v_i}{\sigma_i}$

$\sigma_1 = \cancel{990}\ 99 \qquad u_1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 = 66 \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = 33 \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Насыкова Анастасия Артемовна Вариант 19

по теореме Эккарта-Янга-Мирского:

$$A_1 = U_1 \Sigma_1 V_1^T = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99 & 0 \\ 0 & 66 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/11 & 3/11 \\ 6/11 & 0 \\ 3/11 & -2/11 \\ 0 & 6/11 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} -48 & -36 & -46 & -24 \\ -6 & 36 & 58 & -12 \\ 30 & -18 & -35 & 24 \end{pmatrix}$$

$$|A - A_1|_2 = \sqrt{\cancel{3\lambda}_{max}((A-A_1)^*(A-A_1))}$$

$$A - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 & -2 \\ 0 & 18 & -12 & -4 \\ 0 & 18 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

Найдем max собственное значение матрицы:

$$(A-A_1)^*(A-A_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 729 & -486 & -162 \\ 0 & -486 & 324 & 108 \\ 0 & -162 & 108 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1089 = 33^2$$

$$\Rightarrow |A - A_1|_2 = 33$$

Ответ: $A_1 = \begin{pmatrix} -48 & -36 & -46 & -24 \\ -6 & 36 & 58 & -12 \\ 30 & -18 & -35 & 24 \end{pmatrix}$

$$|A - A_1|_2 = 33$$

Насыкова Анастасия Артемовна вариант 19

(2) $A = \begin{pmatrix} 3,99 & -0,12 \\ -0,18 & -5,01 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 3,92 \\ -5,09 \end{pmatrix}$ $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ $\hat{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\Delta b = \begin{pmatrix} 0,08 \\ 0,09 \end{pmatrix}$

$\varkappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ $\Delta A = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,12 \\ 0,18 & 0,01 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,006 \\ -0,009 & -0,199 \end{pmatrix}$

$\varkappa_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = \underset{5,13}{(5,01+0,12)}\underset{0,259}{(0,25+0,009)}$

max сумма abs элементов в столбцах

$= 1,329$

$\varkappa_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 1,256$

$\lambda_1' = \sqrt{25,134}$ $\lambda_1' = \sqrt{0,063}$

$$\frac{\delta b}{\varkappa(A)} \le \delta x \le \frac{\varkappa(A)}{1-\varkappa(A)\delta(A)}(\delta(b)+\delta(A))$$

$\delta_1 b = \frac{|\Delta b|_1}{|b|_1} = \frac{0,08+0,09}{3,92+5,09} = \frac{0,17}{9,01} = 0,019$

$\delta_1 A = \frac{\|\Delta A\|_1}{\|A\|_1} = \frac{0,01+0,18}{5,13} = \frac{0,19}{5,13} = 0,037$

$\delta_2 b = \frac{|\Delta b|_2}{|b|_2} = \frac{0,12}{6,42} = 0,017$

$\delta_2 A = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\sqrt{0,033}}{\sqrt{25,134}} = 0,036$

$\frac{0,019}{1,329} \le \delta_1 x \le \frac{1,329}{1-1,329 \cdot 0,037}(0,019+0,037)$

$\boxed{0,014 \le \delta_1 x \le 0,078}$

$\frac{0,017}{1,256} \le \delta_2 x \le \frac{1,256}{1-1,256 \cdot 0,036}(0,017+0,036)$

$\boxed{0,014 \le \delta_2 x \le 0,07}$

Ответ: $0,014 \le \delta_1 x \le 0,078$ относительно $\|\cdot\|_1$

$0,014 \le \delta_2 x \le 0,07$ относительно $\|\cdot\|_2$.

Насыкова Анастасия Артемовна Вариант 19

$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,078 & 0,09 \\ 0,063 & -0,125 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{cases} (8+4\varepsilon_1)x + (6+2\varepsilon_2)y = -1+\varepsilon_3 \\ 4x + (-5+\varepsilon_1)y = 2+\varepsilon_4 \end{cases}$

$|\varepsilon_j| < 0,05$

$\Delta A = \begin{pmatrix} 4\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}$ $\Delta b = \begin{pmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$

$\delta_1 A = \dfrac{\|\Delta A\|_1}{\|A\|_1} = \dfrac{0,2}{12} = 0,017$

так сумма abs(элементов) по столбцам

$\delta_2 A = \dfrac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \dfrac{0,225}{10,003} = 0,022$

$\delta_\infty A = \dfrac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \dfrac{0,3}{14} = 0,021$

так сумма abs(элементов) по строкам

$\delta_1 b = \dfrac{|\Delta b|_1}{|b|_1} = \dfrac{0,1}{3} = 0,033$

$\delta_2 b = \dfrac{|\Delta b|_2}{|b|_2} = \dfrac{0,071}{\sqrt{5}} = 0,032$

$\delta_\infty b = \dfrac{|\Delta b|_\infty}{|b|_\infty} = \dfrac{0,05}{2} = 0,025$

$\varkappa_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 12 \cdot 0,21875 = 2,625$

$\varkappa_2 A = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \overset{10,003}{\cancel{100,068}} \cdot \overset{0,156}{\cancel{0,024}} = 1,56$

$\varkappa_\infty A = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 14 \cdot 0,1875 = 2,625.$

$\cancel{\delta_1 x \le}$ $\dfrac{\delta b}{\varkappa(A)} \le \delta x \le \dfrac{\varkappa(A)}{1-\varkappa A\,\delta A}(\delta A + \delta b)$

$\dfrac{0,033}{2,625} \le \delta_1 x \le \dfrac{2,625}{1-2,625\cdot 0,017}(0,017+0,033)$

$\boxed{0,013 \le \delta_1 x \le 0,137}$

$\dfrac{0,032}{1,56} \le \delta_2 x \le \dfrac{1,56}{1-1,56\cdot 0,022}(0,022+0,032)$

$\boxed{0,021 \le \delta_2 x \le 0,087}$

$\dfrac{0,025}{2,625} \le \delta_\infty x \le \dfrac{2,625}{1-2,625\cdot 0,021}(0,021+0,025)$

$\boxed{0,01 \le \delta_\infty x \le 0,128}$

Krouter

Наськова Анастасия Артемовна Вариант 19

$$\boxed{\hat{x}} = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0{,}078125 & 0{,}09375 \\ 0{,}0625 & -0{,}125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}109 \\ -0{,}312 \end{pmatrix}}$$

Ответ: $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0{,}109 \\ -0{,}312 \end{pmatrix}$

$0{,}013 \leq \delta_1 x \leq 0{,}137$

$0{,}021 \leq \delta_2 x \leq 0{,}087$

$0{,}01 \leq \delta_\infty x \leq 0{,}128$

Насыхова Анастасия Артемовна Вариант 19

(4) $\overset{*}{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ $\varepsilon = 0{,}01$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{32} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{32} \end{pmatrix}}$$ – приближенная обратная матрица к A

$$\delta A = \frac{2\varepsilon}{\|A\|_1} = \frac{2\cdot 0{,}01}{9} \approx 0{,}002$$

Число обусловленности относительно $\|\cdot\|_1$ нормы

$$\varkappa(A) = \underbrace{\|A\|_1}_{9} \cdot \|A^{-1}\|_1 = (5+4)\cdot\left(\frac{3}{32}+\frac{5}{32}\right) = \frac{9}{4}$$

Относительная $\|\cdot\|_1$ погрешность приближения по ~~формуле~~ теореме с семинара

$$\delta A^{-1} \leq \frac{\varkappa(A)\,\delta A}{1-\varkappa(A)\,\delta A}$$

$$\delta A^{-1} \leq \frac{\frac{9}{4}\cdot\frac{2\cdot 0{,}01}{9}}{1-\frac{9}{4}\cdot\frac{2\cdot 0{,}01}{9}}$$

$$\boxed{\delta A^{-1} \leq 0{,}005}$$

Ответ: приближенная обратная $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}125 & 0{,}094 \\ 0{,}125 & 0{,}156 \end{pmatrix}$

$\delta A^{-1} \leq 0{,}005$

Насыхова Анастасия Артемовна вариант 19

(5) $A = \begin{pmatrix} 19 & 2 & 7 \\ 5 & 25 & 9 \\ 4 & 3 & 22 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\varepsilon = 0{,}01$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{19} - \frac{2y}{19} - \frac{7z}{19} \\ y = \frac{9}{25} - \frac{5x}{25} - \frac{9z}{25} \\ z = \frac{5}{22} - \frac{4x}{22} - \frac{3y}{22} \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/19 \\ 9/25 \\ 5/22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{19} & -\frac{7}{19} \\ -\frac{5}{25} & 0 & -\frac{9}{25} \\ -\frac{4}{22} & -\frac{3}{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

— Программа в .py-файле —

Номер итерации: 8

приближенное решение $\hat{x} = \begin{pmatrix} -0{,}283 \\ 7{,}607 \\ 4{,}01 \end{pmatrix}$

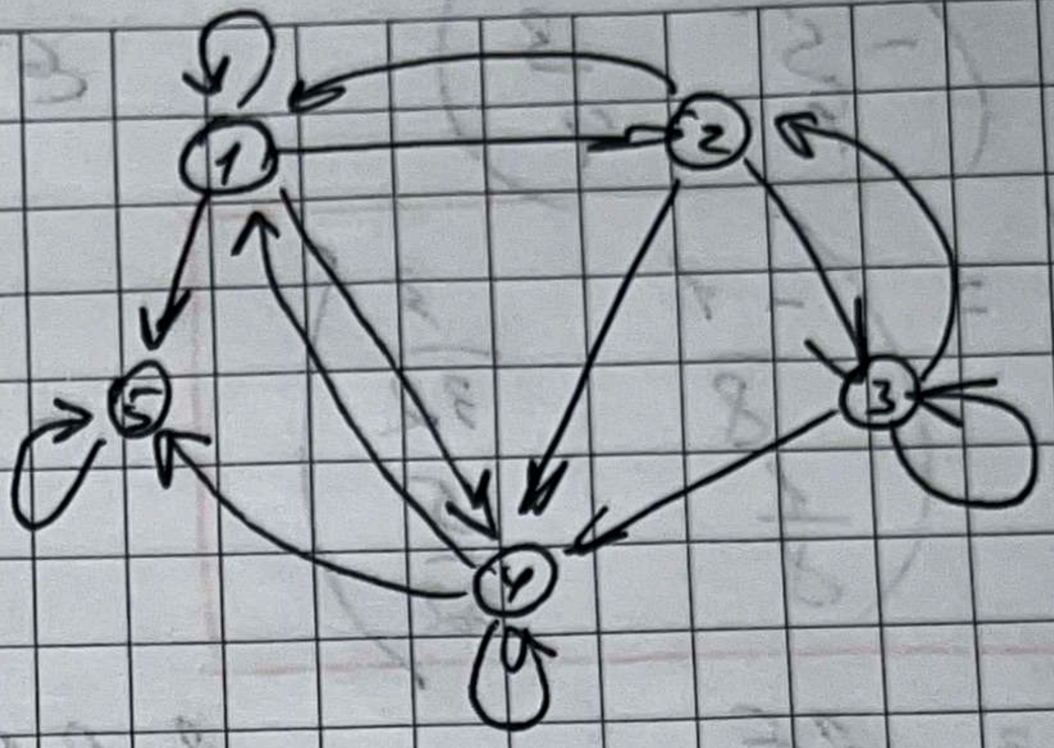
Ответ: номер итерации: 8

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} -0{,}283 \\ 7{,}607 \\ 4{,}01 \end{pmatrix}$$

Насыхова Анастасия Артемовна Вариант 13

(6)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} = A$$



$$P = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0{,}25 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0{,}25 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

модель 2 Page Rank'

— программа в . групь —

Наиболее влиятельная: 5

1: 0,113
2: 0,074
3: 0,071
4: 0,133
5: 0,61

$\boxed{\text{Ответ: 5.}}$