Насыхова Анастасия Артемовна Вариант 19

(1) $A = \begin{pmatrix} 48 & -54 & -2 & 10 \\ -42 & 9 & 40 & -8 \\ -12 & 36 & -22 & -67 \end{pmatrix}$ $A = U \Sigma V^T$

$A^T A = \begin{pmatrix} 4212 & -3402 & -1512 & 1620 \\ -3402 & 4293 & -324 & -3024 \\ -1512 & -324 & 2088 & 1134 \\ 1620 & -3024 & 1134 & 4653 \end{pmatrix}$

$|A^T A - \lambda E| = -\lambda(\lambda - 9801)(\lambda - 4356)(\lambda - 1089)$

$\lambda = 9801$

$A^T A - 9801 E = 0$

$\begin{pmatrix} -5589 & -3402 & -1512 & 1620 \\ -3402 & -5508 & -324 & -3024 \\ -1512 & -324 & -7713 & 1134 \\ 1620 & -3024 & 1134 & -5148 \end{pmatrix} = 0$

Приведем к ступенчатому виду

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -7/6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Собственный вектор

Нормализуем $\begin{pmatrix} 6/11 \\ -7/11 \\ 0 \\ 6/11 \end{pmatrix}$

$A^T A - 4356 E = 0$

$$\begin{pmatrix} -144 & -3402 & -1512 & 1620 \\ -3402 & -63 & -324 & -3024 \\ -1512 & -324 & -2268 & 1134 \\ 1620 & -3024 & 1134 & 297 \end{pmatrix} = 0$$

Ступенчатый вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Собственный вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7/6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Нормализуем $\begin{pmatrix} -6/11 \\ 0 \\ 7/11 \\ 6/11 \end{pmatrix}$

$A^T A - 1089 E = 0.$

$$\begin{pmatrix} 3123 & -3402 & -1512 & 1620 \\ -3402 & 3204 & -324 & -3024 \\ -1512 & -324 & 999 & 1134 \\ 1620 & -3024 & 1134 & 3564 \end{pmatrix} = 0$$

Ступенчатый вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6/7 \\ 0 & 0 & 1 & 6/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Собственный вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 6/7 \\ -6/7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Нормализуем $\begin{pmatrix} 0 \\ 6/11 \\ -6/11 \\ 7/11 \end{pmatrix}$

$A^T A = 0$

Ступенчатый вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Собственный вектор $\begin{pmatrix} 7/6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Нормализуем $\begin{pmatrix} 7/11 \\ 6/11 \\ 6/11 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V = \begin{pmatrix} 6/11 & -6/11 & 0 & 7/11 \\ -7/11 & 0 & 6/11 & 6/11 \\ 0 & 7/11 & -6/11 & 6/11 \\ 6/11 & 6/11 & 7/11 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \cdot V_i = U_i \cdot \sigma_i$ $\qquad u_i = \dfrac{A v_i}{\sigma_i}$

$\sigma_1 = 99$ $\qquad u_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 = 66 \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = 33 \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

$$A = U \Sigma V^T$$

Найдем псевдообратную матрицу

$F = U$

$$G = \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/11 & -6/11 & 0 \\ -7/11 & 0 & 6/11 \\ 0 & 7/11 & -6/11 \\ 6/11 & 6/11 & 7/11 \end{pmatrix}$$

$$(F^* F)^{-1} F^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 54 & -63 & 0 & 54 \\ -36 & 0 & 42 & 36 \\ 0 & 18 & -18 & 21 \end{pmatrix}$$

8) $G^*(GG^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{363} & -\frac{1}{121} & -0 \\ -\frac{7}{1089} & 0 & \frac{2}{121} \\ 0 & \frac{7}{726} & -\frac{2}{121} \\ \frac{2}{363} & \frac{1}{121} & \frac{7}{363} \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^+} = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} \frac{7}{1089} & -\frac{8}{1089} & \frac{2}{1089} \\ -\frac{50}{3267} & -\frac{29}{3267} & -\frac{4}{3267} \\ \frac{17}{2178} & \frac{19}{1089} & -\frac{1}{1089} \\ -\frac{13}{1089} & -\frac{10}{1089} & -\frac{17}{1089} \end{pmatrix}}$$

Ответ: $A = U \Sigma V^T$ (выше выделено красивым)

A^+

Насыхова Анастасия Артемовна вариант 19

(2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 3 & -8 & 12 \\ 4 & -11 & 15 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Приведем к ступенчатому (каноническому) виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -8 \\ 4 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$A = FG$ – скелетное разложение матрицы A

$A^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$

$(GG^*) = \begin{pmatrix} 145 & 36 \\ 36 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad (GG^*)^{-1} = \frac{1}{154}\begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -36 & 145 \end{pmatrix}$

$(F^*F) = \begin{pmatrix} 30 & -86 \\ -86 & 250 \end{pmatrix}$ $\quad (F^*F)^{-1} = \frac{1}{104}\begin{pmatrix} 250 & 86 \\ 86 & 30 \end{pmatrix}$

$A^+ = G^*(GG^*)^{-1} \cdot (F^*F)^{-1}F^* =$

$= \frac{1}{154}\begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -36 & 145 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{104}\begin{pmatrix} 102 & 62 & 54 & 94 \\ 38 & 18 & 14 & 34 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -\frac{87}{4004} & -\frac{1}{572} & \frac{9}{4004} & -\frac{71}{4004} \\ \frac{919}{8008} & \frac{27}{1144} & \frac{43}{8008} & \frac{773}{8008} \\ \frac{669}{8008} & \frac{57}{1144} & \frac{345}{8008} & \frac{615}{8008} \end{pmatrix}$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -8 \\ 4 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A^+ = \begin{pmatrix} -0{,}022 & -0{,}002 & 0{,}002 & -0{,}018 \\ 0{,}115 & 0{,}024 & 0{,}005 & 0{,}097 \\ 0{,}084 & 0{,}05 & 0{,}043 & 0{,}077 \end{pmatrix}$

Насыкова Анастасия Артемовна вариант 19

(3)

$$\begin{cases} 2x - 8y + 12z + 0t = 7 \\ 1x - 5y + 11z - 1t = 2 \\ -3x + 7y + 9z - 13t = 6 \\ -4x + 10y + 8z - 14t = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 & 0 \\ 1 & -5 & 11 & -1 \\ -3 & 7 & 9 & -13 \\ -4 & 10 & 8 & -14 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$Ax = b$

Приведем матрицу A к каноническому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 \\ 1 & -5 & 11 \\ -3 & 7 & 9 \\ -4 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$A = FG$ – разложение полного ранга

$$(GG^*) = \begin{pmatrix} 2705 & 988 & 208 \\ 988 & 362 & 76 \\ 208 & 76 & 17 \end{pmatrix} \quad (GG^*)^{-1} = \frac{1}{3082}\begin{pmatrix} 378 & -988 & -208 \\ -988 & 2721 & -76 \\ -208 & -76 & 3066 \end{pmatrix}$$

$$(F^*F) = \begin{pmatrix} 30 & -82 & -24 \\ -82 & 238 & -8 \\ -24 & -8 & 410 \end{pmatrix} \quad (F^*F)^{-1} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 97516 & 33812 & 6368 \\ 33812 & 11724 & 2208 \\ 6368 & 2208 & 416 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = G^*(GG^*)^{-1} \cdot (F^*F)^{-1} F^* =$$

$$= \frac{1}{3082}\begin{pmatrix} 378 & -988 & -208 \\ -988 & 2721 & -76 \\ -208 & -76 & 3066 \\ -52 & -19 & -4 \end{pmatrix} \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 952 & -1496 & 1448 & -1000 \\ 328 & -520 & 504 & -344 \\ 64 & -96 & 96 & -64 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1405}{12328} & -\frac{1985}{12328} & \frac{1839}{12328} & -\frac{1551}{12328} \\ -\frac{6619}{24656} & \frac{8803}{24656} & -\frac{8317}{24656} & \frac{7105}{24656} \\ -\frac{835}{6164} & \frac{1761}{6164} & -\frac{1911}{6164} & \frac{1185}{6164} \\ -\frac{6999}{24656} & \frac{11007}{24656} & -\frac{10657}{24656} & \frac{7349}{24656} \end{pmatrix}$$

По теореме вектор $y = A^+ b$ – псевдорешение системы по методу наименьших квадратов min длины

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1143}{1541} \\ -\frac{2694}{1541} \\ -\frac{1216}{1541} \\ -\frac{3386}{1541} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}742 \\ -1{,}748 \\ -0{,}789 \\ -2{,}197 \end{pmatrix}$$

Kroyter канцелярские товары

$$A^+A = \frac{1}{3082}\begin{pmatrix} 378 & -988 & -208 & -52 \\ -988 & 2721 & -76 & -19 \\ -208 & -76 & 3066 & -4 \\ -52 & -19 & -4 & 3081 \end{pmatrix}$$

$$A^+A - E = \frac{1}{3082}\begin{pmatrix} -2704 & -988 & -208 & -52 \\ -988 & -361 & -76 & -19 \\ -208 & -76 & -16 & -4 \\ -52 & -19 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Общая формула псевдорешений:

$$\vec{x} = A^+b - (A^+A - E)\vec{y} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}742 \\ -1{,}748 \\ -0{,}789 \\ -2{,}197 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0{,}877 & -0{,}321 & -0{,}067 & -0{,}017 \\ -0{,}321 & -0{,}117 & -0{,}025 & -0{,}006 \\ -0{,}067 & -0{,}025 & -0{,}005 & -0{,}001 \\ -0{,}017 & -0{,}006 & -0{,}001 & -0{,}0003 \end{pmatrix}\vec{y},$$

где $\vec{y} \in \mathbb{C}^4$

Ответ: Решение min длины: $\begin{pmatrix} 0{,}742 \\ -1{,}748 \\ -0{,}789 \\ -2{,}197 \end{pmatrix}$

Общая формула: $\begin{pmatrix} 0{,}742 \\ -1{,}748 \\ -0{,}789 \\ -2{,}197 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0{,}87 & -0{,}321 & -0{,}067 & -0{,}017 \\ -0{,}321 & -0{,}117 & -0{,}025 & -0{,}006 \\ -0{,}067 & -0{,}025 & -0{,}005 & -0{,}001 \\ -0{,}017 & -0{,}006 & -0{,}001 & -0{,}0003 \end{pmatrix}\vec{y}$

$\vec{y} \in \mathbb{C}^4$

Насыхова Анастасия Артемовна вариант 19

(4) $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 6 & -19 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

По формуле Лагранжа

$$f(x) = 6 \cdot \frac{(x+1)x(x-3)}{\underbrace{(-2+1)}_{-1}(-2)\underbrace{(-2-3)}_{-5}} - 19 \cdot \frac{(x+2)x(x-3)}{\underbrace{(-1+2)}_{1}(-1)\underbrace{(-1-3)}_{-4}} +$$

$$+ 6 \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-3)}{2 \cdot 1 \cdot (-3)} - 3 \cdot \frac{(x+2)(x+1)x}{\underbrace{(3+2)}_{5}\underbrace{(3+1)}_{4}3} =$$

$$= \frac{-3(x^2+x)(x-3)}{5} - \frac{19(x^2+2x)(x-3)}{4} -$$

$$- (x^2+3x+2)(x-3) - \frac{(x^2+3x+2)x}{20} =$$

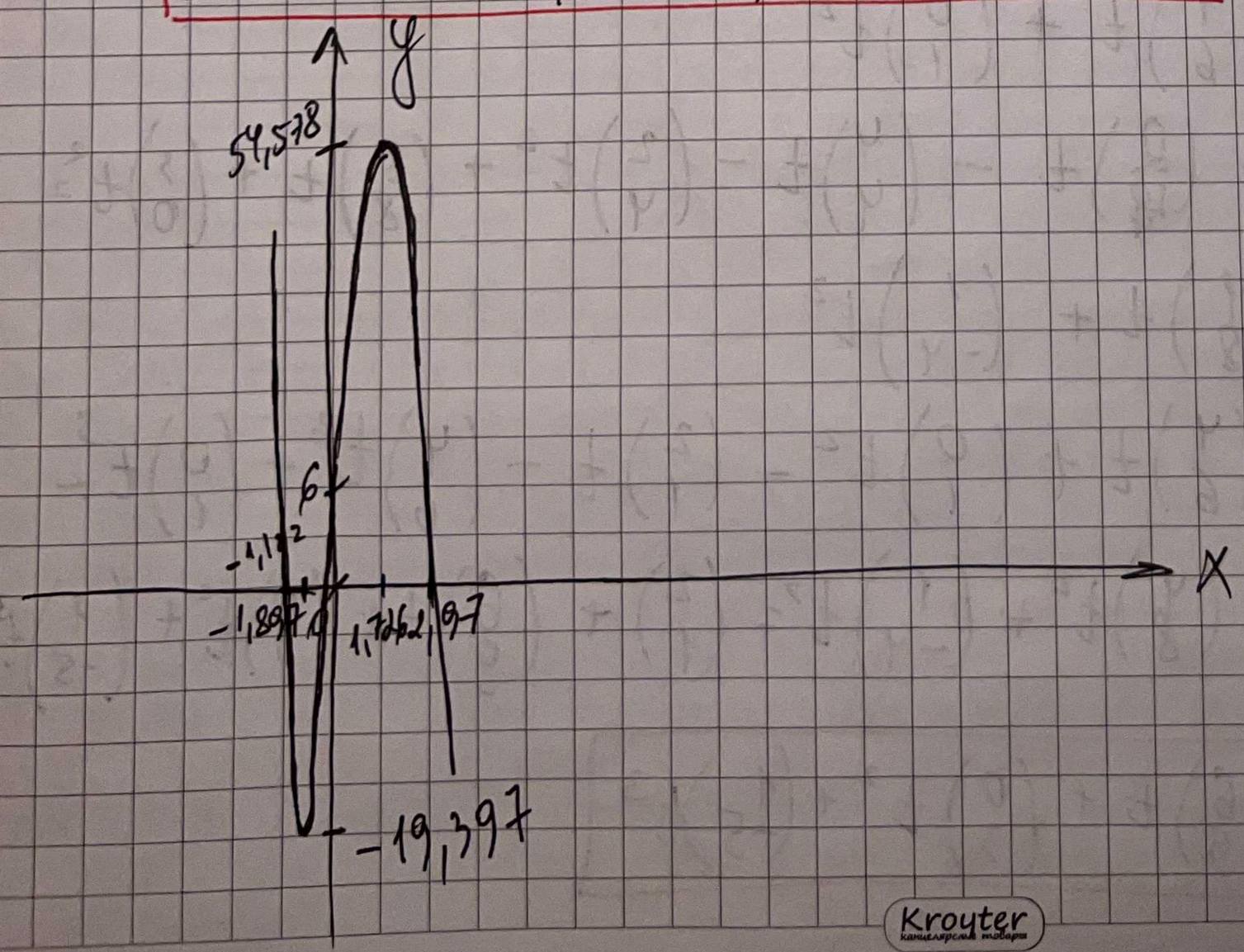
$$= \frac{(x-3)(\overset{-127x^2-262x-40}{-127x^2-12x-95x^2-190x-20x^2-60x-40}) - x^3-3x^2-2x}{20} =$$

$$= \frac{-127x^3+381x^2-262x^2+786x-40x+120-x^3-3x^2-2x}{20} =$$

$$= \frac{-128x^3+116x^2+744x+120}{20} =$$

$$= -6{,}4x^3+5{,}8x^2+37{,}2x+6$$ – интерполяционный многочлен Лагранжа

$\boxed{\text{Ответ: } -6{,}4x^3+5{,}8x^2+37{,}2x+6}$

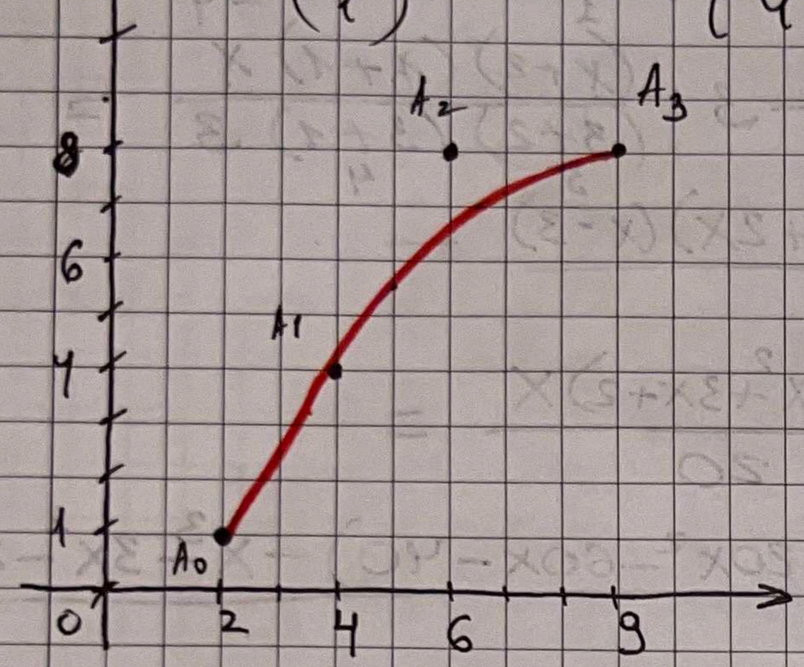


Насыхова Анастасия Артемовна вариант 19

(5) $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

Построим уравнение кривой Безье с помощью алгоритма Кастельно

$A_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$



$B_1 = A_0(1-t) + A_1 t$

$B_2 = A_1(1-t) + A_2 t$

$B_3 = A_2(1-t) + A_3 t$

$C_1 = B_1(1-t) + B_2 t$

$C_2 = B_2(1-t) + B_3 t$

$C = C_1(1-t) + C_2 t$

$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} t$

$B_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} t$

$B_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t$

$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} t^2 =$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$

$C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 =$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} t^2$

Уравнение кривой Безье: $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} t^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^3 +$

$+ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} t^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} t^3$

$\boxed{\text{Ответ: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} t^3}$

Kroyter канцелярские товары

Насыхова Анастасия Артемовна Вариант 19

(6) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ Отрезок $[0, 4]$

Норма: max

Пусть $p(x)$ - многочлен, являющийся наилучшим приближением $f(x)$ по max-норме

$$\Rightarrow \quad |\underbrace{f(x) - p(x)}_{A}| \to \min$$

По следствию из теоремы Чебышева наименее уклоняющимся от 0 на отрезке $[\overset{a}{0}, \overset{b}{4}]$ относительно max-нормы является многочлен:

$$A = \tilde{T}_3 = \frac{(b-a)^3}{2^{6-1}} T_3\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = 2\, T_3\left(\frac{2x-4}{4}\right)$$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$ - многочлен Чебышева

$$T_3\left(\frac{x-2}{2}\right) = 4 \cdot \frac{(x-2)^3}{8} - 3\,\frac{x-2}{2} = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 3x + 6}{2} =$$

$$= \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - 2}{2}$$

$$\tilde{T}_3 = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

$$f(x) - p(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x + 4$$

$$p(x) = -2x^3 + 3x^2 + 3x + 5 + 2x^3 - 12x^2 + 18x - 4 =$$

$$= -9x^2 + 21x + 1$$

$$\boxed{\text{Ответ: } -9x^2 + 21x + 1}$$

Насыхова Анастасия Артемовна вариант 19

(7) $f(x) = \sqrt{x+2}$ $[2,6]$

Норма: $|h|_T = \sqrt{\int_2^6 \frac{h^2(x)}{\sqrt{1-\frac{(2x-8)^2}{16}}}dx}$

Сделаем замену $t = \frac{x-4}{2}$ на $x \in [2,6] \Rightarrow t \in [-1;1]$

$f(t) = \sqrt{2t+6}$

$|h|_T = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{h^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt}$ (1)

По теореме Чебышева об альтернансе наилучшее приближение имеет многочлен:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\langle T_i, f\rangle}{\langle T_i, T_i\rangle} T_i(t), \text{ где}$$

$$\langle T_i, f\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_i(t) f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$ – скалярное произведение

$$\tilde{f}(t) = \frac{\langle T_0, f\rangle}{\pi} T_0(t) + 2\frac{\langle T_1, f\rangle}{\pi} T_1(t) + \frac{2\langle T_2, f\rangle}{\pi} T_2(t) +$$

$$+ \frac{2\langle T_3, f\rangle}{\pi} T_3(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2t+6}}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{2t}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{t\sqrt{2t+6}}{\sqrt{1-t^2}}dt +$$

$$+ \frac{2(2t^2-1)}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(2t^2-1)\sqrt{2t+6}}{\sqrt{1-t^2}}dt + \frac{2(4t^3-3t)}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(4t^3-3t)\sqrt{2t+6}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Применим численное интегрирование, чтобы вычислить примерные значения интегралов

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\pi}\cdot 7{,}64 + \frac{2t}{\pi}\cdot 0{,}65 + \overset{2(2t^2-1)}{\frac{4t^2-2}{\pi}}\cdot \underset{\left(\frac{4t^2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)}{(-0{,}028)} +$$

$$+ \overset{2(4t^3-3t)}{\frac{8t^3-6t}{\pi}} \underset{\left(\frac{8t^3}{\pi}-\frac{6t}{\pi}\right)}{0{,}0024} = 2{,}43 + 0{,}41t - 0{,}036t^2 +$$

$$+ 0{,}018 + 0{,}006t^3 - 0{,}005t = 0{,}006t^3 - 0{,}036t^2 +$$

$$+ 0{,}405t + 2{,}448$$

Обратная замена $x = 2t+4$, $t = \frac{x-4}{2}$

$$\tilde{f}(x) = 0{,}006\left(\frac{x-4}{2}\right)^3 - 0{,}036\left(\frac{x-4}{2}\right)^2 + 0{,}405\left(\frac{x-4}{2}\right) + 2{,}448 =$$

$$= \frac{\overset{0{,}003}{\cancel{0{,}006}}}{\cancel{8}_{4}}x^3 - \frac{\overset{0{,}003}{\cancel{0{,}006}}\cdot\overset{3}{\cancel{12}}}{\cancel{8}_{2}}x^2 + \frac{0{,}006\cdot\overset{6}{\cancel{48}}}{\cancel{8}_{1}}x - \frac{0{,}006}{\cancel{8}_{1}}\cdot\overset{8}{\cancel{64}} -$$

$$- \frac{0{,}036}{4}x^2 + \frac{0{,}036\cdot 8}{4}x - \frac{0{,}036\cdot 16}{4} +$$

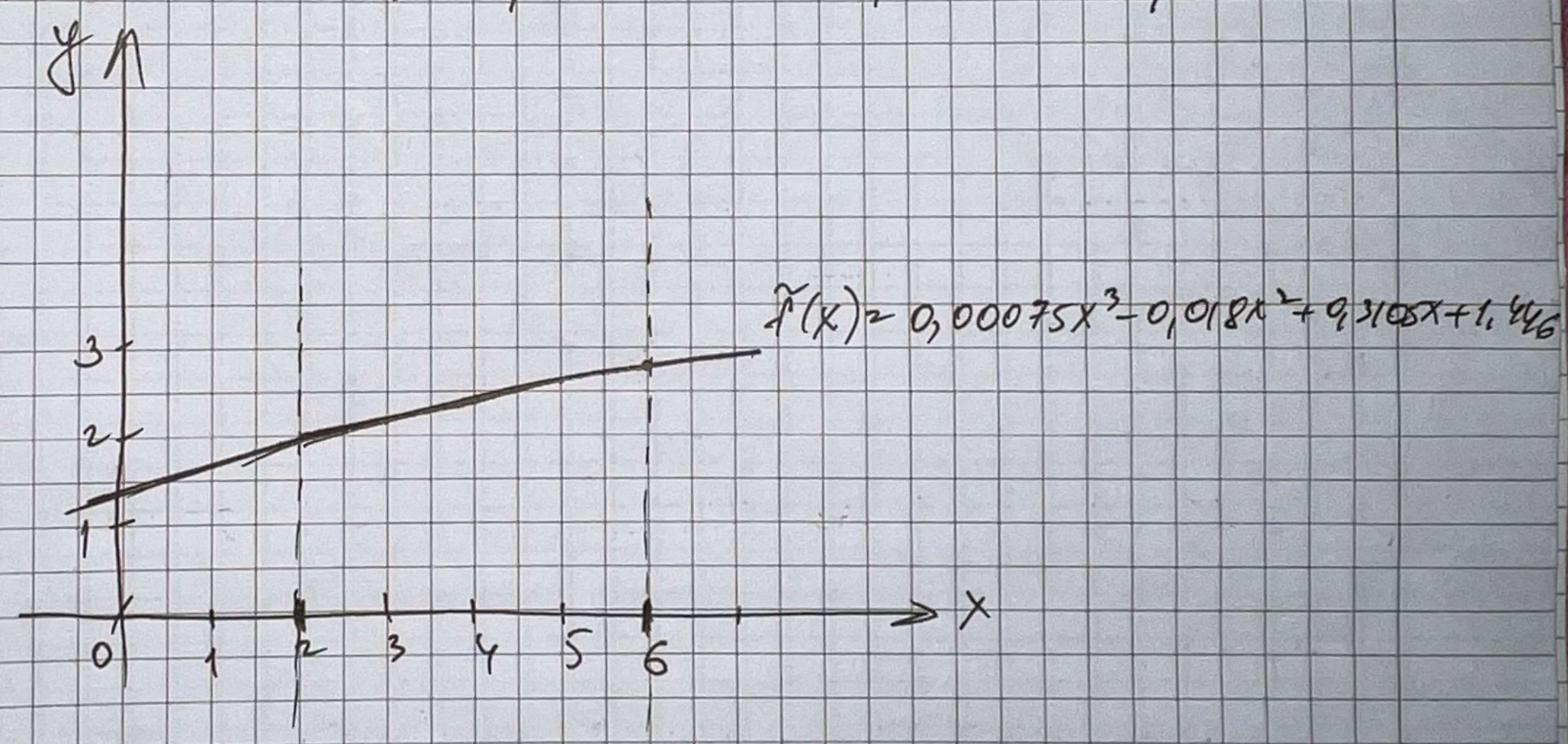
$$+ \frac{0{,}405}{2}x - \frac{0{,}405\cdot 4}{2} + 2{,}448 =$$

$$= 0{,}00075x^3 - 0{,}009x^2 + \underline{0{,}036x} - 0{,}048 -$$

$$- 0{,}009x^2 + \underline{0{,}072x} - 0{,}144 + \underline{0{,}2025x} - 0{,}81 + 2{,}448 =$$

$$= 0{,}00075x^3 - 0{,}018x^2 + 0{,}3105x + 1{,}446$$

Ответ: $\tilde{f}(x) = 0{,}00075x^3 - 0{,}018x^2 + 0{,}3105x + 1{,}446$



Насыхова Анастасия Артемовна вариант 19

(8) $2x^2+xy(-6q-4)+y^2(12q+1)+z^2(12q-2)=1$

Поверхность второго порядка

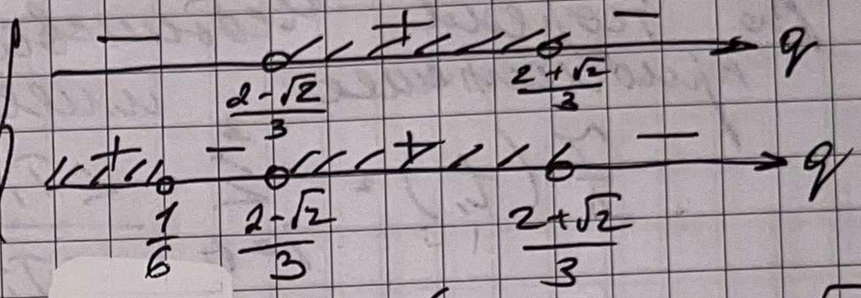
$=1 \Rightarrow$ сфера $\Rightarrow$ замкнута, центрально симметрична, выпукла, ограничена, содержит ε - окрестность 0

Согласно критерию Сильвестра:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3q-2 & 0 \\ -3q-2 & 12q+1 & 0 \\ 0 & 0 & 12q-2 \end{pmatrix}$$

Матрица квадратичной формы

$$\begin{cases} 2>0 \\ 2(12q+1)-(3q+2)^2>0 \\ -2(6q-1)(9q^2-12q+2)>0 \end{cases}$$



$$q \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}; \frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)$$

При $q \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}; \frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)$ уравнение задает единичную окружность относительно какой-то нормы в трехмерном пространстве

Подставим вектор $\begin{pmatrix} x_{t_0} \\ y_{t_0} \\ z_{t_0} \end{pmatrix}$ в уравнение

$$2t_0^2x^2+t_0^2xy(-6q-4)+t_0^2y^2(12q+1)+z^2t_0^2(12q-2)=1$$

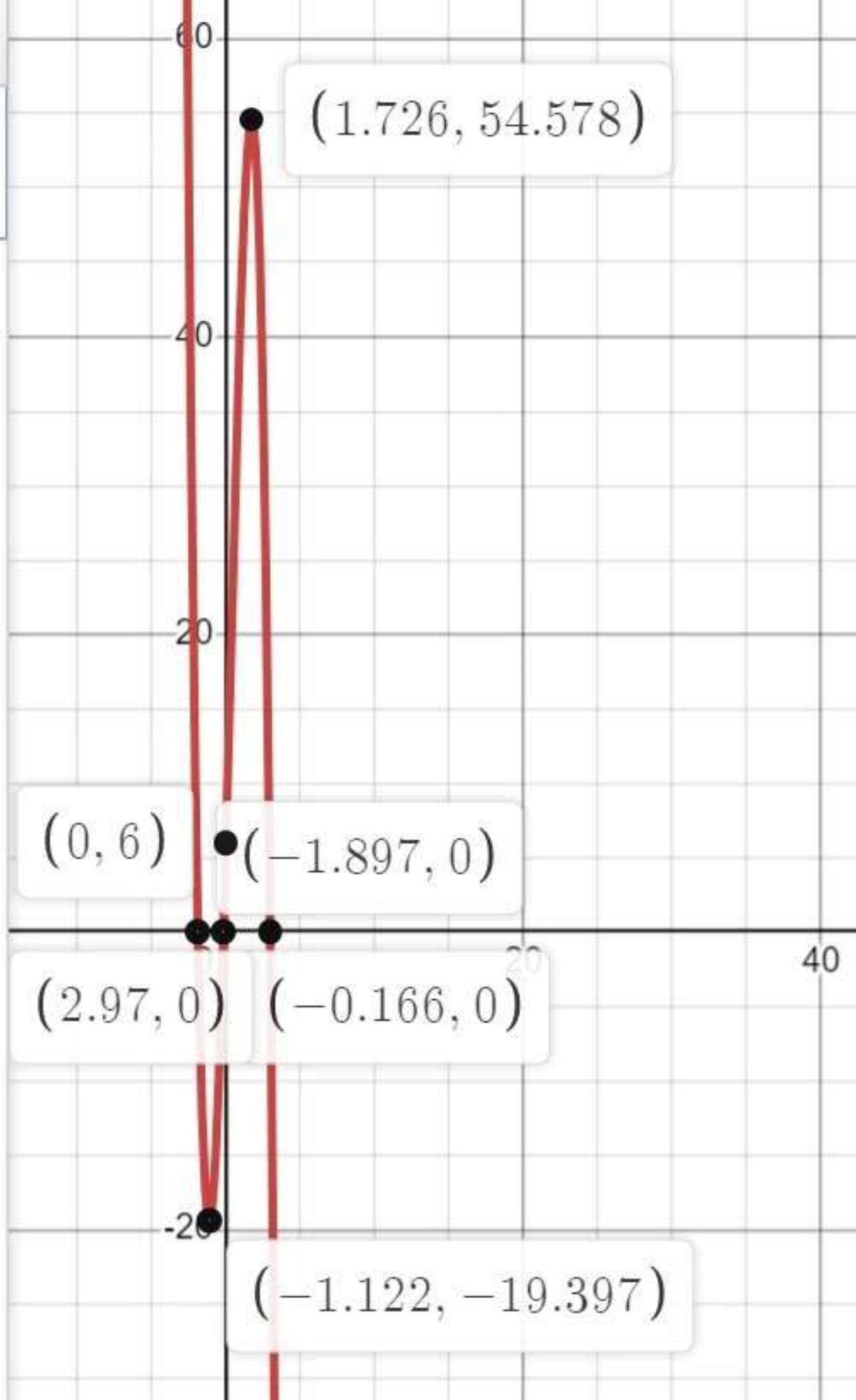
$$t_0^2=\frac{1}{2x^2+xy(-6q-4)+y^2(12q+1)+z^2(12q-2)}$$

$$\nu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{t_0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}=\sqrt{2+6q-4+12q+1+12q-2}=$$

$$=\sqrt{18q-3}, \text{ где } \nu\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\sqrt{2x^2+xy(-6q-4)+y^2(12q+1)+z^2(12q-2)} \text{ - норма}$$

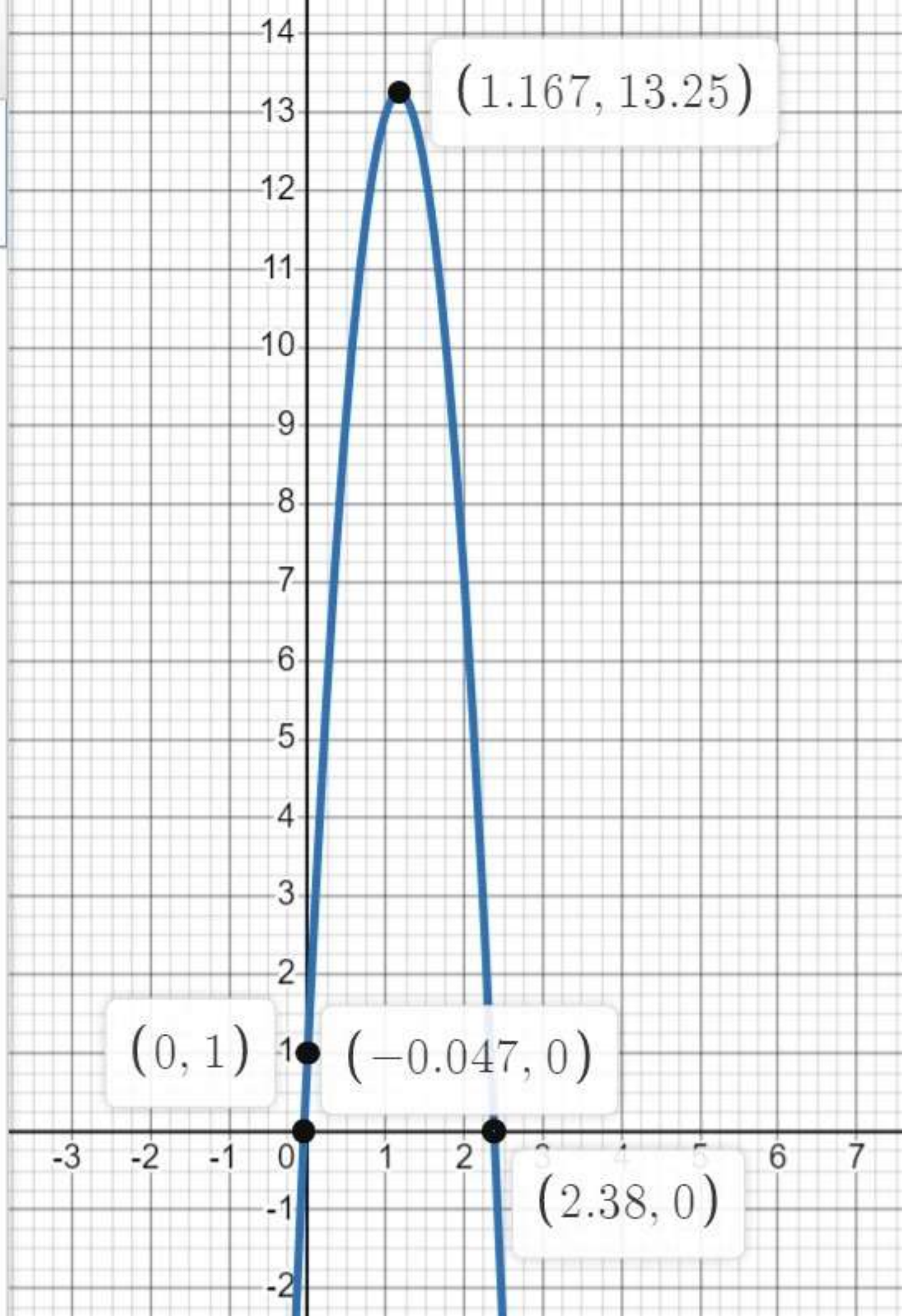
$$\boxed{\text{Ответ: } q \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}; \frac{2+\sqrt{2}}{3}\right); \ \nu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\sqrt{18q-3}}$$

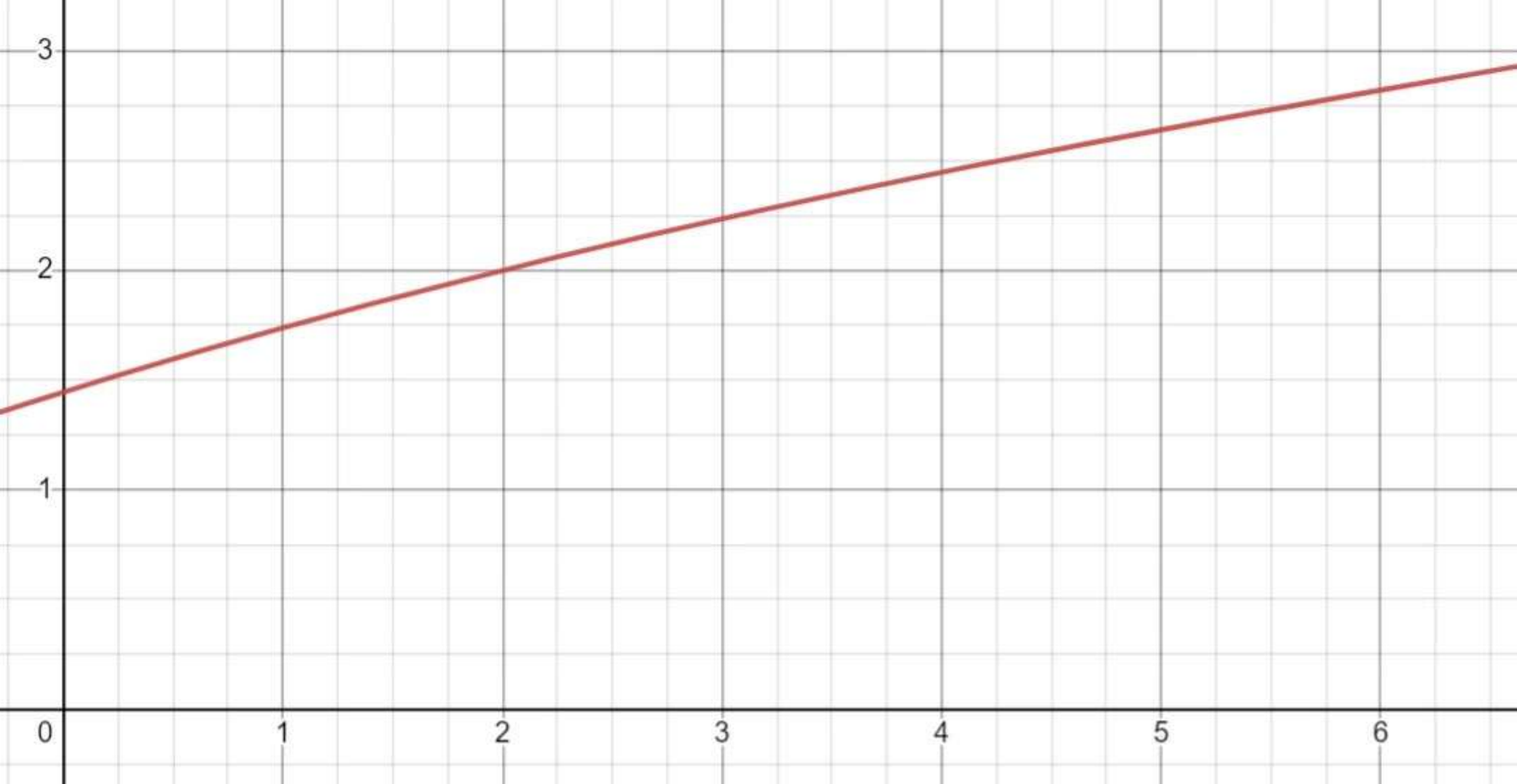
$y = -6.4x^3 + 5.8x^2 +$

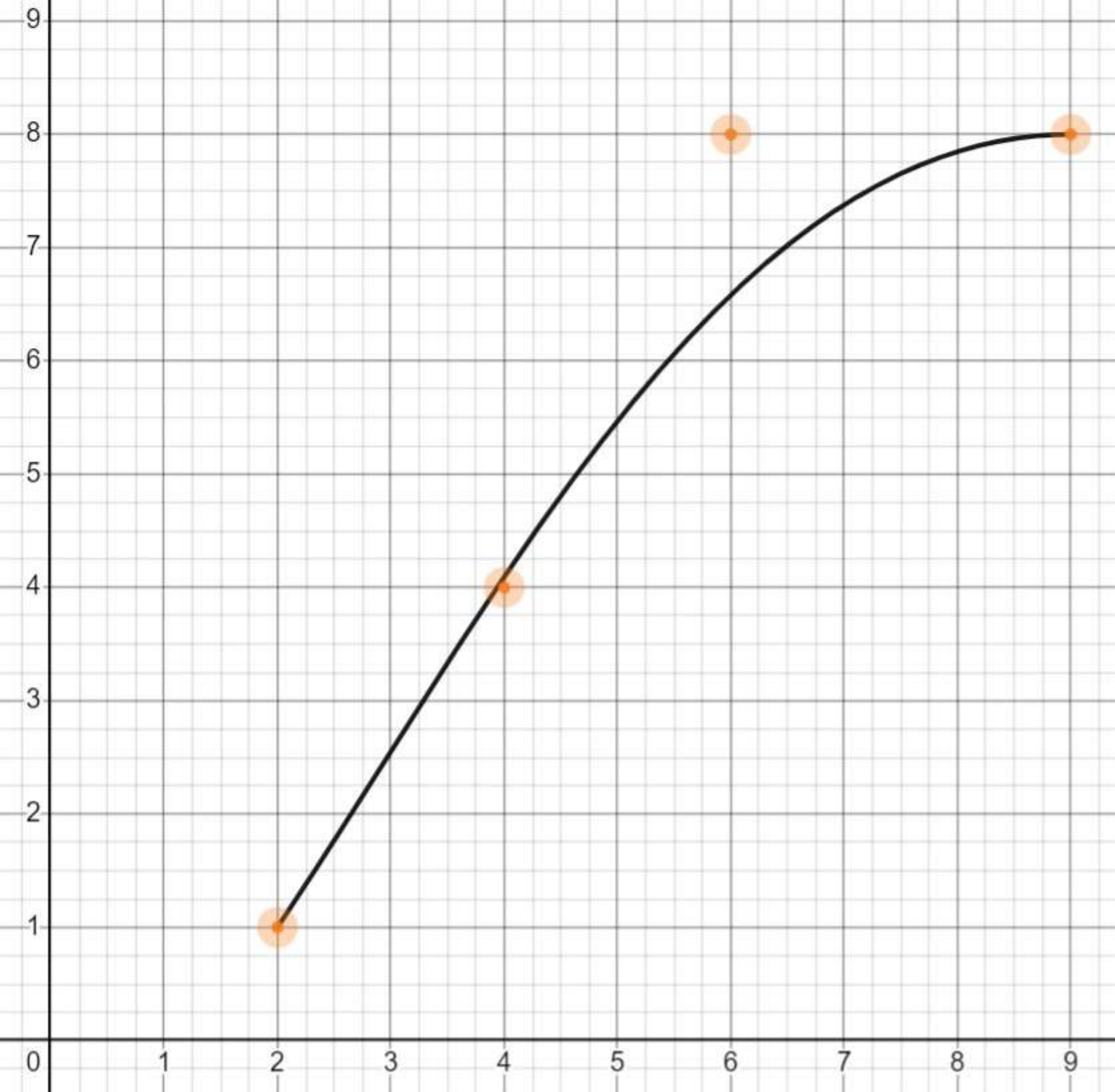


при поддержке desmos

$y = -9x^2 + 21x + 1$




3
2
1
0
1
2
3
4
5
6


9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9