



Лабораторная работа №2:
«Оценка погрешности на основании проведения косвенных измерений»
по дисциплине: Метрология, стандартизация и сертификация

Выполнил: Неграш Андрей, Р34301
Преподаватель: Рассадина Анна Александровна

Санкт-Петербург
2023

1. Протокол измерений

Протокол наблюдений
к лабораторной работе №2
"Оценка погрешности на основании
проведения косвенных измерений"

№ опыта	$l_1, \text{мм}$	$l_2, \text{мм}$	$l_3, \text{мм}$	$m, \text{г}$
1	34,8	30,0	8,9	71,96
2	34,9	30,0	8,9	72,02
3	34,8	30,0	9,0	72,00
4	34,8	30,0	8,9	71,98
5	34,8	30,1	9,0	72,02
6	34,9	30,0	8,9	72,02
7	34,8	30,0	8,9	72,00

$$\Delta_{\text{ш}} = 0,1 \text{ мм}$$

$$\Delta_{\text{в}} = 0,02 \text{ г}$$

Выполнил: Неграш А., РЗ4301

Неграш

2. Цель

Провести прямые измерения длины, ширины и толщины выданного эталона при помощи штангенциркуля, а также массы при помощи весов, и согласно полученным результатам провести оценку погрешности вычисления плотности материала выданного эталона.

3. Обработка результатов измерений

Для удобства проведения дальнейших вычислений перепишем таблицу с измерениями:

№ опыта	l_1 , мм	l_2 , мм	l_3 , мм	m , г
1	34,80	30,00	8,90	71,96
2	34,90	30,00	8,90	72,02
3	34,80	30,00	9,00	72,00
4	34,80	30,00	8,90	71,98
5	34,80	30,10	9,00	72,02
6	34,90	30,00	8,90	72,02
7	34,80	30,00	8,90	72,00

Поскольку результаты наблюдений не образуют соответствующих выборок, а значение результирующей функции образуют выборку, так как мы высчитываем плотность материала эталона, для обработки результата мы будем использовать выборочный метод.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l_1 * l_2 * l_3}$$

$$\Phi = \Phi(m, l_1, l_2, l_3)$$

3.1. Учёт систематических погрешностей

Записанная на измерительных приборах (штангенциркуле и весах) точность измерений составляет соответственно:

$$\Delta_{\text{ш}} = 0,1 \text{ мм}$$

$$\Delta_{\text{в}} = 0,02 \text{ г}$$

Приборная систематическая погрешность вычисляется по формуле:

$$\theta = \frac{\Delta}{2}$$

Тогда для используемого штангенциркуля систематическая погрешность составляет:

$$\theta_{\text{ш}} = \frac{0,1}{2} = 0,05 \text{ мм}$$

Для используемых весов систематическая погрешность составляет:

$$\theta_{\text{в}} = \frac{0,02}{2} = 0,01 \text{ г}$$

3.2. Определение среднего для прямых измерений

Вычисление среднего арифметического значения исправленных результатов измерений происходит по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Поскольку во всех результатах измерений содержится постоянная систематическая погрешность, обусловленная использованием одного и того же измерительного прибора, для вычисления среднего значения мы её исключим, и таким образом исправленные результаты измерений в данном случае будут равны неисправленным.

Вычислим среднее арифметическое значение с помощью указанной выше формулы для l_1 , l_2 , l_3 и m :

$$\bar{l}_1 = \frac{1}{7} * (34,80 + 34,90 + 34,80 + 34,80 + 34,80 + 34,90 + 34,80) = \frac{243,80}{7} = 34,83 \text{ мм}$$

$$\bar{l}_2 = \frac{1}{7} * (30,00 + 30,00 + 30,00 + 30,00 + 30,10 + 30,00 + 30,00) = \frac{210,10}{7} = 30,01 \text{ мм}$$

$$\bar{l}_3 = \frac{1}{7} * (8,90 + 8,90 + 9,00 + 8,90 + 9,00 + 8,90 + 8,90) = \frac{62,50}{7} = 8,93 \text{ мм}$$

$$\bar{m} = \frac{1}{7} * (71,96 + 72,02 + 72,00 + 71,98 + 72,02 + 72,02 + 72,00) = \frac{504}{7} = 72,00 \text{ г}$$

3.3. Вычисление полной абсолютной погрешности прямых измерений

Среднее квадратическое отклонение S группы, которая содержит n результатов измерений, вычисляется по формуле:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Вычислим среднее квадратическое отклонение для наших измерений:

$$\begin{aligned} S_{l_1} &= \sqrt{\frac{1}{7-1} * (5 * (34,80 - 34,83)^2 + 2 * (34,90 - 34,83)^2)} = \sqrt{\frac{1}{6} * (5 * 0,03 + 2 * 0,07)} \\ &= \sqrt{\frac{0,02}{6}} = \sqrt{0,0033} = 0,05 \text{ мм} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{l_2} &= \sqrt{\frac{1}{7-1} * (6 * (30,00 - 30,01)^2 + (30,10 - 30,01)^2)} = \sqrt{\frac{1}{6} * (6 * 0,01 + 0,11)} \\ &= \sqrt{\frac{0,12}{6}} = \sqrt{0,0017} = 0,04 \text{ мм} \end{aligned}$$

$$S_{l_3} = \sqrt{\frac{1}{7-1} * (5 * (8,90 - 8,93)^2 + 2 * (9,00 - 8,93)^2)} = \sqrt{\frac{1}{6} * (5 * 0,03 + 2 * 0,07)}$$

$$= \sqrt{\frac{0,02}{6}} = \sqrt{0,0033} = 0,05 \text{ мм}$$

$$S_m = \sqrt{\frac{1}{7-1} * (3 * (72,02 - 72,00)^2 + (71,96 - 72,00)^2 + (71,98 - 72,00)^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6} * (3 * 0,0004 + 0,0016 + 0,0004)} = \sqrt{\frac{0,0032}{6}} = \sqrt{0,0005} = 0,02 \text{ г}$$

Далее вычислим среднеквадратическое отклонение среднего по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Для наших прямых измерений:

$$S_{\bar{l}_1} = \frac{0,05}{\sqrt{7}} = \frac{0,05}{2,65} = 0,02 \text{ мм}$$

$$S_{\bar{l}_2} = \frac{0,04}{\sqrt{7}} = \frac{0,04}{2,65} = 0,01 \text{ мм}$$

$$S_{\bar{l}_3} = \frac{0,05}{\sqrt{7}} = \frac{0,05}{2,65} = 0,02 \text{ мм}$$

$$S_{\bar{m}} = \frac{0,02}{\sqrt{7}} = \frac{0,02}{2,65} = 0,01 \text{ г}$$

Затем определим доверительные границы случайной погрешности оценки измеряемых прямых величин по формуле:

$$\varepsilon = t * S_{\bar{x}}$$

Выберем коэффициент Стьюдента по таблице, где доверительная вероятность $P=95\%$. По таблице $t \approx 2,37$. Тогда доверительные границы случайности для наших вычислений:

$$\varepsilon_{l_1} = 2,37 * 0,02 = 0,04 \text{ мм}$$

$$\varepsilon_{l_2} = 2,37 * 0,01 = 0,03 \text{ мм}$$

$$\varepsilon_{l_3} = 2,37 * 0,02 = 0,04 \text{ мм}$$

$$\varepsilon_m = 2,37 * 0,01 = 0,02 \text{ г}$$

Теперь вычислим полную абсолютную погрешность прямых измерений по формуле:

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{(\varepsilon)^2 + (\theta)^2}$$

Для наших измерений:

$$\Delta \bar{l}_1 = \sqrt{(0,04)^2 + (0,05)^2} = 0,07$$

$$\Delta \bar{l}_2 = \sqrt{(0,03)^2 + (0,05)^2} = 0,06$$

$$\Delta \bar{l}_3 = \sqrt{(0,04)^2 + (0,05)^2} = 0,07$$

$$\Delta \bar{m} = \sqrt{(0,02)^2 + (0,01)^2} = 0,02$$

3.4. Вычисление среднего значения плотности

Среднее значение плотности вычисляется по формуле:

$$\bar{\rho}' = \frac{\bar{m}}{\bar{l}_1 * \bar{l}_2 * \bar{l}_3}$$

Для наших данных:

$$\bar{\rho}' = \frac{72,00}{34,80 * 30,00 * 8,90} = 0,01 \frac{\text{г}}{\text{мм}^3}$$

В системе СИ необходимо использовать размерность $\text{кг}/\text{м}^3$, так что умножим результат на 10^6 для получения корректной размерности:

$$\bar{\rho}' = 7714,13 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

3.5. Нахождение случайной ошибки косвенных измерений

Для нахождения случайной ошибки косвенных измерений воспользуемся формулой:

$$\Delta \rho = \bar{\rho} * \sqrt{\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} * \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_1} * \Delta l_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_2} * \Delta l_2\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_3} * \Delta l_3\right)^2}$$

Необходимо вычислить натуральный логарифм для нашей функции:

$$\ln \rho = \ln m - \ln l_1 - \ln l_2 - \ln l_3$$

Тогда:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_1} = \frac{1}{l_1}$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_2} = \frac{1}{l_2}$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_3} = \frac{1}{l_3}$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} = \frac{1}{m}$$

Отсюда формула нахождения случайной ошибки косвенных измерений приобретает следующий вид:

$$\Delta \rho = \bar{\rho} * \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_2}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_3}{l_3}\right)^2}$$

Подставим соответствующие значения и умножим на 10^6 для получения значения в кг/м^3 :

$$\Delta\rho = 0,010 * \sqrt{\left(\frac{0,02}{72,00}\right)^2 + \left(\frac{0,07}{34,80}\right)^2 + \left(\frac{0,06}{30,0}\right)^2 + \left(\frac{0,07}{8,90}\right)^2} * 10^6 = 0,010 * 0,008 * 10^6 \\ = 61,23 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

3.6. Вычисление систематической ошибки

Для нахождения случайной ошибки косвенных измерений воспользуемся формулой:

$$\rho' = \bar{\rho} * \left(\left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial m} * \theta m \right| + \left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial l_1} * \theta l_1 \right| + \left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial l_2} * \theta l_2 \right| + \left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial l_3} * \theta l_3 \right| \right)$$

Для наших вычислений:

$$\rho' = \bar{\rho} * \left(\left| \frac{\theta_{\text{в}}}{m} \right| + \left| \frac{\theta_{\text{ш}}}{l_1} \right| + \left| \frac{\theta_{\text{ш}}}{l_2} \right| + \left| \frac{\theta_{\text{ш}}}{l_3} \right| \right)$$

Подставляем значения и также умножаем на 10^6 для получения значения в кг/м^3 :

$$\rho' = 0,01 * \left(\left| \frac{0,01}{72,00} \right| + \left| \frac{0,05}{34,80} \right| + \left| \frac{0,05}{30,00} \right| + \left| \frac{0,05}{8,90} \right| \right) * 10^6 = 68,20 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

3.7. Запись окончательного результата

Для записи окончательного результата нам потребуется учесть полную абсолютную погрешность прямого измерения согласно формуле:

$$\Delta\bar{\rho} = \sqrt{(\Delta\rho)^2 + (\rho')^2}$$

Тогда для наших значений:

$$\Delta\bar{\rho} = \sqrt{(61,23)^2 + (68,20)^2} = \sqrt{8400,35} = 91,65 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Также вычислим относительную погрешность по формуле:

$$\delta\rho = \frac{\Delta\bar{\rho}}{\rho'} * 100\%$$

Для вычисленных в процессе лабораторной работы значений:

$$\delta\rho = \frac{91,65}{7714,13} * 100\% = 1,19\%$$

После всех проведённых вычислений мы можем записать окончательный результат косвенного измерения:

$$\rho = (7714,13 \pm 91,65) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

4. Вывод

При обработке результатов косвенных измерений необходимо учитывать случайную и систематическую погрешность. Систематическая составляющая погрешности определялась через погрешность измерительного прибора. Случайная составляющая погрешности определялась вероятностными методами. В результате вычислений относительная погрешность составила 1,19%, что говорит о том, что результаты измерений являются высокоточными.