杭州电子科技大学信息工程学院学生考试卷（A）卷

参考答案及评分标准

课程名称	高等数学（乙）	考试日期	06 年 1 月 13 日	成 绩	
考生姓名		任课教师姓名		作业序号	
学号（8 位）		班级		专业	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、填空题（每小题 3 分，本题共 18 分）：

1．[3 分]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{5x}=\underline{\frac{2}{5}}\text{；}$$

2．[3 分]

设 $y=e^{4x+3}$，则 $dy=\underline{4e^{4x+3}dx}$

3．[3 分]

设总成本函数为 $C(x)=4x+60$ ，其中 x 为产量，则平均成本变化率为

$\underline{-\frac{60}{x^2}}$；

4．[3 分]

$$\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\underline{\ln(e^x+1)+C}\text{；}$$

5．[3 分]

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx=\underline{\ 0\qquad}\text{；}$$

6．[3 分]

曲线 $y=x$， $y=2x$， $x=2$ 所围成平面图形的面积为 $\underline{\ 2\qquad\qquad}$.

二、试解下列各题（每小题 5 分，本题共 20 分）：

1．[5 分] 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

解一 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$ ....4 分

＝1 .... 5 分

解二 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}}{1}$ ....4 分

＝1 ....5 分

2．[5 分] 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n+2})^n$

解一：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n+2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{2}{n})^n}$ ....2 分

$=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n}{\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^2}$ ....4 分

$=\dfrac{e}{e^2}=\dfrac{1}{e}$ ....5 分

解二：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n+2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\frac{n+2}{n+1})^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^n}$ ....3 分

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}$ ....4 分

$=\dfrac{1}{e}$ ……………………………………………………5 分

3．[5 分] 设 $y=x^3\arcsin x^2$，求 y'

解 $y'=3x^2\arcsin x^2+\dfrac{2x^4}{\sqrt{1-x^4}}$ ……………………………………………………5 分

4.[5 分]计算定积分 $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$

解 $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{2x^2}{1+x^2}dx$ ……………………………………2 分

$=\ln 2-2\int_0^1(1-\dfrac{1}{1+x^2})dx$ ……………………………………………………3 分

$=\ln 2-2+2\arctan x\Big|_0^1$ ……………………………………………………4 分

$=\ln 2+\dfrac{\pi}{2}-2$ ……………………………………………………5 分

三、试解下列各题（每小题 5 分，本题共 20 分）：

1．[5 分] 求 $f(x)=x^2e^{-x}$ 的单调区间.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

令 $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)=0$ ……………………………2 分

得驻点 $x=0,\ x=2$，它们将定义域分成以下三个区间：

$$(-\infty,0),\quad (0,2),\quad (2,+\infty),$$

列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	—
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

由表可知 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 与 $(2,+\infty)$ 内严格减少 ……………………………4 分

在区间 $(0,2)$ 内严格增加。 ……………………………………………5 分

2．[5 分] 求不定积分$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

解 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}}dx$ ……………………………………1 分

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ …………………………………………………………3 分

$= \arcsin x + C$ ……………………………………5 分

3．[5 分] 求定积分$\int_1^e x(\ln x)^2 dx$

解 $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$

$= \int_1^e (\ln x)^2 d(\frac{x^2}{2})$ ……………………………………………………2 分

$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 \Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x \ln x dx$

$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \ln x d(\frac{x^2}{2})$ ……………………………………………………3 分

$= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{2}\ln x \Big|_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e x dx$ ……………………………………………4 分

$= \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$ ……………………………………………………………5 分

[5 分]4.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \sin t^3 dt$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \sin t^3 dt = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4} \left(\frac{0}{0}\right)$ ……………………………………2 分

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{4x^3}$ ……………………………………………4 分

$= \frac{1}{4}$ ………………………………………………5 分

四、试解下列各题（每小题 5 分，本题共 10 分）：

1．[5 分] 求曲线 $y = \ln x$ 及直线 $x = 2$， $x = 4$， x 轴所围成图形的面积。

y

解 如图，所求面积

$S=\int_2^4 \ln x dx$

$=x\ln x\Big|_2^4-\int_2^4 dx$ ....3 分

$=4\ln 4-2\ln 2-2$ ....4 分

$=2(3\ln 2-1)$ ....5 分

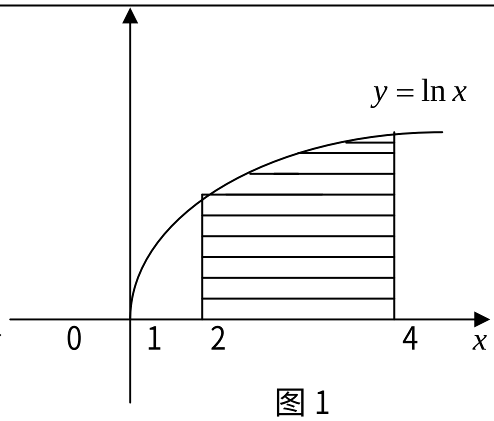


图 1

2．[5 分] 求曲线 $y=e^x$ 及直线 $x=1$ 与 $x=0$, $y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解 图 2 中图形绕 x 轴一周所得立体

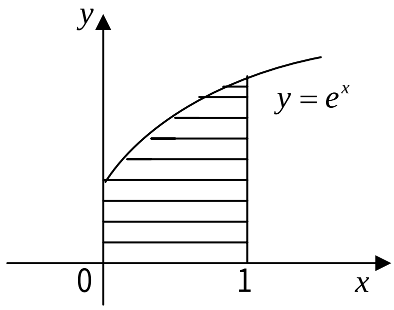
体积

$V=\pi\int_0^1 (e^x)^2 dx$ ....2 分

$=\dfrac{\pi}{2}\int_0^1 e^{2x}d(2x)$ ....3 分

$=\dfrac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1$ ....4 分

$=\dfrac{\pi}{2}(e^2-1)$ ....5 分



（图 2）

五、试解下列各题（每小题 5 分，本题共 10 分）：

1．[5 分] 设函数 $f(x)=\int_0^1 \sin(x-t)dt$ 求 $f'(x)$。

解 设 $u=x-t$, $dt=-du$， ....1 分

t 从 0 变到 1 时，u 从 x 变到 $x-1$。于是

$f(x)=\int_0^1 \sin(x-t)dt$

$=-\int_x^{x-1}\sin udu=\int_{x-1}^x \sin udu$ ....3 分

利用上限与下限函数的求导公式，

$f'(x)=\sin x-\sin(x-1)$ ....5 分

2．[5 分] 求 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

解 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b\dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ ....1 分

在$\int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$中 设$t=\sqrt{x-1}$，则$x=t^2+1,\quad dx=2tdt$

$$\int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^{\sqrt{b-1}} \frac{2tdt}{(1+t^2)t}$$

$=2\int_1^{\sqrt{b-1}} \frac{dt}{1+t^2}$ ……………………………………2 分

$=2\arctan t\Big|_1^{\sqrt{b-1}}$ ………………………………………3 分

$=2(\arctan\sqrt{b-1}-\frac{\pi}{4})$ …………………………………4 分

所以 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\frac{\pi}{2}$ ……………………………5 分

六、[5 分]

已知$f(x)=2x-\int_0^1 f(x)dx$，求函数$f(x)$。

解 设$\int_0^1 f(x)dx=k$ ……………………………………………………………1 分

对等式求定积分并利用定积分的性质得

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 2xdx-k\int_0^1 dx$ ………………………………………2 分

于是有$k=x^2\Big|_0^1-k$ ………………………………………3 分

所以$2k=1$

$k=\frac{1}{2}$ …………………………………………………4 分

$f(x)=2x-\frac{1}{2}$ ……………………………………………………5 分

七、[5 分]　设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$。

证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$使 $2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$。

证明 设$F(x)=e^{x^2}f(x)$， …………………………………………2 分

已知$f(x)$在$[0,1]$上连续，在(0，1)内可导且$f(0)=f(1)=0$，所以$F(x)$在$[0,1]$上连续，在（0，1）内可导。$F(0)=f(0)=0$

$F(1)=ef(1)=0$ ……………………………3 分

所以$F(x)$在区间$[0,1]$上满足罗尔定理条件。于是存在$\xi\in(0,1)$使$F'(\xi)=0$。而

$F'(x)=2xe^{x^2}f(x)+e^{x^2}f'(x)$

$F'(\xi)=2\xi e^{\xi^2}f(\xi)+e^{\xi^2}f(\xi)=0$ ……………………………6 分

因为$e^{\xi^2}\neq 0$，所以 $2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$ ……………………………5 分

八、[本题 5 分] 计算定积分$\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

解一 $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^e(1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(1+\ln x)$ ……………………………2 分

$=2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^e$ ……………………………4 分

$=2(\sqrt{2}-1)$ ……………………………5 分

解二 设 $t=\sqrt{1+\ln x}$，$\ln x=t^2-1$，$x=e^{t^2-1}$，$dx=2te^{t^2-1}dt$ ……………2 分

$\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2te^{t^2-1}}{te^{t^2-1}}dt$ ……………………………3 分

$=2\int_1^{\sqrt{2}}dt$ ……………………………4 分

$=2(\sqrt{2}-1)$ ……………………………5 分

九、[本题 7 分]

某产品的收益函数为$R(x)=45x-x^2$（万元/百台），边际成本函数为$C'(x)=5$（万元/百台），其中x（百台）为产量，且当$x=0$时，总成本为 10 万元；求产量x为多少时，利润最大？并求出最大利润.

解 总成本$C(x)=C(0)+\int_0^x 5dt=10+5x$ ……………………………1 分

总收益 $R(x)=45x-x^2$

总利润$L(x)=R(x)-C(x)=40x-x^2-10$ ……………………………3 分

令$L'(x)=40-2x=0$ 得唯一驻点$x=20$， ……………………………4 分

又$L''(20)=-2<0$，所以$L(x)$在$x=20$取极大值。

该实际问题又存在最大值，
所以当产量为 20（百台）时，利润最大。 ……………………………5 分

最大利润 $L(20)=800-400-10=390$ （万元）。 ……………………..……..…7 分