

杭州电子科技大学学生考试卷期末（A）卷

考试课程	概率论与数理统计				考试日期	2009 年 01 月 05 日			成绩	
课程号	A0702140		教师号		任课教师姓名					
考生姓名	参考答案	学号（8 位）			年 级		专业			
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	

一、选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设随机事件 A, B 满足 $P(B) = P(B|A)$ ，则下列结论中正确的是 (A)

- A. $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$ B. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 C. A, B 互不相容 D. $P(A) = P(B|A)$

2. 设 X 是 $[0, 1]$ 上的连续型随机变量，并且 $P\{X \leq 0.3\} = 0.8$ 。记 $Y = 1 - X$ ，若要使

$P\{Y \leq k\} = 0.2$ ，则常数 $k =$ (B)。

- A. 0.2 B. 0.7
 C. 0.8 D. 0.3

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < +\infty$ ，则 $Y = 2X$ 的概率密度为

(B)

- A. $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$ B. $\frac{2}{\pi(4+y^2)}$
 C. $\frac{1}{\pi(1+\frac{y^2}{4})}$ D. $\frac{1}{\pi(1+4y^2)}$

4. 设 (X, Y) 的联合分布律如下表所示：

X \ Y	0	1	2
-1	1/15	t	1/5
1	s	1/5	3/10

则 $(s, t) = (C)$ 时, X 与 Y 相互独立.

- A. $(\frac{1}{5}, \frac{1}{15})$; B. $(\frac{1}{15}, \frac{1}{5})$
C. $(\frac{1}{10}, \frac{2}{15})$; D. $(\frac{2}{15}, \frac{1}{10})$

5. X_1, X_2, \dots, X_8 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{10} 分别来自两个正态总体 $N(-1, 2^2)$ 和 $N(2, 5^2)$ 的样本且

相互独立, S_1^2 和 S_2^2 分别为两个样本的样本方差, 则服从 $F(7, 9)$ 的统计量是
(D).

- A. $\frac{2S_1^2}{5S_2^2}$; B. $\frac{5S_1^2}{2S_2^2}$
C. $\frac{4S_2^2}{25S_1^2}$; D. $\frac{25S_1^2}{4S_2^2}$

6. 在假设检验中, 记 H_0 为原假设, H_1 为备择假设, 则显著性水平 α 是指 (C).

- A. $P\{\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 为假}\} = \alpha$; B. $P\{\text{接受 } H_1 | H_1 \text{ 为假}\} = \alpha$
C. $P\{\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为真}\} = \alpha$; D. $P\{\text{拒绝 } H_1 | H_1 \text{ 为真}\} = \alpha$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只, 这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是 $\frac{13}{21}$.
2. 设 $P(A \cup B) = 0.8$, $P(B) = 0.4$, 则 $P(A|\bar{B}) = \frac{2}{3}$.
3. 某人投篮, 投中的概率为 0.6, 现投了 3 次, 则此人投中 2 次的概率为 0.432.
4. 设 X 与 Y 相互独立且都服从 $N(0, 1)$, 则 $D(2X - 3Y + 1) = 13$.
5. 设随机变量 $X \sim U(-1, 2)$, 则由切比雪夫不等式 $P\left\{\left|X - \frac{1}{2}\right| \leq 1\right\} \geq \frac{1}{4}$.

三、(本题 7 分) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$,

又已知 $P\{X < \frac{1}{3}\} = P\{X > \frac{1}{3}\}$, (1) 求常数 a 和 b ; (2) 求 X 的分布函数 $F(x)$

解: (1) 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ (1 分)

$$\text{所以 } \int_0^1 (ax+b) dx = 1$$

$$\text{又 } P\{X < \frac{1}{3}\} = P\{X > \frac{1}{3}\} \text{ 知 } \int_0^{\frac{1}{3}} (ax+b) dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{得 } \frac{a}{2} + b = 1, \quad \frac{a}{18} + \frac{b}{3} = \frac{1}{2} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } a = -\frac{3}{2}, b = \frac{7}{4} \quad (4 \text{ 分})$$

(2) X 的分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ (5 分)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (7 \text{ 分})$$

四、(本题 15 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} Cxy^2, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 求常数 C ;

(2) 求关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度; 并问 X 与 Y 是否相互独立?

(3) 求概率 $P\{X+Y < 1\}$.

解: (1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 1$ (2 分)

$$\text{即 } \int_0^1 dx \int_0^x Cxy^2 dy = 1, \text{ 得 } C = 15 \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 关于 X 的边缘概率密度

$$\because f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (5 \text{ 分})$$

$$= \begin{cases} \int_0^x 15xy^2 dy, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x^4, 0 < x < 1 \\ 0, \text{其它} \end{cases} \quad (7 \text{ 分})$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$\begin{aligned} \because f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \int_y^1 15xy^2 dx, 0 < y < 1 \\ 0, \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{15}{2} y^2 (1 - y^2), 0 < y < 1 \\ 0, \text{其它} \end{cases} \end{aligned} \quad (10 \text{ 分})$$

显然当 $0 < y < x < 1$ 时 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

所以 X 与 Y 不相互独立. (12 分)

$$(2) \quad P\{X + Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{1-y} 15xy^2 dx \quad (13 \text{ 分})$$

$$(\text{或} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^x 15xy^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{1-x} 15xy^2 dy)$$

$$= \frac{5}{64} \quad (15 \text{ 分})$$

五. (本题 8 分) 设随机变量 (X, Y) 的概率分布律为:

$\begin{array}{c} \diagdown \\ Y \quad X \end{array}$	0	1	2
-1	0.3	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0

求: (1) 关于 $Z = XY$ 的分布律;

(2) 协方差 $Cov(X, Y)$.

解: (1) 因 (X, Y) 的取值为 $(0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1)$

故 $Z = X \cdot Y$ 的取值为: 0 0 -1 1 -2 2

所以 $Z = X \cdot Y$ 的分布律为

$Z = X \cdot Y$	-2	-1	0	1
P	0.2	0.1	0.4	0.3

(3 分)

$$(2) \quad E(XY) = -2 \times 0.2 + (-1) \times 0.1 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 = -0.2 \quad (4 \text{ 分})$$

$$E(X) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 = 0.8 \quad (5 \text{ 分})$$

$$E(Y) = -1 \times 0.6 + 1 \times 0.4 = -0.2 \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{故 } Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0.04 \quad (8 \text{ 分})$$

六. (本题 6 分) 设各零件的重量都是随机变量, 它们相互独立, 且服从相同的分布, 其数学期望为 0.5kg, 均方差为 0.1kg, 问 5000 只零件的总重量超过 2510kg 的概率约为多少? (结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

解: 记 $X_i (i=1, 2, \dots, 5000)$ 为第 i 只零件的重量, 由题意 $E(X_i) = 0.5$, $D(X_i) = 0.1^2$

$$\text{所求概率 } P\left\{\sum_{i=1}^{5000} X_i > 2510\right\} = 1 - P\left\{\sum_{i=1}^{5000} X_i \leq 2510\right\} \quad (1 \text{ 分})$$

$$= 1 - P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{5000} X_i - 5000 \cdot 0.5}{\sqrt{5000 \cdot 0.1}} \leq \frac{2510 - 5000 \cdot 0.5}{\sqrt{5000 \cdot 0.1}}\right\} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\approx 1 - \Phi(\sqrt{2}) \quad (6 \text{ 分})$$

七. (本题 6 分) 设总体 X 具有概率密度 $f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 其中 $\theta > -1$ 是

未知参数. 又 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的一个样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为样本值. 试求未知参数 θ 的最大似然估计量.

解: 似然函数 $L(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$ (1 分)

$$= (\theta+1)^n \prod_{i=1}^n x_i^\theta$$
 (2 分)

$$\ln L(x_1, \dots, x_n) = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$
 (4 分)

得 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$

故 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} - 1$ (6 分)

八. (本题 5 分) 设某种清漆的干燥时间服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现随机地抽取 9 个样品, 测得干燥时间的均值 $\bar{x} = 6$ (小时), 样本均方差 $s = 0.6$, σ^2 为未知, 求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间. ($t_{0.025}(8) = 2.3060$, $t_{0.025}(9) = 2.2622$, 精确到第二位小数).

解: 这里 $\alpha = 0.05$, $n = 9$, 故 μ 的置信水平为 95% 的置信区间

为: $(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}})$ (3 分)

$$= (6 - 2.3060 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{9}}, 6 + 2.3060 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{9}})$$

$$= (5.54, 6.46)$$
 (5 分)

九. (本题 6 分) 某产品的一项质量指标 $X \sim N(\mu, 0.05^2)$, 现从一批产品中随机地抽取

5 件, 测得样本方差 $s^2 = 0.0078$, 问根据这一数据能否推断该批产品的方差较以往的有显著的变化? (取显著性水平 $\alpha = 0.05$)

$$(\chi_{0.025}^2(5) = 12.833, \chi_{0.975}^2(4) = 0.484, \chi_{0.95}^2(4) = 0.711, \chi_{0.975}^2(5) = 0.831$$

$$\chi_{0.025}^2(4) = 11.143)$$

解: 这里 $\alpha = 0.05, n = 5$

由题意需检验假设 $H_0: \sigma^2 = 0.05^2$, 备择假设 $H_1: \sigma^2 \neq 0.05^2$ (2 分)

则拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{因 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{4 \times 0.0078}{0.05^2} = 12.48 > 11.143$$

故在拒绝域内 (即拒绝 H_0), 可以认为该批产品的方差较以往的有显著的变化. (7 分)

十. (本题 4 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2, \quad \text{证: } D(T) = \frac{2}{n(n-1)}$$

证: 因 $D(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = E(T^2) - 0$ (1 分)

(因 $E(S^2) = 1, E(\bar{X}) = 0, D(\bar{X}) = 1/n$ 得 $E(T) = 0$)

$$\text{而 } E(T^2) = E[\bar{X}^4 - (2/n)\bar{X}^2 S^2 + S^4/n^2] \quad (*)$$

因 $\bar{X} \sim N(0, 1/n)$

得 $(\bar{X}\sqrt{n})^2 \sim \chi^2(1)$,

$$\text{故 } D(n\bar{X}^2) = 2 = n^2 D(\bar{X}^2) = n^2 [E(\bar{X}^4) - (E(\bar{X}^2))^2]$$

$$\text{得 } E(\bar{X}^4) = 3/n^2 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{又 } (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1) \quad (\sigma = 1)$$

$$\begin{aligned}
E((n-1)S^2) &= n-1, \\
D((n-1)S^2) &= 2(n-1) = (n-1)^2 \{E(S^4) - [E(S^2)]^2\} \\
\text{得 } ES^4 &= (n+1)/(n-1)
\end{aligned}
\tag{3 分}$$

$$\text{代入 (*) 式得 } D(T) = \frac{2}{n(n-1)}
\tag{4 分}$$