杭州电子科技大学学生考试卷期末（ B）卷

考试课程	概率论与数理统计		考试日期		2009 年 月 日		成 绩		
课程号	A0702140	教师号		任课教师姓名					
考生姓名	参考答案	学号（8 位）		年级		专业			
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

一、选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 18 分）

1．对于任意两事件 A,B，$P(A-B)$ 等于（ C ）

A． $P(A)-P(B)$ B． $P(A)-P(B)+P(AB)$

C． $P(A)-P(AB)$ D． $P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

2．设随机事件 A,B 满足 $P(B)=P(B|A)$，则下列结论中正确的是 （ A ）

A． $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$ B． $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

C． A,B 互不相容 D． $P(A)=P(B|A)$

3．随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$ $,x\in(-\infty,+\infty)$，则 $Y=$（ B ）$\sim N(0,1)$

A． $\dfrac{X+3}{2}$ B． $\dfrac{X+3}{\sqrt{2}}$

C． $\dfrac{X-3}{2}$ D． $\dfrac{X-3}{\sqrt{2}}$

4．设随机变量 X 和 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$，则随机变量

$Z=\max(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 等于 （ C ）

A． $\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$ B． $\dfrac{1}{2}[F_X(z)+F_Y(z)]$

C． $F_X(z)\cdot F_Y(z)$ D． $F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)\cdot F_Y(z)$

5．设 $X \sim N(0,16)$，$Y \sim N(0,9)$，X 和 Y 相互独立，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{16}$ 分别为 X 与 Y 的一个简单随机样本，则 $\dfrac{X_1^{\,2} + X_2^{\,2} + \cdots + X_9^{\,2}}{Y_1^2 + Y_2^{\,2} + \cdots + Y_{16}^{\,2}}$ 服从的分布为（　D　）

A．$F(16,16)$；　　B．$F(16,9)$

C．$F(9,9)$；　　D．$F(9,16)$

6．设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 已知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，则 μ 的置信度为 95%的置信区间为（　A　）.

A．$(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{0.025}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{0.025})$；　　B．$(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.025}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.025})$

C．$(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{0.05}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{0.05})$　　D．$(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.05}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.05})$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．将 3 个相同的球放入 4 个盒子中，假设每个盒子能容纳的球不限，而且各种不同的放法的出现是等可能的，则 3 个盒子各放一个球的概率是____ $\frac{3}{8}$ ______ .

2．设 $P(A \cup B) = 0.8$，$P(B) = 0.4$，则 $P(A|\overline{B}) =$ _____ $\frac{2}{3}$ _____ .

3．某人投篮，投中的概率为 0.8，现投了 3 次，则此人投中 2 次的概率为___ 0.384 __ .

4．设 X 与 Y 相互独立且都服从 $N(0,1)$，则 $D(2X - 5Y)$ = _____ 29 _____ .

5．设随机变量 $X \sim U(-1,2)$，则由切比雪夫不等式 $P\{\left|X - \frac{1}{2}\right| \le 1\} \ge$ ____ 1/4 ____.

三、（本题 5 分）将两信息分别编码为 A 和 B 传递出去，接收站收到时，A 被误作 B 的概率为 0.04，而 B 被误作 A 的概率为 0.03，信息 A 与信息 B 传递的频繁程度为 $2:1$，若接收站收到的信息是 A，求原发信息是 A 的概率.

解：由题意和贝叶斯公式易知：

所求概率为 $p = \dfrac{\frac{2}{3} \times (1 - 0.04)}{\frac{2}{3} \times (1 - 0.04) + \frac{1}{3} \times 0.03} = \dfrac{64}{65}$　　（5 分）

四.（本题 10 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} ax, 0 < x < 1 \\ 0 \quad, else \end{cases}$，

（1）求常数 a；

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$；

（3）方差 $D(X)$.

解：（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ （1 分）

所以 $\int_0^1 axdx = 1$

得 $\frac{a}{2} = 1$，即 $a = 2$ （3 分）

（2） X 的分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ （4 分）

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$ （6 分）

（3） $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{2}{3}$ （7 分）

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{2}$ （8 分）

$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{18}$ （10 分）

五.（本题 18 分）设随机变量 (X,Y) 的概率分布律为：

Y \ X	0	1	2
-1	0.3	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0

求：（1）关于 X, Y 的边缘分布律； 并问 X 与 Y 是否相互独立？

（2）相关系数 ρ_{XY}，并问 X 与 Y 是否相关？

（3）条件概率 $P\{X \ge 1 | Y = 1\}$.

解：（1）关于 X 的边缘分布律为

X	0	1	2
P	0.4	0.4	0.2

（2 分）

关于 Y 的边缘分布律为

Y	-1	1
P	0.6	0.4

（4 分）

因 $P(\{X=0,Y=-1\}\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=-1\}$

所以 X 与 Y 不相互独立. （6 分）

（2） $E(XY)=-2\times 0.2+(-1)\times 0.1+0\times 0.4+1\times 0.3=-0.2$

$E(X)=0\times 0.4+1\times 0.4+2\times 0.2=0.8$

$E(Y)=-1\times 0.6+1\times 0.4=-0.2$

得 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.04$ （10 分）

又 $E(X^2)=0^2\times 0.4+1^2\times 0.4+2^2\times 0.2=1.2$

$E(Y^2)=(-1)^2\times 0.6+1^2\times 0.4=1$

得 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.56$

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=0.96$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{\sqrt{10}}{4\sqrt{21}}$$ （15 分）

所以 X 与 Y 相关 （16 分）

（3）条件概率 $P\{X\geq 1|Y=1\}=\dfrac{P\{X\geq 1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}$

$$=\frac{P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=1\}}{P\{X=0\}}=\frac{0.3}{0.4}=\frac{3}{4}$$ （18 分）

六.（本题 6 分）某运输公司有 500 辆汽车参加保险，在一年里汽车出事故的概率为 0.006，参加保险的汽车每年交 800 元的保险费，若出事故由保险公司最多赔偿 50000 元，利用

中心极限定理计算：保险公司一年中赚钱不小于 200000 元的概率.

解：记 $X_i(i=1,2,\cdots,500)$ 为第 i 辆车获赔偿，

由题意 $E(X_i)=0.006$, $D(X_i)=0.006\times 0.994$

所求概率 $P\{50000\cdot\sum_{i-1}^{500}X_i<(500\times 800-200000)\}$ （1 分）

$$=P\{50000\cdot\sum_{i-1}^{500}X_i<(500\times 800-200000)\}$$

$$=P\{(\frac{\sum_{i=1}^{5000}X_i-500\cdot 0.006}{\sqrt{500\times 0.006\times 0.994}}<\frac{4-500\times 0.006}{\sqrt{500\times 0.006\times 0.994}}\}$$ （5 分）

$$\approx\Phi(\frac{1}{\sqrt{2.982}})$$ （6 分）

七．（本题 12 分）设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2a}e^{-\frac{|x|}{a}}, a>0,-\infty<x<+\infty$，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值. 试求 a 的最大似然估计量；并问所得的估计量是否为 a 的无偏估计.

解：似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$ （2 分）

$$=\frac{1}{2^n a^n}\prod_{i=1}^{n}e^{-\frac{|x_i|}{a}}$$ （4 分）

取对数 $\ln L(x_1,\cdots,x_n)=-n\ln 2-n\ln a-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

即 $\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{a}+\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$ （6 分 ）

得 $\hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n}$

故 a 的最大似然估计量 $\hat{a}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n}$ （8 分）

因 $E(\hat{a})=E(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n})=E(|x_1|)=E(X)$ （9 分）

而 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=2\int_{0}^{+\infty}\dfrac{1}{2a}xe^{-\frac{x}{a}}dx$ （10 分）

$=\dfrac{1}{a}[(-axe^{\frac{-x}{a}})_0^{+\infty}+a\int_0^{+\infty}e^{\frac{-x}{a}}dx]=a$ （11 分）

所以 $E(\hat{a})=a$，a 的估计量是 a 的无偏估计 （12 分）

八.（本题 6 分）某产品的一项质量指标 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现从一批产品中随机地抽取 5 件，测得样本方差 $s^2=0.0078$，求方差 σ^2 的置信水平为 95%的置信区间.

（$\chi^2_{0.025}(4)=11.143$，$\chi^2_{0.975}(5)=0.831$，$\chi^2_{0.025}(5)=12.833$，$\chi^2_{0.975}(4)=0.484$，$\chi^2_{0.95}(4)=0.711$）

解：这里 $\alpha=0.05$, $n=5$，故 σ^2 的置信水平为 95%的置信区间

为：$(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$ （3 分）

$=(\dfrac{4\times0.0078}{11.143},\dfrac{4\times0.0078}{0.484})$

$=(0.0028\,,\,0.0645)$ （6 分）

九.（本题 6 分）从某种试验物中取来 25 个样品 $X_1,X_2,\cdots,X_{25}$，测量其发热量. 若发热量服从正态分布，且测得样本均值与均方差为 $\overline{X}=1195$，$S=323$．试在显著性

水平 0.05 下确定发热量的期望值是否为 1210.

（$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$）

解：这里 $\alpha=0.05$，$n=25$

由题意需检验假设 $H_0:\mu=1210$，备择假设 $H_1:\mu\neq 1210$ （2 分）

则拒绝域为 $t=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$ （4 分）

$$因\ t=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{1195-1210}{323/3}\right|=0.139<t_{0.025}(24)=2.0639$$

故不在拒绝域内（即接受 H_0），可以认为发热量的期望值为 1210. （6 分）

十.（本题 4 分）设随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\,|\,0<x<2\,,\,0<y<1\}$ 上服从均匀分布，试证：随机变量 $Z=X\cdot Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln z)\,,\,0<z<2\\ 0\,,其它\end{cases}$.

证： 由题意：(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, 0<x<2,0<y<1 \\ 0, 其它\end{cases}$，

设Z的分布函数为$F_Z(z)$，

则$F_Z(z)=P\{XY\le z\}=\iint\limits_{xy\le z} f(x,y)dxdy$ （2 分）

易知：当$z\le 0$时$F_Z(z)=0$；当$z\ge 2$时$F_Z(z)=1$；

当$0<z<2$时，$F_Z(z)=P\{XY\le z\}=1-P\{XY>z\}$

$$=1-\int_z^2 dx\int_{\frac{z}{x}}^1 \frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}(1+\ln 2-\ln z)z$$

求导：得Z的概率密度为$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z), 0<z<2 \\ 0, 其它\end{cases}$ （4 分）