杭州电子科技大学学生考试卷（ 期终 ）卷（参考答案）

考试课程	概率论与数理统计		考试日期	2005 年 6 月		成绩	
课程号		教师号		任课教师姓名			
考生姓名		学号(8 位)		年级		专业	

一、填空题（每空格 3 分）

1．设事件 A,B,C 相互独立，$P(A)=P(B)=P(C)=0.2$ ，则 A,B,C 至少出现一个的概率为 0.488 。

2．10 个产品中有 4 个次品，从中任取两个，则取出的两个产品都是次品的概率= 2/15 。

3．设随机变量 X 服从二项分布 $b(10, 0.3)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(1,4)$，且 X ,Y 相互独立，则 $E(X-Y)=$ 2 ，$D(X-Y)=$ 6.1 。

二、（6%）已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B|A\cup\overline{B})$ 。

解：$\because P(B|A\cup\overline{B})=\dfrac{P(B\cap(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}$ ……..1 分

而 $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=1-P(\overline{A})+1-P(B)-P(A\overline{B})=0.8$ ……..2 分

$P(B\cap(A\cup\overline{B}))=P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2$ ………2 分

$\therefore P(B|A\cup\overline{B})=\dfrac{0.2}{0.8}=0.25$ ……..1 分

三、（6%）设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x<2\\ 0,其它\end{cases}$，求随机变量 $Y=2X+1$ 的概率密度。

解：因为 $y=2x+1$ 为单调增加的函数，且 $0<x<2$ 时 $1<y<5$

又 $h(y)=\dfrac{y-1}{2}, h'(y)=\dfrac{1}{2}$ …….2 分

所以随机变量 $Y=2X+1$ 的概率密度：

$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))|h'(y)|,1<y<5\\ 0,其它\end{cases}$ ……..2 分 $=\begin{cases}\dfrac{y-1}{8},1<y<5\\ 0,其它\end{cases}$ ………2 分

三、（16%）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} Cx, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & 其它 \end{cases}$

试求（1）常数C；（2）关于X和Y的边缘概率密度；（3）X与Y是否独立？（4）$E(XY)$。

解：（1）$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ …….2 分

$\therefore \int_0^1 dx\int_0^x cxydy=1$ ……..1 分

得$C=3$ ……..1 分

(2)$\because f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ …….2 分

$$=\begin{cases} \int_0^x 3xdy, 0<x<1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 3x^2, 0<x<1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$ …….1 分

$\because f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ …….2 分

$$=\begin{cases} \int_y^1 3xdx, 0<y<1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{3}{2}(1-y^2), 0<y<1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$ …..….1 分

（3）显然$0<x<y<1$时 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ ..…….1 分

所以X与Y不相互独立. ..…….1 分

（4）$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$ ..…….2 分

$$=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 3xdy=\int_0^1 3x^2\cdot\frac{x^2}{2}dx$$ ..…….1 分

$$=\frac{3}{10}$$ ..…….1 分

四、（18%）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}6x(\theta-x)/\theta^3,0\le x\le\theta\\ 0,else\end{cases}$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的样本，试求（1）参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；（2）问矩估计量 $\hat{\theta}$ 是否为无偏估计量；（3）求矩估计量 $\hat{\theta}$ 方差 $D(\hat{\theta})$。

解：（1）∵ $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\theta}x\cdot 6x(\theta-x)/\theta^3dx$ ……..2 分

$=\frac{6}{\theta^3}(\frac{\theta}{3}x^3-\frac{x^4}{4})\Big|_0^{\theta}=\frac{\theta}{2}$ ……..2 分

记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，∴ 令 $\frac{\theta}{2}=\overline{X}$ 得 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ ……..3 分

所以参数 θ 的矩估计量为：$\hat{\theta}=2\overline{X}$ ……..1 分

（2）∵ $E(\hat{\theta})=E(2\overline{X})=2E(\overline{X})=2\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$ ……..2 分

所以矩估计量 $\hat{\theta}$ 是无偏估计量。 ……..2 分

（3）∵ $D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=4\frac{D(X)}{n}$ ……..2 分

而 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\theta}x^2\cdot 6x(\theta-x)/\theta^3dx$

$=\frac{6}{\theta^3}(\frac{\theta^5}{4}-\frac{\theta^5}{5})=\frac{3}{10}\theta^2$ ……..2 分

所以：$D(X)=\frac{3}{10}\theta^2-\frac{1}{4}\theta^2=\frac{1}{20}\theta^2$

$D(\hat{\theta})=\frac{1}{5n}\theta^2$ ……..2 分

五、（8%）设两位化验员 A,B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各作 10 次测定，其测定值的样本方差依次为$S_A^2=0.5419,\ S_B^2=0.606$。设$\sigma_A^2,\sigma_B^2$分别为 A,B 所测定的测定值总体的方差，设总体均为正态的，设两样本独立，求方差比σ_A^2/σ_B^2的置信水平为 0.95 的置信区间。（$F_{0.025}(9,9)=4.03$，$F_{0.05}(9,9)=3.18$）

解：由题意：$n_1=n_2=10$，$1-\alpha=0.95$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$

方差比σ_A^2/σ_B^2的置信区间为：

$$\left(\frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{0.025}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{0.975}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$ ……5 分

即：（$\frac{0.5419}{0.606}\cdot\frac{1}{4.03},\frac{0.5419}{0.606}\cdot 4.03$）

即　$(0.222\ ,\ 3.601)$ ……3 分

六、（8%）某种电子元件的寿命X（以小时计）服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知，现测 25 只元件，计算得平均寿命$\overline{x}=231.5$，标准差为$s=82.6$，问是否有理由认为元件的平均寿命是 225（小时）（取$\alpha=0.05$）。（$t_{0.05}(24)=1.7109,t_{0.025}(24)=2.0639$）

解：由题意：$n=25$，

需检验假设：$H_0:\mu=\mu_0=225$，$H_1:\mu\neq 225$ ……2 分

则拒绝域为：$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ ……3 分

而$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{231.5-225}{82.6/5}\right|=0.3920<t_{0.025}(24)=2.0639$ ……2 分

所以：接受H_0，即有理由认为元件的平均寿命是 225（小时）。 ……1 分

七、（8%）某保险公司多年的统计资料表明：在索赔户中被盗索赔户占 20%。以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数，利用中心极限定理，求被盗索赔户不少于 14 户、且不多于 30 户的概率。（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）

解：由题意：$n=100$，$p=0.2$，

所以：$P\{14 \le X \le 30\} = P\{\frac{14-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{30-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}$ …….4 分

$$=\Phi(\frac{10}{4})-\Phi(\frac{-6}{4})=\Phi(2.5)-(1-\Phi(1.5))$$ …….4 分

$$=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1$$

八、（8%）某种型号的器件的寿命 X（以小时计）具有以下的概率密度：$f(x)=\begin{cases}\frac{1000}{x^2}, x>1000 \\ 0, 其它\end{cases}$，现有一大批此种器件（设各器件损坏与否相互独立），任取 5 只，问恰好有 3 只寿命大于 1500 小时的概率是多少？

解：寿命大于 1500 小时的概率 $p_1 = P\{X > 1500\} = \int_{1500}^{+\infty} f(x)dx$ ……...2 分

$$=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx = -\frac{1000}{x}\Big|_{1500}^{+\infty} = \frac{2}{3}$$ …….2 分

所以 5 只恰好有 3 只寿命大于 1500 小时的概率

$$p = C_5^3 p_1^3 (1-p_1)^2$$ ………2 分

$$= \frac{5\times 4}{1\times 2}\times(\frac{2}{3})^3\times(\frac{1}{3})^2 = \frac{80}{243}$$ ………2 分

注意：学号以 029***（或 029*****）（或 019*****）开头的学生可选做九、十题中的任一题，其他学生只能做九题，选错题做的一律不得分。**

九、（10%）设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, x>0 \\ 0, 其它\end{cases}，\quad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, y>0 \\ 0, 其它\end{cases}，\quad \alpha>0, \beta>0, \alpha\ne\beta$$

求：随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度。

解：解：$\because f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$ …….2 分

由题意 $x>0, z-x>0$ 时，$f_X(x)\ne 0$，$f_Y(z-x)\ne 0$

$\therefore z \le 0$ 时， $f_Z(z) = 0$ ……..2 分

$z > 0$ 时， $f_Z(z) = \int_0^z \alpha e^{-\alpha x} \beta e^{-\beta(z-x)} dx$ ……..2 分

$$= \alpha\beta e^{-\beta z} \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta-\alpha}\Big|_0^z = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z})$$ ..……4 分

所以 $Z = X + Y$ 的概率密度为： $f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}), z > 0 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$

十、（10%）设随机变量 (X, Y) 的概率分布律为：

Y \ X	-1	0	1
0	0	0．2	0．2
1	0．2	0．3	0．1

求：（1）关于 X 的边缘分布律；（2）关于 $Z = X + Y$ 的分布律；

（3）条件概率 $P\{Y \ge 1 | X = 0\}$；（4）求 $E(X)$。

解：（1）关于 X 的边缘分布律为

X	-1	0	1
P	0.2	0.5	0.3

………3 分

(2) $Z = X + Y$ 的取值为: -1 0 0 1 1 2 ………1 分

所以 $Z = X + Y$ 的分布律为

$Z = X + Y$	-1	0	1	2
P	0	0.4	0.5	0.1

…………2 分

(3) 条件概率 $P\{Y \ge 1 | X = 0\} = \dfrac{P\{X = 0, Y \ge 1\}}{P\{X = 0\}}$ …………1 分

$$= \frac{P\{X = 0, Y = 1\}}{P\{X = 0\}} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$ ………1 分

（4） $E(X) = (-1) \times 0.2 + 0 \times 0.5 + 1 \times 0.3 = 0.1$ ………2 分