一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设事件 A 的概率 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，且事件 A,B 互不相容，$\therefore P(AB)=0$

则 $P(A\cup B)=$ $\underline{P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)=0.7}$

2. 设事件 A 的概率 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，且事件 A,B 相互独立，$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

则 $P(A\bar{B})=$ $\underline{P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)\cdot P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)\cdot P(\bar{B})=0.28}$

3. 设事件 A 的概率 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，且 $P(A|B)=0.2$，$\therefore P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

则 $P(A\bar{B})=$ $\underline{P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)\cdot P(A|B)=0.4-0.3\times0.2=0.34}$

4. 某种型号的器件的寿命 X（以小时记）具有以下的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000\\ 0, & 其它\end{cases}$$

，现从一大批此种器件中任取 1 只，则此只器件的寿命小于 1500 小时的概率为 $\underline{P\{X<1500\}=\int_{1000}^{1500}\frac{1000}{x^2}dx=\frac{1}{3}}$

5. 若随机变量 $X\sim N(2,16)$，则 $P\{-2<X<6\}=$ $P\left\{\frac{-2-2}{4}<\frac{X-2}{4}<\frac{6-2}{4}\right\}$（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示，且 $x>0$） $=P\left\{-1<\frac{X-2}{4}<1\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1$

6. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 服从平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 上的均匀分布，则 (X,Y) 在 D 上的概率密度函数 $f(x,y)=$ $\underline{\frac{1}{\pi}}$．

二、试解下列各题（共 20 分）

1．（本题 10 分）某工厂有三台机器同时生产日光灯，已知第二台机器的产量是第一台机器产量的 4 倍，第三台机器的产量是第一台机器产量的 3 倍，而第一、二、三台机器产品次品率分布为 0.05, 0.04, 0.03，现在从三台机器生产的日光灯中任取一只，求

（1）这只日光灯是次品的概率；

（2）已知取出的日光灯为次品，此日光灯属于第一台机器生产的概率．

解：(1) 设 A_i $(i=1,2,3)$ 表示日光灯由第 i 台机器生产．

设 B 表示日光灯为次品．

由题可知：$P(A_1)=\frac{1}{8}$，$P(A_2)=\frac{4}{8}$，$P(A_3)=\frac{3}{8}$

$P(B|A_1)=0.05$，$P(B|A_2)=0.04$，$P(B|A_3)=0.03$

由全概率公式可知：

$$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$

$$=0.05\times\frac{1}{8}+0.04\times\frac{4}{8}+0.03\times\frac{3}{8}=\frac{3}{80}.$$

(2) 由贝叶斯公式：

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}\times0.05}{\frac{3}{80}}=\frac{1}{16}$$

2.（本题 10 分）将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，设随机变量 X 表示杯子中球的最大个数.（1）求 X 的分布律；(2) X 的分布函数 $F(x)$；

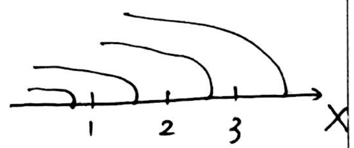
解：

X	1	2	3
P	$\frac{C_4^3A_3^3}{4^3}$	$\frac{C_3^2C_4^2A_2^2}{4^3}$	$\frac{C_4^1}{4^3}$

即：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{3}{8}, & 1\le x<2\\ \frac{15}{16}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$



三、（本题 10 分）设随机变量 X 的分布律为：

X	-3	0	1
P	0.3	0.6	0.1

求(1) $Y=X^2+1$ 的分布律； (2) 概率 $P\{X<1\}$.

解：(1) 将 X 的所有取值代入 $y=x^2+1$ 可知，Y 的所有可能取值为 1, 2, 10.

故 $P\{Y=1\}=P\{X=0\}=0.6$； $P\{Y=2\}=P\{X=1\}=0.1$

$P\{Y=10\}=P\{X=-3\}=0.3$.

即

Y	1	2	10
P	0.6	0.1	0.3

(2) $P\{X<1\}=P\{X=0\}+P\{X=-3\}=0.6+0.3=0.9$

或 $P\{X<1\}=1-P\{X\geq 1\}=1-P\{X=1\}=1-0.1=0.9$

四、（本题 12 分）设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -1<x<0 \\ k, & 0\leq x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

（1）求 k；（2）求 X 的分布函数 $F(x)$；（3）概率 $P\{|X|>\frac{1}{2}\}$.

解：(1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{0} x^2dx+\int_0^1 k\,dx=\frac{1}{3}+k$

得 $k=\frac{2}{3}$

(2). $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \int_{-1}^{x} t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{x}=\frac{x^3+1}{3}, & -1\leq x<0 \\ \int_{-1}^{0} t^2dt+\int_0^x \frac{2}{3}dt=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x, & 0\leq x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$$

(3). $P\{|X|>\frac{1}{2}\}=1-P\{|X|\leq\frac{1}{2}\}=1-P\{-\frac{1}{2}\leq X\leq\frac{1}{2}\}=1-[F(\frac{1}{2})-F(-\frac{1}{2})]$

$=\frac{5}{8}$

五、（本题 18 分）设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为：

X \ Y	0	1
0	0.2	0.1
1	0.5	0.2

（1）求关于 X 与关于 Y 的边缘分布律；

（2）求在条件 $X=1$ 下关于 Y 的条件分布律.

（3）求概率 $P\{X+Y\leq 1\}$；

（4）求条件概率 $P\{Y<1|X+Y=1\}$；

（5）证明：X 与 Y 不相互独立.

解：(1)

X	0	1
P	0.3	0.7

Y	0	1
P	0.7	0.3

(2) $P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{Y=0,X=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.5}{0.7}=\frac{5}{7}$

$P\{Y=1|X=1\}=\frac{P\{Y=1,X=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.2}{0.7}=\frac{2}{7}$

即

Y	0	1
$P\{Y=j\|X=1\}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

(3). $P\{X+Y\leq 1\}=1-P\{X+Y>1\}=1-P\{X=1,Y=1\}=1-0.2=0.8$

(4). $P\{Y<1|X+Y=1\}=\frac{P\{Y<1,X+Y=1\}}{P\{X+Y=1\}}=\frac{P\{Y=0,X=1\}}{P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}}=\frac{0.5}{0.6}=\frac{5}{6}$

(5). 由于 $P\{X=0,Y=0\}=0.2$ 而 $P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=0.3\times 0.7=0.21$

显然 $P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}$

故 X与Y是不相互独立的.

六、（本题 18 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & 0<x<1, 0<y<x^2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（1）求关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度；

（2）求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

（3）求概率 $P\{2Y<X\}$；

（4）求条件概率 $P\{Y<\frac{1}{8}\Big|X=\frac{1}{2}\}$．

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_0^{x^2} 3dy = 3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

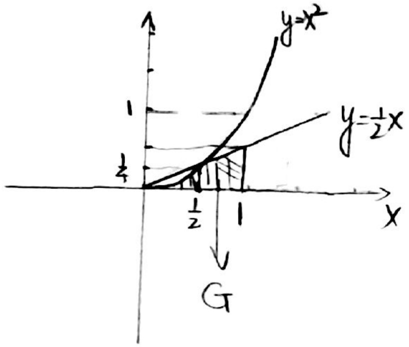
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\sqrt{y}}^{1} 3dx = 3(1-\sqrt{y}), & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(2). $$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{3}{3x^2}=\frac{1}{x^2}, & 0<y<x^2,\ 0<x<1.\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(3). $$P\{2Y<X\}=P\{(x,y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{x^2}3dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_0^{\frac{x}{2}}3dy$$

$$=\frac{11}{16}$$



(4) 由 (2) 可知

$$f_{Y|X}(y|x=\tfrac{1}{2})=\begin{cases}4, & 0<y<\frac{1}{4}\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

故条件概率 $P\{Y<\frac{1}{8}|X=\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{8}} f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{2})dy=\int_0^{\frac{1}{8}}4dy=\frac{1}{2}$

七、（本题 4 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{9}, & 0<x<3,\\ 0, & 其他\end{cases}$

而随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$，求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$．

解：由 Y 的表达式可知，Y 的取值范围为 $1\le Y\le 2$.

故当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$.

当 $y\ge 2$ 时 $F_Y(y)=1$.

当 $1\le y<2$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y=1\cup 1<Y\le y\}$$

$$=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le y\}$$

$$=\int_2^3\frac{x^2}{9}dx+\int_1^y\frac{x^2}{9}dx=\frac{y^3+18}{27}$$

综上有：

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \frac{y^3+18}{27}, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$