一、（10%）设事件 A,B,C 相互独立，$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，求 P（$A\cup B\cup C$）.

解　P（$A\cup B\cup C$）$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$ ———————— 5 分

$=1-(1-\dfrac{1}{4})^3$ ———————— 9 分

$=\dfrac{37}{64}$ ———————— 10 分

二、（15%）设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}3e^{-3(x-1)}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$

(1)(4%) 求 X 的分布函数 F（x）;

(2)(4%) 计算 $P(1.5\le X\le 2)$;

(3)(4%+3%) 求数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

解（1）$F(x)=\begin{cases}\int_1^x 3e^{-3(t-1)}dt, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$ ———————— 2 分

$=\begin{cases}1-e^{-3(x-1)}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$ ———————— 4 分

（2）$P(1.5\le X\le 2)=\int_{1.5}^{2}3e^{-3(x-1)}dx$ ———————— 2 分

$=-e^{-3(x-1)}\Big|_{1.5}^{2}$ ———————— 3 分

$=e^{-\frac{3}{2}}-e^{-3}$ ———————— 4 分

（3）$E(X)=\int_1^{+\infty}x\cdot 3e^{-3(x-1)}dx$ ———————— 2 分

$=-xe^{-3(x-1)}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}e^{-3(x-1)}dx$ ———————— 3 分

$=\dfrac{4}{3}$ ———————— 4 分

$E(X^2)=\int_1^{+\infty}x^2\cdot 3^{-3(x-1)}dx$ ———————— 1 分

$=\dfrac{17}{9}$ ———————— 2 分

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\dfrac{17}{9}-(\dfrac{4}{3})^2=\dfrac{1}{9}$ ———————— 3 分

三、(12%)设二维离散型随机变量（X，Y）的联合分布律如下

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.05	0.25
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0

(1) (6%)求 X 的边缘分布律;

(2) (6%)计算 $E[(2X-3Y)^2]$.

解 (1) X 的分布律为

X	0	1	2
P	0.4	0.3	0.3

———————— 6 分

(2) $E[(2X-3Y)^2]=E(4X^2+9Y^2-12XY)$

$=4E(X^2)+9E(Y^2)-12E(XY)$ ———————— 2 分

$E(X^2)=0^2\times0.4+1^2\times0.3+2^2\times0.3=1.5$ ———————— 3 分

$E(Y^2)=0^2\times0.3+1^2\times0.25+2^2\times0.45=2.05$ ———————— 4 分

$E(XY)=0\times0\times0.1+0\times1\times0.05+0\times2\times0.25+1\times0\times0+1\times1\times0.1+$
$1\times2\times0.2+2\times0\times0.2+2\times1\times0.1+2\times2\times0$ ——— 5 分

$=0.7$ ———————— 6分

四、（12%）设二维连续型随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y),0<x<2,2<y<4\\ 0,其他\end{cases}$$

(1) (6%)计算概率 $P\{X+Y\geq4\}$,

(2) (6%)问 X 与 Y 是否相互独立.

解 (1) $P\{X+Y\geq4\}=\int_0^2dx\int_{4-x}^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy$ ———————— 3 分

$=\int_0^2(\frac{1}{4}x-\frac{x^2}{16})dx$ ———————— 5 分

$=\frac{1}{3}$ ———————— 6 分

(2) $f_X(x)=\begin{cases}\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ———————————— 2 分

$=\begin{cases}\frac{1}{4}(3-x), & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ———————— 3 分(解出任一边缘密度得 3 分)

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^2 \frac{1}{8}(6-x-y)dx, & 2<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{5}{4}-\frac{y}{4}, & 2<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ———————— 4分

$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)\Rightarrow X\text{与}Y\text{不相互独立}$ ———————— 6 分

五（10%）设某微机系统有 1000 个终端，每一个终端有 5%的时间在使用。若终端是否使用是相互独立的，试求使用终端数在 40~60 个之间的概率（答案用 $\Phi(x)$ 表示）。

解　设 X 为被使用的终端数,则 $X\sim B(1000,0.05)$. ———————— 2 分

由中心极限定理

$$P\{40<X<60\}=P\{\frac{40-1000\times0.05}{\sqrt{1000\times0.05\times0.95}}<\frac{X-1000\times0.05}{\sqrt{1000\times0.05\times0.95}}<\frac{60-1000\times0.05}{\sqrt{1000\times0.05\times0.95}}\}$$

$=\Phi(\frac{10}{\sqrt{475}})-\Phi(-\frac{10}{\sqrt{475}})$ ———————— 8 分

$=2\Phi(\frac{2}{\sqrt{19}})-1$ ———————— 2 分

六 (10%) 设总体 X 具有密度 $f(x)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<\infty$， $x_1,\cdots,x_n$ 为 X 的一组样本观测值，求参数 σ 的最大似然估计。

解　似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$ ———————— 3 分

$=\frac{1}{2^n\sigma^n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$ ———————— 5 分

$\ln L(x_1,\cdots,x_n)=-n\ln2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ ———————— 6 分

令 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma}=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$ ———————— 8 分

解得 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ ———————— 10 分

七 (10%) 对某种新式导弹的最大飞行速度 X 进行 16 次独立测试，测得样本均值 $\overline{x}=425m/s$，样本标准差 $s=3.8$。根据以往经验，可以认为最大飞行速度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知．试对检验水平 $\alpha=0.05$ 求总体数学期望 μ 的置信区间 ($t_{0.05}(15)=1.7531, t_{0.05}(16)=1.7459$, $t_{0.025}(15)=2.1315$),

$t_{0.025}(16)=2.1199$).

解　置信区间为$(\overline{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}})$ ———————— 5 分

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}=t_{0.025}(15)\dfrac{3.8}{\sqrt{16}}=2.1315\times\dfrac{3.8}{4}=2.02$ ————————8 分

从而置信区间为(422.98, 427.02). ———————— 10 分

八（10%）某种导线，要求其电阻标准差不超过 0.005Ω．今在一批导线中取样品 9 根，测得 $s=0.007\Omega$，设总体为正态分布，问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能认为这批导线电阻的标准差显著地偏大吗($\chi^2_{0.05}(8)=15.507, \chi^2_{0.05}(9)=16.909$,

$\chi^2_{0.025}(8)=17.535, \chi^2_{0.025}(9)=19,023$)?

解 检验假设 $H_0:\sigma^2\le 0.005^2$，备择假设 $H_1:\sigma^2>0.005$ ————————2 分

拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$$ ———————— 6分

$$=\chi^2_{0.05}(8)=15.507$$ ———————— 7分

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\frac{8\times 0.007^2}{0.005^2}=2.68>15.507$$ ———————— 9 分

落在拒绝域内，故能认为这批导线电阻的标准差显著地偏大. ———— 10 分

九 (6%)设总体 $X\sim U[0,\theta]$，样本 $X_1,\cdots,X_n$.

(1) 检验 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}$ 和 $\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ 是否为 θ 的无偏估计量;

(2) 如果是，比较上述两个估计量的有效性.

解 (1)

$E(X)=\dfrac{\theta}{2},D(X)=\dfrac{\theta^2}{12}$ ———————— 1 分

$E(2\overline{X})=2E(\overline{X})=2E(X)=2\times\dfrac{\theta}{2}=\theta$,从而 $2\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量. ——— 2 分

令 $Y=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$,则 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{\max\{X_1,\cdots,X_n\}\le y\}=P\{X_1\le y,\cdots,X_n\le y\}=F_X^n(y)$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=nF_Y^{n-1}(y)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$ ———————— 3 分

$$E(Y)=\int_0^\theta y\cdot\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\left.\frac{ny^{n+1}}{(n+1)\theta^n}\right|_0^\theta=\frac{n\theta}{n+1}$$

$$E(\hat\theta_2)=E(\frac{n+1}{n}\max\{X_1,\cdots,X_n\})=\frac{n+1}{n}E(Y)=\theta,$$

从而 $\hat\theta_2$ 也是 θ 的无偏估计量. ———————————————— 4 分

$$D(\hat\theta_1)=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=4\times\frac{D(X)}{n}=4\times\frac{\theta^2}{12n}=\frac{\theta^2}{3n},$$

$$E(Y^2)=\int_0^\theta y^2\cdot\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\left.\frac{ny^{n+2}}{(n+2)\theta^n}\right|_0^\theta=\frac{n\theta^2}{n+2}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{n\theta^2}{n+2}-\frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}=\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)},$$

$$D(\hat\theta_2)=\frac{(n+1)^2}{n^2}D(Y)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

$n>1$ 时 $D(\hat\theta_2)<D(\hat\theta_1)$,故 $\hat\theta_2$ 比 $\hat\theta_1$ 有效. ———————————— 6 分

十 (5%)设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$,样本 X_1,X_2.求 $Y=\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$ 的分布.

解 令 $U=X_1+X_2,V=X_1-X_2$.由于相互独立正态分布的线性组合仍服从正态分布,故 U 和 V 均服从正态分布. ———————— 2 分

$$E(U)=E(X_1)+E(X_2)=0,DU=D(X_1)+D(X_2)=2\sigma^2$$

$$E(V)=E(X_1)-E(X_2)=0,D(V)=D(X_1)+D(X_2)=2\sigma^2$$

从而$\dfrac{U}{\sqrt{2}\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$，$\dfrac{U^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ ———————— 3 分

同理，$\dfrac{V^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$。

$E(UV) = E(X_1 + X_2)(X_1 - X_2) = E(X_1^2 - X_2^2) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$，

$COV(U,V) = E(UV) - E(U) \cdot E(V) = 0$，从而$U,V$不相关。$U,V$为正态随机变量，

从而U,V相互独立。因此$\dfrac{U^2}{2\sigma^2}$与$\dfrac{V^2}{2\sigma^2}$亦相互独立。由F分布的定义，知

$\dfrac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2} = \dfrac{U^2/2\sigma^2}{V^2/2\sigma^2} \sim F(1,1)$。 ———————— 5 分（未能证明独立性扣 2 分）