一、填充题（每题 3 分，共 24 分）

1．$1-\frac{C_8^2}{C_{10}^2}$(或$\frac{17}{45}$)　2．$\frac{1}{2}$　3．$\frac{2}{3}$　4．$\frac{19}{27}$　5．$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{97}}e^{-\frac{(z+3)^2}{194}}$　6．0.45

7．$N(0,\frac{4}{20})$　8．$a=\frac{1}{20}$，$b=\frac{1}{100}$，自由度为 2

二、解 1）$F(x)=\begin{cases} 0, \quad x<0 \\ \int_0^x x dx=\frac{x^2}{2}, 0\le x\le 1 \\ \int_0^1 x dx+\int_1^x (2-x)dx=2x-\frac{x^2}{2}-1, 1\le x\le 2 \\ 1, \quad x>2 \end{cases}$ ______ 4 分

2）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x^2 dx+\int_1^2 x(2-x)dx$ ______ 1 分

$=\frac{1}{3}+(4-1)-\frac{8-1}{3}=1$ ______ 2 分

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ ______ 3 分

$=\int_0^1 x^3 dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx$

$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}(8-1)-\frac{16-1}{4}=\frac{7}{6}$ ______ 4 分

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ ______ 5 分

$=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$ ______ 6 分

3）$P\{X>\frac{1}{2}\}=1-F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ ______ 2 分

设观察值大于$\frac{1}{2}$的次数为 Y，则 $Y\sim b(3,\frac{7}{8})$ ______ 3 分

所求概率为 $P\{Y\ge 2\}=1-\frac{1}{8^3}-C_3^1\frac{1}{8^2}\times\frac{7}{8}$ ______ 4 分

$=\frac{490}{512}=\frac{245}{256}$

三、　解　1）X 的分布律为

X	0	1	2
P	0.4	0.3	0.3

______ 4 分

2) $P\{X+Y\le 2|X\ne 2\}=\frac{P\{X+Y\le 2, X\ne 1\}}{P\{X\ne 2\}}$ ______ 2 分

$=\frac{0.5}{0.7}=\frac{5}{7}$ ———————— 4 分

四、解 (1) $P\{X+Y\geq 4\}=\int_0^2 dx\int_{4-x}^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy$ ———————— 2 分

$=\int_0^2(\frac{1}{4}x-\frac{x^2}{16})dx$ ———————— 3 分

$=\frac{1}{3}$ ———————— 4 分

(2) $f_X(x)=\begin{cases}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ ———————— 2 分

$=\begin{cases}\frac{1}{4}(3-x), & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ ———————— 3 分(解出任一边缘密度得 3 分)

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^2\frac{1}{8}(6-x-y)dx, & 2<y<4\\ 0, & 其他\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{5}{4}-\frac{y}{4}, & 2<y<4\\ 0, & 其他\end{cases}$ ———————— 4分

$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)\Rightarrow X与Y不相互独立$ ———————— 6 分

五、解 设 X 为被使用的终端数,则 $X\sim B(1000,0.05)$. ———————— 2 分

由中心极限定理

$$P\{40<X<60\}=P\{\frac{40-1000\times 0.05}{\sqrt{1000\times 0.05\times 0.95}}<\frac{X-1000\times 0.05}{\sqrt{1000\times 0.05\times 0.95}}<\frac{60-1000\times 0.05}{\sqrt{1000\times 0.05\times 0.95}}\}$$

$\approx\Phi(\frac{10}{\sqrt{475}})-\Phi(-\frac{10}{\sqrt{475}})$ ———————— 7 分

$=2\Phi(\frac{10}{\sqrt{475}})-1=2\Phi(\frac{2}{\sqrt{19}})-1$ ———————— 8 分

六、解 1）似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^n f(x_i)$ ———————— 2 分

$$=\frac{1}{2^n a^n}e^{-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$ __________ 3 分

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-n\ln 2-n\ln a-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

令 $\frac{\partial L(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial \alpha}=-\frac{n}{a}+\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$ __________ 5 分

得到 $\hat{a}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ __________ 6 分

2）$\hat{a}$ 为参 a 的无偏估计的充要条件是 $E(\hat{a})=a$ __________ 2 分

$$E(\hat{a})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|)$$ __________ 3 分

$$E(|X_i|)=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2a}e^{-\frac{|x|}{a}}dx$$ __________ 5 分

$$=-\frac{2a}{2a}\int_0^{+\infty}xde^{-\frac{x}{a}}=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{a}}dx=a$$ __________ 6

从而 $E(\hat{a})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|)=a$，故 $\hat{a}$ 为参 a 的无偏估计。

七、解：置信区间为（$\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$）————————6 分

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.1315$ ——————————————8 分

从而置信区间为（499.8-0.12789,499.8+0.12789）____________________ 10 分

八、解：1）$N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1})$，$\overline{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2})$ ________________ 1 分

$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$ ______________ 2 分

拒绝域对应 $\mu_1-\mu_2>0$，应对应 $\bar{x}-\bar{y}$ 偏大的区域，由 $P\{z>z_\alpha\}=\alpha$ 得拒绝域为

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\geq z_\alpha$$ _________________ 5 分

$$\overline{X}-2\overline{Y}\sim N(\mu_1-2\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2})$$ ____________________ 6 分

从而 $Z=\frac{\overline{X}-2\overline{Y}-(\mu_1-2\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$ ____________________ 7 分

拒绝域对应 $\mu_1-2\mu_2>0$，应对应 $\bar{x}-2\bar{y}$ 偏大的区域，由 $P\{z>z_\alpha\}=\alpha$ 得拒绝域为

$$Z=\frac{\overline{X}-2\overline{Y}-0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}}}\geq z_\alpha$$ ____________________ 8 分

九、解 $E(Y)=E(Z)=n\mu$ ________________ 1 分

$D(Y)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+\sum_{i\neq j}COV(X_i,X_j)$ ________________ 2 分

$=n\sigma^2+C_n^2COV(X_1,X_2)=n\sigma^2+n(n-1)\rho\sigma^2$ ______________ 3 分

同理 $D(Z)=n\sigma^2+n(n-1)\rho\sigma^2$

$E(YZ)=n^2E(X_iX_j)=n^2[COV(X_iX_j)+E(X_i)E(X_j)]$

$=n^2(\rho\sigma^2+\mu^2)$ ____________ 4 分

$COV(Y,Z)=E(Y,Z)-E(Y)E(Z)=n^2(\rho\sigma^2+\mu^2)-n^2\mu^2=n^2\rho\sigma^2$

从而 $\rho_{YZ}=\frac{COV(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}}=\frac{n^2\rho\sigma^2}{[n+n(n-1)\rho]\sigma^2}=\frac{n\rho}{1+(n-1)\rho}$ ___ 6 分