杭州电子科技大学学生考试卷期末（ A）卷

考试课程	**概率论与数理统计**	**考试日期**	**20010 年 01 月　日**	**成 绩**	
课程号	**A0702140**	**教师号**		**任课教师姓名**	

考生姓名	**参考答案**	**学号（8 位）**		**年级**		**专业**

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一

一、选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 12 分）

1．设 A,B 为随机事件，则下列结论中正确的是　（　C　）

A．$P(AB)=P(A)P(B)$　　B．$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

C．$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$　　D．$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

2．X 与 Y 不相关，则与之等价的条件是　(B).

（A）$D(XY)=D(X)D(Y)$；　　(B) $D(X+Y)=D(X-Y)$；

（C）$D(XY)\neq D(X)D(Y)$；　　（D）$D(X+Y)\neq D(X-Y)$.

3．设 X 与 Y 相互独立，X 与 Y 的分布律相同，为

X（或 Y）	0	1
P	0.3	0.7

则必有(D).

（A）$X=Y$；　　(B) $P(X=Y)=1$ ；

（C）$P(X=Y)=0$；　　（D）A，B，C 都不对 .

4．在假设检验中，记 H_0 为原假设，H_1 为备择假设，则显著性水平 α 是指（ C).

A．$P\{$接受 $H_0|H_0$ 为假$\}=\alpha$；　　B．$P\{$接受 $H_1|H_1$ 为假$\}=\alpha$

C．$P\{$拒绝 $H_0|H_0$ 为真$\}=\alpha$；　　D．$P\{$拒绝 $H_1|H_1$ 为真$\}=\alpha$

二、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

1．　10 个产品中有 3 个不合格品和 7 个合格品，从中任取 2 只，其中至少有 1 个不合格

品的概率是$\underline{\quad\dfrac{7}{15}\quad}$（或$1-\dfrac{C_7^2}{C_{10}^2}$）.

2．. 设 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$，当 A，B 互不相容时，$P(B)=\underline{\quad 0.3\quad}$，当 A，B 相互独立时，$P(B)=\underline{\quad 0.5\quad}$.

3．设$X\sim b(n,p)$，且$E(X)=6, D(X)=3.6$，则$n=\underline{\quad 15\quad}$，$p=\underline{\quad 0.4\quad}$.

4. 设 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 是取自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，如果 $\dfrac{a(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$服从$t$分布，则$a=\underline{\sqrt{\dfrac{3}{2}}}$

三、（每小题 4 分，共 8 分）设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1 \\ 0, & else \end{cases}$，

又已知$P\{X<\dfrac{1}{3}\}=P\{X>\dfrac{1}{3}\}$，（1）求常数$a$和$b$；(2) 求$X$的分布函数$F(x)$

解 （1）因为$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ （1 分）

所以 $\int_0^1(ax+b)dx=1$

又$P\{X<\dfrac{1}{3}\}=P\{X>\dfrac{1}{3}\}$知$\int_0^{\frac{1}{3}}(ax+b)dx=\dfrac{1}{2}$

得$\dfrac{a}{2}+b=1$，$\dfrac{a}{18}+\dfrac{b}{3}=\dfrac{1}{2}$ （3 分）

解得$a=-\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{7}{4}$ （4 分）

（2） X的分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ （2 分）

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ -\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{7}{4}x, & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$ （4 分）

四．(每小题 4 分，共 12 分)设二维离散型随机变量（X，Y）的联合分布律如下

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0.05	0.25
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0

(1) 求 X 的边缘分布律;

(2) 计算条件概率 $P\{X+Y\le 2 | X\ge 1\}$

(3) 计算 $E[(2X-3Y)^2]$.

解 （1） X 的分布律为

X	0	1	2
P	0.4	0.3	0.3

———————— 4 分

（2） $P\{X+Y\le 2 | X\ge 1\}=\dfrac{P\{X+Y\le 2\text{且}X\ge 1\}}{P\{X\ge 1\}}$ ———————— 2 分

$=\dfrac{0.3}{0.6}=\dfrac{1}{2}$ ———————— 4 分

(3) $E[(2X-3Y)^2]=E(4X^2+9Y^2-12XY)$

$=4E(X^2)+9E(Y^2)-12E(XY)$ ———————— 2 分

$E(X^2)=0^2\times 0.4+1^2\times 0.3+2^2\times 0.3=1.5$

$E(Y^2)=0^2\times 0.3+1^2\times 0.25+2^2\times 0.45=2.05$

$E(XY)=0\times 0\times 0.1+0\times 1\times 0.05+0\times 2\times 0.25+1\times 0\times 0+1\times 1\times 0.1+$
$1\times 2\times 0.2+2\times 0\times 0.2+2\times 1\times 0.1+2\times 2\times 0$

$=0.7$

$E[(2X-3Y)^2]=4\times 1.5+9\times 2.05-12\times 0.7$

$=16.05$ ———————— 4 分

五.（本题 8 分）设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为 $E(x)=0.5\,\mathrm{kg}$ ，均方差为 $\sqrt{D(X)}=0.1\,\mathrm{kg}$ ，问 5000 只零件的总重量超过 $2510\,\mathrm{kg}$ 的概率约为多少？（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）

解 记 $X_i(i=1,2,\cdots,5000)$ 为第 i 只零件的重量，由题意 $E(X_i)=0.5$, $D(X_i)=0.1^2$

所求概率 $P\{\sum_{i-1}^{5000}X_i>2510\}=1-P\{\sum_{i-1}^{5000}X_i\le 2510\}$ ———————— 2 分

$=1-P\{(\dfrac{\sum_{i=1}^{5000}X_i-5000\cdot 0.5}{\sqrt{5000}\cdot 0.1}\le\dfrac{2510-5000\cdot 0.5}{\sqrt{5000}\cdot 0.1}\}$ —— 6 分

$\approx 1-\Phi(\sqrt{2})$ ———————— 8 分

六.（每小题 4 分，共 12 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-y}, 0<x<y \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

（1）求常数C；

（2）求关于X和关于Y的边缘概率密度；　并问X与Y是否相互独立?

（3）求概率$P\{X+Y<1\}$.

解　（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$得　———— 1 分

$\int_0^{+\infty}dy\int_0^y Ce^{-y}dx=1$（或$\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}Ce^{-y}dy=1$）　———— 2 分

$\int_0^{+\infty}dy\int_0^y Ce^{-y}dx=C\int_0^{+\infty}ye^{-y}dy=C=1\Rightarrow C=1$　———— 4 分

（或$\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}Ce^{-y}dy=C\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=C=1\Rightarrow C=1$）

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$　———— 1 分

$x>0$时

$=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy$

e^{-x}　———— 2 分

$y>0$时

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$=\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}$　———— 3 分

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0, x\le 0 \end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, y>0 \\ 0, y\le 0 \end{cases}$$

当$0<x<y$时$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$

所以X与Y不相互独立.　———— 4 分

（3）$P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1}f(x,y)dxdy$　———— 1 分

$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy$　———— 2 分

$=1+\frac{1}{e}-\frac{2}{\sqrt{e}}$　———— 4 分

七、(本题 10 分)对某种新式导弹的最大飞行速度 X 进行16次独立测试,测得样本均值 $\bar{x}=425m/s$,样本标准差 $s=3.8$。根据以往经验,可以认为最大飞行速度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ,σ^2 均未知.试对检验水平 $\alpha=0.05$ 求总体数学期望 μ 的置信区间 (精确到第二位小数。 其中 $t_{0.05}(15)=1.7531, t_{0.05}(16)=1.7459$, $t_{0.025}(15)=2.1315$, $t_{0.025}(16)=2.1199$)。

解 置信区间为$(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$ ———— 7 分

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=t_{0.025}(15)\frac{3.8}{\sqrt{16}}=2.1315\times\frac{3.8}{4}=2.02$ ————9 分

从而置信区间为(422.98, 427.02). ———— 10 分

八、(每小题 5 分，共 10 分）设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为取自总体 X 的一组样本， X 的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$，其中 $\theta>0$ 是参数，试求

（1） 参数 θ 的矩估计量;（2）参数 θ 的最大似然估计量.

解 (1) $E(X)=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\int_0^1 \theta x^{\theta}\, d\theta=\frac{\theta}{\theta+1}$, ———— 2 分

令 $E(X)=\bar{X}$,则 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$ ———— 5 分

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta X_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\theta-1}$, ———— 2 分

则 $\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$

于是令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$ ———— 4 分

即 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$ 为所求的最大似然估计. ———— 5 分

得分	

九、(本题 8 分) （10%）某种导线，要求其电阻标准差不超过 0.005Ω .今在一批导线中取样品 9 根,测得 $s=0.007\Omega$,设总体为正态分布,问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能认为这批导线电阻的标准差显著地偏大吗？

($\chi^2_{0。05}(8)=15.507, \chi^2_{0.05}(9)=16.909, \chi^2_{0.025}(8)=17.535, \chi^2_{0.025}(9)=19,023$)

解 这里 $\alpha=0.05$, $n=9$

由题意需检验假设 $H_0:\sigma^2\le 0.05^2$, 备择假设 $H_1:\sigma^2>0.05^2$ ——— 2 分

拒绝域 $\dfrac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2}\ge\chi^2_\alpha(n-1)$ ——— 4 分

即 $\dfrac{8s^2}{0.005^2}\ge 15.507$

因 $\dfrac{8s^2}{0.005^2}=\dfrac{8\times 0.007^2}{0.05^2}=15.608>15.507$

故在拒绝域内（即拒绝 H_0 ）, 可以认为这批导线电阻的标准差显著地偏大。——— 8 分

十、（本题 4 分）设总体 X 具有概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta^3}x^2, & 0\le x\le\theta \\ 0, & 其它\end{cases}$, 其中 $\theta>0$ 是未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体的样本， $\hat\theta=C\cdot\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是 θ 的一个估计量。试确定常数 C，使 $\hat\theta$ 成为 θ 的无偏估计。

解 令 $Y=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ ，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X_1\le \mathrm{y},\cdots,X_n\le y\}=\prod_{i=1}^n F_X(y)={F_X}^n(y)$$

$$f_Y(y)=nf_X(y){F_X}^{n-1}(y)$$

$$F_X(y)=\begin{cases}0, y<0 \\ \int_0^y\dfrac{3}{\theta^3}x^2dx, 0\le y\le\theta \\ 1, y\ge\theta\end{cases}=\begin{cases}0, y<0 \\ \dfrac{y^3}{\theta^3}, 0\le y\le\theta \\ 1, y\ge\theta\end{cases}$$

从而

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3n}{\theta^{3n}}y^{3n-1},0\le y\le\theta \\ 0,\text{其它}\end{cases}$$ ——————————— 2 分

$$E(\hat{\theta})=CE(Y)=C\int_0^{\theta}\frac{3n}{\theta^{3n}}y^{3n}dy=C\cdot\frac{3n}{3n+1}\theta$$

$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计时有 $E(\hat{\theta})=\theta$，从而 $C=\dfrac{3n+1}{3n}$。 ——————————— 4 分

十一、（本题 4 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$， $Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$，

求 $E(|X-Y|)$ 和 $D(|X-Y|)$。

解 记 $Z=X-Y$，则 $Z\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，从而

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp(-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)})dx$$

$$=\sqrt{\frac{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\pi}}$$

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp(-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)})dx$$

$$=\sigma_1^2+\sigma_2^2$$

$$D(|X-Y|)=E(Z^2)-E^2(Z)$$

$$=(1-\frac{2}{\pi})(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$