Correction de la série des exercices N° 1

Exercice 1

Parmi les applications $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, déterminer celles qui définissent des distributions :

a) $\langle T, \varphi\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)dt, \forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

b) $\langle T, \varphi\rangle = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-1}dt, \forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

c) $\langle T, \varphi\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n), \forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Correction d'exercice 1

a) On a $\langle T, \varphi\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2H(t)\varphi(t)dt$. Remarquons que la fonction $t \longmapsto t^2H(t)$ est continue, donc localement intégrable. Ainsi T définit une distribution avec H est la fonction de Heaviside. ☒

b) On a $\langle T, \varphi\rangle = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-1}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(t-1)}{t-1}\varphi(t)dt$. Il est clair que la fonction $t \longmapsto \dfrac{H(t-1)}{t-1}$ n'est pas intégrable au voisinage de 1. Donc T n'est pas une distribution. ☒

c) Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, alors φ est nulle en dehors d'un segment $[a,b]$. Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n)$ ne comporte qu'un nombre de terme fini, c'est-à-dire $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n) = \sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(n) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n\langle\delta_n^{(n)}, \varphi\rangle = \langle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n\delta_n^{(n)}, \varphi\rangle.$$

Somme finie de distribution. Donc $T = \langle\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n\delta_n^{(n)}$ est une distribution. ☒

Exercice 2

Simplifier les distributions suivantes :

1. $\sin(\frac{\pi}{4}t)\delta_1$.
2. $\dfrac{\sin(\pi t)}{t}\delta_0$.

Correction d'exercice 2

1. Il est clair que $\langle\sin(\frac{\pi}{4}t)\delta_1, \varphi\rangle = \langle\delta_1, \sin(\frac{\pi}{4}t)\varphi\rangle = \sin(\frac{\pi}{4})\varphi(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi(1) = \langle\frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1, \varphi\rangle$. Par conséquent $\sin(\frac{\pi}{4}t)\delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1$. ☒

2. On a $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin(\pi t)}{t}=\pi$. Ceci implique que $\langle \dfrac{\sin(\pi t)}{t}\delta_0,\varphi\rangle=\langle\delta_0,\dfrac{\sin(\pi t)}{t}\varphi\rangle=\pi\varphi(0)=\langle\pi\delta_0,\varphi\rangle$. Ainsi $\dfrac{\sin(\pi t)}{t}\delta_0=\pi\delta_0$. ☑

Exercice 3

Soit la distribution $T=a\delta'+b\tau_{-1}\delta$ avec $a,b\in\mathbb{R}$. Calculer les produits :

1. tT.
2. $t(t-1)T$.

Correction d'exercice 3

1. On a
$$\begin{array}{rcl}\langle tT,\varphi\rangle & = & \langle T,t\varphi\rangle=a\langle\delta',t\varphi\rangle+b\langle\delta,\tau_1 t\varphi\rangle=-a\langle\delta,\varphi+t\varphi'\rangle+b\varphi(1)=-a\varphi(0)+b\varphi(1)\\ & = & \langle -a\delta+b\delta_1,\varphi\rangle.\end{array}$$
Par suite $tT=-a\delta+b\delta_1$. ☑
2. On a
$$\begin{array}{rcl}\langle t(t-1)T,\varphi\rangle & = & \langle T,t(t-1)\varphi\rangle=a\langle\delta',t(t-1)\varphi\rangle+b\underbrace{\langle\delta,\tau_1 t(t-1)\varphi\rangle}_{=0}=-a\langle\delta,(2t-1)\varphi+t(t-1)\varphi'\rangle\\ & = & a\varphi(0)=\langle a\delta,\varphi\rangle.\end{array}$$
D'où $t(t-1)T=a\delta$. ☑

Exercice 4

Déterminer les limites dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ des suites (S_n) de distributions suivantes :

1. $S_n=3n\left(\delta_{1/n}-\delta_{-1/n}\right)$.
2. $S_n=(n+1)^2\left(\delta_{1/n}+\delta_{-1/n}-2\delta_0\right)$.

Correction d'exercice 4

1. On a
$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{n\to+\infty}\langle S_n,\varphi\rangle & = & 3\lim\limits_{n\to+\infty} n\big(\varphi(\tfrac{1}{n})-\varphi(-\tfrac{1}{n})\big)\\ & = & 3\lim\limits_{n\to+\infty} n\Big(\varphi(0)+\tfrac{1}{n}\varphi'(0)-\varphi(0)+\tfrac{1}{n}\varphi'(0)+o(\tfrac{1}{n})\Big)\\ & = & 6\varphi'(0)\\ & = & \langle -6\delta',\varphi\rangle.\end{array}$$
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-6\delta'$ au sens des distributions. ☑
2. On a
$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{n\to+\infty}\langle S_n,\varphi\rangle & = & \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2\big(\varphi(\tfrac{1}{n})+\varphi(-\tfrac{1}{n})-2\varphi(0)\big)\\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2\big(\varphi(0)+\tfrac{1}{n}\varphi'(0)+\tfrac{1}{n^2}\varphi''(0)+\varphi(0)-\tfrac{1}{n}\varphi'(0)+\tfrac{1}{n^2}\varphi''(0)-2\varphi(0)+o(\tfrac{1}{n^2})\big)\\ & = & 2\varphi''(0)\\ & = & \langle 2\delta'',\varphi\rangle.\end{array}$$
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=2\delta''$ au sens des distributions. ☑

Exercice 5

Étudier la convergence des distributions régulières associées aux fonctions f_n localement sommables, suivantes :

1. $nt^n\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.
2. $n^2\sin(nt)\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]}(t)$.

Correction d'exercice 5

1. On a
$$\langle nt^n\mathbb{1}_{[0,1]}(t),\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}nt^n\mathbb{1}_{[0,1]}(t)\varphi(t)dt=n\int_0^1 t^n\varphi(t)dt.$$
En utilisant l'intégration par partie, on obtient
$$n\int_0^1 t^n\varphi(t)dt=n\Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}\varphi(t)\Big]_0^1-n\int_0^1\frac{t^{n+1}}{n+1}\varphi'(t)dt=\frac{n}{n+1}\varphi(1)-\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$
En utilisant encore une fois l'intégration par partie, on trouve
$$\int_0^1 t^{n+1}\varphi'(t)dt=\Big[\frac{t^{n+2}}{n+2}\varphi'(t)\Big]_0^1-\frac{1}{n+2}\int_0^1 t^{n+2}\varphi''(t)dt=\frac{\varphi'(1)}{n+2}-\frac{1}{n+2}\int_0^1 t^{n+2}\varphi''(t)dt. \qquad (2)$$
On en déduit que
$$|\int_0^1 t^{n+1}\varphi'(t)dt|\leq\frac{|\varphi'(1)|}{n+2}+\frac{1}{n+2}\|\varphi''\|_\infty\to 0.$$
De (1) et (2), on déduit que
$$\langle nt^n\mathbb{1}_{[0,1]}(t),\varphi\rangle\to\varphi(1)=\langle\delta_1,\varphi\rangle.$$
Par conséquent $nt^n\mathbb{1}_{[0,1]}(t)\to\delta_1$ au sens des distributions. ☑
2. On a
$$\langle n^2\sin(nt)\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]}(t),\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}n^2\sin(nt)\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]}(t)\varphi(t)dt=n^2\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\sin(nt)\varphi(t)dt.$$
En utilisant l'intégration par partie, on obtient
$$\begin{aligned}n^2\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\sin(nt)\varphi(t)dt &= -n^2\Big[\frac{\cos(nt)}{n}\varphi(t)\Big]_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}+n\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\cos(nt)\varphi'(t)dt\\ &= n\Big(\varphi(\tfrac{\pi}{n})-\varphi(-\tfrac{\pi}{n})\Big)+n\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\cos(nt)\varphi'(t)dt \qquad (3)\\ &= n\Big(\varphi(0)+\tfrac{\pi}{n}\varphi'(0)-\varphi(0)+\tfrac{\pi}{n}\varphi'(0)+o(\tfrac{1}{n})\Big)+n\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\cos(nt)\varphi'(t)dt.\end{aligned}$$
En utilisant encore une fois l'intégration par partie, on trouve
$$n\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\cos(nt)\varphi'(t)dt=n\underbrace{\Big[\frac{\sin(nt)}{n}\varphi'(t)\Big]_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}}_{=0}-\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\sin(nt)\varphi''(t)dt.$$

De plus, on a
$$|\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sin(nt)\varphi''(t)dt| \leq \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} |\sin(nt)\varphi''(t)|dt \leq \frac{2\pi}{n}\|\varphi''\|_\infty \to 0. \tag{4}$$
De (3) et (4), on déduit que
$$\langle n^2\sin(nt)\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]}(t),\varphi\rangle \to 2\pi\varphi'(0) = \langle -2\pi\delta',\varphi\rangle.$$
Par conséquent $n^2\sin(nt)\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]}(t) \to -2\pi\delta'$ au sens des distributions. ☑

Exercice 6

1. Soit T la distribution associée à la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{sgn}(x)$. Calculer la dérivée de T.
2. Soit S la distribution associée à la fonction $g : x \longmapsto |x|$. Calculer la dérivée de S.

Correction d'exercice 6

1. Calculons T'.

   Première méthode. On a
$$\langle T',\varphi\rangle = -\langle T,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} -\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx.$$
   Comme $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, alors $\exists M \in (0,+\infty)$ tel que $\mathrm{Supp}_{\mathbb{R}}(\varphi) \subset [-M,M]$. Donc
$$\langle T',\varphi\rangle = \varphi(0) - \underbrace{\varphi(-M)}_{=0} - \underbrace{\varphi(M)}_{=0} + \varphi(0) = 2\varphi(0) = \langle 2\delta,\varphi\rangle.$$
   Par suite $T' = 2\delta$. ☑

   Deuxième méthode. D'après la formule des sauts, il vient $T' = T_{f'} + \sigma_0^{(0)}\delta = 2\delta$. ☑
2. Après le calcul, on trouve $S' = \left[\mathrm{sgn}(x)\right]$. En effet
$$\begin{aligned}
\langle S',\varphi\rangle &= -\langle S,\varphi'\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$
   Ce qu'il fallait démontrer. ☑

Exercice 7 (Valeur principale de Cauchy).

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la quantité
$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx,\ \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$$
est une distribution. La distribution $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$.
3. Montrer que $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 1$.
4. Montrer que $\mathrm{Supp}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})\big) = \mathbb{R}$.
5. Montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution tempérée.

Correction d'exercice 7

1. La fonction $x\longmapsto\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur un compact de $\mathbb{R}$ contenant 0, alors n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction $x\longmapsto\frac{1}{x}$ ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$. ☑
2. Il est clair que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est bien une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Montrons qu'elle vérifie la propriété de continuité. Soient $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $M>0$ telles que $\mathrm{Supp}_{\mathbb{R}}(\varphi)\subset[-M,M]$. On a
$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$
Par la formule de Taylor avec reste intégral :
$$\varphi(x) = \varphi(0)+\int_0^1\frac{(1-t)^0}{0!}\varphi'(tx)xdt = \varphi(0)+x\int_0^1\varphi'(tx)dt.$$
On pose $\psi(x) = \int_0^1\varphi'(tx)dt$. On a $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$, de plus $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\psi(x)|\leq\|\varphi'\|_\infty$. Ainsi
$$\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \varphi(0)\underbrace{\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{dx}{x}}_{I_1}+\underbrace{\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\psi(x)dx}_{I_2}.$$
La fonction $x\longmapsto\frac{1}{x}$ étant intégrable sur $[\varepsilon,M]$ et impaire, on obtient que $I_1=0$. D'autre part, on a
$$\left|\mathbb{1}_{[-M,-\varepsilon]\bigcup[\varepsilon,M]}(x)\psi(x)\right|\leq|\psi(x)|\leq\|\varphi'\|_\infty$$
intégrable sur $[-M,M]$. Donc par théorème de convergence dominée, on a
$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_2 = \int_{|x|\leq M}\psi(x)dx.$$
Donc
$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \int_{|x|\leq M}\psi(x)dx,$$

d'où
$$\left|\mathrm{vp}(\frac{1}{x}),\varphi\rangle\right| \leq 2M\|\varphi'\|_\infty.$$
Ainsi pour toute $\varphi_n \to 0$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a
$$\left|\mathrm{vp}(\frac{1}{x}),\varphi_n\rangle\right| \leq 2M\|\varphi_n'\|_\infty \to 0.$$
Par suite $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ définit une distribution. ☑

3. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a
$$\langle x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}),\varphi\rangle = \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}),x\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx = \langle 1,\varphi\rangle.$$
Donc $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 1$. ☑

4. Comme $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 1$, le support de la distribution $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ contient celui de la fonction constante 1, autrement dit $\mathrm{Supp}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})\big) = \mathbb{R}$. ☑

5. Soient $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ (Ici $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Schwartz) et $\varepsilon \in]0,1[$, on a
$$\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$
Or $x \longmapsto \frac{\varphi(0)}{x}$ étant intégrable sur $[\varepsilon,1]$ et impaire $\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\frac{\varphi(0)}{x}dx = 0$. Ainsi
$$\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\psi(x)dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$
Or, par convergence dominée, on obtient
$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}),\varphi\rangle = \int_{|x|\leq 1}\psi(x)dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$
On en déduit que
$$|\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}),\varphi\rangle| \leq 2\|\psi\|_\infty + \sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi(x)|\underbrace{\int_{|x|\geq 1}\frac{1}{x^2}dx}_{=2} =\leq 2\|\varphi'\|_\infty + 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi(x)|.$$
Soit $\varphi_n \to 0$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Alors
$$|\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}),\varphi_n\rangle| \leq 2\|\varphi_n'\|_\infty + 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi_n(x)| \to 0.$$
Ce qui montre que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ définit une distribution tempérée. ☑

Exercice 8

Soit $I =]a,b[$ et f et g deux fonctions de classe C^∞ sur I. On se propose de montrer que si $T \in \mathscr{D}'(I)$ vérifie

$$T' + fT = g$$

au sens des distributions, alors T est donnée par une fonction de classe C^∞ sur I qui vérifie cette équation différentielle au sens usuel.

1. Trouver une solution u_0 de $u' + fu = g$ qui soit de classe C^∞ sur I.
2. Conclure en mettant toute solution de $T' + fT = g$ sous la forme $T = u_0 + e^{-F}S$ où F est une primitive de f et S une distribution à déterminer.

Correction d'exercice 8

1. Soient $x_0 \in I$ et F définie par $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ une primitive de f, alors F est de classe C^∞. De plus, on a
$$u' + fu = g \Leftrightarrow e^F(u' + fu) = e^F g \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^F u) = e^F g, \tag{5}$$
donc u_0 est une solution, c'est-à-dire
$$e^{F(x)}u_0(x) = \int_{x_0}^{x} e^{F(t)}g(t)dt + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$
ce qui implique que $u_0(x) = e^{-F(x)}\left(\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{F(t)}g(t)dt + c\right)$. ☒
2. Posons $T = u_0 + e^{-F}S$. Alors, on a
$$g = T' + fT = \underbrace{u_0' + fu_0}_{=g} + e^{-F}S'.$$
Alors $e^{-F}S' = 0 \Rightarrow S' = 0$. Par suite S est une constante et $T = u_0 + Ce^{-F}$. Donc T est donnée par une fonction de classe C^∞ qui vérifie l'équation (5) au sens usuel. ☒

Exercice 9

Résoudre $T'' - 3T' + 2T = \delta$ au sens des distributions.

Correction d'exercice 9

On considère l'opérateur suivant :

$$D^2 - 3D + 2I = (D - 2I) \circ (D - I)$$

et on pose $S = T' - T$. Alors $S' - 2S = \delta$, donc $S = e^{2x}(H(x) + c)$. Par suite

$$T' - T = e^{2x}(H(x) + c) \Leftrightarrow e^{-x}(T' - T) = e^x(H(x) + c) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x}T) = e^x(H(x) + c).$$

Cherchons une primitive de $x \longmapsto e^x H(x) = H(x) + (e^x - 1)H(x)$. Il est facile de voir que la primitive de $x \longmapsto H(x)$ est $x \longmapsto xH(x)$ et une primitive de $x \longmapsto (e^x - 1)H(x)$ est

$$x \longmapsto \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^x - x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi la primitive de $x \longmapsto e^x H(x)$ est égale

$$x \longmapsto \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire $x \longmapsto (e^x - 1)H(x)$. Finalement

$$e^{-x} T = (e^x - 1)H(x) + ce^x + d,$$

ce qui implique que $T = (e^{2x} - e^x)H(x) + ce^{2x} + de^x$. ☑