Table des matières

Introduction aux distributions

Chapitre 1

Introduction aux distributions

Les distributions sont des outils mathématiques utilisés pour représenter des phénomènes physiques que les fonctions classiques s'avèrent incapables de transcrire.

La théorie des distributions a été formalisée par L. Schwartz dans les années 50, après des idées de Heaviside à la fin du dix-neuvième siècle, mais aussi Hadamard, Leray, Poincaré et Sobolev au début du vingtième siècle. Il s'agit de généraliser la notion de fonction et d'étendre la notion de dérivée à toute fonction localement intégrable.

Dans toute la suite de ce chapitre, Ω sera un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1.1 Introduction heuristique

Les physiciens et ingénieurs ont travaillé avec une fonction δ nulle partout sauf en 0 (où elle vaut $+\infty$) de telle sorte que $\int \delta(x)dx = 1$. Bien évidemment, une telle fonction ne peut exister car même avec $\delta(0) = +\infty$, on a malgré tout $\int \delta(x)dx = 0$, il est donc impossible d'avoir $\int \delta(x)dx = 1$. Ainsi, une nouvelle interprétation de δ est possible comme répartition de masse sur $\mathbb{R}$ avec toute la masse concentrée en 0.

Nous allons définir l'être mathématique δ (**distribution de Dirac**) comme la forme linéaire sur l'espace des fonctions d'essai.

1.2 L'espace de fonctions tests $\mathcal{D}$

Dans ce chapitre, nous nous restreindrons au cas à une dimension, c'est-à-dire que les fonctions considérées seront des fonctions à une seule variable réelle.

Définition 1.1 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On appelle **support** de f, l'ensemble $\mathrm{supp}_\Omega(f)$ de Ω, défini par :* $\mathrm{supp}_\Omega(f) = \overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}}$.

Rappel :

1. L'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé contenant cet ensemble.
2. Si $\mathsf{supp}_\Omega(f)$ est borné, alors $\mathsf{supp}_\Omega(f)$ est un compact (un ensemble fermé et borné dans l'espace $\mathbb{R}$ qui est de dimension finie). Autrement dit $\mathsf{supp}_\Omega(f) = [a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.1 *Le support de f est donc un ensemble fermé en dehors duquel f est nulle.*

Exemple 1.1 *La fonction **porte** $\chi_T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de largeur $T > 0$ est définie par :*

$$\chi_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}, \end{cases}$$

On a $\mathsf{supp}_\mathbb{R}(\chi_T) = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Exercice 1.1 *La fonction paire f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \in [0, 2] \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

La fonction f est-elle à support compact ?

Solution. On a $\mathsf{supp}_\mathbb{R}(f) = \overline{]-2, 0] \bigcup [0, 2[} = \overline{]-2, 0]} \cup \overline{[0, 2[} = [-2, 0] \bigcup [0, 2] = [-2, 2]$. Donc f est à support compact. ☒

Exemple 1.2 *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Il est clair que* $\mathsf{supp}_\mathbb{R}(f) = \mathbb{R}$. *Donc le support de f n'est pas compact.*

Définition 1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ indéfiniment dérivables à support compact dans Ω.*

Exemple 1.3 *La fonction nulle est un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Remarque 1.2 *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.*

Exemple 1.4 *Soit $f(x) = (1 - x^2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, où $1_{[-1,1]}$ est dite **fonction caractéristique**, ou **fonction indicatrice** de $[-1, 1]$ est définie de $\mathbb{R}$ dans $\{0, 1\}$, par*

$$1_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Il est clair que $\mathsf{supp}_\mathbb{R}(f) = [-1, 1]$, *alors que $f \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Puisque f n'est pas dérivable en 1. Donc f n'est pas de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Exemple 1.5 *Soit ξ la fonction définie par*

$$\xi_a(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{1}{a} \\ \exp\left(-\frac{1}{1-a^2x^2}\right), & |x| < \frac{1}{a} \end{cases}$$

avec $a > 0$. Elle est indéfiniment dérivable, son support est $\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]$.

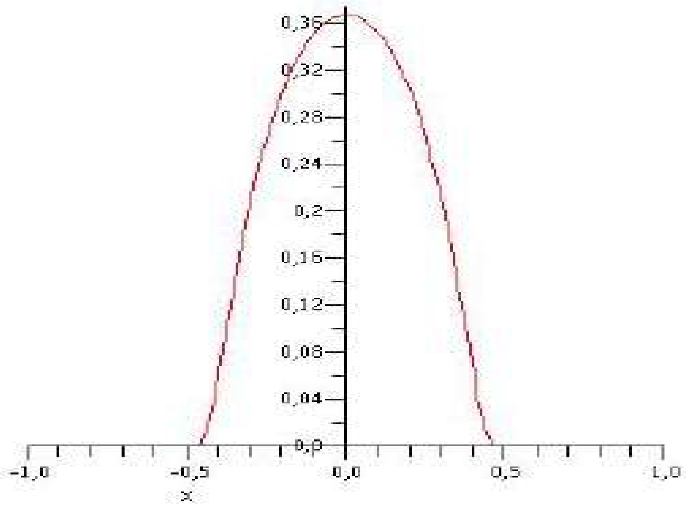


FIGURE 1.1: La courbe de la fonction ξ_2

Définition 1.3 *Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite localement sommable si elle est intégrable sur tout compact de $K = [a, b]$ de Ω. Autrement dit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si et seulement si*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_{[a,b]} |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt < +\infty.$$

Proposition 1.1 *Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$, on a*

i) $\varphi' \in \mathcal{D}(\Omega)$.

ii) $\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Démonstration.

i) On peut facilement voir que $\mathsf{supp}_\Omega(\varphi') \subset \mathsf{supp}_\Omega(\varphi)$. On a $\mathsf{supp}_\Omega(\varphi')$ est un ensemble borné, puisqu'il est inclus dans l'ensemble borné $\mathsf{supp}_\Omega(\varphi)$. De plus $\mathsf{supp}_\Omega(\varphi')$ par définition est un fermé. Donc $\mathsf{supp}_\Omega(\varphi')$ est compact. Par ailleurs $\varphi' \in C^\infty(\Omega)$. Donc $\varphi' \in \mathcal{D}(\Omega)$. ☒

ii) Il est clair que $\alpha\varphi \in C^\infty(\Omega)$ et $\mathsf{Supp}_\Omega(\alpha\varphi) \subset \mathsf{Supp}_\Omega(\varphi)$. On en déduit que $\mathsf{Supp}_\Omega(\alpha\varphi)$ est compact. Ainsi $\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. ☒

1.2.1 Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.4 *On dit qu'une suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si*

1. *Il existe un compact B de Ω tel que $\mathrm{supp}_\Omega(\varphi) \subset B$ et $\mathrm{supp}_\Omega(\varphi_n) \subset B$, $\forall n$*
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in B} |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| = 0.$

Remarque 1.3 $\varphi^{(k)}$ *désigne la dérivée à l'ordre k de la fonction φ.*

Exercice 1.2 *Soient $\alpha \in C^\infty(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Montrons que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \alpha\varphi_n \to \alpha\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.*

Solution.

— Comme $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors il existe au moins un compact B de Ω tel que $\mathrm{Supp}_\Omega(\varphi) \subset B$ et $\forall n$, $\mathrm{Supp}_\Omega(\varphi_n) \subset B$. On en déduit que $\mathrm{Supp}_\Omega(\alpha\varphi) \subset \mathrm{Supp}_\Omega(\varphi) \subset B$ et $\mathrm{Supp}_\Omega(\alpha\varphi_n) \subset \mathrm{Supp}_\Omega(\varphi_n) \subset B$, $\forall n$. Ainsi $\alpha\varphi_n, \alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

— En utilisant la formule de Leibniz aux produits $\alpha\varphi_n \in C^\infty(\Omega)$ et $\alpha\varphi \in C^\infty(\Omega)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in B} |(\alpha\varphi_n)^{(k)}(x) - (\alpha\varphi)^{(k)}(x)| &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in B} |\sum_{j=0}^{k} C_k^j \alpha^{(j)}(x)\varphi_n^{(k-j)}(x) - \alpha^{(j)}(x)\varphi^{(k-j)}(x))| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} C_k^j \sup_{x\in B} |\alpha^{(j)}(x)| \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in B} |\varphi_n^{(k-j)}(x) - \varphi^{(k-j)}(x)| \\
&\leq M \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in B} |\varphi_n^{(k-j)}(x) - \varphi^{(k-j)}(x)| = 0.
\end{aligned}$$

Puisque $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in B} |\varphi_n^{(k-j)}(x) - \varphi^{(k-j)}(x)| = 0$ et $M = \max\limits_{j\in[\![0,k]\!]} \{C_k^j \sup\limits_{x\in B} |\alpha^{(j)}(x)|\} < +\infty$. D'où le résultat. ☒

1.3 L'espace des distributions

Définition 1.5 *Une distribution sur Ω est une **forme linéaire continue** sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$. Les distributions forment un espace vectoriel noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Remarque 1.4
1. *Une distribution T est donc une application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ faisant correspondre à une fonction test φ un nombre complexe noté $\langle T, \varphi\rangle$ ou bien $T(\varphi)$.*
2. *La notation $\langle , \rangle$ est appelée **crochet de dualité**.*
3. *La linéarité de T signifie que $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$: $\langle T, \lambda\varphi_1 + \varphi_2\rangle = \lambda\langle T, \varphi_1\rangle + \langle T, \varphi_2\rangle$.*

Proposition 1.2 *L'ensemble des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un espace vectoriel. La somme de deux distributions et le produit d'une distribution par un scalaire sont définis comme suit :*

1. $\langle S + T, \varphi\rangle = \langle S, \varphi\rangle + \langle T, \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
2. $\langle \lambda T, \varphi\rangle = \lambda\langle T, \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

1.3.1 Comment montrer qu'une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution ?

Proposition 1.3 *Soit T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors $T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \forall \varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $\langle T, \varphi_n \rangle \to 0$ quand $n \to +\infty$. Autrement dit*

i) Support$(\varphi_n) \subset B$, *avec B est un compact de Ω.*

ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in B} |\varphi_n^{(k)}(x)| \to 0$ *quand $n \to +\infty$.*

Alors $\langle T, \varphi_n \rangle \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exemple 1.6 *Soient $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et T_f une application définie de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ par*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Montrons que $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Solution. Il est clair que T_f est linéaire. Montrons maintenant T_f est continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors $\exists B$ un compact de Ω (i.e $B = [a, b]$, $a, b \in \Omega$) tel que Support$(\varphi_n) \subset B$, $\forall n$.

$$|\langle T_f, \varphi_n \rangle| = |\int_\Omega f(t)\varphi_n(t)dt| \leq \int_\Omega |f(t)\varphi_n(t)|dt = \int_B |f(t)\varphi_n(t)|dt \leq \sup_{t \in B} |\varphi_n(t)| \underbrace{\int_B |f(t)|dt}_{<+\infty} < +\infty$$

Comme $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on tire que $\sup_{t \in B} |\varphi_n(t)| \to 0$. Ce qui montre que $\langle T_f, \varphi_n \rangle \to 0$. Donc $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. ☒

Exemple 1.7 *On définit pour $a \in \Omega$, l'application δ_a de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, par*

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Montons que $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, δ_a est bien linéaire. Soit $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors

$$|\langle \delta_a, \varphi_n \rangle| = |\varphi_n(a)| \leq \sup_{t \in B} |\varphi_n(t)| \to 0.$$

Donc $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$. ☒

Remarque 1.5 *La distribution δ_a est dite **distribution de Dirac** au point a. En particulier $\delta = \delta_0$.*

1.3.2 Types de distributions

On distingue souvent deux classes de distributions : les distributions **régulières** et les distributions **singulières**.

On examine maintenant des distributions particulières, nommées distributions régulières, définies par une intégrale et qui permettent d'associer de manière univoque une fonction localement sommable.

Définition 1.6 *À toute fonction f localement sommable, on associe la distribution T_f ou $[f]$, définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Une telle distribution est dite ***régulière****.*

Remarque 1.6 *Vérifions que $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ existe bien. Soit* Support$(\varphi) \subset I$*, où $I = [a,b]$. Soit $M = \|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in I} |\varphi(x)| = \max_{x\in I} |\varphi(x)|$. On a*

$$|\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx| \leq \int_\Omega |f(x)\varphi(x)|dx = \int_{[a,b]} |f(x)\varphi(x)|dx \leq M \int_a^b |f(x)|dx < +\infty$$

qui existe bien, puisque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. ☑

Exemple 1.8 ***Distribution de Heaviside :*** *distribution régulière.*
Fonction H de Heavside :

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

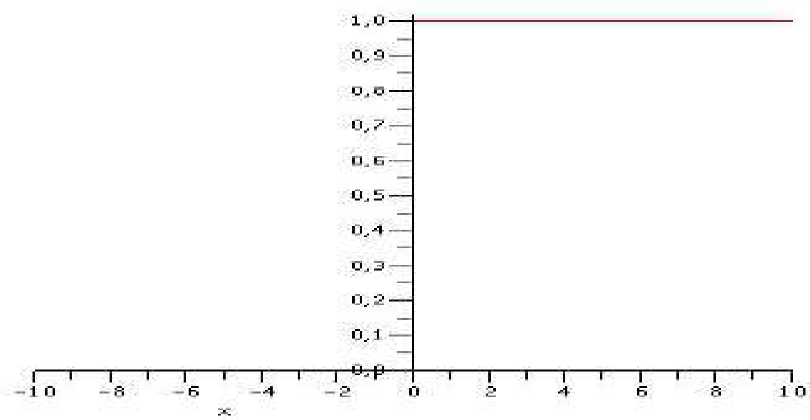


FIGURE 1.2: Fonction de Heavside

Distribution $W = T_H$ de Heaviside :

$$\langle W, \varphi \rangle = \langle T_H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Exemple 1.9 *La distribution porte χ_1 est définie par $\langle T_{\chi_1}, \varphi \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi(t)dt$.*

Remarque 1.7 *Les distributions qui ne s'écrivent pas sous forme de T_f pour f localement sommable sont dites* ***singulières****.*

Exemple 1.10 *Distribution δ_a de Dirac est une distribution singulière.*

Remarque 1.8 *En physique, on écrit souvent $\delta(x)$ ou $\delta(x-a)$ au lieu de δ et δ_a. Cette écriture laisse croire que δ est une fonction ce qui est faux !*

Proposition 1.4 *Deux distributions T et G sont égales ssi $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T, \varphi\rangle = \langle G, \varphi\rangle$.*

Exemple 1.11 *Les distributions régulières T_1 et W sont égales sur $]0, +\infty[$. En effet, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[)$, on a*

$$\langle T_1, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} 1 \times \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Par ailleurs

$$\langle W, \varphi\rangle = \langle T_H, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Proposition 1.5 *Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions localement intégrables. Alors $T_f = T_g \Leftrightarrow f = g$ p.p sur Ω.*

Proposition 1.6 *Soient f et g deux fonctions continues sur Ω telles que $T_f = T_g$, alors $f = g$ sur Ω.*

Définition 1.7 *La distribution nulle $T = 0$ est définie par $\langle T, \varphi\rangle = 0$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

1.4 Convergence faible

Définition 1.8 *Une suite de distributions (T_n) converge vers dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers T, lorsque*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$$

dans $\mathbb{C}$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = T \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exercice 1.3 *Soit $\alpha_n \to a$ quand $n \to +\infty$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que $\delta_{\alpha_n} \to \delta_\alpha$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Solution. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \delta_{\alpha_n}, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi\rangle.$$

D'où le résultat. ☒

Exemple 1.12 *Montrons $\delta_n \to 0$. On a $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle \delta_n, \varphi\rangle = \varphi(n)$. Puisque φ est à support compact, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \delta_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = 0.$$

Définition 1.9 *Si la suite (T_{f_k}) converge vers une distribution T, on dit que la suite (f_k) converge vers T au sens des distributions et on écrit*

$$\lim_{k\to\infty} f_k = T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Remarque 1.9 *Le but de ce qui suit est de justifier le fait que toute fonction qui est dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ peut être vue comme une distribution. On introduit l'application suivante :* $\Phi : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ *donnée par* $\Phi(u) = T_u$, $\forall u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. *L'application* Φ *associe à chaque fonction* u *sa distribution régulière* T_u. *Alors* $\Phi\Big(L^1_{\text{loc}}(\Omega)\Big)$ *n'est autre que l'ensemble des distributions régulières.*

Théorème 1.1 *1.* Φ *est un isomorphisme entre* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *et* $\Phi\Big(L^1_{\text{loc}}(\Omega)\Big)$.

2. Φ *n'est pas surjective.*

Remarque 1.10 *L'intérêt de ce résultat est le fait qu'on peut "identifier" les deux espaces* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *et* $\Phi\Big(L^1_{\text{loc}}(\Omega)\Big)$ *en identifiants en fait chaque fonction* $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *à sa distribution régulière* T_u. *Donc on va dire par* ***abus de language*** *que* u *est une distribution en pensant en fait à* T_u. *C'est dans ce sense qu'on peut dire que les distributions* ***généralisent*** *les fonctions : une fonction localement intégrable est un cas particulier de distribution.*

1.4.1 Approximation de δ par des distributions régulières

Il existe de nombreux théorème permettant d'affirmer qu'une suite de fonctions $(f_n) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $f_n \to \delta$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple 1.13 *Il est clair que la suite de fonctions* (f_n) *définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{n} \\ n^2 x + n, & -\frac{1}{n} \leq x < 0 \\ -n^2 x + n, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

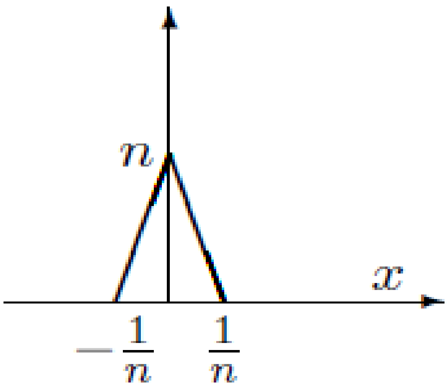


FIGURE 1.3: La courbe de f_n

Nous allons montrer que $f_n \to \delta$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. *Pour* n *suffisamment grand, on a*

$$\begin{aligned} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(t)\varphi(t)dt \simeq \varphi(0) \underbrace{\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(t)dt}_{=1} = \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

puisque $\varphi(t) \simeq \varphi(0)$ *pour* $t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, *quand* $n \to +\infty$. *Ainsi* $f_n \to \delta$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. $\boxtimes$

Théorème 1.2 (***Théorème de convergence dominée***).
Soit (f_n) *une suite de fonctions de* Ω *à valeurs réelles ou complexes, telle que*

— *la suite de fonctions* (f_n) *converge simplement sur* Ω *vers une fonction* f,

— *il existe une fonction intégrable* g *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, |f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors f *est intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Exercice 1.4 *Montrer que* $\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(x) = \delta$, *avec* $f_\epsilon(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$.

Solution. On a

$$\langle \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}, \varphi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}\varphi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\varphi(\epsilon t)dt \to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\varphi(0)dt = \varphi(0),$$

par convergence dominée (φ est bornée).
Avec Maple :
$> with(plots) : f := (epsilon, x)- > 1/Pi * epsilon/(x^2 + epsilon^2); p := epsilon- > plot(f(epsilon, x),$
$x = -4..4, color = COLOR(RGB, rand()/10^{12}, rand()/10^{12}, rand()/10^{12}), thickness = 2);$
$display(p(1), p(0.5), p(0.25));$

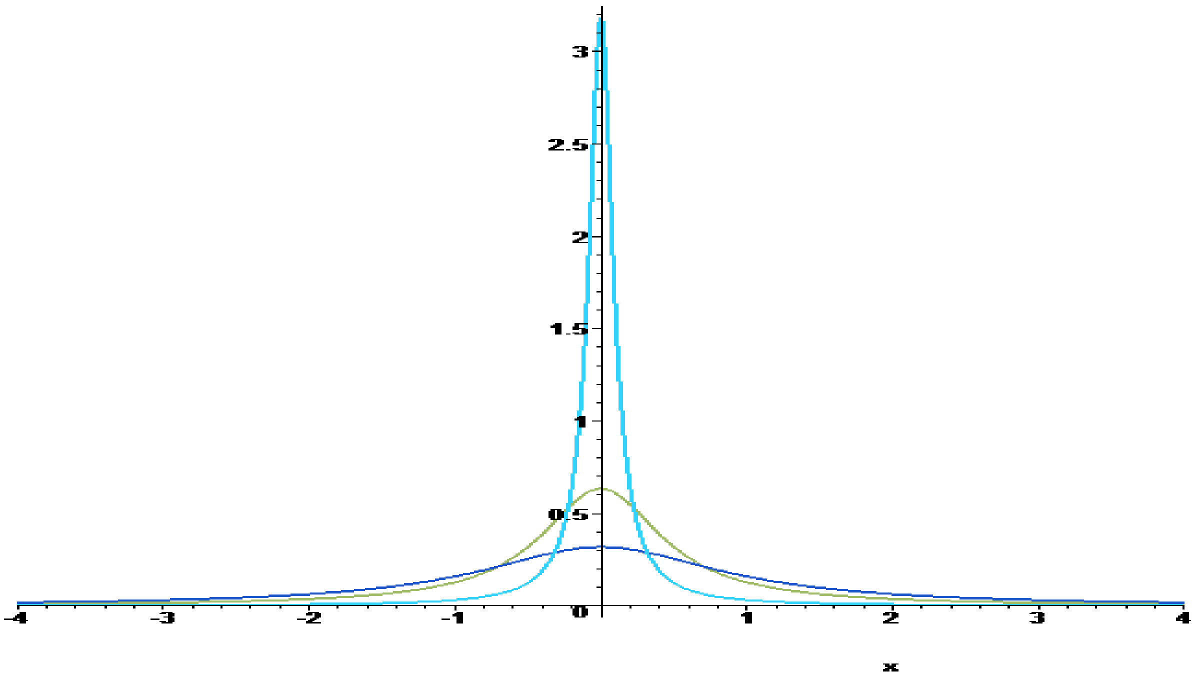


FIGURE 1.4: La courbe de f_ϵ

Remarque 1.11 *Toute combinaison linéaire de distributions de Dirac est une distribution singulière. En particulier la distribution* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$ *(n entier) a des propriétés intéressantes et joue un rôle important en physique. On l'appelle* ***distribution peigne de Dirac*** *et on la note* Ш.

1.4.2 Support d'une distribution

Définition 1.10 *Soit U un ouvert de Ω. On dit qu'une distribution T est nulle dans U si :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \mathsf{Supp}(\varphi) \subset U \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0$$

et que deux distributions T_1 et T_2 coïncident sur U si $T_1 - T_2$ est nulle sur U. La réunion des ouverts sur lesquels T est nulle est un ouvert sur lequel T est nulle (le plus grand ouvert sur lequel T est nulle). Le complémentaire de cet ouvert (qui est un fermé) est appelé ***support*** *de T, on le note $\mathsf{Supp}(T)$, et on a :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \mathsf{Supp}(\varphi) \bigcap \mathsf{Supp}(T) = \emptyset \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0.$$

Exemple 1.14 *On a* $\mathsf{Supp}(\delta_a) = \{a\}$.

Proposition 1.7 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sauf un nombre fini de points de discontinuité de première espèce, alors* $\mathsf{Supp}(T_f) = \mathsf{Supp}(f)$.

Exemple 1.15 *On a* $\mathsf{Supp}(H) = \mathsf{Supp}(T_H) = [0, +\infty[$.

1.4.3 Multiplication des distributions

❶ La multiplication de deux fonctions localement sommables f et g définies par

$$f(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

n'est pas une fonction localement sommable. Cet exemple montre que le **produit** de deux distributions quelconques n'est **pas toujours défini**.

❷ Dans le cas ou un des éléments (disons α) est une fonction de $C^\infty(\Omega)$, on définit le produit (qui a toujours un sens) par

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

❸ À partir de cette définition, on peut définir le produit d'une distribution quelconque T par une distribution régulière T_ψ associée à une fonction indéfiniment dérivable ψ de la manière suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \ \langle T_\psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle.$$

Exemple 1.16 $x\delta = 0$. *En effet* $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle x\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = 0 \times \varphi(0) = 0 = \langle 0, \varphi \rangle$. *Ainsi* $x\delta = 0$.

1.5 Changement de variable affine

1.5.1 Translation

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+a)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x-a)dx, \ \forall a \in \mathbb{R}^*.$$

De plus, la fonction $\tau_a\varphi : x \longmapsto \varphi(x+a)$ translatée de $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ainsi, nous définirons la translatée d'une distribution T de la manière suivante :

Définition 1.11 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit la translatée de T qu'on notera $\tau_a T$ par*

$$\langle \tau_a T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle, \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

où $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x+a)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.17 *On a $\tau_a\delta_b = \delta_{b-a}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. En effet, il est facile de voir que*

$$\langle \tau_a\delta_b, \varphi\rangle = \langle \delta_b, \tau_{-a}\varphi\rangle = \tau_{-a}\varphi(b) = \varphi(b-a) = \langle \delta_{b-a}, \varphi\rangle.$$

Ainsi $\tau_a\delta_b = \delta_{b-a}$.

1.5.2 Homothétie

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda x)\varphi(x)dx = \frac{1}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(\frac{x}{\lambda})dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ceci nous conduit à poser la définition suivante pour l'homothétique d'une distribution T.

Définition 1.12 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit l'homothétique de la distribution T de facteur $\lambda \in \mathbb{R}^*$ qu'on notera $T_{(\lambda)}$ par*

$$\langle T_{(\lambda)}, \varphi\rangle = \frac{1}{|\lambda|}\langle T, \varphi_{(\frac{1}{\lambda})}\rangle, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

où $\varphi_{(\lambda)}(x) = \varphi(\lambda x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.18 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $\delta_{(\lambda)} = \frac{1}{|\lambda|}\delta$. En effet, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,*

$$\langle \delta_{(\lambda)}, \varphi\rangle = \frac{1}{|\lambda|}\langle \delta, \varphi_{(\frac{1}{\lambda})}\rangle = \frac{1}{|\lambda|}\varphi_{(\frac{1}{\lambda})}(0) = \frac{1}{|\lambda|}\varphi(0) = \langle \frac{1}{|\lambda|}\delta, \varphi\rangle.$$

Remarque 1.12 *Ne pas confondre $\delta_{(a)}$ avec δ_a.*

1.6 Dérivées d'une distribution

C'est une propriété essentielle des distributions. Pour une fonction continûment dérivable, par intégration par parties :

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_\Omega f'(t)\varphi(t)dt = -\int_\Omega f(t)\varphi'(t)dt = -\langle T_f, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1.13 *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit la distribution T' et on l'appelle **distribution dérivée** de T par*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Plus généralement pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle T^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \langle T, \varphi^{(m)} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Remarque 1.13
1. *Notons que $\varphi \longmapsto -\langle T, \varphi' \rangle$ est bien linéaire et continue dans $\mathcal{D}(\Omega)$, ce qui implique que T' est une distribution sur $\mathcal{D}(\Omega)$.*
2. *Toute distribution est indéfiniment dérivable.*

Exemple 1.19 *On a $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

Exemple 1.20 (***Dérivée de Heaviside***).
On a $\langle T'_H, \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)dt = -\lim_{x \to +\infty} [\varphi(t)]_0^x = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$. Donc $T'_H = \delta$.

Proposition 1.8 *Si T est une distribution et si g est une fonction de $C^\infty(\Omega)$, alors :*

$$(gT)' = g'T + gT'.$$

Démonstration : Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle (gT)', \varphi \rangle = -\langle T, g\varphi' \rangle. \tag{1.1}$$

Par ailleurs, on a

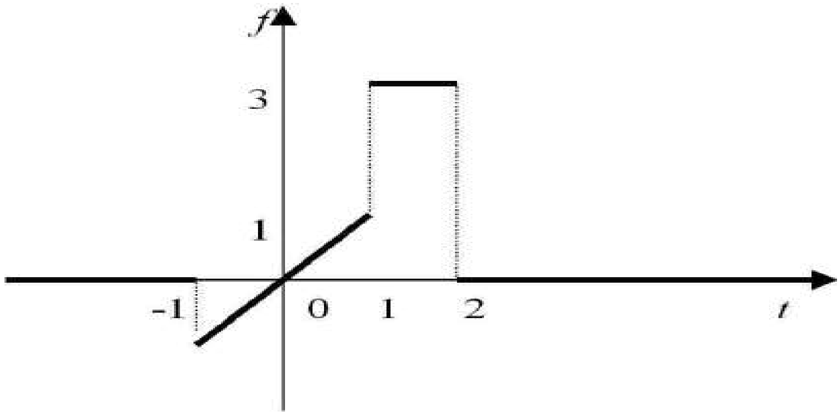
$$\langle g'T + gT', \varphi \rangle = \langle g'T, \varphi \rangle + \langle gT', \varphi \rangle = \langle T, g'\varphi \rangle - \langle T, g'\varphi + g\varphi' \rangle = -\langle T, g\varphi' \rangle. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2), on déduit que $(gT)' = g'T + gT'$. ☒

Proposition 1.9 *Soient T et G deux distributions et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a*

$$(\lambda T + G)' = \lambda T' + G'.$$

Exemple 1.21 *Soit* $f(t) = t\mathbb{1}_{[-1,1]}(t) + 3\mathbb{1}_{[1,2]}(t)$, *alors on a le graphe suivant :*



Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *on a*

$$\begin{aligned}
\langle T'_f, \varphi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} t\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\varphi'(t)dt - 3\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[1,2]}(t)\varphi'(t)dt \\
&= -\int_{-1}^{1} t\varphi'(t)dt - 3\int_{1}^{2} \varphi'(t)dt \\
&= -[t\varphi(t)]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt - 3(\varphi(2) - \varphi(1)) \\
&= -(\varphi(1) + \varphi(-1)) + \langle [\mathbb{1}_{[-1,1]}], \varphi\rangle - 3\varphi(2) + 3\varphi(1) \\
&= 2\varphi(1) - 3\varphi(2) - \varphi(-1) + \langle [\mathbb{1}_{[-1,1]}], \varphi\rangle \\
&= \langle [\mathbb{1}_{[-1,1]}] + 2\delta_1 - 3\delta_2 - \delta_{-1}, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$T'_f = [\mathbb{1}_{[-1,1]}] + 2\delta_1 - 3\delta_2 - \delta_{-1}.$$

1.6.1 Dérivation d'une fonction discontinue

On a vu que la dérivée au sens des distributions de la distribution de Heaviside était égale à la distribution de Dirac. Maintenant si on considère la fonction de Heaviside, sa dérivée est nulle partout sauf en 0 où elle n'est pas définie et la distribution associée n'est pas δ. Par conséquent, les opérations "prendre la distribution associée" et "dérivation" ne commutent pas, ou, autrement dit, $T'_f \neq T_{f'}$. Cela sera ainsi pour toute fonction présentant une discontinuité en un point.

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soient $a_1, \dots a_n$ les points de discontinuité de f (que nous supposons en nombre fini) et

$$\sigma_i^{(0)} = f(a_i^+) - f(a_i^-)$$

le saut de discontinuité de f en a_i.

Théorème 1.3 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Avec les notations précédentes, on a alors*

$$T'_f = T_{f'} + \sum_i \sigma_i^{(0)} \delta_{a_i}.$$

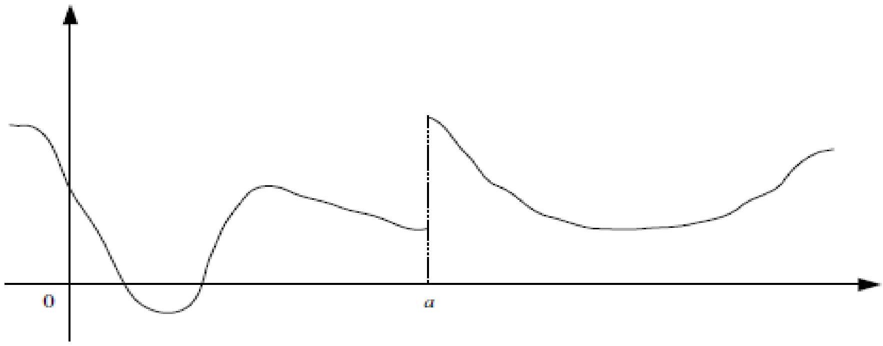


FIGURE 1.5: Fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Exemple 1.22 *On reprend l'Exemple* 1.21, *on trouve*

$$T'_f = T_{f'} + \sigma_{-1}^{(0)}\delta_{-1} + \sigma_1^{(0)}\delta_1 + \sigma_2^{(0)}\delta_2 = [\mathbb{1}_{[-1,1]}] + 2\delta_1 - 3\delta_2 - \delta_{-1}.$$

1.7 Équations différentielles

Rappel : Soit f une fonction continue sur un intervalle $A \subset \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta : I \longrightarrow A$ sont de classe $C^1(I)$, alors la fonction

$$F : x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$$

est de classe $C^1(I)$ et

$$F'(x) = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x)).$$

Proposition 1.10 *Lorsque φ décrit $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, sa dérivée $\varphi'(\mathbb{R})$ décrit*

$$\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) = \Big\{\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R});\ \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)dt = 0\Big\}.$$

Démonstration.

i) Tout d'abord, si φ est une fonction test, sa dérivée φ' est également une fonction-test. De plus, il est clair que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)dt = 0$.

ii) Réciproquement, soit Ψ une fonction-test telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)dt = 0$. Posons, pour tout x,

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \Psi(t)dt.$$

C'est une fonction indéfiniment dérivable, nulle au voisinage de $-\infty$, et égale à $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)dt$ pour x assez grand, c'est-à-dire nulle pour x assez grand. Bref, c'est une fonction-test. Ainsi $\varphi'(x) = \Psi(x)$. ☒

Proposition 1.11 *Pour qu'une distribution T ait une dérivée nulle, il faut et il suffit qu'elle soit constante.*

Théorème 1.4 *Toute distribution T admet une primitive U, et ses primitives sont de la forme $U + cte$.*

Exemple 1.23 *La primitive de δ est T_H.*

Exercice 1.5 *Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre $T' - aT = \delta$ au sens des distributions.*

Solution. On a

$$T' - aT = \delta \Leftrightarrow e^{-ax}(T' - aT) = e^{-ax}\delta \Leftrightarrow e^{-ax}(T' - aT) = \delta \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{-ax}T) = \delta \Leftrightarrow T = e^{ax}(H + c).$$

Avec Maple :
$> dsolve(diff(T(x), x) - a * T(x) = Dirac(x), T(x));$

$$T(x) = (Heaviside(x) + C_1)e^{(ax)}$$

Exercice 1.6 *Résolution de $u' + au = T$, avec u, T sont des distributions et $a \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Solution. Notons A une primitive de a. On a

$$u' + a(x).u = T \Leftrightarrow e^{A(x)}(u' + a(x).u) = e^{A(x)}T \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{A(x)}u) = e^{A(x)}T \Leftrightarrow u = e^{-A(x)}\left[\int e^{A(x)}T dx + C_1\right].$$

Avec Maple :
$> dsolve(diff(u(x), x) + a(x) * u(x) = T(x), u(x));$

$$u(x) = \left[\int T(x)e^{\int a(x)dx}dx + C1\right]e^{\int -a(x)dx}$$

1.8 Distributions tempérées

1.8.1 L'espace de Schwartz

Définition 1.14 *Une fonction f fait partie de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ lorsqu'elle est indéfiniment dérivable, et si f et toutes ses dérivées sont **à décroissance rapide**, c'est-à-dire que leur produit par une fonction polynomiale quelconque est borné à l'infini. Les fonctions appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont dites **déclinantes**. Alors l'espace de Schwartz peut être décrit par*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall (m, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathcal{N}_{mj}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(j)}(x)| < +\infty\}.$$

Exemple 1.24 $x \longmapsto e^{-x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.25 $x \longmapsto e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *et* $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$. *En effet* $x \longmapsto e^{-|x|} \notin C^\infty(\mathbb{R})$ *et* $x \longmapsto \dfrac{x^4}{x^2+1}$ *n'est pas bornée dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 1.14 *Il est évident que* $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 1.15 *On définit l'espace vectoriel* $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ *des fonctions de classe* $C^\infty(\mathbb{R})$ *à croissante lente par* $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}) = \Big\{\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{C},\ \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \exists C_k > 0,\ \exists n_k \in \mathbb{N};\ |\alpha^{(k)}(x)| \leq C_k(1+|x|^{n_k})\Big\}$.

Exemple 1.26 $x \longmapsto \sin(x) \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$, $x \longmapsto \cos(x) \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ *et* $x \longmapsto e^x \notin \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$.

Proposition 1.12
1. $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *on a* $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. *Soient* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{C}[X]$ *et* $R \in \mathbb{C}(X)$ *sans pôle sur* $\mathbb{R}$, *alors* $P\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *et* $R\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
3. $\alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ *et* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
4. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
5. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \tau_a\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \forall a \in \mathbb{R}^*$.

Définition 1.16 *Une* ***distribution tempérée*** T *est une forme linéaire continue sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. *L'ensemble des distributions tempérées est noté par* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Définition 1.17 *Une suite de fonctions* $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *vers une fonction* ϕ *si* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *et si*

$$\forall (m,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_{mj}(\phi_n - \phi) = 0.$$

1.8.2 Comment montrer qu'une distribution est tempérée ?

Proposition 1.13 *T est une distribution tempérée si et seulement si*

i) *T est une forme linéaire.*

ii) *Si* $\varphi_n \to 0$ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = 0$.

Exemple 1.27 *L'espace* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est un sous-espace vectoriel des différents espaces*

$$L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C},\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx < +\infty\},\ \textit{pour}\ 1 \leq p < +\infty.$$

Il est d'ailleurs dense dans chacun de ces ensembles.

Exemple 1.28 *Les distributions à support compact, comme la distribution de Dirac définissent des distributions tempérées.*

Proposition 1.14 *On a* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Montrons que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Comme support de φ_n est compact, alors $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En effet

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{N}_{mj}(\varphi_n) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in B} |x^m \varphi_n^{(j)}(x)| \leq C_m \sup_{x\in B} |\varphi_n^{(j)}(x)| \to 0,$$

avec $C_m = \sup_{x\in B} |x|^m$, puisque $x \longmapsto |x|^m$ est continue sur un compact B, donc bornée et atteint ses bornes. Comme $\lim_{n\to+\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = 0$. On en déduit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Dans la pratique, la plupart des distributions que nous rencontrons seront tempérées.

Exemple 1.29 $\delta_a, \delta'_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exemple 1.30 *En général $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$: Si $f(x) = e^{2x}$ et $\varphi(x) = e^{-x}$, alors*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \infty.$$

La proposition suivante donne une condition suffisante pour que T_f soit tempérée.

Proposition 1.15 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. On suppose $\exists p \geq 0$ tel que*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|^p} dx < \infty,$$

alors $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Démonstration. T_f est linéaire. De plus si $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \varphi_n\rangle| &= |\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)dx| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|^p} |(1+|x|^p)\varphi_n(x)|dx \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+|x|^p)\varphi_n(x)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|^p} dx}_{<+\infty} \to 0.
\end{aligned}$$

1.8.3 Multiplication dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Définition 1.18 *Si $\alpha \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, alors $\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est définie par*

$$\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

*est une distribution appelée **distribution produit** de T par α.*

1.9 Distributions dans $\mathbb{R}^n$

D'une façon analogue, on peut définir des distributions à n dimensions comme fonctionnelles sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ et à support borné. Par exemple, la distribution régulière associée à une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ localement sommable est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \langle T_f, \varphi\rangle = \int \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$$

et

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ fois}}).$$

Exemple 1.31 *Soit*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \varphi(\sin(xy)) dxdy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} \varphi(\sin(xy)) dxdy.$$

Montrons que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Il est clair que T est linéaire. Puisque $\mathsf{Support}(\varphi_n) \subset B$*, avec B est un compact de $\mathbb{R}^2$, telle que $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|\varphi_n(\sin(xy))| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_n(t)| = \sup_{t \in B} |\varphi_n(t)|.$$

Donc

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| \leq \sup_{t \in B} |\varphi_n(t)| \underbrace{\int_B \int_B e^{-x^2-y^2} dxdy}_{<+\infty} \to 0.$$

Ainsi $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.