

导弹三维空间无控弹道仿真及分析

付安然, 朱俊帆, 张普熙, 潘煜霖

摘要: 建立了俄罗斯坐标系与英美坐标系下的无控导弹六自由度弹道计算模型, 编写了一套具有良好用户体验和交互性的弹道仿真程序界面, 形成无控弹道计算软件。实现了基于Qt的散点绘图, 基于python的matplotlib库三维绘图的导弹三维弹道曲线绘制。完成对导弹弹道、速度、姿态变化的分析及在两种坐标系下的对比分析。通过改变导弹静稳定力矩系数以及阻尼力矩系数, 分析导弹静稳定系数以及阻尼特性对其运动的影响。完成两种模型之间的交换计算, 对比两坐标系下仿真计算的误差。采用遗传算法给出射程最远、高度最高时的弹道倾角。

关键词: 无控导弹弹道仿真; 六自由度导弹模型; 无控弹道计算软件; 遗传算法优化;

导弹在空间力系的作用下飞行, 当操纵机构不偏转时, 其在空间做无控飞行。研究导弹的无控飞行是研究其有控飞行的基础。通过分析导弹在飞行中所受的力和力矩、定义相应的坐标系, 可建立由动力学方程、运动学方程、质量变化方程、几何关系方程组成的无控导弹运动模型。在给定初始条件的基础上, 可采用龙格库塔数值积分法对导弹模型的一阶常微分方程组进行求解。根据在两种坐标系下建立的数学模型, 可使用C语言或MATLAB语言等编写导弹无控弹道计算软件。使用Qt图形界面, 可编译得到了具有可交互图形界面的无控弹六自由度仿真软件。利用该软件可分析导弹弹道、速度、姿态变化以及导弹运动系数对其运动的影响。基于此程序可以完成利用遗传算法给出射程最远、高度最高时的弹道倾角。

1 三维无控弹道模型建立

1.1 俄罗斯坐标系下模型建立

导弹在空间的运动一般看成可控制的变质量系统具有6个自由度的运动。在俄罗斯坐标体系下, 描述无控导弹所受力、力矩与导弹运动参数的方程组由6个动力学方程、6个运动学方程、1个质量变化方程和3个几何关系方程构成:

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dv}{dt} &= P \cos \alpha \cos \beta - X - mg \sin \theta \\
 mV \frac{d\theta}{dt} &= P(\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + \\
 &\quad Y \cos \gamma_v - Z \sin \gamma_v - mg \cos \theta \\
 -mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} &= P(\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + \\
 &\quad Y \sin \gamma_v + Z \cos \gamma_v \\
 J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_z \omega_y &= M_x \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_y \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_y \omega_x &= M_z \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \psi_v \\
 \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\
 \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \psi_v \\
 \frac{d\theta}{dt} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma \\
 \frac{d\psi}{dt} &= (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) / \cos \theta \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \tan \theta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_c \\
 \sin \beta &= \cos \theta [\cos \gamma \sin(\psi - \psi_v) + \\
 &\quad \sin \theta \sin \gamma \cos(\psi - \psi_v)] - \sin \theta \cos \theta \sin \gamma \\
 \sin \alpha &= \{\cos \theta [\sin \theta \cos \gamma \cos(\psi - \psi_v) - \\
 &\quad \sin \gamma \sin(\psi - \psi_v)] - \sin \theta \cos \theta \cos \gamma\} / \cos \beta \\
 \sin \gamma_v &= (\cos \alpha \sin \beta \sin \theta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \theta + \\
 &\quad \cos \beta \sin \gamma \cos \theta) / \cos \theta
 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

1.2 英美坐标系下模型建立

在英美坐标体系下, 导弹无控六自由度运动模型由6个描述导弹质心动力方程、3个描述质心运动方程、三个描述导弹质心转动方程, 以及两个角度的计算方程构成:

$$\begin{aligned}
 m \frac{du}{dt} &= T - D \cos \alpha \cos \beta - C \cos \alpha \sin \beta + L \sin \alpha - m g \sin \theta - m q w + m r v \\
 m \frac{dv}{dt} &= D \sin \beta + C \cos \beta + m g \sin \phi \cos \theta - m r u + m p w \\
 m \frac{dw}{dt} &= -D \sin \alpha \cos \beta - C \sin \alpha \sin \beta - L \cos \alpha + m g \cos \phi \cos \theta - m p v + m q u \\
 I_x \dot{p} + (I_z - I_y) q r &= M_{xb} \\
 I_y \dot{q} + (I_x - I_z) p r &= M_{yb} \\
 I_z \dot{r} + (I_y - I_x) p q &= M_{zb} \\
 \dot{x} &= u \cos \psi \cos \theta + v (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) + w (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\
 \dot{y} &= u \cos \theta \cos \psi + v (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) + w (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\
 \dot{z} &= -u \sin \theta + v \cos \theta \sin \phi + w \cos \theta \cos \phi \\
 \dot{\phi} &= (p \cos \theta + q \sin \theta \sin \phi + r \cos \phi \sin \theta) / \cos \theta \\
 \dot{\theta} &= (q \cos \theta \cos \phi - r \cos \phi \sin \phi) / \cos \theta \\
 \dot{\psi} &= (q \sin \phi + r \cos \phi) / \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{1-2}$$

2 无控弹道仿真计算软件开发

仿真软件界面使用Qt软件开发, Qt是一款跨平台C++图形用户应用程序开发框架, 是一种面向对象的开发框架, 其明显的优势就是支持跨平台开发, 支持Linux、Windows、iOS等平台, 具有较好的通用性。为使该仿真项目能够满足具有较好的人机交互环境、能够方便地设定仿真参数以及能够清晰分析导弹各项数据等要求。仿真软件实现的界面效果如图2-1所示:



图 2-1 仿真软件界面

仿真软件计算弹道的内核程序采用C语言开发, C语言作为一种编译型语言, 能生成计算机能够直接执行的二进制指令, 因此, 相比于解释性语言MATLAB有着明显的计算速度上的优势, 据估计, C语言的运行速度相较于MATLAB、python等语言运行速度快28倍以上。考虑到项目后期计划完成一定的优化任务, 而任务过程中需要在不同初始条件下大量调用动力学内核, 因此使用C语言编写动力学内核能极大程度上节省优化时间。同时, C语言作为一个通用型语言, 以其为内核理论上可以定制任意功能, 基于C开发的内核能让团队对数据的处理和流向有更清晰的把握。

该程序主要具有如下几个功能及特点:

- (1) 在主界面中能够通过时间检索每个时间点导弹的各项运动参数
- (2) 主界面的下拉框中可以选择18中图像显示到界面中心
- (3) 主界面左上角的开始中可以设定仿真初值及相关的常量
- (4) 能够使用Qt自带的散点绘图得大致的三维弹道图形
- (5) 外部调用python程序绘制基于matplotlib的三维图像, 更加专业清晰
- (6) 提供相应的函数接口和数据导出接口, 方便优化设计过程中MATLAB程序直接调用该程序的算法内核。

3 导弹无控弹道分析

3.1 导弹运动参数分析

弹道仿真程序使用四阶龙格-库塔法对导弹运动方程组积分得到弹道曲线。给定如下的初始条件:

表 3-1 初始条件

初始高度/m	弹道倾角/°	质量/kg	速度/(m/s)
20	18	52.38	20

通过仿真软件计算可以得到弹道曲线如图3-1所示:

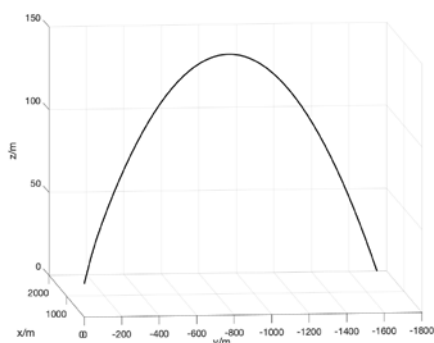


图 3-1 弹道曲线

在无控状态下, 由于弹的静稳定性, 以及重力作用, 弹道趋向于一个抛物线形态。

攻角变化曲线如图3-2所示:

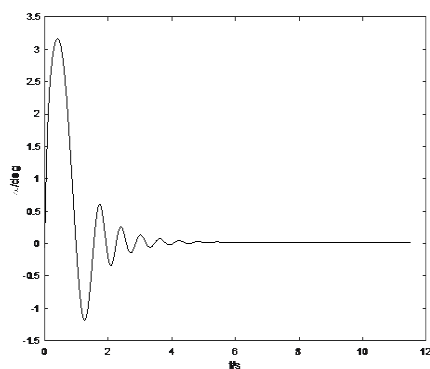


图 3-2 攻角曲线

由于导弹是静稳定的, 攻角曲线能够正常观察到弹体环节的短周期振荡, 并在静稳定力矩的作用下稳定在0附近, 略微大于0是由于弹轴滞后于由重力引起的弹道倾角的减小。

侧滑角变化曲线如图3-3所示:

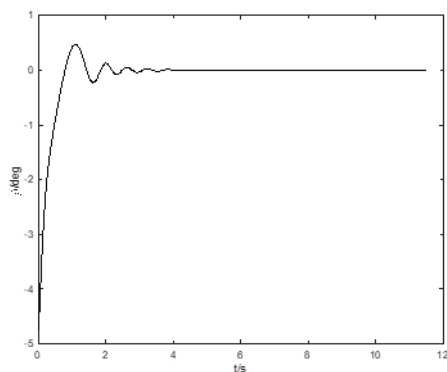


图 3-3 侧滑角曲线

在初始-5°侧滑角扰动后, 来流对弹体产生绕y轴正向的偏航静稳定力矩, 使得弹道偏角快速减小, 偏航角增大, 即侧滑角由-5°向0过渡, 振荡, 并稳定在0。

弹道偏角以及偏航角变化曲线如图3-4及图3-5所示:

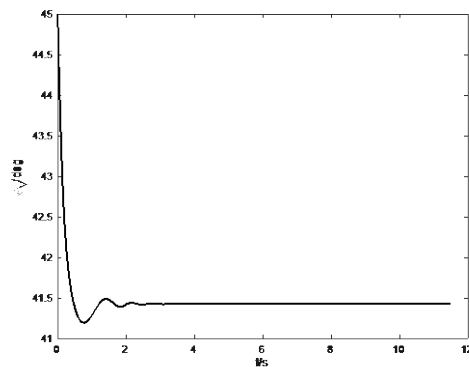


图 3-4 弹道偏角曲线

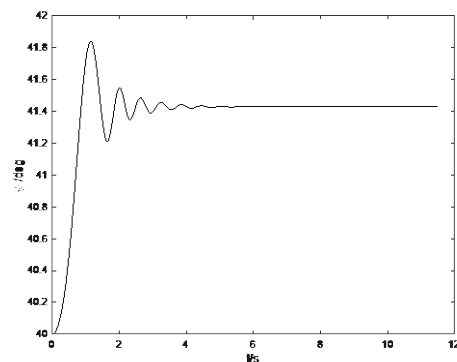


图 3-5 偏航角曲线

3.2 改变导弹运动系数对其运动影响

由导弹运动方程组中攻角的计算公式可以得到式3-1:

$$J_z \ddot{\alpha} - M_z^{Wz} \alpha - M_z^a \alpha = -J_z \ddot{\theta} - M_z^{Wz} \theta \quad (3-1)$$

从式3-1可以看出, 导弹攻角是一个二阶振荡系统。同理可得, 弹道的侧滑角也是一个二阶振荡系统。分别改变导弹的静稳定系数至初始值的0.7和1.3倍, 得到攻角和侧滑角变化曲线如图3-6和3-7所示:

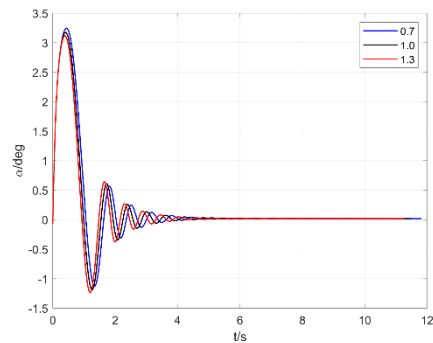


图 3-6 改变静稳定系数攻角变化曲线

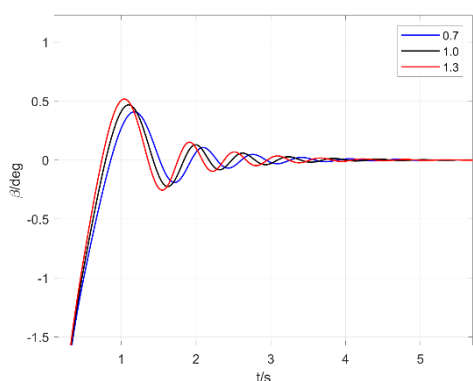


图 3-7 改变静稳定系数侧滑角变化曲线

从图3-6和3-7可发现,随着导弹静稳定系数的增大,导弹攻角和侧滑角的响应速度明显变快,超调量增加,导弹具有更大的振荡频率。

改变导弹阻尼力矩系数可得到攻角和侧滑角变化曲线如图3-8和3-9所示:

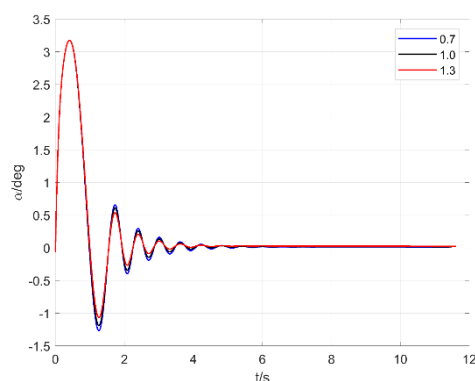


图 3-8 改变阻尼力矩系数攻角变化曲线

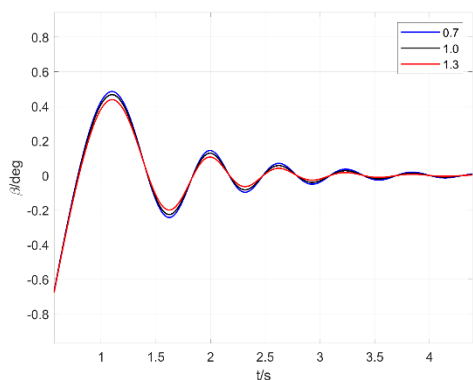


图 3-9 改变阻尼力矩系数侧滑角变化曲线

从图3-8和3-9可发现,改变导弹的阻尼力矩系数可以影响导弹攻角和侧滑角响应时的超调量和振荡幅值,较大的阻尼力矩系数可以使得导弹的振荡幅度较小。

4 坐标系切换运算

在研究导弹飞行力学问题时,常见的坐标系有俄罗斯坐标体系和英美坐标体系。两套体系的坐标系定义不同,坐标系之间的转换矩阵也不相同,基于两套坐标体系建立的飞行器的运动模型也不相同。我国大陆地区在研究导弹运动时,常用俄罗斯坐标体系,大多数专著、论文和研究报告中都是以俄罗斯坐标体系为基础建立数学模型,进而展开论述的。但是欧美国家和地区的文献中则是基于英美坐标体系展开研究的。因此,在研究欧美方面的资料时,两坐标系的转换是必不可少的。

项目开发的弹道仿真软件可实现俄罗斯坐标体系和英美坐标系的切换计算。其中俄罗斯坐标体系和英美坐标系主要的区别为导弹运动参数的符号转换,其中的转换关系如式4-1所示:

$$\left. \begin{aligned} V_{x_1} &= u \\ V_{y_1} &= -w \\ V_{z_1} &= v \\ \omega_{x_1} &= p \\ \omega_{y_1} &= -q \\ \omega_{z_1} &= r \\ x_S &= x \\ y_S &= -z \\ z_S &= y \\ \vartheta &= \theta \\ \psi_S &= \psi \\ \gamma &= \phi \\ m_S &= m \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

为试验仿真软件对于两种模型切换计算的正确性和误差,将弹道分时间段交由两个程序进行交替计算和数据传递。0~3秒由俄罗斯坐标系进行计算,并将3秒时的数据传给英美坐标系下弹道3~6秒的初值。英美坐标系负责3~6秒的弹道计算,并将6秒时的数据传回俄罗斯坐标系,作为下一时间段的初值。如此循环,直至弹道计算完成。可得到切换计算的弹道各参数曲线如下:

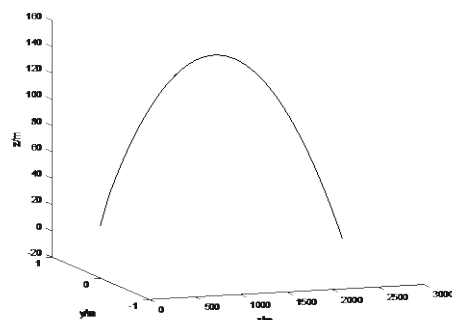


图 4-1 坐标系切换计算弹道曲线

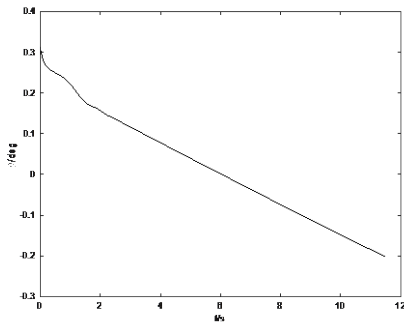


图 4-2 坐标系切换计算弹道倾角曲线

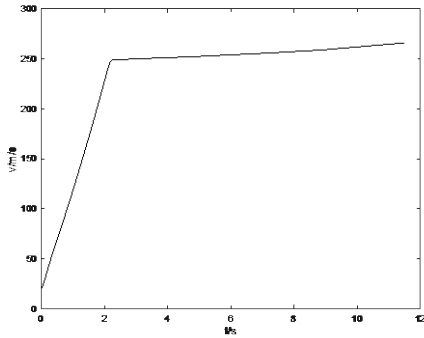


图 4-3 坐标系切换计算速度曲线

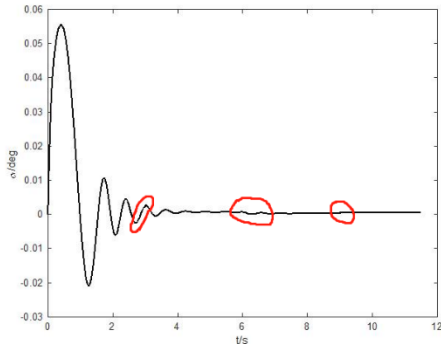


图 4-4 坐标系切换计算攻角曲线

对交换计算后绘制的图像进行分析,可以发现大部分数据的图像没有异常,但攻角与角速度关于时间的图像在时间切换后有不应存在的振荡现象。推测是两个计算模型之间存在差异,导致计算后有计算误差。

5 遗传算法弹道优化

为得到无控导弹发射时射程最远、高度最高的弹道倾角,可以使用遗传算法进行优化。

5.1 遗传算法

遗传算法可以解决具有任何类型的约束条件的平滑或非平滑优化问题,包括整数约束。它是一种随机的、基于种群的算法,通过种群之间的变异和交叉进行随机搜索,具有全局收敛性,缺点是模型调用次数通常较多,远高于梯度法、拟牛顿法等数值优化算法。

得益于基于C编写的弹道仿真程序,相较于Matlab等解释型语言,编译型语言运行速度快1~2个数量级,更适合作为优化等需要大规模调用次数的程序。单次仿真耗时对比如下:

表 5-1 仿真耗时

程序语言	MATLAB	C语言
单次耗时/s	5.76	20

因此,在C语言程序的高效运行下,我们可以在短时间内进行遗传算法优化。

由能量原理简单分析,当发射角度为 90° 时,弹道高度能够达到最高。因此接下来主要进行弹道射程的优化。问题如下:

$$\min \frac{1}{x_{max}} = f(\theta_0), \theta_0 \in (0, 90) \quad (5-1)$$

为一维单目标无约束优化问题。使用Matlab优化工具中的GA函数进行优化,遗传算法参数如下:

表 5-2 遗传算法参数

设置	参数
Crossover Fraction	0.8
Function Tolerance	1e-6
Max Generations	200
Max Stall Generations	50
Migration Fraction	0.2

结果如下:

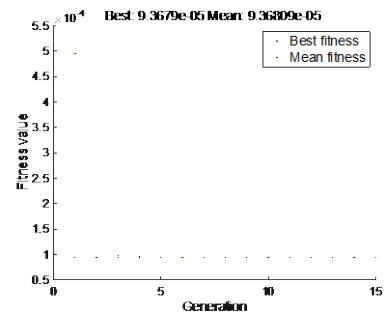


图 5-1 遗传算法收敛过程

表 5-3 遗传算法优化结果

发射角/ $^{\circ}$	射程/m	nfe	总耗时/s
69.136	10675	777	74.8

由于该问题为较为简单的一维问题，可以直接画出高度角-射程曲线，容易发现是一个单峰函数，如下图所示：

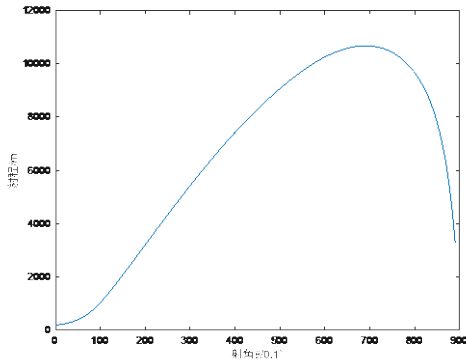


图 5-2 高度角-射程曲线

因此可以使用无约束优化方法来得到最值，模型调用次数(nfe)显著少于遗传算法。

对于如此的一维问题，仅需要使用无约束优化方法（如梯度法、BFGS拟牛顿法等）的一维搜索部分即可。较为简单的是进退法-黄金分割法。通过进退法确定单峰区间，然后用黄金分割逼近最值。

5.2 进退法（寻找单峰区间）

给定初始点 x_0 与初始步长 h ，令 $a_1=x_0$ ， $a_2=a_1+h$ ，计算目标函数值 $f(a_1)$ ， $f(a_2)$ 并比较其函数值的大小当 $f(a_1) \geq f(a_2)$ ，说明极小值点在 a_1 的右侧，应作前进运算，即加大步长，并令 $a_3=a_2+2h$ ，并比较这两点函数值 $f(a_2)$ ， $f(a_3)$ ，若 $f(a_1)$ 小于 $f(a_2)$ ，则取区间 $[a,b]=[a_1,a_1+3h]$ ，否则，则将步长加倍。重复上述运算，直至出现仅包含一个极小值点的单谷区间。

若 $f(a_1) < f(a_2)$ ，说明极小值在 a_1 的左侧，应作后退运算，即从 x_0 出发反方向搜索。令 $h=-h$ ，取试点 $a_3=a_1-h$ 并计算 $f(a_3)$ 。若 $f(a_3) \geq f(a_1)$ ，则 $[a,b]=[a_1-h,a_1+h]$ ，否则加倍步长继续后退，直至出现仅包含一个极小值点的单谷区间。

5.3 黄金分割法

在搜索区间 $[a,b]$ 中取两点 c,d 使得 $ad/ab=bc/ba=(\sqrt{5}-1)/2$ ，然后比较这两点的函数值 $f(c)$ 和 $f(d)$ 。

若 $f(c) > f(d)$ ，则极值点必定在 $[c,b]$ 之间。

若 $f(c) = f(d)$ ，则极值点必在 $[c,d]$ 之间。

若 $f(c) < f(d)$ ，则极值点必然在 $[a,d]$ 之间。

不断迭代缩小区间长度，直至区间长度小于给定的精度 ε ，则认为找到了极值点且极值点为区间的中点。

具体迭代过程如下： $c=a+0.382(b-a)$ 、 $d=a+0.382(b-a)$

令 $f_c=f(c)$ ， $f_d=f(d)$

若 $f(c) < f(d)$ ，令 $b=d$ ， $d=c$ ， $f_d=f_c$ ，求新点 c

若 $f(c) > f(d)$ ，令 $a=c$ ， $c=d$ ， $f_c=f_d$ ，求新点 d

当 $(b-a) \leq \varepsilon$ ，终止迭代， $x^*=(a+b)/2$ ，否则继续迭代。

表 5-4 一维搜索参数

进退法步t	熟练误差 ε
0.2	20

优化结果如下：

表 5-5 优化结果

发射角/ $^{\circ}$	射程/m	nfe	总耗时/s
68.934 $^{\circ}$	10675	37	3.62

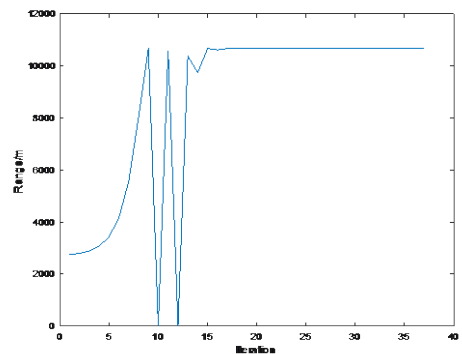


图 5-3 一维搜索迭代

7 结 论

本项目通过对三维空间内,两种坐标系下无控导弹运动的分析,完成了以下内容,得到了结论如下:

编写了一套具有良好用户体验和交互性的弹道仿真程序界面,形成无控弹道计算软件。实现了基于Qt的散点绘图,基于python的matplotlib库三维绘图的导弹三维弹道曲线绘制。完成对导弹弹道、速度、姿态变化的分析及在两种坐标系下的对比分析。通过改变导弹静稳定力矩系数以及阻尼力矩系数,分析导弹静稳定系数以及阻尼特性对其运动的影响。完成两种模型之间的交换计算,对比两坐标系下仿真计算的误差。采用遗传算法给出射程最远、高度最高时的弹道倾角。分点总结,只写结论,其他背景、方法都不必赘述。

1) 编写了一套具有良好用户体验和交互性的弹道仿真程序界面,形成无控弹道计算软件。

2) 实现了基于Qt的散点绘图,基于python的matplotlib库三维绘图的导弹三维弹道曲线绘制。

3) 无控导弹在推力和自身重力以及气动力的共同作用下呈现出抛物线弹道,由于导弹具有

俯仰静稳定性和侧向稳定性,导弹攻角和侧滑角能够自动回正。

4) 导弹静稳定力矩系数影响其攻角和侧滑角响应速度和振荡频率,导弹阻尼力矩系数影响其攻角和侧滑角振荡幅值。

5) 两种模型之间的交换计算大部分数据的图像正常,但攻角与角速度关于时间的图像在时间切换后有存在的微小振荡。推测是两个计算模型之间存在差异,导致计算后产生误差。

6) 通过遗传算法计算可以得到在发射角为 68.934° 时,无控导弹射程最远,达到10675m。

致 谢

感谢王晓芳老师的批评与指导!

参 考 文 献

- [1] 钱杏芳,林瑞雄,赵亚男.导弹飞行力学[M].北京:北京理工大学出版社,2000.
- [2] 林海,王晓芳.飞行力学数值仿真[M].北京:北京理工大学出版社,2018