Les options exotiques : Pricing et couverture d'options asiatiques

Auteurs : Diakité Abdoul Oudouss & Ettadlaoui Othmane

Encadrante : Pr. AKDIM

Filière : Ingénieur en Finance et Actuariat
Faculté des Sciences et Techniques
Université Cadi Ayyad

December 28, 2022

Contents

1 Introduction

Les options exotiques sont des produits complexes, qui constituent un marché d'une réelle importance depuis les années 1990. Leur nom vise surtout à les différencier des options standards européennes ou américaines. Ce sont des options qui ne sont traitées que sur le marché gré à gré ou OTC (Over the counter) à la différence des options standards traitées sur le marché organisés. Elles visent à répondre à des besoins spécifiques d'assurance des grands groupes financiers, des compagnie d'assurance, fonds de pension. etc. La notion d'exotisme est bien sur toute relative, car au fur et à mesure q'un produit financier devient très liquide il perd progressivement son caractère d'exotisme.

2 Exemples d'options exotiques

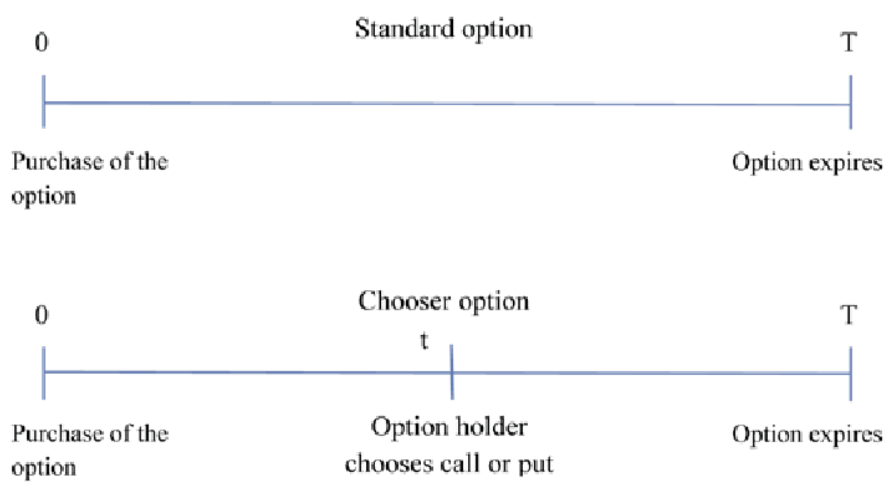
Il existe une panoplie de type d'options exotiques. En effet, ces dernières étant négociée sur le marché OTC, laissent la marge aux contre parties de créer le type de contrat qui leur convient.
Nous nous intéressons particulièrement aux options asiatiques, c'est pourquoi nous leurs dédions une section entière.

2.1 Chooser

La caractéristique spécifique d'une option au choix (aussi appelé option *as you like it*) est qu'après un certain delai initialement spécifié, son détenteur peut choisir si son option est un *call* ou un *put*. Si ce choix peut être effectué à la date T_1, la valeur de l'option est à cette date:

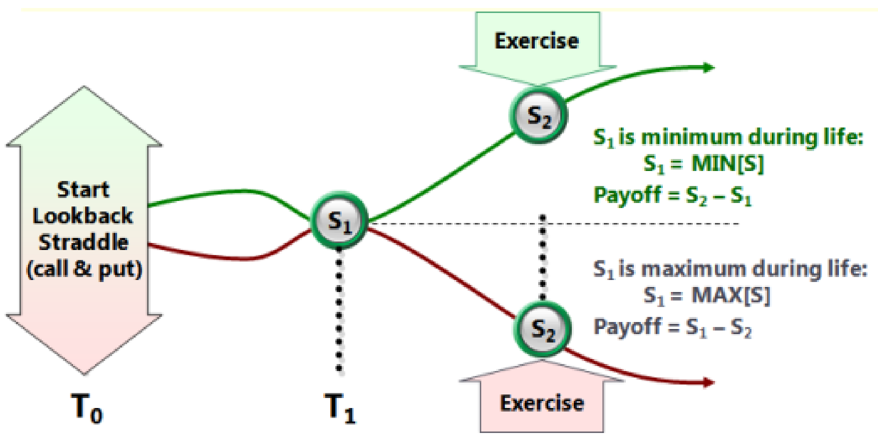
$$max(c; p)$$

avec c et p les valeurs respectives des call et put sous-jacent.



2.2 Lookback

Les payoffs délivrés par les options lookback dépendent du niveau maximal ou minimal atteint par le prix du sous-jacent pendant la durée de vie de l'option. Le payoff d'un call lookback européen est égal au montant duquel le prix terminal du sous-jacent dépasses le prix minimal atteint par ce même actif pendant la durée de vie de l'option. Le payoff d'un put lookback européen est égal au montant duquel le prix maximal du sous-jacent atteint pendant la durée de vie de l'option dépasse le prix terminal du sous-jacent.



2.3 Barrières

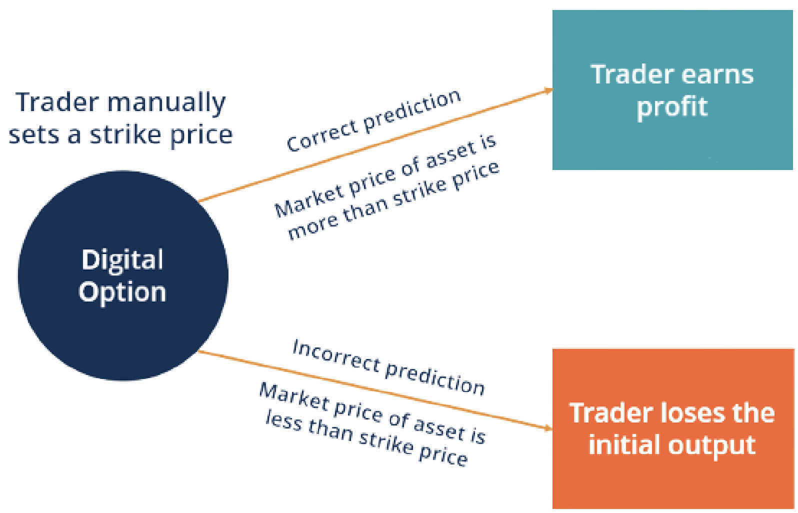
Les options barrières sont des options dont le payoff dépend du passage éventuel d'un seuil (déterminé initialement) par le prix de l'actif sous-jacent pendant une certaine période. Nombre d'options barrières sont régulièrement échangées sur les marchés de gré à gré. Leur succès auprès de certains acteurs de marché tient au fait qu'elles sont moins coûteuses que les options traditionnelles correspondantes.
Ces options barrières peuvent être classées dans deux catégories distinctes :les options *knock-out* et les options *knock-in*.
Une option knock-out cesse d'exister une fois que le prix de l'actif sous-jacent atteint un certain seuil, la barrière, alors qu'une option knock-in ne commence à exister qu'une fois la barrière atteinte par le prix de l'actif sous-jacent.

Exemple :
Une grande entreprise doit périodiquement convertir en marks ses revenus perçus en dollars. Etant donne la faiblesse du Dollar, l'entreprise craint une forte dépréciation de ses revenus en Marks, et cherche à acquérir un put (en dollars sur le mark) expirant dans 6 mois. Si le change mark-dollar est de 1,4225, la valeur d'un put de prix d'exercice 1,42 de maturité 6 mois est de 0,039\$. Si l'entreprise acheté un DIP (down-and-in Put) au niveau H = 1,27 la valeur de

l'option 0,011 est presque 4 fois moindre.

2.4 Binnaires

Les options binaires (encore appelées digitales) ont pour particularité des payoffs discontinus. L'exemple le plus simple d'option binaire est le call *cash-or-nothing*, qui n'engendre aucun payoff quand l'option termine en dehors, mais paie un flux fixé, Q, quand l'option termine en dedans. Le put (call) *cash-or-nothing* paie un flux Q si le prix terminal de l'actif sous-jacent est inférieur (supérieur) au prix d'exercice, et ne paie rien sinon.



3 Les options asiatiques

3.1 Historique

La définition de l'option asiatique a été élaborée par deux banquiers londoniens travaillant pour le Bankers Trust dans les années 1980, Mark Standish et David Spaughton. En 1984, la Banque d'Angleterre a accordé aux banques ses premières licences leur permettant d'exercer des options de change sur le marché londonien, et c'est ainsi que l'option asiatique a été développée. En 1987, alors qu'ils se trouvaient à Tokyo pour des raisons professionnelles, Standish et Spaughton ont annoncé qu'ils avaient mis au point la "première formule de tarification utilisée commercialement pour les options liées au prix moyen du pétrole brut". Leur nouvelle option exotique a été baptisée "option asiatique", car ils se trouvaient en Asie lorsqu'ils l'ont développée.

3.2 Définition

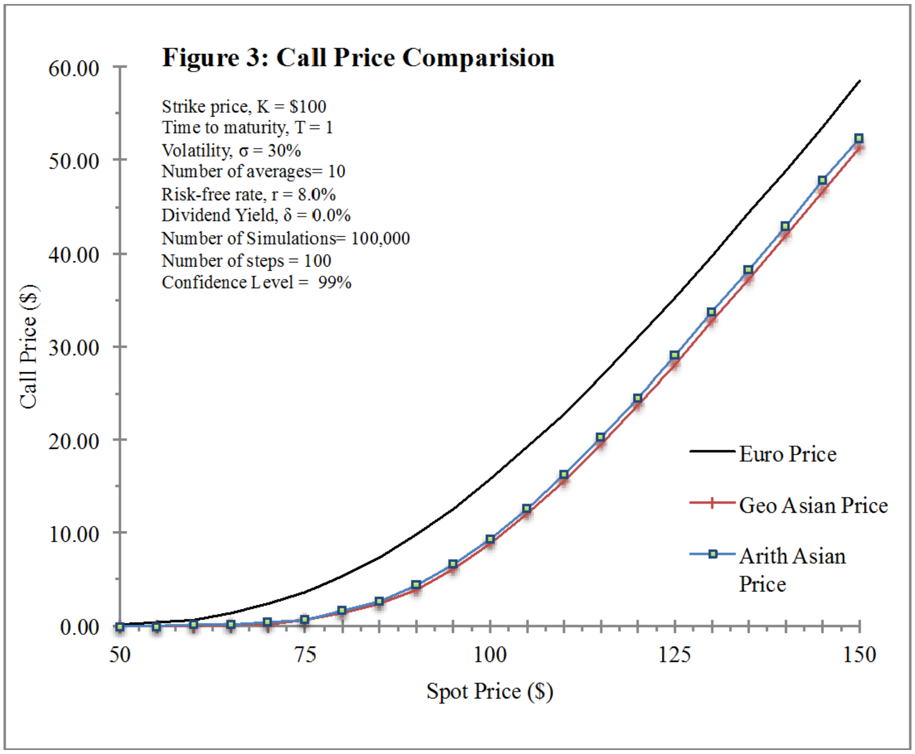
Une option asiatique est un produit dérivé dont le gain dépend du prix moyen de l'actif sous-jacent sur une période donnée, par opposition aux options américaines ou européennes standard dont le gain dépend du prix de l'actif sous-jacent à un moment précis. Une option asiatique permet au détenteur d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent à son prix moyen, et non à un prix spécifique. Les options asiatiques sont également appelées **options moyennes**.
Le terme **moyen** peut être défini de différentes manières. En général, le prix moyen de l'actif sous-jacent est basé sur des chiffres recueillis à des dates fixes, une date d'observation prédéterminée. Les points dans le temps où les données seront collectées sont indiqués dans le contrat d'option.
Essentiellement, une option asiatique est formée en prenant une option standard et en la modifiant légèrement. Elles ont tendance à être moins chères que les options classiques car la volatilité moyenne du prix est inférieure à celle du prix au comptant. Il est important de noter que le trader ne doit pas se préoccuper autant des grandes fluctuations de prix à l'échéance. Et la volatilité plus faible des options asiatiques tend à les rendre moins chères pour les investisseurs.
Les options asiatiques ont de nombreuses utilisations différentes et sont parfois plus intéressantes qu'une option standard. Les options asiatiques sont souvent utilisées pour les devises, les taux d'intérêt, les matières premières et les marchés de l'énergie. Voici quelques-uns des principaux cas d'utilisation :

- Lorsque l'on s'inquiète d'un taux de change moyen sur une période donnée.
- Pendant un marché à faible liquidité, lorsque le prix des actions n'est pas favorable
- Lorsque le marché de l'actif sous-jacent est très volatile
- Lorsque le prix au comptant d'un marché pourrait être manipulé

Exemple

Confiant sur l'orientation du marché, j'achète un Call Asian sur le CAC 40. La date d'émission du contrat est le 1er novembre 2016. Le nominal est de 100 euros. Le sous-jacent à la date d'émission (le CAC) est à 4 500 points. Sa maturité est fixée au 1er janvier 2017. Le strike est fixé à 4 600 points. À la date de maturité (01/01/2017), on observe l'ensemble des cours de clôture du CAC sur toute la durée du contrat. Puis, on calcule sa moyenne arithmétique durant cette période. Si cette moyenne arithmétique est au-dessus du strike (4 600 pts) et se situe, par exemple, à 4 650 pts, je vais encaisser : 4 650 - 4 600 $\times$ 100 euros = 5 000 euros.

Si le prix moyen de l'option asiatique est inférieur au prix d'exercice, la perte correspond à la prime totale qui a été payée pour l'option d'achat, comme pour les options classiques.



3.3 Types d'options asiatiques

Il existe deux types d'options asiatiques. Une fois que le prix moyen de l'actif sous-jacent est déterminé, il peut être utilisé pour établir le prix de règlement du sous-jacent ou le prix d'exercice de l'option.
Soit c'est le sous-jacent qui est une moyenne, le strike étant fixe, soit c'est le strike qui est une moyenne. Les payoffs respectifs s'écrivent alors :

$$max\big[0, M(T_1, T_2) - K\big] \ (call) \ \ ou \ max\big[0, K - M(T_1, T_2)\big] \ (put) \tag{1}$$

$$max\big[0, S(T) - M(T_1, T_2)\big] \ (call) \ \ ou \ max\big[0, M(T_1, T_2) - S(T)\big] \ (put) \tag{2}$$

où $M(T_1, T_2)$ représente la moyenne des cours du terme sous-jacent entre les instants T_1 et T_2 ($T_2 \leq T_1$, l'échéance des options).

4 Pricing d'options asiatiques

4.1 Contexte mathématiques

La dynamique de l'actif risqué est donnée par l'équation de Black and Scholes suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

où μ et σ sont deux constantes positives et $(B_h)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard.
La dynamique de l'actif sans risque est :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

Nous introduisons un processus $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$ qui est un mouvement brownien sous une probabilité adaptée, appelée probabilité risque-neutre et notée $\mathbb{P}$. Sous cette nouvelle probabilité la dynamique de l'actif risqué satisfait une nouvelle équation différentielle stochastique :

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

dont la solution est :

$$S_t = S_{T_0} e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

où S_0 est le prix du sous-jacent au début de la modélisation.
Les options asiatiques sont des options *path-dependant*, par conséquent leur prix dépend de la moyenne. Pour une maturité T donnée on peut donc écrire :

$$V(t, S, A) = e^{-(r(T-t))} \mathbb{E}\big[f(S_t, A_S(T_0, t))\big]$$

où

$$A_S(T_0, t) = \frac{1}{t - T_0} \int_{T_0}^{t} S_u d_u$$

Sans perte de généralité, on peut poser $T_0 = 0$. La fonction f dépend du type de l'option.

- Pour un call avec strike fixe : $f(a) = (a - K)_+$
- Pour un put avec strike fixe : $f(a) = (k - a)_+$
- Pour un call avec strike variable : $f(s, a) = (s - a)_+$
- Pour un put avec strike variable : $f(s, a) = (a - s)_+$

4.2 Option asiatique arithmétique

4.2.1 Approximation par les sommes de Riemann

Soient $t_0,t_1,...,t_{n-1}$ les bornes inférieures d'une partition équidistante de l'intervalle $[0,T]$ et soit $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ .On cherche à trouver une approximation de la valeur de l'intégrale $\int_0^T S_t d_t$. On va donc utiliser les sommes de Riemann:

$$\int_0^T S_t d_t \simeq \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} \Delta t$$

La valeur de l'option asiatique de vente

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} = [e^{-rT}(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_t d_t)_+]$$

avec prix d'exercice K sera estimée par un nombre M de trajectoires, c'est-à-dire

$$\frac{e^{-rT}}{M}\sum_{j=1}^{M}(K - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}^j)_+$$

4.2.2 Approximation par la méthode du trapèze

Soient $t_0,t_1,...,t_{n-1}$ une partition, la valeur de l'intégrale $\int_0^T S_t d_t$ peut être approximer par de trapèzes tel qu'on le montre à continuation.

$$\frac{1}{T}\int_0^T S_t d_t \simeq \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \frac{S_{t_k} + S_{t_{k+1}}}{2}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta t S_{t_k}}{2}(1 + e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})})$$

$$\simeq \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta t S_{t_k}}{2}(2 + r\Delta t + \sigma(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}))$$

Les deux approximations de l'option de vente asiatique avec moyenne arithmétique obtenues sont :

$$\frac{e^{-rT}}{M}\sum_{j=1}^{M}(K - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}^j)_+$$

$$\frac{e^{-rT}}{M}\sum_{j=1}^{M}(K - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}^j(1 + r.\frac{n}{2T} + \sigma\frac{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}{2}))_+$$

4.2.3 Méthode de variable de contrôle

Dans cette section, on va introduire la méthode de variable de contrôle, comme le fait Glasserman. La technique de variable de contrôle est une technique de réduction de variance et elle a comme objectif d'améliorer l'efficacité de la simulation de Monte Carlo. Le principe de cette méthode est d'exploiter l'erreur d'estimation d'une espérance connue pour ajuster l'estimation d'une espérance inconnue. Si les variables aléatoires de l'espérance connue sont corrélées de façon positive aux variables aléatoires de l'espérance inconnue, la sous-estimation de la première espérance pour un estimateur naïf nous indique qu'il y a aussi une sous-estimation avec le même estimateur, lorsqu'on estime la deuxième espérance. Cette méthode est très efficace lorsqu'on travaille avec des options asiatiques.
Soient X et Y , deux variables aléatoires positivement corrélées,où $\mathbb{E}(X)$ est connue.
On dispose de n réalisations des variables aléatoires X et Y et on veut trouver une estimation de $\mathbb{E}(Y)$ de telle sorte que l'erreur d'estimation soit plus petite.
Soit

$$\hat{\mu}(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k + \beta(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X))$$

alors

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}(\beta)) = \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k + \beta(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X))) = \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{V}(\hat{\mu}(\beta)) = \mathbb{V}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k + \beta(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X))) = \sigma_Y^2 - 2\beta\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + \beta_X^2\sigma_X^2$$

dont la valeur qui minimise la variance est $\beta = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$
Cette méthode sera appliquée pour trouver une meilleure approximation au prix d 'une option asiatique à moyenne arithmétique, car on connaît la valeur exacte d'une option géométrique.

4.3 Option asiatique géométrique

4.3.1 L'approximation lognormale

Il existe des formules d'évaluation analytiques des options sur moyenne de prix européen, pour autant que la distribution du prix, S, de l'actif sous-jacent soit supposé log-normal et que S_{moyen} soit la moyenne géométrique des S. En effet, la moyenne géométrique d'un ensemble de variables log-normale est aussi log-normale.

4.3.2 Approximation du prix

Soient $\{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}\}$ les bornes inférieures d'une partition équidistante de l'intervalle $[0, T]$. La moyenne géométrique G_T de S est :

$$\Big(\prod_{i=0}^{n-1} S_{t_i}\Big)^{\frac{1}{n}} = exp\big(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} log(S_{t_i})\big)$$

Lorsque la norme de la partition tend vers zéro

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} log(S_{t_i}) \simeq \frac{1}{T}\int_0^T log(S_u)du$$

donc

$$\begin{aligned} exp(\frac{1}{T}\int_0^T log(S_u)du) &= exp\big[\frac{1}{T}\int_0^T \big(log(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma W_u\big)du\big] \\ &= exp\big(log(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T}\int_0^T W_u d_u\big) \\ &= S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T}\int_0^T W_u d_u} \end{aligned}$$

Pour approximer $\frac{1}{T}\int_0^T W_u d_u$ nous allons utiliser soit l'approximation Riemannienne (*Schéma 1*) soit la méthode du trapèze (*Schéma 2*)

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T W_u d_u = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_{t_k}\Delta t}_{Schema 1} \qquad \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T W_u d_u = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{W_{t_k} + W_{t_{k+1}}}{2}}_{Schema 2}$$

4.3.3 Valeur exacte du prix

La formule explicite pour le prix d'une option d'achat asiatique avec moyenne géométrique est (voir Jarrow et Rudd)[1]

$$e^{-rT}\mathbb{E}(G_T - K)_+ = S_0 e^{d^*}\mathcal{N}(d) - K\mathcal{N}\left(d - \sigma\sqrt{\frac{T}{3}}\right)$$

où

$$d^* = \frac{1}{2}\left(r - \frac{\sigma^2}{6}\right)T$$

$$d = \frac{log(\frac{S_0}{K}) + \frac{1}{2}(r + \frac{\sigma^2}{6})T}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}$$

[1]

et pour une option de vente, le prix exact de l'option est donné par

$$e^{-rT}\mathbf{E}(K - G_T) = -S_0 e^{d^*}\mathcal{N}(-d) + K\mathcal{N}\bigg(- d + \sigma\sqrt{\frac{T}{3}}\bigg)$$

5 Exemples de couverture

5.1 Couverture du delta (Delta Hedging)

La couverture delta est une stratégie de trading d'options qui vise à minimiser (ou à couvrir) le risque de fluctuations de prix de l'actif sous-jacent. La couverture delta utilise des options pour réduire le risque d'une autre option ou d'un portefeuille d'actions. En tant que stratégie, elle est censée être directionnellement neutre et peut aider à isoler les changements de volatilité pour l'investisseur.

À un niveau de base, la couverture delta consiste pour un investisseur à acheter ou à vendre des options et à compenser le risque en achetant ou en vendant le montant équivalent d'actions ou de parts. Le "delta" représente la variation de la valeur d'une option due à la variation du prix du marché de l'actif sous-jacent. Ainsi, si une option sur une action a un delta de 0,50 et que le cours de l'actif sous-jacent augmente de 1 par action, la valeur de l'option sur l'action augmente de 0,50 par action.

Maintenant, examinons plus précisément la couverture du delta d'une option asiatique. En prenant l'exemple de la couverture delta donné dans l'ouvrage de Frans de Weert intitulé "Exotic Options Trading", nous pouvons voir comment la couverture delta peut être une stratégie efficace pour négocier des options asiatiques. Un exemple réel est le suivant :

Un trader vend 90 000 options d'achat asiatiques à 3 mois avec un prix d'exercice de 40 après 3 observations au total. Chaque option permet à l'investisseur d'acheter 1 action. Au début, le delta de l'option asiatique est similaire à celui d'une option européenne, qui est d'environ 50%, de sorte que l'investisseur couvre le delta en achetant 45 000 actions.

Si à la date d'observation, environ 30 jours plus tard, l'action se négocie à 48$, alors le delta de l'option est supérieur à celui de l'option européenne équivalente, car le premier réglage asiatique est très probablement supérieur à 40$.

Disons maintenant que le delta asiatique est de 75 000 actions, et que le delta européen équivalent est de 67 500 actions. Le premier réglage asiatique est certain d'être ITM ((In The Money : delta = 1), ce qui représente un tiers des portions de la moyenne arithmétique. Cela signifie que 30 000 actions sur 75 000 servent de couverture delta pour la première position asiatique. Les 30 000 actions seront vendues après le premier réglage asiatique et il restera donc 45 000 actions comme couverture delta pour l'investisseur.

Le reste de l'option asiatique est maintenant de 60 000 actions.

Supposons maintenant qu'après la première date d'observation, le prix de l'action diminue de façon spectaculaire et qu'au deuxième jour d'observation, elle se négocie à 32$. La couverture delta n'est donc plus que de 10 000 actions.

Le deuxième paramètre asiatique est maintenant sûr d'être OTM (Out of The Money : Delta = 0). Il n'y a plus rien à faire à la clôture du deuxième paramètre asiatique, et on peut en conclure que le delta pour la troisième observation est de $\frac{1}{3}$ (10000/30000).
À la troisième observation, l'action se négocie à nouveau à 42$ et est donc de nouveau ITM (In The Money : delta = 1), l'investisseur détient donc 30 000 actions comme couverture du delta. Ces actions doivent être vendues à la clôture du dernier réglage asiatique.
Cet exemple montre que la durée de l'option asiatique est plus courte que son équivalent européen, et comme le prix de l'option est plus élevé lorsque le temps à courir jusqu'à l'échéance est plus grand, le prix de l'option asiatique devrait être inférieur à celui d'une option européenne équivalente.
Il convient de noter que l'un des inconvénients de la couverture des options asiatiques est que les positions doivent être constamment surveillées et ajustées, ce qui peut entraîner un coût de transaction lorsque des couvertures delta sont ajoutées et retirées en raison des changements du prix sous-jacent.

6 Avantages

Les options asiatiques présentent plusieurs avantages par rapport aux options vanille...
Tout d'abord, il y a moins d'incertitude quant aux fluctuations du prix sous-jacent à l'échéance en raison du mécanisme de calcul de la moyenne, ce qui signifie qu'il y a moins d'exposition au risque qui découle généralement de la dépendance à un prix au comptant. Plus le nombre d'observations est élevé, plus la volatilité est faible et plus le prix de l'option est bas. Cela signifie qu'elles ont également tendance à coûter moins cher que les options américaines.
Les options asiatiques réduisent la vulnérabilité de l'option à la manipulation du marché. On parle de manipulation du marché lorsqu'un investisseur est confronté à une apparence trompeuse d'une option, ou à des informations erronées qui la font paraître plus précieuse qu'elle ne l'est réellement. La manipulation du marché n'est pas autorisée dans les transactions, mais elle se produit quand même. L'avantage d'une option asiatique est que l'investisseur est protégé car l'accent est mis sur le prix de clôture grâce au mécanisme de calcul de la moyenne.
Enfin, le mécanisme de calcul de la moyenne peut être utilisé tout au long de la durée de vie de l'option, ainsi qu'au début et/ou à la fin, de sorte que l'option peut être conforme aux besoins de l'investisseur, ce qui la rend plus flexible.

7 Inconvénients

L'établissement de la moyenne de n'importe quelle valeur élimine à la fois les prix les plus élevés et les plus bas d'un investissement. Cela signifie que si

l'option asiatique minimise les risques en éliminant les valeurs les plus basses, cela signifie également que les investisseurs ne sont pas en mesure de capitaliser sur les points hauts du marché qui sont créés par une volatilité accrue. Par conséquent, le potentiel de gain important est considérablement réduit, et le bénéfice potentiel n'est pas aussi élevé.
Une option vanille donne aux investisseurs la possibilité de profiter des fortes hausses de la valeur de l'actif sous-jacent, alors que la moyenne des options asiatiques leur enlève cette possibilité. Pour certains investisseurs, cela est compensé par le prix comparativement plus bas de l'option asiatique, mais beaucoup préféreraient quand même avoir la possibilité de profiter des pics de valeur des actions, par exemple. Pour cette raison, les options asiatiques ne sont pas attrayantes pour tous les investisseurs, et le potentiel de récompense plus faible doit être pris en considération.

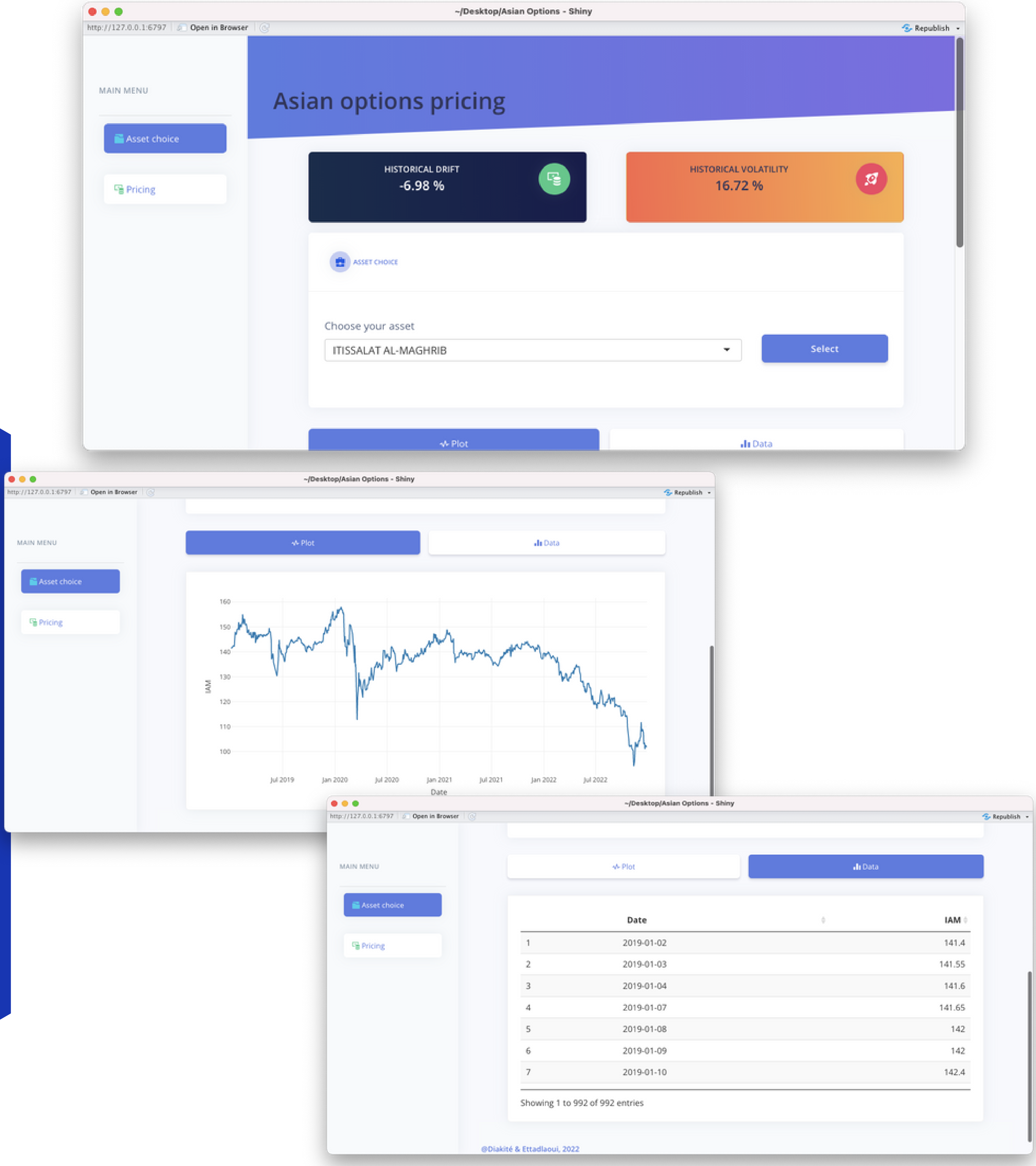
8 Conclusion

Le pricing d'option path-dependant comme les options asiatiques peut se faire par plusieurs méthodes. Nous avons vu que la méthode de Monte- Carlo peut-être très compétitive en terme de précision et de rapidité de calcul, notamment grâce à la technique de réduction de variance suggérée. De plus, ce modele ne s'utilise que sur des options de maturité relativement courte (un an ou moins), car du fait du théorème de la limite centrale, le processus des log rentabilités tend à long terme à redevenir gaussien, ce qui aplatit sensiblement, contrairement aux observations, le smile des options longues.

APPLICATION DE PRICING DES OPTIONS ASIATIQUES

Code source

https://github.com/AODiakite/Asian-Options-Pricing



APPLICATION DE PRICING DES OPTIONS ASIATIQUES

Code source

https://github.com/AODiakite/Asian-Options-Pricing