

Aus: *Logik in der Philosophie*,
hg. v. W. Spohn et al., Heidelberg (Synchron) 2005.

ANDRÉ FUHRMANN

Existenz und Notwendigkeit

Kurt Gödels axiomatische Theologie

Não acredito em Deus porque nunca o vi.
Se ele quisesse que eu acreditasse nele,
Sem dúvida que viria falar comigo
E entraria pela minha porta dentro
Dizendo-me, *Aqui estou!*

Alberto Caeiro

1 Einleitung

Den Beweis wollte er nicht publizieren. Und das, obwohl, wie Oskar Morgenstern am 29. August 1970 in seinem Tagebuch festhielt, Gödel ›zufrieden‹ war mit dem Beweis, den er schließlich gefunden hatte.¹ Jedoch befürchtete er, daß man die Publikation eines Gottesbeweises als eine Art Glaubensbekenntnis mißverstehen könne. Gödel sah sich auch beim Nachdenken über die Existenz Gottes zuallererst als Logiker, d.h. hier als jemand, der der Frage nachgeht, ob ein ontologischer Beweis aus axiomatisch formulierten, klassischen Annahmen möglich sei – es ging ihm also um eine rein logische Untersuchung.

Vielleicht war Gödels Beschäftigung mit dem ontologischen Gottesbeweis wirklich kaum mehr als ein Steckenpferd. In jedem Fall handelte es sich um ein Interesse, das er sehr ernsthaft über einen Zeitraum von mindestens 30 Jahren verfolgte. In diesem Sinne ist es tatsächlich dasjenige logische Thema, das ihn am längsten beschäftigt hat. Im Nachlaß von Kurt Gödel haben sich verschiedene Versionen eines ›Ontologischen Beweises‹ erhalten. Die früheste Fassung stammt – Gödels eigener Datierung zufolge – aus dem Jahre 1941. Weiteres Material zu einem solchen Beweis enthält Gödels Notizbuch »Phil XIV«, in dem er zwischen Juli 1946 und Mai 1955 einige seiner philosophischen Reflexionen festhielt. Die darin enthaltenen Aufzeichnungen zum ontologischen Beweis sind vermutlich in der Zeit zwischen Sommer 1954 und Frühjahr 1955 entstanden. Die letzte und definitive Fassung von Gödels ontologischem Beweis trägt das Datum 10. Februar 1970. Es handelt sich um zwei Seiten in Gödels Handschrift.

¹ Nach Dawson 1997, 237.

Dana Scott machte Gödels Beweis einem weiteren Kreis Interessierter zugänglich. Im Herbst 1970 stellte Scott Gödels Beweis in einem Seminar in Princeton vor. Scotts Notizen begannen daraufhin zu zirkulieren und wurden schließlich im Anhang zu Sobel 1987, zusammen mit Gödels eigener Version seines Beweises, publiziert.

Gödel sah sich in vielerlei Hinsicht als ein Geistesverwandter von Leibniz. Leibniz war ohne Zweifel derjenige Philosoph, den Gödel am meisten schätzte und dessen Werk er am besten kannte. Schon in den 30er Jahren begann Gödel sich mit der Philosophie von Leibniz zu beschäftigen, und seine Bekanntschaft mit ontologischen Argumenten für die Existenz Gottes geht vermutlich auf das Studium der Schriften Leibniz' zurück.

Für Leibniz bestand der ontologische Beweis im wesentlichen aus zwei Schritten. In einem ersten Schritt wäre zu zeigen, daß aus der Möglichkeit von Gottes Existenz seine notwendige Existenz folgt:

- (1) Wenn es möglich ist, daß Gott existiert, dann ist es notwendig, daß Gott existiert.

Leibniz glaubte, daß Descartes die reifste und überzeugendste Version dieses Schrittes – im folgenden das *modale Argument* genannt – bereits vorgelegt hatte. Aber Leibniz erkannte, im Gegensatz zu Descartes, daß die Konsistenz Gottes, d.h. eines *ens perfectissimum*, nichts weniger als offensichtlich sei und erst noch zu erweisen wäre. In einem zweiten Schritt wäre also zu zeigen, daß ein perfektes Wesen möglich sei – dies ist das Ziel des *Möglichkeitsnachweises*:

- (2) Es ist möglich, daß Gott existiert.

Die Annahme, daß ein göttliches Wesen *möglicherweise* existiert, erscheint auf den ersten Blick harmlos. Vieles ist möglich – warum nicht auch die Existenz Gottes? Auch wenn die Existenz Gottes in Frage steht, so scheint doch die bloße Möglichkeit seiner Existenz eine Annahme zu sein, die zuzugeben niemand verweigern kann. Dagegen spricht jedoch, daß der Begriff eines göttlichen Wesens, um dessen Möglichkeit, d.h. Konsistenz, es hier geht, als Summe einer Reihe von Superlativen entsteht. Ein göttliches Wesen ist ein ›höchstes‹ Wesen: Nichts ist weiser, gütiger, mächtiger etc. als Gott. Aber haben diese Eigenschaften – weise, gütig, mächtig, etc. – überhaupt die postulierten Maxima? Warum sollte der Begriff eines höchsten Wesens weniger verdächtig sein als z.B. der Begriff einer größten Zahl oder einer längsten Zeit? Wenn die Annahme einer größten Zahl oder einer längsten Zeit einen Widerspruch enthält, warum sollte es um die Annahme eines weisesten, gütigsten oder mächtigsten Wesens besser stehen? Und warum sollte es darüber hinaus möglich sein, daß ein Wesen alle diese maximalen Eigenschaften in sich vereinen kann, daß also die Maxima nicht nur existieren, sondern auch miteinander verträglich sind?

Die folgende Überlegung zeigt auf etwas andere Weise, warum das modale Argument ohne einen Möglichkeitsnachweis ein unzulänglicher Gottesbeweis ist. Angenommen, ein Theist und ein Atheist bemühen sich beide,

ihre Überzeugungen durch einen Beweis zu Wissen zu machen. Es scheint zunächst nichts gegen die beiden Annahmen zu sprechen,

(3) daß es möglich ist, daß der Atheist einen Beweis findet,

und

(4) daß es möglich ist, daß der Theist einen Beweis findet.

In gewisser Hinsicht scheint ein offener Disput über die Existenz Gottes sowohl (3) als auch (4) vorauszusetzen. Aber angenommen, (3) ist der Fall. Dann ist es möglich, daß es keinen Gott gibt. D.h. es ist falsch, daß Gottes Existenz notwendig ist. Das bedeutet wiederum, daß es nicht möglich ist, einen Beweis für Gottes notwendige Existenz zu finden, d.h. (4) ist falsch. Ein analoger Gedankengang zeigt, daß umgekehrt aus der Annahme (4) die Falschheit von (3) folgt. Es können also nicht beide Möglichkeitsannahmen, (3) und (4), wahr sein. Möglichkeitsannahmen sind oft weit weniger unschuldig, als sie erscheinen – daß sie gerechtfertigt sind, bedarf eines Nachweises.

2 Leibniz' Möglichkeitsnachweis

Sowohl Leibniz als auch Gödel versuchen durch einen solchen Möglichkeitsnachweis den ontologischen Beweis zu vervollständigen. Leibniz hat seinen Versuch im zehnten Anhang zu seinen *Neuen Abhandlungen über den menschlichen Verstand* skizziert.² Die Grundidee ist recht einfach. Die Bestimmung eines göttlichen Wesens, d.h. die Konjunktion seiner wesentlichen Eigenschaften, muß einen Widerspruch notwendig ausschließen. Die wesentlichen Eigenschaften des göttlichen Wesens müssen also derart sein, daß für ein beliebiges Paar X und Y derartiger Eigenschaften die Konjunktion von X und Y widerspruchsfrei ist.

Leibniz' Terminus für ein göttliches Wesen ist *ens perfectissimum*. Ein *ens perfectissimum*, oder perfektes Wesen, wie wir auch sagen wollen, ist, nach Leibniz, ein Wesen, welches alle perfekten Eigenschaften (Perfektionen) besitzt. Leibniz verliert wenig Zeit mit der Frage, welche Eigenschaften im einzelnen zu den Perfektionen zu zählen seien. Er fragt vielmehr danach, ob es formale Eigenschaften der Perfektionen gibt, welche garantieren könnten, daß die Konjunktion aller Perfektionen eine mögliche Eigenschaft ist, d.h. instantiiert sein kann. Nun, wie könnte sich zeigen, daß die Konjunktion zweier beliebiger Eigenschaften etwas Unmögliches beschreibt? Leibniz' Antwort lautet: nur indem die eine Eigenschaft irgendwie die Negation der anderen enthält. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß dies für alle Perfektionen ausgeschlossen werden kann, ist, daß Perfektionen *vollkommen positiv* sind, keine Spur von Negation enthalten. Dies könnte z.B. dann der Fall sein, wenn wir ausgehen von einer Basis einfachster, nicht weiter zerlegbarer Perfektionen und alle weiteren Perfektionen durch Verknüpfungen erzeugen, die keinen negativen Aspekt injizieren. Eine einfache Perfektion X ist insbesondere

² Eine Parallelstelle liegt vor in der *Monadologie*, §§ 41–45.

eine, die nicht aus einer anderen Perfektion Y unter Zuhilfenahme der Negation erzeugt werden kann, also nicht von der Form $\neg Y$ ist. Wenn X_1 und X_2 einfach in diesem Sinne sind, dann ist die Konjunktion $X_1 \wedge X_2$ ohne Widerspruch, denn keines der Konjunkte verfügt über die interne Struktur, um dem anderen widersprechen zu können. Wenn aber die Konjunktion zweier beliebiger Perfektionen widerspruchsfrei ist, dann ist die Konjunktion aller Perfektionen auch widerspruchsfrei. Also ist ein perfektes Wesen möglich.

Es ist sehr schwierig, eindeutige Beispiele einfacher, positiver Eigenschaften zu finden. Gewichte oder Farben sind in jeweils verschiedener Weise recht elementare Eigenschaften. Aber sie können nicht einfach im Sinne der Leibnizschen Argumentation sein. Denn wenn etwas überall rot ist, dann ist es *nicht* grün; und umgekehrt, was überall grün ist, ist *nicht* rot. Alle Farbeigenschaften schließen also ein Moment der Negation ein: Sie schließen aus, daß bestimmte andere Eigenschaften auf den jeweils betrachteten Gegenstand zutreffen. Genauso kann etwas, das eine bestimmte Masse oder ein bestimmtes Volumen hat, *keine andere* Masse und *kein anderes* Volumen haben. Wenn aber weder so elementare phänomenale Eigenschaften wie die Farben noch so elementare physikalische Eigenschaften wie Masse oder Volumen einfach im Sinne von Leibniz sein können, was sind dann einfache, positive Eigenschaften?

Leibniz glaubte, daß am Ende einer Analyse aller Eigenschaften nicht weiter zerlegbare Eigenschaften stehen müßten. Eine solche einfachste Eigenschaft X kann insbesondere nicht von der Form $\neg Y$ sein, denn dann wäre X ja zerlegbar in die Negation und die Eigenschaft Y ; also wäre X entgegen unserer Voraussetzung nicht einfach. Auch bei scheinbar einfachen Eigenschaften wie *hart* und *weich* würde sich, Leibniz zufolge, am Ende zeigen, daß es eine einfachere Eigenschaft geben muß, so daß *hart* diese einfachere Eigenschaft einschließt und *weich* deren Negation einschließt.

Offenbar ist es nicht einfach zu sagen, welche einfachere Eigenschaft in *hart* und *weich* jeweils positiv und negativ enthalten ist. Die Versuchung liegt deshalb nahe, Leibniz dafür zu kritisieren, daß weder er noch sonst jemand in der Lage sei, die postulierte Basis einfacher Eigenschaften anzugeben. Aber dieser Versuchung sollte man widerstehen. Wenn es solche Eigenschaften gibt, dann ist die Beschreibung »diejenigen Eigenschaften, die nicht weiter zerlegbar sind« ein vollkommen akzeptables Mittel, sich auf diese Eigenschaften zu beziehen. Wenn es eine bewohnte Stadt mit dem Namen Wanne-Eickel gibt, dann kann ich mich mit dem Ausdruck »die Einwohner von Wanne-Eickel« auf diejenigen beziehen, die dort wohnen, auch wenn ich niemanden im einzelnen angeben kann, der dort wohnt. Die entscheidende Frage ist nicht, ob sich Beispiele einfacher Eigenschaften angeben lassen, sondern ob solche Beispiele existieren.

Eine etwas subtilere Versuchung, Leibniz' Versuch für gescheitert zu erklären, geht aus von der Beobachtung, daß die Unterscheidung zwischen positiven und negativen Eigenschaften womöglich relativ ist. Eigenschaften sind nicht für sich betrachtet positiv oder negativ, sondern immer nur im Hinblick

auf bestimmte andere Eigenschaften. So könnte man z.B. *hart* als eine einfache Eigenschaft betrachten und *weich* als *nicht-hart* analysieren; umgekehrt ist dies natürlich genauso möglich. Dies deutet darauf hin, daß es möglicherweise mehr als eine Analyse geben kann, an deren Ende sehr verschiedene, miteinander nicht verträgliche Klassen einfacher Eigenschaften stehen. Der Punkt läßt sich verallgemeinern. Wenn am Ende einer – vielleicht nur im Prinzip, nicht tatsächlich ausführbaren – Leibnizschen Analyse aller Eigenschaften das Resultat steht, daß X eine einfache Eigenschaft ist, dann ist X positiv. Also ist die Eigenschaft $Y (= \neg X)$ negativ, mithin ist Y nicht einfach. Aber wie läßt sich dann die Möglichkeit einer Analyse ausschließen, derzufolge nicht X , sondern Y einfach (und also positiv) ist und deshalb $X (= \neg Y)$ zusammengesetzt und negativ ist? Was zeichnet die eine Analyse vor der anderen aus?

Wir wissen nicht, was Leibniz auf diese Beobachtung geantwortet hätte. Entscheidend ist allein, daß die Beobachtung dem beabsichtigten Möglichkeitsnachweis nicht im Wege steht. Man erinnere sich, daß die Möglichkeit der Zerlegung der Perfektionen in einfache Eigenschaften nur in umgekehrter Reihenfolge ein Verfahren rekapituliert, die Perfektionen widerspruchsfrei »aufzubauen«. Jedes beliebige Verfahren mit diesem Ergebnis genügt für den Nachweis, daß die Konjunktion aller Perfektionen möglich ist. Insofern zeigt jede Analyse von Perfektionen als Zusammensetzungen aus einer Basis einfachster Eigenschaften, daß diese Perfektionen möglich sind. Es kommt nicht darauf an, daß es nur eine einzige solche Basis geben kann, sondern darauf, daß was immer als Basis dient, die Eigenschaft hat, nur aus positiven Eigenschaften zu bestehen, und daß die Operation der Konjunktion von Eigenschaften diese Eigenschaft weitergibt.

Damit kommen wir schließlich zu einer genuinen Schwierigkeit, mit der Leibniz' Versuch behaftet ist. Leibniz' Strategie ist einfach und überzeugend. Wir wollen wissen, ob die Konjunktion aller Perfektionen ein mögliches Wesen charakterisiert. Wir wissen, wenn die Perfektionen sich selbst und einander nicht widersprechen, dann ist ihre Konjunktion auch widerspruchsfrei. Widersprüche entstehen nur, wenn irgendwie Negation ins Spiel kommt. Wenn die Perfektionen also erzeugt werden können aus einer Basis negationsfreier, d.h. positiver Eigenschaften, und die Art der Erzeugung die Eigenschaft der Positivität bewahrt, dann haben wir einen induktiven Beweis für die These, daß ein perfektes Wesen möglich ist. Es ist plausibel anzunehmen, daß die Konjunktion zweier möglicher und positiver Eigenschaften selbst eine mögliche und positive Eigenschaft ist. Soweit die Perfektionen also nur durch die Operation der Konjunktion erzeugt werden, ist die Weitergabe der Positivität und Möglichkeit von der Basis bis zu den Perfektionen garantiert. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Basis positiv ist. Leibniz glaubt das dadurch leisten zu können, daß er die Basis als eine Basis »einfachster« Eigenschaften beschreibt. Aber »einfachst« ist wieder ein Maximumbegriff von der Art, deren Möglichkeit alles andere als offensichtlich ist. Warum sollten wir mehr Zutrauen in die Möglichkeit einer einfachsten Eigenschaft haben als

in die Möglichkeit einer größten Primzahl oder eines höchsten Wesens? Aus genau den Gründen, die Leibniz selbst anführt, um zu zeigen, daß die Möglichkeit eines höchsten Wesens erst noch erwiesen werden muß, aus genau diesen Gründen bedarf auch der Begriff einer einfachsten Eigenschaft eines Nachweises seiner Möglichkeit. Das Ausgangsproblem ist also bloß verschoben, nicht gelöst.

3 Gödels ontologischer Beweis

Die Art und Weise, wie Gödel das Leibnizsche Problem wieder aufnimmt, zeigt, daß Gödel den Rückgang auf eine Basis einfachster Eigenschaften für einen Irrweg gehalten hat. Leibniz versuchte die Menge der positiven Eigenschaften explizit zu definieren als den Abschluß einer Menge einfachster Eigenschaften unter der Operation der Konjunktion. Gödel sah einen anderen Weg, der ohne den Umweg über die Struktur von Eigenschaften – und das fragwürdige Postulat einfachster Eigenschaften – zum Ziel führen würde.

Gödel führt den Begriff einer positiven Eigenschaft ein als einen Terminus, der implizit durch seine Rolle in einer Theorie charakterisiert ist. Die Theorie formuliert Gödel als ein axiomatisches System. D.h. er legt die Sprache fest, in der Sätze der Theorie formuliert werden können; er zeichnet einige wenige Sätze als Axiome aus und beschreibt die Schlußregeln, mit denen aus den Axiomen weitere Sätze bewiesen werden können. Das Ziel ist es, das modale Konditional (1) und die Möglichkeitsbehauptung (2) in dem axiomatischen System als Theoreme herzuleiten. Wenn dies gelingt, dürfen (1) und (2) als im strengsten Sinne bewiesen gelten – relativ zu dem System, welches die Ressourcen für den Beweis zur Verfügung stellt. Es ist recht einfach, die Konsistenz des Gödelschen Systems nachzuweisen, d.h. ein Modell anzugeben – wir werden das später tun. Letztlich bleibt so nur die Frage, ob das System sich plausibel als eine Theorie göttlicher Wesen und ihrer Eigenschaften interpretieren läßt.

Gödels System ist eine Erweiterung der Prädikatenlogik zweiter Stufe um einige Prinzipien und Regeln, die Begriffe der Notwendigkeit (einer Aussage) und der Positivität (einer Eigenschaft) betreffend.³ Die modalen, d.h. den Begriff der Notwendigkeit betreffenden Prinzipien werden wir an den Stellen einführen, an denen wir sie benötigen. Die spezifisch ›theologischen‹ Axiome und Definitionen sind wie folgt.

³ Eine Prädikatenlogik zweiter Stufe ist eine Logik, in der die Quantoren auch Eigenschaftsausdrücke (»Prädikate«) binden können. Wir werden uns im folgenden recht frei einer dafür geeigneten formalen Sprache bedienen. Äußere Quantoren werden meist weggelassen, und wir schreiben kurz Xx bzw. PX , um auszudrücken, daß das Individuum x die Eigenschaft X hat bzw. daß die Eigenschaft X die höherstufige Eigenschaft P (für »positiv«) hat. Leser, die mit der Sprache der formalen Logik nicht vertraut sind, mögen sich an die informellen Übersetzungen der Formeln halten.

Erstes Axiom. Jede Eigenschaft ist entweder positiv oder negativ:

$$(A1.1) \quad P\neg X \rightarrow \neg PX,$$

$$(A1.2) \quad \neg PX \rightarrow P\neg X.$$

Zweites Axiom. Was eine positive Eigenschaft notwendig einschließt, ist selbst eine positive Eigenschaft:

$$(A2) \quad PX \wedge \Box \forall x (Xx \rightarrow Yx) \rightarrow PY.$$

Definition »göttlich«. Etwas ist genau dann *göttlich*, wenn es alle positiven Eigenschaften besitzt:

$$(D1) \quad Gx \leftrightarrow \forall X (PX \rightarrow Xx).$$

Drittes Axiom. Göttlichkeit ist eine positive Eigenschaft:

$$(A3) \quad PG.$$

Erster Satz. Positive Eigenschaften sind konsistent:

$$(S1) \quad PX \rightarrow \Diamond \exists x Xx.$$

Beweis. Angenommen, X ist eine positive Eigenschaft,

$$(*) \quad PX,$$

und angenommen, X sei *nicht* konsistent, d.h. $\neg \Diamond \exists x Xx$, also (nach Umformung von $\exists x$ in $\neg \forall x \neg$, von \Diamond in $\neg \Box \neg$ und dem Streichen so entstandener doppelter Negationen):

$$\Box \forall x \neg Xx.$$

Wenn Xx falsch ist, dann impliziert Xx einen beliebigen Widerspruch, also z.B.

$$(**) \quad \Box \forall x (Xx \rightarrow \neg x = x).$$

Wenn wir nun die Eigenschaft von x betrachten, nicht mit x identisch zu sein (und diese mit $\neg x = _$ andeuten⁴), dann sehen wir, daß aus $(*)$ und $(**)$

⁴ Die Notation $\neg x = _$ für die Eigenschaft *nicht mit x identisch zu sein* ist suggestiv und informell und ersetzt hier einen formal korrekteren Abstraktionsausdruck wie $\lambda y. \neg x = y$. Für die formal korrektere Notation bedarf es der zusätzlichen Vereinbarung, daß der Ausdruck $\lambda y. \neg x = y$ gleichbedeutend sein soll mit dem Ausdruck $\neg \lambda y. x = y$. Diese Vereinbarung ist harmlos, da wir aufgrund der Regel der λ -Konversion

$$\lambda y. Xy.x \leftrightarrow Xx$$

so schließen dürfen:

$$\begin{aligned} \lambda y. \neg x = y.x &\leftrightarrow \neg x = x \\ &\leftrightarrow \neg \lambda y. x = y.x \end{aligned}$$

nach (A2) folgt, daß diese Eigenschaft selbst positiv sein muß: $P(\neg x = _)$ – woraus nach (A1.1) folgt, daß

$$(\dagger) \quad \neg P(x = _).$$

Es gilt aber rein logisch, daß $\Box \forall x (Xx \rightarrow x = x)$, woraus wie oben (aus (*) nach (A2)) wiederum folgt, daß die Eigenschaft der Selbstidentität auch positiv sein muß:

$$(\ddagger) \quad P(x = _).$$

Aber (\dagger) und (\ddagger) widersprechen einander. Also muß unsere Annahme, daß positive Eigenschaften inkonsistent sein können, falsch sein. ■

Da nach (A3) Göttlichkeit eine positive Eigenschaft ist, folgt unmittelbar das folgende

Korollar zum Ersten Satz. Ein göttliches Wesen ist möglich:

$$(S1^*) \quad \Diamond \exists x Gx.$$

Damit ist der Möglichkeitsnachweis, der Leibniz so sehr beschäftigte, erbracht. Benötigt wurden dazu nur die Axiome (A1.1), (A2) und (A3), ferner, im Hintergrund, elementare Schlußweisen der Logik der zweiten Stufe sowie die Annahme, daß Selbstidentität und Selbstverschiedenheit Eigenschaften sind.

Aus dem nächsten Axiom sowie der Definition einer wesentlichen Eigenschaft werden wir beweisen, daß es höchstens ein göttliches Wesen geben kann.

Viertes Axiom. Positive Eigenschaften sind notwendig positiv:

$$(A4) \quad PX \rightarrow \Box PX.$$

Definition »wesentliche Eigenschaft«. X ist genau dann eine *wesentliche Eigenschaft* von x , wenn x ein X ist und alle weiteren Eigenschaften von x daraus notwendig folgen:

$$(D2) \quad X \text{ Ess } x \leftrightarrow Xx \wedge \forall Y (Yx \rightarrow \Box \forall y (Xy \rightarrow Yy)).$$

Man beachte, daß aus der Definition unmittelbar folgt, daß alle wesentlichen Eigenschaften notwendig äquivalent sind.⁵

⁵ Gödel vermerkt diese Konsequenz in einer Fußnote zur Definition. Die Definition selbst aber läßt im Definiens das Konjunkt Xx aus. Ohne das Konjunkt folgt jedoch die Konsequenz nicht. Es ist deshalb naheliegend anzunehmen, daß Gödel die Definition so beabsichtigte, wie sie hier notiert ist und wie Gödel sie selbst in früheren Notizbucheintragungen formuliert hat.

Zweiter Satz. Göttlichkeit ist eine wesentliche Eigenschaft:

$$(S2) \quad Gx \rightarrow G \text{ Ess } x.$$

Beweis. Wir nehmen an, daß

$$(*) \quad Gx,$$

und wollen zeigen, daß x wesentlich göttlich ist, d.h., daß alle weiteren Eigenschaften von x aus der Eigenschaft G folgen. Sei also Y eine solche weitere Eigenschaft von x ,

$$(**) \quad Yx.$$

Nach (D2) wird es genügen zu zeigen, daß $\Box \forall y (Gy \rightarrow Yy)$. Ist Y eine positive Eigenschaft? Angenommen $\neg PY$. Dann gilt nach (A1.2), daß $P \neg Y$. Daraus folgt zusammen mit unserer Annahme $(*)$ nach (D1), daß $\neg Yx$ – im Widerspruch zu (2). Also ist Y eine positive Eigenschaft, und daraus folgt unmittelbar nach (A4), daß dies notwendigerweise so ist:

$$(\dagger) \quad \Box PY.$$

Nun ist $PY \rightarrow \forall y (Gy \rightarrow Yy)$ eine Hälfte von (D1), der Definition der Göttlichkeit. Daraus folgt aufgrund einer elementaren modalen Schlußregel, daß

$$(\ddagger) \quad \Box PY \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow Yy).$$

Aus (\dagger) und (\ddagger) folgt jetzt mit Modus Ponens $\Box \forall y (Gy \rightarrow Yy)$, wie gewünscht. ■

Das gerade verwendete modale Prinzip, die Regel

$$(RM) \quad \text{aus } A \rightarrow B \text{ schließe } \Box A \rightarrow \Box B,$$

ist elementar in dem Sinne, daß sie allen sogenannten ›normalen‹ Modallogiken gemein ist. Die Regel besagt, daß, wenn es eine logische Tatsache ist, daß B wahr ist, wenn A wahr ist, und A in jeder möglichen Welt wahr ist, dann auch B in jeder möglichen Welt wahr ist. (RM) ist übrigens äquivalent zu der Regel

$$(RM\Diamond) \quad \text{aus } A \rightarrow B \text{ schließe } \Diamond A \rightarrow \Diamond B.$$

(Die Äquivalenz folgt aus der Tatsache, daß $\Diamond A \leftrightarrow \neg \Box \neg A$.) Neben der modalen Schlußregel (RM) haben wir in dem Beweis nur die zweite Hälfte des ersten Axioms, (A1.2), sowie (A3) verwendet.

Nun folgt aus $G \text{ Ess } x$, daß jede weitere Eigenschaft von x notwendig aus der Eigenschaft G der Göttlichkeit folgt. Das gilt insbesondere auch für die Eigenschaft *mit x identisch zu sein* (die wir hier wieder mit $x = _$ andeuten wollen), d.h.,

$$x = x \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow x = y)$$

ist eine Instanz von

$$\forall Y (Yx \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow Yy))$$

(mit $x = _$ eingesetzt für Y). Da natürlich $x = x$ immer wahr ist, haben wir so aus der Annahme Gx direkt auf $\Box \forall y (Gy \rightarrow x = y)$ geschlossen; dies halten wir fest als

Korollar zum Zweiten Satz. Es gibt notwendig höchstens ein göttliches Wesen:

$$(S2^*) \quad Gx \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow x = y).$$

Aus dem nächsten Axiom zusammen mit der Definition notwendiger Existenz können wir jetzt den modalen Sachverhalt ableiten, daß die Möglichkeit eines göttlichen Wesens seine Notwendigkeit impliziert.

Definition »notwendige Existenz«. Etwas *existiert* genau dann *notwendig*, wenn alle seine wesentlichen Eigenschaften notwendig instantiiert sind:

$$(D3) \quad Ex \leftrightarrow \forall X (X \text{ Ess } x \rightarrow \Box \exists y Xy).$$

Fünftes Axiom. Notwendige Existenz ist eine positive Eigenschaft:

$$(A5) \quad PE.$$

Dritter Satz (Anselms Prinzip). Wenn die Existenz eines göttlichen Wesens möglich ist, dann ist sie notwendig:

$$(S3) \quad \Diamond \exists x Gx \rightarrow \Box \exists x Gx.$$

Wir beweisen zunächst, daß aus der Existenz eines göttlichen Wesens seine notwendige Existenz folgt:

$$(*) \quad \exists x Gx \rightarrow \Box \exists x Gx.$$

Beweis. Angenommen, ein göttliches Wesen existiert, $\exists x Gx$, d.h. angenommen, es gibt ein y , auf das die Eigenschaft G zutrifft, Gy . Nach (D1) hat y dann alle positiven Eigenschaften, $\forall X (PX \rightarrow Xy)$. Das gilt insbesondere für die Eigenschaft der notwendigen Existenz, also: $PE \rightarrow Ey$. Nach (A5) ist notwendige Existenz eine solche positive Eigenschaft, PE . Also folgt, daß y notwendig existiert, Ey – und zwar im Sinne von (D3), d.h. jede wesentliche Eigenschaft von y ist notwendig instantiiert, $\forall Y (Y \text{ Ess } y \rightarrow \Box \exists x Yx)$. Aufgrund von (S2) und unserer Annahme Gy wissen wir aber, daß Göttlichkeit eine wesentliche Eigenschaft von y ist. Also gibt es notwendigerweise etwas, das diese Eigenschaft hat, $\Box \exists x Gx$. Damit ist (*) bewiesen. ■

Dazu haben wir (S2) und (A5) benötigt; letztlich beruht also der Beweis von (*) auf (A1.2), (A4) und (A5).

Beweis von (S3). Aufgrund der Regel (RM \Diamond) können wir aus (*) darauf schließen, daß

$$(**) \quad \Diamond \exists x Gx \rightarrow \Diamond \Box \exists x Gx.$$

Während die Regel (RM \Diamond) (äquivalent: (RM), s.o.) ein recht schwaches und deshalb unumstrittenes modales Prinzip ist, ist das modale Axiom

$$(B) \quad \Diamond \Box A \rightarrow \Box A$$

sehr viel stärker – wir werden gleich darauf zurückkommen. Eine Instanz von (B) ist jedenfalls

$$(\dagger) \quad \Diamond \Box \exists x Gx \rightarrow \Box \exists x Gx.$$

Aus (**) und (†) folgt dann aufgrund der Transitivität der Implikation der zu beweisende Satz: $\Diamond \exists x Gx \rightarrow \Box \exists x Gx$. ■

Das Endresultat von Gödels ontologischem Beweis folgt nun unmittelbar aus (S1*) und (S3) in Verbindung mit (S2):

Korollar zum Dritten Satz. Es gibt notwendig genau ein göttliches Wesen:

$$(S3^*) \quad \Box \exists x (Gx \wedge \forall y (Gy \rightarrow x = y)).$$

Das modale Axiom (B) (für »Becker«) ist stark, läßt sich aber in einem Modell bestehend aus möglichen Welten sehr plausibel machen. In einem solchen Modell wird die Bedeutung von »notwendig« (\Box) und »möglich« (\Diamond) so erklärt:

- (N) A ist genau dann *notwendig* ($\Box A$) in einer beliebigen möglichen Welt w , wenn A in allen möglichen Welten wahr ist;
- (M) A ist genau dann *möglich* ($\Diamond A$) in einer beliebigen möglichen Welt w , wenn es mindestens eine mögliche Welt gibt, in der A wahr ist.

Angenommen also, daß A *möglicherweise notwendig* ($\Diamond \Box A$) ist – und zwar in unserer Welt, u . Dann gibt es, nach (M), mindestens eine mögliche Welt – nennen wir sie w –, in der A *notwendig* ($\Box A$) wahr ist. Das bedeutet aber nach (N), daß A in allen möglichen Welten der Fall ist, was, wiederum nach (N), bedeutet, daß A *notwendig* ist in jeder beliebigen möglichen Welt – also auch in unserer Welt, u . Aus der möglichen Notwendigkeit eines Sachverhaltes folgt so seine schlichte Notwendigkeit.

Wenn das Axiom (B) sich so einfach plausibel machen läßt, mit welcher Begründung könnte man es dann zurückweisen? Vielleicht, so könnte man argwöhnen, sind die Erklärungen (M) und (N) zu einfach. Der Bezug auf die Perspektive, d.h. auf die Welt, in der wir die Möglichkeit oder Notwendigkeit eines Sachverhaltes beurteilen wollen, geht verloren, wenn wir von der linken zur rechten Seite von (M) bzw. (N) übergehen. Das im vorhergehenden Abschnitt vorgestellte Argument beruht ganz wesentlich auf dieser Loslösung von der Ausgangsperspektive. Um das deutlich zu machen, betrachte man die folgenden Alternativen zu (M) und (N):

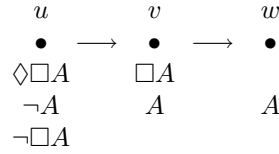


Abbildung 1: Ein Gegenbeispiel zu (B).

- (N') $\Box A$ ist genau dann wahr in einer beliebigen möglichen Welt w , wenn A in allen Welten, die *von w aus gesehen* möglich sind, wahr ist;
- (M') $\Diamond A$ ist genau dann wahr in einer beliebigen möglichen Welt w , wenn es mindestens eine *von w aus gesehen* mögliche Welt gibt, in der A wahr ist.

Mit (M') und (N') gelingt das Argument für (B) nicht mehr. Denn wenn wir nun annehmen, daß $\Diamond \Box A$ in unserer Welt u wahr ist, dann können wir nach (M') darauf schließen, daß es eine von u aus gesehen mögliche Welt v gibt, in der $\Box A$ wahr ist. Daraus schließen wir nach (N'), daß A in allen Welten wahr ist, die von v aus gesehen möglich sind. Nichts garantiert jedoch, daß die Welten, die aus der Perspektive von v möglich sind, genau diejenigen sind, die auch aus der Perspektive von u möglich sind. Aber nur wenn A in allen von u aus gesehen möglichen Welten wahr ist, dürfen wir nach (N') schließen, daß $\Box A$ in unserer Welt, u , wahr ist. (Abb. 1 veranschaulicht dieses Gegenbeispiel.)

Es gibt sicherlich Interpretationen der Modalitäten *möglich* und *notwendig*, die durch (M') und (N') und nicht durch (M) und (N) richtig erklärt werden. Oft werden diese Modalitäten z.B. mit einem zeitlichen Aspekt verwendet – etwa im Sinne von *noch möglich* und *ab jetzt notwendig*. Etwas ist zu einem Zeitpunkt u noch möglich, wenn es einen Zeitpunkt in der Zukunft von u gibt, zu dem es der Fall sein wird; und etwas ist notwendig ab einem Zeitpunkt u , wenn es künftig, d.h. in der Zukunft von und einschließlich u , immer der Fall sein wird. Für diese Verwendungsweise von *möglich* und *notwendig* müssen wir uns die möglichen Welten (Zeitpunkte) in einer Reihenfolge angeordnet denken. Was notwendig zu einem Zeitpunkt ist, muß dann nicht notwendig zu einem früheren Zeitpunkt sein, wie das Gegenbeispiel zu (B) in Abb. 1 zeigt.⁶ Am Punkt u ist $\Diamond \Box A$ wahr. Also muß es einen Punkt in der Zukunft von u geben, an dem $\Box A$ wahr ist; dies ist der Punkt v . Also muß A wahr sein an allen Punkten in der Zukunft von (und einschließlich) v . Am Punkte u kann A aber falsch sein und deshalb ist am Punkte u auch $\Box A$ falsch.

Was folgt aus diesen Beobachtungen für Gödels Gottesbeweis? Eigentlich nichts. Am besten versteht man die Verwendung des Prinzips (B) in dem Beweis als eine Erklärung darüber, welche Art von Notwendigkeit gemeint ist, wenn behauptet wird, daß ein göttliches Wesen notwendig existiere. Das Prinzip (B) zeigt an: Hier geht es um die ›schlichte‹, unbedingte Notwendigkeit

⁶ Eigentlich genügen für das Gegenbeispiel die zwei Punkte u und v .

– manchmal auch »metaphysische« oder »logische Notwendigkeit« genannt. Wenn etwas in diesem schlichten Sinne notwendig ist, dann ist es auch in jedem anderen, schwächeren Sinne notwendig. Schlecht für Gödels Beweis wäre es nur, wenn Gödel an einer Stelle einen schwächeren Notwendigkeitsbegriff verwendet, um später auf einen stärkeren zu schließen. Dafür gibt es jedoch keinen Anhaltspunkt. Es gibt aber drei andere Gründe, Gödels Beweis mit Zurückhaltung zu betrachten.

4 Einwände

Ein Beweis für eine These, von der wir nicht glauben, daß sie sich beweisen lasse, ist etwas Überraschendes. Angesichts eines solchen Beweises erscheinen alle unsere Gründe, die Konklusion abzulehnen, nichtig. Stattdessen sind wir mit einem zwingenden Grund konfrontiert, das, was wir für unglaublich hielten, zu glauben. Es gibt nicht allzuvielen Möglichkeiten, den »Überraschungswert« eines solchen Beweises zu senken und sich dem Zwang des Argumentes zu entziehen. Da sind zunächst die zwei offensichtlichen Er widerungen, entweder die Annahmen des Beweises als falsch oder den Übergang von den Annahmen zur Konklusion als ungültig abzulehnen. Eine Variante der ersten Erwiderung besteht darin, die Annahmen als eine mehr oder weniger offensichtliche Reformulierung der Konklusion zu erweisen. In diesem Fall verliert das Argument seine Überzeugungskraft, weil die Annahmen der Konklusion nicht zu mehr Glaubwürdigkeit verhelfen können. Schließlich besteht noch die Möglichkeit, die Annahmen als wahr und die Schlüsse als gültig zu akzeptieren – mithin die Konklusion zu akzeptieren –, aber zu argumentieren, daß Annahmen und Konklusion, entgegen einem ersten Eindruck, eine völlig undramatische Interpretation zulassen. Zum Beispiel wäre ein Argument für die Konklusion, daß es nur ein Ding in der Welt geben kann, sicherlich überraschend. Der Überraschungswert eines solchen Argumentes würde aber stark sinken, wenn sich nach sorgsamer Überprüfung der Annahmen erweisen würde, daß mit »Ding« so etwas wie »allumfassendes Ding«, d.h. die Summe aller Gegenstände, gemeint sein muß.

Alle gerade genannten Arten der Erwiderung sind auch im Falle von Gödels ontologischem Beweis versucht worden. Die Versuche, Gödel, dem unbestritten herausragendsten Logiker des 20. Jahrhunderts, einen Fehlschluß nachzuweisen, sind, verständlicherweise, eher zaghaft und nur andeutend geblieben. Sie richten sich auf diejenige Stelle im modalen Argument, wo Gödel nach dem Becker-Prinzip (B) schließt. Der Vorwurf, *in nuce*, geht dahin, daß der Begriff der Notwendigkeit in der Formulierung der Annahmen des Beweises ein anderer ist als derjenige, der in (B) auftaucht – eine Äquivokation des Begriffes der Notwendigkeit also, mit der Folge eines ungültigen Schlusses.⁷ Ich werde auf diesen Einwand hier nicht weiter eingehen.

⁷ Vgl. Hick 1967.

Im folgenden sollen jeweils Versuche betrachtet werden zu zeigen, daß (1) die Annahmen des Beweises nicht wahr sein können, (2) die Annahmen und die Konklusion völlig undramatische Interpretationen erlauben, und schließlich (3) die Annahmen nicht plausibler sind als die Konklusion.

4.1 Die Modalitäten fallen zusammen

In seiner Darstellung von Gödels Beweis fügt Sobel (1987) ein Argument ein, welches zeigen soll, daß aus Gödels Annahmen

$$(S) \quad A \rightarrow \Box A$$

folgt. Aus (S) folgt unmittelbar, daß in Gödels System alle Modalitäten zusammenfallen: Was möglich ist, ist zugleich aktual und notwendig, und umgekehrt:

$$\Diamond A \leftrightarrow A \leftrightarrow \Box A.$$

Das, so Sobel, könne aber nicht sein. Die Ableitbarkeit von (S) stellt also eine *reductio ad absurdum* der Gödelschen Annahmen dar.⁸

Bei näherer Betrachtung des Argumentes von Sobel stellt sich heraus, daß dieser eine besonders reichhaltige Klasse von Eigenschaften annimmt. Kurz gesagt nimmt Sobel zu den Annahmen Gödels die weitere Annahme hinzu, daß es zu jedem Satz der Sprache eine oder mehrere Eigenschaften gibt (je nachdem, wieviele Ausdrücke für Individuen der Satz enthält).⁹ Wir wollen diese Annahme hier kurz »(Infla)« – für »Inflation« – nennen.¹⁰

Setzt der ontologische Beweis von Gödel (Infla) voraus? Ein Modell zeigt, daß dies nicht der Fall ist. Es handelt sich dabei um eine kleine, überschaubare Konstruktion, für die alle Axiome des ontologischen Beweises gelten, in der Sobels Formel (S) aber falsch ist. Damit ist gezeigt, daß die Axiome nicht zum Zusammenfall der Modalitäten führen. Es ist ferner gezeigt, daß aus den Axiomen nichts folgen kann, was (S) impliziert; insbesondere muß deshalb auch (Infla) unabhängig von den Axiomen sein.

Das Modell besteht aus zwei Individuen, *a* und *g*, die über zwei Welten, *i* und *k*, verteilt sind. Neben den in den Axiomen genannten Eigenschaften der Göttlichkeit, *G*, und der notwendigen Existenz, *E*, gibt es eine weitere

⁸ Adams (1995) hat dagegen eingewandt, daß zumindest einige Philosophen – z.B. Spinoza – den Zusammenfall der Modalitäten für ein durchaus willkommenes Resultat hielten. Aber auch mit Spinoza als Zeugen ist dieses Resultat der Glaubwürdigkeit der Prämissen sicher nicht zuträglich.

⁹ Diese Eigenschaften erhält man dadurch, daß man von dem Vorkommen einzelner Namen für Individuen oder gebundener Variablen »abstrahiert«, d.h. Namen durch Variablen ersetzt und mit einem Abstraktionsoperator bindet bzw. diesen an die Stelle eines Quantors treten läßt. Also bestimmt jeder Satz *S* Eigenschaften $\lambda x.Sx$, die dadurch zustandekommen, daß das Vorkommen eines Terms in *S* durch *x* ersetzt (und mit dem Abstraktionsoperator λ gebunden) wird. Eine solche Eigenschaft kommt jedem Individuum *a* zu, für das der Satz *S* wahr wird, wenn *a* an die durch *x* angedeutete Stelle in *S* tritt.

¹⁰ Das Prinzip (Infla) gibt wieder, was man in einer angemessenen formalen Formulierung ein »uneingeschränktes Komprehensionsprinzip« nennt.

Eigenschaft, F , sowie die Negationen und die Konjunktionen dieser Eigenschaften. Ferner gibt es noch die höherstufige Eigenschaft der Positivität, P . Die Verteilung der Eigenschaften auf a und g in den Welten i und k ist wie folgt:

- (1) (a) In i gilt: Gg, Fa, \dots ;
 (b) in j gilt: $Gg, \neg Fa, \dots$.¹¹
- (2) Positive Eigenschaften:
 - (a) G ist positiv;
 - (b) jede Eigenschaft ist entweder positiv oder nicht positiv;
 - (c) eine Eigenschaft ist genau dann positiv, wenn g sie hat.
- (3) g hat eine Eigenschaft entweder in jeder Welt oder in keiner Welt.

Wir wollen ferner vereinbaren, daß der Satz PX in einer Welt w genau dann wahr ist, wenn X positiv ist, und daß der Satz $\Box A$ in w genau dann wahr ist, wenn A in allen Welten wahr ist. (Die Wahrheitsbedingungen für Sätze mit \neg , \wedge und \forall sind die üblichen – wir brauchen hier nicht weiter auf sie einzugehen.)

Offensichtlich ist es nicht in allen Welten der Fall, daß wenn Fa , dann $\Box Fa$. In i z.B. ist Fa wahr, aber $\Box Fa$ falsch, da Fa ja nicht in allen Welten wahr ist – siehe j . Die Sobel-Formel (S) gilt in diesem Modell deshalb nicht. Es bleibt zu zeigen, daß das Modell alle Axiome Gödels erfüllt.

(A1) und (A3) gelten nach Bedingung (1a) bzw. (1b). Für (A2) betrachte man eine beliebige positive Eigenschaft X . Dann ist g ein X in allen Welten, nach (3). Nun nehme man an, daß jedes X notwendigerweise auch ein Y ist. Dann ist g ein Y in allen Welten, d.h. Y ist positiv, wie gewünscht. Für (A4) erinnern wir, daß die Positivität einer Eigenschaft weltunabhängig ist: PX ist in jeder beliebigen Welt w genau dann der Fall, wenn X positiv ist. Wenn PX also in w wahr ist, dann ist PX in jeder Welt wahr; mithin ist auch $\Box PX$ in w – und in jeder beliebigen anderen Welt – wahr. Für (A5) ist zu zeigen, daß notwendige Existenz positiv ist, PE . Nach (1c) bedeutet das, daß wir zeigen müssen, daß g in allen Welten ein E ist. Aber nach (3) bleiben die Eigenschaften von g in allen Welten konstant. Also genügt es zu zeigen, daß g in irgendeiner Welt ein E ist. Das bedeutet wiederum nach (D3), daß jede wesentliche Eigenschaft von g notwendig instantiiert sein muß. Wir nehmen also an, X sei eine wesentliche Eigenschaft von g ($X \text{ Ess } g$), und zeigen, daß es in jeder Welt ein x gibt, das diese Eigenschaft hat ($\Box \exists x Xx$). Aber das ist einfach. Denn wir wissen, daß G eine wesentliche Eigenschaft von g ist, und so folgt unmittelbar aus (D3), daß alle wesentlichen Eigenschaften von g zu G

¹¹ Die Auslassungspunkte deuten an, daß hier die Verteilung auf i und j der weiteren Eigenschaften, die durch den Abschluß von F und G unter Negation und Konjunktion – oder besser: Komplement- und Schnittmengenbildung – gewonnen werden, folgt. Die Verteilung muß natürlich die üblichen Wahrheitsbedingungen für Negation und Konjunktion respektieren.

notwendig äquivalent sind. Es genügt also zu zeigen, daß es in jeder Welt ein G gibt, was nach Bedingung (1) der Fall ist: $\Box Gg$. Damit haben wir gezeigt, daß das vorgeführte Modell die fünf Axiome erfüllt.

Das Prinzip (Infla) ist also unabhängig von den Gödelschen Annahmen. Wenn man es zu diesen Annahmen hinzunimmt, dann kommt es, wie Sobel gezeigt hat, zum Zusammenfall der Modalitäten. Insofern man diesem Zusammenfall entgegen möchte, kann Sobels Argument daher direkt gegen die zusätzliche Annahme von (Infla) gerichtet werden.¹²

Das soeben vorgestellte Modell der Gödelschen Annahmen zeigt nicht nur, daß (Infla) von diesen Annahmen unabhängig ist. Es zeigt auch, daß diese Annahmen widerspruchsfrei sind, d.h. daß es möglich ist, überschaubare Beispiele anzugeben, wie alle Annahmen zugleich wahr sein können. Es zeigt darüber hinaus, daß es recht triviale Beispiele dessen gibt, was die Annahmen beschreiben können – Beispiele, die offenbar von der theistischen Absicht des Beweises weit entfernt sind. Mit dieser Beobachtung kommen wir zu einer weiteren Möglichkeit, den ontologischen Beweis Gödels *qua* Gottesbeweis zu »entschärfen«.

4.2 Gödlichkeit und Göttlichkeit

Angenommen, wir akzeptieren Gödels Axiomatisierung positiver Eigenschaften und seinen Beweis, daß es notwendigerweise genau ein Ding gibt mit der in (D1) definierten Eigenschaft G . Im Manuskript setzte Gödel hinter die Definition in Klammern das Wort »God«. Folgen wir also Gödel, indem wir die in (D1) definierte Eigenschaft *Gödlichkeit* nennen und das Resultat des Beweises so formulieren: Es gibt notwendigerweise genau einen *God*. In welcher Beziehung stehen *Gödlichkeit* und *Göttlichkeit*, *God* und *Gott*?

Die Frage weist darauf hin, daß am Ende von Gödels Beweis offenbar eine Lücke zu schließen bleibt. Wir sind aufgefordert, eine Verbindung herzustellen zwischen einer axiomatisch definierten Eigenschaft einerseits und einem durch Traditionen vorgegebenen, schillernden und, wie viele glauben, wesentlich mysteriösen Begriff andererseits. Diese Aufgabe kann sicherlich nicht mit rein logischen Mitteln gelöst werden. Muß an dieser recht elementaren Tatsache der ontologische Beweis scheitern? Kann sich ein Kritiker auf den Standpunkt stellen, daß Gödel zwar die notwendige und einzigartige Existenz eines Wesens bewiesen hat, welches eine Menge abstrakter, axiomatisch charakterisierter »positiver Eigenschaften« erfüllt, daß dieser Beweis jedoch noch keinen Gottesbeweis abgibt?

Das Resultat von Gödels Beweis, es gebe notwendigerweise genau einen *God*, ist eine Konjunktion, bestehend aus einer Existenz- und einer Einzigkeitsaussage:

$$(E) \quad \Box \exists x Gx \quad \text{und} \quad (U) \quad \forall x (Gx \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow x = y)).$$

¹² Tatsächlich ist ein uneingeschränktes Komprehensionsprinzip wie (Infla) auch in anderen Bereichen suspekt. In der Mengentheorie z.B. führt es zu Russells Antinomie; in einer Wahrheitstheorie führt es zur Lügnerparadoxie.

Um die nun folgenden Überlegungen übersichtlicher darzustellen, soll $G!$ für die traditionelle, nicht formal, sondern material charakterisierte Eigenschaft der Göttlichkeit stehen. $G!x$ bedeutet also: x ist ein Gott im vollen Sinne der abendländischen theologischen Tradition. Letztlich sind die Beweisziele eines ontologischen Gottesbeweises die beiden Aussagen

$$(E!) \quad \Box \exists x G!x \quad \text{und} \quad (U!) \quad \forall x (G!x \rightarrow \Box \forall y (G!y \rightarrow x = y)).$$

Wie läßt sich plausibel machen, daß (E!) aus (E) und (U!) aus (U) folgt?

Für (E!) würde ein Argument für die These reichen, daß jedes gödliche Wesen notwendig ein göttliches Wesen ist:

$$(EE) \quad \Box \forall x (Gx \rightarrow G!x).$$

Aber es gibt ein einfaches Argument, das es ratsam erscheinen läßt, sich nicht auf (EE) zu stützen. Nach (D1) bezeichnet G genau diejenige Eigenschaft, die ein Ding hat, wenn es alle Eigenschaften aus einer Menge positiver Eigenschaften – einer *positiven Menge*, wie wir auch sagen wollen – instantiiert. Kann Göttlichkeit in diesem Sinne Göttlichkeit, d.h. absolute Vollkommenheit garantieren? Das Problem ist, daß es nur eine Menge göttlicher Vollkommenheiten, aber viele positive Mengen geben kann. Für jede dieser positiven Mengen gibt es gödliche Wesen, wie Gödel zeigt. Aber nicht alle gödlichen Wesen können identisch sein mit den göttlichen Wesen, die zur Menge der Vollkommenheiten gehören.

Es sei P eine beliebige Menge positiver Eigenschaften und es sei Q eine beliebige (echte) Teilmenge von P , die auch positiv ist. Es seien g_P und g_Q gödliche Wesen für P bzw. Q , Wesen also, die alle Eigenschaften in P bzw. Q instantiieren. Dann kann g_Q nicht göttlich sein. Denn g_Q hat weniger positive Eigenschaften als g_P . Selbst wenn g_P göttlich sein sollte, könnte g_Q es nicht sein. Also ist g_Q gödlich, aber nicht göttlich. Somit ist (EE) falsch.¹³

Verschiedene Stellen in Gödels Nachlaß deuten darauf hin, daß Gödel etwas im Sinne hatte, was mit der These (EE) nicht verträglich ist. Danach gibt es eine Menge möglicher Eigenschaften. Einige Teilmengen dieses Universums von Eigenschaften erfüllen die Gödelschen Axiome für Positivität. Unter diesen formal positiven Teilmengen ist eine ausgezeichnet als die Menge der Perfektionen (ein Ausdruck, den Gödel oft in seinen Notizbüchern verwendet), d.h. der positiven Eigenschaften im vollen, materialen Sinne. Von diesen sagt Gödel: »Positive means positive in the moral aesthetic sense (independently of the accidental structure of the world). Only then [are?] the axioms true.« Hier weist Gödel einerseits auf eine Konsequenz der Axiome hin – nämlich, daß alle Eigenschaften Gottes notwendige Eigenschaften sind –, andererseits zeigt die Stelle aber auch, daß Gödel eine inhaltliche Vorstellung positiver Eigenschaften hat – »moralisch-ästhetisch«, die über bloß formale Bestimmungen hinausgeht. Die Axiome greifen nur einen Teilaspekt

¹³ Oppy (1996) stellt ein ähnliches Argument vor, um den Gödelschen Beweis ad absurdum zu führen. Das Argument richtet sich aber eigentlich gegen die These (EE), von der Oppy anscheinend annimmt, daß sie für Gödels Gottesbeweis erforderlich sei.

dieser Perfektionen heraus – einen solchen Teilaspekt nämlich, der ausreicht, um einen ontologischen Beweis zu führen.

Wenn (EE) also keine plausible Verbindung zwischen (E) und (E!) herstellen kann, wie kommen wir dann von der Existenz eines gödlichen Wesens (E) zur Existenz eines göttlichen Wesens (E!)?

Nehmen wir an, daß es Gödel tatsächlich gelingt zu zeigen, daß jede Menge von positiven Eigenschaften – im Sinne der Axiome – notwendig instantiiert ist. Die kritische Frage ist hier: Wie gelingt es zu zeigen, daß die Menge der göttlichen Vollkommenheiten notwendig instantiiert ist? Im Prinzip recht einfach: indem man zeigt, daß die Menge der Vollkommenheiten positiv ist, d.h. daß die göttlichen Vollkommenheiten die fünf Bedingungen erfüllen. Diese Aufgabe wird uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

Wenn dies gelingt, dann ist auch der Schluß von (U) auf (U!) gewährleistet. Denn (U) besagt (nach Definition (D1)), daß es für jede Menge positiver Eigenschaften höchstens ein Wesen gibt, das alle diese Eigenschaften instantiiert. Wenn es also gelingt zu zeigen, daß die Menge der Vollkommenheiten positiv ist, dann können wir für die Vollkommenheiten auch dieses Resultat übernehmen: Es gibt höchstens ein Wesen, welches alle Vollkommenheiten instantiiert. Ein solches Wesen nennen wir göttlich.

4.3 Sind die Annahmen zu stark?

Die Gültigkeit eines Beweises einsehen, bedeutet: einsehen, daß die Annahmen des Beweises für die Herleitung der Konklusion ausreichend stark sind. Je besser man einen Beweis versteht, um so deutlicher sieht man, wie die Konklusion in den Annahmen bereits ›enthalten‹ ist. Ein gutes Verständnis eines Beweises kann so schnell zum Ausgangspunkt einer Kritik werden. Denn wer stark dazu neigt, die Konklusion eines Beweises abzulehnen, der wird jetzt darauf hinweisen wollen, daß sich die Fragwürdigkeit der Konklusion auf die Prämissen überträgt, in denen die Konklusion doch ›mehr oder weniger bereits enthalten‹ ist. So ergeht es auch Gödels Beweis. Diejenigen Kritiker des Beweises, die das Argument als schlüssig akzeptieren, weisen darauf hin, daß eine oder mehrere der Annahmen nicht weniger fragwürdig sind als die Konklusion.

Natürlich ist eine Kritik der Prämissen ein zulässiger Angriff auf ein Argument. Aber eine Kritik der Prämissen, die sich allein darauf stützt, daß daraus eine umstrittene Konklusion folgt, ist ›dialektisch‹ wirkungslos. Angenommen, wir betrachten, sozusagen als Schiedsrichter, einen Disput um die Frage, ob eine bestimmte Zahl, z , die Eigenschaft X hat. Peter behauptet Xz , Paul behauptet das Gegenteil, $\neg Xz$. In der ersten Runde legt Peter einen Beweis für Xz aus einigermaßen plausiblen Annahmen vor – 1 : 0 für Peter. Paul entgegnet, daß der Beweis nicht gut sei, denn er beruhe auf Annahmen, aus denen die umstrittene Behauptung Xz folge – die umstrittene Behauptung sei in diesem Sinne in den Prämissen schon enthalten. Sollten wir für diese Entgegnung einen Punkt vergeben? Ich glaube nein. Einen Punkt könnten wir

dann vergeben, wenn Paul unabhängige Gründe gegen die Annahmen vorlegt oder wenn Paul ein besseres Argument für $\neg Xz$ hat.

Übertragen wir diese Betrachtung auf Gödels ontologischen Beweis, dann benötigt der Kritiker also entweder einen besseren Beweis für die Nichtexistenz Gottes oder Gründe, die Prämissen abzulehnen, die unabhängig sind von der Tatsache, daß diese Prämissen Ausgangspunkte eines ontologischen Beweises sein können.

Die Axiome betreffen alle den Begriff der Positivität einer Eigenschaft. Zusammengekommen geben sie eine implizite Definition dieser Eigenschaft ab. Wie oben bereits gesagt, hängt eine Antwort auf die Frage, ob der ontologische Beweis die Existenz eines *Gottes* – und nicht etwa bloß eines *Godes* – zeigt, entscheidend davon ab, ob es plausibel gemacht werden kann, daß die Menge derjenigen Eigenschaften, die für Gott charakteristisch sind – gemeinhin »Vollkommenheiten« genannt –, positiv sind im Sinne der Axiome. Wir fragen also jetzt: Erfüllt der Begriff der göttlichen Vollkommenheit die fünf Bedingungen?

(A1.1) sagt, daß alle vollkommenen Eigenschaften miteinander konsistent sind. Axiom (A3) sagt, daß die große Konjunktion aller Vollkommenheiten selbst eine vollkommene Eigenschaft ist. Aus den beiden Axiomen folgt – mit (A2) im Hintergrund –, daß es etwas geben kann, das in jeder Hinsicht vollkommen ist.

Die folgende Überlegung läßt sich zugunsten von (A2) anstellen. Es gehört zum traditionellen Gottesbegriff, daß Gott alle Vollkommenheiten hat und nur diese – daß Gott »rein vollkommen« ist. Gäbe es jedoch eine Vollkommenheit X und eine davon eingeschlossene Eigenschaft Y , so daß (A2) verletzt wäre, dann könnte Gott nicht rein vollkommen sein. Denn wenn Gott alle Vollkommenheiten besitzt, dann ist Gott ein X und also auch notwendig ein Y . Die Eigenschaft Y ist aber keine Vollkommenheit. Also wäre Gott nicht rein vollkommen. Die Bedingung (A2) stellt sicher, daß reine Vollkommenheit möglich ist.

Wenn eine Eigenschaft nicht vollkommen ist, dann, so sagt (A1.2), muß deren Negation eine Vollkommenheit sein. Für jede Eigenschaft gilt also, daß entweder sie oder ihre Verneinung vollkommen ist. Das ist eine sehr starke Annahme, und vielleicht ist das beste, was sich zu ihrer Verteidigung sagen läßt, daß es Variationen von Gödels Beweis gibt, für die sie nicht nötig ist (s. u.).

Axiom (A4) sagt, daß die vollkommenen Eigenschaften konstant sind über alle Welten hinweg. Wenn eine Eigenschaft vollkommen ist, dann ist sie notwendig vollkommen. Ausgeschlossen wird so, daß die Eigenschaften Gottes von Welt zu Welt variieren. Die Vollkommenheiten Gottes sind ihm wesentliche Eigenschaften: keine Eigenschaften also, die Gott auch hätte nicht haben können. Auch diese Vorstellung ist ein Teil des traditionellen Gottesbegriffes.

Bleibt (A5), die Bedingung, daß notwendige Existenz eine Vollkommenheit sei. Was spricht dafür, Gödels Axiom (A5) anzunehmen? Nach der Definition göttlicher Wesen haben diese alle Vollkommenheiten – oder »Perfektionen«,

wie Gödel manchmal auch sagt. Greifen wir ein göttliches Wesen, g , heraus. Axiom (A5) besagt, daß jede wesentliche Eigenschaft von g – d.h. jede Eigenschaft g 's, die alle anderen einschließt – notwendig instantiiert sein muß. Angenommen also, notwendige Existenz wäre keine vollkommene Eigenschaft. Dann wäre es möglich, daß g diese Eigenschaft nicht hat. Nach (D3) hieße das, daß es eine wesentliche Eigenschaft von g gibt, die nicht notwendig instantiiert ist. Da das göttliche Wesen g aber (nach Satz 2) wesentlich ein G ist und alle wesentlichen Eigenschaften notwendig äquivalent sind, würde aus unserer Annahme folgen, daß g nicht notwendig göttlich ist, daß es mithin eine Welt u gibt, in der g nicht die Eigenschaft der Göttlichkeit hat, d.h. nicht alle vollkommenen Eigenschaften besitzt. Aber dann könnte man sich leicht ein Wesen g^+ denken, das genauso ist wie g , aber darüber hinaus auch in u vollkommen ist, d.h. auch in u alle vollkommenen Eigenschaften besitzt. Welches Wesen ist vollkommener, g oder g^+ ? Axiom (A5) sagt: g^+ ist vollkommener als g . Diese Entscheidung klingt keinesfalls unplausibel.

Die vorangegangene Diskussion der Gödelschen Axiome zeigt, daß diese Bedingungen ausdrücken, die mit traditionellen Vorstellungen von göttlicher Vollkommenheit durchaus im Einklang stehen. So spricht einiges dafür, daß die Menge der vollkommenen Eigenschaften Gödels Bedingungen für Positivität erfüllt.

Aber der Ausgangspunkt von Gödels Versuch eines ontologischen Beweises war genau die Leibnizsche Frage, ob die traditionellen Vorstellungen von göttlicher Vollkommenheit ein konsistentes Ganzes ergeben. Die Art und Weise, wie Gödel diese Frage beantwortet, mag enttäuschend erscheinen. Gödel ›sagt‹ einfach (in den ersten drei Axiomen), daß die große Konjunktion aller positiven Eigenschaften ein mögliches Wesen beschreibt. Leibniz dagegen versuchte so etwas wie eine Erklärung dafür zu geben, warum die Vollkommenheiten miteinander verträglich sein müssen. In einer Hinsicht zeigt Gödels sozusagen gordische Lösung des Leibnizschen Problems, daß das Problem der Konsistenz nicht so schwierig ist, wie Leibniz dachte: Wenn wir die positiven Eigenschaften als miteinander konsistent beschreiben, dann gibt es einfache Modelle, die zeigen, daß diese Beschreibung zutrifft. Andererseits aber, wenn man Gödels Argument als einen Gottesbeweis verstehen möchte, dann hängt sein Erfolg entscheidend davon ab, ob die Menge der göttlichen Vollkommenheiten die Bedingungen für Positivität erfüllt. Das bedeutet insbesondere, daß wir eine Antwort benötigen auf die Frage, ob die Menge der Vollkommenheiten konsistent ist – das alte Leibnizsche Problem. In dem gerade erläuterten Sinne löst Gödel das Problem nicht, sondern setzt dessen Lösung voraus. Aus Gödels Gottesbeweis wird nur dann ein Gottesbeweis, wenn die *göttlichen* Vollkommenheiten ein mögliches Wesen beschreiben. Ob diese Bedingung erfüllt ist, erfahren wir durch den Beweis nicht.

Gödel selbst hat denn auch das Ziel seiner Untersuchung nicht darin gesehen, eine Überzeugung – von der Existenz Gottes – in sich oder anderen hervorzubringen. In einem Brief vom 6. Oktober 1961 an seine 82-jährige Mutter beschreibt Gödel seine bescheidenere Absicht so:

Man ist natürlich heute weit davon entfernt, das theologische Weltbild wissenschaftlich begründen zu können, aber ich glaube, schon heute dürfte es möglich sein, rein verstandesmäßig (ohne sich auf den Glauben an irgend eine Religion zu stützen) einzusehen, daß die theologische Weltanschauung mit allen bekannten Tatsachen [...] durchaus vereinbar ist. Das hat schon vor 250 Jahren der berühmte Philosoph und Mathematiker Leibniz versucht.¹⁴

Gödel zeigt, daß sich die These von der notwendigen Existenz Gottes auf eine Weise entwickeln läßt, die den allerstrengsten Anforderungen an wissenschaftliche Begründungen genügt. Er leitet diese These im Rahmen eines axiomatischen Fragmentes traditioneller Theologie auf dieselbe Weise her wie etwa mathematische Aussagen im Rahmen eines arithmetischen Axiomensystems. Die Annahmen des Systems, die Axiome, sind derart, daß sie akzeptiert werden können, ohne daß man sich vom vernünftigen Denken verabschieden müßte. Die Axiome sind ›mit allen bekannten Tatsachen durchaus vereinbar‹. Das bedeutet nicht, daß die Axiome wahr sind. Aber es bedeutet, daß sie keinesfalls schlechter dastehen als andere Annahmen spekulativer Metaphysik. Als ein solches Kapitel spekulativer Metaphysik betrachtet, ist das ontologische Argument so gut, wie philosophische Argumente nur sein können: eine nicht-triviale Kette gültiger Schlüsse aus Annahmen, deren sorgfältiger Erwägung kein Vernünftiger sich verschließen sollte.

Anhang: Variationen

Gödels zweiter Beweis

Am Ende seiner zweiseitigen Beweisskizze deutet Gödel einen anderen Beweis an:

Positive means positive in the moral aesthetic sense [...] It may also mean pure »attribution« [Gödels Fußnote: i.e. the disjunctive] normal form in terms of elem[entary] prop[erties] contains a member without negation.] as opposed to privation (or containing privation). This interpret[ation affords a] simpler proof.

Gödels Hinweis ist kurz, aber nicht zu kurz, um eine Hypothese zu wagen, was Gödel hier vorgeschwebt haben könnte. Es scheint, daß Gödel hier eine moderne Version von Leibniz' Argument andeutet. Gödel geht aus von einer Menge P elementarer positiver Eigenschaften. »Elementar« versteht Gödel hier vor allem in dem Sinne, daß die Menge P konsistent ist, d.h. daß aus der Annahme, daß etwas alle Eigenschaften in P erfüllt, kein Widerspruch folgt. Dieser Aspekt der elementaren Eigenschaften ist jedenfalls der einzige, der für den Beweis wichtig ist. Wir wollen zudem annehmen, daß P endlich sei – eine Annahme, die im Prinzip unnötig ist und nur der Vereinfachung dient.

Es sei P^+ der Abschluß von P unter den Wahrheitsfunktionen. Dann sagen wir, daß eine Eigenschaft $X \in P^+$ genau dann *attributiv* ist, wenn unter den

¹⁴ Zitiert nach M.-E. Schimanovich-Galidescu 2001.

Disjunkten der disjunktiven Normalform von X mindestens eine elementare positive Eigenschaft ist. Wenn $|DNF(X)|$ für die Menge der Disjunkte der disjunktiven Normalform (DNF) von X steht, dann ist X also genau dann attributiv, wenn $X \in P^+$ und $X \cap |DNF(X)| \neq \emptyset$. Wir nennen ferner jedes Individuum x einen *Zeugen* für eine Eigenschaft X , wenn x eine Eigenschaft in $DNF(X) \cap P$ instantiiert. Es folgt aus der Definition attributiver Eigenschaften unmittelbar, daß es für jede attributive Eigenschaft einen Zeugen gibt, d.h. jede attributive Eigenschaft ist konsistent. Da die Menge der attributiven Eigenschaften unter Konjunktion abgeschlossen ist, gilt das insbesondere auch für den Schnitt aller attributiven Eigenschaften. Also gibt es einen Zeugen für die ›höchste‹ aller attributiven Eigenschaften, d.h., die Konjunktion aller attributiven Eigenschaften ist konsistent. Für einen Beweis, daß es nur einen Zeugen geben kann, bedarf es natürlich weiterer Annahmen.

Andersons System

Anderson (1990) stellt eine Variante des Gödelschen Systems vor, in welcher die Modalitäten auch dann nicht zusammenfallen, wenn Eigenschaften unbeschränkt aus Sätzen abstrahiert werden dürfen. Diese Annahme spielte – wie bereits erwähnt – eine wesentliche Rolle in Sobels (1987) Argument, daß die Modalitäten in Gödels System zusammenfallen. Der Unterschied zu Gödels System besteht in den folgenden zwei Definitionen.

Definition »göttlich«. Etwas ist genau dann *göttlich*, wenn es alle positiven Eigenschaften, und nur diese, notwendigerweise besitzt:

$$(D1^*) \quad Gx \leftrightarrow \forall X (PX \leftrightarrow \Box Xx).$$

Definition »wesentliche Eigenschaft«. X ist genau dann eine wesentliche Eigenschaft von x , wenn x ein X ist und x genau diejenigen Eigenschaften notwendig hat, die aus X notwendig folgen:

$$(D2^*) \quad X \text{ Ess } x \leftrightarrow Xx \wedge \forall Y (\Box Yx \leftrightarrow \Box \forall y (Xy \rightarrow Yy)).$$

Die Definition der notwendigen Existenz hat den gleichen Wortlaut wie die Gödelsche Definition (D3), ihr Sinn ist jedoch durch die vorhergehenden Definitionen geändert.

Definition »notwendige Existenz«.

$$(D3^*) \quad Ex \leftrightarrow \forall X (X \text{ Ess } x \rightarrow \Box \exists y Xy).$$

Aufgrund der verstärkten Definitionen reichen die folgenden drei Axiome Gödels, um den ontologischen Beweis zu führen.¹⁵

¹⁵ Anderson (1990) führt auch Gödels (A4) und (A5) auf. Aber Hájek (2001) zeigt, daß diese Axiome ableitbar sind – jedenfalls unter gewissen, meist stillschweigend gemachten Annahmen über die Logik der zweiten Stufe, die Anderson jedoch nicht teilt.

Axiome.

- (A1.1) $P \neg X \rightarrow \neg PX,$
 (A2) $PX \wedge \Box \forall x (Xx \rightarrow Yx) \rightarrow PY,$
 (A3) $PG.$

Man kommt jetzt sehr schnell zum gewünschten Resultat. Das Prinzip (*), $\exists x Gx \rightarrow \Box \exists x Gx$, folgt nach (D1*) aus (A3) folgendermaßen. Angenommen Gy . Dann – nach (D1*) – $\forall X (PX \rightarrow \Box Xy)$; insbesondere $PG \rightarrow \Box Gy$. Aber PG wissen wir nach (A3). Also $\Box Gy$ und so $\Box \exists x Gx$. Aus (*) können wir – wie oben gezeigt – rein modal schließen auf (S3), $\Diamond \exists x Gx \rightarrow \Box \exists x Gx$. Das Antezedens von (S3) beweist man in Andersons System im wesentlichen wie in Gödels System; vgl. (S1) und (S1*). Wichtig für den Beweis von (S3) sind die folgenden zwei Beobachtungen:

- (i) Axiom (A4), $PX \rightarrow \Box PX$, folgt aus (D1*), und
 (ii) $X \text{ Ess } x \rightarrow \Box \exists y Xy$ folgt aus (D3*).

Beweis von (i). Nach (S1*) wissen wir, daß G instantiiert ist. Wir nehmen also an, daß Gx . Daraus folgt nach (D1*): $\Box Xx \leftrightarrow PX$ (*). Aus (*) folgt mit RM: $\Box \Box Xx \rightarrow \Box PX$. Aber $\Box \rightarrow \Box \Box$, also $\Box Xx \rightarrow \Box PX$. Jetzt benutzen wir die Äquivalenz (*) und folgern $PX \rightarrow \Box PX$. ■

Beweis von (ii). Aus $X \text{ Ess } x$ folgt nach (D3*) $\forall Y (\Box Yx \leftrightarrow \Box \forall y (Xy \rightarrow Yy))$ und insbesondere: $\Box Xx \leftrightarrow \Box \forall y (Xy \rightarrow Xy)$. Aber die rechte Seite der Äquivalenz gilt logisch; daher $\Box Xx$ und also $\Box \exists y Xy$. ■

Damit beenden wir unsere Skizze des Systems von Anderson. Der Leser möge den Beweis selbst vervollständigen.

Ein weiteres System

Der folgende Beweis hat die Vorteile, auf einer sehr einfachen axiomatischen Basis zu beruhen, den modalen vom nicht-modalen Teil des Argumentes deutlich zu separieren und im modalen Teil nur sehr schwache modale Prinzipien vorauszusetzen.¹⁶ Im Unterschied zu Gödel und Anderson definieren wir den Begriff einer positiven Eigenschaft und nur diesen. Von den drei Axiomen stammt nur noch eines (B1 = A1.1) aus dem Fundus von Gödel.

Definition »positive Eigenschaft«. Eine Eigenschaft ist genau dann positiv, wenn jedes göttliche Wesen sie besitzt:

$$(DP) \quad PX \leftrightarrow \forall x (Gx \rightarrow Xx).$$

¹⁶ Die Beweisidee, d.h., die Definition positiver Eigenschaften als Ausgangspunkt zu nehmen, geht auf Bjørdal 1998 zurück.

Erstes Axiom. Positivität ist konsistent:

$$(B1) \quad P\neg X \rightarrow \neg PX.$$

Damit läßt sich die Existenz eines göttlichen Wesens beweisen.

Erster Satz. Es gibt ein göttliches Wesen: $\exists x Gx$.

Beweis. Offensichtlich ist $\forall x (Gx \rightarrow Gx)$ logisch wahr. Dann folgt nach (DP) von rechts nach links, daß Göttlichkeit positiv ist: PG . Also, nach (B1), $\neg P\neg G$. Wenn wir jetzt (DP) von links nach rechts anwenden, erhalten wir

$$(1) \quad \neg \forall x (Gx \rightarrow \neg Gx).$$

Dies ist aber äquivalent zu $\neg \forall x \neg Gx$, welches wiederum äquivalent ist zu dem zu beweisenden $\exists x Gx$. ■

Das Argument verlief bisher völlig amodal, d.h. ohne jeden Bezug auf die Modalität der Notwendigkeit. Das nächste, sehr einfache Axiom genügt, um von der schlichten Existenz eines göttlichen Wesens auf seine notwendige Existenz zu schließen.

Zweites Axiom. Wenn eine Eigenschaft positiv ist, dann ist die Notwendigkeit dieser Eigenschaft ebenfalls positiv:

$$(B2) \quad PX \rightarrow P\Box X.$$

Zweiter Satz. Wenn es ein göttliches Wesen gibt, dann gibt es dieses Wesen notwendigerweise: $\exists x Gx \rightarrow \Box \exists x Gx$.

Beweis. Aus $\forall x (Gx \rightarrow Gx)$ folgt wieder nach (DP), daß PG , und mithin nach (B2): $P\Box G$. Darauf wenden wir jetzt (DP) von links nach rechts an und erhalten $\forall x (Gx \rightarrow \Box Gx)$ – was göttlich ist, ist es notwendigerweise. Daraus folgt prädikatenlogisch:

$$(*) \quad \exists y Gy \rightarrow \exists y \Box Gy.$$

Schon in sehr schwachen modalen Prädikatenlogiken gilt aber: Wenn es etwas gibt, das eine Eigenschaft notwendigerweise hat, dann gibt es etwas notwendigerweise, das diese Eigenschaft hat, d.h.

$$(**) \quad \exists y \Box Gy \rightarrow \Box \exists y Gy.$$

Aus (*) und (**) folgt aufgrund der Transitivität der Implikation der zweite Satz. ■

Die notwendige Existenz eines göttlichen Wesens folgt jetzt direkt aus den beiden Sätzen. Um darüber hinaus auch die Einzigkeit eines göttlichen Wesens,

$$(E) \quad Gx \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow x = y),$$

zu beweisen, bedarf es weiterer Annahmen. Es reicht z.B. die Annahme, daß Identität mit einem göttlichen Wesen eine positive Eigenschaft ist:

Drittes Axiom. Identität mit einem göttlichen Wesen ist positiv:

$$(B3) \quad Gx \rightarrow P(x = _).^{17}$$

Um jetzt (E) zu beweisen, nehmen wir Gx an und schließen mit Hilfe von (B3) auf $P(x = _)$. Nach (DP) folgt dann

$$\forall y (Gy \rightarrow x = y).$$

So haben wir gezeigt, daß

$$Gx \rightarrow \forall y (Gy \rightarrow x = y).$$

Mit der modalen Regel RM schließen wir jetzt auf

$$(*) \quad \Box Gx \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow x = y).$$

Wir wissen aber auch, daß $Gx \rightarrow \Box Gx$. Denn G ist positiv; also gilt nach (B2), daß $P\Box G$. Das bedeutet nach (DP), daß

$$(**) \quad \forall x (Gx \rightarrow \Box Gx),$$

und so erhalten wir aus (*) und (**) aufgrund der Transitivität der Implikation den gewünschten Einzigkeitssatz (E).

Es lassen sich kleine Modelle konstruieren, die zeigen, daß das System widerspruchsfrei ist. Das kleinste – und trivialste – Modell besteht aus einer Welt u und einem Individuum, g . Die einzige positive Eigenschaft ist G . Das Individuum g ist ein G in u . Es ist leicht zu sehen, daß dieses Modell alle Axiome, einschließlich (B3), erfüllt.

Literaturverzeichnis

- Adams, R. M. 1995. »Note to Gödel's ›Ontological proof‹.« In *Collected Works*, vol. III, hg. v. S. Feferman et al., 388–402. Oxford: Oxford University Press.
- Anderson, C. A. 1990. »Some emendations of Gödel's ontological proof.« *Faith and Philosophy* 7:291–303.
- , und M. Gettings. 1996. »Gödel's ontological proof revisited.« In *Gödel 96*, hg. v. P. Hájek, 167–72. Berlin/New York: Springer.
- Björddal, F. 1998. If some property is not Divine then God exists, Typoskript.
- Dawson, J. W. 1997. *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel*. Wellesley (Mass.): Peters.
- Gödel, K. 1995. »Ontological proof.« In *Collected Works*, vol. III, hg. v. S. Feferman et al., 403–4. Oxford: Oxford University Press.
- Hájek, P. 2002. »Der Mathematiker und die Frage der Existenz Gottes (betreffend Gödel's ontologischen Beweis).« In *Kurt Gödel – Wahrheit und Beweisbarkeit*, Bd. 2, hg. v. B. Buldt et al., 325–36. Wien: öbv & hpt.

¹⁷ In λ -Notation: $Gx \rightarrow P(\lambda y. x = y)$.

- Hick, J. 1967. »Ontological arguments for the existence of God.« In *Encyclopedia of Philosophy*, hg. v. P. Edwards. New York: Free Press.
- Oppy, G. 1996. »Gödelian ontological arguments.« *Analysis* 56:226–30.
- Schimanovich-Galidescu, M.-E. 2002. »Princeton–Wien 1946–1966: Gödels Briefe an seine Mutter.« In *Kurt Gödel – Wahrheit und Beweisbarkeit*, Bd. 1, hg. v. E. Köhler et al., 185–207. Wien: öbv & hpt.
- Sobel, J. H. 1987. »Gödel's ontological proof.« In *On Being and Saying*, hg. v. J. J. Thomson, 241–61. Cambridge (Mass.): MIT Press.