MALCOLM, NORMAN
[1960] „Anselm's Ontological Arguments", *Philosophical Review* 69, 41–62 (wieder abgedruckt in: PLANTINGA [1965], 137–80).

MEIXNER, U.
[1992] „Der ontologische Gottesbeweis in der Perspektive der analytischen Philosophie", *Theologie und Philosophie* 67, 246–262.

MUCK, O.
[1992] „Eigenschaften Gottes im Licht des Gödelschen Arguments", *Theologie und Philosophie* 67, 60–85.
[1992a] „Religiöser Glaube und Gödels ontologischer Gottesbeweis", *Theologie und Philosophie* 67, 263-267.

ORILIA, F.
[1994] „A Note on Gödel's Ontological Argument", im Erscheinen.

PERZANOWSKI, J.
[1987] *Essays on Philosophy and Logic*, Cracow (Jagiellonian University Press).
[1991] „Ontological Arguments II: Cartesian and Leibnizian", in: BURKHARDT/SMITH [1991], Vol. 2, 625–633.

PLANTINGA, ALVIN
[1965] *The Ontological Argument. From St. Anselm to Contemporary Philosophers*, Garden City, New York (Doubleday & Co. Inc.).
[1991] „Ontological Arguments I: Classical", in: BURKHARDT/SMITH [1991], Vol. 2, 622–625.

RESCHER, NICHOLAS
[1959] „The Ontological Proof Revisited", *Australasian Journal of Philosophy* 37, 138–148.

RICKEN, F. (Hrsg.)
[1991] *Klassische Gottesbeweise in der Sicht der gegenwärtigen Logik und Wissenschaftstheorie*, Stuttgart (Kohlhammer).

SCHOLZ, H.
[1969] „Der Anselmische Gottesbeweis", in: *Mathesis Universalis*, hrsg. von H. HERMES, F. KAMBARTEL und J. RITTER, Basel/Stuttgart (Schwabe & Co. Verlag).

SMULLYAN, RAYMOND
[1983] *5000 B.C. and Other Philosophical Phantasies*, New York (St. Martin's Press).

SOBEL, JORDAN H.
[1987] „Gödel's Ontological Proof", in: *On Being and Saying. Essays for Richard Cartwright*, hrsg. von. J. J. THOMSON, Cambridge MA / London (MIT Press), 241–261.

THOMAS VON AQUIN
[1982] *Summa Theologica*, Bd. 1: „Gottes Dasein und Wesen", Graz/Wien/Köln (Verlag Styria).

WANG, HAO
[1987] *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge MA/London (MIT Press).

PETR HÁJEK*

Der Mathematiker und die Frage der Existenz Gottes
(betreffend Gödels ontologischen Beweis)

> Es ist gut, daß wir nicht wissen,
> sondern glauben, daß ein Gott sei.
> (Kant, Nachlaß)

1. Einführung

Gödels zu Lebzeiten unveröffentlichter Beweis für die notwendige Existenz eines Gott-ähnlichen Wesens hat sowohl philosophisches als auch mathematisches Interesse geweckt. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, zu einer Deutung des Gödelschen Textes beizutragen, 1. durch Kommentierung der einschlägigen Literatur und 2. durch Bereitstellung von etwas Modelltheorie. Die Arbeit enthält keinen philosophischen Beitrag. Während der letzten Jahre habe ich etliche Male über Gödels Gottesbeweis vorgetragen, insbesondere auf dem Symposium zur Feier von Professor Gert Müller (Heidelberg, Jänner 1991), doch habe ich niemals beabsichtigt, eine Veröffentlichung über das Thema zu machen. Da ich wiederholt um eine schriftliche Version gebeten wurde, entschloß ich mich, schnell eine „erweiterte Kurzfassung"[1] zu schreiben, ohne aus ihr einen voll ausgearbeiteten Artikel machen zu wollen. Die vorliegende Arbeit, welche das Ergebnis einer Einladung der Herausgeber dieses Buches ist, ist eine Ausarbeitung jener erweiterten Kurzfassung; speziell ist §5 (betreffend Anderson [1990]) neu. Meinen Dank für wertvolle Informationen richte ich an M. Baaz, C. Smoryński, F. Montagna, G. Müller, H. Luckhardt, U. Felgner, A. Oberschelp und C. Parsons (in chronologischer Ordnung).

2. Überblick über die einschlägige Literatur

(a) Als *theologischer Hintergrund* ist Küng [1978] sehr zu empfehlen, insbesondere (aber nicht nur) Kapitel F.III. („Gott beweisen?", S. 583). Küng schreibt:

> Gottesbeweise haben heute viel von ihrer Überzeugung, wenig aber von ihrer Faszination eingebüßt. Immer noch üben sie eine stille, geheime Anziehungskraft auf denkende Menschen aus. Existiert Gott? Das muß sich doch beweisen lassen! Unwiderlegbar, rational, jedem einsichtig. Mag sein: Gottesbeweise sind heute als Beweise gescheitert, tot. Aber noch als gescheiterte und tote nötigen sie den Nachgeborenen Respekt ab. Und nicht wenige hat an der Bahre der Gottesbeweise ein wehmütiger Trotz ergriffen: Es müßte doch möglich sein!

Zweitens ist wegen der Beziehung des Gödelschen Beweises zu Anselm die Lektüre von Barth [1958] besonders empfehlenswert. Barth interpretiert Anselms Gottesbeweis; interessant für

* Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, CZ - 182 07 Prague;
Email: hajek@uivt.cas.cz

1 Diese erweiterte Kurzfassung mit dem gleichen Titel wie dieser Aufsatz habe ich an Interessenten auf Anfrage verteilt. Eine Fortsetzung der vorliegenden Arbeit wurde als Hájek [1996] veröffentlicht. Die Diskussion wurde von Anderson und Gettings [1996] weitergeführt.

Vertreter der mathematischen Logik ist, daß Barth die Absicht von H. Scholz erwähnt, den Anselmschen Beweis mit Hilfe der formalen Logik zu untersuchen.

(b) Zum *Gödelschen Beweis* selbst: das Manuskript wird mit dem 10.2.1970 datiert – siehe Sobel [1987]. Es zirkulierte in zwei Versionen: einer von D. Scott, und einer anderen von J.R. Brown, neugetippt von E. Köhler. Der Beweis wurde in Sobel [1987] sowie in Czermak [2002] wiedergegeben, und auch Band III von Gödels gesammelten Werken enthält den Beweis, und zwar mit einer einleitenden Notiz von R.M. Adams.[2]

(c) *Artikel über Gödels Beweis*: Sobel [1987] ist die bekannteste Arbeit; Magari [1988] ist viel weniger bekannt. Hier wird ihr Inhalt nicht wiedergegeben, ich kommentiere bloß einige Aspekte der beiden. Das System von Anderson [1990] wird in § 5 detailliert besprochen. Die Arbeit von Czermak [2002] stand mir leider nur nach dem Abschluß der Abschnitte 1–4 der vorliegenden Arbeit zur Verfügung. Nebenbei erwähne ich, daß Vopěnka [1991] Gödels Beweis detailliert darstellt (wobei er nach Möglichkeit Formalisierung vermeidet). Vopěnka behandelt Gödels Beweis in seinem Kapitel 2 („Vorhaben der neuzeitlichen europäischen Wissenschaft") und führt seine Darstellung mit der (überraschenden) Bemerkung ein: „Wir werden zeigen, daß die neuzeitliche europäische Wissenschaft in der Lage ist, [die Notwendigkeit von Gott] mit Hilfe ihrer allgemein anerkannten Methoden und aus Erwägungen der Vernunft zu beweisen."[3]

(d) *Verwandte Artikel, die aber Gödels Beweis nicht behandeln*: Hartshorne [1962] (dies wird in Brecher [1975] diskutiert); Smullyan [1983]; Felgner [1982].

(e) Der Vollständigkeit halber: Fitch [1975] und Salamucha [1958] behandeln Gottesbeweise, welche allerdings nicht besonders relevant für Gödels Beweis erscheinen.

3. Gödel im Kontext

3.1 Rufen wir uns die Grundbegriffe, Definitionen, Axiome und Theoreme von Gödel ins Gedächtnis (wobei $P(X)$ heißen soll: X ist eine positive Eigenschaft):

Axiom A1:	$P(X) \equiv \neg P(\neg X)$	
Axiom A2:	$P(X)\ \&\ \Box(\forall x)(X(x) \to Y(x)) \to P(Y)$	
Theorem 1:	$P(X) \to \Diamond(\exists x)X(x)$	
Definition 1:	$G(x) \equiv (\forall X)(P(X) \to X(x))$	(ein Gott-ähnliches Wesen)
Axiom A3:	$P(G)$	(Korollar: $\Diamond(\exists x)G(x)$)
Axiom A4:	$P(X) \to \Box P(X)$	
Definition 2:	$X\,Ess.\,a \equiv X(a)\ \&\ (\forall Y)(Y(a) \to \Box(\forall b)(X(b) \to Y(b)))$ (X ist eine Essenz von a)	
Definition 3:	$NE(a) \equiv (\forall X)(X\,Ess.\,a \to \Box(\exists x)(X(x))$	(Notwendige Existenz)
Theorem 2:	$G(x) \to G\,Ess.\,x$	(Korollar: $G(x) \to \Box(\forall y)(G(y) \to y{=}x)$)
Axiom A5:	$P(NE)$	
Theorem 3:	$\Box(\exists x)G(x)$	

[2] Gödel [*1970] erschienen in Gödel [1995]; Adams [1995].

[3] Meine Übersetzung.

Mit verbalen Erklärungen und vollen Beweisen nimmt die Darstellung eine Seite ein (in Köhlers Fassung). Die Beweise sind leicht; der Leser wird nur darüber rätseln, was die Grundidee hinter dem Beweis des Theorems 3 ist. Aber das führt zu meiner ersten Feststellung.

3.2 Brecher [1975] analysiert den Beweis von Hartshorne [1962]. Auf der ersten Seite gibt er Hartshornes Beweis wieder. q heißt „Gott existiert". Er fängt an mit $q \to \Box q$ (was er „Anselms Prinzip" nennt) und mit $\Diamond q$ (was intuitiv akzeptiert wird), und er fährt folgendermaßen fort: Anselm leitet $\Diamond q \to \Diamond\Box q$ ab, weiters $\Diamond\Box q \to \Box q$ (z.B. nach S5), daher $\Box q$. Aber *gerade dies ist die Struktur* von Gödels Beweis des Theorems 3: letzterer beweist Anselms Prinzip (unter Verwendung von Axiom 5), $\Diamond(\exists x)G(x)$ hat er schon, also erhält er $\Box(\exists x)G(x)$. (Gödel spricht weder von Anselm noch hebt er $(\exists x)G(x) \to \Box(\exists x)G(x)$ als ein besonderes Prinzip hervor; dennoch könnte es aufklärend sein, Gödels Beweis als eine Ausarbeitung des Beweises von Hartshorne zu denken.)

3.3 Exkurs: Was Anselm wirklich bezweckte und beweisen wollte, kann man bei Barth [1958] nachlesen; ich möchte hier nur darauf hinweisen, daß Barth abschließend die Charakterisierung von Anselms Beweis als „ontologisch" eine „Gedankenlosigkeit" nennt.

3.4 Sobel [1987] gibt eine detaillierte Formalisierung und zeigt unter anderem, daß Gödels System ein „Kollabieren von Modalitäten" aufweist: das was ist, ist notwendig. Der Beweis ist kurz folgendermaßen:

Wir beweisen $X(a) \to \Box X(a)$. Sei g der (einzigartige) Gott-ähnliche Gegenstand, und sei a gegeben. Man definiere $Y(g) \equiv (g{=}g\ \&\ X(a))$ und $\Box[Y(g) \equiv (g{=}g\ \&\ X(a))]$. Dann ist $X(a) \to Y(g) \to \Box Y(g) \to \Box X(a)$. Derselbe Beweis wurde unabhängig von J. Polívka entdeckt. Unten werden wir eine *zusätzliche Annahme* von Sobel diskutieren und wie man sie vermeiden kann.

Sobel bemerkt (und ich stimme mit ihm überein), daß die Idee eines Gott-ähnlichen Gegenstandes ungewöhnlich ist und sich von religiösen Ideen von Gott unterscheidet.

3.5 Magari fängt mit der Bemerkung an, daß es außer „teofili" (denen es gefallen würde, wenn Gottes Existenz bewiesen wäre) auch „teofobi" gibt (wozu er auch sich selber zählt: er schreibt „io lo sono di tutto il cuore"[4]). Er behauptet unter anderem, daß $\Box(\exists x)G(x)$ schon aus Gödels Axiomen $A1$–$A3$ folgt, und er gibt einen informellen Beweis unter Verwendung von möglichen Welten. Wenn ich dessen Wortlaut richtig verstehe, enthält er einen Fehler; unten (§ **4.6**(3)) gebe ich ein Modell für $A1$–$A3$ plus $\neg\Box(\exists x)G(x)$.

In einem stimme ich mit Magari überein: er schreibt, es ist nicht leichter, die Axiome (Gödels) zu akzeptieren, als das Theorem (daß Gott notwendig existiert) direkt zu akzeptieren.

3.6 Smullyan [1983] benützt ein ganz anderes, nicht-modales System und verwendet die Existenz (oder: wirkliche Existenz) als eine Eigenschaft: $E(x)$ heißt bei ihm x existiert (wirklich). $P(X)$ heißt: X ist eine Perfektion, $G(x)$ wird als $(\forall X)(P(X) \to X(x))$ definiert. (Ich ändere Smullyans Schreibweise in Angleichung an diejenige von Gödel.)

Axiom 1: $P(E)$. *Axiom 2:* $P(X)\ \&\ (\forall x)(X(x) \to E(x)) \to (\exists x)X(x)$. Axiome 3–4 besagen, daß die Perfektionen unter (möglicherweise unendlicher) Durchschnittsbildung geschlossen sind, und daß es die Klasse aller Perfektionen gibt; daraus folgt, daß G auch eine Perfektion ist (Lemma

[4] „Ich bin das von ganzem Herzen."

2). Das reicht aus für die weiteren Schlußfolgerungen (Axiome 3–4 werden darüber hinaus nicht weiter gebraucht).

Theorem 2: $(\exists x)(G(x) \& E(x))$.

Axiom 5: $G(g) \& (\forall x)(X(x) \equiv x = g) \rightarrow P(X)$.

Theorem 3: $(\exists! x) G(x)$. (Gemäß seiner Gepflogenheit schreibt Smullyan diesen Beweis einem unbekannten Theologen namens van Dollard zu, entdeckt von Detektiv Craig usw.).

Man beachte, daß Smullyans System[5] eine naheliegende Interpretation in Gödels System besitzt, erweitert um das *Postulat* der kollabierenden Modalitäten $X(a) \rightarrow \Box X(a)$: P^* ist P, E^* ist NE. Diese Interpretation ist nicht getreu: In Smullyans System kann man die Formel $(\forall x)E(x)$ nicht beweisen; dennoch ist ihre Interpretation beweisbar in Gödels System + Kollabieren. Interessant wäre die Auffindung von anderen, trickreicheren Interpretationen zwischen diesen beiden Systemen.

4. Eine Formalisierung und etwas Modelltheorie

4.1 Mit Sobel nehmen wir die monadische Modallogik zweiter Stufe mit Gleichhheit als zugrundeliegenden Formalismus: wir haben Variablen $x, y, \dots$ für Gegenstände (Individuen), Variablen $X, Y, \dots$ für Eigenschaften, ein Prädikat P zweiter Stufe („positiv"); die Atome sind von der Form $X(x)$, $x=y$ und $P(X)$; wir haben Junktoren, Quantoren und Modaloperatoren. Konstanten werden informell verwendet.

Wir führen eine Kripke-Semantik ein. Ein *Modell* besteht aus einer nichtleeren Menge M von Gegenständen, einer nichtleeren Menge W von möglichen Welten, einem nichtleeren System *Prop* von Eigenschaften, wobei jedes $X \in Prop$ eine Abbildung von $M \times W$ in $\{0,1\}$ und P eine Abbildung $P: Prop \rightarrow \{0,1\}$ ist.

Es wird angenommen, daß *Prop* unter Verwendung von Junktoren geschlossen ist, d.h. für $X, Y \in Prop$ gibt es $Z, U \in Prop$ derart, daß für jedes $w \in W$ und für jedes $a \in M$:

$$Z(a,w) = 1 \equiv X(a,w) = 0 \quad \text{und}$$
$$U(a,w) = 1 \equiv X(a,w) = 1 \vee Y(a,w) = 1 \text{ gilt.}$$

Die Erfüllung wird wie üblich definiert: sei $K = \langle M, W, Prop, P \rangle$, $w \in W$:

$(K,w) \models a = b$ genau dann wenn $a = b$,
$(K,w) \models X(a)$ genau dann wenn $X(a,w) = 1$,
$(K,w) \models P(X)$ genau dann wenn $P(X) = 1$,
Bedingungen für $\neg, \vee, \forall$ sind evident;

$(K,w) \models \Box A$ genau dann wenn für alle $w' \in W$, $(K,w') \models A$.

(Wir mogeln hier ein bißchen, indem wir zwischen einem Symbol und seiner Bedeutung nicht unterscheiden; der Leser möge leicht eine formal korrekte Definition ergänzen.)

[5] Genauer: Axiome 1 und 2, Lemma 2, Axiom 5.

4.2 Tatsache: In jedem K gilt $K \models S5$ (jedes Axiom von S5 ist in jeder Welt von K wahr); K gehorcht außerdem der Verallgemeinerung (falls $K \models A$, dann $K \models \Box A$). Insbesondere gilt $K \models \Box A \equiv \Diamond \Box A$.

4.3 Komprehension: *Welche Formeln bestimmen Eigenschaften?* Gödel äußert sich nicht zu diesem Thema. Sobel postuliert eine starke Form der Komprehension (genannt „properties"). Wir bemühen uns, möglichst wenig vorauszusetzen. Unsere Definition eines Modells setzt unter anderem die Geschlossenheit der Eigenschaften unter den Booleschen Junktoren voraus, d.h.

(*C*1) $$(\forall X)(\exists Z)\Box(\forall x)(Z(x) \equiv \neg X(x)),$$

(*C*2) $$(\forall X, Y)(\exists Z)\Box(\forall x)(Z(x) \equiv . X(x) \vee Y(x)).$$

Des weiteren muß die Existenz der Eigenschaften G und NE gewährt sein:

(*C*3) $$(\exists G)\Box(\forall x)(G(x) \equiv (\forall X)(P(X) \rightarrow X(x))),$$

(*C*4) $$(\exists NE)\Box(\forall x)(NE(x) \equiv (\forall X)(X\, Ess.\, x \rightarrow \Box(\exists y)X(y))).$$

Wir sagen also, daß K Gott-Ähnlichkeit realisiert, wenn (*C*3) in K gilt; desgleichen realisiert K die Eigenschaft der notwendigen Existenz, wenn (*C*4) in K gilt.

4.4 Definition und Anmerkung: Gleichheit ist keine Eigenschaft (sie ist binär); dennoch könnte es sein, daß die Formel $x=a$ eine Eigenschaft bestimmt für jedes $a \in M$. Wir definieren: ein Modell K *realisiert Individuen*, wenn es für jedes $a \in M$ ein $X \in Prop$ gibt mit $X(b,w)=1$ genau dann wenn $b=a$, für jedes $b \in M$ und $w \in W$. Offenbar realisiert K Individuen genau dann wenn folgendes in K gilt:

(*C*5) $$(\forall x)(\exists Y)\Box(\forall y)(Y(y) \equiv y = x).$$

4.5 Theorem: Sei K ein Modell, das Individuen und notwendige Existenz realisiert. Dann gilt $K \models (A1)-(A5)$ genau dann wenn es ein $g \in M$ gibt mit folgenden Bedingungen:

(i) $(\forall X \in Prop)(X$ bleibt konstant auf $\{g\} \times W)$,
(ii) $P(X) = 1$ genau dann wenn $(\forall w)(X(g,w) = 1)$.

Beweisskizze: (1) Notwendig. Falls $(K,w) \models (A1)-(A5)$, dann gelten alle beweisbaren Sätze in K, insbesondere die folgenden:

$$\Box(\exists x)G(x)$$
$$G(x) \rightarrow \Box(\forall y)(G(y) \rightarrow x = y)$$
$$G(x) \rightarrow (\forall Y)(Y(x) \rightarrow \Box Y(x))$$
$$G(x) \rightarrow (\forall X)(P(X) \equiv X(x)).$$

Damit erhalten wir sofort die angeführten Eigenschaften.

(2) Hinreichend. $(A1)$ ist klar; des weiteren ist G jene Eigenschaft, die g realisiert, also $K \models \Box(\exists x)G(x)$. $(A2)$, $(A3)$ und $(A4)$ sind klar; es bleibt nur $K \models (A5)$ zu beweisen. Dafür genügt es, $K \models \Box NE(g)$ zu zeigen. Da wir aber schon $K \models (A1)-(A4)$ wissen, erhalten wir $K \models G\, Ess.\, g$ (wobei jede Essenz von g notwendig mit G äquivalent ist); weil aber $K \models \Box(\exists x)G(x)$ gilt $K \models NE(g)$, also $K \models (A5)$. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

4.6 Beispiele: (1) Ein-elementiges $M=\{g\}$, ein-elementiges $W=\{w\}$; $Prop=\{\top,\bot\}$ mit $\top(g,w)=1$, $\bot(g,w)=0$. $P(\top)=1$, $P(\bot)=0$. NE ist $\top$, G ist $\top$. Dieses Modell K_1 realisiert Individuen und notwendige Existenz und erfüllt $(A1)-(A5)$ wegen **4.5**. Damit ist die Widerspruchsfreiheit von Gödels System bewiesen; auf der anderen Seite zeigt K_1, daß dieses System ziemlich triviale Modelle erlaubt.

(2) M, W besitzen mindestens zwei Elemente, $g \in M$ ist ein designiertes Element; $X \in Prop$ genau dann wenn X eine Abbildung von $M \times W$ in $\{0,1\}$ konstant auf $\{g\} \times W$ ist (d.h. $X(g,w)=X(g,v)$ für alle $w, v \in W$). $P(X)=1$ genau dann wenn $X(g,w)=1$ für jedes $w \in W$. Dieses Modell K_2 realisiert Individuen und NE:

$$(K,w) \models NE(x) \text{ genau dann wenn } x=g,$$

d.h. bloß g existiert notwendig. K_2 ist ein Modell von $(A1)-(A5)$ ohne Kollabieren von Modalitäten; somit hebt sich K_2 von Sobels Darstellung ab.

Die folgenden Modelle erfüllen manche der Annahmen von **4.5**, verletzen aber andere:

(3) M, W besitzen mindestens zwei Elemente, $Prop$ besteht aus allen Abbildungen von $M \times W$ in $\{0,1\}$, $g \in M$, $w_0 \in W$, $P(X)=1$ gdw $X(g,w_0)=1$. Dieses Modell K_3 realisiert Individuen und notwendige Existenz (allerdings existiert kein Individuum mit Notwendigkeit). $(K,w) \models G(x)$ gdw $x=g$ & $w=w_0$. K_3 erfüllt $(A1)-(A4)$ aber nicht $(A5)$; $K_3 \models \Diamond(\exists x)G(x)$ & $\Diamond\neg(\exists x)G(x)$ (möglicherweise existiert ein Gott-ähnliches Individuum, möglicherweise auch nicht). Daher wird die Behauptung Magaris widerlegt, daß $(A1)-(A3)$ zusammen $\Box(\exists x)G(x)$ implizieren.

(4) Sei $M=W=\omega$ (die natürlichen Zahlen), F sei ein nicht-trivialer Ultrafilter auf $M \times W$, $Prop$ besteht aus allen Abbildungen von $M \times W$ in $\{0,1\}$, $P(X)=1$ genau dann wenn $\{(a,w) \mid X(a,w)=1\} \in F$. Dieses Modell K_4 realisiert Individuen und NE (allerdings ist NE leer), $K_4 \models (A1),(A2),\neg(A3),(A4),\neg(A5)$; des weiteren gilt $K_4 \models \Box\neg(\exists x)G(x)$ (notwendigerweise existiert kein Gott-ähnliches Individuum).

(5) Sei $M=W=\omega$, $Prop$ besteht aus allen Abbildungen von $M \times W$ in $\{0,1\}$, die konstant auf der Diagonale sind, $P(X)=1$ genau dann wenn $X(u,u)=1$ für jedes u. $G(u,v)=1$ genau dann wenn $u=v$. Dieses Modell K_5 realisiert keine Individuen; es erfüllt $(A1)-(A5)$ sowie $\Box(\exists x)G(x)$, erfüllt aber nicht $G(x) \to \Box G(x)$ (jede Welt hat den eigenen Gott-ähnlichen Gegenstand, bzw. ist der eigene Gott-ähnliche Gegenstand). Damit ist erwiesen, daß das Komprehensionsaxiom $(C5)$ in **4.4** notwendig ist für die Ableitung der Formel $G(x) \to \Box(G(y) \to y=x)$.

5. Andersons Variante

In diesem Abschnitt bezeichnet GO das axiomatische System mit den Axiomen $(A1)$–$(A5)$ und den Komprehensionsaxiomen $(C1)$–$(C5)$ (siehe oben), also unsere Formalisierung des „ontologischen" Systems von Gödel. (Dabei dient $S5$ als das logische Grundsystem.) Das volle Komprehensionsschema ist das Axiom

(C_{voll}) $$(\forall\ldots)(\exists Y)\Box(\forall u)(Y(u) \equiv \Phi(u,\ldots)),$$

wo Φ eine beliebige Formel ist, welche die freie Variable u und andere freie Variablen … enthält, aber nicht die Variable Y.

Das Axiomsystem $((A1)$–$(A5)) + (C_{voll}))$ soll GO_{voll} heißen; nach Sobel beweist es das „Kollabieren von Modalitäten" (siehe oben). Deshalb haben wir mit schwachen Komprehensionsaxiomen gearbeitet. Der Leser möge aber beachten, daß das folgende vorsichtige Komprehensionsschema (C_{vors}) mit GO verträglich ist und das Kollabieren der Modalitäten nicht erzwingt:

(C_{vors}) $$(\forall x)(G(x) \to (\Box\Phi(x,\ldots) \vee \Box\neg\Phi(x,\ldots))) \to (\exists Y)\Box(\forall u)(Y(u) \equiv \Phi(u,\ldots)).$$

Anderson [1990] bietet eine interessante Variante von Gödels System, welche (C_{voll}) zuläßt, aber dem Kollabieren entgeht; insbesondere ist für den Gott-ähnlichen Gegenstand (im neuen Sinn) die Implikation $Y(g) \to \Box Y(g)$ nicht beweisbar. Das System nennen wir AO (Anderson-ontologisch). Wir präsentieren AO, zeigen 1. daß mehrere von Andersons ursprünglichen Axiomen entbehrlich sind, 2. daß sich in GO sämtliche Axiome von AO ableiten lassen (daher ist GO eine Verstärkung von AO), und 3. daß andererseits (GO_{vors}) eine getreue Interpretation in AO_{voll} besitzt.[6]

5.1 Andersons System: $(A1^*)$ ist das Axiom $P(X) \to \neg P(\neg X)$ (d.h., ist X positiv, dann ist das Komplement von X nicht positiv; das ist also eine Abschwächung von $(A1)$). $(A2^*)$ ist dasselbe wie $(A2)$. G^* wird folgenderweise definiert:

$$G^*(x) \equiv (\forall Y)(\Box Y(x) \equiv P(Y))$$

(x ist Gott-ähnlich* wenn genau diejenigen Eigenschaften positiv sind, die notwendigerweise x zukommen). $(C1^*)$, $(C2^*)$ sind $(C1)$, $(C2)$ (boolesche Operationen mit Eigenschaften); $(C3^*)$ ist das Komprehensionsaxiom für G^*. $(A3^*)$ ist $P(G^*)$. Wir nehmen noch $(C5^*)$ an, also das Realisieren von Gegenständen. Dieses System $(A1^*$–$A3^*$, $C1^*$–$C3^*$, $C5^*)$ nennen wir AO.

Anderson behauptet ferner $(A4^*)$ (identisch mit $(A4)$, d.h. $P(Y) \to \Box P(Y)$) und definiert:

$$X\,Ess.^*\,x \equiv X(x) \,\&\, (\forall Y)(\Box Y(x) \equiv \Box(\forall u)(X(u) \to Y(u)))$$
$$NE^*(x) \equiv (\forall Y)(Y\,Ess.^*\,x \to \Box(\exists u)Y(u)).$$

$(A5^*)$ ist daher $P(NE^*)$. (Das Komprehensionsaxiom $(C4^*)$ für NE^* wird stillschweigend vorausgesetzt.) Dann beweist er Sätze 1–3 von Gödel [1995] für seine modifizierten Begriffe. Wir zeigen, daß dies viel leichter geht. Wir beweisen direkt den folgenden Satz, der die Vermutung von Magari (die für GO falsch ist) für AO als richtig bestätigt:

5.2 Theorem: $AO \vdash \Box(\exists x)G^*(x)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $AO \vdash G^*(x) \to \Box G^*(x)$. Aber in AO gilt: wenn $G^*(x)$, dann $P(G^*)$ und daher $\Box G^*(x)$; dies folgt direkt aus der Definition von G^*. Der Rest ist wie bei Gödel (und Hartshorne).

5.3 Theorem: $AO \vdash (A4^*), (C4^*), (A5^*)$.

Beweis. $(A4^*)$ ist $P(Y) \to \Box P(Y)$. Sei $G^*(g)$; dann ist $P(Y) \equiv \Box Y(g)$, also $\Box P(Y) \equiv \Box\Box Y(g)$ $\equiv \Box Y(g)$, und daher $P(Y) \equiv \Box P(Y)$.

6 Das mag an die Beziehung zwischen der Gödel-Bernaysschen Mengenlehre GB und $GB+(V=L)$ erinnern, wobei $(V=L)$ das Konstruktibilitätsaxiom ist.

Ferner läßt AO die Formel

$$X\ Ess.^*\ x \to \Box(\exists u)X(u)$$

beweisen und deshalb auch $(\forall x)NE^*(x)$, $(C4^*)$ und $(A5^*)$. $X\ Ess.^*\ x$ ist nämlich äquivalent mit $(\forall Y)(\Box Y(x) \equiv \Box(\forall u)(X(u) \to Y(u)))$; da offenbar $\Box(\forall u)(X(u) \to X(u))$, bekommen wir $\Box X(x)$ und deshalb $\Box(\exists u)X(u)$.

5.4 Theorem: Sei $K = \langle M, W, Prop\rangle$ ein Modell der monadischen Modallogik zweiter Stufe welches die Komprehensionsaxiome $(C1)^*$, $(C2^*)$, $(C5^*)$ erfüllt. Sei $g \in M$ und sei $Y \in Prop$ positiv (d.h. $P(Y)=1$) genau dann, wenn Y notwendigerweise g zukommt. Dann erfüllt das Modell $K' = \langle M, W, Prop, P\rangle$ alle Axiome von AO; g ist sein Gott-ähnlicher* Gegenstand.

5.5 Korollar: Aus (AO_{voll}) läßt sich das Kollabieren von Modalitäten nicht beweisen. (Man nehme eine W mit mindestens zwei Elementen und $Prop$ sei die Menge aller $Y:(M \to W)\ \{0,1\}$).

Nun vergleichen wir AO mit GO.

5.6 Theorem: GO läßt alle Axiome von AO ableiten.
Beweis. Wir beweisen in GO, daß G* als eine Eigenschaft existiert und daß G^* positiv ist (d.h., $GO \vdash (C3^*, A3^*)$). Um das zu zeigen, genügt es für die Formel, die $G^*(x)$ definiert (nämlich $(\forall Y)(\Box Y(x) \equiv P(Y))$, die wir einfach wieder $G^*(x)$ nennen), zu zeigen, daß gilt $GO \vdash \Box(\forall x)(G(x) \to G^*(x))$. Sei g der Gott-ähnliche Gegenstand. In GO wissen wir, daß g, wenn er eine Eigenschaft besitzt, sie dann notwendigerweise besitzt, d.h. $GO \vdash (\forall Y)(Y(g) \equiv \Box Y(g))$. Des weiteren gilt $GO \vdash (\forall Y)(Y(g) \equiv P(Y))$ und daher $GO \vdash G^*(g)$. Andererseits folgt in GO aus $G^*(x)$ die Formel $(\forall Y)(P(Y) \to \Box Y(x))$, also auch $(\forall Y)(P(Y) \to Y(x))$ und deshalb $G(x)$.

5.7 Definition: In AO sei g eine Konstante für den eindeutig bestimmten Gott-ähnlichen Gegenstand; eine Eigenschaft heiße eine $\sharp$-Eigenschaft, wenn sie entweder notwendigerweise g zukommt oder ihre Negation $\neg Y$ notwendigerweise g zukommt:

$$Prop^\sharp(Y) \equiv .\ \Box Y(g) \vee \Box\neg Y(g).$$

Wir untersuchen die Interpretation (inneres Modell), die dadurch entsteht, daß wir die $\sharp$-Eigenschaften für Eigenschaften der Interpretation erklären und alles sonstige absolut bleibt, also: $\sharp$-Gegenstände sind alle Gegenstände überhaupt, das Zukommen von Eigenschaften ist absolut und Positivität ist auch absolut. Wir definieren

$$G^\sharp(x) \equiv (\forall Y^\sharp)(P(Y^\sharp) \to Y^\sharp(x));$$

Es gilt dann folgendes

5.8 Lemma: Im Sinne der $\sharp$-Interpretation sind die Axiome (A1–A4,C1–C3,C5) in AO beweisbar.

Beweis. Um $(C3^\sharp)$ und $(A3^\sharp)$ zu beweisen, zeigen wir $AO \vdash \Box(\forall x)(G^*(x) \equiv G^\sharp(x))$. Wir arbeiten in AO und nehmen $G^*(x)$ an. Dann gilt $(\forall Y)(P(Y) \equiv \Box Y(x))$, also auch $(\forall Y^\sharp)(P(Y^\sharp) \to Y^\sharp(x))$, also $G^\sharp(x)$.

Umgekehrt sei $G^\sharp(x)$, also $(\forall Y^\sharp)(P(Y^\sharp) \to Y^\sharp(x))$; insbesondere ist $P(G^*)$ (wobei G^* eine $\sharp$-Eigenschaft ist), daher $G^*(x)$. Das beweist $AO \vdash \Box(\forall x)(G^*(x) \equiv G^\sharp(x))$; aus dem Komprehensionsaxiom für G^* folgt das Komprehensionsaxiom für $G^\sharp$, und aus $(A3^*)$ folgt $(A3^\sharp)$.

5.9 Definition (in AO):

$$X^\sharp\ Ess.^\sharp\ x \equiv .\ X^\sharp(x)\ \&\ (\forall Y^\sharp)(Y^\sharp(x) \to \Box(\forall u)(X^\sharp(u) \to Y^\sharp(u))),$$
$$NE^\sharp(x) \equiv (\forall X^\sharp)(X^\sharp\ Ess.^\sharp\ x \to \Box(\exists u)X^\sharp(u)).$$

$(C4^\sharp)$ ist das Komprehensionsaxiom für $NE^\sharp$, also

$$(\exists Y^\sharp)\Box(\forall x)(Y^\sharp(x) \equiv NE^\sharp(x)).$$

5.10 Theorem: Die Interpretation $\sharp$ ist eine getreue Interpretation von GO in $(AO + (C4^\sharp))$.
Beweis. Um $P(NE^\sharp)$ zu zeigen, genügt es $NE^\sharp(g)$ zu beweisen (g erfüllt $G^*(g)$, also auch $G^\sharp(g)$). Aber nach Lemma 5.8 ist $G^\sharp Ess.^\sharp g$ (da $G\,Ess.\,g$ beweisbar ist in $(A1\text{–}A4, C1\text{–}C4)$) und $\Box(\exists x)G^\sharp(x)$ (da $(\exists x)G^*(x)$ beweisbar ist in AO); ferner beweist die Theorie $(A1\text{–}A4, C1\text{–}C4)$ bekanntlich, daß zwei Essenzen von x immer notwendigerweise äquivalent sind. Damit folgt $NE^\sharp(g)$ sowie $\Box NE^\sharp(g)$, also $P(NE^\sharp)$. (Genauer: aus AO folgt $G^*(x) \to NE^\sharp(x)$, $G^*(x) \to \Box G^*(x) \to \Box NE^\sharp(x)$, $G^*(x) \to P(NE^\sharp)$, $(\exists x)G^*(x) \to P(NE^\sharp)$, $P(NE^\sharp)$.) Die Existenz von $NE^\sharp$ als einer ($\sharp$-)Eigenschaft mußten wir aber voraussetzen.

Um die Wahrheitstreue der Interpretation zu zeigen, bemerken wir, daß $\sharp$ als Interpretation von GO in GO äquivalent mit der identischen Interpretation ist: wann immer $AO \vdash \Phi^\sharp$, wo Φ eine GO-Formel ist, dann ist $GO \vdash \Phi^\sharp$ und daher auch $GO \vdash \Phi$.

5.11 Korollar: $\sharp$ ist eine Interpretation von (GO_{vors}) in (AO_{voll}).

5.12 Theorem: $\sharp$ ist eine getreue Interpretation von (GO_{vors}) in (AO_{voll}).
Beweis. Sei (Z) das Axiom $(\exists x)\neg G(x)$ (es gibt einen Gott-nichtähnlichen Gegenstand). Wir zeigen, daß die Interpretation $\sharp$ eine getreue Interpretation von $(GO_{vors}+Z)$ in $(AO_{voll}+Z)$ ist; der Rest ist eine unschwere technische Angelegenheit. Um dies zu zeigen, konstruieren wir eine Interpretation $\flat$ von $(AO_{voll}+Z)$ in $(GO_{vors}+Z)$ derart, daß die Komposition von $\sharp$ und $\flat$ auf eine identische äquivalente Interpretation von $(GO_{vors}+Z)$ in sich selbst hinausläuft.

In $(GO_{vors}+Z)$ sei a eine Konstante mit $\neg G(a)$. Unsere Interpretation ist zweidimensional – Eigenschaften der Interpretation $\flat$ sind *Paare* (X_1, X_2) von Eigenschaften, für die folgendes gilt:

$$Eigenschaft^\flat(X_1, X_2) \equiv [\Box\neg X_1(g)\ \&\ \Box(\forall u \neq a)\neg X_2(u)].$$

Objekte der Interpretation sind alle Objekte; wir definieren

$$(X_1, X_2)^\flat(u) \equiv [(u \neq g\ \&\ X_1(u)) \vee (u = g\ \&\ X_2(a))].$$

Also im Sinne der Interpretation hat ein $u \neq g$ die Eigenschaft$^\flat$ (X_1, X_2) genau dann, wenn $X_1(u)$; und g hat (X_1, X_2) genau dann, wenn das Objekt a X_2 hat. Schließlich definieren wir

$$(X_1, X_2) =^\flat (Y_1, Y_2) \equiv (X_1 = X_2\ \&\ Y_1 = Y_2),$$

$$P^\flat(X_1, X_2) \equiv \Box X_2(a)\ (\equiv \Box(X_1, X_2)^\flat(g)).$$

Die Gültigkeit der Axiome $(A1^*)$ bis $(A3^*)$ von AO im Sinne der Interpretation $\flat$ ist leicht zu zeigen; wir zeigen $(C_{voll})^\flat$. Nach (C_{vors}) haben wir (gegeben ein $\Phi(u, \ldots)$):

$$(\exists Z_1)\Box(\forall u)(Z_1(u) \equiv (u \neq g \,\&\, \Phi^{\flat}(u))),$$

$$(\exists Z_2)\Box(\forall u)(Z_2(u) \equiv (u = a \,\&\, \Phi^{\flat}(g)))$$

(Vorsicht: die rechte Seite ist wirklich $u = a \,\&\, \Phi^{\flat}(g)$.) Z_i existieren nach (C_{vors}), weil für die rechten Seiten der Definitionen (nennen wir sie δ_1, δ_1) $\Box\neg\delta_i(g)$ gilt. Jetzt haben wir

$$(Z_1, Z_2)^{\flat}(u) \equiv [(u \neq g \,\&\, \Phi^{\flat}(u)) \vee (u = g \,\&\, \Phi^{\flat}(g)] \equiv \Phi^{\flat}(u),$$

also ist (Z_1, Z_2) die durch $\Phi^{\flat}(u)$ definierte $\flat$ Eigenschaft. Die Interpretation $\flat$ ist also eine Interpretation von $(AO)_{voll}$ in $(GO)_{vors}$.

Es bleibt zu zeigen, daß die Komposition von $\sharp$ und $\flat$ die identische Interpretation von $(GO)_{vors} + (Z)$ ist, also daß $(GO)_{vors} + (Z) \vdash \varphi \equiv (\varphi^{\sharp})^{\flat}$, für jede abgeschlossene Formel φ. Man kodiere jede Eigenschaft X (in $(GO)_{vors}$) durch zwei Eigenschaften X_1, X_2 wo

$$\Box(X_1(u) \equiv (u \neq g \,\&\, X(u))) \text{ und } \Box(X_2(u) \equiv (u = a \,\&\, X(g))).$$

(Die Existenz von X_1, X_2 wird durch (C_{vors}) garantiert.) Jetzt ist (X_1, X_2) eine $\flat$-Eigenschaft und es gilt $\Box(X_1, X_2)^{\flat}(g) \vee \Box\neg(X_1, X_2)(g)$; also ist (X_1, X_2) ein Objekt der $\sharp$ Interpretation in der $\flat$ Interpretation:

$$(X_1, X_2)^{\flat\sharp}(u) \equiv X(u),$$
$$P^{\flat\sharp}(X_1, X_2) \equiv P(X).$$

Das definiert einen Isomorphismus zwischen der Komposition von $\sharp$ mit $\flat$ und der identischen Interpretation von $(GO)_{vors}$, wie behauptet.

6. Abschließende Bemerkungen

Zur Geschichte des Gödelschen Beweises siehe die einleitende Studie von Adams in Gödel [1995]. Wir haben gesehen, daß der Beweis schon zu einer nicht-trivialen mathematischen Diskussion Anlaß gegeben hat. Ich schließe nun mit einigen allgemeinen Bemerkungen.

(1) Die *Systeme von Gödel und Anderson* sind sehr eng verwandt. (AO_{voll}) kann als eine konservative Erweiterung von GO_{vors} gedacht werden (mit imaginären Eigenschaften). Der Beweis der notwendigen Existenz eines Gott-ähnlichen Gegenstandes ist in Andersons System erstaunlich leicht, sogar trivial. Beide Systeme sind widerspruchsfrei, haben aber auch triviale Modelle.

(2) *Mathematik und menschliches Denken*: Auf der einen Seite ist Mathematik nicht allmächtig; manche Fragen sind nicht durch mathematische (bzw. logische) Beweise zu lösen. Auf der anderen Seite ist es die Aufgabe des Mathematikers, die Grenzen dessen, was einer exakten mathematischen Analyse überhaupt unterworfen werden kann, möglichst weit hinauszuverlegen.

(3) *Mathematik und die Frage der Existenz Gottes*: Die mathematische Logik hilft uns, sowohl die Versuche zu analysieren Gottes Existenz zu beweisen, als auch diese Existenz zu

widerlegen. Ein logischer Beweis der Existenz Gottes aus einigen einfachen und evidenten Annahmen erscheint äußerst unwahrscheinlich; dennoch kann die Logik dabei helfen, einen rationalen Begriffsrahmen zu schaffen, mit dem man Schlüsse über Gott nachvollziehen kann. Ich zitiere in diesem Sinne wieder einmal H. Küng [1978] (Kap. F.III., S. 603):

- Unmöglich erscheint also eine deduktive Ableitung Gottes aus dieser erfahrenen Wirklichkeit von Welt und Mensch durch die theoretische Vernunft, um seine Wirklichkeit in logischen Schlußfolgerungen zu demonstrieren.
- Nicht unmöglich erscheint hingegen eine induktive Anleitung, welche die einem jeden zugängliche Erfahrung der fraglichen Wirklichkeit auszuleuchten versucht, um so – gleichsam auf der Linie der „praktischen Vernunft", des „Sollens", besser des „ganzen Menschen" – den denkenden und handelnden Menschen vor eine rationale verantwortbare Entscheidung zu stellen, die über die reine Vernunft hinaus den ganzen Menschen beansprucht.

Literatur

ADAMS, ROBERT M.
[1995] „Note to *1970", in: GÖDEL [1995], 388–402.
ANDERSON, C. ANTHONY & GETTINGS, MICHAEL
[1990] „Some Emendations to Gödel's Ontological Proof", in: *Faith and Philosophy* 7, 291–303.
[1996] „Gödel's ontological proof revisited", hrsg. v. P. HÁJEK, *Gödel '96 Logical Foundations of mathematics, Computer Science and Physics – Kurt Gödel's Legacy*, (Lect. Notes in Logic; 6) Berlin, 167–172.
BARTH, KARL
[1958] *Fides quaerens intellectum*, Zollikon.
BRECHER, ROBERT
[1975] „Hartshornes modaler Gottesbeweis", *Ratio* 17, 134–140.
CZERMAK, JOHANNES
[2002] „Abriß des ontologischen Argumentes", im vorliegenden Band.
FELGNER, ULRICH
[1982] „Über den ontologischen Gottesbeweis", Manuskript.
FITCH, FREDERICK B.
[1975] „Die Induktion und das Dasein Gottes", *Ratio* 17, 127–133.
GÖDEL, KURT
[1970*] *Ontological Proof*, in: GÖDEL [1995], 403–404.
[1995] *Kurt Gödel. Collected Works, VOL. III*, hrsg. von S. FEFERMAN et al., Oxford/New York
HÁJEK, PETR
[1996] „Magari and others on Gödel's ontological argument", hrsg. v. A. URSINI & P. ANGLIANI, *Logic and Algebra*, New York, 125–136.
HARTSHORNE, CHARLES
[1962] *The Logic of Perfection and Other Essays*, LaSalle/IL.
KÜNG, HANS
[1978] *Existiert Gott?*, Stuttgart.
MAGARI, ROBERTO
[1988] „Logica e teofilia", *Notizie di logica* 7 no. 4 (1988).
SALAMUCHA, JAN
[1958] „The Proof ex motu for the Existence of God", *The New Scholasticism* 32, 334–372.
SMULLYAN, RAYMOND
[1983] „Was ist?", in: *Simplicius und der Baum*, Frankfurt 1989 (engl. Original als: *5000 B.C. and Other Philosophical Phantasies*, New York 1983).

SOBEL, JORDAN H.
[1987] „Gödel's Ontological Argument", hrsg. von J.J. THOMPSON, *On Being and Saying*, Cambridge/MA, 241–261.
VOPĚNKA, PETR
[1991] *Druhé rozpravy s geometrií*[7], Prag.

7 Zweiter Dialog mit der Geometrie.

KURT GÖDEL

Briefe an Hao Wang[1]

Professor Hao Wang
Department of Mathematics
Rockefeller University
New York, N.Y. 10021

7. Dezember 1967

Sehr geehrter Herr Professor Wang,

* * *

Der Vollständigkeitssatz ist mathematisch in der Tat eine beinahe triviale Folgerung aus Skolem 1922. Tatsache ist jedoch, daß seinerzeit niemand (einschließlich Skolem selbst) diese Folgerung gezogen hat (weder aus Skolem 1922, noch, wie ich es tat, aus Überlegungen, die den seinen ähnlich waren).

Wie Sie selbst erwähnen, bezeichnen Hilbert und Ackermann die Vollständigkeitsfrage in der 1928er Auflage ihres Buches auf S. 68 ausdrücklich als ungelöstes Problem. Was Skolem anbelangt: Obwohl er das erforderliche Lemma 1922 bewies, *verwendete er nichtsdestotrotz* später, als er in seiner Arbeit von 1928 (auf S. 134 unten) einen Vollständigkeitssatz (bezüglich Widerlegung) behauptete, *sein Lemma von 1922 nicht. Statt dessen gab er ein vollkommen unschlüssiges Argument.* (Siehe S. 134, Zeile 10 von unten, bis S. 135, Zeile 3.)

Diese Blindheit (oder Vorurteil, oder wie auch immer Sie es nennen wollen) der Logiker ist in der Tat überraschend. Aber ich denke, die Erklärung dafür ist nicht schwer zu finden. Sie liegt im damals weit verbreiteten Fehlen der erforderlichen erkenntnistheoretischen Einstellung gegenüber Metamathematik und nicht-finitem Schließen.

Nicht-finites Schließen in der Mathematik wurde weithin nur insofern als sinnvoll erachtet, als es mit Hilfe einer finiten Metamathematik ‚interpretiert' bzw. ‚gerechtfertigt' werden kann. (Man beachte, daß sich dies infolge meiner Ergebnisse und anschließender Arbeiten größtenteils als unmöglich herausgestellt hat.) Diese Ansicht führt fast unausweichlich zum Ausschluß des nicht-finiten Schließens aus der Metamathematik. Denn die Zulässigkeit derartigen Schließens würde eine finite Metamathematik erfordern. Das scheint aber eine irreführende und unnötige Verdoppelung zu sein. Weiters wäre die Zulassung von ‚sinnlosen' transfiniten Elementen in die Metamathematik unverträglich mit dem damals vorherrschenden Grundansatz dieser Wissenschaft. Denn demzufolge ist Metamathematik *der* sinnvolle Teil der Mathematik, durch den die mathematischen Symbole (an sich selbst sinnlos) einen gewissen Ersatz-Sinn erhalten, nämlich Regeln

1 Anm. d. Herausgeber: Beide Briefe in englischer Sprache sind abgedruckt in Hao Wang: *From Mathematics to Philosophy*, Humanities Press, New York, 1974, S. 8–11. Sie behandeln beredt das Thema „Wahrheit und Beweisbarkeit". Dabei ist allerdings anzumerken, daß Gödel hier die äußerst behutsame, mit Rücksicht auf die „Vorurteile" der Hilbert-Schule ausgerichtete Vorgangsweise des Unvollständigkeitsbeweises – und zwar gerade das hier betonte „heuristische Prinzip" des Gebrauchs des höchst transfiniten Begriffs der Wahrheit nämlich in 1931 *nirgendwo* zu erwähnen – wiederum verschweigt. (Übersetzung: Eckehart Köhler)