EX1 :

1) $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$; $\nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_3$

- Monge :

pour le problème de monge, on doit trouver une application S telle que $S(\mu) = \nu$, ici μ est portée par 2 points : $\{0, 1\}$ et ν par 3 points $\{-1, 2, 3\}$.

donc pour obtenir ν avec $S(\mu)$ il faut que $S(0)$ et $S(1)$ produisent 3 points avec les masses $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, or $S(0)$ et $S(1)$ sont de masse $(\frac{1}{2}), (\frac{1}{2})$

=> donc il y a pas de solution au problème de monge dans ce cas.

- Kantorovitch :

on doit trouver un plan γ sur $f(x,y)$ minimisant $\iint |x-y| \, d\gamma(x,y)$

il faut transporter $\begin{cases} \frac{1}{3} \to -1, \ \frac{1}{3} \to 2, \ \frac{1}{3} \to 3 \\ \frac{1}{2} \to 0, \ \frac{1}{2} \to 1 \end{cases}$

avec $x_{0,-1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{1,-1}, x_{1,2}, x_{1,3} \geq 0$

$x_{0,-1} + x_{0,2} + x_{0,3} = \frac{1}{2}$, $x_{1,-1} + x_{1,2} + x_{1,3} = \frac{1}{2}$

et

$x_{0,-1} + x_{1,-1} = \frac{1}{3}$, $x_{0,2} + x_{1,2} = \frac{1}{3}$, $x_{0,3} + x_{1,3} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \min \big(|0-(-1)| x_{0,-1} + |0-2| x_{0,2} + |0-3| x_{0,3} + |1-(-1)| x_{1,-1} + |1-2| x_{1,2} + |1-3| x_{1,3} \big)$

or : $|0-1| = 1$ $\quad |1-1| = 2$

$|0-2| = 2$ $\quad |1-2| = 1$

$|0-3| = 3$ $\quad |1-3| = 2$

=> on a donc

$$\min\left(x_{0,1} + 2x_{0,2} + 3x_{0,3} + 2x_{1,1} + x_{1,2} + 2x_{1,3}\right)$$

et en effet, il existe plusieurs solutions optimal toute avec le meme coût : 1,5

=> par exemple : $x_{0,1} = \frac{1}{3}$ $\quad x_{1,1} = 0$

$x_{0,2} = \frac{1}{6}$ $\quad x_{1,2} = \frac{1}{6}$

$x_{0,3} = 0$ $\quad x_{1,3} = \frac{1}{3}$

vérifions les contraintes :

$$\begin{cases} x = 0 : \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{2} \\ x = 1 : 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ y = 1 : \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \\ y = 2 : \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ y = 3 : 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

=> coût $= \frac{9}{6} = 1,5$

=> on peut répartir le transport entre (0,2) (0,3) (1,2) (1,3) de différentes façons sans modifier le coût final minimal.

=> il y a une infinité de solution.

Scanné avec CamScanner

2) $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$, $\nu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$

• Monge :

ici $\mu = \nu$, la solution est de prendre $S(0) = 0$ et $S(1) = 1$

=> le coût est : $|0-0| = 0$ et $|1-1| = 0$

=> la solution est $S(x) = x$ avec un coût $= 0$

• Kantorovitch :

$\gamma = \frac{1}{2}\delta_{(0,0)}$ et $\frac{1}{2}\delta_{(1,1)}$ a un coût nul => solution optimale

=> la solution est $S(x) = x$ et le coût $= 0$

3) $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2$, $\nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3$

$\{0, 1, 2\} \to \{-1, 0, 3\}$ => on cherche à minimiser $\Sigma |x-y|$

$|0+1| = 1$
$|1-0| = 1$
$|2-3| = 1$

=> $(0 \to -1,\ 1 \to 0,\ 2 \to 3)$ donne un coût $= \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) = 1$

cette permutation donne le coût minimal

• Monge :

~~S(1)~~ $S_1(0) = -1$, $S_1(1) = 0$, $S_1(2) = 3$

$S_2(0) = 0$, ~~$S_2(2)$~~ $S_2(1) = -1$, $S_2(2) = 3$

=> ces deux fonctions poussent μ ~~...~~ sur ν et ont le coût minimal.

• problème de Kantorovitch :

puisque le problème admet la convexité et si les mesures de transport qui sont des convexes ~~...~~ sont également optimales
⇒ il existe plusieurs plans optimaux

EX2 :

on a $T(x) = x + 1$, $S(x) = 2x$, $Z(x) = 2 - x$

$\mu = 1_{[0,1]}$ et $\nu = 1_{[1,2]}$

• $T\#\mu$: si $X \sim unif[0,1]$, alors $x+1 \sim unif[1,2]$, donc
$T\#\mu = \nu$

• $S\#\mu$: si $x \sim unif[0,1]$, alors $2x \sim unif[0,2]$ donc
$S\#\mu \neq \nu$

• $Z\#\mu$: si $x \sim unif[0,1]$, alors $2-x \sim unif$ ~~[..]~~ répartie sur $[1,2]$, donc $Z\#\mu = \nu$

EX3 :

on a $T_1(x) = x$, elle transporte $[0,2]$ sur $[1,3]$
⇒ le coût est $\int_0^2 |x - (x+1)|\, dx = \int_0^2 1\, dx = 2$

on a $T_2(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \in [0,1] \\ x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$

sur $[0,1]$, coût $= \int_0^1 |x-(x+2)|\,dx = \int_0^1 2\,dx = 2$

sur $[1,2]$, coût $= \int_1^2 |x-x|\,dx = 0$

$\Rightarrow$ coût totale $= 2+0 = 2$

$\Rightarrow$ T_1 et T_2 sont donc optimal et ont le même coût

EX 11 :

1) l'existence de l'application de transport optimale T est garantie par le théorème de Brenier

2) on suppose T est inversible, alors $\mu_1 = T\#\mu_0$ implique $\mu_0 = (T^{-1})\#\mu_1$

on donc le coût est symétrique en x et y, si T est optimal pour envoyer μ_0 sur μ_1, alors T^{-1} est optimal pour envoyer μ_1 sur μ_0

3) on a $(T^{-1})_{1-t}(y) = (1-(1-t))y + (1-t)T^{-1}(y)$
$= ty + (1-t)T^{-1}(y)$

soit f une fonction de test

$\int f((T^{-1})_{1-t}(y))\,d\mu_1(y) = \int f(tT(z) + (1-t)z)\,d\mu_0(z)$

$= \int f(T_t(z))\,d\mu_0(z)$

$= \int f(x)\,d\mu_t(x)$

$\Rightarrow$ ainsi $(T^{-1})_{1-t}\#(\mu_1) = \mu_t$

on a $W_2^2(\mu_0, \mu_t) = \int |x - T_t(x)|^2 \, d\mu_0(x)$

or $x - T_t(x) = x - [(1-t)x + t T(x)] = t(x - T(x))$

donc $W_2^2(\mu_0, \mu_t) = t^2 \int |x - T(x)|^2 \, d\mu_0(x) = t W_2^2(\mu_0, \mu_t)$

$\Rightarrow W_2(\mu_0, \mu_t) = t W_2(\mu_0, \mu_t)$

on obtient alors $W_2(\mu_0, \mu_t) \leq t W_2(\mu_0, \mu_1)$

5) $W_2^2(\mu_1, \mu_t) = (1-t)^2 W_2^2(\mu_1, \mu_0) = (1-t)^2 W_2^2(\mu_0, \mu_1)$

donc $W_2(\mu_1, \mu_t) = (1-t) W_2(\mu_0, \mu_1)$

$\Rightarrow W_2(\mu_1, \mu_t) \leq (1-t) W_2(\mu_0, \mu_1)$

6) $W_2(\mu_0, \mu_t) = t W_2(\mu_0, \mu_1)$

7)

Scanné avec CamScanner