

## Contents

1. Indexar un conjunto .....	2
2. Relaciones .....	2
3. Relación $R^+$ .....	3
4. String .....	3
5. ....	4
6. Teoría de Conjuntos .....	4
6.1. Conceptos básicos .....	4
6.1.1. Definición de conjuntos .....	4
6.1.1.1. Predicados .....	4
6.1.1.2. Conectores y operadores .....	5
6.1.1.3. Series .....	5
6.1.2. Conjuntos finitos e infinitos .....	5
6.1.3. Subconjuntos .....	5
6.1.4. Igualdad .....	5
6.1.5. Subconjunto propio .....	5
6.1.6. $E$ y $\emptyset$ .....	5
6.1.7. Conjunto potencia .....	5
6.1.8. Conjunto indexado y conjunto índice .....	6
6.2. Operaciones .....	6
6.2.1. Intersección .....	6
6.2.1.1. Conjuntos desarticulados .....	6
6.2.2. Unión .....	6
6.2.3. $A - B$ Complemento relativo (diferencia) .....	7
6.2.4. $E - A$ Complemento absoluto .....	7
6.3. 2-Tupla o secuencia .....	7
6.3.1. Implica .....	7
6.4. n-tupla .....	7
6.5. $A \times B$ Producto cartesiano .....	7
6.6. Ejercicios .....	8
7. Relaciones .....	10
7.1. Dominio y Rango .....	11
7.2. Operaciones .....	11
8. Gramáticas .....	11
8.1. Apuntes .....	11
8.2. Derivación directa .....	11
8.3. Producción .....	12
8.4. Lenguajes .....	12
8.4.1. Sin restricciones .....	12
8.4.2. Dependientes del contexto .....	12
8.4.3. Independientes del contexto .....	12
8.4.4. Gramaticas regulares .....	12
8.4.5. Ejemplo .....	13
8.5. Definición de expresión regular (def 4.1, pag 169): .....	13
8.6. Definición de Aceptores/Autómatas de estado finito determinístico .....	13
8.7. Autómata finito no determinista (pag 174) .....	13
8.7.1. Movimiento .....	14
8.8. Autómatas finitos con transiciones vacías $\varepsilon$ , es decir no deterministas (pag 180, def 4-4) ...	14

8.9. Cerradura vacia de un estado () .....	14
8.10. Equivalencia entre gramatica regular y un autómata (pag 183. def 4-5) .....	14

En el curso vamos a aprender a procesar de manera automatica información, es decir hacer un compilador.

| 1er parcial 30: 85 examen, 15 tareas  
 70% | 2do parcial 30: 85 examen, 15 tareas  
 | 3er parcial 40: 85 examen, 15 tareas

30% | Proyecto final

Ni de chiste sube mas de 30 por mucho que le pongas ganas

Trabajando bien el primer y segundo parcial ya podriamos decir que aprobamos el curso. No descuidar los parciales.

Un conjunto es una enumaeración de elementos, hay conjuntos y subconjuntos. Un conjunto numerable es aquel en el que podemos establecer relaciones 1 a 1 con el conjunto, el dominio de los numeros reales. Ej. los meses del año.

Aunque un conjunto sea infinito puede ser numerable porque los reales son infinitos. El conjunto de numeros reales no es enumerable porque entre cada numero hay infinidad.

Se muestra un conjutno de la forma:

$$D = \{x \mid x \text{ is decimal digit}\}$$

En la figura de arriba tenemos una forma de definir conjuntos de forma no enumerada.

Hay operaciones entre los conjuntos que requieren de mayores especificaciones, por ejemplo:

$$D = \{x \mid (x = a) \vee (x = b) \vee (x = 1)\}$$

Donde  $\vee$  significa or. Asi que tenemos implicados multiples operadores como  $\vee$ .

Se permite que un conjunto este formado por otros conjuntos. Se dice que  $B$  es un subconjunto de  $A$  cuando todos los elementos de  $B$  estan en  $A$ .

## 1. Indexar un conjunto

Si tenemos  $A = \{A_{s_1}, A_{s_2}, \dots\}$

- Intersección: Si elemento esta en  $A$  y  $B$
- Union: Si el elemento esta en  $A$  o  $B$

Se puede hacer intersección de intersecciones de la forma  $\cup_{i=1}^n A_i$  si tenemos  $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$

La diferencia devuelve los elementos de  $A$  que no estan en  $B$ , los elementos que le faltan a  $B$  para ser identico a  $A$

El producto cartesiano son todas las tuplaes que podemos formar con los elementos definidos en los multiples elementos

Tarea: ver qué cosa es Ro, hacer los ejercicios

## 2. Relaciones

Las funciones son, por ejemplo, un caso particular de las relaciones, donde se relaciona elementos de un dominio con elementos de una imagen.

Hay relaciones que no se pueden expresar con relaciones aritméticas, como es el caso de las funciones.

Hay relaciones que no se pueden expresar con relaciones aritméticas, como es el caso de las funciones.

Si  $x$  y  $y$  están relacionados por una relación  $R$ , ambos pertenecen a  $R$  se expresa como  $xRy$

- El **dominio** de una relación son las  $x$  tales que existe una  $y$ ,  $(x, y) \in S$

- El **rango** de una relación  $S$  son las  $y$  tales que existe una  $x$ ,  $(x, y) \in S$

Relaciones entre relaciones

Si  $x$  y  $y$  están relacionados con la intersección de  $R$  y  $S$

Si tachamos una relación  $S$  se dice que *no estan en la relación*,  $\neg S$

Reflexivo es que a la relación no le hace nada ...

Una relación es simétrica si para cada  $(x, y)$ ,  $x$  está relacionado con  $y$  y lo mismo viceversa, lo que habitualmente le llamamos función compuesta.

Seguir viendo

Hay relaciones que no se pueden expresar como una función, como el caso de la relación que se expresa como una tabla. Otro ejemplo son las relaciones del algebra booleana, donde se expresa utilizando tablas de verdad.

Hay relaciones que se expresan con gráficas, las flechas que podemos ver indican el sentido.

$$xRz \wedge zRx \wedge y \wedge Z$$

Supongamos que tenemos una relación  $R$  que relaciona de  $X$  a  $Y$  y una relación de  $S$  de  $Y$  a  $Z$ . Una relación compuesta de  $R \cdot S$  es igual a la union de ambas relaciones, donde desaparece el intermedio  $Y$ , ver el ejemplo de grafos del libro, figura 2-2.

Asociatividad: La asociatividad en las relaciones puede hacer que quitemos los paréntesis.

Relaciones de orden superior

$$R^2 = R \cdot R \text{ es paracticamente } R \text{ compuesta con } R$$

Para hacer de siguientes ordenes ocupamos los de los anteriore.

### 3. Relación $R^+$

Es la unión de los elementos en la.

Ver definicion 2-1

, la relación de cerradura. Si tengo un automata, estamos en un punto de todos los elementos que se puede alcanzar en un paso.  $R^2$  es todos los que podemos alcanzar por dos pasos.

Ver el algoritmo de Warshall

, se usa para encontrar la cerradura de conjuntos  $A$ .  $n$  es cantidad de filas, en  $P$  obtenemos el resultado.

$R \neg \neg S$  si  $R$  y  $S$  no estan relacionados, ... ?

Exercises 2-1.2

### 4. String

Definimos las cadenas de caracteres como un conjunto  $V = \{a, b, c, \dots\}$  llamado vocabulario, un ejemplo de  $V$  son los caracteres del alfabeto inglés o lo mismo pero griego.

La concatenación de dos caracteres es solo un par "ab". La compuesta es "aba"

Una cadena son todas las secuencias de todos los tamaños que se pueden hacer con los elementos de los vocabularios.

$$\text{Entonces si } V = \{a, b, c\} \text{ entonces } V^2 = \{aa, ab, ac, \dots\}$$

$V^*$  es la cadena vacía unión de  $V^+$ .  $V$  es la cadena vacía, un conjunto que no tiene caracteres.

Una cadena de caracteres, si tienes  $V$ , la cadena de caracteres es  $V^* = V_{\text{vacío}} \cup V^+$

## 5.

Una cosa es tener coche y manejarlo a ser experto de F1. Lo mismo pasa en el mundo tech.

Chomsky llega a explicar los tipos de lenguajes:

1. Gramática regular, no hay ninguno
2. Gramática independiente del contexto.
3. Gramática dependiente del contexto. Ejemplo «lo contó en el banco», depende del contexto donde se usa para tener su significado. Aquí están los lenguajes de programación.
4. Gramáticas sin restricciones, no hay reglas que puedan describir el lenguaje. Ejemplo las Islas Canarias. En la isla de la Gomera usaban chiflidos para enviar mensajes, el lenguaje silbado de la Gomera. El lenguaje silbado o silbo de la Gomera.

Las definiciones de esto lo vemos la próxima semana

## 6. Teoría de Conjuntos

Un lenguaje de programación consiste en un conjunto de programas (o *strings*). Como veremos, es conveniente usar una gramática como un vehículo formal para generar estos programas. Diversas relaciones pueden ser definidas con las reglas de una gramática, y estas relaciones pueden llevar a la compilación de forma efectiva de los algoritmos del lenguaje asociado con la gramática. El objetivo de esta sección es de introducir los elementos básicos de los conjuntos y las cadenas (*strings*). En particular, los conceptos de conjunto están introducidos en la Sección 6.1. La noción de una relación se describe en la Sección 7. Otros puntos importantes sobre las relaciones incluidas en esta sub-sección son las de grafos y *transitive closure* de una relación. La sección termina con un tratamiento elementario de los *strings*.

### 6.1. Conceptos básicos

Cuando decimos *conjunto* nos referimos a una colección de objetos de cualquier tipo. La palabra *objeto* se usa con un sentido muy amplio, donde se incluye también objetos abstractos. Un concepto fundamental de la teoría de conjuntos es la de la *pertenencia* a un conjunto. Cualquier objeto que pertenezca a un conjunto es llamado un *miembro* o *elemento* de dicho conjunto.

Si un elemento  $p$  pertenece a un conjunto  $A$ , se escribe de la forma  $p \in A$ , lo cual se lee como « $p$  es un elemento del conjunto  $A$ » o « $p$  pertenece al conjunto  $A$ ». Si contamos con un objeto  $q$  que no pertenece a un conjunto  $A$ , entonces expresamos este hecho como  $q \notin A$ .

#### 6.1.1. Definición de conjuntos

Existen muchas maneras de especificar un conjunto. Por ejemplo, un conjunto que consiste de los dígitos decimales se escribe, por lo general, de la forma  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , donde los nombres de los elementos se rodean en llaves y se separan por comas. Si deseamos marcar el conjunto como  $D$  podemos hacerlo de la forma  $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

##### 6.1.1.1. Predicados

Sin embargo, nombrar cada elemento no siempre es conveniente, por eso podemos optar por describir, por ejemplo a  $D$ , de la forma:  $D = \{x \mid x \text{ es un dígito decimal}\}$ . En este caso el símbolo  $\mid$  se lee «tal que», lo que sigue al símbolo es el predicado, en nuestro ejemplo «es un dígito decimal».

Si decimos que  $P(x)$  es cualquier predicado, entonces  $\{x \mid P(x)\}$  define un conjunto y se lee de la forma «el conjunto de todas las  $x$  tal que  $P(x)$  es verdadero». Un elemento  $a$  pertenece a un conjunto si  $P(a)$  es verdadero; de lo contrario  $a$  no pertenece al conjunto. Si denotamos el conjunto  $\{x \mid P(x)\}$  como  $B$ , entonces  $B = \{x \mid P(x)\}$ .

Los conjuntos que son especificados listando sus elementos también se pueden describir por medio de un predicado. Por ejemplo, el conjunto  $\{a, b, 1, 9\}$  se puede definir como  $\{x \mid (x = a) \vee (x = 1) \vee (x = 9)\}$ . El símbolo  $\vee$  denota una disyunción lógica o *or*.

### 6.1.1.2. Conectores y operadores

Un predicado puede contener los conectores lógicos  $\wedge$  (conjunción lógica o and),  $\vee$  (disyunción lógica o or),  $\neg$  (negación lógica),  $\rightarrow$  (si entonces),  $\Leftrightarrow$  (si y solo si), y los operadores relacionales  $<$ ,  $\leq$ ,  $=$ ,  $\neq$ ,  $\geq$ , y  $>$ . Además, un predicado también puede contener el cuantificador existencial ( $\exists$ , que significa «existe») y el cuantificador universal ( $\forall$ , representando «para todos»).

### 6.1.1.3. Series

Aunque es posible describir cualquier conjunto con un predicado, también se suele especificar con métodos, por ejemplo  $C = \{1, 3, 5, \dots\}$  y  $S = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ . En estos ejemplos se puede determinar los elementos restantes en base a los elementos presentes y su contexto.

### 6.1.2. Conjuntos finitos e infinitos

El número de elementos distintos presentes en cualquier conjunto puede ser finito o infinito. Llamamos a un conjunto *finito* si es que contiene un número finito de elementos distinguibles; en cualquier otro caso se dice que es *infinito*.

### 6.1.3. Subconjuntos

Antes de continuar, hay que destacar que en la teoría de conjuntos no hay restricciones sobre los objetos que pueden ser miembros de un conjunto. No es raro tener conjuntos cuyos miembros son en sí conjuntos, tal como pasa con  $A = \{0, \{a, b\}, 1, \{p\}\}$ . Eso sí, hay que saber distinguir entre el conjunto  $\{p\}$ , el cual es un elemento de  $A$ , y el elemento  $p$ , el cual es un miembro de  $\{p\}$ , mas no es miembro de  $A$ .

Para dos conjuntos cualesquiera  $A$  y  $B$ , si cada elemento de  $A$  es un elemento de  $B$ , entonces  $A$  es llamado un *subconjunto* de  $B$ , o también se dice que  $A$  está *incluido* en  $B$ , o bien, que  $B$  incluye  $A$ . Simbólicamente, esta relación se denota con  $A \subseteq B$  (que se lee « $A$  es un subconjunto de  $B$ , o es igual a  $B$ »), o de forma equivalente como  $B \supseteq A$  (que se lee « $B$  es un superconjunto de  $A$ , o es igual a  $A$ »).

### 6.1.4. Igualdad

Cabe aclarar que para dos conjuntos cualquiera  $A$  y  $B$ , que  $A \subseteq B$  no implica que  $B \subseteq A$ , excepto en el caso de que ambos sean iguales, lo que se escribe de la forma  $A = B$  y que requiere que  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ .

### 6.1.5. Subconjunto propio

Se le dice, a un conjunto cualquiera  $A$ , *subconjunto propio* de  $B$  si  $A \subseteq B$  pero  $A \neq B$ . A esta relación se le representa de la forma  $A \subset B$ .

### 6.1.6. $E$ y $\emptyset$

Ahora introducimos dos conjuntos especiales; el primero incluye todos los conjuntos sobre los que se discute ( $E$ ), mientras que el segundo está incluido en todos los conjuntos sobre los que se discute ( $\emptyset$ ). Se dice *conjunto universal* ( $E$ ) a aquel conjunto que incluye todos los conjuntos involucrados en la discusión. Por ejemplo, el conjunto universal para los números naturales puede ser  $E = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Un conjunto que no contiene ningún elemento se llama *conjunto vacío* o *conjunto nulo*, se denota de la forma  $\emptyset$ .

Dado cualquier conjunto  $A$ , sabemos que el conjunto nulo  $\emptyset$  y el conjunto  $A$  son ambos subconjuntos de  $A$ , es decir  $A \subseteq A$  y  $\emptyset \subseteq A$ . También sabemos que para cualquier elemento  $p \in A$ , el conjunto  $\{p\}$  es un subconjunto de  $A$ ,  $\{p\} \subseteq A$ . De forma similar, podemos considerar otros subconjuntos de  $A$ . Algo mejor que estar manejando subconjuntos individuales de  $A$ , podemos buscar describir hechos para todos subconjuntos de  $A$ .

Es una verdad *verdad vacua* que  $\emptyset \subseteq A$  para cualquier conjunto  $A$  debido a que cada elemento de  $\emptyset$  ( $\{\}$ ) es también un elemento de  $A$ . O acaso podemos nombrar un solo miembro de  $\emptyset$  que no sea miembro de  $A$ , en ese caso la condición se rompería.

### 6.1.7. Conjunto potencia

Para cada conjunto  $A$ , la colección o familia de todos los subconjuntos de  $A$  se le conoce como *conjunto potencia* de  $A$ . El conjunto potencia o *power set* de  $A$  se denota como  $p(A)$  o  $2^A$ , es decir  $p(A) = 2^A = \{x \mid x \subseteq A\}$ , nótese como  $\subseteq$  implica que  $A$  mismo está en  $2^A$ .

### 6.1.8. Conjunto indexado y conjunto índice

Ahora introducimos el concepto de un *conjunto indexado*. Si  $J = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$  y  $A$  es la familia de conjuntos  $A = \{A_{s_1}, A_{s_2}, A_{s_3}, \dots\}$  tal que para cada  $s_i \in J$  le corresponde un conjunto  $A_{s_i} \in A$ , y también  $A_{s_i} = A_{s_j}$  si y solo si  $s_i = s_j$ . Es entonces  $A$  llamado un *conjunto indexado*,  $J$  es un *conjunto índice*, y cualquier subíndice, tal como  $s_i$  en  $A_{s_i}$ , es llamado un *índice*.

Una familia indexada de conjuntos también se puede escribir de la forma  $A = \{A_i\}_{i \in J}$ . De forma particular, si  $J = \{1, 2, 3, \dots\}$ , entonces  $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ . También, si  $J = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , entonces tendremos  $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\} = \{A_i\}_{i \in I_n}$  donde  $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Para un conjunto  $S$  que contiene  $n$  elementos, el conjunto potencia  $p(S)$  se escribe como el conjunto indexado  $p(S) = \{B_i\}_{i \in J}$  donde  $J = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ .

$$p(S_n) = \{S_{n_i}\}_{i \in J} \text{ donde } J = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$$

## 6.2. Operaciones

Consideremos ahora operaciones que se pueden realizar con conjuntos. Nos enfocaremos en las operaciones de intersección, unión y complemento. Uno puede emplear estas operaciones para construir nuevos conjuntos al combinar los elementos de los conjuntos dados.

**Nota:** Aunque en el libro se le dice colecciones a conjuntos de conjuntos, para hacer más amena la lectura les llamaré *familias* a todos los conjuntos de conjuntos, a menos que especifique lo contrario; Por ejemplo, en el caso en que lea explícitamente *familia de subconjuntos* de un conjunto  $A$  ( $2^A$ ). Esto lo hago porque entiendo las palabras conjunto y colección como forma para referirse a lo mismo, a conjuntos.

### 6.2.1. Intersección

La intersección de dos conjuntos cualquiera  $A$  y  $B$ , escrito de la forma  $A \cap B$ , es el conjunto que consiste de todos los elementos que pertenecen tanto a  $A$  como a  $B$ , es decir

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Podemos tener operaciones de intersección para cualquier familia indexada de conjuntos  $A = \{A_i\}_{i \in J}$ . De esta forma podemos obtener todos los elementos que son miembros de todos los conjuntos de la familia de conjuntos:

$$\bigcap_{i \in J} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ para toda } i \in J\}$$

Si se trata de una familia indexada de conjuntos de tamaño  $n$ , entonces podemos escribirlo de la forma:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in I_n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \text{ donde } I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

#### 6.2.1.1. Conjuntos desarticulados

Se dice que dos conjuntos  $A$  y  $B$  están desarticulados (*disjoint*) si, y solo si  $A \cap B = \emptyset$ , es decir, si no hay elementos en común. A una familia se le conoce como *familia desarticulada* si, para cada par posible de conjuntos en la familia, los dos conjuntos están desarticulados, es decir, que no hay elementos en común entre ninguno de los conjuntos de la familia. A los elementos de una familia desarticulada, es decir, a los conjuntos de la familia, se dice que están *mutuamente desarticulados*.

Si  $A$  es una familia indexada  $A = \{A_i\}_{i \in J}$ . La familia  $A$  es una *familia desarticulada* si, y solo si  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todas las  $i, j \in J$  donde  $i \neq j$ . Que es lo mismo que describimos antes, no hay ningún elemento en común entre los conjuntos miembros de la familia.

### 6.2.2. Unión

Para dos conjuntos cualquiera  $A$  y  $B$ , se le dice *unión*, escrito de la forma  $A \cup B$ , al conjunto de todos los elementos que están presentes en cualquiera de los conjuntos  $A$  y  $B$ .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Para cualquier familia indexada  $A = \{A_i\}_{i \in J}$  podemos hacer lo mismo que con la intersección, obtener el conjunto de la unión de todos los conjuntos miembros de la familia, un conjunto que contiene todos los elementos presentes en por lo menos uno de todos los miembros de la familia:

$$\bigcup_{i \in J} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ en al menos uno con } i \in J\}$$

En el caso de una familia indexada con un tamaño  $n$  podemos escribir

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i \in I_n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ donde } I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

### 6.2.3. $A - B$ Complemento relativo (diferencia)

El complemento relativo de  $B$  en  $A$  (o lo que es lo mismo, de  $B$  respecto a  $A$ ), se puede escribir de la forma  $A - B$ , que es el conjunto que contiene todos los elementos de  $A$  que no son miembros de  $B$ . Al complemento relativo de  $B$  en  $A$  también se conoce como *diferencia* de  $A$  y  $B$ .

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

### 6.2.4. $E - A$ Complemento absoluto

El complemento relativo de un conjunto  $A$  en  $E$  (el conjunto universo), es decir  $E - A$ , es llamado el *complemento absoluto* de  $A$

## 6.3. 2-Tupla o secuencia

Hasta ahora nos hemos enfocado en conjuntos, su igualdad, y las operaciones que podemos realizar para producir nuevos conjuntos. Ahora introduciremos la noción de una pareja ordenada

Una pareja ordenada, secuencia o 2-tupla consiste de dos objetos en un orden establecido. No es lo mismo hablar de una pareja ordenada y de un conjunto de dos elementos. El orden de los dos objetos es importante. Se escribe una 2-tupla de la forma  $(x, y)$ .

La igualdad de un par de 2-tuplas  $(x, y)$  y  $(u, v)$  se define con  $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow ((x = u) \wedge (y = v))$ , es decir, que la igualdad de ambas 2-tupla es equivalente lógicamente a que  $x$  es igual a  $u$  y  $y$  a  $v$ .

### 6.3.1. Implica

Se dice que  $A$  implica  $B$ , escrito de la forma  $A \Rightarrow B$ , si y solo si  $A \rightarrow B$  siempre es verdadero. En matemáticas se usan  $A \rightarrow B$  y  $A \Rightarrow B$  como iguales.

## 6.4. n-tupla

El concepto de un par ordenado puede extenderse para definir tríos ordenados, y en general cualquier una  $n$ -tupla de  $n$  elementos ordenados. Escribimos una  $n$ -tupla como  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

## 6.5. $A \times B$ Producto cartesiano

Un concepto importante en la teoría de conjuntos es la del producto cartesiano. Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , se le conoce como *producto cartesiano* de  $A$  y  $B$  al conjunto de todas las 2-tuplas en las que el primer miembro de cada tupla es un elemento de  $A$  y el segundo miembro es un elemento de  $B$ . Se escribe de  $A \times B$ .

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Así como el resto de operaciones en conjuntos, podemos extender el del producto cartesiano a familias de conjuntos. Si  $A = \{A_i\}_{i \in I_n}$  es una familia indexada de conjuntos donde el conjunto índice  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Entonces podemos escribir el producto cartesiano de los conjuntos de la familia como:

$$\bigtimes_{i \in I_n} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

Podemos definir el producto cartesiando de forma recursiva como:

$$\bigtimes_{i \in I_1} A_i = A_1,$$

$$\bigtimes_{i \in I_m} A_i = \left( \bigtimes_{i \in I-(m-1)} A_i \right) \times A_m \text{ para } m = 2, 3, \dots, n$$

Basados en lo descrito, si el siguiente bloque de código devuelve un iterador sobre las 2-tuplas generadas entre dos conjuntos:

```
pub fn times<'a, U, V>(a: &'a [U], b: &'a [V]) -> impl Iterator<Item = (U, V)> + 'a
where
    U: Clone,
    V: Clone,
{
    a.iter()
        .map(|a| b.iter().map(|b| (a.clone(), b.clone())))
        .flatten()
}
```

Entonces, el bloque de código equivalente a la definición de producto cartesiano «recursivo» queda:

```
pub fn fam_times<T: Clone>(a: &[T]) -> Vec<Vec<T>> {
    let mut res = Vec::new();

    for i in 1..a.len() {
        res = match i {
            1 => times(a[0], a[1]).map(|e| vec![e.0, e.1]).collect(),
            2.. => times(&res, a[i])
                .map(|(mut vec, val)| {
                    vec.push(val);
                    vec
                })
                .collect(),
            _ => unreachable!("Range is 0..n"),
        };
    }

    res
}
```

Esta definición de producto cartesiano de  $n$  conjuntos se relaciona con la definición de  $n$ -tuplas en el sentido de que:  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge \dots \wedge (x_n \in A_n)\}$

## 6.6. Ejercicios

1. Da otra descripción a los siguientes conjuntos e indica aquellos que son infinitos.

$$a) \{x \mid x \text{ es entero y } 5 \leq x \leq 12\} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$b) \{2, 4, 8, \dots\} = \{x \mid x \bmod 2 = 0\} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}, \text{ es infinito}$$

$$c) \text{ Todos los países del mundo} = \{\text{México, Estados Unidos, Canada, } \dots\}$$

2. Dado que  $S = \{2, a, \{3\}, 4\}$  y  $R = \{\{a\}, 3, 4, 1\}$ , indica si los siguientes puntos son verdaderos o falsos.



- a) Falso  $\{a\} \in S$
- b) Verdad  $\{a\} \in R$
- c) Verdad  $\{a, 4, \{3\}\} \subseteq S$
- d) Falso  $\{\{a\}, 1, 3, 4\} \subset R$
- e) Falso  $R = S$
- f) Verdad  $\{a\} \subseteq S$
- g) Falso  $\{a\} \subseteq R$
- h) Verdadero  $\emptyset \subset R$
- i) Verdadero  $\emptyset \subseteq \{\{a\}\} \subseteq R \subseteq E$
- j) Falso  $\{\emptyset\} \subseteq S$
- k) Falso  $\emptyset \in R$
- l) Verdad  $\emptyset \subseteq \{\{3\}, 4\}$

3. Muestra que  $(R \subseteq S) \wedge (S \subset Q) \rightarrow R \subset Q$  siempre es verdadero. Es correcto reemplazar  $R \subset Q$  por  $R \subseteq Q$ ?

Si  $R \subseteq S$  entonces tenemos dos escenarios posibles, en donde  $R \subsetneq S$  y donde  $R = S$ . El *peor* de los casos es cuando  $R = S$ , pues es donde más elementos puede tener  $S$ , facilitando la violación de la condición.

Si  $R = S$ , entonces sabemos que si  $S \subset Q$ , por lo tanto  $R \subset Q$  pues se tratan del mismo conjunto en esencia.

Es correcto reemplazar  $R \subset Q$  por  $R \subseteq Q$  pues ambos implican que  $R$  es subconjunto de  $Q$ , aunque uno deja la posibilidad de que ambos sean iguales. Sin embargo, si se sabe que  $R - Q \neq \emptyset \Rightarrow R \neq Q$ , entonces es conveniente escribirlo de la forma  $R \subset Q$ .

4. Obten  $p(S)$  donde  $S$  es:

- a)  $p(\{a, \{b\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, \{a, \{b\}\}\}$
- b)  $p(\{1, \emptyset\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{1, \emptyset\}\}$
- c)  $p(\{X, Y, Z\}) = \{\emptyset, \{X\}, \{Y\}, \{Z\}, \{X, Y\}, \{X, Z\}, \{Y, Z\}, \{X, Y, Z\}\}$

5. Dado que  $A = \{x \mid \text{es entero y } 1 \leq x \leq 5\}$ ,

6. Muestra las identidades:

1.  $A \cap A = A$

$$\begin{aligned}
 &\text{Si } A = \{x \mid P(x)\}, \text{ donde } P(x) \text{ es un predicado que evalúa a 1 si es verdadero} \\
 A \cap A &= \{x \mid P(x) \wedge P(x)\} \\
 &= \{x \mid P(x)[1 \wedge 1]\} \\
 &= \{x \mid 1P(x)\} \\
 &= \{x \mid P(x)\} = A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & A \cap \emptyset = \emptyset \\
& A = \{x \mid P(x)\}, \emptyset = \{x \mid x \notin E\} \\
& A \cap \emptyset = \{x \mid P(x) \wedge x \notin E\} \\
& \text{Si } E = A \\
& A \cap \emptyset = \{x \mid P(x) \wedge x \notin \{x \mid P(x)\}\} \\
& = \{x \mid P(x) \wedge \neg P(x)\} \\
& = \{x \mid P(x)(1 \wedge \neg 1)\} \\
& = \{x \mid 0P(x)\} \\
& = \{x \mid 0\} \\
& \text{Y como el predicado es siempre 0, el conjunto estará vacío}
\end{aligned}$$

## 7. Relaciones

El concepto de una relación es un concepto básico en matemáticas, así como en el día a día. Asociado al concepto de una relación es un concepto básico en matemáticas, así como en el día a día. Asociamos a *relación* está el acto de comparar objetos que están relacionados de una forma u otra. La habilidad de una computadora para realizar distintas tareas basada en el resultado de una comparación es otro punto importante empleado durante la ejecución de un programa típico. En esta sub-sección formalizaremos el concepto de relación y discutiremos los métodos empleados para representar una relación usando una matriz o su grafo. La matriz de relación es muy útil para determinar las propiedades de una relación y también para representar una relación en una computadora. Algunas propiedades básicas de una relación también se muestran como ciertas clases importantes introducidas.

La palabra *relación* sugiere algunos ejemplos familiares de relaciones tal como la relación padre a hijo, hermana a hermano, tío a sobrino. Los ejemplos familiares en la aritmética son las relaciones tales como *menor que*, *mayor que*, y demás relaciones de igualdad entre dos números. También conocemos entre la relación entre el área de un triángulo equilátero y el tamaño de uno de sus lados o el área de un cuadrado y el tamaño de uno de sus lados. Estos son solo unos de los ejemplos de relaciones entre dos objetos.

Al acto de comparar objetos que están relacionados de una forma u otra. La habilidad de una computadora para realizar distintas tareas basada en el resultado de una comparación es otro punto importante empleado durante la ejecución de un programa típico. En esta sub-sección formalizaremos el concepto de relación y discutiremos los métodos empleados para representar una relación usando una matriz o su grafo. La matriz de relación es muy útil para determinar las propiedades de una relación y también para representar una relación en una computadora. También se muestran algunas de las propiedades básicas de una relación así como ciertas clases importantes introducidas.

La palabra *relación* sugiere algunos ejemplos familiares de relaciones tal como la relación padre a hijo, hermana a hermano, tío a sobrino. Los ejemplos familiares en la aritmética son las relaciones tales como *menor que*, *mayor que*, y demás relaciones de igualdad entre dos números. También conocemos entre la relación entre el área de un triángulo equilátero y el tamaño de uno de sus lados o el área de un cuadrado y el tamaño de uno de sus lados. Estos son solo unos de los ejemplos de relaciones entre dos objetos.

A lo largo de la discusión consideraremos las relaciones, llamadas *relaciones binarias*, entre pares de objetos. Cualquier conjunto de pares ordenados define una *relación binaria*. Llamamos a una relación simplemente relación. A veces es conveniente expresar un objeto particular ordenado, digamos  $(x, y) \in R$ , donde  $R$  es una relación, de la forma  $xRy$ .

En matemáticas las relaciones son denotadas de forma típica por símbolos especiales en lugar de letras mayúsculas (ejemplo  $A$ ). Un ejemplo familiar es la relación «menor que» para los números reales. Una relación está denotado por  $<$ . De hecho,  $<$  debería ser considerado como el nombre de un conjunto donde sus elementos son 2-tuplas. Más precisamente, la relación  $<$  es  $< = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x < y\}$

## 7.1. Dominio y Rango

Digamos que  $S$  es una relación binaria. El conjunto  $D(S)$  contiene todos los objetos  $x$  tales que para alguna  $y$ , entonces  $(x, y) \in S$  se le llama *domino*, es decir:

$$D(S) = \{x \mid (\exists y)((x, y) \in S)\}$$

En donde el símbolo  $\exists$  denota cualidad de existencia. De forma similar  $R(S)$  es el conjunto de todos los objetos  $y$  tales que para algun elemento  $x$ , se cumple  $(x, y) \in S$ , a este conjunto se le llama el *rango* de  $S$ , es decir:

$$R(S) = \{y \mid (\exists x)((x, y) \in S)\}$$

## 7.2. Operaciones

Debido a que se ha definido a una relación como un conjunto de 2-tuplas, es por lo tanto aplicar las operaciones usales de los conjuntos a los conjuntos de relaciones por igual. El conjunto resultante también estará compuesto por 2-tuplas que define algunas relaciones. Si  $R$  y  $S$  son dos relaciones, entonces  $R \cap S$  define una relación tal que  $x(R \cap S)y \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$

## 8. Gramáticas

### 8.1. Apuntes

Una gramática esta definida por una 4-tupla  $(V_n, V_t, S, \varphi)$ . Tiene un conjunto  $V_n$  y  $V_t$  donde ambos son distintos a  $\emptyset$ .  $V_n$  se conoce como conjunto de no terminales, en cambio  $V_t$  se conoce como conjunto de los terminales.

Definimos a  $V = V_t \cup V_n$ , también conocido como el simbolo distinguido o inicial de la gramática, donde  $S \in V_n$

$\varphi$  es un conjunto de reglas de la gramática, que tiene de la formula:

$$(V_t \cup V_n)^* V_n (V_t \cup V_n)^* \rightarrow (V_t \cup V_n)$$

Recordemos que  $*$  es el conjunto de todas las posibilidades.

Puso en ejemplo, un identificador es una secuencia de caracteres que puede tener tales caracteres, no tiene espacios y puede empezar con a-Z o  $_$ , se usa para todo tipo de entes como variables, estructuras, etc.

Chomsky define, por poner un ejemplo, al identificador como

$$V_n = \{I, LD\} \text{ (No terminales)}$$

$$V_t = \{a, b, c, \dots, z, 0, 1, 2, \dots, 9\} \text{ (Terminales)}$$

$$S = I \text{ (Simbolo distinguido)}$$

$$\varphi = \{I \rightarrow L, I \rightarrow IL, I \rightarrow a|b|c|\dots|z, D \rightarrow 0, D \rightarrow 1, \dots, D \rightarrow 9\} \text{ (Reglas de producción)}$$

Donde  $I \rightarrow L$  quiere decir que  $I$  deriva en  $L$ . Entonces  $I$  es el indificador de la gramática, podemos cambiar esa  $I$  por elementos hasta que en la parte derecha solo aparezcan identificadores  $I \rightarrow L \rightarrow a$ , o  $I \rightarrow IL \rightarrow LL$ , notemos como en el último paso remplazamos  $I$  por  $L$ , pues en las reglas definidas en  $\varphi$  especificamos que podemos sustituirlo, siempre y cuando no se trate de un dígito, ejemplo  $I \rightarrow ID \rightarrow IDD \rightarrow LDD$ .

Es pues la gramática anterior lo que define formal identificador. Si queremos darle soporte, por ejemplo a otro caracter como  $_$  entonces simplemente lo agregamos a  $V_t$ .

### 8.2. Derivación directa

Aquí no termina, describe lo que se llama *derivación directa*, si tenemos una gramática  $G = (V_N, V_T, S, \Phi)$ , cuando se dice que  $\sigma, \varphi \in V$ , donde  $\sigma$  es una cadena de caracteres que tiene los caracteres permitidos.

Decimos que  $\sigma$  deriva de «phi» si  $\varphi$ , por lo tanto  $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$

$$y = \phi_1 \alpha \phi_2$$

$$r = \phi_1 \beta \phi_2$$

$$\alpha \rightarrow \beta e \Phi$$

Si  $I \rightarrow IL$ , entonces  $\varphi_1 I \varphi_2 \rightarrow \varphi_1 I \varphi_2 L$

Una derivación directa es hacer un cambio con una regla de la gramática.

Ver los ejemplos del libro

### 8.3. Producción

A aplicar multiples veces una derivación directas se le conoce como producción.

La cadena si produce  $r$ .  $\Sigma(\Rightarrow) + r.\sigma \Rightarrow () + r$ , se pone + porque implica que se hizo por lo menos una derivación, es decir pasamos por una infinidad de sigmas (y) hasta poder llegar a sigma (r) que es lo mismo a  $y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow \dots r$

Si no derivamos nada entonces queda que si = r.

Un conjunto de producción que parten siempre del simbolo distinguidor que va haciendo producciones hasta que no queden  $\sigma \in V_n$ . Entonces un lenguaje  $L(G) = \{\sigma \mid S^* \Rightarrow \sigma \wedge \sigma \in V_t^*\}$ , entonces es el conjunto de cadenas? tales que todas parten del signo identificador y terminan en elementos que no pertenecen a los terminales.

Ahora nos mostró una foto de Von Neumann y Openheimer que desarrollaron la primera computadora, con fines militares. Ahora nos muestra a la abuelita Cobol, Grace Hopper, que

### 8.4. Lenguajes

Todas las gramaticas son subconjuntos de otra.

#### 8.4.1. Sin restricciones

Hay gramaticas que son sin reglas, no hay manera de escribir un sistema de reglas para ellas. Casi todos los lenguajes que hablamos son del tipo 1, **gramaticas sin restricciones**. Si no podemos describir con reglas en lenguaje no podemos escribir un compilador para el mismo.

#### 8.4.2. Dependientes del contexto

Antes estan las gramaticas tipo 2, **dependientes del contexto**, por ejemplo el español, recordemos el ejemplo de «lo contó en el banco». Estas gramaticas tienen reglas de producción  $\alpha \rightarrow \beta$  cumplen que la cantidad de elementos en alpha tiene que ser menor/igual que en beta ( $|\alpha| \leq |\beta|$ ) y además  $\alpha_1 \beta \in V^+$ , es decir que puede tener en la parte derecha tiene que tener terminales. Tenemos que encontrar primero el terminal para ver que regla aplicar.

Porque es una gramatica dependiente del contexto, no se refiere a la fórmula, a la definición, aino quw quiere que interpretemos la definición para ver qué pasa.

La gramatica que estamos viendo del documento genera cadenas del tipo  $a^n b^n c^n \mid n \geq 1$ , es decir, genera cadenas de  $n$  caracteres  $a$ ,  $n$  cantidad de  $b$  y  $n$  cantidad de  $c$ .

Pone énfasis en que  $V^+$  viene acompañado de  $\cup$ , lo que implica que se puede cumplirse o no. Por ejemplo una regla  $abc \rightarrow BBB$ .

Las gramaticas dependientes del contexto causan que cambiar de lugar los *statements* se logran efectos distintos.

#### 8.4.3. Independientes del contexto

El unico cambio es que  $\alpha \in V_N$ , y  $\beta \in V^*$ . Es decir, que en la cadena  $\alpha$  no deben existir no terminales. Por ejemplo la gramatica  $\{a^n b a^n \mid n \geq 1\}$ .

#### 8.4.4. Gramaticas regulares

Lo ideal es, para Chomsky, que las gramaticas sean de tipo 4, gramaticas *regulares*

Donde  $\alpha$  menor que  $\beta$  y eso pero con una condición,  $\alpha \equiv V_N$ , es decir, que existe UN SOLO terminal.  $\beta$  a la vez debe ser de la forma

En una gramática regular, según entiendo, no deben coincidir el número de terminales, pero sí debe coincidir con lo que nos dice.

#### 8.4.5. Ejemplo

En el ejemplo los no terminales se escriben con paréntesis cuadrado, los or separan entre reglas. La regla de factor tiene un terminal, paréntesis un no terminal y al final un paréntesis, lo que lo hace no ser una gramática regular, no cumple las reglas.

Ahora toca ver si es independiente del contexto, es decir ver que  $\alpha$  no tenga terminales, el módulo  $\gamma$  y que  $\beta$  tenga cualquiera. Se cumple, por lo tanto es independiente del contexto.

Buscando ejemplos de gramáticas.

### 8.5. Definición de expresión regular (def 4.1, pag 169):

Una expresión regular es aquella donde las expresiones pueden ser contruidas usando las reglas:

1.  $\phi$  es una expresión regular que denota un conjunto vacío
2.  $\varepsilon$  es una expresión regular que denota que el lenguaje consiste solamente de cadenas vacías, es decir  $\{\varepsilon\}$
3.  $a$ , donde  $a \in V_T$  es una expresión regular que denota un lenguaje consistiendo de un símbolo  $a$  es decir el lenguaje  $\{a\}$
4. If  $e_1$  y  $e_2$  son expresiones regulares denotando los lenguajes  $L_1$  y  $L_2$ , entonces:
  - $(e_1)|(e_2)$  es una expresión regular que denota  $L_1 \cup L_2$
  - $(e_1)(e_2)$  es una expresión regular de denota  $L_1 L_2$
  - $\{e_1\}^*$  es una expresión regular que denota  $L_1^*$ , es decir que viene  $e_1$  que se repite 0 a n veces

La lógica en las expresiones es la misma que en los conjuntos, primero van paréntesis, luego concatenación ( $*$ ) y por último or ( $|$ ), similar a  $\cup$  y  $\vee$  pues.

Los *tokens* de un lenguaje de programación pueden ser definidos en términos de expresiones regulares y lenguajes regulares.

De ahora en adelante, cuando sea mínimo uno y después repetido le llamaré  $\{a\}^+$  y es igual a  $\{a\}a$

### 8.6. Definición de Aceptores/Autómatas de estado finito determinístico

También conocidos como autómatas deterministas finitos, un aceptor, para cualquier estado y entrada de caracteres tiene máximo una transición de estado, si no hay transición de estado definido, entonces la cadena, la entrada se rechaza como inválida.

Es una 5-tupla  $(K, V_T, M, S, Z)$  donde:

- $K$  es un conjunto finito no vacío de elementos llamados estados.
- $V_T$  es un alfabeto llamado el alfabeto de entrada
- $M$  es un mapeo del conjunto  $K \times V_T$  a  $K$ , o sea que mapea  $(a, b)$  donde  $a \in K, b \in V_T$  con elementos de  $K$ , es decir, dado un estado y un elemento de entrada en  $V_T$ , pasamos a un estado en  $K$ .
- $S \in K$ , se llama un estado inicial.
- $Z \subseteq K$  es un conjunto no vacío llamado estados finales.

Son finitos porque el conjunto de estados es finito, son determinísticos porque cada estado mapea a otro.

Definición 4-n Lo único que cambia en este otro autómata es que no va de  $K$  a  $K$ , sino que va de  $K$  a cualquier subconjunto de  $K$ , es decir puede ir a múltiples estados.

Si uno tiene muchas entradas, es decir una cadena  $S = Tt$ , entonces  $T$  es una cadena y  $t$  es un carácter. EN este caso se mueve del estado

### 8.7. Autómata finito no determinista (pag 174)

Un autómata finito no determinista es difícil de representar porque requiere que exploremos todas las definiciones para poder probar algo.

La única diferencia es que  $M$  mapea  $K \times V_T$  con  $x \in 2^K$ , es decir, que un valor de entrada  $x \in V_T$  en un estado  $k \in K$  no solamente deriva en un estado de  $K$ , sino que mapea a múltiples estados en  $K$  tal que puede llevar a  $2^K$

$$A^a \longrightarrow B^b \longrightarrow C$$

Figura 1: Del capítulo *Scanners*, página 176

En este tipo de autómatas, la única manera de probar que una cadena será aceptada por este tipo de autómatas es probando todas las rutas posibles, no podemos terminar directamente pues puede que no hayamos cubierto todas las rutas posibles.

### 8.7.1. Movimiento

Cuando decimos  $M(A, ab) = \{A, B\}$ , queremos dar a entender que desde el estado  $A$ , vamos a obtener todos los estados a los que podemos llegar con una cadena "ab", específicamente usando el carácter a, en el caso de la figura Figura 1, podemos llegar tanto al estado  $A$ , como al  $B$ , lo que recordemos que hace en sí al autómata no determinado, pues mapea a más de un estado en cualquiera de sus relaciones en  $M$ .

- Si no entra nada ( $\varepsilon$ ) se queda en el estado  $Q$
- Si entra algo entra a TODOS, a la unión de todos los estados  $P$  a los que podemos llegar con el inicio de la entrada  $\bigcup_{P \in M(Q, T)}$ , devolviendo un  $M(P, t)$ , en este enunciado,  $P$  no es más que el conjunto de estados donde podemos movernos desde el inicio de la cadena.

Es fácil identificar un autómata no determinista viendo si devuelve un conjunto el mapeo en  $M$  o no.

Tratemos de programar el autómata en la figura 4-7, página 177

## 8.8. Autómatas finitos con transiciones vacías $\varepsilon$ , es decir no deterministas (pag 180, def 4-4)

Sin nosotros hacer nada el autómata cambia de estado, esto mismo es lo que los hace no deterministas. Se dice que es no determinista pues si no recibe nada se puede quedar en su estado original  $A$  o puede irse a otro(s) estados  $K - \{A\}$  En el vocabulario se debe incluir  $\varepsilon$

## 8.9. Cerradura vacía de un estado ()

En un autómata no determinista, es el conjunto de todos los estados que se pueden lograr con puras transiciones vacías.

En la tabla 4-5, ese autómata puede ir por transiciones vacías a  $q_1$  y el estado inicial  $q_0$ , es decir  $\{q_0, q_1\}$

## 8.10. Equivalencia entre gramática regular y un autómata (pag 183. def 4-5)

El chiste es convertir las gramáticas en autómatas, porque eso lo podemos ejecutar en la computadora.

Hacer el ejercicio de escanear cada token de un lenguaje, sin nada de hacer espacios, aunque vengan sin ellos.

Una gramática se puede convertir en autómatas finitos no deterministas con transiciones vacías, ese autómata a su vez se puede convertir en autómatas finitos deterministas.

Para lograr la transformación se pueden usar las fórmulas de Thompson,

El primer ejercicio del examen es, dada una gramática, debemos clasificarla. Dada una gramática que ya es regular obtener la expresión regular asociada. Una expresión regular, debemos de obtener el autómata finito no determinista con transiciones vacías, y de ahí el autómata finito determinista, y con esto obtener una gramática regular

De cualquier autómata finito determinista hay asociada una gramática regular que podemos obtener a partir de él, eso viene definido en el mismo cuerpo de 4-5.

En la figura 4-11 están las 3 fórmulas de Thompson. Tengo un ejemplo en el cuaderno, pongamos todos los vacíos necesarios, no afectan, el problema viene cuando faltan vacíos.

Las formulas nos dejaron con un automata finito no determinista con transiciones vacias.

Hay un ejemplo en mi cuaderno, el autómata que hicimos no esta simplificado, tiene estados que sobran, no los reduzcamos, la proxima clase es ver como obtener una grámatica regular a partir del autómata finito determinista.