

# Contents

1. Evaluación .....	1
2. Conjuntos de números .....	2
2.1. Complejos .....	2
2.1.1. Reales .....	2
2.1.1.1. Racionales ( $Q$ ) ( $a/b$ ) .....	2
2.1.1.1.1. Enteros ( $\mathbb{Z}$ ) .....	2
2.1.1.1.1.1. Enteros negativos ( $Z'$ ) .....	2
2.1.1.1.1.2. Monoide ( $0$ ) .....	2
2.1.1.1.1.3. Naturales ( $N$ ) .....	2
2.1.1.1.1.3.1. Primo: Divide entre si y 1 .....	2
2.1.1.1.1.3.2. Compuesto: Los demás, 3+ divisores .....	2
2.1.1.1.2. Fraccionarios ( $F$ ) .....	2
2.1.1.2. Irracionales ( $\mathbb{I} = \mathbb{R} - Q$ ) .....	2
2.1.2. Imaginarios .....	2
3. Introducción a conjuntos .....	2
3.1. Definición de conjunto .....	2
3.2. Operaciones .....	3
3.3. Ejercicio .....	3
4. Exposición .....	4
5. Fuzzy set mapping .....	4
6. Temas de investigación .....	4
7. Teoría de números .....	6
7.1. Conjetura de Goldbach .....	6
7.2. Teorema de Fermat .....	6
7.3. Ejemplos de demostraciones .....	6
7.3.1. Suma .....	6
7.3.2. Paridad de enteros .....	6
7.3.3. Divisores .....	7
7.3.4. Divisor trivial .....	7
7.3.5. Teorema fundamental de la aritmética .....	7
7.3.6. Primos de Mersenne .....	7
7.4. Divisores .....	8
7.5. Numeros perfectos .....	8
7.5.1. Código .....	8
7.5.2. Demostración .....	8
7.6. Divisibilidad .....	10
7.7. Def, algoritmo de division .....	10
7.7.1. Prueba de existencia .....	10
7.7.2. Prueba Unicidad .....	10
7.8. Aritmética modular .....	10

## 1. Evaluación

1er, 2do Parcial ... 40 %  
Tareas ... 10 %

Proyecto ... 25 %  
Examen Final ... 25 %

Correos acepta de 2 am a 2:30 am

## 2. Conjuntos de números

### 2.1. Complejos

Los números complejos son una suma de una parte real  $\mathbb{R}$  y una parte imaginaria  $\mathbb{I}m$ , por ejemplo  $2 + 3i$ .

#### 2.1.1. Reales

Son un subconjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$  donde no existe la parte imaginaria, por lo que se puede representar en una recta numérica.

##### 2.1.1.1. Racionales ( $\mathbb{Q}$ ) ( $a/b$ )

Se representan con un cociente de dos enteros, por ejemplo  $\frac{1}{3} = 0.33\bar{3}$ , también tenemos por ejemplo el  $2 = \frac{2}{1}$

##### 2.1.1.1.1. Enteros ( $\mathbb{Z}$ )

Que no tienen parte decimal

##### 2.1.1.1.1.1. Enteros negativos ( $\mathbb{Z}'$ )

##### 2.1.1.1.1.2. Monoide ( $0$ )

##### 2.1.1.1.1.3. Naturales ( $\mathbb{N}$ )

Dependiendo de si se denota  $\mathbb{N}_0$  o  $\mathbb{N}_1$  se considera si el conjunto incluye al 0 o no, esto depende de si conviene o no para los trabajos de investigación. Entonces  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  y  $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, \dots\}$

##### 2.1.1.1.1.3.1. Primo: Divide entre si y 1

##### 2.1.1.1.1.3.2. Compuesto: Los demás, 3+ divisores

##### 2.1.1.1.2. Fraccionarios ( $\mathbb{F}$ )

Todos los demás que no son enteros

##### 2.1.1.2. Irracionales ( $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ )

Entre estos tenemos razones que no son repetitivas en su parte decimal, es decir que no hay patrones en la secuencia de números decimales como con  $\pi, \sqrt{2}, \tau, e$

También tenemos aquí todas las raíces de números primos.

#### 2.1.2. Imaginarios

En los números imaginarios se entiende  $i = \sqrt{-1}$ . Para descartar rápidamente números que no están expresados de la forma imaginaria solo tenemos que fijarnos en el *exponente* de la raíz.

$$\sqrt[n]{a}$$

En caso de que  $a$  sea un número negativo y  $n$  sea par, entonces podemos decir con seguridad que se trata de un número imaginario.

En todos los demás casos el resultado obtenido será  $c + 0i$ , donde no existe una parte imaginaria.

## 3. Introducción a conjuntos

### 3.1. Definición de conjunto

Un conjunto es una colección de *elementos*. Sea  $A$  un conjunto de elementos que puede ser finito o infinito se dice que  $a$  es elemento de  $A$  si, y solo si  $a \in A$ .

Por lo tanto se puede decir que  $A \in \{a\}$ .

Simbología:

- $\exists$  existe
- $\nexists$  no existe
- $\exists!$  existe solo para
- $\in$  pertenece

- $\notin$  no pertenece
- $<, \leq, >, \geq$  menor, menor que, mayor, mayor que
- $\ll, \gg$  super mayor y super menor, se usan para decir que el objeto que se está analizando es tan grande que no cabe en el sistema, por lo tanto se puede simplificar.

**Escalamiento:** Si se dice que un valor es orden a la 1 ( $x \approx O(1)$ ) se da a entender que el valor es muy pequeño. Al programar se puede usar el  $\approx O(1)$  para poder aceptar gráficas experimentales resultantes del ruido del sistema y programación que son distintas a la gráfica ideal.

Para definir un conjunto se puede hacer de dos maneras; *extensiva* donde se enumeran todos los elementos o *comprensiva*, donde se usa la lógica para poder obtener una expresión sobre los elementos.

Ejemplo:

- Extensiva:
  - $\{a, b, c, d, e\}$
- Comprensiva
  - $\{x \mid x \text{ son las vocales}\}$
  - $\{x \mid x \text{ son las vocales de la palabra casa}\} = \{a\}$ , nótese como los conjuntos solo pueden tener una vez los elementos
  - $\{x \in \mathbb{N}_0 \mid -3 \leq x < 2\}$ , donde  $\mathbb{N}_0$  indica que nuestros naturales van desde el 0, en este caso es igual a  $\{0, 1\}$
  - $D \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 = 0\} = \{2, -2\}$
  - $F \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 9 = 0\} = \emptyset$ , debido a que la solución es  $x = \pm 3i$ , que no se encuentra en los reales
  - $R \in \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$  que es  $\{-1\}$  porque la solución es repetida  $(-1, -1)$

### 3.2. Operaciones

**Unión:** Sea  $A \cap B \neq \emptyset$ , dos conjuntos no vacíos tal que  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ , donde juntamos los elementos de ambos.

**Intersección:**  $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ , es decir, los que están en ambos conjuntos.

**Diferencia:**  $A/B = A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ , lo que no tiene el de la derecha la izquierda; los elementos que le faltan a  $B$  para ser  $A$

**Complemento:**  $A^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$ , lo que le falta ser a  $A$  para ser el universo  $U$

**Diferencia simétrica:**  $A \triangle B$  o  $A \oplus B$  que es  $(A - B) \cup (B - A)$ , es decir, todo lo que no se repite en  $A$  y  $B$ , es decir, todos los elementos que no son parte de  $A \cap B$  pero que estén en  $A \vee B$ .

### 3.3. Ejercicio

Sea

- $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 100\} = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$
- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x \leq 7 \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\} = \emptyset$
- $B = \{5, 6, 10, 11\}$
- $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \wedge x < 11\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 11\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

a)

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \cup (B \cap C) \\ &= \{5, 6, 10, 11\} \cup \{5, 6, 10\} \\ &= \{5, 6, 10, 11\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& [(B - C) \cup (C - B)]^c \cap (A - B)^c \\
& = (B \oplus C)^c \cap (A - B)^c \\
& = \{3, 4, 7, 8, 9, 11\}^c \cap \emptyset^c \\
& = \{3, 4, 7, 8, 9, 11\}^c \cap E \\
& = \{3, 4, 7, 8, 9, 11\}^c \\
& = \{1, 2, 5, 6, 10, 12, 13, \dots, 99\}
\end{aligned}$$

donde  $E$  es el universo y por lo tanto  $A \cap E = A$

## 4. Exposición

10 min, teoría, comporbar con código, etc

## 5. Fuzzy set mapping

Los conjuntos difusos se utilizan más para inteligencia artificial, se establecen dos límites, uno inferior y otro superior

```

"""
Implementa un algoritmo de mapeo de conjuntos difusos

Args:
    x: El valor de entrada
    a: Limite inferior del conjunto difuso
    b: Limite superior del conjunto difuso
    c: La pendiente dle conjunto difuso

Devuelve el valor de salida del mapero de conjunto difuso

Ejemplo fuzzy_set_mapping(0.5, 0, 1, 1)
"""
def fuzzy_set_mapping(x, a, b, c):
    # No se está usando c
    if x < a:
        return 0
    elif x > b:
        return 1
    else:
        return (x - a) / (b - a)

```

El código tiene dos parámetros, el límite inferior y superior (0 y 1), entonces esta función se encarga de decir si alguien está o no en el conjunto, en caso de que no puede dar un intervalo, que puede servir de preferencia.

Ejemplo Taylor Swift tiene una holgura de 0.9, The Weekend 0.7, Peso Pluma 0.5. Es así que la pendiente nos da una holgura para estar posicionado entre sí o no, ser famoso está distribuido en el intervalo dado de 0 a 1.

En el conjunto difuso se le da la oportunidad de entrar en el límite inferior y superior con una holgura dada.

La holgura se asigna dependiendo de la actividad.

Ejemplo de pedazos de coche, un pistón no puede tener mucha diferencia, ni siquiera milimétrica, este es un ejemplo de diferencia, de holgura que hay entre las piezas. La holgura y tolerancia se la damos para determinar si cierto objeto puede ser elemento a un dado conjunto.

**Tarea:** En la tarea hay que describir qué está haciendo, están considerados como aptos para pertenecer al conjunto hasta cierto punto, hay que decir de qué nos serviría en nuestra carrera, las modificaciones que haríamos y explicarlo.

## 6. Temas de investigación

1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con el método de Gauss no se que acelerado, en cualquier sistema se le puede meter una impedancia para acelerar el procedimiento

2. Integrar funciones múltiples por el método de Simpson  $3/4$  y  $1/2$
3. Resolver ecuaciones
4. Ecuaciones lineales por el método de Roca meta no se que verga
5. Resolver ecuaciones parciales por el método de diferencias finitas

- Como hacer el método, como se resuelve matemáticamente, tenemos que saber el principio, y hacer el código.

1. Como calcular la raíz de un polinomio 2500 iteraciones

1. Explicar qué son los métodos cerrados y métodos abiertos, bien detallado y las condiciones del intervalo que trabajan, de ahí:

- Métodos cerrados: El método de bisección solamente
- Método abierto: El método de la secante y el método de Newton-Raphson
- Aplicación, el código, cómo lo hicimos, qué habilita
- 2500 iteraciones

## 7. Teoría de números

La teoría de números es una de las ramas de la matemáticas que estudia los números naturales ( $\mathbb{N}$ ) y los enteros, de los enteros ( $\mathbb{Z}$ ) estudia sus propiedades.

Recordemos que:

- Los números enteros son  $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
- Nuestra definición de naturales no incluye 0 por defecto

### 7.1. Conjetura de Goldbach

En teoría de números cambian las definiciones con respecto a las matemáticas tradicionales. Goldbach dice que

- Para los números pares, los pares mayores a  $2 \mathbb{P} + \mathbb{P}$ , se pueden extraer de la suma de dos números primos, ej.  $3 > 2 \Leftrightarrow 3 = 2 + 1$
- Para los números impares mayores a  $5 \mathbb{P} + \mathbb{P} + \mathbb{P}$ , todos son igualables a la suma de tres números primos, ej.  $7 = 2 + 2 + 3$

### 7.2. Teorema de Fermat

Partiendo de Pitágoras  $a^2 + b^2 = c^2$ , Fermat exploró qué sucede con las expresiones al ser de grado  $n$  de la forma  $a^n + b^n = c^n$ . Él dice que es imposible encontrar 3 números enteros positivos tal que  $a^n + b^n = c^n$  cuando  $n > 2$ .

### 7.3. Ejemplos de demostraciones

La forma para representar  $2^2 = 4$  podemos dibujar 4 puntos en un cuadrado, haciendo gráficamente un cuadrado con 4 puntos, si es  $3^2$  hacemos un cuadrado de 9 puntos.

Así como vemos que existen números cuadrados pueden existir números *triangulares*, en el caso de los números cuadrados es  $n^2$ , para los triangulares tenemos  $\{3, 6, 10, 15, \dots\}$ , en la teoría de números debemos buscar una función que pueda modelar la representación.

$$\frac{(n)(n+1)}{2}$$

Debemos de hacer el análisis que logre describir la serie de números para resolver los problemas que se nos presenten. La teoría de números se emplea en distintos tipos de entrada.

No vamos a estar haciendo en loops sumas, series, que pueden moldearse en una función que permite describir para cualquier posición  $t$  el valor.

#### 7.3.1. Suma

Otro ejemplo de fórmula, la fórmula que describe cualquier suma consecutiva de números

$$\frac{n(1+n)}{2}$$

Es decir, vamos a empezar a demostrar de forma inductiva, por medio de una función.

#### 7.3.2. Paridad de enteros

Partiendo de  $n \in \mathbb{Z}$ , podemos definir:

- Par:  $2n$
- Impar:  $2n + 1$

Y podemos analizar las propiedades:

- par + par = par
- par + impar = impar
- impar + impar = par
- par  $\times$  par = par
- impar  $\times$  impar = impar

Y podemos demostrar, por ejemplo par  $\times$  par = par de la forma:

$$\begin{aligned}
 (2n+1)(2n+1) &= (2n+1)^2 \\
 &= 4n^2 + 4n + 1 \\
 &\therefore \text{impar}
 \end{aligned}$$

### 7.3.3. Divisores

Sea  $a, b \in \mathbb{Z}$  tal que  $a \neq 0$  y se dice que  $a$  debe ser *divisor* de  $b \Rightarrow K$ , donde  $K \in \mathbb{Z}$  que satisface  $b = ka$ . Si depejamos  $k = \frac{b}{a}$ .

El teorema de divisor lleva, naturalmente, a los números primos.

### 7.3.4. Divisor trivial

Con *trivial* hablamos de proposiciones que no es necesario demostrar, la sola proposición lo demuestra.

El divisor trivial es

Entonces los primos son aquellos que tienen divisores triviales.

### 7.3.5. Teorema fundamental de la aritmética

Cada entero puede ser factorizado por el producto de números primos, por ejemplo  $6 = 3 \times 2$ .

### 7.3.6. Primos de Mersenne

Aquellos números que están derivados de la expresión  $M(p) = 2^p - 1$ , donde  $p \in \mathbb{P}$ . Con los primeros 20 primos de la teoría de la aritmética, hallar los 20 primeros números primos de Mersenne.

El código resultante, delegando la generación de los números primos al *crate primes*, es:

```
use primes::{PrimeSet, Sieve};

fn main() {
    for p in Sieve::new().iter().take(20) {
        println!("{}", 2u128.pow(p as u32) - 1);
    }
}
```

Con la salida del programa:

```
Compiling primos v0.1.0 (/Users/alejandro/repos/primos)
Finished dev [unoptimized + debuginfo] target(s) in 0.40s
Running `target/debug/primos`
3
7
31
127
2047
8191
131071
524287
8388607
536870911
2147483647
137438953471
2199023255551
8796093022207
140737488355327
9007199254740991
576460752303423487
2305843009213693951
147573952589676412927
2361183241434822606847
```

## 7.4. Divisores

Sean  $a, b \wedge c$  números enteros ( $\mathbb{Z}$ ) donde  $a \neq 0$ :

1. Si  $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c)$ , donde  $a|b = \frac{b}{a}$ , por ejemplo  $4|12 = \frac{12}{4} \in \mathbb{Z}, k := 3, b := 12, a := 4$

Prueba con  $b = k_1 a \wedge c = k_2 a$

$$\begin{aligned} b + c &= k_1 a + k_2 a \\ &= (k_1 + k_2) a \Rightarrow a \mid (b + c) \end{aligned}$$

2. Sea  $a|b \Rightarrow a|bc$ , para todo entero  $c$ , es decir, que si  $a$  es divisor de  $b$ , entonces también será divisor de todo  $bc$  donde  $c \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ejemplo } 2|10 \Rightarrow 2|(10 \times 3) \Rightarrow \frac{30}{2} = 15$$

3. Si  $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ , es decir, que si  $a$  es divisor de  $b$ , y  $b$  es divisor de  $c$ , entonces  $a$  será divisor de  $c$

Prueba, usando la definición anterior,  $a|b \Rightarrow b = k_1 a$  y  $b|c \Rightarrow c = k_2 b$ :

Sustituimos  $b$

$$c = k_2 k_1 a \Rightarrow a|c$$

## 7.5. Numeros perfectos

Se dice que  $m$  es un número perfecto si es que  $m \in \mathbb{Z}^+$  y resulta de la suma de sus divisores, a excepción de la base, la suma de todos sus divisores da como resultado la base misma, por ejemplo  $6 = 1 + 2 + 3$

Hay 49 números perfectos y 49 primos de Mersenne, para obtenerlo podemos hacer:

$$M = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}(M(P))$$

Con esta fórmula podemos obtener números perfectos a partir de primos de Mersenne

$$M_1(p) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$M_2(p) = 2^{2^2-1}(3) = 2 \times 3 = 6$$

Los números tan grandes son difíciles de manejar, hace que se pierda precisión, que es base, en parte, para la criptografía.

### 7.5.1. Código

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, Si el número primo de Mersenne es primo, entonces obtener el número perfecto, si no, descartarlo.

Si al evaluar los primos en la función de Mersenne da un primo, entonces al valor que genere le calculamos el perfecto. Debe salir el número original, el de Mersenne y el perfecto.

```
extern crate primes;
use primes::{PrimeSet, Sieve};

fn main() {
    for p in Sieve::new().iter().take(7) {
        let m = 2u128.pow(p as u32) - 1;
        if Sieve::new().is_prime(m as u64) {
            println!("{p}: {m} => {}", 2u128.pow((p - 1) as u32) * m)
        }
    }
}
```

### 7.5.2. Demostración

$$M = 2^{p-1}(2^p - 1)$$



En este caso tenemos  $2$  elevado a  $p - 1$ , que tiene divisores  $1, 2, 4, \dots, 2^{p-1}$ , si sumáramos todos los valores quedaría  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{p-1} = 2^p$

Si sus dos triviales son  $1$  y  $2^p$  y tomando en cuenta que la suma de los divisores debe de dar el número perfecto, entonces, si el número es la suma de los divisores ( $1 + 2^p - 1 = 2^p$ ).

Ahora tenemos  $2^p(2^p - 1) - 2^{p-1}(2^p - 1)$ , si factorizamos queda  $2^{p-1}(2^p - 1)(2 - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)$

## 7.6. Divisibilidad

Para cualquier  $a, c \in \mathbb{Z}^+$ , donde  $a \neq 0$ , entonces  $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(mb + nc)$  donde  $m, n \in \mathbb{Z}^+$

Entonces, se cumple:

$$\begin{aligned} 5|10 \wedge 5|20 &\Rightarrow 5|(2 \times 10 + 20 \times 40) \\ &\Rightarrow 5|(20 + 80) \\ &\Rightarrow 5 | 100 \end{aligned}$$

## 7.7. Def, algoritmo de division

Sea  $a, b \in \mathbb{Z}$ , y  $b \in \mathbb{Z}^+$ , tal que al expresar la división se conforma como  $a = bq + r$ , donde  $q, r \in \mathbb{Z}$  y son únicos. Aquí la  $q$  es el cociente,  $r$  el residuo, donde debe cumplirse  $0 \leq r < b$ .

Se le llama entero único porque se trabaja con la aritmética regular. Solo habrá una combinación de  $r, q$  que cumpla con el intervalo que logre dar el resultado. Por ejemplo  $\frac{3}{7}$  solo permite tener un residuo  $0 \leq r < 7$ .

### 7.7.1. Prueba de existencia

En esta prueba mostramos que los números  $q \wedge r$  cumplen con la igualdad

$$\begin{aligned} &-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \\ &-3b, -2b, -1b, 0b, 1b, 2b, 3b \end{aligned}$$

Y vemos que sea  $0 \leq r < b$

Partiendo de:

$$\begin{aligned} a &= bq + r \\ bq &\leq a \leq (q+1)b \end{aligned}$$

Es decir, que el valor en  $a$  debe ser mayor a 0 y debe ser menor al que sigue  $((q+1)b)$  de forma que podamos hacer  $r = a - bq$

### 7.7.2. Prueba Unicidad

En esta prueba verificamos que  $q, r$  son únicos.

Si tenemos el teorema de divisibilidad  $a = bq + r$ , entonces, si nos encontramos con una combinación que da el mismo resultado,  $a = bq_1 + r_1 \wedge a = bq + r$ . Entonces  $r < r_1 < b$ , si los dos valores de  $a$  son iguales en ambos lados, siendo dos combinaciones diferentes, podemos:

$$bq_1 + r_1 = bq + r$$

Si tenemos  $bq_1 + r_1 = bq + r$ , podemos despejar de la forma:

$$\begin{aligned} bq_1 + r_1 &= bq + r \\ r_1 - r &= bq - bq_1 \\ r_1 - r &= b(q - q_1) \end{aligned}$$

Entonces, si  $0 \leq r_1 - r < b$ , se tiene que no es posible tener  $b | (r_1 - r)$ , solo es posible si  $r_1 = r \Rightarrow q = q_1$ , y particularmente solo con 0.

$$\frac{r_1 - r}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \nexists$$

## 7.8. Aritmética modular

En la igualdad, dada en el algoritmo de división, queda  $a = bq + r$ , donde:

- $a$  es el *dividendo*
- $b$  es el *divisor*
- $q$  es el *cociente*
- $r$  es el *residuo*
- A  $q$  se le conoce como  $q = a \text{ división } b = \left[ \frac{a}{b} \right]$ , donde  $a \in \mathbb{Z}$

- A  $r$  se le conoce como  $r = a \text{ modulo } b = a - b$ , donde  $b \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo, sea  $101 \div 12$  quedaría descompuesto de la forma  $101 = 12 \times 8 + 5$ , donde se cumple la condición de  $0 \leq 5 \leq 12$ .

Expresado como módulo quedaría  $5 = 101 \text{ mod } 12$ , y como división  $8 = 101 \text{ div } 12$

Ejemplo:  $191 \div 13$ :

- $191 = 14 \times 13 + 9$
- $14 = 191 \text{ div } 13$
- $9 = 191 \text{ mod } 13$

Ejemplo:  $-11 \div 3$ :

- $-11 = 3 \times -3 - 2$ 
  - En este caso  $0 \leq -2 < 3$  no se cumple, no es una  $q$  válida
- $-11 = 3 \times -4 + 1$ 
  - En este caso  $0 \leq 1 < 3$  si se cumple, es una  $q$  válida

**Nota:** El residuo o resto no puede ser negativo, tener en cuenta que el número entero  $a$  es divisible por el número  $b$ , sii el residuo  $r = 0 \Rightarrow \left[ \frac{a}{b} \right]$