

Contents

1. Evaluación	2
2. Conjuntos de números	2
2.1. Complejos	2
2.1.1. Reales	2
2.1.1.1. Racionales (Q) (a/b)	2
2.1.1.1.1. Enteros (\mathbb{Z})	2
2.1.1.1.1.1. Enteros negativos (Z')	2
2.1.1.1.1.2. Monoide (0)	2
2.1.1.1.1.3. Naturales (N)	2
2.1.1.1.1.3.1. Primo: Divide entre si y 1	2
2.1.1.1.1.3.2. Compuesto: Los demás, 3+ divisores	2
2.1.1.1.2. Fraccionarios (F)	2
2.1.1.2. Irracionales ($\mathbb{I} = \mathbb{R} - Q$)	2
2.1.2. Imaginarios	2
3. Introducción a conjuntos	3
3.1. Definición de conjunto	3
3.2. Operaciones	3
3.3. Ejercicio	3
4. Exposición	4
5. Fuzzy set mapping	4
6. Temas de investigación	5
7. Teoría de números	6
7.1. Conjetura de Goldbach	6
7.2. Teorema de Fermat	6
7.3. Ejemplos de demostraciones	6
7.3.1. Suma	6
7.3.2. Paridad de enteros	6
7.3.3. Divisores	7
7.3.4. Divisor trivial	7
7.3.5. Teorema fundamental de la aritmética	7
7.3.6. Primos de Mersenne	7
7.4. Divisores	8
7.5. Numeros perfectos	8
7.5.1. Código	8
7.5.2. Demostración	8
7.6. Divisibilidad	10
7.7. Def, algoritmo de division	10
7.7.1. Prueba de existencia	10
7.7.2. Prueba Unicidad	10
7.8. Aritmética modular	10
7.8.1. Pseudocogido	12
7.9. Aritmética modular	13
8. Unidad 2	13
8.1. Clase	13
8.2. Operaciones entre modulos	13
8.3. Maximo comun divisor	15
8.4. Algoritmo de Euclides	15

8.5. Euclides extendido	16
8.6. Introducción a la noción de numeros primos	17
9. Unidad 3	19
9.1. Metodos de conteo	19
10. Introducción a demostraciones	19

1. Evaluación

1er, 2do Parcial	... 40 %
Tareas	... 10 %

Proyecto	... 25 %
Examen Final	... 25 %

Correos acepta de 2 am a 2:30 am

2. Conjuntos de números

2.1. Complejos

Los números complejos son una suma de una parte real \mathbb{R} y una parte imaginaria $\mathbb{I}m$, por ejemplo $2 + 3i$.

2.1.1. Reales

Son un subconjunto de los números complejos \mathbb{C} donde no existe la parte imaginaria, por lo que se puede representar en una recta numérica.

2.1.1.1. Racionales (\mathbb{Q}) (a/b)

Se representan con un cociente de dos enteros, por ejemplo $\frac{1}{3} = 0.33\bar{3}$, también tenemos por ejemplo el $2 = \frac{2}{1}$

2.1.1.1.1. Enteros (\mathbb{Z})

Que no tienen parte decimal

2.1.1.1.1.1. Enteros negativos (\mathbb{Z}')

2.1.1.1.1.2. Monoide (0)

2.1.1.1.1.3. Naturales (\mathbb{N})

Dependiendo de si se denota \mathbb{N}_0 o \mathbb{N}_1 se considera si el conjunto incluye al 0 o no, esto depende de si conviene o no para los trabajos de investigación. Entonces $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ y $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, \dots\}$

2.1.1.1.1.3.1. Primo: Divide entre si y 1

2.1.1.1.1.3.2. Compuesto: Los demás, 3+ divisores

2.1.1.1.2. Fraccionarios (\mathbb{F})

Todos los demás que no son enteros

2.1.1.2. Irracionales ($\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$)

Entre estos tenemos razones que no son repetitivas en su parte decimal, es decir que no hay patrones en la secuencia de números decimales como con $\pi, \sqrt{2}, \tau, e$

También tenemos aquí todas las raíces de números primos.

2.1.2. Imaginarios

En los números imaginarios se entiende $i = \sqrt{-1}$. Para descartar rápidamente números que no están expresados de la forma imaginaria solo tenemos que fijarnos en el *exponente* de la raíz.

$$\sqrt[n]{a}$$

En caso de que a sea un número negativo y n sea par, entonces podemos decir con seguridad que se trata de un número imaginario.

En todos los demás casos el resultado obtenido será $c + 0i$, donde no existe una parte imaginaria.

3. Introducción a conjuntos

3.1. Definición de conjunto

Un conjunto es una colección de *elementos*. Sea A un conjunto de elementos que puede ser finito o infinito se dice que a es elemento de A si, y solo si $a \in A$.

Por lo tanto se puede decir que $A \in \{a\}$.

Simbología:

- \exists existe
- \nexists no existe
- $\exists!$ existe solo para
- \in pertenece
- \notin no pertenece
- $<, \leq, >, \geq$ menor, menor que, mayor, mayor que
- \ll, \gg super mayor y super menor, se usan para decir que el objeto que se está analizando es tan grande que no cabe en el sistema, por lo tanto se puede simplificar.

Escalamiento: Si se dice que un valor es orden a la 1 ($x \approx O(1)$) se da a entender que el valor es muy pequeño. Al programar se puede usar el $\approx O(1)$ para poder aceptar gráficas experimentales resultantes del ruido del sistema y programación que son distintas a la grafica ideal.

Para definir un conjunto se puede hacer de dos maneras; *extensiva* donde se enumeran todos los elementos o *comprensiva*, donde se usa la lógica para poder obtener una expresión sobre los elementos.

Ejemplo:

- Extensiva:
 - $\{a, b, c, d, e\}$
- Comprensiva
 - $\{x \mid x \text{ son las vocales}\}$
 - $\{x \mid x \text{ son las vocales de la palabra casa}\} = \{a\}$, nótese como los conjuntos solo pueden tener una vez los elementos
 - $\{x \in \mathbb{N}_0 \mid -3 \leq x < 2\}$, donde \mathbb{N}_0 indica que nuestros naturales van desde el 0, en este caso es igual a $\{0, 1\}$
 - $D \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 = 0\} = \{2, -2\}$
 - $F \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 9 = 0\} = \emptyset$, debido a que la solución es $x = \pm 3i$, que no se encuentra en los reales
 - $R \in \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$ que es $\{-1\}$ porque la solución es repetida $(-1, -1)$

3.2. Operaciones

Unión: Sea $A \cap B \neq \emptyset$, dos conjuntos no vacíos tal que $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, donde juntamos los elementos de ambos.

Intersección: $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, es decir, los que están en ambos conjuntos.

Diferencia: $A/B = A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$, lo que no tiene el de la derecha la izquierda; los elementos que le faltan a B para ser A

Complemento: $A^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$, lo que le falta ser a A para ser el universo U

Diferencia simétrica: $A \triangle B$ o $A \oplus B$ que es $(A - B) \cup (B - A)$, es decir, todo lo que no se repite en A y B , es decir, todos los elementos que no son parte de $A \cap B$ pero que estén en $A \cup B$.

3.3. Ejercicio

Sea

- $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 100\} = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$
- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x \leq 7 \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\} = \emptyset$

- $B = \{5, 6, 10, 11\}$
- $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \wedge x < 11\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 11\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

a)

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \cup (B \cap C) \\ &= \{5, 6, 10, 11\} \cup \{5, 6, 10\} \\ &= \{5, 6, 10, 11\}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}[(B - C) \cup (C - B)]^c \cap (A - B)^c \\ &= (B \oplus C)^c \cap (A - B)^c \\ &= \{3, 4, 7, 8, 9, 11\}^c \cap \emptyset^c \\ &= \{3, 4, 7, 8, 9, 11\}^c \cap E \\ &= \{3, 4, 7, 8, 9, 11\}^c \\ &= \{1, 2, 5, 6, 10, 12, 13, \dots, 99\}\end{aligned}$$

donde E es el universo y por lo tanto $A \cap E = A$

4. Exposición

10 min, teoría, comprobar con código, etc

5. Fuzzy set mapping

Los conjuntos difusos se utilizan más para inteligencia artificial, se establecen dos límites, uno inferior y otro superior

```
"""
Implementa un algoritmo de mapeo de conjuntos difusos

Args:
x: El valor de entrada
a: Límite inferior del conjunto difuso
b: Límite superior del conjunto difuso
c: La pendiente del conjunto difuso

Devuelve el valor de salida del mapeo de conjunto difuso

Ejemplo fuzzy_set_mapping(0.5, 0, 1, 1)
"""
def fuzzy_set_mapping(x, a, b, c):
    # No se está usando c
    if x < a:
        return 0
    elif x > b:
        return 1
    else:
        return (x - a) / (b - a)
```

El código tiene dos parámetros, el límite inferior y superior (0 y 1), entonces esta función se encarga de decir si alguien está o no en el conjunto, en caso de que no puede dar un intervalo, que puede servir de preferencia.

Ejemplo Taylor Swift tiene una holgura de 0.9, The Weekend 0.7, Peso Pluma 0.5. Es así que la pendiente nos da una holgura para estar posicionado entre sí o no, ser famoso está distribuido en el intervalo dado de 0 a 1.

En el conjunto difuso se le da la oportunidad de entrar en el límite inferior y superior con una holgura dada.

La holgura se asigna dependiendo de la actividad.

Ejemplo de pedazos de coche, un pistón no puede tener mucha diferencia, ni siquiera milimétrico, este es un ejemplo de diferencia, de holgura que hay entre las piezas. La holgura y tolerancia se la damos para determinar si cierto objeto puede ser elemento a un dado conjunto.

Tarea: En la tarea hay que describir qué está haciendo, están considerados como aptos para pertenecer al conjunto hasta cierto punto, hay que decir de qué nos serviría en nuestra carrera, las modificaciones que haríamos y explicarlo.

6. Temas de investigación

1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con el método de Gauss no se que acelerado, en cualquier sistema se le puede meter una impedancia para acelerar el procedimiento
 2. Integrar funciones múltiples por el método de Simpson $3/4$ y $1/2$
 3. Resolver ecuaciones
 4. Ecuaciones lineales por el método de Roca meta no se que verga
 5. Resolver ecuaciones parciales por el método de diferencias finitas
- Como hacer el método, como se resuelve matemáticamente, tenemos que saber el principio, y hacer el código.
1. Como calcular la raíz de un polinomio 2500 iteraciones
 1. Explicar qué son los métodos cerrados y métodos abiertos, bien detallado y las condiciones del intervalo que trabajan, de ahí:
 - Métodos cerrados: El método de bisección solamente
 - Método abierto: El método de la secante y el método de Newton-Raphson
 - Aplicación, el código, cómo lo hicimos, qué habilita
 - 2500 iteraciones

7. Teoría de números

La teoría de números es una de las ramas de la matemáticas que estudia los números naturales (\mathbb{N}) y los enteros, de los enteros (\mathbb{Z}) estudia sus propiedades.

Recordemos que:

- Los números enteros son $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
- Nuestra definición de naturales no incluye 0 por defecto

7.1. Conjetura de Goldbach

En teoría de números cambian las definiciones con respecto a las matemáticas tradicionales. Goldbach dice que

- Para los números pares, los pares mayores a $2 \mathbb{P} + \mathbb{P}$, se pueden extraer de la suma de dos números primos, ej. $3 > 2 \Leftrightarrow 3 = 2 + 1$
- Para los números impares mayores a $5 \mathbb{P} + \mathbb{P} + \mathbb{P}$, todos son igualables a la suma de tres números primos, ej. $7 = 2 + 2 + 3$

7.2. Teorema de Fermat

Partiendo de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$, Fermat exploró qué sucede con las expresiones al ser de grado n de la forma $a^n + b^n = c^n$. Él dice que es imposible encontrar 3 números enteros positivos tal que $a^n + b^n = c^n$ cuando $n > 2$.

7.3. Ejemplos de demostraciones

La forma para representar $2^2 = 4$ podemos dibujar 4 puntos en un cuadrado, haciendo gráficamente un cuadrado con 4 puntos, si es 3^2 hacemos un cuadrado de 9 puntos.

Así como vemos que existen números cuadrados pueden existir números *triangulares*, en el caso de los números cuadrados es n^2 , para los triangulares tenemos $\{3, 6, 10, 15, \dots\}$, en la teoría de números debemos buscar una función que pueda modelar la representación.

$$\frac{(n)(n+1)}{2}$$

Debemos de hacer el análisis que logre describir la serie de números para resolver los problemas que se nos presenten. La teoría de números se emplea en distintos tipos de entrada.

No vamos a estar haciendo en loops sumas, series, que pueden moldearse en una función que permite describir para cualquier posición t el valor.

7.3.1. Suma

Otro ejemplo de fórmula, la fórmula que describe cualquier suma consecutiva de números

$$\frac{n(1+n)}{2}$$

Es decir, vamos a empezar a demostrar de forma inductiva, por medio de una función.

7.3.2. Paridad de enteros

Partiendo de $n \in \mathbb{Z}$, podemos definir:

- Par: $2n$
- Impar: $2n + 1$

Y podemos analizar las propiedades:

- par + par = par
- par + impar = impar
- impar + impar = par
- par \times par = par
- impar \times impar = impar

Y podemos demostrar, por ejemplo par \times par = par de la forma:

$$\begin{aligned}
 (2n+1)(2n+1) &= (2n+1)^2 \\
 &= 4n^2 + 4n + 1 \\
 &\therefore \text{impar}
 \end{aligned}$$

7.3.3. Divisores

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq 0$ y se dice que a debe ser *divisor* de $b \Rightarrow K$, donde $K \in \mathbb{Z}$ que satisface $b = ka$. Si depejamos $k = \frac{b}{a}$.

El teorema de divisor lleva, naturalmente, a los números primos.

7.3.4. Divisor trivial

Con *trivial* hablamos de proposiciones que no es necesario demostrar, la sola proposición lo demuestra.

El divisor trivial es

Entonces los primos son aquellos que tienen divisores triviales.

7.3.5. Teorema fundamental de la aritmética

Cada entero puede ser factorizado por el producto de números primos, por ejemplo $6 = 3 \times 2$.

7.3.6. Primos de Mersenne

Aquellos números que están derivados de la expresión $M(p) = 2^p - 1$, donde $p \in \mathbb{P}$. Con los primeros 20 primos de la teoría de la aritmética, hallar los 20 primeros números primos de Mersenne.

El código resultante, delegando la generación de los números primos al *crate primes*, es:

```
use primes::{PrimeSet, Sieve};

fn main() {
    for p in Sieve::new().iter().take(20) {
        println!("{}", 2u128.pow(p as u32) - 1);
    }
}
```

Con la salida del programa:

```
Compiling primos v0.1.0 (/Users/alejandro/repos/primos)
Finished dev [unoptimized + debuginfo] target(s) in 0.40s
Running `target/debug/primos`
3
7
31
127
2047
8191
131071
524287
8388607
536870911
2147483647
137438953471
2199023255551
8796093022207
140737488355327
9007199254740991
576460752303423487
2305843009213693951
147573952589676412927
2361183241434822606847
```

7.4. Divisores

Sean $a, b \wedge c$ números enteros (\mathbb{Z}) donde $a \neq 0$:

1. Si $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c)$, donde $a|b = \frac{b}{a}$, por ejemplo $4|12 = \frac{12}{4} \in \mathbb{Z}, k := 3, b := 12, a := 4$

Prueba con $b = k_1 a \wedge c = k_2 a$

$$\begin{aligned} b + c &= k_1 a + k_2 a \\ &= (k_1 + k_2) a \Rightarrow a | (b + c) \end{aligned}$$

2. Sea $a|b \Rightarrow a|bc$, para todo entero c , es decir, que si a es divisor de b , entonces también será divisor de todo bc donde $c \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ejemplo } 2|10 \Rightarrow 2|(10 \times 3) \Rightarrow \frac{30}{2} = 15$$

3. Si $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$, es decir, que si a es divisor de b , y b es divisor de c , entonces a será divisor de c

Prueba, usando la definición anterior, $a|b \Rightarrow b = k_1 a$ y $b|c \Rightarrow c = k_2 b$:

Sustituimos b

$$c = k_2 k_1 a \Rightarrow a|c$$

7.5. Numeros perfectos

Se dice que m es un número perfecto si es que $m \in \mathbb{Z}^+$ y resulta de la suma de sus divisores, a excepción de la base, la suma de todos sus divisores da como resultado la base misma, por ejemplo $6 = 1 + 2 + 3$

Hay 49 números perfectos y 49 primos de Mersenne, para obtenerlo podemos hacer:

$$M = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}(M(P))$$

Con esta fórmula podemos obtener números perfectos a partir de primos de Mersenne

$$M_1(p) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$M_2(p) = 2^{2^1-1}(3) = 2 \times 3 = 6$$

Los números tan grandes son difíciles de manejar, hace que se pierda precisión, que es base, en parte, para la criptografía.

7.5.1. Código

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, Si el número primo de Mersenne es primo, entonces obtener el número perfecto, si no, descartarlo.

Si al evaluar los primos en la función de Mersenne da un primo, entonces al valor que genere le calculamos el perfecto. Debe salir el número original, el de Mersenne y el perfecto.

```
extern crate primes;
use primes::{PrimeSet, Sieve};

fn main() {
    for p in Sieve::new().iter().take(7) {
        let m = 2u128.pow(p as u32) - 1;
        if Sieve::new().is_prime(m as u64) {
            println!("{p}: {m} => {}", 2u128.pow((p - 1) as u32) * m)
        }
    }
}
```

7.5.2. Demostración

$$M = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

En este caso tenemos 2 elevado a $p - 1$, que tiene divisores $1, 2, 4, \dots, 2^{p-1}$, si sumáramos todos los valores quedaría $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{p-1} = 2^p$

Si sus dos triviales son 1 y 2^p y tomando en cuenta que la suma de los divisores debe de dar el número perfecto, entonces, si el número es la suma de los divisores ($1 + 2^p - 1 = 2^p$).

Ahora tenemos $2^p(2^p - 1) - 2^{p-1}(2^p - 1)$, si factorizamos queda $2^{p-1}(2^p - 1)(2 - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)$

7.6. Divisibilidad

Para cualquier $a, c \in \mathbb{Z}^+$, donde $a \neq 0$, entonces $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(mb + nc)$ donde $m, n \in \mathbb{Z}^+$

Entonces, se cumple:

$$\begin{aligned} 5|10 \wedge 5|20 &\Rightarrow 5 | (2 \times 10 + 20 \times 40) \\ &\Rightarrow 5 | (20 + 80) \\ &\Rightarrow 5 | 100 \end{aligned}$$

7.7. Def, algoritmo de division

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, y $b \in \mathbb{Z}^+$, tal que al expresar la división se conforma como $a = bq + r$, donde $q, r \in \mathbb{Z}$ y son únicos. Aquí la q es el cociente, r el residuo, donde debe cumplirse $0 \leq r < b$.

Se le llama entero único porque se trabaja con la aritmética regular. Solo habrá una combinación de r, q que cumpla con el intervalo que logre dar el resultado. Por ejemplo $\frac{3}{7}$ solo permite tener un residuo $0 \leq r < 7$.

7.7.1. Prueba de existencia

En esta prueba mostramos que los números $q \wedge r$ cumplen con la igualdad

$$\begin{aligned} &-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \\ &-3b, -2b, -1b, 0b, 1b, 2b, 3b \end{aligned}$$

Y vemos que sea $0 \leq r < b$

Partiendo de:

$$\begin{aligned} a &= bq + r \\ bq &\leq a \leq (q+1)b \end{aligned}$$

Es decir, que el valor en a debe ser mayor a 0 y debe ser menor al que sigue $((q+1)b)$ de forma que podamos hacer $r = a - bq$

7.7.2. Prueba Unicidad

En esta prueba verificamos que q, r son únicos.

Si tenemos el teorema de divisibilidad $a = bq + r$, entonces, si nos encontramos con una combinación que da el mismo resultado, $a = bq_1 + r_1 \wedge a = bq + r$. Entonces $r < r_1 < b$, si los dos valores de a son iguales en ambos lados, siendo dos combinaciones diferentes, podemos:

$$bq_1 + r_1 = bq + r$$

Si tenemos $bq_1 + r_1 = bq + r$, podemos despejar de la forma:

$$\begin{aligned} bq_1 + r_1 &= bq + r \\ r_1 - r &= bq - bq_1 \\ r_1 - r &= b(q - q_1) \end{aligned}$$

Entonces, si $0 \leq r_1 - r < b$, se tiene que no es posible tener $b | (r_1 - r)$, solo es posible si $r_1 = r \Rightarrow q = q_1$, y particularmente solo con 0.

$$\frac{r_1 - r}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \nexists$$

7.8. Aritmética modular

En la igualdad, dada en el algoritmo de división, queda $a = bq + r$, donde:

- a es el *dividendo*
- b es el *divisor*
- q es el *cociente*
- r es el *residuo*
- A q se le conoce como $q = a \text{ división } b = \left[\frac{a}{b} \right]$, donde $a \in \mathbb{Z}$

- A r se le conoce como $r = a \bmod b = a - b$, donde $b \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo, sea $101 \div 12$ quedaría descompuesto de la forma $101 = 12 \times 8 + 5$, donde se cumple la condición de $0 \leq 5 \leq 12$.

Expresado como módulo quedaría $5 = 101 \bmod 12$, y como división $8 = 101 \div 12$

Ejemplo: $191 \div 13$:

- $191 = 14 \times 13 + 9$
- $14 = 191 \div 13$
- $9 = 191 \bmod 13$

Ejemplo: $-11 \div 3$:

- $-11 = 3 \times -3 - 2$
 - En este caso $0 \leq -2 < 3$ no se cumple, no es una q válida
- $-11 = 3 \times -4 + 1$
 - En este caso $0 \leq 1 < 3$ si se cumple, es una q válida

Nota: El residuo o resto no puede ser negativo, tener en cuenta que el número entero a es divisible por el número b , si el residuo $r = 0 \Rightarrow \left[\frac{a}{b} \right]$

Sea $a, b \in \mathbb{Z}^+$

- Si $a = bq$ para $q \in \mathbb{Z}^+$, entonces $-a = (-q)b$ En este caso, cuando $-a$ si (< 0) es dividido por un b si (> 0) al cociente es $-q$ donde (< 0) y el residuo es $r = 0$
- Si $a = bq + r$ para un cociente $q \in \mathbb{N}$ y se encuentra $0 < r < b$ entonces $-a = (-q)b - r$

En este caso el valor de b tiene que mantenerse absoluto, por lo que: $-a = (-q)b + b - b - r$

Si los juntamos queda: $-a = (-q)b - b + b - r$

Estamos sumando/restando b para no modificar la expresión, ahora podemos factorizar:

$$-a = (-q - 1)b + (b - r)$$

Con esto logramos que r entre en el intervalo de $0 < r < b$

En este caso r nos da positivo porque al restarle el valor de b que es mayor a el queda como positivo, o algo así.

Ejemplo:

$$-11 = (-4)(3) + 1$$

7.8.1. Pseudocódigo

Para el caso 2, cuando el dividendo ($-a$) es menor a 0, es dividido por b donde $b > 0$, el cociente es $-q - 1$ y el residuo es $b - r$, siempre y cuando $0 < b - r < b$

Donde $a, b \in \mathbb{Z}$:

$q :=$ cociente

$r :=$ residuo

si $a = 0$

$q = 0$

$r = 0$

si no

$r = \text{abs}(a)$

$q = 0$

 mientras $r \geq b$

$r = r - b$

$q = q + 1$ #el cociente afecta el sig valor

 si $a > 0$ #no pasa nada

$q = q$

$r = r$

 # Ultimos dos casos, donde tenemos valor de divisor negativo y de residuo 0,

 # no necesitamos agregar un resultado más

 sino si $r = 0$ # Primer punto de hoy

$q = -q$

$r = r$

 sino #segundo punto de hoy

$q = -q - 1$

$r = b - r$

fn div(a: i64, b: i64) → (i64, i64) {

 let mut res = (0, 0);

 let (ref mut q, ref mut r) = res;

 if a == 0 {

 return res;

 }

 *r = a.abs();

```

while *r >= b {
    *r -= b;
    *q += 1
}

if a > 0 {
    // Cuando son positivos no hacemos nada
} else if *r == 0 {
    // Si el residuo es 0 existe la posibilidad
    // de que podamos tener un cociente negativo
    *q = -*q;
} else {
    // Si no, un residuo
    *q = -*q - 1;
    *r = b - *r;
}

res
}

```

7.9. Aritmética modular

Si $a \wedge b$ son números enteros y $m \in \mathbb{Z}^+$, entonces a es congruente con $b \bmod m$ si m divide a ab , es decir:
 $m \mid (a - b) \Rightarrow \frac{a-b}{m} \in \mathbb{Z}$

Vamos a trabajar con puros residuos, donde congruente es *idéntico*, como en JS con `===`

Axiomas:

1. La notación $a \equiv b \bmod m$ (donde congruente es \equiv) es una congruencia (en geometría, misma forma/tamaño) y que m es su módulo
2. 2 números enteros son congruentes de $\bmod m$ si y solo si, y solo si, se tienen los mismos residuos cuando se dividen por m .

Determina si 17 es congruente con 5 $\bmod 6$ y 24 $\bmod 5$:

- $a \equiv b \bmod m$, entonces $15 \equiv 5 \bmod 6$, si $m \mid (a - b)$: $17 - 5 = \frac{12}{6} \Rightarrow 2$, es congruente
- $24 \equiv 14 \bmod 5$: $24 - 14 = \frac{10}{5} \rightarrow 2$, es congruente
- $24 \equiv 14 \bmod 6$: $24 - 14 = \frac{10}{6} \in \mathbb{Q}$, no es congruente $24 \not\equiv 14 \bmod 6$

En el examen viene hasta aquí. Viene:

- Teoría de conjuntos
- Código, relacionado con divisibilidad. Hay que tener relacionados los divisores de sumas

8. Unidad 2

Gauss, intervino en las leyes de Maxwell y también en teoría de números. El dice

Teorema 2: Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a \wedge b$ son congruentes para un módulo de m , si existe un $K \in \mathbb{Z}$ que satisface la expresión:

$$a = b + Km$$

8.1. Clase

$$Z_m, \hat{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \bmod m\}$$

Ejemplo, un número cualquiera dividido entre 2 si da 0 es par, si no es impar, por ejemplo,

Hat se coloca porque puede ser tanto positivo como negativo. Que posibles residuos pude hacer del número

8.2. Operaciones entre modulos

$$a \bmod m + b \bmod m = (a + b) \bmod m \quad a \bmod m * b \bmod m = (a * b) \bmod m$$

$$\begin{aligned}
& \hat{5} + \hat{6} \\
&= (5 + 6) \bmod 6 \\
&= 11 \bmod 6 \\
&= 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{7} \times \hat{4} \\
&= (7 \times 4) \bmod 6 \\
&= 28 \bmod 6 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Los espacios vectoriales se rigen en anillos conmutativo, aunque cambiemos la posición de los elementos debe cumplirse la operación.

$$\begin{aligned}
& \hat{a} + \hat{b} \in \mathbb{Z} \text{ (cerradura)} \\
& \hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a} \text{ (conmutativa)} \\
& \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c}) = (\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} \text{ (asociativa)} \\
& \hat{a} * (\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a}\hat{b} + \hat{a}\hat{c} \text{ (distributiva)} \\
& \hat{a} + 0 = 0 + \hat{a} = \hat{a} \text{ (elemento neutro)} \\
& \hat{a} * 1 = 1 * \hat{a} = \hat{a} \text{ (elemento neutro multiplicativo)}
\end{aligned}$$

Ejercicios:

$$\begin{aligned}
& \hat{5}(\hat{2} + \hat{3}) + \hat{6}(\hat{7} + \hat{4}) \stackrel{z}{\underset{5}{\equiv}} \\
&= \hat{5} * \hat{2} + \hat{5} * \hat{3} + \hat{6}(\hat{7} + \hat{4}) \\
&= \hat{10} + \hat{15} + \hat{6}(\hat{7} + \hat{4}) \\
&= \hat{10} + \hat{15} + \hat{6} * \hat{7} + \hat{6} * \hat{4} \\
&= \hat{10} + \hat{15} + \hat{42} + \hat{24} \\
&= \hat{91} \\
&= \hat{91} \bmod \hat{5} = \hat{1} \\
& \hat{4} + (\hat{11} + \hat{3}) + \hat{4}(\hat{8} + \hat{3}) \stackrel{z}{\underset{4}{\equiv}} \\
&= \hat{18} + \hat{32} + \hat{12} \\
&= \hat{30} + \hat{32} \\
&= \hat{62} \bmod \hat{4} = \hat{2}
\end{aligned}$$

Es testado, lo que quiere que va a devolver 0 y 1 Testado quiere decir que viene de la proyección $\{0, 1, 2, 3, m - 1\}$. Entonces el primero devuelve 0. El segundo devuelve 0, 1.

z/n es z de cocientes.

Que sea testada quiere decir que va a devolverlos con 0, 1, ..., $m-1$.

El 0 y 1 que sale quiere decir que son los posibles residuos que pueden salir del modulo.

Inverso modulo m (unidad) y divisores de cero:

Hay numeros primos y co-primos.

Sea $a \in \frac{\mathbb{Z}}{m}$, a es una unidad si tiene inverso, es decir, existe un $b \in \frac{\mathbb{Z}}{m}$ tal que ab va a ser congruente $ab \equiv ba \equiv 1 \pmod{m}$.

O sea $a^{-1} = b \Rightarrow a^{-1} \times a = 1$.

Congruente: $a \equiv b \pmod{m}$ es congruente si $\frac{a-b}{m} \in \mathbb{Z}$

Ejemplo:

$2 \times a \equiv 1 \pmod{5}$ que numero cumple con el inverso y que sea congruente?

$$2 \times 3 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$6 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$6 \equiv 1 \pmod{5}$$

También se cumple que

$$\frac{6-1}{5} \in \mathbb{Z}$$

$$3^{-1} \equiv 2 \pmod{5}$$

Aquí los coprimos serían 3 y 5.

Por otra parte $\hat{a} \neq 0$, es divisor de 0 en $\frac{\mathbb{Z}}{m}$, si existe $b \in \frac{\mathbb{Z}}{m}$ donde $b \neq 0$, tal que $\hat{a}\hat{b} = 0$

Ejemplo:

- Esto nos indica que son divisores si:

$$\hat{2} \times \hat{3} = \hat{0} \pmod{6}$$

$$\hat{6} = \hat{0} \pmod{6}$$

- Este nos indica que ambos son inversos y que el único dividido es 1.

$$\hat{2} - \hat{3} = 1 \pmod{5}$$

De esto podemos decir que

$$\mathbb{Z}_m \{ \underset{(a)}{\hat{a}} \text{ es una unidad si y solo si } \text{mcd}(a, m) = 1 \}_{\underset{(b)}{\hat{a}} \text{ es divisor de 0 si y solo si se encuentra } 1 < \text{mcd}(a, m) < m}$$

8.3. Maximo comun divisor

Si a, b son enteros, no ambos nulos, entonces d es divisor común de $a \wedge b$ si, y solo si, $d \mid a \wedge d \mid b$

- Da es el conjunto de divisores de a
- Db es el conjunto de divisores de b

Ejemplo:

$$D3 = \{+-3, +-1\} \quad D6 = \{+-1, +-2, +-3, +-6\}$$

El maximo común es, pues del conjunto $D3 \cup D6$, el número más grande entero positivo del conjunto. Por eso $D3 \cup D6 = \{3\}$

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$ con al menos uno de los dos diferentes de cero. El mcd de $a \wedge b$, es el entero positivo que satisface:

- a) $d \mid a \wedge d \mid b$

8.4. Algoritmo de Euclides

La aplicación sucesiva del algoritmo de división \Rightarrow movidmo entero positivo que cumpla con ambos números.

Sea $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = bq + r$ donde $b \geq 0 \wedge 0 \leq r < b$

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$$

Ejemplo:

$$\text{mcd}(8, 2)$$

$$S_{\text{mayor}} = S_{\text{menor}}$$

```
:: 4 es un número que encontramos tal que de un residuo
:: 8 = n * 2 + r
:: queda:
```

$$8 = 4 \cdot r_n + 0 \cdot r_{n+1}$$

$\text{mcd}(8, 2) = 2$
 $\text{mcd}(78, 32)$
 $:: 78 = N(32) + R$
 $78 = 2(32) + 14$
 $:: a = 0 \cdot r_0 + 1 \cdot r_1$

$:: Y \text{ va de nuevo}$
 $:: 32 = N(14) + R$
 $32 = 2 \cdot 14 + 4$
 $:: r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2$

$:: 14 = N(4) + R$
 $14 = 3(4) + 2$
 $:: r_1 = r_2 \cdot q_1 + r_3$

$:: \text{Tenemos que seguir hasta que } r_{n+1} = 0$

$:: 4 = N(2) + R$
 $4 = 2(2) + 0$

$:: \text{Como } r_{n+1} \text{ vale } 0, \text{ entonces el maximo comun divisor es } 2 \text{ pues } r_n = 2$
 $:: \text{mcd}(78, 32) = 2$
 $\text{mcd}(56, 42)$

$56 = 1 \cdot 42 + 14$
 $42 = 3 \cdot 14 + 0$

14
 $\text{mcd}(106, 46)$

$106 = 2 \cdot 46 + 14$
 $46 = 3 \cdot 14 + 4$
 $14 = 3 \cdot 4 + 2$
 $4 = 2 \cdot 2 + 0$

2

8.5. Euclides extendido

Partimos de lo que hicimos en el primer algoritmo, ahora vamos a ir hacia atrás.

$$14 = 78 - 32 \text{ times } 2$$

$$4 = 32 - 14 \text{ times } 2$$

$$2 = 14 - 4 \text{ times } 3$$

Ejemplo

$$\text{mcd}(-8, 22)$$

esta definido para una s y t que pertenecen a los enteros, o sea que se pueden negativos.

Para no tener problemas usaremos el menor (-8) como base.

$$-8 = 22$$

Ahora por que lo multiplico para que me de un residuo positivo
Empezamos siempre con -1

$$\begin{aligned}-8 &= -1 \text{ times } 22 + 14 \\ 22 &= 14 \text{ times } 1 + 8 \\ 14 &= 8 \text{ times } 1 + 6 \\ 8 &= 6 \text{ times } 1 + 2 \\ 6 &= 2 \text{ times } 3 + 0\end{aligned}$$

Hasta aqui tenemos todo. Tambien tenemos los residuos 14, 8, 6, 2, 0.
Aqui el mcd es 2 porque es el inmediato anterior a 0

$$\begin{aligned}14 &= -8 - (-1) 22 \quad (1) \\ 8 &= 22 - 14 \cdot 1 \\ 6 &= 14 - 8 \cdot 1 \\ 2 &= 8 - 6 \cdot 1\end{aligned}$$

No tomamos 0 porque no nos da nada
Y ahira podemos iniciar euclides extendido

$$\begin{aligned}2 &= 8 - 6 \\ 2 &= 8 - (14 - 8) \text{ -- Factorizacion mas sustitucion. Simplemente simplificamos y tomamos el 14 como sig.} \\ 2 &= 8 \text{ times } 2 - 14 \text{ times } 1 \\ 2 &= 8 \text{ times } 2 - (-8 - (-1) \text{ times } 22) \\ \text{-- en lugar de 14 ponemos el } -8 - (-1) \text{ por el valor (1)}\end{aligned}$$

Este problema necesita ser si o si

$$2 = \quad \quad \quad + (-1) 22$$

El residuo tiene que regresar un 2, y el numero inicial era -8, por eso:

$$2 = -8 N + (-1) 22$$

Ahora tiene que ser un numero negativo para que de positivo

$$2 = -8 * -3 + (-1) 22$$

Y asi tenemos a (-8), s (-3), t (-1) y b (22)

Por lo que sabemos que cominando estos numeros vamos a obtener el mcd

de $sa + tb = \text{mcd}(a, b)$

$$\begin{aligned}141 &= (1) 96 + 45 \\ 96 &= (2) 45 + 6 \\ 45 &= (7) 6 + 3 \\ 6 &= (2) 3 + 0 \\ \text{mcd}(141, 96) &: 3\end{aligned}$$

8.6. Introducción a la noción de numeros primos

• Para identificar un número primo:

- Teorema 1: Si $a, b, n \in \mathbb{N}$ y $a > 1, b > 1, n > 1$:
 - Si $n = ab$, entonces $a \leq \sqrt{n} \wedge b \leq \sqrt{n}$
 - Si n no tiene primos $\leq \sqrt{n}$ (divisores), entonces n es primo

Singularidad: Donde no existe la función. La transformada de Laplace y de fourier vienen de no se donde jaja.

- Ejemplo:

$$n = 2311$$

$$\sqrt{n} = 48.07$$

Obtenemos los primos hasta \sqrt{n}

Para cada uno vemos si es divisible entre alguno

Como no lo es pues es primo

- Función entero mayor: Representado $\lceil x \rceil$ o $\lceil x \rceil$: Las funciones de parte entera son funciones que toman parte real y devuelven parte entera, es decir $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$.

$$E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \rightarrow y = E(x)$$

$$E(x) = \lceil x \rceil$$

Puede que se *trunque* o se devuelva el siguiente, que quiere decir que puede ser una función techo o piso.

Por lo mismo se puede representar $\lceil x \rceil$ o $\lfloor x \rfloor$

- Si la función es **techo** se aplica a un número $x \in \mathbb{R}$ y devuelve un número $y \in \mathbb{Z}$ no inferior a x :

$\lceil x \rceil = n$ donde n es el inmediato entero

$$\text{Ejemplo: } \lceil -1.4 \rceil = -1$$

- Si la función es **suelo**, se aplica a un número $x \in \mathbb{R}$ y devuelve un número $y \in \mathbb{Z}$, devuelve el máximo entero y no superior a x .

$$\text{Ejemplo: } \lfloor -1.4 \rfloor = -2$$

- Teorema Legendra: Para poder deducir si el número es primo.

Sea P_1, P_2, \dots, P_s números primos $s \leq \sqrt{n}$, tal que $\pi(x)$ se expresa:

$$\pi(n) = n - 1 + \pi(\sqrt{n}) - \sum_{1 \leq i < s} \left\lfloor \frac{n}{P_i} \right\rfloor + \sum_{i < j} \left\lfloor \frac{n}{P_i P_j} \right\rfloor - \sum_{i < j < k} \left\lfloor \frac{n}{P_i P_j P_k} \right\rfloor + \dots + (-1)^s \left\lfloor \frac{n}{P_1 P_2 \dots P_s} \right\rfloor$$

Ejemplo, vamos a calcular los primeros 100:

$$n = 100$$

$$\sqrt{100} = 10$$

$$\pi(\sqrt{100}) = \{2, 3, 5, 7\} = 4$$

$$\begin{aligned} \pi(100) &= 100 - 1 + 4 - \left(\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor \right) \\ &\quad + \left(\left\lfloor \frac{100}{2 \times 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \times 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \times 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \times 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \times 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5 \times 7} \right\rfloor \right) \\ &\quad - \left(\left\lfloor \frac{100}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor \right) \\ &\quad + \left(\left\lfloor \frac{100}{2 \times 3 \times 5 \times 7} \right\rfloor \right) \\ &= 100 - 1 + 4 - (50 + 33 + 20 + 14) \\ &\quad + (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) \\ &\quad - (3 + 2 + 1 + 105) \quad + (0) \\ &= 103 - (117) + 45 - 6 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Actividad: Cuántos hay hasta el 40

9. Unidad 3

9.1. Metodos de conteo

Principio multiplicativo: Sea $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$ una sucesión de k eventos. Si para cada i , el evento E_i ocurre en n_i formas, entonces el número total de formas en que todos los eventos pueden tener lugar se efectúa como:

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

- Ejemplo: Un algoritmo tiene 3 procedimientos (A, B, C) y cada procedimiento tiene 4 ciclos (1, 2, 3, 4).
¿Cuántos ciclos tiene el algoritmo?

$$E_1 = \text{Procedimiento} \rightarrow n_1 = 3$$

$$E_2 = \text{ciclos} \rightarrow n_2 = 4$$

$$n_1 \times n_2 = 3 \times 4 = 12$$

- Ejemplo 2: Se desea conocer el número de placas que se pueden formar si éstas tienen dos dígitos (D) y tres letras mayúsculas (L), como se muestra en la siguiente figura: D D L L L

Podemos colocar dígitos del 0 al 9 Podemos poner letras de A-Z, es decir 27.

- Se pueden repetir:
 - El primer evento podemos tener 10 números
 - En el segundo evento también son 10 números
 - En el tercer, cuarto y quinto evento son 27

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times n_5 =$$

$$10 \times 10 \times 27 \times 27 \times 27 = 1,968,300$$

- No se pueden repetir
 - Primero tenemos 10 dígitos, después solo 9
 - Primero tenemos 27 letras, después 26, después 25

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times n_5 =$$

$$10 \times 9 \times 27 \times 26 \times 25 = 1,579,500$$

- Ejemplo 3: Cuántas representaciones diferentes serán posibles formar, si se desea que consten de Presidente, Secretario, Tesorero, Primer Vocal y Segundo Vocal, si esta representación puede ser formada de entre 25 miembros del sindicato de una pequeña empresa

$$25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6,375,600$$

10. Introducción a demostraciones

- Deductiva: Secuencia de pasos justificados
- Inductiva: Demostraciones recursivas