Daniel Alejandro Osornio López
0244685@up.edu.mx

15 / Nov / 2023

Actividad 4.1

Sea S_n una función propirsional cuyo conjunto de trabajo se mapea en $\mathbb{Z}$

1. Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \forall n \in \mathbb{Z}^+$

   - Caso base con $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1(1+1) &= \frac{1(1+1)(1+2)}{3} \\ 2 &= \frac{2 \cdot 3}{3} \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

   - Caso inductivo, donde suponemos que cumple para $n = k$, de forma que $S(k) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$:

Si $S(k) \Rightarrow S(k+1)$

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(k+1) &= S(k) + \varphi(k) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)((k+1)+1) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+1+1)(k+1+2)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que si cumple con la progresión

2. Demuestre que $0 + 3 + 8 + ... + (n^2 - 1) = \frac{n(2n+5)(n-1)}{6} \forall n \in \mathbb{Z}^+$

   - Caso base con $n = 1$:

$$\begin{aligned} (1^2 - 1) &= \frac{1(2+5)(1-1)}{6} \\ 0 &= \frac{1(2+5)(0)}{6} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

   - Caso inductivo, donde suponemos que cumple para $n = k$, de forma que $S(k) = \frac{k(2k+5)(k-1)}{6}$:

Si $S(k) \Rightarrow S(k+1)$

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \frac{(k+1)(2(k+1)+5)((k+1)-1)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k+7)(k)}{6} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S(k+1) &= S(k) + \varphi(k) \\
&= \frac{k(2k+5)(k-1)}{6} + \left((k+1)^2 - 1\right) \\
&= \frac{k(2k+5)(k-1) + 6\left((k+1)^2 - 1\right)}{6} \\
&= \frac{k(2k+5)(k-1) + 6(k^2+2k)}{6} \\
&= \frac{(2k+5)(k^2-k) + 6(k^2+2k)}{6} \\
&= \frac{2k^3 + 3k^2 - 5k + 6k^2 + 12k}{6} \\
&= \frac{2k^3 + 9k^2 + 7k}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k+7)(k)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2(k+1-1)+7)(k+1-1)}{6} \\
&= \frac{n(2(n-1)+7)(n-1)}{6} \\
&= \frac{n(2n-2+7)(n-1)}{6} \\
&= \frac{n(2n-5)(n-1)}{6}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, queda demostrado que si cumple con la progresión