
online
tu Universidad más cercana
miríada
INTRODUCCIÓN A LA
TEORÍA DE JUEGOS

1 JUEGOS ESTÁTICOS

1.1 La teoría de juegos

La Teoría de Juegos estudia situaciones de interdependencia; situaciones en las que tanto las acciones que realicen los individuos como los resultados que quepa esperar de ellas dependen de las acciones que otros puedan llevar a cabo.

Dado que esas situaciones de interdependencia están tan relacionadas con lo que los otros puedan hacer, darán lugar a que se adopten diferentes "estrategias", y que se pueda intentar determinar cuáles son las acciones que los distintos individuos, o "jugadores" llevarán a cabo en la búsqueda de los mejores resultados, o "pagos", posibles; la teoría de juegos estudia las situaciones de *interdependencia estratégica*.

Es importante señalar que las situaciones que analiza la teoría de juegos son diferentes de aquellas a las que los individuos puedan enfrentarse en los casos en los que el resultado no dependa de las acciones de otros, que son las que se analizarían en la *teoría de la decisión*.

En ese entorno, el estudio se centra en los posibles resultados que el individuo pueda obtener en función de sus acciones y de lo que ocurra por fuerzas sobre las que él no tiene ningún control o influencia; por ejemplo, si la cosecha que un agricultor pueda obtener depende de la lluvia que caiga en un determinado mes, tendrá que tomar sus decisiones en base a sus expectativas al respecto, pero el hecho de que llueva o no en ningún caso se verá determinado o influido por la decisión que tome el agricultor.

Sin embargo, sí que entrarían en el ámbito de estudio de la *teoría de juegos*, por ejemplo, las situaciones que se presentan entre empresas presentes en un mismo mercado, pues las decisiones que una de ellas tome acerca de la publicidad que vaya a realizar, de los precios que desee fijar, de las cantidades que vaya a producir, etc. influirán a las demás empresas, del mismo modo que las decisiones que éstas realicen repercutirán sobre la primera.

Existen muy diversos tipos diferentes de juegos. En sus orígenes, la literatura sobre el tema analizó los juegos de suma cero[1], en los que lo que uno gana ha de ser necesariamente a costa de que el otro lo pierda.

Posteriormente se estudiaron otros juegos, llamados "cooperativos", en los que los "jugadores" eligen y llevan a cabo sus acciones de manera coordinada.

Luego, el análisis se centró en los juegos "no cooperativos", que son aquellos en los que los "jugadores" adoptan sus decisiones de forma individual, pero su relación con las decisiones de otros incorporan elementos de cooperación y de rivalidad[2].

Finalmente, actualmente se presta gran atención a los juegos "evolutivos", en los que se supone que la información es imperfecta y un determinado juego se lleva a cabo repetidas veces.

1.2 Elementos de los que se compone un juego

Los elementos que necesariamente están presentes en cada planteamiento en el ámbito de la teoría de los juegos son: jugadores, acciones, estrategias, información, pagos y equilibrios.

Los "jugadores" son los individuos que han de tomar las decisiones, suponiendo siempre que buscan obtener los mejores pagos posibles, es decir, buscando maximizar su utilidad. Cuando existen circunstancias que pueden acaecer sobre las que los jugadores no tienen ningún poder de influencia o de determinación, se suele decir que quien juega es la "naturaleza" –como ocurría en las situaciones de decisión unipersonal descritas en el ejemplo del agricultor–. Si podemos asignar probabilidades a cada uno de los posibles "estados de la naturaleza" nos encontraremos en presencia de juegos de información completa. En caso contrario, lógicamente, tendremos información incompleta.

Las "acciones" son cada una de las posibles alternativas que un "jugador" puede adoptar en cada momento en los que le toca decidir. Lógicamente, optará por una u otra buscando maximizar su utilidad, y teniendo en cuenta tanto los posibles "estados de la naturaleza" que puedan ocurrir como las posibles acciones que el resto de jugadores puedan realizar.

Se pueden definir las "estrategias" como planes de acción completos, que indican qué acción tomaría un jugador en todas y cada una de las ocasiones en las que pudiera corresponderle actuar.

La "información" no es sino el grado de conocimiento de que se dispone en cada momento acerca de los valores de las distintas variables.

[1] Hurwicz (1953) los define como aquellos en los que la suma de las ganancias de los dos jugadores no depende de la manera en la que éstos jueguen, sino que dicha suma siempre es igual a un determinado número fijo.

[2] Véase, por ejemplo, por su claridad en el planteamiento del juego, entre los numerosísimos ejemplos existentes en la literatura, el propuesto por Schelling, (1961).

Los "pagos" o "recompensas" representan la utilidad que reciben los jugadores al finalizar el juego, cuya valoración no ha de ser necesariamente llevada a cabo en términos monetarios.

Finalmente, el "equilibrio" es el conjunto de estrategias que los jugadores llevan a cabo al participar el juego.

1.3 Representación de los juegos

Para facilitar su comprensión e interpretación, existen dos posibles representaciones de los juegos: la matricial, también conocida como normal, y la forma extensiva, o de árbol.

La forma normal, o matricial, se suele utilizar –aunque no de manera exclusiva– cuando únicamente hay dos jugadores, de tal forma que se puedan poner sus posibles estrategias en filas –las del jugador nº 1– y en columnas –las del jugador nº 2–, como se puede apreciar en el ejemplo de la figura 1.

Los pagos se muestran en el interior de las celdas correspondientes, siendo el pago del jugador nº 1 el que se representa más cerca de él –antes de la coma–, y el del jugador nº 2 el que se sitúa tras la coma.

Figura 1. Representación en forma matricial de un juego.

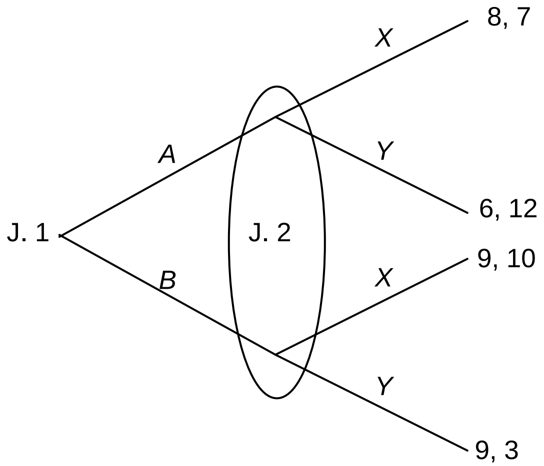
		Jugador nº 2	
		X	*Y*
Jugador nº 1	*A*	8, 7	6, 12
	B	9, 10	9, 3

Así, las posibles estrategias entre las que puede elegir el jugador nº 1 en la figura 1 son *A* y *B*, mientras que el jugador nº 2 puede optar entre *X* e *Y*.

Si el jugador nº 1 elige *A*, y el jugador nº 2 opta por *X*, los pagos que uno y otro recibirán son 8 y 7, respectivamente. La lectura de los pagos incluidos en cada una de las otras tres casillas es análoga a la expuesta.

La representación extensiva, o de árbol, muestra la misma información que la forma matricial, pero ordenada de distinta manera, más gráfica, como vemos a continuación en la figura 2.

Figura 2. Representación extensiva de un juego.



Como se puede apreciar, si el jugador nº 1 emplea la estrategia *A* y el jugador nº 2 utiliza la estrategia *X*, los pagos que ambos jugadores obtienen son 8 y 7 respectivamente, y así sucesivamente para las cuatro posibilidades existentes, que obviamente son las mismas que tenía este mismo juego cuando lo hemos representado de forma matricial.

Para evitar que se interpretara que primero elige el jugador nº 1 y después lo hace el jugador nº 2, –puesto que leyendo el gráfico de izquierda a derecha pudiera parecer que es así–, hemos representado esa elipse –que recibe el nombre de "conjunto de información"– que une los dos puntos en los cuales al jugador nº 2 pudiera tener que elegir. De esta forma, queremos indicar que el jugador nº 2 realiza su elección –única– desconociendo la del jugador nº 1 –lo que podría ocurrir si la elección es simultánea o si el jugador nº 2 toma su decisión con posterioridad a la del jugador nº 1, pero sin contar con información al respecto–.

1.4 Resolución de los juegos: Eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas

Existen diferentes formas de encontrar soluciones de equilibrio en los juegos, siendo las más conocidas la “eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas” y el “Equilibrio de Nash”, especialmente en los juegos estáticos. Los juegos dinámicos, se suelen resolver por inducción hacia atrás, encontrándose los Equilibrios de Nash Perfectos en Subjuegos (E.N.P.S.), como veremos más adelante.

La eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas consiste, como su propio nombre indica, en ir eliminando una tras otra las estrategias que cualquiera de los jugadores nunca llevaría a cabo, debido a que siguiendo otra estrategia podría obtener *siempre* un pago mayor. Al realizar la eliminación de una estrategia, los pagos que esta contenga no condicionarán las sucesivas eliminaciones que se vayan efectuando posteriormente.

Lo veremos mucho más claramente con el ejemplo de la figura 3, en el que las posibles acciones entre las que puede elegir el jugador nº 1 son *A* y *B*, mientras que el jugador nº 2 puede optar entre *X*, *Y*, y *Z*:

Figura 3. Juego en forma estática.

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
Jugador nº 1	*A*	8, 7	6, 12	10, 11
	B	9, 10	9, 3	0, 2

Analizando detenidamente la matriz de pagos, podemos apreciar que el jugador nº 2 nunca debería optar por *Z*. En efecto, los pagos que recibiría en función de lo que eligiese el jugador nº 1 (11 si el jugador nº 1 opta por *A*, y 2 si el jugador nº 1 opta por *B*), son siempre menores que los que podría percibir si eligiese la alternativa *Y* (12 > 11 y 3 > 2). Es decir, haga lo que haga el otro jugador, siempre obtendrá una mejor remuneración si él elige *Y* a si elige *Z*. Diremos en ese caso que la estrategia *Z* está *estrictamente dominada* por *X*, por lo que ningún decisor racional la utilizaría.

Eliminaremos, por tanto, a partir de este momento, esa estrategia, para poder seguir analizando el juego resultante, como vemos en la figura 4.

Figura 4. Juego en el que se ha procedido a la eliminación de una estrategia estrictamente dominada.

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
Jugador nº 1	*A*	8, 7	6, 12	10, 11
	B	9, 10	9, 3	0, 2

Entre las estrategias que le quedan al jugador nº 2 (*X* e *Y*), ninguna domina a la otra (pues 7 < 12 y 10 > 3).

Ahora, sin embargo, es el jugador nº 1 quien tiene una estrategia dominada: la estrategia *A*. En efecto, los pagos que percibe con ella son siempre menores que los que podría obtener si optase por la estrategia *B*, haga lo que haga el jugador nº 2 (9 > 8 y 9 > 6).

Es importante darse cuenta que el jugador nº 1 no podría eliminar la estrategia *A* –es decir, ésta no estaría estrictamente dominada por *B*–, si previamente no hubiésemos eliminado la estrategia *Z* para el jugador nº 2. El razonamiento es el siguiente: dado que el jugador nº 2 nunca utilizará la estrategia *Z* (pues sería irracional que lo hiciera) dejamos de considerarla, y por ello el jugador nº 1 nunca utilizará la estrategia *A*, pues siempre obtendría mejor pago utilizando la estrategia *B*.

Así, con el juego inicial, para el jugador nº 1, teníamos que 9 > 8 y 9 > 6 como ahora, pero 0 < 10. Es decir, que en el caso de que el jugador nº 2 optase por *Z*, el jugador nº 1 obtendría una mayor remuneración con la estrategia *A* que con la *B*, por lo que no podíamos decir que la primera estuviese estrictamente dominada por ésta. Sin embargo, dado que el jugador nº 1 sabe que el jugador nº 2 nunca utilizaría la estrategia *Z*, al estar ésta dominada estrictamente por *Y*, el juego se ha reducido y ahora sí que *A* está estrictamente dominada por *B*, por lo que procederemos a eliminarla en el juego de la figura 5.

Figura 5. Juego en el que se han eliminado dos estrategias estrictamente dominadas

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
Jugador nº 1	*A*	~~8, 7~~	~~6, 12~~	~~10, 11~~
	B	9, 10	9, 3	0, 2

Ya se han reducido notablemente las posibilidades de elección para ambos jugadores –de hecho, para el jugador nº 1 sólo queda la estrategia *B*, mientras que al jugador nº 2 aún le quedan las estrategias *X* e *Y*–. Dado que el jugador nº 2 sabe que el jugador nº 1 no usará la estrategia *A*, pues el jugador nº 1 sabe que el jugador nº 2 nunca utilizará *Z*, la decisión final la tomará el jugador nº 2, entre *X* e *Y*. Obviamente, dado que 10 > 3, optará por la estrategia *X*. Lo vemos en la figura 6.

Figura 6. Juego resuelto a través de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
Jugador nº 1	*A*	~~8, 7~~	~~6, 12~~	~~10, 11~~
	B	9, 10	9, 3	0, 2

Como podemos observar, el equilibrio del juego se produce cuando el jugador nº 1 opta por *B*, y el jugador nº 2 elige *X*, obteniendo, respectivamente, unos pagos de 9 y 10. Ambos pagos son inferiores a los que podrían haber obtenido si el equilibrio hubiese sido (*A*, *Z*) –conjunto de estrategias que hemos sombreado más suavemente en la matriz de pagos–, dando lugar por tanto a un resultado que es ineficiente en el sentido de Pareto (puesto que 9 < 10 y 10 < 11); ambos podrían mejorar. Volveremos a incidir sobre este aspecto más adelante, cuando expliquemos el concepto de Equilibrio de Nash.

Ejercicio de autocomprobación 1

Resuelva, mediante la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, el siguiente juego:

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
Jugador nº 1	*A*	1,0	0,1	2, -1
	B	0,0	2,4	4,3
	C	2,1	1,0	3,2

Ejercicio de autocomprobación 2

Calcule, mediante la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, el equilibrio del siguiente juego:

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
Jugador nº 1	*A*	2,2	3,2	2,3
	B	2,2	2,6	6,1
	C	3,4	4,1	5,2

1.5 Resolución de los juegos: Eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas por una estrategia mixta.

En ocasiones, en el proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, podemos llegar a una situación en la que no encontremos ninguna posibilidad de eliminar ninguna estrategia. Podemos optar en ese caso por ver si hay estrategias que estén dominadas por una estrategia mixta. Una **estrategia mixta** es una combinación lineal de varias estrategias. Consideramos entonces que los jugadores no están obligados a elegir una única estrategia, sino que pueden emplear una u otra conforme a una determinada probabilidad. De nuevo con un ejemplo, como el de la figura 7, podemos ver más claramente cómo se llevaría a cabo el proceso de eliminación de estrategias estrictamente dominadas cuando tenemos en consideración la posibilidad de emplear estrategias mixtas –frente a las estrategias puras que hemos utilizado hasta ahora–.

Figura 7. Juego que resolveremos mediante la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas utilizando estrategias mixtas.

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
Jugador nº 1	*A*	8, 11	6, 14	10, 12
	B	9, 10	9, 3	0, 6

En esta matriz, podemos apreciar que no existe ninguna estrategia que esté estrictamente dominada –en estrategias puras– por ninguna otra, ni para el jugador nº 1 ni para el jugador nº 2; es decir, no hay ninguna estrategia en la que el jugador perciba siempre un pago menor que utilizando otra. Sin embargo, en esta ocasión existe una estrategia que sí está dominada por una estrategia mixta. Se trata de *Z*. En efecto, imaginemos que el jugador nº 2 utilizase con probabilidad 0,5 la estrategia *X*, y con probabilidad 0,5 la estrategia *Y*[3]. El pago esperado que obtendría sería, si el jugador nº 1 eligiese *A*, de $\frac{1}{2}\cdot 11+\frac{1}{2}\cdot 14=12{,}5$. Igualmente, si el jugador nº 1 optase por *B*, el pago esperado del jugador nº 2 sería: $\frac{1}{2}\cdot 10+\frac{1}{2}\cdot 3=6{,}5$.

Como se puede apreciar, ambos pagos esperados son mayores que los que obtendría empleando la estrategia *Z*, pues 12,5 > 12 y 6,5 > 6. Podríamos, por tanto, prescindir de la estrategia *Z* en la figura 8, siguiendo el proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.

[3] Aunque en este ejemplo hemos elegido por comodidad una distribución por igual en la probabilidad de que el jugador nº 2 opte por *X* ó por *Y*, las posibilidades existentes son infinitas.

Figura 8. Juego en el que se ha eliminado una estrategia dominada por una estrategia mixta.

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	~~*Z*~~
Jugador nº 1	*A*	8, 11	6, 14	~~10, 12~~
	B	9, 10	9, 3	~~0, 6~~

A partir de este momento, se abre la posibilidad de continuar la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas fijándonos simplemente en las estrategias puras. Así, para el jugador nº 1, la estrategia *A* está estrictamente dominada por *B*, pues sus pagos son siempre mejores en ésta última: 9 > 8 y 9 > 6, como vemos en la figura 9.

Figura 9. Juego en el que se han eliminado dos estrategias dominadas.

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	~~*Z*~~
Jugador nº 1	~~*A*~~	~~8, 11~~	~~6, 14~~	~~10, 12~~
	B	9, 10	9, 3	~~0, 6~~

Finalmente, dado que el jugador nº 1 optará por *B*, es el jugador nº 2 quien tiene que elegir entre la estrategia *X* y la estrategia *Y*, y lógicamente optará por *X* dado que con ella obtendrá un mejor pago (10 > 3). Lo vemos en la figura 10.

Figura 10. Juego resuelto a través de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas –incluso por estrategias mixtas–.

		Jugador nº 2		
		X	~~*Y*~~	~~*Z*~~
Jugador nº 1	~~*A*~~	~~8, 11~~	~~6, 14~~	~~10, 12~~
	B	9, 10	~~9, 3~~	~~0, 6~~

Como se puede apreciar, el equilibrio del juego se produce cuando el jugador nº 1 opta por *B*, y el jugador nº 2 elige *X*, obteniendo, respectivamente, unos pagos de 9 y 10 –como en el caso anterior–. Ambos pagos son inferiores a los que podrían haber obtenido si el equilibrio hubiese sido (*A*, *Z*), dando lugar de nuevo a un resultado ineficiente en el sentido de Pareto (puesto que 9 < 10 y 10 < 12); ambos podrían mejorar.

No siempre, lógicamente, el resultado será Pareto-inferior como en los dos ejemplos propuestos, aunque con ellos pretendemos reflejar la existencia de esta posibilidad.

Ejercicio de autocomprobación 3

Calcule, mediante la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas –utilizando si es necesario la eliminación de una estrategia por parte de una estrategia mixta–, el equilibrio del siguiente juego:

Jugador nº 1		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
	A	4,5	4,2	5,3
	B	2,4	3,7	6,5
	C	2,1	0,2	1,3

Un caso extremo de dominación es aquel en el que una estrategia de cada uno de los jugadores constituye para él la mejor respuesta ante cualquiera de las elecciones que el otro pueda realizar; en ese caso nos encontraríamos ante un equilibrio en *estrategias dominantes*.

En el "Dilema del Prisionero", por ejemplo, que trataremos más adelante detenidamente, existe un equilibrio en estrategias dominantes. La matriz de pagos de la figura 11 muestra también un equilibrio en estrategias dominantes.

Figura 11. Juego con un equilibrio en estrategias dominantes.

Jugador nº 1		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
	A	8, 11	6, 14	10, 12
	B	9, 10	9, 13	11, 9

En este caso, el jugador nº 1 siempre preferirá utilizar la estrategia *B*, puesto que, independientemente de lo que elija el jugador nº 2, obtendrá con ella mejores resultados que con la estrategia *A*. Igualmente, para el jugador nº 2 la estrategia dominante es *Y*, pues con ella obtiene siempre un mejor pago que utilizando cualquiera de las otras dos.

El equilibrio, por tanto, se producirá en (*B*, *Y*), con unos pagos respectivos de 9 y 13, como se puede apreciar en la figura 12.

Figura 12. Solución de un juego con un equilibrio en estrategias dominantes.

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
Jugador nº 1	*A*	8, 11	6, 14	10, 12
	B	9, 10	9, 13	11, 9

Aunque con la utilización de las estrategias mixtas, como vimos anteriormente, se amplía la resolución de los juegos mediante el procedimiento de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, no todos los juegos se pueden resolver utilizando esta metodología.

Lo veremos con otro ejemplo numérico en la figura 13, en el que solamente hemos variado un pago del jugador nº 1 –el que percibe cuando la combinación de estrategias es (*B*, *Z*)– y otro del jugador nº 2 –el que recibe cuando la combinación de estrategias es (*B*, *Y*)–.

Figura 13. Juego irresoluble a través de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.

		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
Jugador nº 1	*A*	8, 11	6, 14	10, 12
	B	9, 10	9, 3	0, 9

En este caso, por más que lo intentásemos, no podríamos encontrar una combinación de estrategias que dominase estrictamente a ninguna otra[4], para ninguno de los dos jugadores.

[4] Con unos sencillos cálculos se puede comprobar que, para que la estrategia *Z* estuviese dominada por una estrategia mixta de *X* e *Y*, la probabilidad de utilizar la estrategia *X* debería ser, si el jugador nº 1 utiliza la estrategia *A*, inferior a 2/3, mientras que si emplea la estrategia *B*, esa probabilidad debería ser superior a 6/7. Lógicamente, no podemos encontrar un número que cumpla simultáneamente ser menor que 2/3 y mayor que 6/7.

1.6 Resolución de los juegos: el Equilibrio de Nash

Otra forma de resolver los juegos es buscar el o los Equilibrios de Nash existentes en el juego. Un **Equilibrio de Nash** es una *combinación de estrategias en la que la opción elegida por cada jugador es óptima dada la opción elegida por los demás*. Por tanto, si se encuentran en un Equilibrio de Nash, ninguno de los jugadores tendrá incentivos individuales para variar de estrategia.

Es importante señalar que un Equilibrio de Nash no necesariamente ha de ser un equilibrio en estrategias dominantes –donde la opción elegida por un jugador es óptima ante *cualquier* estrategia de los demás–. Lo contrario, no obstante, sí que es cierto: un equilibrio en estrategias dominantes obligatoriamente ha de ser un Equilibrio de Nash –y, además, será el único Equilibrio de Nash posible del juego–.

Veamos el ejemplo de la figura 14.

Figura 14. Juego del que calcularemos el Equilibrio de Nash.

		Jugador nº 2	
		X	*Y*
Jugador nº 1	*A*	9, 11	6, 14
	B	9, 10	10, 3

En este caso, si buscáramos resolver este juego mediante la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, veríamos que no podríamos desechar ninguna de ellas –aunque se puede apreciar que la estrategia *B* domina débilmente a la estrategia *A* para el jugador nº 1–.

Sin embargo, según la metodología del Equilibrio de Nash sí que vamos a poder encontrar un equilibrio –como mínimo–.

Así, podemos apreciar que (*B*, *X*) es un Equilibrio de Nash. En efecto, si se encuentran ambos jugadores en esa combinación de estrategias, ninguno tendrá incentivos individualmente para variar la suya (el jugador nº 2 saldría perdiendo, mientras que el jugador nº 1 no saldría ganando).

Una forma muy habitual de encontrar los Equilibrios de Nash a partir de la representación matricial de un juego consiste en subrayar los pagos correspondientes a la estrategia elegida por cada jugador en función de lo que pudiera elegir el otro.

En el gráfico anterior, si el jugador nº 1 elige *A*, la mejor respuesta para el jugador nº 2 es optar por *Y*, obteniendo un pago de 14. Si el jugador nº 1 elige *B*, lo mejor para el jugador nº 2 es optar por *X*, pues 10 > 3. Subrayamos a continuación ambos pagos en la figura 15.

Figura 15. Juego con los pagos subrayados del jugador nº 2 que son óptimos en función de las distintas posibles estrategias del jugador nº 1.

		Jugador nº 2	
		X	*Y*
Jugador nº 1	*A*	9, 11	6, 14
	B	9, 10	10, 3

Procedemos análogamente para el otro jugador. Si el jugador nº 2 elige *X*, el jugador nº 1 es indiferente entre *A* y *B*, pues en ambos casos obtiene el mismo pago (9), por lo que subrayamos ambos. Por último, si el jugador nº 2 elige *Y*, el jugador nº 1 optaría por *B* pues 10 > 6.

Figura 16. Equilibrio de Nash del juego.

		Jugador nº 2	
		X	*Y*
Jugador nº 1	*A*	9, 11	6, 14
	B	9, 10	10, 3

Aquella casilla en la que ambos pagos estén subrayados, constituye un Equilibrio de Nash –en este caso, en la figura 16, es (*B*, *X*)–. En efecto, en esos casos la estrategia elegida por cada jugador es óptima dada la del otro, como proponía la definición del Equilibrio de Nash.

Aunque en el caso propuesto sólo aparece un Equilibrio de Nash, esta no es la única posibilidad. El caso siguiente, de la figura 17, por ejemplo, muestra una matriz de pagos en la que existen dos Equilibrios de Nash –en estrategias puras–:

Figura 17. Juego con varios Equilibrios de Nash.

		Jugador nº 2	
		X	*Y*
Jugador nº 1	*A*	9, 9	0, 8
	B	8, 0	7, 7

En este ejemplo, como se puede apreciar, existen dos Equilibrios de Nash en estrategias puras, pero ambos jugadores no son indiferentes acerca de en cuál de ellos desearían encontrarse; obviamente, (*A*, *X*) es superior en el sentido de Pareto a (*B*, *Y*) y ambos individuos desearían situarse en el primero, pero nada nos asegura que esto vaya a suceder así en ausencia de comunicación; si se encontraran inicialmente en (*B*, *Y*), ninguno de ellos tendría incentivos individualmente para cambiar de estrategia.

En efecto, si los individuos pudieran comunicarse entre sí, se podrían de acuerdo en seleccionar (*A*, *X*), pero esto no está tan claro si los jugadores no pueden comunicarse –es decir, si se encontraran en un juego no cooperativo en lugar de estar en un juego cooperativo[5]–.

En el apartado anterior vimos un método de búsqueda de equilibrios de los juegos que era la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas. Un Equilibrio de Nash necesariamente habrá de sobrevivir a la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. Si no hubiésemos tenido en cuenta ese requisito restrictivo –que las estrategias estén *estrictamente* dominadas–, podría darse el caso de que en ese proceso se hubiese eliminado algún Equilibrio de Nash, como se puede apreciar en la matriz de pagos siguiente de la figura 18, en la que existen dos Equilibrios de Nash, que son (*A*, *Y*) y (*B*, *X*).

Figura 18. Juego con dos Equilibrios de Nash, uno de los cuales sería eliminado mediante la eliminación iterativa de estrategias dominadas (no estrictamente).

		Jugador nº 2	
		X	*Y*
Jugador nº 1	*A*	9, 11	16, 14
	B	9, 10	10, 3

Si realizásemos el proceso de eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas –es decir, sin exigir que las estrategias eliminadas estén estrictamente dominadas–, deberíamos, en primer lugar, eliminar la estrategia *B* para el jugador nº 1, pues con ella nunca obtiene un pago mejor que con la otra, y en algún caso su pago es inferior, dado que 9 = 9 y 10 < 16.

A continuación, el jugador nº 2 debería elegir entre la estrategia *X* e *Y*, quedándose lógicamente con esta última, pues 14 > 11, como se aprecia en la matriz de pagos de la figura 19.

[5] Nash (1953) define los juegos cooperativos como aquellos en los que los intereses de los implicados no son ni completamente opuestos ni totalmente coincidentes. Se supone que los individuos implicados son capaces de discutir la situación y acordar un plan de acción conjunto racional, un acuerdo que se puede hacer cumplir. Por el contrario, afirma que un juego es no cooperativo si les resulta imposible comunicarse a los jugadores, o colaborar de alguna manera.

Figura 19. Juego con dos Equilibrios de Nash, uno de los cuales ha sido eliminado mediante la eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas.

Jugador nº 1		Jugador nº 2	
		X	*Y*
	A	9, 11	16, 14
	B	~~9, 10~~	~~10, 3~~

De esta forma, como se puede apreciar en la figura 19, el Equilibrio de Nash (*B*, *X*) no ha sobrevivido a la eliminación iterativa de estrategias *débilmente* dominadas.

Ejercicio de autocomprobación 4

Calcule el o los Equilibrios de Nash –en estrategias puras– de los siguientes juegos:

(*a*)

Jugador nº 1		Jugador nº 2		
		X	*Y*	*Z*
	A	4,5	4,2	5,3
	B	2,4	3,1	6,5
	C	2,1	0,2	1,3

(*b*)

Jugador nº 1		Jugador nº 2	
		X	*Y*
	A	1,2	2,0
	B	3,4	0,3

(*c*)

Jugador nº 1		Jugador nº 2	
		X	*Y*
	A	0,0	1,1
	B	2,3	10, 3

Ejercicio de autocomprobación 5

Considere que en un pueblecito de la sierra hay una casa rural que tiene bastante éxito entre los urbanitas que se alojan en ella, principalmente, durante los fines de semana. Se estima que sus beneficios anuales netos rondan los 30.000 euros.

Su propietario se está planteando llevar a cabo una ampliación, que le costaría 20.000 euros, pero que le permitiría tener unos ingresos adicionales de 40.000 euros.

A la vez, un vecino está planteándose transformar su horno de pan, que está situado en un entorno natural envidiable y que le reporta unos beneficios anuales netos de 25.000 euros, en una casa rural. En ese caso, competiría con su vecino para satisfacer la demanda existente, y estima que sus beneficios serían de 35.000 euros si su vecino no amplía la casa rural y de sólo 15.000 si la amplía. Por su parte, el que ya está instalado vería reducido su beneficio a 15.000 ó 20.000 euros, en función de que amplíe o no su negocio, respectivamente.

Represente esta situación como un juego en forma normal, indique si alguno de los dos vecinos tiene alguna estrategia estrictamente dominada y calcule los Equilibrios de Nash en estrategias puras.

Ejercicio de autocomprobación 6

Un profesor de Teoría de la Decisión y de los Juegos ofrece a dos alumnos que han asistido siempre a clase y que han entregado puntualmente todos los ejercicios que les han sido encomendados para resolver en su casa, el siguiente juego:

“Tengo tres puntos para daros, para subiros la nota. En ningún caso si hacéis mal el ejercicio vuestra nota bajará; simplemente se quedará como está. Cada uno de vosotros puede pedir –de forma simultánea y sin comunicaros entre vosotros– cuántos puntos quiere: 0, 1, 2 ó 3. Si la suma de los puntos que pedís es mayor que 3, no os daré ningún punto. En caso contrario, os subo la nota los puntos que cada uno me haya pedido”.

Represente esta situación como un juego en forma normal, y calcule los Equilibrios de Nash en estrategias puras del juego.

Ejercicio de autocomprobación 7

El mismo profesor de Teoría de la Decisión y de los Juegos del ejercicio anterior decide seguir jugando con sus alumnos, y ahora ofrece a otros dos alumnos que también han asistido siempre a clase y que han entregado puntualmente todos los ejercicios que les han sido encomendados para resolver en su casa, el siguiente juego:

"Os doy ahora mismo, a cada uno de vosotros, dos vales de medio punto. Podéis quedároslos, y con ello incrementar vuestra nota, o dármelos a mí. Por cada vale de medio punto que me dé uno de vosotros, le subo al otro la nota un punto, incremento que hay que sumar a los vales que se haya quedado".

(*a*) Represente esta situación como un juego en forma normal y calcule los Equilibrios de Nash en estrategias puras del juego.

(*b*) Indique si alguno de ellos tiene una estrategia dominante.

(*c*) ¿Es el resultado un óptimo paretiano? Indique, si las hay, qué combinaciones de estrategias supondrían una mejora paretiana respecto al Equilibrio de Nash encontrado.

(*d*) Indique qué combinaciones de pagos del juego representan óptimos en el sentido de Pareto.