Versuch 22

Kreisel

Wir untersuchen die Bewegung eines symmetrischen Kreisels.

22.1 Physikalische Grundlagen

Tipler, Mosca, Physik
http://www.redi-bw.de/start/unifr/EBooks-springer/10.1007/978-3-642-54166-7
8.9 „Der Kreisel“

22.2 Versuchsaufbau

Weitere Infos online:
https://omnibus.uni-freiburg.de/~phypra/ap/22

22.3 Experimente

Setzen Sie den Kreisel vorsichtig in die Halterung.

Fixieren Sie seine Position x auf der Führungsstange mithilfe der Klemmschraube.

Versetzen Sie den Kreisel in eine Rotation um seine Figurenachse mit Kreisfrequenz ω.

1. Untersuchen Sie, wie die Präzessionsfrequenz ω_P von x abhängt.

Auftragung ω_P gegen x

2. Untersuchen Sie, wie die Präzessionsfrequenz ω_P von ω abhängt.

Auftragung ω_P gegen ω

3. Überprüfen Sie die erwartete Abhängigkeit für $\omega_P = \omega_P(r_S, m, g, I, \omega)$.

Auftragung x gegen $\omega\omega_P$ (oder ähnlich)

Bestimmung der Position x_S, für die $r_S = 0$ wird (Unterstützung im Schwerpunkt)

Bestimmung des Verhältnisses I/m (Trägheitsmoment durch Masse)

Abbildung 8.75 Beim kräftefreien, symmetrischen Kreisel fallen die Figurenachse, die Drehimpulsachse und die Rotationsachse zusammen.

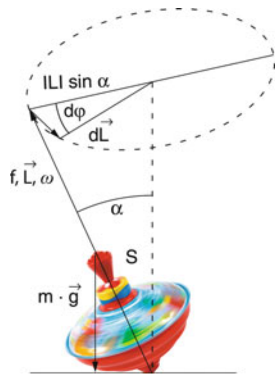


Abbildung 8.76 Präzession der Figuren- und Drehimpulsachse um die Vertikale, wenn am Kreisel äussere Kräfte angreifen und ein Drehmoment induzieren. Der Kreisel selbst dreht sich dabei um seine Rotationsachse, die ebenfalls mit der Figurenachse zusammenfällt.

8.9 Der Kreisel

Ein Kreisel im physikalischen Sinn ist ein Körper, der sich um eine freie Achse dreht und dessen Achse in einem Punkt unterstützt wird. Wir betrachten hier nur Kreisel, die bezüglich ihrer Drehachse symmetrisch sind, sogenannte **symmetrische Kreisel**. Ist der Massenmittelpunkt des Kreisels der Punkt, in dem die Drehachse unterstützt wird, spricht man von einem **kräftefreien Kreisel**, sonst von einem **schweren Kreisel**.

Um Kreiselbewegungen zu beschreiben, werden wir die drei folgenden Achsen verwenden: die Figuren- oder auch Symmetrieachse, deren Vektor $\boldsymbol{f}$ vom Unterstützungspunkt weg parallel zur Symmetrieachse des Kreisels verläuft, die Achse des Drehimpulses, die parallel zum Drehimpulsvektor $\boldsymbol{L}$ liegt, und die Rotationsachse, die parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ orientiert ist. Je nach Lage dieser Achsen relativ zueinander ergeben sich verschiedene Bewegungen der Symmetrieachse, die wir nun betrachten wollen.

Beim kräftefreien, symmetrischen Kreisel, der um seine Figurenachse rotiert, wirken keine äußeren Kräfte, sodass der Drehimpuls erhalten bleibt. Außerdem fallen die Figurenachse, die Rotationsachse und die Drehimpulsachse zusammen, wie in Abbildung 8.75 gezeigt.

Dreht der symmetrische Kreisel aus Abbildung 8.75 sich weiterhin um seine Figurenachse und wirkt gleichzeitig eine äußere Kraft auf ihn, z. B. die Gravitation (da er nicht im Schwerpunkt unterstützt wird), so ist er nicht mehr kräftefrei. Die in Abbildung 8.76 gezeigte äußere Gravitationskraft auf den Kreisel verursacht ein Drehmoment, sodass der Drehimpuls sich gemäß

$$\boldsymbol{M}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{oder} \quad \Delta\boldsymbol{L} \approx \boldsymbol{M}_{\text{ext}}\,\Delta t) \tag{8.56}$$

ändern muss. Zudem gilt

$$\boldsymbol{M}_{\text{ext}} = m\,\boldsymbol{r}_{\text{S}} \times \boldsymbol{a}_{\text{G}}$$

(mit der Gravitationsbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{\text{G}}$) und

$$\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}\,.$$

Dabei ist m die Masse des Kreisels (alle bewegten Teile), $\boldsymbol{r}_{\text{S}}$ ist der Ortsvektor des Massenmittelpunkts bezüglich des Unterstützungspunkts O, und I und $\boldsymbol{\omega}$ sind das Trägheitsmoment bzw. die Winkelgeschwindigkeit bezüglich der körpereigenen Drehachse.

Bildet die Figurenachse mit der Vertikalen den Winkel α, dann ist der Betrag des angreifenden Drehmoments $|\boldsymbol{M}_{\text{ext}}| = m\,r_{\text{S}}\,a_{\text{G}}\sin\alpha$, und seine Richtung kann mit der Drei-Finger-Regel für Vektorprodukte ermittelt werden. Sie zeigt aus der Bildebene heraus und steht senkrecht auf $\boldsymbol{r}_{\text{S}}$ und $m\,\boldsymbol{a}_{\text{G}}$ und dadurch auch senkrecht auf dem Drehimpulsvektor, der mit der Figurenachse und der Rotationsachse zusammenfällt. Die dadurch induzierte Änderung des Drehimpulses $\Delta\boldsymbol{L}$ zeigt aufgrund von Gleichung 8.56 in die Richtung von $\boldsymbol{M}_{\text{ext}}$ und somit ebenfalls aus der Bildebene hinaus. Der Betrag der Drehimpulsänderung lässt sich aus Abbildung 8.76 auch als $|\mathrm{d}\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{L}| \sin\alpha \, \mathrm{d}\varphi$ schreiben. Da $\boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$ senkrecht auf $\boldsymbol{L}$ steht, kann sich nur die Richtung des Drehimpulses, nicht aber sein Betrag durch das Drehmoment ändern. Daraus folgt, dass die Figurenachse und damit auch die Drehimpulsrichtung sich unter der Einwirkung der Gravitationskraft auf einer Kreisbahn um die Vertikale drehen. Diese „horizontale Ausweichbewegung" der Figurenachse als Reaktion auf eine vertikale Kraft bezeichnet man auch als **Präzession**.

Während der Kreisel um seine Figurenachse rotiert, bewegt sich diese mit der Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_P um die Vertikale. Der Betrag von ω_P lässt sich mithilfe von Gleichung 8.56 berechnen:

$$M_{\mathrm{ext}} = r_{\mathrm{S}} \, m \, a_{\mathrm{G}} \sin\alpha = L \sin\alpha \, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t},$$

woraus folgt:

$$\omega_P = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{r_{\mathrm{S}} \, m \, a_{\mathrm{G}}}{L} = \frac{r_{\mathrm{S}} \, m \, a_{\mathrm{G}}}{I \, \omega}. \qquad (8.57)$$

PRÄZESSIONSWINKELGESCHWINDIGKEIT ω_P

Gleichung 8.57 zeigt, dass die Präzession unabhängig vom Winkel α ist und nur vom Drehmoment und dem Drehimpuls abhängt. Für große Trägheitsmomente oder hohe Winkelgeschwindigkeiten des Kreisels ist ω_P klein, d. h., der Drehimpulsvektor dreht sich sehr langsam um die Vertikale.

Bisher waren Drehimpuls, Symmetrieachse und Winkelgeschwindigkeit stets parallele Vektoren. Betrachten wir nun den Fall, dass die Rotations- und die Drehimpulsachse nicht mehr parallel zueinander stehen. Diese Konfiguration kann man erreichen, indem man dem Kreisel aus Abbildung 8.75 einen seitlichen Stoß versetzt, sodass die Figurenachse aus der Vertikalen kippt. Durch den Stoß wird ein zusätzlicher Drehimpuls in der Ebene senkrecht zur Vertikalen auf den Kreisel übertragen. Der neue Gesamtdrehimpuls setzt sich nun aus den beiden Komponenten

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_z + \boldsymbol{L}_{xy} = I_z \, \boldsymbol{\omega}_z + I_{xy} \, \boldsymbol{\omega}_{xy} \qquad (8.58)$$

zusammen, wobei $\boldsymbol{L}_z$ der Drehimpuls vor dem Stoß war, der in z-Richtung zeigte, und $\boldsymbol{L}_{xy}$ der durch den Stoß übertragene Drehimpuls ist. Da der Anteil des Drehimpulses $\boldsymbol{L}_{xy}$ eine Achse in der x-y-Ebene als Rotationsachse hat, muss man das dazugehörige Trägheitsmoment I_{xy} bezüglich dieser Achse bestimmen. Aus Tabelle 8.1 können wir ablesen, dass die Trägheitsmomente I_z und I_{xy} im Allgemeinen nicht gleich groß sind. Daraus folgt, dass der Drehimpulsvektor nicht mehr parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_z + \boldsymbol{\omega}_{xy}$ ist. Abbildung 8.77 zeigt die einzelnen Komponenten des Drehimpuls- und Winkelgeschwindigkeitsvektors und die daraus resultierenden Summenvektoren, die nicht mehr parallel zueinander sind. In einem Koordinatensystem, in dem der Gesamtdrehimpuls raumfest ist, rotiert der Vektor der Winkelgeschwindigkeit und damit auch die Figurenachse um den Drehimpulsvektor. Diese Bewegung nennt man auch die **Nutation** eines Kreisels.

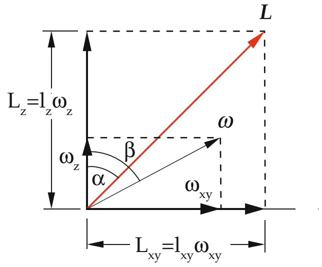


Abbildung 8.77 Aufgrund eines seitlichen Stoßes erhält der Kreisel eine zusätzliche Drehimpulskomponente $\boldsymbol{L}_{xy}$, die bewirkt, dass der Gesamtdrehimpuls nicht mehr parallel parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_z + \boldsymbol{\omega}_{xy}$ ist, wenn die beiden Trägheitsmomente I_z und I_{xy} nicht gleich sind.

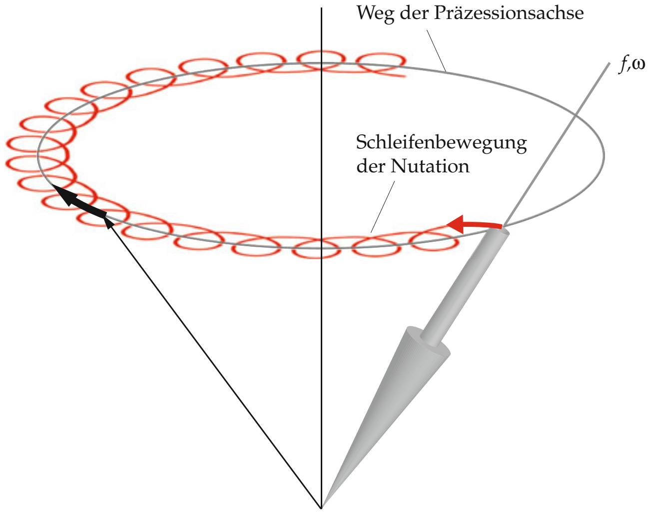


Abbildung 8.78 Überlagerung von Nutation und Präzession beim symmetrischen Kreisel.

In einem Bezugssystem außerhalb des Kreisels wird der Drehimpulsvektor aufgrund des Stoßes ebenfalls aus der Vertikalen gekippt, sodass die Drehimpulsachse dem Drehmoment durch die Schwerkraft unterliegt und zusätzlich um die Vertikale präzediert. Abbildung 8.78 veranschaulicht die Überlagerung von Nutation und Präzession für diesen Fall. Die Trajektorie, die die Figurenachse beim Kreiseln beschreibt, wenn die Nutation schneller als die Präzession ist, nennt man auch eine **Zykloide**. Es ist die gleiche Bahn, die ein Punkt auf einem Reifen beschreibt, wenn der Reifen geradlinig auf einer Ebene rollt.

!

Verwechseln Sie nicht Nutation und Präzession: Unter der Präzession versteht man die Ausweichbewegung der Drehimpulsachse aufgrund eines äußeren Drehmoments, während die Nutation die Rotation der Winkelgeschwindigkeit um den Drehimpulsvektor beschreibt.

Beispiel 8.28 demonstriert die Erhaltung des Drehimpulses eines Kreisels. Beispiel 8.29 führt vor Augen, wie eine Änderung der Drehachse eines Kreisels zu einem Drehmoment führt.

Beispiel 8.28: Ein Kreisel dreht sich — ZUM VERSTÄNDNIS

Sie sitzen auf einem reibungsfrei gelagerten Drehhocker und halten einen Kreisel in der Hand (Abbildung 8.79). Anfangs drehen sich weder der Kreisel noch der Drehhocker. Nun folgen Sie den Anweisungen Ihres Übungsleiters und halten den Kreisel so in einer Hand, dass die Drehachse senkrecht steht. Mit der anderen Hand versetzen Sie den Kreisel in eine rasche Drehung (von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn). Sobald sich der Kreisel in eine Richtung dreht, werden sich der Drehhocker (und damit auch Sie) in die andere Richtung drehen. Nach einigen Sekunden bremsen Sie den Kreisel mit Ihrer freien Hand. Der Drehhocker hört auf, sich zu drehen, sobald der Kreisel zum Stillstand kommt. Erklären Sie dieses Phänomen.

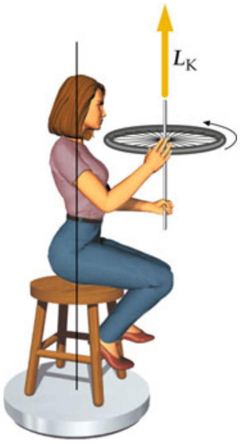


Abbildung 8.79 Darstellung des Systems Drehhocker-Mensch-Kreisel.

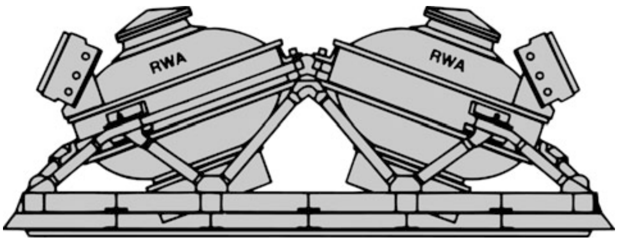
Problembeschreibung: Da der Drehhocker reibungsfrei gelagert ist, erfährt das System Drehhocker–Mensch–Kreisel keinerlei Drehmomente bezüglich der Achse des Drehhockers. Daher bleibt der Drehimpuls des Systems bezüglich der Achse des Drehhockers konstant.

Lösung: Anfangs ist das gesamte System in Ruhe und damit der Drehimpuls null. Wenn Sie den Kreisel anstoßen, erhält er einen nach oben gerichteten Eigendrehimpuls. Der Gesamtdrehimpuls des Systems bleibt null. Demnach ist die Summe aus dem Bahndrehimpuls, den der Kreisel bezüglich der Achse des Drehhockers erhält, und dem Drehimpuls, den Sie und der Drehhocker erhalten, im Betrag genauso groß wie der Eigendrehimpuls des Kreisels; allerdings ist er nach unten gerichtet. Ein nach unten gerichteter Drehimpuls gehört zu einer Drehung im Uhrzeigersinn (von oben betrachtet). Wenn Sie den Kreisel anhalten, geht dessen nach oben gerichteter Eigendrehimpuls auf null zurück. Damit der Gesamtdrehimpuls des Systems null bleibt, während der Kreisel immer langsamer wird, muss das System ebenfalls bis zum Stillstand abbremsen.

Plausibilitätsprüfung: Die Situation ist vergleichbar mit der einer Person, die auf einem reibungsfrei gelagerten Schlitten auf einer glatten Ebene läuft. Sobald die Person vorwärts schreitet, bewegt sich der Schlitten nach hinten, und sobald die Person stehen bleibt, stoppt auch die Rückwärtsbewegung des Schlittens, so wie der Impulserhaltungssatz es voraussagt.

Weitergedacht: Die Lage des Hubble-Weltraumteleskops wird mithilfe von vier Schwungrädern auf dem Satelliten geregelt. Die Schwungräder werden durch computergesteuerte Elektromotoren beschleunigt oder verlangsamt. Im Ergebnis kann das Teleskop auf die gewünschten Ziele ausgerichtet werden.

Ein Mitarbeiter in Reinraumkleidung untersucht ein Schwungrad des Hubble-Weltraumteleskops. *(© NASA/Goddard Space Flight Center.)*



Das Hubble-Weltraumteleskop wird ausgerichtet, indem man die Umdrehungszahl der vier Schwungräder verändert, die jeweils 45 kg wiegen und deren Drehachsen in verschiedene Richtungen weisen. Sie drehen sich mit bis zu 3000 min^{-1}. Mithilfe einer Softwareregelung kann man die Drehzahlen ändern; dadurch wird Drehimpuls zwischen den Schwungrädern und dem Rest des Satelliten ausgetauscht. Die Drehimpulsänderungen für den Satelliten lassen das gesamte System langsam in die gewünschte Lage schwenken. Mit dieser Methode der Ausrichtung kann man ein Ziel bis auf 0,005 Bogensekunden genau anpeilen und halten. Eine solche Genauigkeit entspricht der Aufgabe, eine Taschenlampe in Heidelberg auf eine Münze in Hamburg auszurichten. *(© NASA/Goddard Space Flight Center.)*

Beispiel 8.29: Ein Kreisel kippt — ZUM VERSTÄNDNIS

Eine Studentin sitzt auf einem Drehhocker, der sich reibungsfrei um eine vertikale Achse drehen kann, sich aber vorerst nicht bewegt. In der Hand hält sie einen schnell rotierenden Kreisel, dessen Achse waagerecht steht (Abbildung 8.80a). Der Betrag des Eigendrehimpulsvektors des Kreisels ist $L_{\mathrm{K,A}}$. Was passiert, wenn die Studentin, wie in Abbildung 8.80b gezeigt, den Kreisel plötzlich hebt, bis er zum Schluss senkrecht steht? (Der Kreisel soll sich dann, von oben betrachtet, gegen den Uhrzeigersinn drehen.)

Problembeschreibung: Das System Drehhocker-Studentin-Kreisel kann sich reibungsfrei um eine vertikale Achse durch die Mitte des Drehhockers drehen. Da die Drehung reibungsfrei ist, treten keine Drehmomente bezüglich dieser Achse auf. Der Drehimpuls des Systems bleibt daher erhalten.

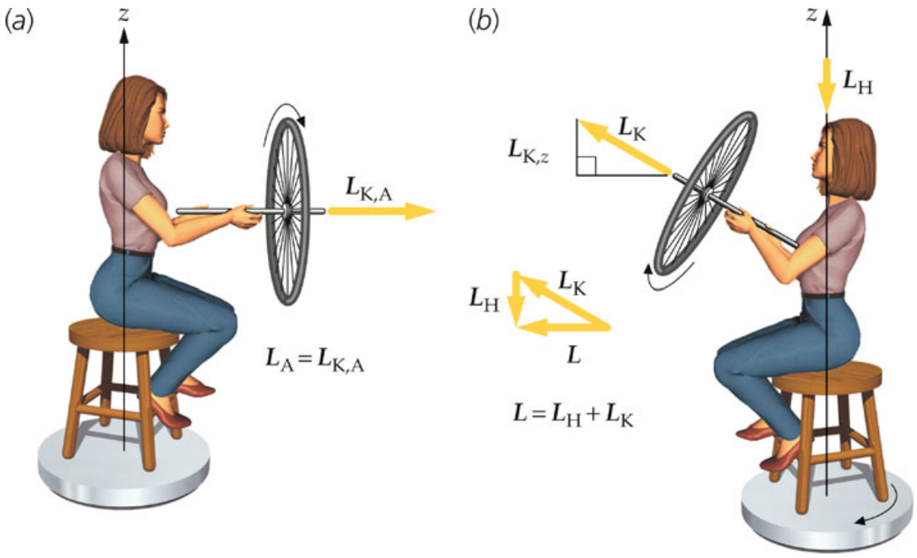


Abbildung 8.80 Darstellung des Systems Drehhocker-Mensch-Kreisel, wobei der Kreisel von einer waagerechten in eine senkrechte Position gehoben wird.

Lösung: Eine Veränderung der Drehachse des Kreisels ändert zwar die Richtung, aber nicht den Betrag des Eigendrehimpulses von dem Kreisel. Der Drehimpuls des Kreisels nach dem Hochheben ist aufwärts gerichtet. Der Anfangsdrehimpuls des Systems Drehhocker–Studentin–Kreisel bezüglich der vertikalen Achse ist null. Nachdem die Drehachse des Kreisel verändert wurde, hat der Kreisel einen (von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn gerichteten) Eigendrehimpuls, dessen Betrag gleich $L_{\mathrm{K,A}}$ ist. Nach dem Drehimpulserhaltungssatz muss der verbliebene Drehimpuls des Systems bezüglich der vertikalen Achse des Drehhockers mit dem Uhrzeigersinn gerichtet sein und denselben Betrag haben wie $L_{\mathrm{K,A}}$. Der Drehhocker und die Studentin werden sich im Uhrzeigersinn drehen. Der Drehimpuls bezüglich der vertikalen Achse des Drehhockers hat den Betrag $L_{\mathrm{K,A}}$.

Plausibilitätsprüfung: Die Studentin übt ein nach oben gerichtetes Drehmoment auf den rotierenden Kreisel aus, wenn sie dessen Drehachse senkrecht stellt. (Aufgrund der Definition des Drehmoments als Vektorprodukt sind für ein aufwärts gerichtetes Drehmoment horizontale Kräfte erforderlich.) Der Kreisel übt ein entgegengesetzt gleiches Drehmoment (d. h. horizontale Kräfte) auf die Studentin aus, weswegen sie auf ihrem Drehhocker in eine Drehung im Uhrzeigersinn gerät.