微分方程式の問題集

AP2020MU

2021/2/6

1　はじめに

来たる院試のために微分方程式を復習することになったので，2A の数学及力学演習の演習問題から微分方程式に関する部分のみを抽出してまとめた．なお，解法の予測がしにくくなるよう問題の順番はランダムに入れ替えた．また，レイアウトの都合上，一部の式をそれと等価な式に変形した．問題の略解および代表的な解法は末尾にまとめ，特殊な微分方程式についてはより細かい補足を加えた．計算問題になるような常微分方程式は，基本的に解法を覚えるのが一番手っ取り早いので，解き方が分からない場合は潔く「5. 代表的な解法」を見て覚えるとよい．

2　注意事項

- 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を 0 以上の整数全体の集合とする．すなわち，$\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq 0\}$ とする．
- y は x の関数とし，$y' := \frac{dy}{dx}$ とする．
- A は 2×2 行列を表す．また，$\boldsymbol{y} := (y_1, y_2)^T$ とする．

3 問題

1.
$$y'' + 4y' = \sin 2x$$

2.
$$y'' - 2y' - 3y = e^x$$

3.
$$(x + y^2)dx + 2xydy = 0$$

4.
$$y' = -2xy - 2x^3y^3$$

5.
$$y' = \sqrt{1 - y^2}x$$

6.
$$(\sin x + e^x \sin y)dx + (e^x \cos y + e^y)dy = 0$$

7.
$$2x \log y dx + \frac{x^2}{y}dy = 0$$

8.
$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

9.
$$y'' - y' - 6y = (10x + 7)e^{3x}$$

10.
$$y' = -\frac{y}{x} + x^2y^6$$

11.
$$y' = \frac{x + y + 1}{x - y - 3}$$

12.
$$y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

13.
$$y = xy' + y' + y'^2$$

14.
$$y' = \frac{2xy}{3x^2 + y^2}$$

15.
$$y' = \frac{2}{x^2} - y^2$$

16.
$$y' = 2y + e^{2x}$$

17.
$$y' = xy^2$$

18.
$$y'' - 2y' + 2y = 2x^2$$

19.
$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 2x$$

20.
$$y' = (1 + y^2)x$$

21.
$$y'' - 2y' + 2y = \sin x$$

22.
$$y = xy' + \sqrt{4 - y'^2} \qquad (-2 < y' < 2)$$

23.
$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

24.
$$y' = \frac{2x^3 - 2xy}{x^2 + y}$$

25.
$$y' = -2xy + x$$

26.
$$xy' + y + 3x = 0$$

27.
$$y' = -xy^2 + (4x^2 + 1)y + 4x^3 + 2x + 2$$

28.
$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$$

29.
$$y' = xy$$

30.
$$y' + 2x(y-1) = 0$$

31.
$$y' = \frac{x-y-1}{x+2y-4}$$

32.
$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

33.
$$y' = -2y^2 + \frac{1}{x^2}$$

34.
$$y' = y \sin x$$

35.
$$(x-y)dx + xdy = 0$$

36.
$$y' = \frac{x^2(y+1)}{y^2(x-1)}$$

37.
$$y'' + y' - 12y = x^2$$

38.
$$y'' - 2y' + y = e^x$$

39.
$$(x+2xy)dx + xdy = 0$$

40.
$$y' = \frac{2x+y+3}{x+y+2}$$

41.
$$y' + y = \sin x$$

42.
$$ydx - xdy = 0$$

43.
$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$$

44.
$$y'' - 2y' + y = e^x$$

45.
$$2xydx + x^2dy = 0$$

46.
$$(x+y)dx + xdy = 0$$

47.
$$y' = \frac{(x+2y-3)^2}{(2x+y-3)^2}$$

48.
$$(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0$$

49.
$$y' = -y + x^2$$

50.
$$y'' + 2y' - 3y = e^x$$

51.
$$y'' - 2ay' + a^2y = 0$$

52.
$$y'' - 5y' + 6y = 5\sin x + 5\cos x$$

53.
$$y' = \frac{xy}{x^2+y}$$

54.
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

55.
$$(e^x + y^2)dx + (2xy + e^y)dy = 0$$

56.
$$y''' - y'' + y' - y = e^x$$

57.
$$4x^2y'' - 2xy' + (2+x)y = 0$$

58.
$$y' = \frac{y}{x} + x^2y^3$$

59.
$$y'' + 4y'4y = x^2e^{-2x}$$

60.
$$y' = \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x}}$$

61.
$$y' = \frac{y^2}{x}$$

62.
$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$$

63.
$$y'' + 3y' + 2y = e^x$$

64.
$$y = xy' + \sqrt{1+y'^2}$$

65.
$$ydx + (xy + x)dy = 0$$

66.
$$y' = 2xy + x^3$$

67.
$$y'' + 2y' + y = 5\cos x$$

68.
$$y'' + x^2y' + 3xy = 0$$

69.
$$y'' - xy = 0$$

70.
$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

71.
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

72.
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y \qquad (n \in \mathbb{N})$$

73.
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

74.
$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

75.
$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

76.
$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

77.
$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

78.
$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

79.
$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

80.
$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

81.
$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

82.
$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

4　略解

上段が問題の式，下段が解答である．以下，積分定数を C とする．

1.
$$y'' + 4y' = \sin 2x$$
$$y = C_1e^{-4x} + C_2 - \frac{1}{20}(2\cos 2x + \sin 2x)$$

2.
$$y'' - 2y' - 3y = e^x$$
$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{e^x}{4}$$

3.
$$(x + y^2)dx + 2xydy = 0$$
$$\frac{1}{2}x^2 + xy^2 = C$$

4.
$$y' = -2xy - 2x^3y^3$$
$$y = \pm\left(x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}\right)^{-1/2}, \qquad y = 0$$

5.
$$y' = \sqrt{1 - y^2}x$$
$$y = \pm 1, \qquad y = \sin\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

6.
$$(\sin x + e^x \sin y)dx + (e^x \cos y + e^y)dy = 0$$
$$-\cos x + e^x \sin y + e^y = C$$

7.
$$2x \log y dx + \frac{x^2}{y}dy = 0$$
$$x^2 \log y = C$$

8.
$$y'' - 4y' + 4y = 0$$
$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$$

9.
$$y'' - y' - 6y = (10x + 7)e^{3x}$$
$$y = (x^2 + x + C_1)e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

10.
$$y' = -\frac{y}{x} + x^2y^6$$
$$y = \left(\frac{5x^3}{2} + Cx^5\right)^{-1/5}, \qquad y = 0$$

11.
$$y' = \frac{x + y + 1}{x - y - 3}$$
$$y = (x - 1)\tan\left(\frac{1}{2}\log[(x - 1)^2 + (y + 2)^2] + C\right) - 2$$

12.
$$y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$$
$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

13.
$$y = xy' + y' + y'^2$$
$$y = C(x + 1) - C^2, \qquad y = \frac{1}{4}(x + 1)^2$$

14.
$$y' = \frac{2xy}{3x^2 + y^2}$$
$$y^3 = C(x^2 + y^2)$$

15.
$$y' = \frac{2}{x^2} - y^2$$
$$y = \frac{2x^3 - C}{x(x^3 + C)} + 2x, \qquad y = -\frac{1}{x}$$

16.
$$y' = 2y + e^{2x}$$
$$y = (x + C)e^{2x}$$

17.
$$y' = xy^2$$
$$y = 0, \qquad y = -\frac{2}{x^2 + C}$$

18.
$$y'' - 2y' + 2y = 2x^2$$
$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + (x + 1)^2$$

19.

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 2x$$
$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x^2 + 2x + 2$$

20.

$$y' = (1 + y^2)x$$
$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

21.

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x$$
$$y = \left(C_1e^x + \frac{2}{5}\right)\cos x + \left(C_2e^x + \frac{1}{5}\right)\sin x$$

22.

$$y = xy' + \sqrt{4 - y'^2} \qquad (-2 < y' < 2)$$
$$y = Cx + \sqrt{4 - C^2}, \qquad \frac{y^2}{4} - x^2 = 1 \qquad (y \geq 0)$$

23.

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$
$$\frac{x^2}{2y^2} = \log|y| + C$$

24.

$$y' = \frac{2x^3 - 2xy}{x^2 + y}$$
$$y = -x^2 \pm \sqrt{2x^4 + C}$$

25.

$$y' = -2xy + x$$
$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

26.

$$xy' + y + 3x = 0$$
$$y = \frac{-3x^2 + C}{2x}$$

27.

$$y' = -xy^2 + (4x^2 + 1)y + 4x^3 + 2x + 2$$
$$y = \frac{1}{x - 1 + Ce^{-x}} + 2x, \qquad y = 2x$$

28.

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$$
$$y = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \frac{x^3}{6}\right)e^{-x}$$

29.

$$y' = xy$$
$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

30.

$$y' + 2x(y - 1) = 0$$
$$y = Ce^{-x^2} + 1$$

31.

$$y' = \frac{x - y - 1}{x + 2y - 4}$$
$$y = \frac{4 - x \pm \sqrt{3(x-2)^2 + C}}{2}$$

32.

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$
$$y = x\tan\left(\frac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2\right) + C\right)$$

33.

$$y' = -2y^2 + \frac{1}{x^2}$$
$$y = \frac{Cx^3 + 1}{x(Cx^3 - 2)}, \qquad y = \frac{1}{x}$$

34.

$$y' = y\sin x$$
$$y = Ce^{-\cos x}$$

35.

$$(x - y)dx + xdy = 0$$
$$\frac{y}{x} + \log|x| = C$$

36.

$$y' = \frac{x^2(y + 1)}{y^2(x - 1)}$$
$$\frac{y^2}{2} - y + \log|y + 1| = \frac{x^2}{2} + x + \log|x - 1| + C,$$
$$y = -1$$

37.

$$y'' + y' - 12y = x^2$$
$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{3x} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{72} - \frac{13}{864}$$

38.
$$y'' - 2y' + y = e^x$$
$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$$

39.
$$(x + 2xy)dx + xdy = 0$$
$$x^2 y + \frac{1}{3} x^3 = C$$

40.
$$y' = \frac{2x + y + 3}{x + y + 2}$$
$$\Big[(\sqrt{2} + 1) \log |y - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}|$$
$$+ (\sqrt{2} - 1) \log |y + \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2}|\Big] = C$$

41.
$$y' + y = \sin x$$
$$y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

42.
$$ydx - xdy = 0$$
$$-\frac{y}{x} = C$$

43.
$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$$
$$y = -\frac{e^x}{2} \left[(x - C_1) \cos x + C_2 \sin x\right]$$

44.
$$y'' - 2y' + y = e^x$$
$$y = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2} \right)$$

45.
$$2xydx + x^2 dy = 0$$
$$x^2 y = C$$

46.
$$(x + y)dx + xdy = 0$$
$$xy + \frac{x^2}{2} = C$$

47.
$$y' = \frac{(x + 2y - 3)^2}{(2x + y - 3)^2}$$
$$(x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 = C(x - y)^3$$

48.
$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$$
$$-\frac{y^2}{x} + x = C$$

49.
$$y' = -y + x^2$$
$$y = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$$

50.
$$y'' + 2y' - 3y = e^x$$
$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + \frac{x}{4} e^x$$

51.
$$y'' - 2ay' + a^2 y = 0$$
$$y = (C_1 x + C_2) e^{ax}$$

52.
$$y'' - 5y' + 6y = 5 \sin x + 5 \cos x$$
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \cos x$$

53.
$$y' = \frac{xy}{x^2 + y}$$
$$y^2 = C(2y + x^2), \qquad y = -\frac{1}{2} x^2$$

54.
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

55.
$$(e^x + y^2)dx + (2xy + e^y)dy = 0$$
$$xy^2 + e^x + e^y = C$$

56.
$$y''' - y'' + y' - y = e^x$$
$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{x}{2} e^x$$

57.
$$4x^2 y'' - 2xy' + (2 + x)y = 0$$
$$y = C_1 \sqrt{x} \sin \sqrt{x} + C_2 \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$$

58.

$$y' = \frac{y}{x} + x^2 y^3$$

$$y^2 = \frac{5x^2}{-2x^5 + C}$$

59.

$$y'' + 4y'4y = x^2 e^{-2x}$$

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^4}{12} \right) e^{-2x}$$

60.

$$y' = \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x}}$$

$$y = (\sqrt{1+x} + C)^2 - 1, \qquad y = -1$$

61.

$$y' = \frac{y^2}{x}$$

$$y = -\frac{1}{\log|x| + C}, \qquad y = 0$$

62.

$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$$

$$\frac{x^2}{y} + y = C$$

63.

$$y'' + 3y' + 2y = e^x$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x$$

64.

$$y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$$

$$y = Cx + \sqrt{1 + C^2}, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (y > 0)$$

65.

$$ydx + (xy + x)dy = 0$$

$$xye^y = C$$

66.

$$y' = 2xy + x^3$$

$$y = -\frac{x^2 + 1}{2} + Ce^{x^2}$$

67.

$$y'' + 2y' + y = 5\cos x$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{5}{2} \sin x$$

68.

$$y'' + x^2 y' + 3xy = 0$$

$$y = C_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2 \cdot 5 \cdots (3k-4)(3k-1)} x^{3k} \right) + C_2 x e^{-x^3/3}$$

69.

Airy の微分方程式 (補足参照)

$$y'' - xy = 0$$

$$y = C_1 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k} \right] + C_2 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1} \right] =: c_1 \mathrm{Ai}(x) + c_2 \mathrm{Bi}(x)$$

70.

Hermite の微分方程式 (補足参照)

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$y = C_0 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k \frac{n!!}{(2k)!(n-2k)!!} x^{2k} \right] + C_1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k \frac{(n-1)!!}{(2k+1)!(n-2k-1)!!} x^{2k+1} \right]$$

71.

Legendre の微分方程式 (補足参照)

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$y = C_0 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n+2k-1)!!n!!}{(2k)!(n-1)!!(n-2k)!!} x^{2k} \right] + C_1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n+2k)!!(n-1)!!}{(2k+1)!n!!(n-2k-1)!!} x^{2k+1} \right]$$

72.

Chebyshev の微分方程式 (補足参照)

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$y = C_0 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n+2(k-1))!!}{(2k)!(n-2k)!!} x^{2k} \right] + C_1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n+2k-1)!!}{(2k+1)!(n-2k-1)!!} x^{2k+1} \right]$$

73.

Bessel の微分方程式 (補足参照)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$y = C_0 J_\alpha(x) + C_1 N_\alpha(x)$$

74.

Laguerre の微分方程式 (補足参照)

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$y = C_0 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n! \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}$$

(もう 1 つの基本解については補足参照)

75.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 2e^{2x}$$

$$y_2 = -C_1 2e^{-3x} + C_2 e^{2x}$$

76.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \left(-2C_1 - C_2(2x + \frac{1}{3}\right) e^{2x}$$

$$y_2 = (3C_1 + 3C_2 x)e^{2x}$$

77.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = C_1(2+i)e^{(1+i)x} + C_2(2-i)e^{(1-i)x}$$

$$y_2 = 5C_1 e^{(1+i)x} + 5C_2 e^{(1-i)x}$$

78.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \cos x - \sin x \cos^2 x$$

$$y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x \cos x - \frac{1}{2} \cos^3 x$$

79.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 2C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}$$

$$y_2 = 3C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$$

80.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = (C_1 x - C_1 + C_2)e^{2x}$$

$$y_2 = (C_1 x + C_2)e^{2x}$$

81.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_2 = (C_1 - C_2) \cos x + (C_1 + C_2) \sin x$$

82.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$y_1 = -C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{2x} - \frac{3}{4} e^x - \frac{1}{3} e^{-x}$$

$$y_2 = 2C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{3} e^{-x}$$

5　代表的な解法

以降，f, g, h, p, q, r などは適当な関数とする．また，関数形によっては特解が存在しうるが，ここでは個別の特解には立ち入らない．

5.1　変数分離型

$$y' = g(x)h(y)$$

とかけるとき，

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C$$

が解．

5.2　同次型 (一般)

$$y' = x^{n-1} f\left(\frac{y}{x^n}\right)$$

とかけるとき，$u := \frac{y}{x^n}$ とおくと，

$$\begin{aligned} u' &= \frac{x^{n-1}f(u) - nux^{n-1}}{x^n} \\ &= \frac{1}{x}(f(u) - nu) \\ \therefore \int & \frac{1}{f(u) - nu} dy = \log|x|dx + C \end{aligned}$$

が解．

5.3　線形微分方程式 (1 階)

$$y' + p(x)y = q(x)$$

とかけるとき，両辺に $\exp\left(\int p(x)dx\right)$ をかけると，

$$\frac{d}{dx}\left[y \exp\left(\int p(x)dx\right)\right] = q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)$$

となるから，

$$y = \exp\left(-\int p(x)dx\right)\left[C + \int q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx\right]$$

が解．

5.4 完全微分型

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

において，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

が成り立つなら，以下の関数 ϕ を用いて，

$$\phi(x,y) := \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int Q(x_0,y)dy$$

(ここで x_0 は任意の定数)

$$\phi(x,y) = C$$

が解．

5.5 積分因子

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

において，ある関数 (積分因子)$M(x,y)$ を両辺にかけて，

$$M(x,y)P(x,y)dx + M(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

が完全微分型になるように $M(x,y)$ をとる．

積分因子 M が満たすべき条件を変形した

$$\frac{P}{Q}\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{Q_x - P_y}{Q}$$

や

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{Q}{P}\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{Q_x - P_y}{P}$$

において，右辺が x のみの関数や y のみの関数になれば，積分因子 M を x のみの関数や y のみの関数に限定することで常微分方程式に帰着し割と簡単になる．

5.6 Bernoulli 型

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

とかけるとき，$u := y^{1-n}$ とおくと，

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

となって 1 階線形微分方程式に帰着するから，

$$y = \left[\exp\left(-\int (1-n)p(x)dx\right)(C + \int (1-n)q(x)\exp\left(\int (1-n)p(x)dx\right)dx)\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

が解．($n = 0, 1$ のときは 1 階線形微分方程式に一致するので考えない)

5.7 Riccati 型

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

とかけるとき，頑張って特解 $y = y_0(x)$ を見つけてきて，$u := y - y_0$ とおくと，

$$u' - (2p(x)y_0(x) + q(x))u = p(x)u^2$$

となり，Bernoulli 型に帰着し，$v := \frac{1}{u}$ とおくと，

$$v' + (2py_0 + q)v = p$$

となって 1 階線形微分方程式に帰着するから，

$$y = y_0 + \left[\exp\left(-\int(2p(x)y_0(x) + q(x))dx\right)\left\{C + \int p(x)\exp\left(\int(2p(x)y_0(x) + q(x))dx\right)dx\right\}\right]^{-1}$$

が解.

5.8 Clairaut 型

$$y = xy' + f(y')$$

とかけるとき，両辺を x で微分して整理すると，

$$y''(x + f'(y')) = 0$$

となるから，

$$y = Cx + f(C)$$

が直線解，

$$\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = -tf'(t) + f(t) \end{cases}$$

が包絡線解 (特異解) となる (t はパラメータ).

5.9 定数係数線形微分方程式

斉次解は $y = e^{\lambda x}$ を代入してでてくる特性方程式の根をみれば容易．重複度が m の根があれば $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}$ がその根に対応する基本解.

非斉次ならぐっと睨むか定数変化法などで特解を求める.

5.10 連立 1 次線型微分方程式

$n \times n$ の定数行列 A と定ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ を用いて

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$$

とかけるとき，A の Jordan 標準形を $J = P^{-1}AP$ とすると，斉次解は，

$$\boldsymbol{y} = Pe^{xJ}\boldsymbol{C}$$

なので，定数変化法を実行すれば，

$$\boldsymbol{y} = Pe^{xJ}(\boldsymbol{C} + \int e^{-xJ}P^{-1}\boldsymbol{b}\,dx)$$

が一般解.

5.11　変数係数線形微分方程式

とりあえずぐっと睨む．何もわからなかったら，冪級数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

を代入して漸化式を立てる.

6　補足：特殊関数の微分方程式

特殊関数に関連する微分方程式の級数解をまとめておく．
以下，二重階乗の記号を多用するので簡単に定義と性質を述べる．

定義

自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し，n の二重階乗 $n!!$ を

$$n!! := \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil - 1} (n-2k) & (n \geq 1) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

によって定義する．

このとき，以下が成り立つ．

$$n!! = \begin{cases} 2^k k! & (n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}) \\ \dfrac{n!}{(n-1)!!} = \dfrac{(2k)!}{2^k k!} & (n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 1}) \end{cases}$$

6.1　Airy の微分方程式

$$y'' - xy = 0$$

に

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

を代入して整理すると，

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-1} \Big] x^k = 0$$

より，

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_{k+3} &= \frac{1}{(k+3)(k+2)} a_k = \frac{k+1}{(k+3)(k+2)(k+1)} a_k \end{aligned}$$

となるから，a_0, a_1 を任意の定数として，

$$\begin{aligned} y = a_0 &\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k} \right] \\ &+ a_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1} \right] \end{aligned}$$

を得る．

以下の積分で定義される Airy 関数 $\mathrm{Ai}(x)$，および第二種 Airy 関数 $\mathrm{Bi}(x)$ について，

$$\mathrm{Ai}(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)dt$$
$$\mathrm{Bi}(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{t^3}{3}+xt\right)+\sin\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)\right]dt$$

これらは Airy の微分方程式の解のひとつであり，

$$\mathrm{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(\frac{2}{3})}, \qquad \mathrm{Ai}'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma(\frac{1}{3})}$$
$$\mathrm{Bi}(0) = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma(\frac{2}{3})}, \qquad \mathrm{Bi}'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma(\frac{1}{3})}$$

を満たすことから，先ほどの一般解において，$a_0 := \mathrm{Ai}(0)$, $a_1 := \mathrm{Ai}'(0)$ としたものが $\mathrm{Ai}(x)$，$a_0 := \mathrm{Bi}(0)$, $a_1 := \mathrm{Bi}'(0)$ としたものが $\mathrm{Bi}(x)$ となる．

6.2 Hermite の微分方程式

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

に

$$y = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$$

を代入して整理すると，

$$\sum_{k=0}^\infty \Big[(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2(k-n)a_k\Big]x^k = 0$$

より，

$$a_{k+2} = \frac{(-1)2(n-k)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

となるから，a_0, a_1 を任意の定数として，

$$y = a_0\left[\sum_{k=0}^\infty (-1)^k 2^k \frac{n!!}{(2k)!(n-2k)!!}x^{2k}\right] + a_1\left[\sum_{k=0}^\infty (-1)^k 2^k \frac{(n-1)!!}{(2k+1)!(n-2k-1)!!}x^{2k+1}\right]$$

を得る．

特に n が偶数のとき，$k = \frac{n}{2}+1$ のときに前者の級数の分子が 0 になるので，

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k 2^k \frac{n!!}{(2k)!(n-2k)!!}x^{2k} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k 2^k \frac{n!!}{(2k)!(n-2k)!!}x^{2k}$$

より，基本解のひとつは多項式になる．n が奇数のときも同様に，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k \frac{(n-1)!!}{(2k+1)!(n-2k-1)!!}x^{2k+1}\\&=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k 2^k \frac{(n-1)!!}{(2k+1)!(n-2k-1)!!}x^{2k+1}\end{aligned}$$

後者の級数が多項式となる．これらの多項式を用いて以下のように表したものを Hermite の多項式といい $H_n(x)$ で表す．

$$H_n(x):=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}2^{\frac{n}{2}}\dfrac{n!}{n!!}\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^k 2^k \frac{n!!}{(2k)!(n-2k)!!}x^{2k} & (n:\text{偶数})\\ 2(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{n!}{(n-1)!!}\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k 2^k \frac{(n-1)!!}{(2k+1)!(n-2k-1)!!}x^{2k+1} & (n:\text{奇数})\end{cases}$$

偶数のときは $2l:=n-2k$，奇数のときは $2l:=n-2k-1$ とすることで，偶奇の場合の表式をまとめると，

$$\begin{aligned}H_n(x)&=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^l 2^{n-l}\frac{n!}{(n-2l)!(2l)!!}x^{n-2l}\\&=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^l\frac{n!}{l!}\frac{(2x)^{n-2l}}{(n-2l)!}\end{aligned}$$

となる．ちなみに，$H_n(x)$ の x^k の係数はすべて整数である．

6.3 Legendre の微分方程式

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \qquad (n\in\mathbb{N})$$

に

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

を代入して整理すると，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+2)(k+1)a_{k+2}-(k-n)(k+n+1)a_k\Big]x^k=0$$

より，

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}-(k-n)(k+n+1)a_k=0$$

となるから，a_0, a_1 を任意の定数として，

$$
\begin{aligned}
y &= a_0\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k-1)(n+2k-3)\cdots(n+1)\cdot n(n-2)\cdots(n-2k+2)}{(2k)!}x^{2k}\right]\\
&\quad + a_1\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k)(n+2k-2)\cdots(n+2)\cdot(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right]\\
&= a_0\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k-1)!!n!!}{(2k)!(n-1)!!(n-2k)!!}x^{2k}\right] + a_1\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k)!!(n-1)!!}{(2k+1)!n!!(n-2k-1)!!}x^{2k+1}\right]
\end{aligned}
$$

を得る．

特に n が偶数のときは，$k=\frac{n}{2}+1$ のときに前者の級数の分子が 0 になるので，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k-1)(n+2k-3)\cdots(n+1)\cdot n(n-2)\cdots(n-2k+2)}{(2k)!}x^{2k}\\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^k\frac{(n+2k-1)(n+2k-3)\cdots(n+1)\cdot n(n-2)\cdots(n-2k+2)}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}
$$

より，基本解のひとつは多項式になる．n が奇数のときも同様に，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k)(n+2k-2)\cdots(n+2)\cdot(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\frac{(n+2k)(n+2k-2)\cdots(n+2)\cdot(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1}
\end{aligned}
$$

後者の級数が多項式となる．これらの多項式を用いて以下のように表したものを Legendre の多項式といい $P_n(x)$ で表す．

$$
P_n(x) := \begin{cases}
(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^k\frac{(n+2k-1)!!n!!}{(2k)!(n-1)!!(n-2k)!!}x^{2k} & (n：偶数)\\
(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{n!!}{(n-1)!!}\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\frac{(n+2k)!!(n-1)!!}{(2k+1)!n!!(n-2k-1)!!}x^{2k+1} & (n：奇数)
\end{cases}
$$

偶数のときは $2l := n-2k$，奇数のときは $2l := n-2k-1$ とすることで，偶奇の場合の表式をまとめると，

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^l\frac{(2n-2l-1)!!}{(2l)!!}\frac{x^{n-2l}}{(n-2l)!}\\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^l\frac{1}{2^n}\binom{2n-2l}{l, n-l, n-2l}x^{n-2l}
\end{aligned}
$$

となる．ただし，式中の $(\cdot)$ は多項係数を表す．

6.4 Chebyshev の微分方程式

$$
(1-x^2)y'' - xy' + n^2y \qquad (n\in\mathbb{N})
$$

に

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

を代入して整理すると，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+2)(k+1)a_{k+2} - (k-n)(k+n)a_k\Big]x^k = 0$$

より，

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - (k-n)(k+n)a_k = 0$$

となるから，a_0, a_1 を任意の定数として，

$$\begin{aligned}
y &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k n\cdot\frac{(n-2(k-1))(n-2(k-2))\cdots(n+2(k-2))(n+2(k-1))}{(2k)!}x^{2k} \\
&\quad + a_1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n-(2k-1))(n-(2k-3))\cdots(n+(2k-3))(n+(2k-1))}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
&= a_0\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{n(n+2(k-1))!!}{(2k)!(n-2k)!!}x^{2k}\right] + a_1\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n+2k-1)!!}{(2k+1)!(n-2k-1)!!}x^{2k+1}\right]
\end{aligned}$$

を得る．

特に n が偶数のときは，$k=\frac{n}{2}+1$ のときに前者の級数の分子が 0 になるので，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k n\cdot\frac{(n-2(k-1))(n-2(k-2))\cdots(n+2(k-2))(n+2(k-1))}{(2k)!}x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^k n\cdot\frac{(n-2(k-1))(n-2(k-2))\cdots(n+2(k-2))(n+2(k-1))}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}$$

より，基本解のひとつは多項式になる．n が奇数のときも同様に，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n-(2k-1))(n-(2k-3))\cdots(n+(2k-3))(n+(2k-1))}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\frac{(n-(2k-1))(n-(2k-3))\cdots(n+(2k-3))(n+(2k-1))}{(2k+1)!}x^{2k+1}
\end{aligned}$$

後者の級数が多項式となる．これらの多項式を用いて以下のように表したものを Chebyshev の多項式といい $T_n(x)$ で表す．

$$T_n(x) := \begin{cases} 1 & (n=0) \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^k n\cdot\frac{(n+2(k-1))!!}{(2k)!(n-2k)!!}x^{2k} & (n:0\text{ より大きい偶数}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\frac{(n+2k-1)!!}{(2k+1)!(n-2k-1)!!}x^{2k+1} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

偶数のときは $2l := n - 2k$，奇数のときは $2l := n - 2k - 1$ とすることで，偶奇の場合の表式をまとめると，$n \geq 1$ で，

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^l \frac{n(2n-2l-2)!!}{(2l)!!} \frac{x^{n-2l}}{(n-2l)!} \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^l \frac{n}{2(n-l)} \binom{n-l}{l} (2x)^{n-2l} \end{aligned}$$

となる．ただし，式中の $(\cdot)$ は二項係数を表す．ちなみに，$T_n(x)$ の x^k の係数はすべて整数である．

6.5 Bessel の微分方程式

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

この級数解は広く知られている (多くの場合に Bessel 関数の定義として採用される) ので導出は省略する．Bessel の微分方程式の基本解の 1 つである Bessel 関数 $J_\alpha(x)$ は，

$$J_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

である．また，もう 1 つの基本解である Neumann 関数 (第二種 Bessel 関数)$N_\alpha(x)$ は，

$$N_\alpha(x) := \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$$

である．

6.6 Laguerre の微分方程式

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

に

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

を代入して整理すると，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+1)^2 a_{k+2} - (k-n)a_k \Big] x^k = 0$$

より，

$$(k+1)^2 a_{k+2} - (k-n)a_k = 0$$

となるから，a_0 を任意の定数として，

$$\begin{aligned} y &= a_0 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n!)^2}{(n-k)!(k!)^2} x^k \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n! \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

を得る．

　このとき，

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n! \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}$$

を Laguerre の多項式という．ちなみに，$L_n(x)$ の x^k の係数はすべて整数である．なお，Laguerre の微分方程式は 2 階の微分方程式なので，もうひとつの基本解が得られるはずだが，今回は解が縮退しているため，合流型超幾何微分方程式の基本解に極限操作をすることで計算をする必要がある．具体的には，合流型超幾何関数

$$F(\alpha, \gamma; x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{\bar{n}}}{n! \gamma^{\bar{n}}} x^n$$

を用いて，もう一つの基本解は，

$$y = F(-n, 1; x) \log x - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{n^{\bar{k}}}{(k!)^2} \left[\sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{n-l+1} + \frac{2}{l} \right) \right] x^k$$

と表せる [2]．途中，上昇階乗冪の記号を用いた．

参考文献

[1] 東京大学講義 「数学及力学演習」演習問題

[2] 田中和之 東北大学大学院講義「応用微分方程式論」講義資料
https://www.smapip.is.tohoku.ac.jp/~kazu/ODE/2020/ODE.pdf

[3] 杉浦誠 琉球大学講義「解析学Ⅲ」講義資料
http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/2010/ode10.pdf

[4] 笠原晧司「微分方程式の基礎」 朝倉書店