Sociedad Ecuatoriana de Estadística

“Análisis de Encuestas por Muestreo con R”

Muestreo Aleatorio Simple

Andrés Peña M.

agpena@colmex.mx

Mayo 2023

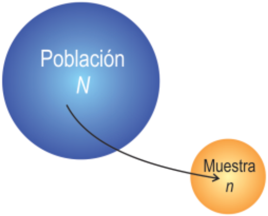
X Seminario Internacional de Estadística Aplicada

Tabla de contenidos

Muestreo Aleatorio Simple (M.A.S.)

Muestreo Aleatorio Simple (M.A.S.)

Muestreo Aleatorio Simple (*mas*)



Selección aleatoria de los elementos muestrales con probabilidades de selección en cualquier extracción iguales y sin reemplazo.

Muestreo Aleatorio Simple (M.A.S.)

De una poblacion de N unidades, se selecciona una muestra de tal manera que **todas** las unidades de la población tienen **igual probabilidad** de ser seleccionadas.

- Se mide la unidad seleccionada y se regresa a la población. Si se hace esta operación n veces, se obtiene una muestra aleatoria simple seleccionada **con reemplazo**, las unidades pueden estar mas de una vez en la muestra.
- Se mide la unidad seleccionada y ya no se regresa a la población. Se seleccionan las siguientes unidades con igual probabilidad de las unidades que quedan en la población. Si se hace esta operación n veces, se obtiene una muestra aleatoria simple seleccionada **sin reemplazo**. Este es el procedimiento que vamos a estudiar.

Muestreo Aleatorio Simple (M.A.S.)

$$
\begin{aligned}
\text{Población} &= \{U_1, U_2, \dots, U_N\} \\
\text{muestra} &= \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \\
\text{muestra} &\subseteq \text{Población}
\end{aligned}
$$

Características de interés

$$
\begin{gathered}
\{X_1, X_2, \dots, X_N\} \\
\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} \\
\{Z_1, Z_2, \dots, Z_N\}
\end{gathered}
$$

A cada U_i se le asocia una o varias características de interés X_i, Y_i, Z_i.

Muestreo Aleatorio Simple (M.A.S.)

Una muestra aleatoria simple se define de dos maneras equivalentes:

1. Una muestra aleatoria donde cualquier elemento $U_j, j = 1, \ldots, N$ tiene una probabilidad $1/N$ de ser seleccionado en cualquiera de las n extracciones.

Como consecuencia la probabilidad de que un elemento $U_j, j = 1, \ldots, N$ esté incluido en muestra es n/N.

$\pi_j = \frac{n}{N}$ es la probabilidad de inclusión de primer orden
$\frac{1}{\pi_j} = \frac{N}{n}$ es el factor de expansión o peso muestral

Muestreo Aleatorio Simple (M.A.S.)

2. Cualquiera de las $\binom{N}{n}$ muestras posibles tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.

$$P(cualquier\ muestra) = \frac{1}{\binom{N}{n}}$$

Muestreo Aleatorio Simple (M.A.S.)

Mediante el proceso de muestreo lo que se desea es hacer inferencia a una población, específicamente se desea calcular una estimación de un parámetro de la población, como:

$$\text{Media} \qquad \bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$$

$$\text{Total} \qquad Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

$$\text{Proporción} \qquad P = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i = \frac{Y}{N}, \text{ donde}$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & U_i \text{ tiene la característica} \\ 0 & U_i \text{ no tiene la característica} \end{cases}$$

Muestreo Aleatorio Simple (M.A.S.)

$$\text{Razón } R = \frac{Y}{X}$$

$$\begin{aligned}\text{Varianza } \sigma^2 &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{N} \\ &= \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{N-1} \\ &= \frac{N-1}{N} S^2\end{aligned}$$

Con $S^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{N-1}$. Se usa S^2 en lugar de σ^2 por facilidad ya que tenemos un estimador insesgado de S^2.

Estimadores bajo M.A.S.

Estimadores bajo M.A.S.

Un estimador insesgado de $\bar{Y}$, la media poblacional de la característica Y, es:

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n} = \bar{y} \text{ media muestral}$$

Que sea un estimador insesgado quiere decir que

$$E(\hat{Y}) = \bar{Y}$$

y su varianza es:

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S^2}{n}$$

Estimadores bajo M.A.S.

$V(\bar{y})$ se estima insesgadamente con:

$$\hat{V}(\bar{y}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\hat{S}^2}{n}$$

Para mostrar que $\hat{V}(\bar{y}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\hat{S}^2}{n}$ es un estimador insesgado de $V(\bar{y}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S^2}{n}$, basta demostrar que $E\left(\hat{S}^2\right) = S^2$.

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 ; \quad S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$$

Estimadores bajo M.A.S.

$\frac{n}{N}$ es la fracción de muestreo o porcentaje de la población que se muestrea. $\left(1 - \frac{n}{N}\right)$ es el factor de corrección por finitud, que ajusta por muestrear de una población finita. Toma en cuenta el hecho de que un estimador basado en una muestra con $n = 10$ unidades de una población de $N = 20$ unidades contiene más información acerca de la población que una muestra de tamaño $n = 10$ unidades de una población de $N = 20000$ unidades.

$$\left(1 - \frac{10}{20}\right) = \frac{1}{2} \text{ mitad de la varianza}$$

$$\left(1 - \frac{10}{20000}\right) = 0.9995 \text{ misma varianza que poblaciones infinitas}$$

Si $n = N$ entonces $V(\bar{y}) = 0$ se está haciendo un censo por lo que el estimador del parámetro tiene varianza cero.

Estimadores bajo M.A.S.

Ya tenemos un estimador de la media poblacional $\bar{Y}$ que es la media muestral $\bar{y}$, que, una vez que tengamos los valores de la muestra de tamaño n nos dará la estimación puntual de $\bar{Y}$.

Sabemos que este estimador es insesgado y tenemos un estimador de su varianza, es decir, sabemos que

$$E(\bar{y}) = \bar{Y}$$

$\hat{V}(\bar{y}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\hat{S}^2}{n}$ estimador de la varianza del estimador.

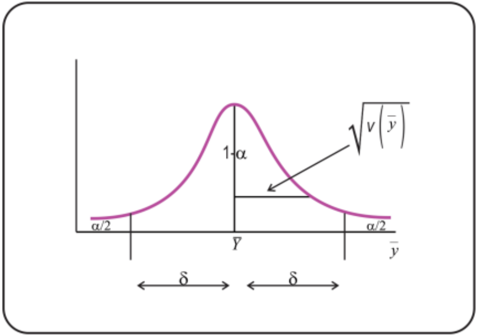
Intervalo de confianza

Intervalo de confianza

Por el Teorema Central del Límite podemos suponer que, con n suficientemente grande:

$$\bar{y} \sim N(\bar{Y}, V(\bar{y}))$$

$$\frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\sqrt{V(\bar{y})}} \sim N(0, 1)$$



Intervalo de confianza

$$P(|\bar{y} - \bar{Y}| < \delta) = 1 - \alpha$$

$1 - \alpha$ confianza y δ precisión.

$$P(-\delta < \bar{y} - \bar{Y} < \delta) = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{-\delta}{\sqrt{V(\bar{y})}} < \underbrace{\frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\sqrt{V(\bar{y})}}}_{N(0,1)} < \frac{\delta}{\sqrt{V(\bar{y})}}) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza

$$P\left(z_{\alpha/2} < \frac{\bar{y}-\bar{Y}}{\sqrt{V(\bar{y})}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\mathrm{P}\left(-z_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\bar{y})} < \bar{y}-\bar{Y} < z_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\bar{y})}\right) = 1-\alpha \tag{1}$$

$$\mathrm{P}\left(\bar{y}-z_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\bar{y})} < \bar{Y} < \bar{y}+z_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\bar{y})}\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza

El intervalo del $(1-\alpha)\times 100\%$ de confianza para $\bar{Y}$ es:

$$\left(\bar{y} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\bar{y})}, \bar{y} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\bar{y})}\right)$$

De tablas de la $N(0,1)$

$$\begin{array}{cc} 1-\alpha = 0.99 & z_{.995} = 2.57 \\ 1-\alpha = 0.95 & z_{.975} = 1.96 \\ 1-\alpha = 0.90 & z_{.95} = 1.64 \end{array}$$

Más confianza implica intervalos más anchos.

Intervalo de confianza

Cuando no se conoce $V(\bar{y})$ y se estima con $\hat{V}(\bar{y})$ entonces,

$$\frac{\bar{y}-\bar{Y}}{\sqrt{\hat{V}(\bar{y})}} \sim t_{n-1}$$

y el intervalo aproximado del $(1-\alpha)\times 100\%$ de confianza para $\bar{Y}$ es:

$$\bar{y} \pm t_{n-1}^{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{V}(\bar{y})}$$

En general, como n es grande, el valor de la t se aproxima a la normal y se usa como intervalo de confianza:

$$\bar{y} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{V}(\bar{y})}$$

Estimadores de totales y proporciones

Estimador del total

$$Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i = N\bar{Y}$$

$$\hat{Y} = N\hat{\bar{Y}} = N\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N}{n} y_i \left\{ \text{Note que } \frac{N}{n} = \frac{1}{\frac{n}{N}} \right\}$$

$$E(\hat{Y}) = Y$$

$$V(\hat{Y}) = V(N\bar{y}) = N^2 V(\bar{y}) = N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S^2}{n}$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\hat{S}^2}{n} \text{ es insesgado para } V(\hat{Y})$$

Intervalo del $100(1-\alpha)\%$ de confianza para Y es:

$$\hat{Y} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{V}(\hat{Y})}$$

Estimador de una proporción

Sea:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & U_i \text{ tiene la característica } \mathrm{A} \\ 0 & U_i \text{ no tiene la característica } \mathrm{A} \end{cases}$$

$$P = \frac{\#\text{ de elementos que tienen la característica } \mathrm{A}}{\text{total de elementos}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}$$

Un estimador insesgado de P es:

$$\hat{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \bar{y}$$

Con varianza:

$$V(\hat{P}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{n} \frac{N}{N-1} P(1-P)$$

Estimador de una proporción

y su estimador es:

$$\hat{V}(\hat{P}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n-1}$$

Suponiendo normalidad, el intervalo del $100(1-\alpha)\%$ de confianza es:

$$\hat{P} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n-1}}$$

Determinación del tamaño de muestra

Determinación del tamaño de muestra

$$n = ?$$

n pequeña

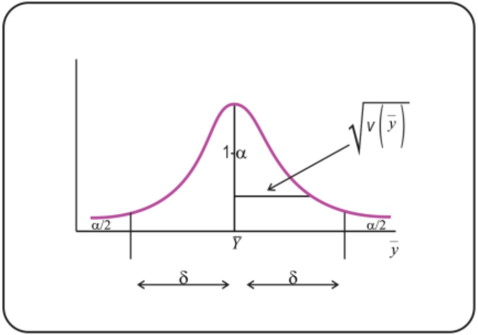
- inferencias inútiles
- intervalos de confianza muy grandes
- poca precisión

n grande

- costos elevados
- se puede descuidar la calidad de la información

Determinación del tamaño de muestra

Suponiendo normalidad en el estimador:



n para estimar un promedio

Se fija una precisión δ y una confianza $1-\alpha$. De la gráfica anterior,

$$P(|\bar{y}-\bar{Y}|<\delta)=1-\alpha$$
$$P(\bar{y}-\delta<\bar{Y}<\bar{y}+\delta)=1-\alpha$$

Por otro lado, sabemos que:

$$P\left(-z_{1-\alpha/2}<\frac{\bar{y}-\bar{Y}}{\sqrt{V(\bar{y})}}<z_{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha$$
$$P\left(\bar{y}-z_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\bar{y})}<\bar{Y}<\bar{y}+z_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\bar{y})}\right)=1-\alpha$$

Por lo tanto,

$$\delta=z_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\bar{y})}$$

$$\delta = z_{1-\alpha/2}\sqrt{\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{S^2}{n}} = z_{1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)S^2}$$

$$\delta^2 = z^2_{1-\alpha/2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)S^2$$

Despejando n

$$n = \frac{1}{\frac{\delta^2}{S^2 z^2_{1-\alpha/2}} + \frac{1}{N}}$$

Si N es grande

$$n_0 = \frac{S^2 z^2_{1-\alpha/2}}{\delta^2}$$

Si N no es grande

$$n = \frac{1}{\frac{1}{n_0}+\frac{1}{N}} = \frac{n_0}{1+\frac{n_0}{N}}$$

δ es el error absoluto.

n para estimar un promedio

Necesitamos conocer S^2 para calcular el tamaño de muestra.
Opciones:
1. Usar estimadores de S^2 de encuestas similares anteriores o de censos.
2. Estimar S^2 usando una encuesta piloto.

n para estimar un total

Suponiendo normalidad en el estimador:

$$n_0 = \frac{z^2_{1-\alpha/2} N^2 S^2}{\delta^2}$$

$$n = \begin{cases} n_0 & \text{si } N \text{ es grande} \\ \frac{n_0}{1+\frac{n_0}{N}} & \text{si } N \text{ no es grande} \end{cases}$$

n para estimar una proporción

Recordemos que con la definición de la variable a medir Y_i como 0 o 1 , tenemos que $P = \bar{Y}$, entonces, suponiendo normalidad en el estimador de P

$$n_0 = \frac{z^2_{1-\alpha/2} P(1-P)}{\delta^2}$$

$$n = \begin{cases} n_0 & \text{si } N \text{ es grande} \\ \frac{n_0}{1+\frac{n_0}{N}} & \text{si } N \text{ no es grande} \end{cases}$$

Gracias!!!