Análisis Demográfico

Dr. Víctor Manuel García Guerrero
vmgarcia@colmex.mx

"Procesos de decremento múltiple"

Licenciatura en Actuaría
VI semestre, 2025-2

Facultad de Ciencias
UNAM

Procesos de decremento múltiple

- Recordemos que los procesos de **decremento simple** son aquellos en los cuales los individuos tienen solo una forma de salida de un estado determinado.
- En los procesos de **decremento múltiple** los individuos tienen más de una forma de salida.
- Los procesos de **decremento múltiple** son mucho **más comunes** en demografía que los procesos de decremento simple.
- Cuando existen múltiples causas posibles de salida, también se habla de **riesgos en competencia**.
  - En fecundidad: riesgos de embarazo y uso de anticonceptivos.
  - En migración: riesgo de migrar a diferentes lugares.
  - En nupcialidad: riesgos de divorcio y viudez.

Funciones en decremento múltiple

$${}_n d_x^i = \text{número de decrementos por la causa } i \text{ entre } x \text{ a } x+n$$

$$\begin{aligned} {}_n q_x^i &= \text{probabilidad de salida por } i \text{ entre } x \text{ y } x+n \text{ si alcanzó la edad } x \\ &= {}_n d_x^i / l_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_n m_x^i &= \text{tasa de decremento por causa } i \text{ en el intervalo de edad } x \text{ a } x+n \\ &= {}_n d_x^i / {}_n L_x \approx {}_n D_x^i / {}_n \bar{N}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_x^i &= \text{número de personas que alcanzan la edad } x \text{ y eventualmente} \\ &\quad \text{sucumbirán a la causa } i \\ &= \sum_{a=x}^{\infty} {}_n d_a^i \end{aligned}$$

$$l_x^i / l_x = \text{proporción de personas en edad } x \text{ que eventualmente saldrán por } i$$

Funciones en decremento múltiple

Sumados para todas las causas i los decrementos deben equivaler al número total de salidas del estado definido:

$$\sum_i {}_nd_x^i = {}_nd_x$$

Por nuestras fórmulas para ${}_nm_x^i$ y ${}_nq_x^i$, estas deben sumar a la función equivalente en la tabla de vida para todas las causas:

$$\textstyle\sum_i {}_nm_x^i = \sum_i \frac{{}_nd_x^i}{{}_nL_x} = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} = {}_nm_x$$

y

$$\textstyle\sum_i {}_nq_x^i = \sum_i \frac{{}_nd_x^i}{l_x} = \frac{{}_nd_x}{l_x} = {}_nq_x$$

Funciones en decremento múltiple

Además, dado que:

$$l_x^i = \sum_{a=x}^{\infty} {}_n d_a^i$$

$$\sum_i l_x^i = \sum_i \sum_{a=x}^{\infty} {}_n d_a^i = \sum_{a=x}^{\infty} {}_n d_a = l_x$$

La relación anterior establece que:

> *Todos los sobrevivientes a la edad x en la cohorte deben abandonar el estado definido por una u otra causa reconocida de decremento por encima de dicha edad.*

Ej: Líneas de vida para una cohorte de 10 nacimientos

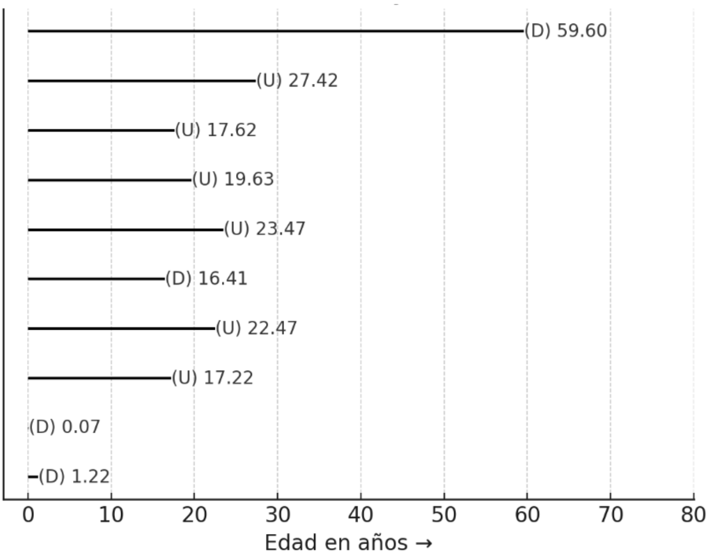

Tabla de vida para la cohorte hipotética

x	l_x	${}_n d_x^{\mathrm{D}}$	${}_n d_x^{\mathrm{U}}$	${}_n d_x$	${}_n q_x^{\mathrm{D}}$	${}_n q_x^{\mathrm{U}}$	${}_n q_x$	l_x^{D}	l_x^{U}	L_x
0	10	1	0	1	1/10	0	1/10	4	6	9.07
1	9	1	0	1	1/9	0	1/9	3	6	32.22
5	8	0	0	0	0	0	0	2	6	40.00
10	8	1	3	4	1/8	3/8	4/8	2	6	70.88
20	4	0	3	3	0	3/4	3/4	1	3	23.36
30	1	0	0	0	0	0	0	1	0	10.00
40	1	0	0	0	0	0	0	1	0	10.00
50	1	1	0	1	1/1	0	1/1	1	0	9.60
60	0							0	0	

En donde: $\quad {}_n d_x = {}_n d_x^{\mathrm{D}} +_n d_x^{\mathrm{U}}$ y ${}_n q_x = {}_n q_x^{\mathrm{D}} +_n q_x^{\mathrm{U}}$

Tablas de Vida de Decrementos Múltiples de Período

- El problema básico consiste en convertir las tasas observadas ${}_nM_x^i$ en las probabilidades de salir de la tabla por diversas causas.
- Para realizar esta conversión, debemos referirnos a la relación fundamental entre tasas de decremento y probabilidades de decremento en una cohorte.

$$ {}_nm_x^i = \frac{{}_nd_x^i}{{}_nL_x} $$

y

$$ {}_nq_x^i = \frac{{}_nd_x^i}{l_x} $$

- Nótese que los numeradores de m_x^i y q_x^i son los mismos, mientras que el denominador de la primera es ${}_nL_x$ y el de la segunda es l_x.

Tablas de Vida de Decrementos Múltiples de Período

- Podemos utilizar la relación entre l_x y ${}_nL_x$ derivada del capítulo anterior para desarrollar una fórmula de conversión. Sustituyendo $({}_nL_x + (n - {}_na_x){}_nd_x)/n$ por l_x en la expresión para q_x^i obtenemos:

$$ {}_nq_x^i = \frac{n \cdot {}_nm_x^i}{1 + (n - {}_na_x)_n\, m_x} $$

- Es común denotar la tasa de decremento por causas distintas a i en el intervalo de edad de x a $x+n$ como ${}_nm_x^{-i}$. Por lo tanto, ${}_nm_x = {}_nm_x^i + {}_nm_x^{-i}$. Al insertar esta relación en la fórmula anterior:

$$ {}_nq_x^i = \frac{n \cdot {}_nm_x^i}{1 + (n - {}_na_x)\left({}_nm_x^i + {}_nm_x^{-i}\right)} $$

Ahora la naturaleza competitiva de los múltiples decrementos se hace evidente. Manteniendo constante ${}_nm_x^i$, cuanto mayor sea ${}_nm_x^{-i}$, menor será ${}_nq_x^i$. Es decir, cuando ${}_nm_x^{-i}$ es mayor, más de los potenciales afectados por cáncer -por ejemplo- serán eliminados por otras causas en el intervalo de edad. Debido a esta dependencia, a ${}_nq_x^i$ se le conoce comúnmente como *“probabilidad dependiente”*.

Tablas de Vida de Decrementos Múltiples de Período

Nótese que, al dividir ${}_nq_x^i$ entre ${}_nq_x$, obtenemos:

$$\frac{{}_nq_x^i}{{}_nq_x} = \frac{{}_nd_x^i}{{}_nd_x} = \frac{{}_nm_x^i}{{}_nm_x} \approx \frac{{}_nD_x^i}{{}_nD_x}$$

Por lo tanto:

$${}_nq_x^i = {}_nq_x \cdot \frac{{}_nd_x^i}{{}_nd_x} = {}_nq_x \cdot \frac{{}_nm_x^i}{{}_nm_x}$$

Una vez que hemos calculado la tabla de vida para todas las causas combinadas, podemos simplemente tomar el vector ${}_nq_x$ de esa tabla y distribuirlo entre varias causas de decremento según sus tasas relativas de decremento, ya que las probabilidades guardan la misma proporción que las tasas, o los decrementos registrados mismos.

Pasos para construir una TVDM de período

1. Cálculo de una tabla de vida para todas las causas de decremento combinadas. El componente básico en esta tabla es:

$$ {}_nm_x = \sum_i {}_nm_x^i $$

El procedimiento habitual consiste en asumir para cada causa que ${}_nM_x^i = {}_nm_x^i$ (lo que también implica ${}_nM_x = {}_nm_x$). Esto debe convertirse a ${}_nq_x^i$ como se describió en el capítulo anterior.

2. Calcular la probabilidad de salida por causa i en el intervalo de edad x a $x+n$ como:

$$ {}_nq_x^i = {}_nq_x \cdot \frac{{}_nm_x^i}{{}_nm_x} $$

$$ {}_nq_x^i = {}_nq_x \cdot \frac{{}_nM_x^i}{{}_nM_x} = {}_nq_x \cdot \frac{{}_nD_x^i}{{}_nD_x} $$

Pasos para construir una TVDM de período

3. Cálculo del número de decrementos por causa i en el intervalo de edad x a $x+n$

$$ {}_nd_x^i = l_x \cdot {}_nq_x^i $$

4. Cálculo del número de personas de edad x^* que eventualmente saldrán de la tabla por la causa i:

$$ l_{x^*}^i = \sum_{x=x^*}^{\infty} {}_nd_x^i $$

Ej: TVDM de período

Edad x	${}_nD_x$ Muertes totales	${}_nD_x^i$ Muertes por neoplasma	l_x	q_x
0	15,758	63	100,000	0.00783
1	3,169	275	99,217	0.00168
5	1,634	268	99,050	0.00092
10	1,573	217	98,959	0.00090
15	3,955	318	98,870	0.00236
20	4,948	467	98,637	0.00262
25	6,491	856	98,379	0.00314
30	9,428	1,924	98,070	0.00425
35	12,027	3,532	97,653	0.00584
40	15,543	5,958	97,083	0.00818
45	19,264	8,434	96,289	0.01330
50	25,384	11,673	95,008	0.02095
55	37,211	17,078	93,018	0.03371
60	59,431	25,263	89,882	0.05155
65	88,087	33,534	85,249	0.07669
70	114,693	36,695	78,711	0.11552
75	143,554	36,571	69,618	0.17427
80	164,986	30,220	57,486	0.27363
85+	320,578	32,739	41,756	1.00000

Calcule ${}_nq_x^i$, ${}_nd_x^i$, y l_x^i

Relaciones matemáticas en el decremento múltiple

En el capítulo anterior se definió la fuerza de mortalidad como:

$$\mu(x) = \lim_{n \to 0} {}_n m_x$$

Asimismo se puede definir la fuerza de decremento de la causa i como:

$$\mu^i(x) = \lim_{n \to 0} {}_n m_x^i$$

La fuerza de decremento de la causa i a la edad x es la tasa a la cual las personas abandonan el estado definido por la causa i en el pequeño intervalo de edad de x a $x + dx$.

Dado que, con k causas de decremento,

$${}_n m_x^1 +_n m_x^2 + \cdots +_n m_x^k =_n m_x$$

Al tomar el límite de ambos lados cuando n tiende a cero, se tiene:

$$\mu^1(x) + \mu^2(x) + \cdots + \mu^k(x) = \mu(x)$$

Relaciones matemáticas en el decremento múltiple

Cómo se vió en el capítulo anterior una de las relaciones más importantes en demografía es:

$$ {}_np_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu(y)\,dy} $$

En un proceso de decremento múltiple podemos expresar $\mu(y)$ como la suma de $\mu^i(y)$ sobre todas las i, de modo que:

$$ \begin{aligned} {}_np_x &= e^{-\int_x^{x+n} [\mu^1(y)+\mu^2(y)+\cdots+\mu^k(y)]\,dy} \\ &= e^{-\int_x^{x+n} \mu^1(y)\,dy} . e^{-\int_x^{x+n} \mu^2(y)\,dy} \ldots . e^{-\int_x^{x+n} \mu^k(y)\,dy} \end{aligned} $$

ó,

$$ {}_np_x = {}^*_np^1_x \cdot {}^*_np^2_x \cdot \ldots \cdot {}^*_np^k_x $$

donde

$$ {}^*_np^i_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu^i(y)\,dy} $$

Es la probabilidad de permanecer en el estado definido, en el intervalo x a $x+n$, si solo estuviera operando el decremento i.

Relaciones matemáticas en el decremento múltiple

Otras funciones en la tabla de vida de todos los decrementos combinados se pueden expresar de manera similar, en términos de las diversas funciones de fuerza de decremento, sustituyendo $\mu^1(x) + \mu^2(x) + \cdots + \mu^k(x)$ por $\mu(x)$ en la fórmula de notación continua correspondiente. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} e_0^\circ &= \int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu(a)\, da} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\int_0^x [\mu^1(a)+\mu^2(a)+\cdots+\mu^k(a)]\, da} dx \end{aligned}$$

Relaciones matemáticas en el decremento múltiple

Además, se pueden derivar funciones de decrementos simples i observando que las muertes por causa i en un intervalo de edad pequeño da son $l(a)\mu^i(a)da$. Entonces:

$$
{}_nq_x^i = \frac{{}_nd_x^i}{l(x)} = \frac{\int_x^{x+n} l(a)\mu^i(a)\,da}{l(x)} = \int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y)\,dy}\mu^i(a)\,da
$$
$$
= \int_x^{x+n} e^{-\int_x^a [\mu^1(y)+\mu^2(y)+\cdots+\mu^k(y)]\,dy}\mu^i(a)\,da
$$

mientras:

$$
{}_nm_x^i = \frac{{}_nd_x^i}{{}_nL_x} = \frac{\int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y)\,dy}\mu^i(a)\,da}{\int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y)\,dy}\,da}
$$
$$
= \frac{\int_x^{x+n} e^{-\int_x^a [\mu^1(y)+\mu^2(y)+\cdots+\mu^k(y)]\,dy}\mu^i(a)\,da}{\int_x^{x+n} e^{-\int_x^a [\mu^1(y)+\mu^2(y)+\cdots+\mu^k(y)]\,dy}\,da}
$$

Relaciones matemáticas en el decremento múltiple

Para una población en un momento dado, la composición por edades, $N(a)$, depende no solo de las funciones de fuerza de decremento, sino también de la composición por edades preexistente de la población. Por lo tanto, la tasa de mortalidad por decremento i entre la edad x y $x+n$ observada en la población, ${}_nM_x^i$, será:

$$
\begin{aligned}
{}_nM_x^i &= \frac{\int_x^{x+n} N(a)\mu^i(a)\,da}{\int_x^{x+n} N(a)\,da} \\
&= \int\limits_x^{x+n} c(a)\mu^i(a)\,da
\end{aligned}
$$

donde $c(a)$ es la proporción de la población de edad a hasta $a+da$, que está dentro del grupo de edad x a $x+n$.

Tablas de decremento simple asociadas - datos de período

- Con frecuencia, existe un interés por saber cómo se vería una tabla de vida si *solo* una causa de decremento i actuara en la extinción de una cohorte. El decremento que nos interesa también podría ser $-i$ (todos los decrementos excepto i).
- Si una tabla se construye con base en $\mu^{-i}(x)$, se le denomina tabla de "causa eliminada", ya que la causa i se ha eliminado arbitrariamente del conjunto de múltiples decrementos.
- La construcción de una tabla de decremento simple asociada (ASDT por sus siglas en inglés) implica un experimento mental en el que nos preguntamos "¿qué pasaría si...?".
- Existen algunos procedimientos para el cálculo de la ASDT, uno de los más usados se explica a continuación.

Método de Chiang para la estimación de ASDT

El método, propuesto por Chiang (1968), asume que la función de fuerza de decremento por causa i es proporcional a la función de fuerza de decremento por todas las causas combinadas en el intervalo de edad x a $x+n$:

$$\mu^i(a) = R^i \cdot \mu(a) \quad \text{para } x \leq a \leq x+n,$$

donde R^i es la constante de proporcionalidad para el decremento i en el intervalo. Este supuesto implica que $\mu^i(a)$ y $\mu^{-i}(a)$ tienen exactamente la misma forma entre las edades x y $x+n$, aunque sus niveles generalmente difieren.

Método de Chiang para la estimación de ASDT

Dado que,

$$ {}_{n}^{*}p_{x}^{i} = e^{-\int_{x}^{x+n} \mu^{i}(a)da} = e^{-\int_{x}^{x+n} R^{i}\cdot\mu(a)da} $$

entonces

$$ {}_{n}^{*}p_{x}^{i} = e^{-R^{i}\cdot\int_{x}^{x+n} \mu(a)da} = \left[e^{-\int_{x}^{x+n} \mu(a)da}\right]^{R^{i}} $$

$$ = \left[{}_{n}p_{x}\right]^{R^{i}} $$

En este caso, la función ${}_{n}p_{x}$ en la tabla de decremento simple asociada (ASDT) guarda una relación con la función ${}_{n}p_{x}$ en la tabla de vida "padre", que considera todas las causas combinadas. Esta, es igual a la ${}_{n}p_{x}$ en la tabla de vida padre elevada a la potencia R^{i}.

Método de Chiang para la estimación de ASDT

Además, por el supuesto de proporcionalidad, el valor de R^i en el intervalo simplemente será igual a la razón entre los decrementos observados por causa i y los decrementos por todas las causas combinadas:

$$\frac{{}_nD_x^i}{{}_nD_x} = \frac{\int_x^{x+n} N(a)R^i\mu(a)\,da}{\int_x^{x+n} N(a)\mu(a)\,da} = R^i$$

Por lo tanto, al sustituir R^i obtenemos:

$${}_n^*p_x^i = {}_np_x^{\left(\frac{{}_nD_x^i}{{}_nD_x}\right)}$$

Este ingenioso recurso resuelve el problema de conversión ${}_nm_x \to {}_nq_x$ al generar la ASDT. Sin embargo, no nos indica qué valor de ${}_n^*m_x^i$ se debería usar en la tabla de vida o, lo que es equivalente, qué valor de ${}_n^*a_x^i$ debería emplearse.

Método de Chiang para la estimación la ASDT

En el caso de ${}^*_n a^i_x$ una opción puede ser establecerla igual, para todo i, a la ${}_n a_x$ de la tabla de vida de todas las causas combinadas (padre).[1]

Sin embargo, según el supuesto de Chiang, el valor ${}_n a_x$ en la tabla de vida de todas las causas combinadas debe ser menor que los valores ${}^*_n a^i_x$ para todo i.

El enfoque más satisfactorio para estimar ${}^*_n a^i_x$ probablemente consiste en graduar la función ${}^*_n q^i_x$ en intervalos sucesivos e inferir su valor a partir de la conformación general de este esquema.

Si asumimos que la distribución de muertes por causa i sigue una función cuadrática en el intervalo de edad $x-5$ a $x+10$, entonces la fórmula simple de graduación para datos quinquenales de edad es:

$$ {}^*_5 a^i_x = \frac{\frac{5}{24}\,{}^*_5 d^i_{x-5} + 2.5\,{}^*_5 d^i_x + \frac{5}{24}\,{}^*_5 d^i_{x+5}}{{}^*_5 d^i_x} \qquad (*) $$

[1] Las tablas de vida oficiales por causa de muerte de EE.UU. de 1959–61 (NCHS, 1968) utilizaron este enfoque.

Método de Chiang para la estimación de ASDT

Para intervalos de longitud irregular una aproximación de ${}^{*}_{n}a^{i}_{x}$, mediante interpolación, es:

$$ {}^{*}_{n}a^{i}_{x} = n + R^{i}\frac{{}_{n}q_{x}}{{}^{*}_{n}q^{i}_{x}}({}_{n}a_{x} - n) \qquad (**) $$

- En el siguiente cuadro se presentan los datos para la construcción de una tabla de decremento simple asociada, para causas de muerte distintas al neoplasma. Está basado en la información de mujeres estadounidenses en 1991 presentados en el cuadro de más arriba.
- La tabla se debe construir mediante el método de Chiang, con los valores ${}^{*}_{n}a^{-i}_{x}$ estimados por graduación (ecuación *) para $x = 10$ a 75, y usando la ecuación (**) para $x = 0, 1, 5$, y 80. Para el último grupo de edad, se debe asumir que ${}^{*}_{n}m^{i}_{x} = {}_{n}m^{i}_{x}$, en cuyo caso ${}^{*}_{\infty}a^{-i}_{85}$ es e°_{85}/R^{-i}.

Ej: datos para el cálculo de una ASDT

Edad x	R^{-i}	ℓ_x	${}_nP_x$	${}_na_x$	e_x°
0	0.99600	100,000	0.99217	0.152	78.92
1	0.91322	99,217	0.99832	1.605	78.54
5	0.83599	99,050	0.99908	2.275	74.67
10	0.86205	98,959	0.99910	2.843	69.74
15	0.91960	98,870	0.99764	2.657	64.80
20	0.90562	98,637	0.99738	2.547	59.95
25	0.86813	98,379	0.99686	2.550	55.10
30	0.79593	98,070	0.99575	2.616	50.26
35	0.70633	97,653	0.99416	2.677	45.46
40	0.61668	97,083	0.99182	2.685	40.72
45	0.56219	96,289	0.98670	2.681	36.03
50	0.54014	95,008	0.97905	2.655	31.48
55	0.54105	93,018	0.96629	2.647	27.10
60	0.57492	89,882	0.94845	2.646	22.95
65	0.61931	85,249	0.92331	2.631	19.05
70	0.68006	78,711	0.88448	2.628	15.42
75	0.74525	69,618	0.82573	2.618	12.09
80	0.81683	57,486	0.72637	2.570	9.08
85+	0.89788	41,756	0.00000	6.539	6.54

Calcule ${}^*_np_x^{-i}$, ${}^*_nl_x^{-i}$, ${}^*_na_x^{-i}$ y ${}^*e_x^{-i}$

Descomposición por causas específicas de diferencias en e_0°

La contribución específica de diferencias en tasas de mortalidad por causa i entre las edades x y $x+n$, ${}_n\Delta_x^i$, puede estimarse con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} {}_n\Delta_x^i &= {}_n\Delta_x \cdot \frac{{}_nm_x^i(2) - {}_nm_x^i(1)}{{}_nm_x(2) - {}_nm_x(1)} \\ &= {}_n\Delta_x \cdot \frac{{}_nR_x^i(2) \cdot {}_nm_x(2) - {}_nR_x^i(1) \cdot {}_nm_x(1)}{{}_nm_x(2) - {}_nm_x(1)} \end{aligned}$$

donde

${}_nR_x^i(j) =$ proporción de muertes por causa i en el grupo de edad x a $x+n$ $({}_nD_x^i/{}_nD_x)$ en la población j (o el tiempo j), y

${}_n\Delta_x =$ contribución de las diferencias de mortalidad por todas las causas en el grupo de edad x a $x+n$ a las diferencias en la esperanza de vida.

Descomposición por causas específicas de diferencias en e_0°

Se puede demostrar que:

$$
\begin{aligned}
{}_n\Delta_x &= \sum_i {}_n\Delta_x^i, \quad \text{y} \\
e_0^\circ(2) - e_0^\circ(1) &= \sum_x {}_n\Delta_x = \sum_x \sum_i {}_n\Delta_x^i
\end{aligned}
$$

Las contribuciones por edad y causa pueden presentarse en una tabla bidimensional donde las contribuciones elementales suman la diferencia total en esperanza de vida.

- En la siguiente lámina se presenta una aplicación del método de descomposición por edad y causa para analizar la diferencia en las esperanzas de vida al nacer de los hombres entre China e India en 1990.

Ej: descomposición por causas específicas de ${}_n\Delta_x$ en e_0°

	India				China				
Edad x	${}_nm_x$	${}_nR_x^1$	${}_nR_x^2$	${}_nR_x^3$	${}_nm_x$	${}_nR_x^1$	${}_nR_x^2$	${}_nR_x^3$	${}_n\Delta_x$
0	0.0267	0.882	0.073	0.046	0.0084	0.677	0.174	0.149	5.6
5	0.0025	0.504	0.188	0.309	0.0009	0.174	0.337	0.488	0.8
15	0.0021	0.382	0.223	0.394	0.0015	0.068	0.380	0.552	0.3
30	0.0043	0.429	0.315	0.257	0.0028	0.101	0.573	0.326	0.6
45	0.0139	0.304	0.592	0.104	0.0102	0.095	0.796	0.109	0.8
60	0.0388	0.248	0.722	0.030	0.0342	0.070	0.879	0.051	0.3
70+	0.0929	0.247	0.728	0.025	0.1003	0.084	0.877	0.039	-0.3
Total									**8.2**

Diferencia total $= e_0^\circ(\text{China}) - e_0^\circ(\text{India}) = 66{,}5 - 58{,}3 = 8{,}2$ años $= \sum_{x=0}^{70} \sum_{i=1}^{3} {}_n\Delta_x^i$

Calcule ${}_n\Delta_x^1$, ${}_n\Delta_x^2$, y ${}_n\Delta_x^3$

Recuerde que ${}_n\Delta_x^i = {}_n\Delta_x \cdot \left(\frac{{}_nR_x^i(2)\cdot{}_nm_x(2) - {}_nR_x^i(1)\cdot{}_nm_x(1)}{{}_nm_x(2) - {}_nm_x(1)} \right)$