

ANÁLISIS DEMOGRÁFICO

DR. VÍCTOR MANUEL GARCÍA GUERRERO
vmgarcia@colmex.mx

“PROCESOS DE DECREMENTO MÚLTIPLE”

Licenciatura en Actuaría
VI semestre, 2025-2



Facultad de
Ciencias
UNAM



Procesos de decremento múltiple

- Recordemos que los procesos de **decremento simple** son aquellos en los cuales los individuos tienen solo una forma de salida de un estado determinado.
- En los procesos de **decremento múltiple** los individuos tienen más de una forma de salida.
- Los procesos de **decremento múltiple** son mucho **más comunes** en demografía que los procesos de decremento simple.
- Cuando existen múltiples causas posibles de salida, también se habla de **riesgos en competencia**.
 - En fecundidad: riesgos de embarazo y uso de anticonceptivos.
 - En migración: riesgo de migrar a diferentes lugares.
 - En nupcialidad: riesgos de divorcio y viudez.

Funciones en decremento múltiple

${}_n d_x^i$ = número de decrementos por la causa i entre x a $x + n$

${}_n q_x^i$ = probabilidad de salida por i entre x y $x + n$ si alcanzó la edad x
 $= {}_n d_x^i / l_x$

${}_n m_x^i$ = tasa de decremento por causa i en el intervalo de edad x a $x + n$
 $= {}_n d_x^i / {}_n L_x \approx {}_n D_x^i / {}_n \bar{N}_x$

l_x^i = número de personas que alcanzan la edad x y eventualmente sucumbirán a la causa i

$$= \sum_{a=x}^{\infty} {}_n d_a^i$$

l_x^i / l_x = proporción de personas en edad x que eventualmente saldrán por i

Funciones en decremento múltiple

Sumados para todas las causas i los decrementos deben equivaler al número total de salidas del estado definido:

$$\sum_i {}_n d_x^i = {}_n d_x$$

Por nuestras fórmulas para ${}_n m_x^i$ y ${}_n q_x^i$, estas deben sumar a la función equivalente en la tabla de vida para todas las causas:

$$\sum_i {}_n m_x^i = \sum_i \frac{{}_n d_x^i}{{}_n L_x} = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = {}_n m_x$$

y

$$\sum_i {}_n q_x^i = \sum_i \frac{{}_n d_x^i}{l_x} = \frac{{}_n d_x}{l_x} = {}_n q_x$$

Funciones en decremento múltiple

Además, dado que:

$$l_x^i = \sum_{a=x}^{\infty} {}_n d_a^i$$

$$\sum_i l_x^i = \sum_i \sum_{a=x}^{\infty} {}_n d_a^i = \sum_{a=x}^{\infty} {}_n d_a = l_x$$

La relación anterior establece que:

Todos los sobrevivientes a la edad x en la cohorte deben abandonar el estado definido por una u otra causa reconocida de decremento por encima de dicha edad.

Ej: Líneas de vida para una cohorte de 10 nacimientos

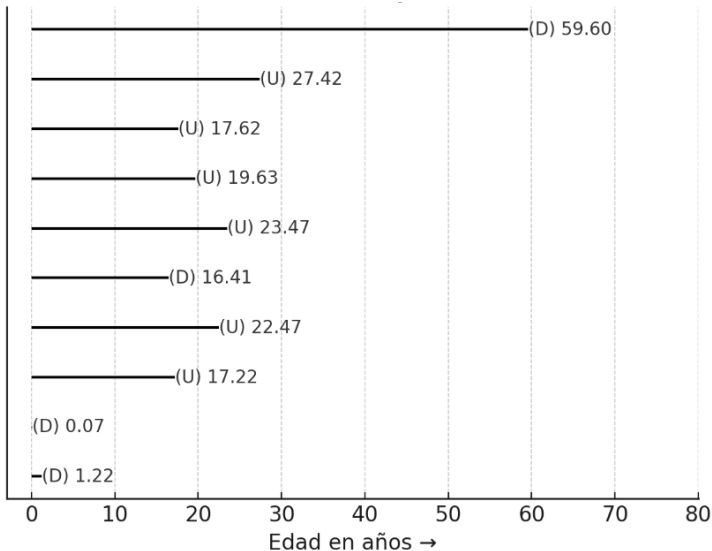


Tabla de vida para la cohorte hipotética

x	l_x	${}_n d_x^D$	${}_n d_x^U$	${}_n d_x$	${}_n q_x^D$	${}_n q_x^U$	${}_n q_x$	l_x^D	l_x^U	L_x
0	10	1	0	1	1/10	0	1/10	4	6	9.07
1	9	1	0	1	1/9	0	1/9	3	6	32.22
5	8	0	0	0	0	0	0	2	6	40.00
10	8	1	3	4	1/8	3/8	4/8	2	6	70.88
20	4	0	3	3	0	3/4	3/4	1	3	23.36
30	1	0	0	0	0	0	0	1	0	10.00
40	1	0	0	0	0	0	0	1	0	10.00
50	1	1	0	1	1/1	0	1/1	1	0	9.60
60	0							0	0	

En donde: ${}_n d_x = {}_n d_x^D + {}_n d_x^U$ y ${}_n q_x = {}_n q_x^D + {}_n q_x^U$

Tablas de Vida de Decrementos Múltiples de Período

- El problema básico consiste en convertir las tasas observadas ${}_nM_x^i$ en las probabilidades de salir de la tabla por diversas causas.
- Para realizar esta conversión, debemos referirnos a la relación fundamental entre tasas de decremento y probabilidades de decremento en una cohorte.

$${}_nm_x^i = \frac{{}_nd_x^i}{{}_nL_x}$$

y

$${}_nq_x^i = \frac{{}_nd_x^i}{l_x}$$

- Nótese que los numeradores de m_x^i y q_x^i son los mismos, mientras que el denominador de la primera es ${}_nL_x$ y el de la segunda es l_x .

Tablas de Vida de Decrementos Múltiples de Período

- Podemos utilizar la relación entre l_x y ${}_nL_x$ derivada del capítulo anterior para desarrollar una fórmula de conversión. Sustituyendo $({}_nL_x + (n - {}_na_x){}_nd_x)/n$ por l_x en la expresión para q_x^i obtenemos:

$${}_nq_x^i = \frac{n \cdot {}_nm_x^i}{1 + (n - {}_na_x){}_nm_x}$$

- Es común denotar la tasa de decremento por causas distintas a i en el intervalo de edad de x a $x + n$ como ${}_nm_x^{-i}$. Por lo tanto, ${}_nm_x = {}_nm_x^i + {}_nm_x^{-i}$. Al insertar esta relación en la fórmula anterior:

$${}_nq_x^i = \frac{n \cdot {}_nm_x^i}{1 + (n - {}_na_x)({}_nm_x^i + {}_nm_x^{-i})}$$

Ahora la naturaleza competitiva de los múltiples decrementos se hace evidente.

Manteniendo constante ${}_nm_x^i$, cuanto mayor sea ${}_nm_x^{-i}$, menor será ${}_nq_x^i$. Es decir, cuando ${}_nm_x^{-i}$ es mayor, más de los potenciales afectados por cáncer -por ejemplo- serán eliminados por otras causas en el intervalo de edad. Debido a esta dependencia, a ${}_nq_x^i$ se le conoce comúnmente como “*probabilidad dependiente*”.

Tablas de Vida de Decrementos Múltiples de Período

Nótese que, al dividir ${}_nq_x^i$ entre ${}_nq_x$, obtenemos:

$$\frac{{}_nq_x^i}{{}_nq_x} = \frac{{}_nd_x^i}{{}_nd_x} = \frac{{}_nm_x^i}{{}_nm_x} \approx \frac{{}_nD_x^i}{{}_nD_x}$$

Por lo tanto:

$${}_nq_x^i = {}_nq_x \cdot \frac{{}_nd_x^i}{{}_nd_x} = {}_nq_x \cdot \frac{{}_nm_x^i}{{}_nm_x}$$

Una vez que hemos calculado la tabla de vida para todas las causas combinadas, podemos simplemente tomar el vector ${}_nq_x$ de esa tabla y distribuirlo entre varias causas de decremento según sus tasas relativas de decremento, ya que las probabilidades guardan la misma proporción que las tasas, o los decrementos registrados mismos.

Pasos para construir una TVDM de período

- 1 Cálculo de una tabla de vida para todas las causas de decremento combinadas. El componente básico en esta tabla es:

$${}_n m_x = \sum_i {}_n m_x^i$$

El procedimiento habitual consiste en asumir para cada causa que ${}_n M_x^i = {}_n m_x^i$ (lo que también implica ${}_n M_x = {}_n m_x$). Esto debe convertirse a ${}_n q_x^i$ como se describió en el capítulo anterior.

- 2 Calcular la probabilidad de salida por causa i en el intervalo de edad x a $x + n$ como:

$${}_n q_x^i = {}_n q_x \cdot \frac{{}_n m_x^i}{{}_n m_x}$$

$${}_n q_x^i = {}_n q_x \cdot \frac{{}_n M_x^i}{{}_n M_x} = {}_n q_x \cdot \frac{{}_n D_x^i}{{}_n D_x}$$

Pasos para construir una TVDM de período

- 3 Cálculo del número de decrementos por causa i en el intervalo de edad x a $x + n$

$${}_n d_x^i = l_x \cdot {}_n q_x^i$$

- 4 Cálculo del número de personas de edad x^* que eventualmente saldrán de la tabla por la causa i :

$$l_{x^*}^i = \sum_{x=x^*}^{\infty} {}_n d_x^i$$

Ej: TVDM de período

Edad x	n Muertes totales	${}_nD_x^i$ Muertes por neoplasma	l_x
0	15,758	63	100,000
1	3,169	275	99,217
5	1,634	268	99,050
10	1,573	217	98,959
15	3,955	318	98,870
20	4,948	467	98,637
25	6,491	856	98,379
30	9,428	1,924	98,070
35	12,027	3,532	97,653
40	15,543	5,958	97,083
45	19,264	8,434	96,289
50	25,384	11,673	95,008
55	37,211	17,078	93,018
60	59,431	25,263	89,882
65	88,087	33,534	85,249
70	114,693	36,695	78,711
75	143,554	36,571	69,618
80	164,986	30,220	57,486
85	320,578	32,739	41,756