

ANÁLISIS DEMOGRÁFICO

DR. VÍCTOR MANUEL GARCÍA GUERRERO
vmgarcia@colmex.mx

“PROCESOS DE DECREMENTO SIMPLE”

Licenciatura en Actuaría
VI semestre, 2025-2



Facultad de
Ciencias
UNAM



La Tabla de Mortalidad

Datos observados: ${}_nN_x$ es la población a mitad de año entre las edades x y $x + n$, y ${}_nD_x$ son las defunciones totales ocurridas entre las edades x y $x + n$.

$${}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} \approx \frac{{}_nD_x}{{}_nN_x}$$

$${}_nd_x = l_x - l_{x+n} = l_x {}_nq_x$$

$${}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{l_x}$$

$${}_nL_x = nl_{x+n} + {}_nA_x = nl_{x+n} + {}_na_x {}_nd_x$$

La Tabla de Mortalidad

Datos observados: ${}_nN_x$ es la población a mitad de año entre las edades x y $x + n$, y ${}_nD_x$ son las defunciones totales ocurridas entre las edades x y $x + n$.

$${}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} \approx \frac{{}_nD_x}{{}_nN_x}$$

$${}_nd_x = l_x - l_{x+n} = l_x {}_nq_x$$

$${}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{l_x}$$

$${}_nL_x = nl_{x+n} + {}_nA_x = nl_{x+n} + {}_na_x {}_nd_x$$

La Tabla de Mortalidad

Datos observados: ${}_nN_x$ es la población a mitad de año entre las edades x y $x + n$, y ${}_nD_x$ son las defunciones totales ocurridas entre las edades x y $x + n$.

$${}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} \approx \frac{{}_nD_x}{{}_nN_x}$$

$${}_nd_x = l_x - l_{x+n} = l_x {}_nq_x$$

$${}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{l_x}$$

$${}_nL_x = {}_nl_{x+n} + {}_nA_x = {}_nl_{x+n} + {}_na_x {}_nd_x$$

La Tabla de Mortalidad

Datos observados: ${}_nN_x$ es la población a mitad de año entre las edades x y $x + n$, y ${}_nD_x$ son las defunciones totales ocurridas entre las edades x y $x + n$.

$${}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} \approx \frac{{}_nD_x}{{}_nN_x}$$

$${}_nd_x = l_x - l_{x+n} = l_x {}_nq_x$$

$${}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{l_x}$$

$${}_nL_x = {}_nl_{x+n} + {}_nA_x = {}_nl_{x+n} + {}_na_x {}_nd_x$$

La Tabla de Mortalidad

Datos observados: ${}_nN_x$ es la población a mitad de año entre las edades x y $x + n$, y ${}_nD_x$ son las defunciones totales ocurridas entre las edades x y $x + n$.

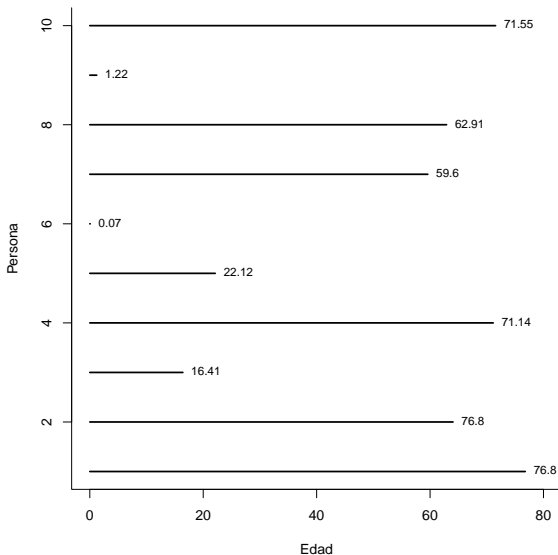
$${}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} \approx \frac{{}_nD_x}{{}_nN_x}$$

$${}_nd_x = l_x - l_{x+n} = l_x {}_nq_x$$

$${}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{l_x}$$

$${}_nL_x = {}_nl_{x+n} + {}_nA_x = {}_nl_{x+n} + {}_na_x {}_nd_x$$

La Tabla de Mortalidad



Método de Greville y Chiang para el cálculo de L_x

Entonces:

$${}_nL_x = n(l_x - {}_nd_x) + {}_na_x {}_nd_x$$

$${}_nL_x = nl_x - n {}_nd_x + {}_na_x {}_nd_x$$

$$nl_x = {}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x$$

$$l_x = \frac{1}{n} [{}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x]$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= \frac{{}_nd_x}{l_x} = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x} \\ &= \frac{{}_nd_x / {}_nL_x}{({}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x) / {}_nL_x} = \frac{{}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x) {}_nm_x} \end{aligned}$$

Método de Greville y Chiang para el cálculo de L_x

Entonces:

$${}_nL_x = n(l_x - {}_nd_x) + {}_na_x {}_nd_x$$

$${}_nL_x = nl_x - n {}_nd_x + {}_na_x {}_nd_x$$

$$nl_x = {}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x$$

$$l_x = \frac{1}{n} [{}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x]$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= \frac{{}_nd_x}{l_x} = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x} \\ &= \frac{{}_nd_x / {}_nL_x}{({}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x) / {}_nL_x} = \frac{{}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x) {}_nm_x} \end{aligned}$$

Método de Greville y Chiang para el cálculo de L_x

Entonces:

$${}_nL_x = n(l_x - {}_nd_x) + {}_na_x {}_nd_x$$

$${}_nL_x = nl_x - n {}_nd_x + {}_na_x {}_nd_x$$

$$nl_x = {}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x$$

$$l_x = \frac{1}{n} [{}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x]$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= \frac{{}_nd_x}{l_x} = \frac{n {}_nd_x}{{}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x} \\ &= \frac{n {}_nd_x / {}_nL_x}{({}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x) / {}_nL_x} = \frac{n {}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x) {}_nm_x} \end{aligned}$$

Método de Greville y Chiang para el cálculo de L_x

Entonces:

$${}_nL_x = n(l_x - {}_nd_x) + {}_na_x {}_nd_x$$

$${}_nL_x = nl_x - n {}_nd_x + {}_na_x {}_nd_x$$

$$nl_x = {}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x$$

$$l_x = \frac{1}{n} [{}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x]$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= \frac{{}_nd_x}{l_x} = \frac{n {}_nd_x}{{}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x} \\ &= \frac{n {}_nd_x / {}_nL_x}{({}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x) / {}_nL_x} = \frac{n {}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x) {}_nm_x} \end{aligned}$$

Método de Greville y Chiang para el cálculo de L_x

Entonces:

$${}_nL_x = n(l_x - {}_nd_x) + {}_na_x {}_nd_x$$

$${}_nL_x = nl_x - n {}_nd_x + {}_na_x {}_nd_x$$

$$nl_x = {}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x$$

$$l_x = \frac{1}{n} [{}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x]$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} {}_nq_x &= \frac{{}_nd_x}{l_x} = \frac{n {}_nd_x}{{}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x} \\ &= \frac{n {}_nd_x / {}_nL_x}{({}_nL_x + (n - {}_na_x) {}_nd_x) / {}_nL_x} = \frac{n {}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x) {}_nm_x} \end{aligned}$$

Repaso de la Tabla de Mortalidad

$${}_na_x = \frac{-\frac{n}{24} {}_nd_{x-n} + \frac{n}{2} {}_nd_x + \frac{n}{24} {}_nd_{x+n}}{{}_nd_x}$$

Pero cuando $n = 1$ entonces ${}_na_x = 0,5$

Para el último grupo de edad:

$${}_{\infty}q_x = 1$$

$${}_{\infty}L_x = \frac{l_x}{{}_{\infty}m_x}$$

Finalmente se calculan:

$$T_x = \sum_{a=x}^{\infty} {}_nL_a$$

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$

Repaso de la Tabla de Mortalidad

$${}_na_x = \frac{-\frac{n}{24} {}_nd_{x-n} + \frac{n}{2} {}_nd_x + \frac{n}{24} {}_nd_{x+n}}{{}_nd_x}$$

Pero cuando $n = 1$ entonces ${}_na_x = 0,5$

Para el último grupo de edad:

$${}_{\infty}q_x = 1$$

$${}_{\infty}L_x = \frac{l_x}{{}_{\infty}m_x}$$

Finalmente se calculan:

$$T_x = \sum_{a=x}^{\infty} {}_nL_a$$

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$

Repaso de la Tabla de Mortalidad

$${}_na_x = \frac{-\frac{n}{24} {}_nd_{x-n} + \frac{n}{2} {}_nd_x + \frac{n}{24} {}_nd_{x+n}}{{}_nd_x}$$

Pero cuando $n = 1$ entonces ${}_na_x = 0,5$

Para el último grupo de edad:

$${}_{\infty}q_x = 1$$

$${}_{\infty}L_x = \frac{l_x}{{}_{\infty}m_x}$$

Finalmente se calculan:

$$T_x = \sum_{a=x}^{\infty} {}_nL_a$$

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$

Repaso de la Tabla de Mortalidad

$${}_na_x = \frac{-\frac{n}{24} {}_nd_{x-n} + \frac{n}{2} {}_nd_x + \frac{n}{24} {}_nd_{x+n}}{{}_nd_x}$$

Pero cuando $n = 1$ entonces ${}_na_x = 0,5$

Para el último grupo de edad:

$${}_{\infty}q_x = 1$$

$${}_{\infty}L_x = \frac{l_x}{{}_{\infty}m_x}$$

Finalmente se calculan:

$$T_x = \sum_{a=x}^{\infty} {}_nL_a$$

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$

Relaciones básicas de la mortalidad

Tasa instantánea de mortalidad

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n l_x} = - \frac{dl(x)}{l(x) dx} = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

Función de sobrevivencia

$$- \int_y^z \mu(x) dx = \int_y^z \frac{d \ln l(x)}{dx} dx = \ln l(z) - \ln l(y) = \ln \frac{l(z)}{l(y)}$$

$$\implies l(z) = l(y) e^{-\int_y^z \mu(x) dx}$$

Entonces $l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(a) da}$, y si $l(0) = 1$ se tiene que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad

Tasa instantánea de mortalidad

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n d_x}{n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n l_x} = - \frac{dl(x)}{l(x) dx} = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

Función de sobrevivencia

$$- \int_y^z \mu(x) dx = \int_y^z \frac{d \ln l(x)}{dx} dx = \ln l(z) - \ln l(y) = \ln \frac{l(z)}{l(y)}$$

$$\implies l(z) = l(y) e^{-\int_y^z \mu(x) dx}$$

Entonces $l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(a) da}$, y si $l(0) = 1$ se tiene que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad

Tasa instantánea de mortalidad

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n d_x}{n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n l_x} = - \frac{dl(x)}{l(x) dx} = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

Función de sobrevivencia

$$- \int_y^z \mu(x) dx = \int_y^z \frac{d \ln l(x)}{dx} dx = \ln l(z) - \ln l(y) = \ln \frac{l(z)}{l(y)}$$

$$\implies l(z) = l(y) e^{-\int_y^z \mu(x) dx}$$

Entonces $l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(a) da}$, y si $l(0) = 1$ se tiene que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad

Tasa instantánea de mortalidad

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n l_x} = - \frac{dl(x)}{l(x) dx} = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

Función de sobrevivencia

$$- \int_y^z \mu(x) dx = \int_y^z \frac{d \ln l(x)}{dx} dx = \ln l(z) - \ln l(y) = \ln \frac{l(z)}{l(y)}$$

$$\implies l(z) = l(y) e^{-\int_y^z \mu(x) dx}$$

Entonces $l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(a) da}$, y si $l(0) = 1$ se tiene que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad

Tasa instantánea de mortalidad

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n l_x} = - \frac{dl(x)}{l(x) dx} = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

Función de sobrevivencia

$$- \int_y^z \mu(x) dx = \int_y^z \frac{d \ln l(x)}{dx} dx = \ln l(z) - \ln l(y) = \ln \frac{l(z)}{l(y)}$$

$$\implies l(z) = l(y) e^{-\int_y^z \mu(x) dx}$$

Entonces $l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(a) da}$, y si $l(0) = 1$ se tiene que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad

Tasa instantánea de mortalidad

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n l_x} = - \frac{dl(x)}{l(x) dx} = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

Función de sobrevivencia

$$- \int_y^z \mu(x) dx = \int_y^z \frac{d \ln l(x)}{dx} dx = \ln l(z) - \ln l(y) = \ln \frac{l(z)}{l(y)}$$

$$\implies l(z) = l(y) e^{-\int_y^z \mu(x) dx}$$

Entonces $l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(a) da}$, y si $l(0) = 1$ se tiene que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad

Tasa instantánea de mortalidad

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n l_x} = - \frac{dl(x)}{l(x) dx} = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

Función de sobrevivencia

$$- \int_y^z \mu(x) dx = \int_y^z \frac{d \ln l(x)}{dx} dx = \ln l(z) - \ln l(y) = \ln \frac{l(z)}{l(y)}$$

$$\implies l(z) = l(y) e^{-\int_y^z \mu(x) dx}$$

Entonces $l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(a) da}$, y si $l(0) = 1$ se tiene que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad

Tasa instantánea de mortalidad

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n l_x} = - \frac{dl(x)}{l(x) dx} = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

Función de sobrevivencia

$$- \int_y^z \mu(x) dx = \int_y^z \frac{d \ln l(x)}{dx} dx = \ln l(z) - \ln l(y) = \ln \frac{l(z)}{l(y)}$$

$$\implies l(z) = l(y) e^{-\int_y^z \mu(x) dx}$$

Entonces $l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(a) da}$, y si $l(0) = 1$ se tiene que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad

Tasa instantánea de mortalidad

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n l_x} = - \frac{dl(x)}{l(x) dx} = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

Función de sobrevivencia

$$- \int_y^z \mu(x) dx = \int_y^z \frac{d \ln l(x)}{dx} dx = \ln l(z) - \ln l(y) = \ln \frac{l(z)}{l(y)}$$

$$\implies l(z) = l(y) e^{-\int_y^z \mu(x) dx}$$

Entonces $l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(a) da}$, y si $l(0) = 1$ se tiene que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad

Tasa instantánea de mortalidad

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_x - l_{x+n}}{n l_x} = - \frac{dl(x)}{l(x) dx} = - \frac{d \ln l(x)}{dx}$$

Función de sobrevivencia

$$- \int_y^z \mu(x) dx = \int_y^z \frac{d \ln l(x)}{dx} dx = \ln l(z) - \ln l(y) = \ln \frac{l(z)}{l(y)}$$

$$\implies l(z) = l(y) e^{-\int_y^z \mu(x) dx}$$

Entonces $l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(a) da}$, y si $l(0) = 1$ se tiene que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad (otra perspectiva)

Sea X = el evento “morir”. Entonces sea la función de densidad

$$q(X) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(X = (x, x + \Delta x))}{\Delta x}$$

y la función de distribución $Q(x) = P(X \leq x) = \int q(x)dx$

Tasa instantánea de mortalidad

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(X = (x, x + \Delta x) | \text{se llegó con vida a } x)}{\Delta x} \\ &= \frac{q(X)}{1 - Q(X)} = \frac{q(X)}{l(X)} \end{aligned}$$

Función de sobrevivencia

$$l(X) = P(\text{sobrevivir hasta la edad } x) = P(X > x) = 1 - Q(X)$$

Relaciones básicas de la mortalidad (otra perspectiva)

Función de sobrevivencia

Como $q(X)$ es una función de densidad, entonces,

$$q(X) = \frac{dQ(X)}{dx} = \frac{d[1 - l(X)]}{dx} = -\frac{dl(X)}{dx}$$

por lo que

$$\mu(X) = \frac{q(X)}{l(X)} = -\frac{dl(X)}{l(X)dx} = -\frac{d \ln l(X)}{dx}$$

de lo que se sigue que

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t)dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad (resumen)

1

$$\mu(x) = -\frac{d \ln l(x)}{dx}$$

2

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

3

$$q(x) = \mu(x) e^{-\int_0^x \mu(t) dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad (resumen)

1

$$\mu(x) = -\frac{d \ln l(x)}{dx}$$

2

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t)dt}$$

3

$$q(x) = \mu(x)e^{-\int_0^x \mu(t)dt}$$

Relaciones básicas de la mortalidad (resumen)

1

$$\mu(x) = -\frac{d \ln l(x)}{dx}$$

2

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t)dt}$$

3

$$q(x) = \mu(x)e^{-\int_0^x \mu(t)dt}$$

Otras relaciones en la mortalidad

1

$${}_nL_x = \int_0^n l(x+t)dt$$

2

$${}_nd_x = \int_0^n l(x+t)\mu(x+t)dt$$

3

$$T_x = \int_0^{\omega-x} l(x+t)dt = \int_0^{\omega-x} l(x+t)dt$$

4

$$e_x = \frac{\int_0^{\omega-x} tl(x+t)\mu(x+t)dt}{\int_0^{\omega-x} l(x+t)\mu(x+t)dt} = \frac{\int_0^{\omega-x} l(x+t)dt}{l(x)}$$

Otras relaciones en la mortalidad

1

$${}_nL_x = \int_0^n l(x+t)dt$$

2

$${}_nd_x = \int_0^n l(x+t)\mu(x+t)dt$$

3

$$T_x = \int_0^{\omega-x} l(x+t)dt = \int_0^{\omega-x} l(x+t)dt$$

4

$$e_x = \frac{\int_0^{\omega-x} tl(x+t)\mu(x+t)dt}{\int_0^{\omega-x} l(x+t)\mu(x+t)dt} = \frac{\int_0^{\omega-x} l(x+t)dt}{l(x)}$$

Otras relaciones en la mortalidad

1

$${}_nL_x = \int_0^n l(x+t)dt$$

2

$${}_nd_x = \int_0^n l(x+t)\mu(x+t)dt$$

3

$$T_x = \int_0^{\omega-x} l(x+t)dt = \int_0^{\omega-x} l(x+t)dt$$

4

$$e_x = \frac{\int_0^{\omega-x} tl(x+t)\mu(x+t)dt}{\int_0^{\omega-x} l(x+t)\mu(x+t)dt} = \frac{\int_0^{\omega-x} l(x+t)dt}{l(x)}$$

Otras relaciones en la mortalidad

1

$${}_nL_x = \int_0^n l(x+t)dt$$

2

$${}_nd_x = \int_0^n l(x+t)\mu(x+t)dt$$

3

$$T_x = \int_0^{\omega-x} l(x+t)dt = \int_0^{\omega-x} l(x+t)dt$$

4

$$e_x = \frac{\int_0^{\omega-x} tl(x+t)\mu(x+t)dt}{\int_0^{\omega-x} l(x+t)\mu(x+t)dt} = \frac{\int_0^{\omega-x} l(x+t)dt}{l(x)}$$