

# VERSUCHSBERICHT ZU

## M5 - JO-JO UND KREISEL

Gruppe 6Mi

Alexander Neuwirth (E-Mail: a\_neuw01@wwu.de)  
Leonhard Segger (E-Mail: l\_segg03@uni-muenster.de)

durchgeführt am 13.12.2017  
betreut von  
Kristina Mühlenstrodt

19. Dezember 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurzfassung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Methoden</b>	<b>3</b>
2.1	Maxwell'sches Fallrad . . . . .	3
2.2	Kreisel . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>4</b>
3.1	Beobachtung . . . . .	4
3.1.1	Fallrad . . . . .	4
3.1.2	Kreisel . . . . .	7
3.2	Diskussion . . . . .	8
3.2.1	Maxwell'sches Fallrad . . . . .	8
3.2.2	Kreisel . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Schlussfolgerung</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Beantwortung der Aufgaben zur Vorbereitung</b>	<b>11</b>

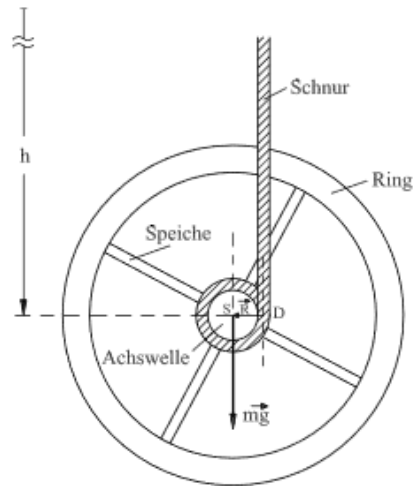


Abbildung 1: Maxwell'sches Fallrad

## 1 Kurzfassung

Um das Prinzip von Jo-Jos und Kreiseln zu untersuchen, wurden zwei Experimente durchgeführt. Das Erste untersucht das Maxwell'sche Fallrad. Dabei wurde einmal mithilfe des Trägheitsmoments und einmal durch Messung der Falldauer in Abhängigkeit von der Fallhöhe der Abrollradius bestimmt und die beiden Ergebnisse verglichen. Dabei war zu erwarten, dass die Unsicherheiten der beiden Ergebnisse überschneiden. Dies konnte tatsächlich im Versuch nachgewiesen werden.

Im zweiten Versuch wurde die Präzession eines schweren, symmetrischen Kreisels untersucht. Dazu wurde die Präzessionsdauer und das Drehmoment des Kreisels gemessen. Daraus wurde das Trägheitsmoment bestimmt und mit dem Trägheitsmoment, das aus Masse und Abmessungen bestimmt wurde, verglichen. Auch hier war zu erwarten, dass die Werte innerhalb der Vertrauensbereiche übereinstimmen. Dies konnte im Versuch auch gezeigt werden.

## 2 Methoden

### 2.1 Maxwell'sches Fallrad

Zunächst wurde die Fallzeit eines Maxwell'schen Fallrads in Abhängigkeit vom Fallweg für fünf verschiedene Fallhöhen je fünf mal gemessen. Der Aufbau eines Maxwell'schen Fallrads ist in Abb. 1 dargestellt <sup>1</sup>. Dann wurde das Rad gewogen und mit einer Schiebellehre ausgemessen, um daraus das Trägheitsmoment bestimmen zu können. Dabei wurde Dicke, Außenradius und Innenradius sowie die Dicke des Aufhängefadens an fünf verschiedenen Stellen gemessen, um dann über diese Werte mitteln zu können, da diese

<sup>1</sup>Jo-Jo und Kreisel Einführung, Zugriff am 18.12.2017

Werte besonders bedeutend für das Trägheitsmoment bzw. den Abrollradius sind.

## 2.2 Kreisel

Dann wurde ein schwerer, symmetrischer Kreisel untersucht. Dieser hatte die Form einer Metallkugel, in der in radialer Richtung eine Stange eingeschraubt war, auf der sich eine verschiebbare Zusatzmasse befand. Um die eine möglichst reibungsfreie Bewegung des Kreisels und die Eigenschaft der Schwere zu ermöglichen, war dabei die Kugel auf einem durch Pressluft in einer Hohlhalbkugel erzeugten Luftpolster gelagert. Die Eigenfrequenz der Kugel wurde dabei mit einem Pressluftstrahl aus einer Düse manuell kontrolliert. Zunächst wurde die Kugel gewiegt und ihr Durchmesser mit einer Schieblehre bestimmt. Dann wurde bei waagerechter Achse mit einem Kraftmesser die Kraft bestimmt, mit der das Gewicht der Achse und des Zusatzgewichtes im Abstand  $l$  die Achse nach unten zieht, um die Größe  $amg$  bestimmen zu können. Dafür wurde zunächst der Kraftmesser mithilfe von drei Gewichten und der Nullmarkierung kalibriert. Diese Messung wurde für drei Abstände der Zusatzmasse von der Kugel je fünf mal durchgeführt. Nachdem die Kugel mit dem Pressluftstrahl beschleunigt wurde, wurde die Eigenfrequenz mit einem Stroboskop mit verstellbarer Frequenz bestimmt. Dazu wurde die Frequenz des Stroboskop solange verringert, bis der Kreisel im Licht der Stroboskoplampe scheinbar stillsteht und die Markierung auf der Kugel nur einmal sichtbar ist. Sobald dies erfüllt war, wurde die Frequenz vom Stroboskop abgelesen und mit der Pressluftdüse versucht diese möglichst konstant zu halten, was dadurch erkennbar war, ob die Markierung auf der Kugel sich scheinbar bewegte. Dann wurde mit einer Stoppuhr die Präzessionszeit der Kreiselachse bestimmt. Dabei wurde nur eine Umdrehung gemessen, um die Abweichung der Eigenfrequenz gering halten zu können. Diese Messung wurde für dieselben drei Abstände der Zusatzmasse von der Kugel wie zuvor durchgeführt.

## 3 Ergebnisse und Diskussion

### 3.1 Beobachtung

#### 3.1.1 Fallrad

##### Fallzeitbetrachtung

In den Graphen Abb. 2 und Abb. 3 sind die Fallhöhen gegen die Fallzeiten, bzw. deren Quadrate, aufgetragen. Abb. 4 zeigt das Verhältnis der Fallhöhen zu den Fallzeitquadraten in Abhängigkeit von der Fallzeit. Der lineare Zusammenhang ist beim Betrachten der Werte in Abb. 3 bereits erkennbar und außerdem sollte dieser auch der Theorie zufolge auftreten (Gleichung (1)).

$$h(t) = \frac{1}{2}g \frac{mR^2}{mR^2 + J_S} t^2 = \frac{1}{2}g^* t^2 \quad (1)$$

Deshalb haben wir einen Fit mit dem „Scaled Levenberg-Marquardt“-Algorithmus, welcher die Methode der kleinsten Quadrate verwendet, durchgeführt. Für den Fit wurde

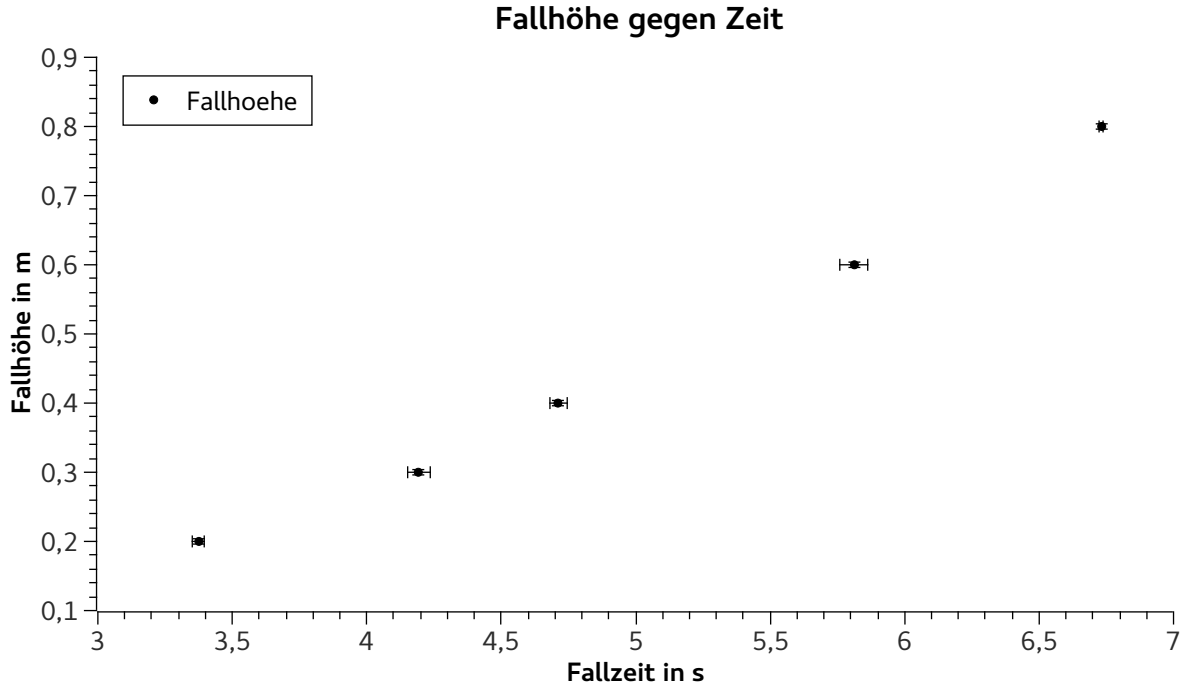


Abbildung 2: Die Fallhöhe des Fallrads ist gegen die Fallzeit aufgetragen. Die Unsicherheit der Fallhöhe ist kleiner als die Symbole.

die folgende Funktion zugrunde gelegt:

$$f(x) = A \cdot x + B \quad (2)$$

Es ergibt sich ein y-Achsenabschnitt von  $(0,017\,54 \pm 0,000\,49) \text{ m/s}^2$ , welcher  $\frac{1}{2}g^*$  entspricht. Der Fit weist zwar eine minimale Steigung auf, diese ist jedoch vernachlässigbar, da sie im Verhältnis zur Unsicherheit des y-Achsenabschnitts auf dem Messintervall verschwindet. Folglich ergibt sich ein  $g^*$  von  $(0,035\,08 \pm 0,000\,98) \text{ m/s}^2$ .

### Berechnung des Trägheitsmoments

Das Trägheitsmoments des Fallrads setzt sich aus den Trägheitsmomenten der einzelnen Komponenten zusammen. In Tabelle 1 sind Volumen und Trägheitsmoment von Zylindern aufgeführt. Die Masse  $m$  ergibt sich jeweils aus

$$m = M \frac{V}{V_{\text{ges}}} \quad (3)$$

wobei  $M$  die Masse des gesamten Fallrads und  $V_{\text{ges}}$  entsprechend das gesamte Volumen ist. Es wird davon ausgegangen, dass der Stoff homogen ist.

Mit einer Gesamtmasse  $M$  von  $(0,768\,070 \pm 0,000\,028) \text{ kg}$  folgt für das Trägheitsmoment:

$$J = \frac{1}{2} \frac{M}{2V_S + V_A + V_R} (V_A R_A^2 + V_S (R_S^2 + \frac{1}{3} L_S^2) + V_R (R_{\text{Rad,Außen}}^2 + R_{\text{Rad,Innen}}^2)) \quad (4)$$

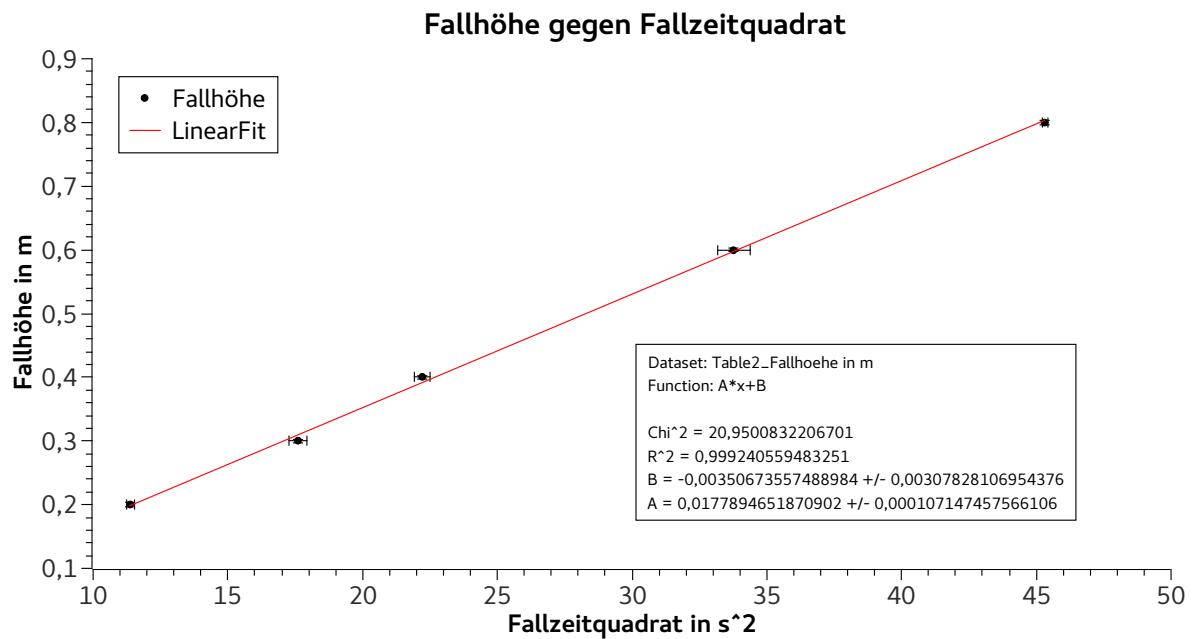


Abbildung 3: Die Fallhöhe des Fallrads ist gegen die Fallzeitquadrate aufgetragen. Die Unsicherheit der Fallhöhe ist kleiner als die Symbole.

Tabelle 1: Trägheitsmomente von (Hohl-)Zylindern zu verschiedenen Achsen.

Zylinder	Volumen V	Rotationsachse	Trägheitsmoment J
Vollzylinder	$\pi l r^2$	Symmetrieachse	$\frac{1}{2} m r^2$
Vollzylinder	$\pi l r^2$	Querachse	$\frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$
Hohlzylinder	$\pi l (r_2^2 - r_1^2)$	Symmetrieachse	$\frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=0}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (5)$$

Es ergibt sich ein Trägheitsmoment  $J$  von  $(42,5500 \pm 0,1875) \text{ kgcm}^2$  mit einer relativen Abweichung von 0,441% beim Einsetzen aller Größen. Die Unsicherheit wurde mittels Gleichung (5) bestimmt.

### Bestimmung des Abrollradius

Aus

$$g^* = \frac{g M R^2}{M R^2 + J_S} \quad (6)$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{J_S g^*}{g M - g^* M} \quad (7)$$

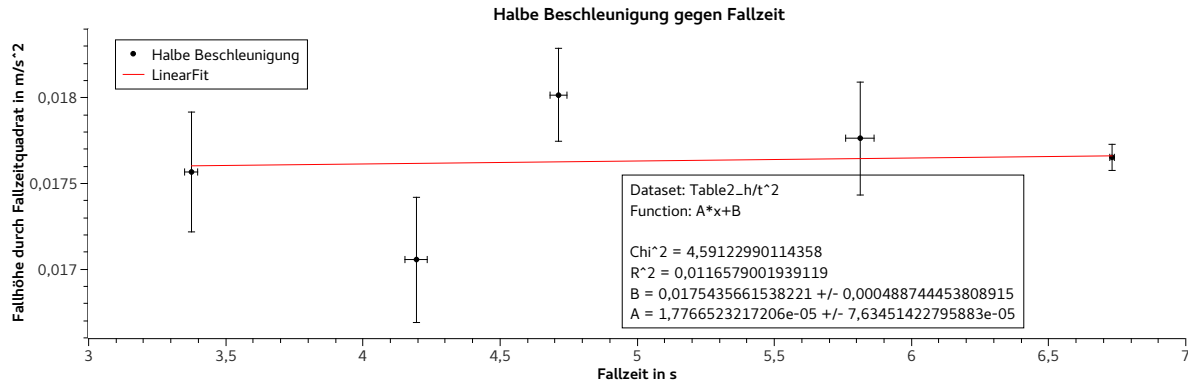


Abbildung 4: Die halbe Beschleunigung des Fallrads ist gegen die Fallzeit aufgetragen. Der lineare Zusammenhang der Fitfunktion ist nicht direkt ersichtlich aufgrund der Skalierung der Achsen.

Tabelle 2: Gemessene Längen.

	Länge $L$	Radius $R$
Speiche	$(15,576 \pm 0,023) \text{ cm}$	$(0,407 \pm 0,006) \text{ cm}$
Achse	$(20,210 \pm 0,012) \text{ cm}$	$(0,405 \pm 0,006) \text{ cm}$
Rad außen	-	$(9,007 \pm 0,001) \text{ cm}$
Rad innen	-	$(7,788 \pm 0,012) \text{ cm}$
Dicke Rad	$(1,150 \pm 0,004) \text{ cm}$	-

folgt, dass der Abrollradius gemäß

$$R = \sqrt{\frac{J_S}{M} \frac{g^*}{g - g^*}} \quad (8)$$

berechnet werden kann. Setzt man die zuvor ermittelten Werte von  $g^*$ ,  $J_S$  und  $M$  ein erhält man einen Abrollradius von  $(0,446 \pm 0,006) \text{ cm}$  mit einer relativen Unsicherheit von ca. 1,5%. Der Radius der Achse beträgt  $(0,405 \pm 0,006) \text{ cm}$  und der Radius des Fadens  $(0,052 \pm 0,002) \text{ cm}$ . Folglich ergibt sich durch Addition ein Abrollradius von  $(0,457 \pm 0,006) \text{ cm}$ .

### 3.1.2 Kreisel

#### Bestimmen des Trägheitsmoments

Für eine homogene Kugel gilt für das Trägheitsmoment, falls die Achse durch den Mittelpunkt läuft:

$$J_2 = \frac{2}{5} m_k r_k^2 \quad (9)$$

Es folgt ein Trägheitsmoment für den gesamten Kreisel mit den gemessenen Größen  $m_k = (512,160 \pm 0,028) \text{ g}$  und  $r_k = (2,540 \pm 0,006) \text{ cm}$  von:

$$J = J_1 + J_2 = 15 \text{ gcm}^2 + (1321,70 \pm 6,24) \text{ gcm}^2 = (1336,70 \pm 6,24) \text{ gcm}^2 \quad (10)$$

Tabelle 3: Gemessene Kraft  $F$  und daraus folgendes Drehmoment  $Fl$

Schwingung Nummer	Kraft $F$	Drehoment $lF$
1.	$(0,114 \pm 0,004) \text{ N}$	$(1,252 \pm 0,044) \text{ Ncm}$
2.	$(0,172 \pm 0,004) \text{ N}$	$(1,889 \pm 0,044) \text{ Ncm}$
3.	$(0,226 \pm 0,004) \text{ N}$	$(2,481 \pm 0,044) \text{ Ncm}$

Tabelle 4: Vergleich der Abrollradien berechnet einmal direkt durch Dicke der Achse und des Fadens und einmal aus Messung der Falldauer in Abhängigkeit von der Fallhöhe

aus direkter Messung	aus Messung der Falldauer
$(0,446 \pm 0,006) \text{ cm}$	$(0,457 \pm 0,006) \text{ cm}$

### Bestimmen des Drehmoments

Gemessen wurde eine Länge  $l$  von  $(10,980 \pm 0,013) \text{ cm}$  durch Addition des Radius der Kugel und der Achsenlänge. In Tabelle 3 sind die gemessenen Mittelwerte der Kraft sowie das resultierende Drehmoment aufgelistet. Die Unsicherheiten der Drehmomente folgen aus der Gleichung für kombinierte Unsicherheiten (Gleichung (5)).

### Bestimmen des Trägheitsmoments

In den Graphen Abb. 5 bis 7 sind jeweils die Präessionszeiten  $T_p$  gegen die Frequenz  $\omega$  des Kreisels aufgetragen. Die rote Funktion ist ein linearer Fit, jedoch betrachtet der Algorithmus lediglich die Messpunkte und nicht die Fehlerintervalle, deshalb ist es nicht praktisch die angegebenen Unsicherheiten weiter zu verwenden.

Durch Variieren der Steigung zeigte sich, dass diese um 5% abweichen kann und immer noch innerhalb der Unsicherheiten der Messpunkte liegt (bis auf vereinzelte Ausreißer). In Abb. 8 sind die Drehmomente aus Tabelle 3 gegen die Kehrwerte der zuvor bestimmten Steigungen aufgetragen. Die rote Funktion ist erneut ein linearer Fit. Die schwarze Funktion hat der Theorie entsprechend eine Steigung von  $2\pi J$  mit dem in Gleichung (10) bestimmten Trägheitsmoment. Es gilt zu beachten, dass die Steigung in  $\text{cmNs}^2$  im Graphen angegeben sind und somit  $10^6 \text{ gcm}^2$  entsprechen. Berechnet man aus der Steigung der Fitfunktion das Trägheitsmoment ergibt sich  $J = 1537 \text{ gcm}^2$  mit einer relativen Unsicherheit von ca. 10%.

## 3.2 Diskussion

### 3.2.1 Maxwell'sches Fallrad

Wenn man den Abrollradius, der sich aus Messung der Dicke der Achse und des Seils ergibt, mit dem aus Messung der Falldauer in Abhängigkeit von der Fallhöhe vergleicht, stellt man fest, dass sich die Unsicherheitsintervalle wie erwartet überschneiden. Demnach kann hier die Theorie zum Fallvorgang (Gleichung (1)) unterstützt werden. Als



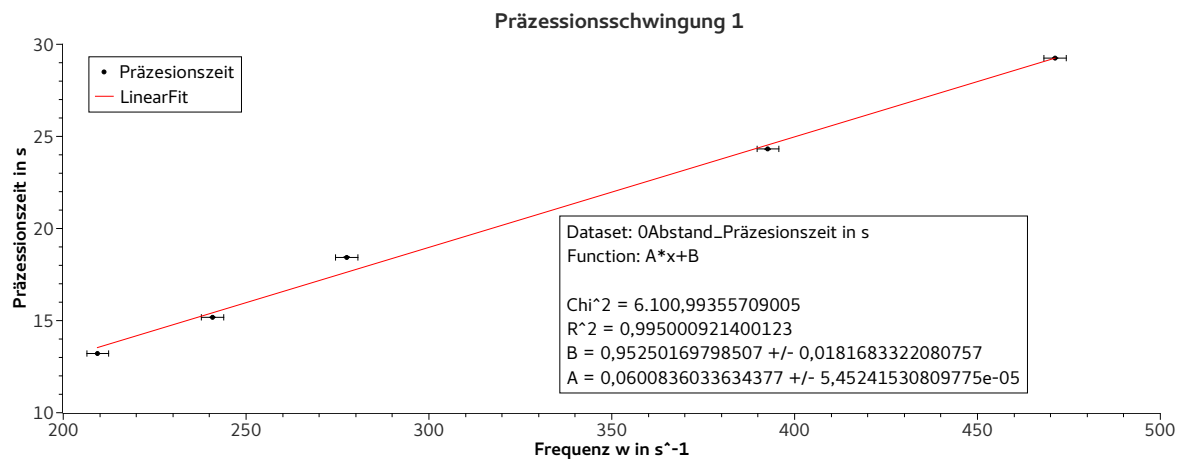


Abbildung 5: Erste Präzessionsschwingung. Das verschiebbare Gewicht wurde mit minimalem Abstand zur Kugel positioniert. Die Unsicherheit der Präzessionszeit ist kleiner als die Symbole.

mögliche Fehlerquellen, die nicht in Zahlenwerte gefasst werden konnten, sind hier die mögliche Verformung des Fallrades durch Kollision mit dem Boden bei vorherigen Benutzern zu nennen.

### 3.2.2 Kreisel

In Abb. 8 entspricht die Steigung dem Drehmoment des Kreisels multipliziert mit  $2\pi$ . Dabei ist in Schwarz das Trägheitsmoment aus den Abmessungen von Kugel und Achse mit Zusatzmasse und in Rot das Trägheitsmoment durch Messung des Zusammenhangs zwischen Präzessionszeit, Eigenfrequenz und Drehmoment dargestellt. Hier ist zwar eine Abweichung zu erkennen, aber insgesamt liegt die Gerade in allen drei Messpunkten innerhalb des Fehlerintervalls. Demnach gibt das Ergebnis der Messung keinen Anlass dazu, die der Anleitung zugrunde liegende Theorie in Frage zu stellen. Mögliche Gründe für Ungenauigkeiten sind hier die durch die manuelle Kontrolle nur begrenzt exakt konstante Eigenfrequenz der Kugel sowie die nicht exakte Reibungsfreiheit der Kugel auf dem Luftposter.

## 4 Schlussfolgerung

Beim Maxwell'schen Fallrad konnte die Theorie bestätigt werden, da die Berechnung des Abrollradius durch direktes Ausmessen von Achse und Faden und durch Berechnung gemäß Gleichung (1) Werte ergaben, deren Unsicherheitsintervalle überschneiden. Interessant wäre noch eine Betrachtung des Verhaltens über mehrere Zyklen des Auf- und Abrollens, womit untersucht werden können, ob auch das postulierte Verhalten für den Aufstieg des Rades beobachtet werden kann.

Die Untersuchung eines schweren, symmetrischen Kreisels in Form einer Kugel mit

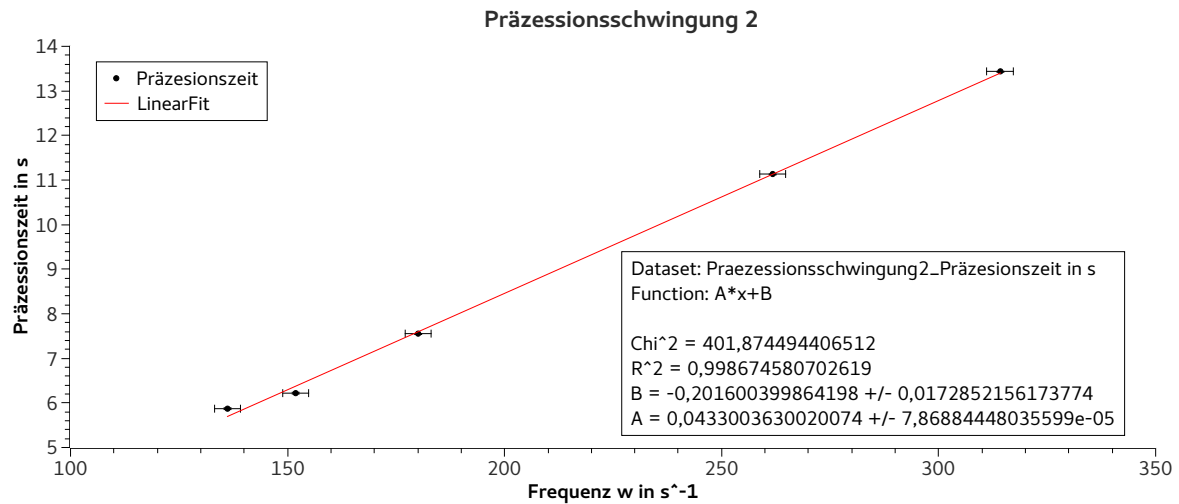


Abbildung 6: Zweite Präzessionsschwingung. Das verschiebbare Gewicht wurde mittig zwischen maximalem und minimalem Abstand zur Kugel positioniert. Die Unsicherheit der Präzessionszeit ist kleiner als die Symbole.

einem Zusatzgewicht an einer Achse ergab, dass das Trägheitsmoment, das aus den Abmessungen und der Masse der Bestandteile des Kreisels bestimmt wurde, innerhalb des Vertrauensbereiches mit dem aus der Messung des Drehmoments und der Präzessionszeit berechneten Trägheitsmoment übereinstimmt. Dies war das vorausgesagte Ergebnis, aber es ist fraglich, ob dies nicht lediglich ein Zufall ist, da im Versuch doch einige Unsicherheiten auftraten, die nicht näher in Zahlenwerte gefasst werden konnten. Eine genauere Untersuchung dieses Zusammenhangs wäre möglich, wenn man eine Möglichkeit findet die Eigenfrequenz des Kreisels exakter zu bestimmen und zu kontrollieren. Dies würde auch eine Messung der Präzessionsdauer über mehrere Perioden zulassen, was den Einfluss der menschlichen Reaktionszeit verringern würde. Außerdem wäre es naheliegender und aussagekräftiger gewesen, nicht aus der Präzessionsdauer des Kreisels sein Trägheitsmoment zu berechnen, um dieses dann mit dem aus seinen Abmessungen zu vergleichen, sondern aus dem Trägheitsmoment, das in dieser Art und Weise relativ präzise bestimmbar ist, seine Präzessionsdauer vorherzusagen, um dieses Ergebnis mit dem gemessenen Wert zu vergleichen.

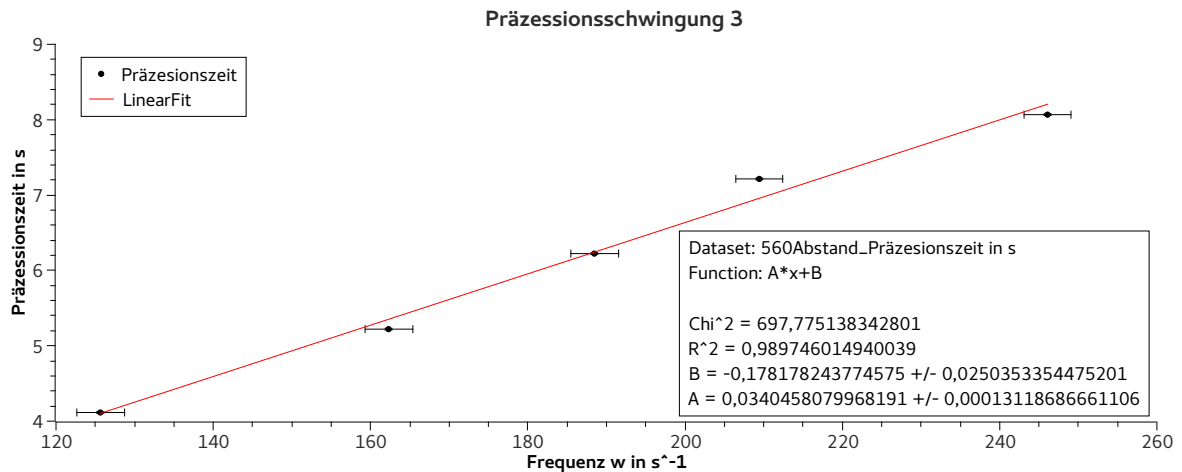


Abbildung 7: Dritte Präzessionsschwingung. Das verschiebbare Gewicht wurde mit maximalem Abstand zur Kugel positioniert. Die Unsicherheit der Präzessionszeit ist kleiner als die Symbole.

## 5 Beantwortung der Aufgaben zur Vorbereitung

1.

$$0 = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 - mgh \right) \quad (11)$$

$$= mva + \frac{J_S}{R^2} va - mgv \quad (12)$$

$$\frac{mg}{a} = m + \frac{J_S}{R^2} \quad (13)$$

$$\Rightarrow a(t) = g \frac{mR^2}{mR^2 + J_S} \quad (14)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2} g \frac{mR^2}{mR^2 + J_S} t^2 + v_0 t + h_0 \quad (15)$$

2. Die Kraft mit der das abrollende Rad an der Aufhängevorrichtung zieht ergibt sich aus

$$F = ma \quad (16)$$

und beträgt folglich  $mg \frac{mR^2}{mR^2 + J_S}$ . Dass die Kraft, bzw. Beschleunigung, konstant ist, ist auch in Abbildung 2 der Einführung zum Versuch dargestellt. Der Unterschied zur Gewichtskraft des Rades besteht in dem Faktor  $\frac{mR^2}{mR^2 + J_S}$ , welcher stets kleiner als 1 ist, somit fällt das Rad langsamer als im freien Fall.

3. Die Kraft wirkt nach wie vor in die gleiche Richtung mit gleichem Betrag.

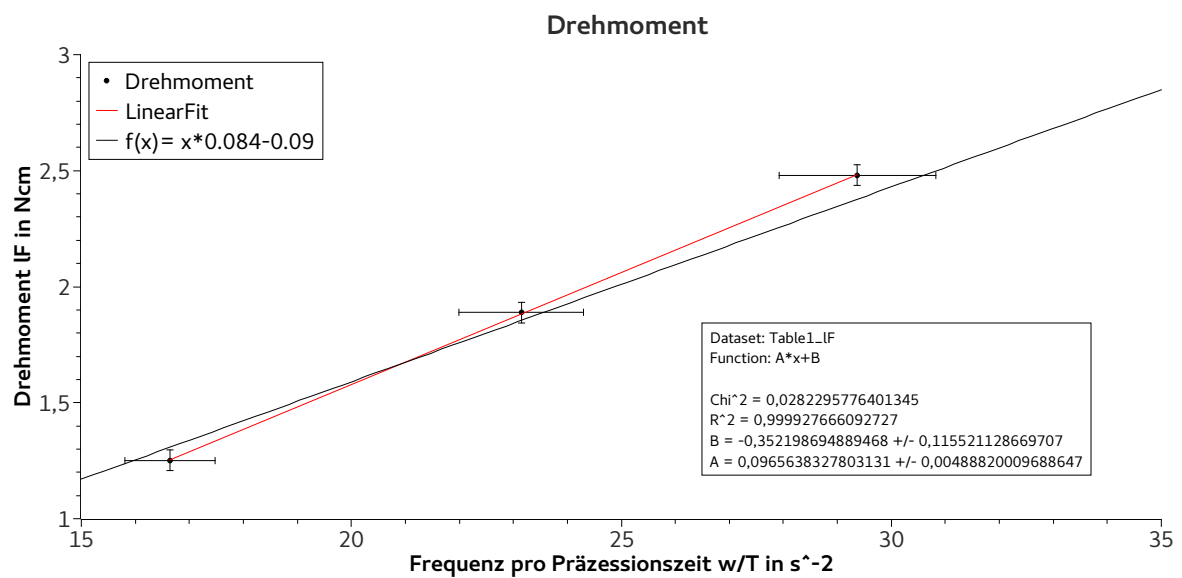


Abbildung 8: Die gemessenen Drehmomente sind gegen die Steigungen der Präzessionszeit, in Abhängigkeit von der Frequenz des Kreisel, aufgetragen.