

VERSUCHSBERICHT ZU

M2 - GEKOPPELTE PENDEL

Gruppe 6Mi

Alexander Neuwirth (E-Mail: a\_neuw01@wwu.de)  
Leonhard Segger (E-Mail: l\_segg03@uni-muenster.de)

durchgeführt am 22.11.2017  
betreut von  
Martin Körsgen

27. November 2017

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Kurzfassung</b>                                 | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Methoden</b>                                    | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Ergebnisse und Diskussion</b>                   | <b>3</b>  |
| 3.1      | Pendel . . . . .                                   | 3         |
| 3.2      | Gekoppelte Pendel . . . . .                        | 4         |
| 3.2.1    | Statische Bestimmung des Kopplungsgrades . . . . . | 4         |
| 3.2.2    | Gleichschwingung . . . . .                         | 4         |
| 3.2.3    | Gegenschwingung . . . . .                          | 5         |
| 3.2.4    | Schwebungen des gekoppelten Systems . . . . .      | 6         |
| 3.2.5    | Vergleich der Schwingdauern . . . . .              | 8         |
| 3.2.6    | Dynamische Bestimmung des Kopplungsgrads . . . . . | 8         |
| 3.2.7    | Relative Frequenzaufspaltung . . . . .             | 9         |
| 3.2.8    | Diskussion der Näherung . . . . .                  | 9         |
| 3.3      | Doppelpendel . . . . .                             | 10        |
| <b>4</b> | <b>Schlussfolgerung</b>                            | <b>10</b> |

# 1 Kurzfassung

Kurzfassung... Gekoppelte Pendel Doppel Pendel

## 2 Methoden

Der Versuch besteht aus zwei Pendeln die mittels verschieden starken Federn gekoppelt werden. Damit beide Pendeln mit der gleiche Eigenfrequenz schwingen, haben wir die Länge der Pendel so angepasst, dass sie auch nach ca. 20 Perioden ohne Kopplung synchron schwingen. Der Kopplungsgrad und die relative Frequenzspaltung wurde statisch sowie dynamisch bestimmt. Bei der statischen Messung wird ein Pendel ausgelenkt und die resultierende Auslenkung des anderen Pendels aufgenommen. Dynamisch ergibt sich der Kopplungsgrad aus den Schwingdauern der Grundschrwingungen einer gleichsinnigen und gegensinnigen Bewegung. Zum Bestimmen der Schwingdauern wurde ein Ultraschall-Entfernungssensor verwendet, jedoch traten beim Testen der Messapparatur bei Sensorfrequenzen über 50 Hz Softwareprobleme auf.

Das Verhalten eines Doppelpendels wurde beobachtet mit verschiedenen initialen Auslenkungen und Geschwindigkeiten.

## 3 Ergebnisse und Diskussion

In allen folgenden Abbildungen sind in schwarz Entfernungsmessungspunkte des Ultraschallsensors mit 50 Hz, sowie ein nicht linearer Fit in rot aufgetragen. Gemessen wurde immer über 60 Sekunden, lediglich zum Bestimmen der Schwebungsdauer wurde über 120 Sekunden gemessen.

### 3.1 Pendel

Die Schwingdauer eines einzelnen Pendels lässt sich am Parameter  $b$  ablesen. Somit ist  $T_0 = 2,477 \text{ s}$ .

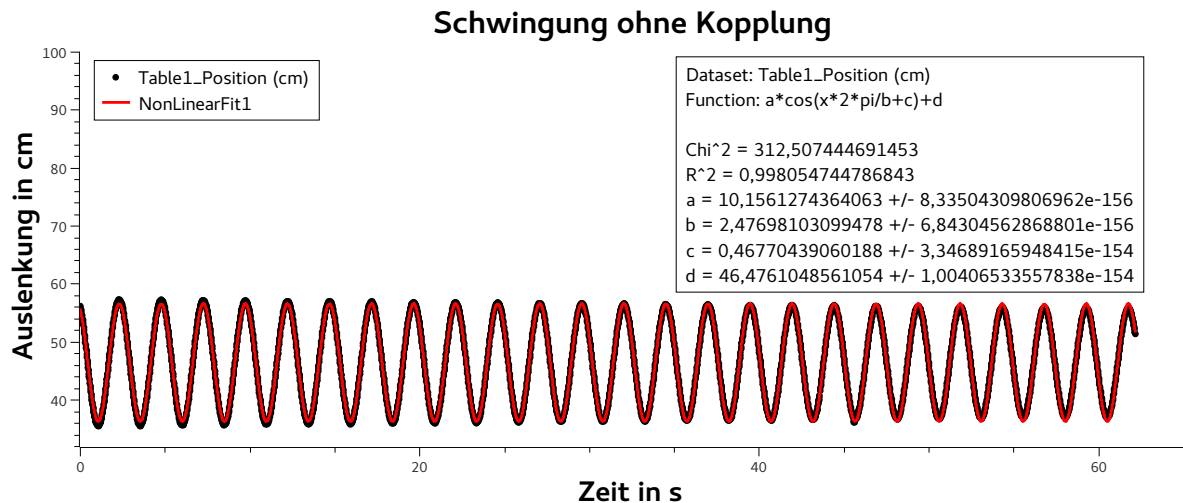


Abbildung 1: Schwingung eines Fadenpendels.

## 3.2 Gekoppelte Pendel

Bestimmen der Schwingdauern.

Resultierendes  $K$ ,  $T_s$  und Frequenzspaltungen

### 3.2.1 Statische Bestimmung des Kopplungsgrades

Die gegebene Formel für den Kopplungsgrad lautet:

$$k = \frac{x_2}{x_1}. \quad (1)$$

Tabelle 1: Messwerte beim Auslenken eines Pendels um  $x_1$  und der resultierende Ausschlag des gekoppelten Pendels um  $x_2$

|       | Kupfer | Edelstahl |
|-------|--------|-----------|
| $x_1$ | 9,8 cm | 10 cm     |
| $x_2$ | 1,9 cm | 3,1 cm    |
| $k$   | 0,194  | 0,310     |

### 3.2.2 Gleichschwingung

#### Kupfer

Aus Abb. 2 lässt sich  $T_{gl,Cu}$  aus den Parametern des Fits ablesen. Der Parameter  $b$  ist die Schwingdauer und beträgt 2,4645 s.

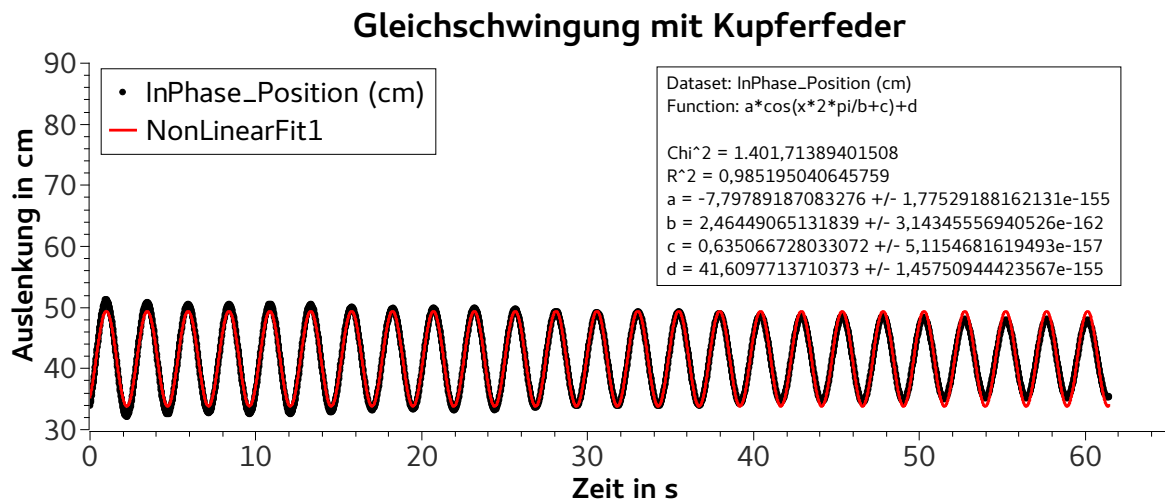


Abbildung 2: Gleichschwingung mit Kupferfeder.

### Edelstahl

Aus Abb. 3 lässt sich  $T_{gl,St}$  aus den Parametern des Fits ablesen. Der Parameter  $b$  ist die Schwingdauer und beträgt 2,4437 s.

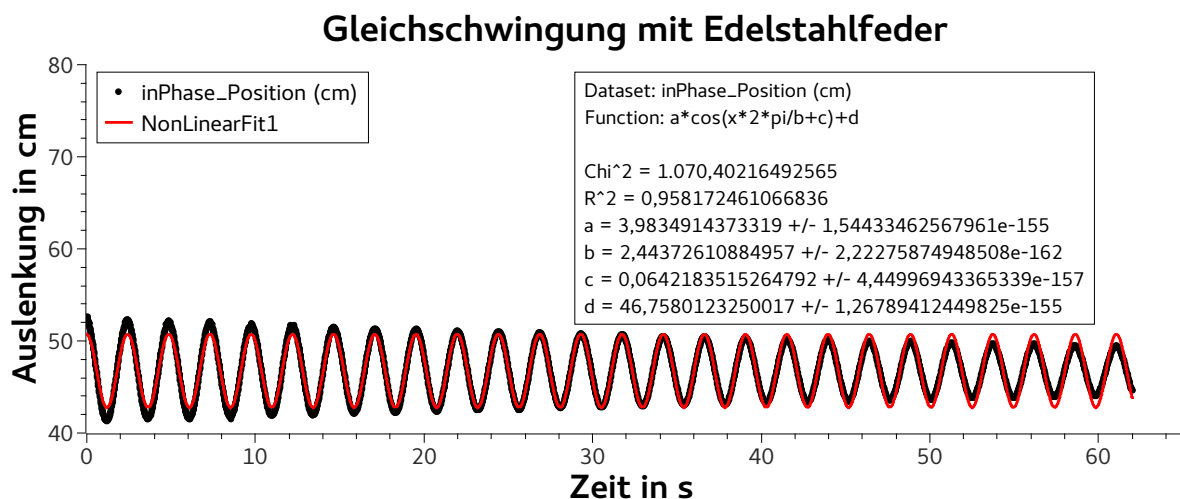


Abbildung 3: Gleichschwingung mit Edelstahlfeder.

### 3.2.3 Gegenschwingung

#### Kupfer

Aus Abb. 4 lässt sich  $T_{geg,Cu}$  aus den Parametern des Fits ablesen. Der Parameter  $b$  ist die Schwingdauer und beträgt 2,0381 s.

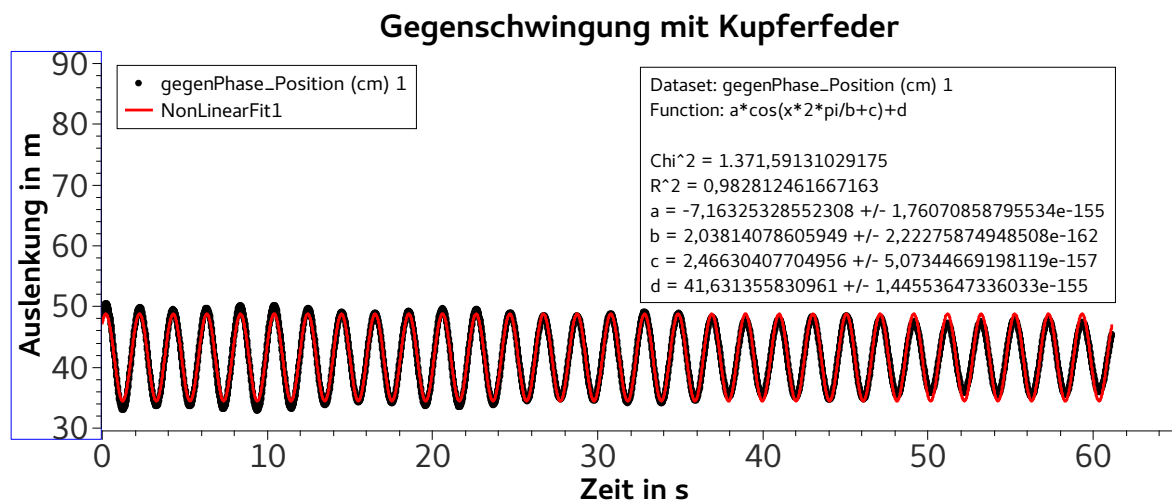


Abbildung 4: Gegenschwingung mit Kupferfeder.

## Edelstahl

Aus Abb. 5 lässt sich  $T_{\text{geg,St}}$  aus den Parametern des Fits ablesen. Der Parameter  $b$  ist die Schwingdauer und beträgt 1,7518 s.

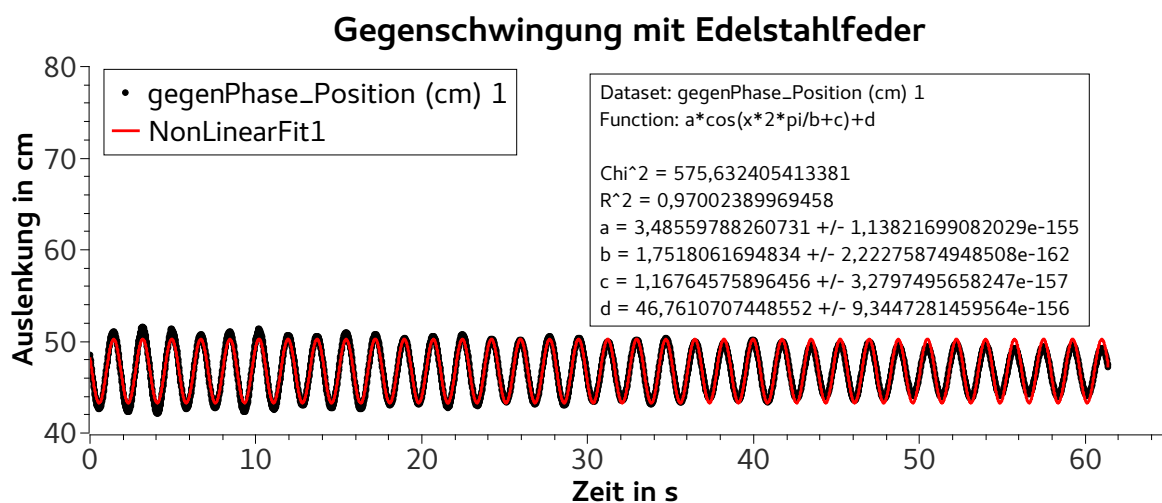


Abbildung 5: Gegenschwingung mit Edelstahlfeder.

### 3.2.4 Schwebungen des gekoppelten Systems

#### Kupfer

Aus Abb. 6 lässt sich  $T_{\text{S,Cu}}$  aus den Parametern des Fits ablesen. Der Parameter  $c$  gibt die Winkelgeschwindigkeit der Schwebung an. Folglich ist die Schwebungsdauer  $T_{\text{S,Cu}} = \frac{2\pi}{\omega} = 23,484 \text{ s}$ .

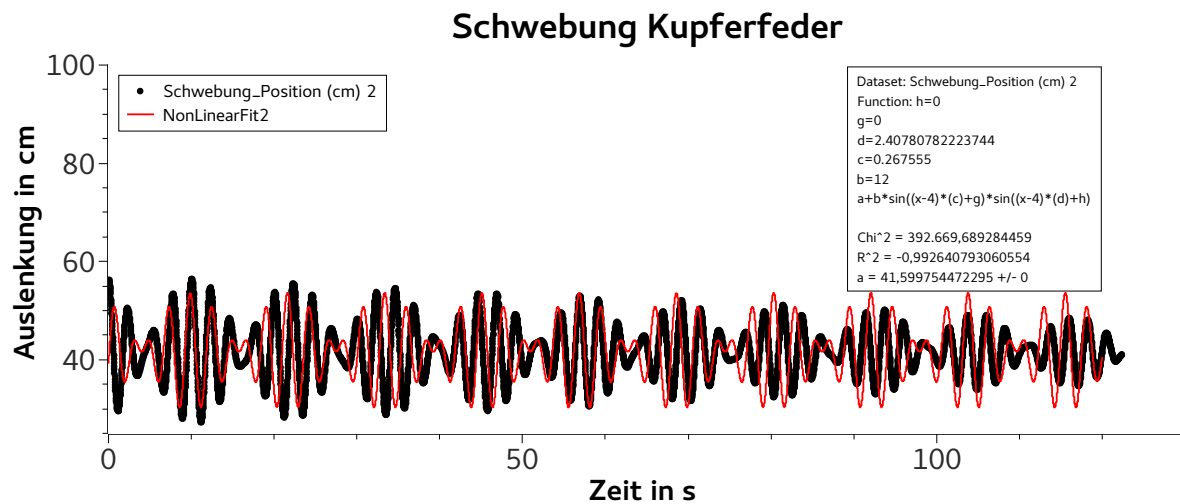


Abbildung 6: Schwebungen mit Kupferfeder.

## Edelstahl

Aus Abb. 7 lässt sich  $T_{S,St}$  aus den Parametern des Fits ablesen. Der Parameter  $c$  gibt die Winkelgeschwindigkeit der Schwebung an. Folglich ist die Schwebungsdauer  $T_{S,St} = \frac{2\pi}{\omega} = 12,323 \text{ s}$ .

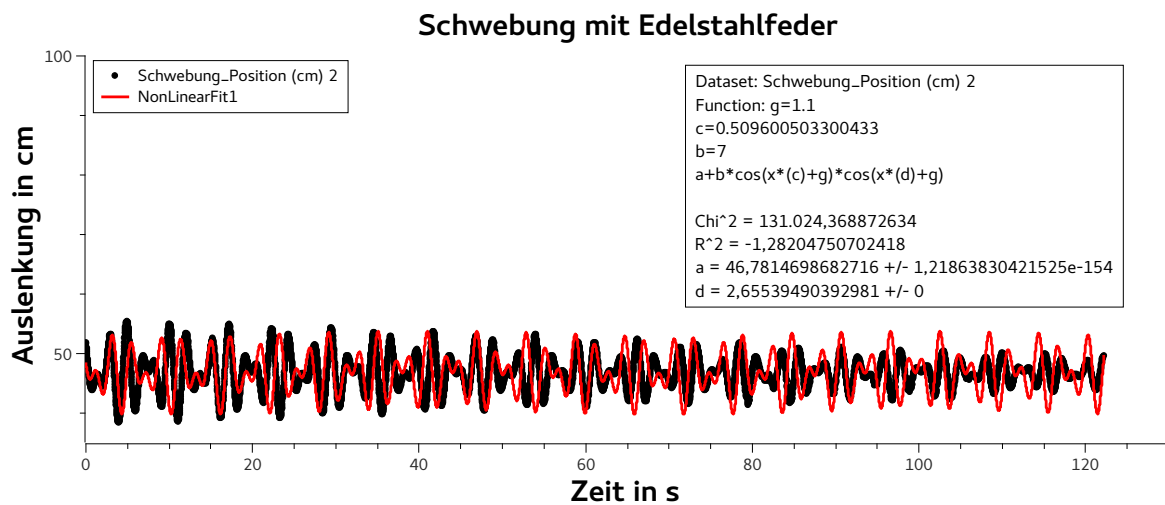


Abbildung 7: Schwebungen mit Edelstahlfeder.

### 3.2.5 Vergleich der Schwingdauern

Tabelle 2: Messwerte gekoppelter Pendel

|           | Kupfer   | Edelstahl |
|-----------|----------|-----------|
| $T_{gl}$  | 2,4645 s | 2,4437 s  |
| $T_{geg}$ | 2,0381 s | 1,7518 s  |
| $T_S$     | 23,484 s | 12,323 s  |

Auffällig ist der Zusammenhang

$$T_0 > T_{gl,Cu} > T_{gl,St}. \quad (2)$$

Der Theorie nach sollte jedoch gelten

$$T_0 = T_{gl,Cu} = T_{gl,St}. \quad (3)$$

Es ist anzunehmen, dass die veränderte Schwingdauer durch das Einbinden der Feder in das System verursacht wurde. Im idealen Fall würde die Ruhelänge der Feder dem Abstand der Pendel, wenn sie nicht schwingen, entsprechen. Beim Koppeln der Pendel änderte sich die Ruhelage der Pendel. Dies hat zur Folge, dass der Abstand der Pendel nicht mehr für alle Zeiten gleich ist, wenn sie mit der selben Frequenz schwingen.

In der Anleitung war diese Formel für die Schwebungsdauer gegeben:

$$T_S = \frac{4\pi}{\omega_{geg} - \omega_{gl}} = \frac{2}{\frac{1}{T_{geg}} - \frac{1}{T_{gl}}} \quad (4)$$

Tabelle 3: Schwebungsdauern berechnet aus den Schwingdauern

|       | Kupfer   | Edelstahl |
|-------|----------|-----------|
| $T_S$ | 23,560 s | 12,374 s  |

### 3.2.6 Dynamische Bestimmung des Kopplungsgrads

Setzt man die ermittelten Schwingdauern in

$$k = \frac{T_{gl}^2 - T_{geg}^2}{T_{gl}^2 + T_{geg}^2} \quad (5)$$

ein, ergeben sich folgende Kopplungsgrade:

Tabelle 4: Kopplungsgrade aus den Schwingdauern

|     | Kupfer | Edelstahl |
|-----|--------|-----------|
| $k$ | 0,187  | 0,3211    |



### 3.2.7 Relative Frequenzaufspaltung

Die relative Frequenzaufspaltung lässt sich mittels der gegebenen Formeln bestimmen.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{\omega_{gl}} = 2 \frac{T_{gl}}{T_S} \quad (6)$$

Tabelle 5: relative Frequenzaufspaltungen

|                                 | Kupfer | Edelstahl |
|---------------------------------|--------|-----------|
| $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ | 0,210  | 0,397     |

### 3.2.8 Diskussion der Näherung

Zum Berechnen der relative Frequenzspaltung ist außerdem die folgende Formel aufgeführt

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} - 1 \quad (7)$$

und deren Näherung

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2} + O(k^4) \quad (8)$$

Tabelle 6: relative Frequenzaufspaltungen

|                           | Kupfer | Edelstahl |
|---------------------------|--------|-----------|
| Aus den Schwingdauern     | 0,210  | 0,397     |
| Aus der Kopplungsformel   | 0,2171 | 0,3779    |
| Aus der Kopplungsnäherung | 0,2165 | 0,3729    |

Die relative Abweichung des Wertes der Näherung zu dem der Formel beträgt für die Edelstahlfeder ca. 1 % und für die Kupferfeder ca. 0,2 %.

### Unsicherheiten

Unsicherheit Ultraschallsensor pro T.

Mittelwert Verrechnung.

Der Ultraschallsensor misst lediglich den Abstand in der Horizontalen, das Pendel dagegen bewegt sich in einer Ebene. Da bei diesem Versuch der Fokus auf den Schwingdauern lag, ist der Fehler der somit für die Amplitude der Schwingung entsteht irrelevant.

Abfallen der Ampilutde mit der Zeit.

### 3.3 Doppelpendel

Das Doppelpendel schwingt sehr chaotisch, d.h. es gibt auch bei nur sehr kleinen Änderungen in den Anfangsbedingungen andere Bahnen. Außerdem konnten wir zwei stabile Schwingungen beobachten, jedoch nur für ca. 5 Perioden. Danach ergaben sich minimal phasenverschobene Schwingungen. Bei einer der stabilen Schwingungen haben beide Pendel immer in die selbe Richtung gezeigt. Die andere zeichnet sich da durch aus, dass die Pendel immer den entgegengesetzten Winkel zur Vertikalen haben.

## 4 Schlussfolgerung

Feder weiteroben befestigen für bessere Kopplungen.

Näherung ist gut/schlecht.

Parallelen bei Doppel- und Gekoppeltem Pendel.

Änderung der 'Eigenfrequenz' durch neue Position durch Feder.