

Geometrische Optik

Einführung

In diesem Versuch sollen einige Phänomene betrachtet werden, die im Zusammenhang mit der Propagation von Licht und seiner Wechselwirkung mit Materie auftreten. Insbesondere soll dieser Versuch Sie in die Grundlagen der geometrischen Optik einführen und Sie mit dem Umgang mit optischen Komponenten, wie sie auch in Forschungslaboren eingesetzt werden, vertraut machen.

Theoretische Vorüberlegungen

Grundprinzipien

Im Folgenden werden wir uns mit dem Verhalten von Licht beim Durchgang durch Materie und Grenzflächen beschäftigen. Hierbei wird uns das Konzept des Licht- bzw. Laserstrahls immer wieder begegnen. Ein Strahl ist eine Linie im Raum, die der Ausbreitungsrichtung der Strahlungsenergie entspricht. In homogenen isotropen Medien sind Strahlen gerade Linien parallel zum Ausbreitungsvektor \vec{k} ¹. Das Verhalten von Lichtstrahlen an Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien kann durch wenige Grundprinzipien beschrieben werden. Diese Grundprinzipien erfüllen natürlich die Maxwell'schen Gleichungen, werden aber typischerweise mit Hilfe des Prinzips von Huygens-Fresnel² oder des Fermat'schen Prinzips³ hergeleitet (für die Herleitung sei auf ein Optik-Lehrbuch verwiesen).

Wir wissen, dass Licht beim Auftreffen auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex n (zum Beispiel zwischen Luft und Glas) zum Teil reflektiert und zum Teil gebrochen wird. Der einfallende Strahl und die Flächennormale definieren dabei die sogenannte Einfallsebene. Aus Symmetriegründen liegen einfallender, reflektierter und

¹In einem isotropen Medium sind Strahlen orthogonale Trajektorien der Wellenfronten und damit parallel zum Ausbreitungsvektor. In anisotropen Materialien, wie zum Beispiel doppelbrechenden Kristallen, ist dem nicht so.

²Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer neuen Kugelwelle betrachtet werden, vergleiche auch Versuch O6.

³Ein Lichtstrahl nimmt zwischen zwei Punkten immer den Pfad, der am wenigsten Zeit benötigt. Das Fermat'sche Prinzip ist ein Variationsprinzip und minimiert die optische Weglänge (optische Weglänge = Brechungsindex \times geometrischer Weg).

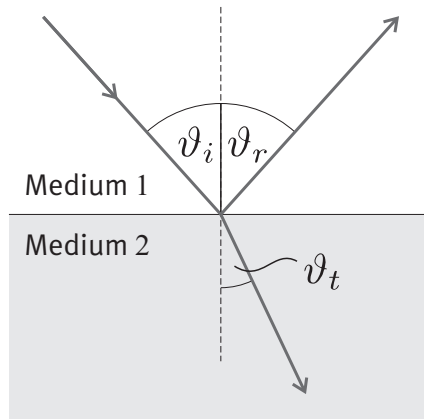


Abbildung 1: Trifft ein Lichtstrahl unter dem Winkel ϑ_i auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien, wird der Strahl zum Teil unter dem Winkel $\vartheta_r = \vartheta_i$ reflektiert, zum Teil gebrochen bzw. transmittiert. Ist das Medium 1 optisch dünner als das Medium 2 ($n_1 < n_2$), wird der transmittierte Strahl zur Flächennormalen hin gebrochen.

gebrochener Strahl alle in dieser Ebene. Der Einfallswinkel ϑ_i (gemessen bezüglich der Flächennormalen) ist dabei gleich dem Ausfallswinkel ϑ_r des reflektierten Strahls. Der transmittierte bzw. gebrochene Strahl pflanzt sich unter dem Winkel ϑ_t fort. Dabei gilt nach Snellius $n_i \sin \vartheta_i = n_t \sin \vartheta_t$, wobei n_i und n_t die Brechungsindizes der jeweiligen Medien vor und hinter der Grenzfläche sind (vgl. Abbildung 1). Licht, das von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium fällt ($n_i < n_t$), wird zur Normalen hin, im umgekehrten Fall ($n_i > n_t$) von ihr weg gebrochen. Im letzteren Fall kann es zum Phänomen der Totalreflexion kommen (vgl. Versuch O2), was zum Beispiel in Glasfasern ausgenutzt wird.

Zusammengefasst sind die drei Grundprinzipien von Reflexion und Brechung also:

- Einfallender, reflektierter und gebrochener Strahl liegen alle in der Einfallsebene.
- $\vartheta_i = \vartheta_r$.
- $n_i \sin \vartheta_i = n_t \sin \vartheta_t$.

Dispersion

Für die Propagation von Licht in Materie gibt es eine einfache Beschreibung auf der Grundlage des harmonischen Oszillators (vgl. Versuch M2). Das periodisch sich ändernde \vec{E} -Feld der Lichtwelle übt auf die Elektronen der Atomhüllen eine periodische Kraft aus, lenkt sie aus ihrer Ruhelage aus

und regt sie so zu erzwungenen Schwingungen an. Die rücktreibenden Kräfte sind dabei die elektrostatischen Kräfte zwischen Atomkern und Elektronen. Wegen des Hin- und Herschwingen des Elektrons um den Atomkern stellt es einen Hertzschen Dipol dar und strahlt elektromagnetische Feldenergie ab. Die Überlagerung von \vec{E} -Feld der Lichtwelle und abgestrahlter Welle entspricht der sich in Materie fortpflanzenden elektromagnetischen Welle. Da die induzierte Schwingung typischerweise eine Phasenverschiebung zur Anregung aufweist, unterscheidet sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in Materie von c , der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Der Brechungsindex eines Materials entspricht dem Verhältnis von c zur Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht (genauer: Phasengeschwindigkeit) in dem Material. Nachdem eine erzwungene Schwingung immer mit der Anregungsfrequenz stattfindet, bleibt die Lichtfrequenz beim Übergang von Vakuum in Materie erhalten. Da es in Materie Resonanzfrequenzen gibt, ist die Phasenverschiebung und damit der Brechungsindex frequenzabhängig. Die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex $n = n(\omega)$ wird Dispersion genannt. Typischerweise steigt n im Bereich des sichtbaren Lichts leicht mit wachsender Frequenz ω an.

Beugung am Gitter

Fällt Licht der Wellenlänge λ auf ein Gitter mit Gitterkonstante g (= Lückenabstand), sorgt die Wellennatur des Lichts dafür, dass Lichtstrahlen, die durch verschiedene Lücken fallen, interferieren. So entsteht hinter dem Gitter ein Beugungsbild des Gitters. Ein Maximum in der Intensitätsverteilung resultiert immer dann, wenn Licht zweier benachbarter Lücken positiv interferiert, also unter den Winkeln ϑ_{\max} mit

$$\sin \vartheta_{\max} = m \frac{\lambda}{g} \quad \text{mit} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

Zur genauen Herleitung dieser Formel vergleiche Versuch O6.

Optische Komponenten

Mit Hilfe der Grundprinzipien von Reflexion und Brechung kann nun das Verhalten von Lichtstrahlen beim Durchgang durch optische Komponenten hergeleitet werden. Für die genauen Herleitungen sei auf die weiterführende Literatur verwiesen.

Prismen

Prismen werden in einer großen Vielfalt von Größen und Formen in der Optik eingesetzt, zum Beispiel als Strahlteiler (vgl. Versuch O2), zur Kontrolle der Polarisierung oder zur Dispersionskompensation. Wir werden uns hier mit Dispersionsprismen beschäftigen, die Lichtstrahlen entsprechend ihrer

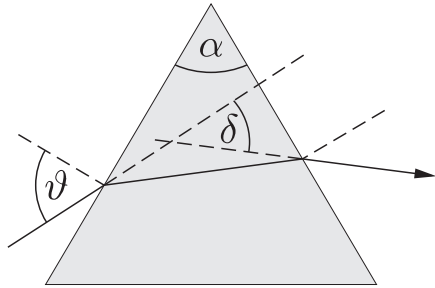


Abbildung 2: Durchgang eines Lichtstrahls durch ein Prisma

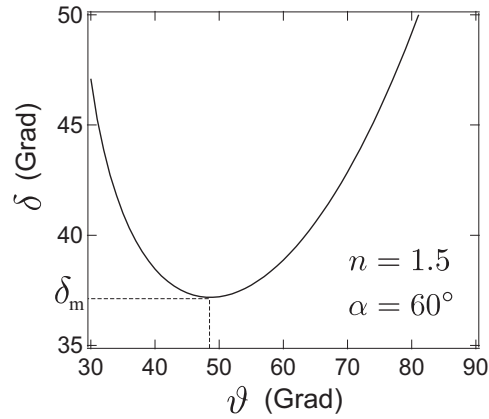


Abbildung 3: Ablenkung als Funktion des Einfallswinkels

Wellenlänge λ um einen Winkel $\delta(\lambda)$ ablenken (vgl. Abb. 2). Die Grundfläche eines Dispersionsprismas entspricht einem gleichschenkeligen Dreieck mit Apexwinkel α . Die gesamte Ablenkung $\delta(\lambda)$, die ein Lichtstrahl erfährt, der unter dem Winkel ϑ auf das Prisma fällt, kann mit Hilfe von α und dem Brechungsindex des Prismenmaterials⁴ $n(\lambda)$ folgendermaßen berechnet werden (vgl. Abb. 3):

$$\delta(\lambda) = \vartheta + \arcsin[(\sin \alpha)(n(\lambda)^2 - \sin^2 \vartheta)^{1/2} - \sin \vartheta \cos \alpha] - \alpha. \quad (2)$$

Der kleinste Wert für δ , die minimale Ablenkung δ_m , ist von besonderer Bedeutung, da in diesem Fall der Lichtstrahl symmetrisch durch das Prisma geht. Für diesen Fall gilt:

$$n = \frac{\sin[(\delta_m + \alpha)/2]}{\sin(\alpha/2)}. \quad (3)$$

Sphärische Grenzflächen und Linsen

Linsen sind zweifelsfrei die am häufigsten eingesetzten optischen Komponenten. Typischerweise werden Linsen von konkaven bzw. konvexen sphärischen Flächen begrenzt (vgl. Abb. 4), da die Herstellung von sphärischen Oberflächen deutlich einfacher ist, als die anderer gekrümmter Flächen (zum Beispiel parabolische). Um das Verhalten von Lichtstrahlen bei Durchgang durch Linsen zu verstehen, werden wir uns daher zunächst mit der Brechung an einer sphärischen Grenzfläche beschäftigen.

Abbildung 5) zeigt einen Strahl, der unter dem Winkel α zur optischen Achse, d.h. der Symmetrieachse des Systems, auf eine Kugelfläche mit Ra-

⁴Das Prisma für diesen Versuch besteht aus Flintglas mit $n(\lambda = 650 \text{ nm}) = 1.631$ und $n(\lambda = 405 \text{ nm}) = 1.669$.

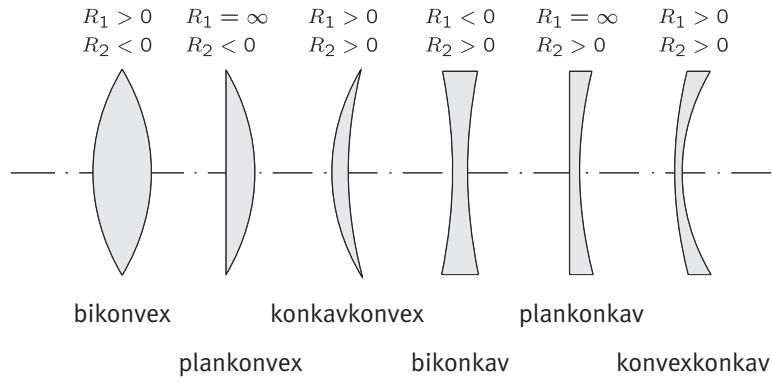


Abbildung 4: Schnittbilder elementarer Linsentypen; Sammellinsen (links) sind im Zentrum dicker als am Rand, Streulinsen (rechts) am Rand dicker als im Zentrum, sofern der Brechungsindex des Linsenmaterials größer ist als der der Umgebung.

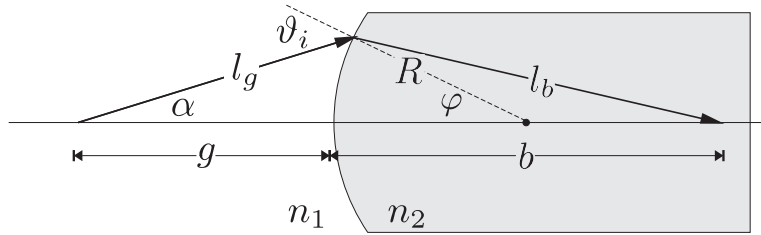


Abbildung 5: Brechung an einer sphärischen Grenzfläche

dius R unter dem Einfallswinkel ϑ_i trifft. Mit Hilfe des Snellius'schen Brechungsgesetzes oder des Fermat'schen Prinzips kann nun gezeigt werden, dass der gebrochene Strahl die optische Achse im Abstand b von der Grenzfläche wieder schneidet und es gilt

$$\frac{n_1}{l_g} + \frac{n_2}{l_b} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 b}{l_b} - \frac{n_1 g}{l_g} \right). \quad (4)$$

Geht man davon aus, dass φ klein ist, d.h. der Strahl die Grenzfläche nahe der optischen Achse kreuzt, kann man in der sogenannten paraxialen Näherung⁵ $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, $l_g \approx g$ und $l_b \approx b$ annehmen. Damit ergibt sich

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (5)$$

⁵Auch unter Kleinwinkelnäherung oder Gauß'scher Optik bekannt.

Linsen

Um das Pendant zu Gleichung (5) für eine Linse (begrenzt von zwei Kugelflächen vom Radius R_1 bzw. R_2 , mit Brechungsindex n_L und umgeben von Luft mit $n_{\text{Luft}} = 1$) zu erhalten, wendet man Gleichung (5) zweimal hintereinander an. Für dünne Linsen kann man die Dicke der Linse gegen g und b vernachlässigen und erhält die Linsenformel

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n_L - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (6)$$

Gehen die Strahlen, die auf die Linse treffen, von einer unendlich weit entfernten Quelle aus (oder von einem kollimierten Laser), d.h. es sind Parallelstrahlen und $g \rightarrow \infty$, wird die zugehörige Bildweite b zur (bildseitigen) Brennweite f_b . Gehen die Strahlen von einem Punkt aus, so dass $b \rightarrow \infty$, bezeichnet man die zugehörige Gegenstandsweite g als (gegenstandsseitige) Brennweite f_g . Für dünne Linsen ist $f_b = f_g \equiv f$ und es gilt

$$\frac{1}{f} = (n_L - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (7)$$

Gleichungen (6) und (7) ergeben zusammen die bekannte Abbildungsformel (für dünne Linsen und achsennahe Strahlen):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}. \quad (8)$$

Bildkonstruktion mit Linsen

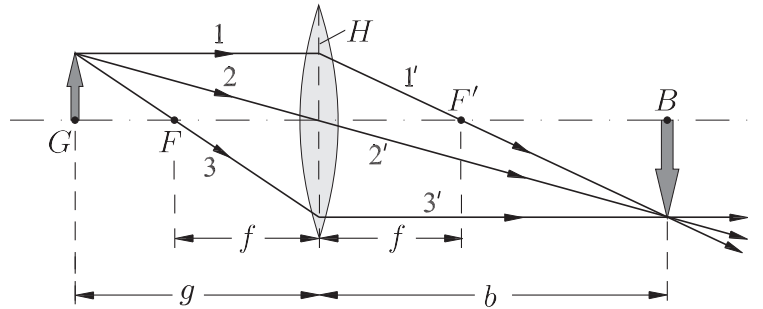


Abbildung 6: Bildkonstruktion bei einer Sammellinse

Durch eine Linse wird ein Punkt G (Gegenstandspunkt) in einen Punkt B (Bildpunkt) abgebildet. Zur geometrischen Konstruktion der Lage des Bildes ist nach der Abbildungsformel (8) lediglich die Kenntnis von g und f erforderlich. Die beiden Brechungen an den Oberflächen einer Linse können bei dünnen Linsen in guter Näherung durch eine einzige Brechung an der

Mittelebene der Linse, der Hauptebene H , ersetzt werden. Die Konstruktion selbst kann mittels zweier von drei ausgezeichneten Strahlen erfolgen (vgl. Abb. 6):

1 \rightarrow 1' Achsenparalleler Strahl geht nach Brechung durch den Brennpunkt F'

2 \rightarrow 2' Mittelpunktsstrahl durchdringt die Linse ungebrochen

3 \rightarrow 3' Brennpunktstrahl verläuft nach Brechung parallel zur optischen Achse

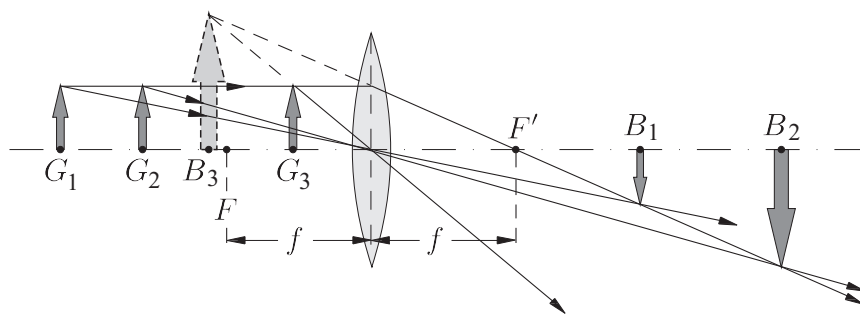


Abbildung 7: Zuordnung von Bild zu Gegenstand bei der Abbildung durch Sammellinsen

Für $g > f$ ist $b > 0$, es erfolgt eine reelle Abbildung, wobei das Bild auf dem Kopf stehend erscheint. Reelle Abbildung bedeutet, dass das Bild auf einem Schirm an dieser Stelle sichtbar wird.

Für $g < f$ wird $b < 0$, das Bild scheint im Gegenstandsraum zu sein und aufrecht aufzutreten, ohne dass ein Schirm dort ein Bild zeigen würde: virtuelle Abbildung. Beispielsweise ist dies auch die Verwendungsart einer Sammellinse als Lupe.

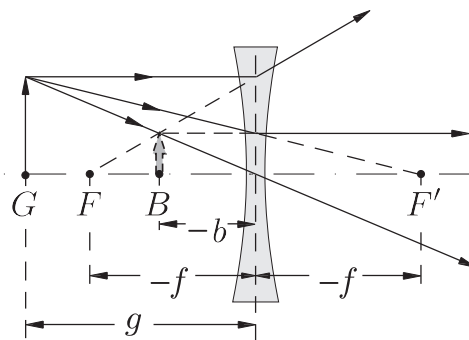


Abbildung 8: Bildkonstruktion bei einer Zerstreuungslinse

Durch eine Zerstreuungslinse entsteht stets ein aufrechtes, verkleinertes, virtuelles Bild im Gegenstandsraum (Abb. 8).

Linsensysteme

Ein Linsensystem besteht aus zwei oder mehr Einzellinsen. Beispielsweise sind alle modernen Fotoobjektive Linsensysteme aus vielen Einzellinsen. Ein solches Linsensystem lässt sich als eine einzige Linse mit der zugehörigen Brennweite f beschreiben. Für ein System aus zwei Einzellinsen mit Brennweiten f_1 und f_2 , ergibt sich

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}, \quad (9)$$

wobei d der Abstand der beiden Linsen ist. Für zwei dicht aufeinander liegende Linsen ($d \approx 0$) ist die Brechkraft des Systems gleich der Summe der Brechkraft der Einzellinsen

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (10)$$

Ein weiterer interessanter Spezialfall ergibt sich für $d = f_1 + f_2$.

Linsenfehler

Die Beschreibung der Abbildung durch Linsen mit Hilfe der Abbildungsformel (8) ist nur unter sehr eingeschränkten Bedingungen (paraxiale Näherung, monochromatisches Licht) ausreichend. In dem Maße, wie diese Bedingungen entfallen, beobachtet man Abweichungen von der einfachen Beschreibung. Die Abweichungen werden üblicherweise als Linsenfehler bezeichnet.

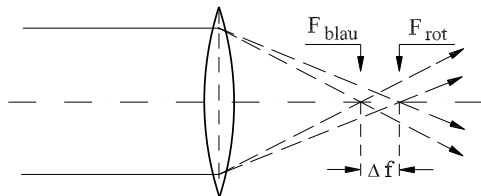


Abbildung 9: Chromatische Aberration

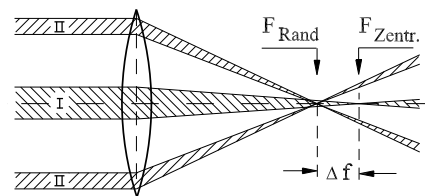


Abbildung 10: Sphärische Aberration

Chromatische Aberration Da der Brechungsindex des Linsenmaterials wellenlängenabhängig ist, ergeben sich nach Gleichung (7) für rotes und für blaues Licht unterschiedliche Brennweiten (vgl. Abb. 9):

$$n_{\text{rot}} < n_{\text{blau}} \implies f_{\text{rot}} > f_{\text{blau}}$$

Der Brennweitenunterschied Δf ist ein Maß für die Dispersion.

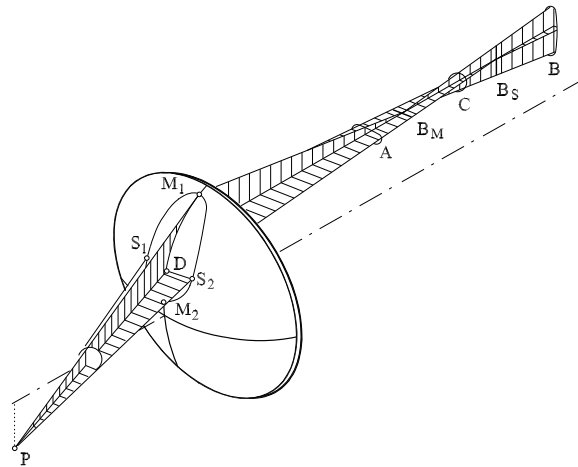


Abbildung 11: Astigmatische Abbildung eines seitlich der Systemachse gelegenen Punktes P durch eine einfache bikonvexe Linse. PM_1M_2 stellt die Meridionalebene dar; sie enthält die optische Achse. PS_1S_2 stellt die Sagittalebene dar; sie ist senkrecht zu PM_1M_2 .

Sphärische Aberration Als sphärische Aberration bezeichnet man die Tatsache, dass bei Linsen mit sphärischen Oberflächen achsenparallele Strahlen, die verschiedene Abstände von der optischen Achse haben, in unterschiedliche Punkte auf der optischen Achse fokussiert werden. Randstrahlen besitzen einen Brennpunkt, der näher zur Linse liegt als Strahlen, die nahe der optischen Achse durch die Linse fallen. Dies gilt sowohl für Sammellinsen als auch für Streulinsen:

$$|f_{\text{Rand}}| < |f_{\text{Zentrum}}|$$

Astigmatismus Bei der Abbildung eines seitlich von der Linsenachse gelegenen Punktes P durch eine Linse erzeugt das schräg durch die Linse tretende Lichtbündel keinen Bildpunkt mehr, sondern zwei in einem gewissen Abstand liegende, zueinander senkrechte Bildlinien B_M und B_S . Dabei heißt B_M meridionale (oder tangentielle) Bildlinie und B_S sagittale Bildlinie (Abb. 12). Dieses Abbildungsphänomen bezeichnet man als Astigmatismus (‘‘Punktlosigkeit’’). Der Abstand der beiden Bildlinien heißt astigmatische Differenz.

Weiterführende Literatur

Mehr zur Optik finden Sie zum Beispiel in *Optik für Ingenieure* von F. Pedrotti, L. Pedrotti, W. Bausch und H. Schmidt. Die ‘‘Bibel’’ der Optik ist fraglos *Optics* von E. Hecht.