

VERSUCHSBERICHT ZU

# M2 - GEKOPPELTE PENDEL

Gruppe 6Mi

Alexander Neuwirth (E-Mail: a\_neuw01@wwu.de)  
Leonhard Segger (E-Mail: l\_segg03@uni-muenster.de)

durchgeführt am 22.11.2017  
betreut von  
Martin Körsgen

28. November 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurzfassung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Methoden</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>3</b>
3.1	Pendel ohne Kopplung . . . . .	4
3.2	Gekoppelte Pendel . . . . .	4
3.2.1	Statische Bestimmung des Kopplungsgrades . . . . .	4
3.2.2	Gleichschwingung . . . . .	5
3.2.3	Gegenschwingung . . . . .	6
3.2.4	Schwebungen des gekoppelten Systems . . . . .	7
3.2.5	Vergleich der Schwingdauern . . . . .	8
3.2.6	Dynamische Bestimmung des Kopplungsgrads . . . . .	9
3.2.7	Relative Frequenzaufspaltung . . . . .	10
3.2.8	Diskussion der Näherung . . . . .	10
3.3	Doppelpendel . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Schlussfolgerung</b>	<b>11</b>

# 1 Kurzfassung

In diesem Versuch wurde das Verhalten zweier Pendel, die mittels einer Feder gekoppelt wurden, untersucht. Dazu sollte der Kopplungsgrad dynamisch sowie statisch bestimmt werden. Es wurde mit zwei verschieden starken Federn experimentiert. Zuletzt haben wir ein Doppelpendel beobachtet und dessen Bewegung mit der der gekoppelten Pendel verglichen.

## 2 Methoden

Der Versuch besteht aus zwei Pendeln die mittels verschieden starken Federn gekoppelt werden. Damit beide Pendeln mit der gleiche Eigenfrequenz schwingen, haben wir die Länge der Pendel so angepasst, dass sie auch nach ca. 20 Perioden ohne Kopplung synchron schwingen. Die Federn wurden 10 cm über den Massen der Pendel befestigt.

Der Kopplungsgrad und die relative Frequenzaufspaltung wurde statisch sowie dynamisch bestimmt. Bei der statischen Messung wird ein Pendel ausgelenkt und die resultierende Auslenkung des anderen Pendels aufgenommen. Dynamisch ergibt sich der Kopplungsgrad aus den Schwingdauern der Grundschrwingungen einer gleichsinnigen und gegensinnigen Bewegung. Eine gleichsinnige Bewegung wird erzeugt indem man beide Pendel in die gleiche Richtung um den gleiche Winkel auslenkt. Für eine gegensinnige Schwingung lenkt man die Pendel gleich weit in entgegengesetzte Richtungen aus.

Experimentiert wurde mit einer Feder aus Kupfer und einer vermutlich aus Edelstahl bestehenden Feder. Zum Bestimmen der Schwingdauern wurde ein Ultraschall-Entfernungssensor verwendet, jedoch traten beim Testen der Messapparatur bei Sensorfrequenzen über 50 Hz Softwareprobleme auf.

Das Verhalten eines Doppelpendels wurde mit verschiedenen initialen Auslenkungen und Geschwindigkeiten beobachtet.

## 3 Ergebnisse und Diskussion

In allen folgenden Abbildungen sind in Schwarz Entfernungsmessungspunkte des Ultraschallsensors mit 50 Hz, sowie ein nicht linearer Fit in Rot aufgetragen. Gemessen wurde immer über 60 Sekunden. Lediglich zum Bestimmen der Schwebungsdauer wurde über 120 Sekunden gemessen. Die Fit-Kurven wurden gemäß dem „Scaled Levenberg-Marquardt algorithm“ erzeugt. Für einfache Schwingungen haben wir

$$f(x) = a \cos\left(\frac{2\pi}{b}x + c\right) + d \quad (1)$$

und für die Überlagerung zweier Schwingungen

$$f(x) = a + b \cos(xc + g) \cos(xd + h) \quad (2)$$

verwendet.

### 3.1 Pendel ohne Kopplung

Die Schwingdauer eines einzelnen Pendels lässt sich am Parameter  $b$  des Fits nach Gleichung (1) ablesen. Somit ist  $T_0 = 2,477$  s.

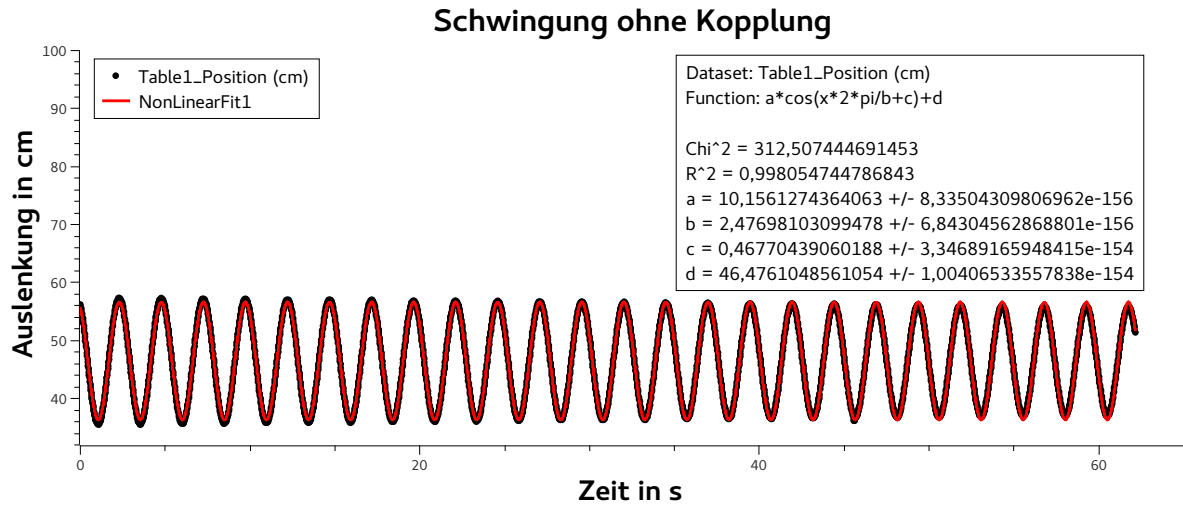


Abbildung 1: Schwingung eines Fadenpendels.

### 3.2 Gekoppelte Pendel

#### 3.2.1 Statische Bestimmung des Kopplungsgrades

Die gegebene Formel für den Kopplungsgrad lautet:

$$k = \frac{x_2}{x_1}. \quad (3)$$

Die Auslenkung der Pendel konnte bis auf  $\Delta x = \pm 0,1$  cm genau bestimmt werden. Für die Unsicherheit ergibt sich also  $u(x) = \frac{0,2 \text{ cm}}{2\sqrt{3}} = 0,058$  cm.

$$u(k) = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial x_1} u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial x_2} u(x_2)\right)^2} = k u(x) \sqrt{\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_2}\right)^2} \quad (4)$$

Tabelle 1: Messwerte beim Auslenken eines Pendels um  $x_1$  und der resultierende Ausschlag des gekoppelten Pendels um  $x_2$

	Kupfer	Edelstahl
$x_1$	$(9,800 \pm 0,058)$ cm	$(10,000 \pm 0,058)$ cm
$x_2$	$(1,900 \pm 0,058)$ cm	$(3,100 \pm 0,058)$ cm
$k$	$0,194 \pm 0,006$	$0,310 \pm 0,006$

### 3.2.2 Gleichschwingung

#### Kupfer

Aus Abb. 2 lässt sich  $T_{gl,Cu}$  aus den Parametern des Fits nach Gleichung (1) ablesen. Der Parameter  $b$  ist die Schwingdauer und beträgt 2,4645 s.

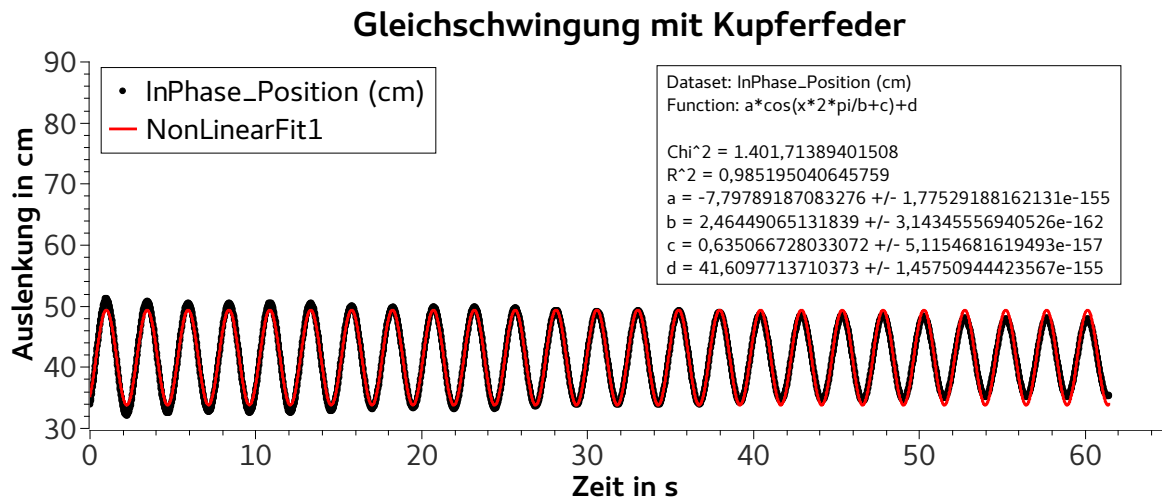


Abbildung 2: Gleichschwingung mit Kupferfeder.

#### Edelstahl

Aus Abb. 3 lässt sich  $T_{gl,St}$  aus den Parametern des Fits nach Gleichung (1) ablesen. Der Parameter  $b$  ist die Schwingdauer und beträgt 2,4437 s.

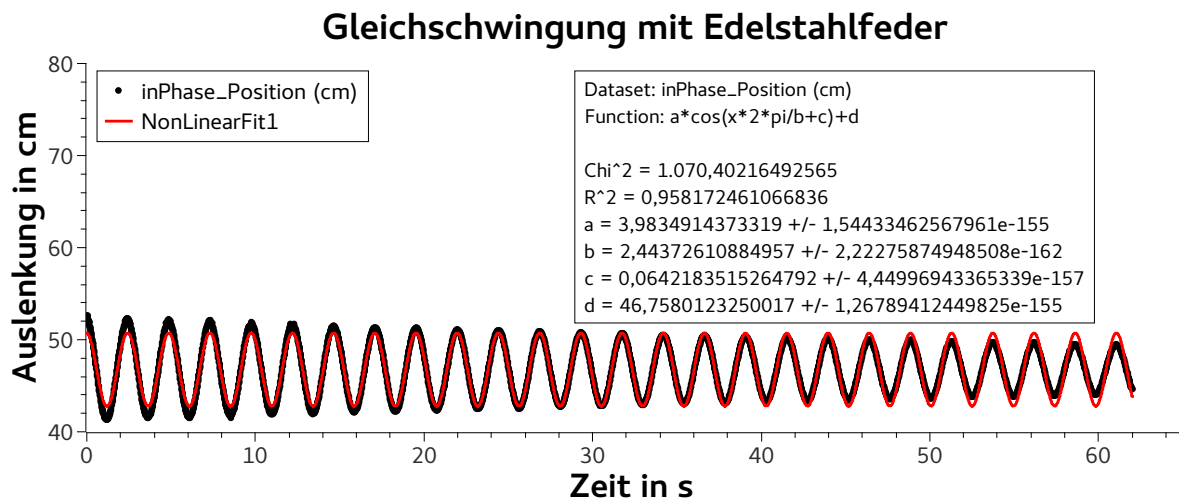


Abbildung 3: Gleichschwingung mit Edelstahlfeder.

### 3.2.3 Gegenschwingung

#### Kupfer

Aus Abb. 4 lässt sich  $T_{\text{geg,Cu}}$  aus den Parametern des Fits nach Gleichung (1) ablesen. Der Parameter  $b$  ist die Schwingdauer und beträgt 2,0381 s.

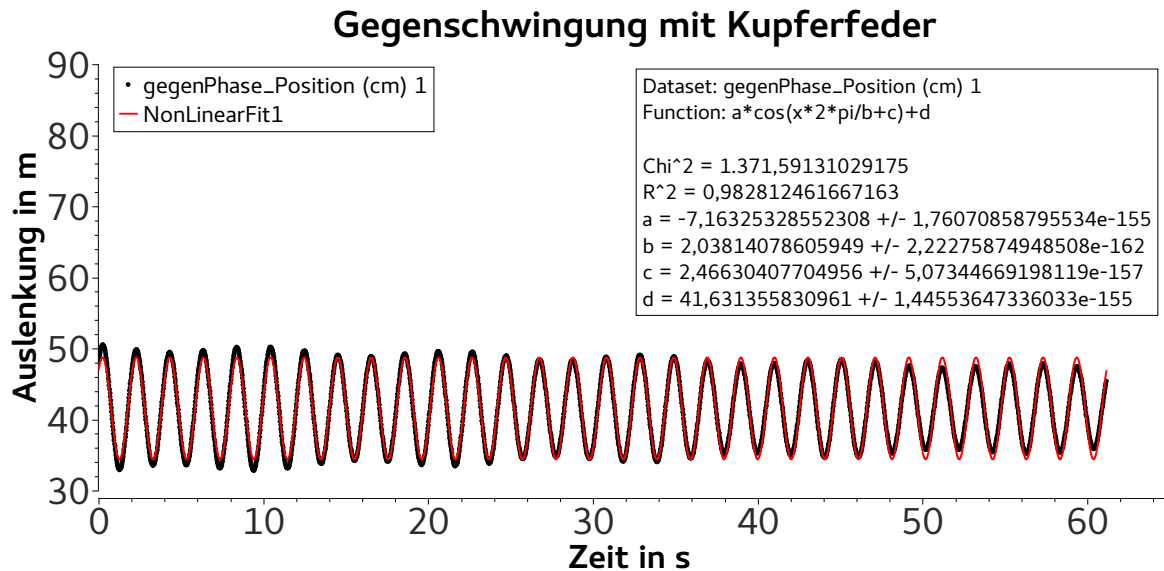


Abbildung 4: Gegenschwingung mit Kupferfeder.

#### Edelstahl

Aus Abb. 5 lässt sich  $T_{\text{geg,St}}$  aus den Parametern des Fits nach Gleichung (1) ablesen. Der Parameter  $b$  ist die Schwingdauer und beträgt 1,7518 s.

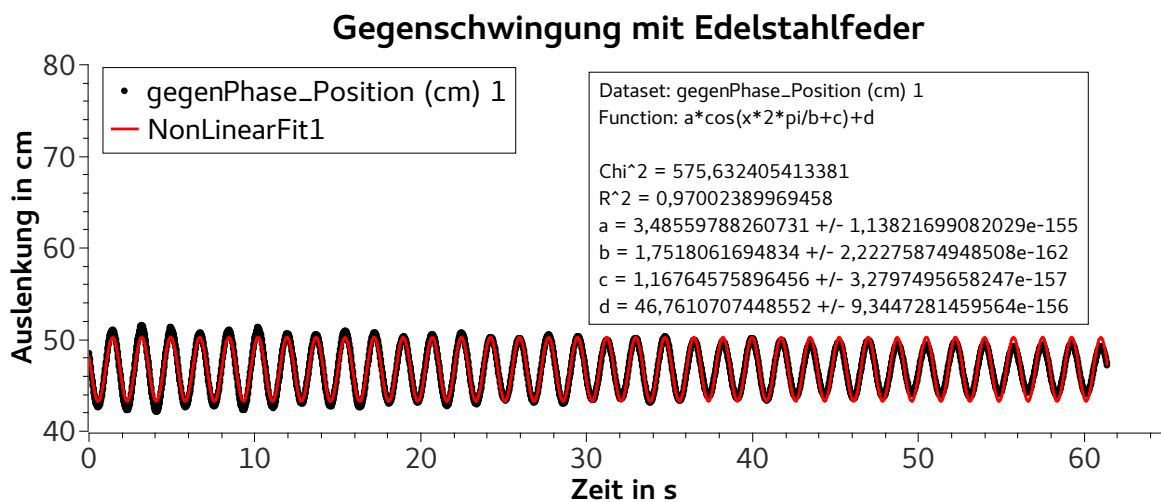


Abbildung 5: Gegenschwingung mit Edelstahlfeder.

### 3.2.4 Schwebungen des gekoppelten Systems

#### Kupfer

Aus Abb. 6 lässt sich  $T_{S,Cu}$  aus den Parametern des Fits nach Gleichung (2) ablesen. Der Parameter  $c$  gibt die Winkelgeschwindigkeit der Schwebung an. Folglich ist die Schwebungsdauer  $T_{S,Cu} = \frac{2\pi}{\omega} = 23,484 \text{ s}$ .

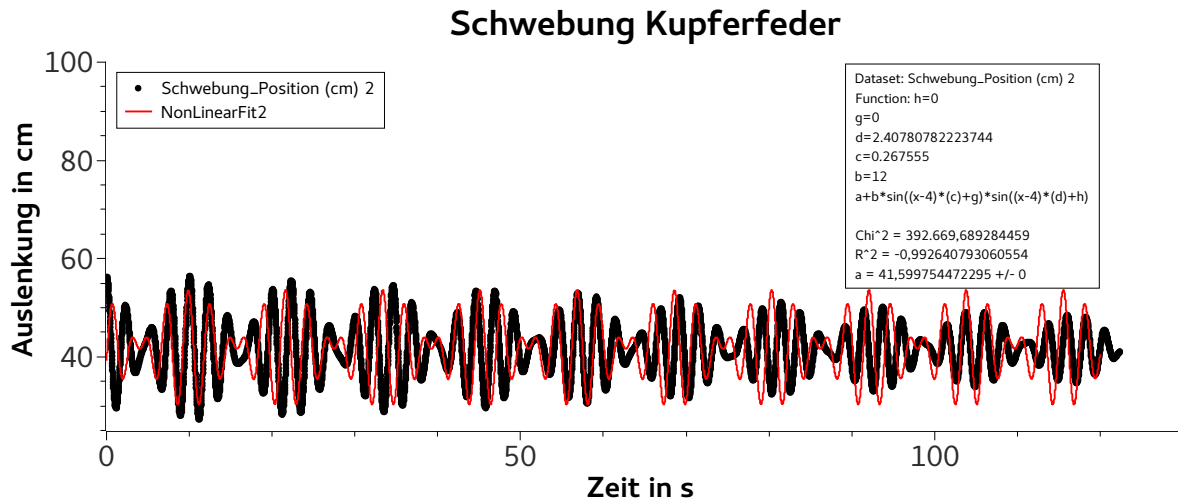


Abbildung 6: Schwebungen mit Kupferfeder.

#### Edelstahl

Aus Abb. 7 lässt sich  $T_{S,st}$  aus den Parametern des Fits nach Gleichung (2) ablesen. Der Parameter  $c$  gibt die Winkelgeschwindigkeit der Schwebung an. Folglich ist die Schwebungsdauer  $T_{S,st} = \frac{2\pi}{\omega} = 12,323 \text{ s}$ .

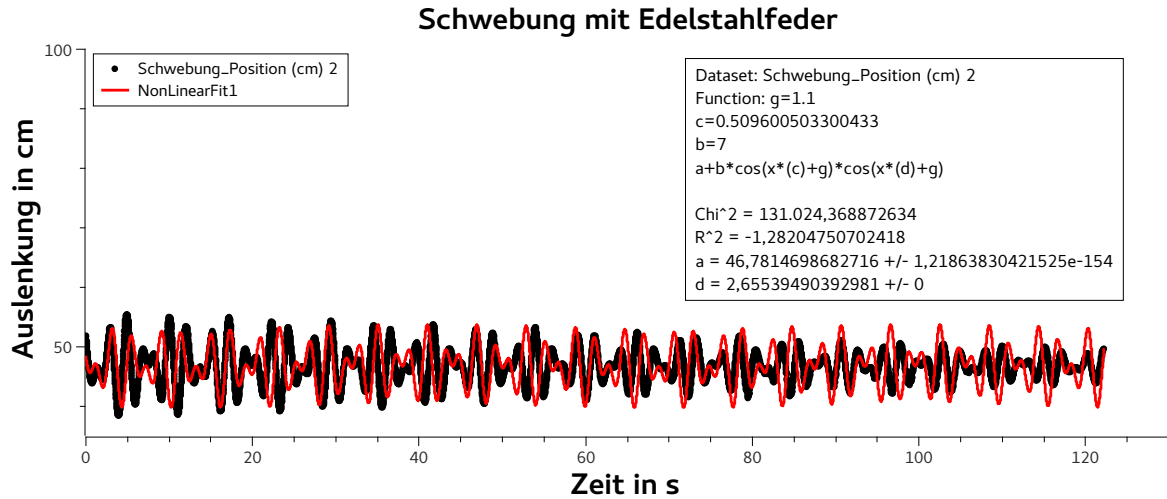


Abbildung 7: Schwebungen mit Edelfstahlfeder.

### 3.2.5 Vergleich der Schwingdauern

Die Fehler der Fitalgorithmen für die Schwingdauern sind immer kleiner  $10^{-100}$  und folglich vernachlässigbar. Da jedoch verschiedene Fehler beim Experiment durch beispielsweise die Kleinwinkelnäherung, die beim Berechnen der Bewegungsgleichung des Pendels angewendet wurde, auftreten können, wurde die Unsicherheit der Schwingdauer der Fitalgorithmen großzügig mit 0,001 s abgeschätzt.

Tabelle 2: Messwerte gekoppelter Pendel

	Kupfer	Edelstahl
$T_{gl}$	$(2,4645 \pm 0,0010) \text{ s}$	$(2,4437 \pm 0,0010) \text{ s}$
$T_{geg}$	$(2,0381 \pm 0,0010) \text{ s}$	$(1,7518 \pm 0,0010) \text{ s}$
$T_S$	$(23,484 \pm 0,001) \text{ s}$	$(12,323 \pm 0,001) \text{ s}$

Auffällig ist der Zusammenhang

$$T_0 > T_{gl,Cu} > T_{gl,St}. \quad (5)$$

Der Theorie nach sollte jedoch gelten

$$T_0 = T_{gl,Cu} = T_{gl,St}. \quad (6)$$

Es ist anzunehmen, dass die veränderte Schwingdauer durch das Einbinden der Feder in das System verursacht wurde. Im idealen Fall würde die Ruhelänge der Feder dem Abstand der Pendel, wenn sie nicht schwingen, entsprechen. Beim Koppeln der Pendel änderte sich die Ruhelage der Pendel. Dies hat zur Folge, dass der Abstand der Pendel nicht mehr für alle Zeiten gleich ist, wenn sie mit derselben Frequenz schwingen.



In der Anleitung war diese Formel für die Schwebungsdauer gegeben:

$$T_S = \frac{4\pi}{\omega_{geg} - \omega_{gl}} = \frac{2}{\frac{1}{T_{geg}} - \frac{1}{T_{gl}}} \quad (7)$$

$$u(T_S) = \sqrt{\left(\frac{\partial T_S}{\partial T_{geg}} u(T_{geg})\right)^2 + \left(\frac{\partial T_S}{\partial T_{gl}} u(T_{gl})\right)^2} \quad (8)$$

$$= u(T_{gl}) \sqrt{\left(\frac{2T_{gl}^2}{(T_{geg} - T_{gl})^2}\right)^2 + \left(\frac{-2T_{geg}^2}{(T_{geg} - T_{gl})^2}\right)^2} \quad (9)$$

$$= \frac{2u(T_{gl})}{(T_{geg} - T_{gl})^2} \sqrt{(T_{gl})^4 + (T_{geg})^4} \quad (10)$$

Tabelle 3: Schwebungsdauern berechnet aus den Schwingdauern der Gleich- und Gegen-schwingung

	Kupfer	Edelstahl
$T_{S, \text{Rechnung}}$	$(23,560 \pm 0,081) \text{ s}$	$(12,374 \pm 0,028) \text{ s}$
$T_{S, \text{Messung}}$	$(23,484 \pm 0,001) \text{ s}$	$(12,323 \pm 0,001) \text{ s}$

Die Unsicherheitsintervalle der Kupferfeder überschneiden sich, aber die der Edelstahlfeder weisen einen deutlichen Unterschied auf. Grund dafür ist wahrscheinlich, dass die Fitfunktion der Edelstahlfeder eine zu große Abweichung von den Messpunkten hat.

Tabelle 4:  $R^2$  für die Fit-Kurven der Schwebungen

	Kupfer	Edelstahl
$R^2$	0,992 64	1,2820

### 3.2.6 Dynamische Bestimmung des Kopplungsgrads

Setzt man die ermittelten Schwingdauern in

$$k = \frac{T_{gl}^2 - T_{geg}^2}{T_{gl}^2 + T_{geg}^2} \quad (11)$$

$$u(k) = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial T_{geg}} u(T_{geg})\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial T_{gl}} u(T_{gl})\right)^2} \quad (12)$$

$$= \dots \quad (13)$$

$$= \frac{4u(T_{gl})T_{geg}T_{gl}}{(T_{geg}^2 + T_{gl}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (14)$$

ein, ergeben sich folgende Kopplungsgrade:

Tabelle 5: Kopplungsgrade aus den Schwingdauern

	Kupfer	Edelstahl
$k$	$0,1877 \pm 0,0006$	$0,3211 \pm 0,0006$

Die dynamisch ermittelten Kopplungsgrade liegen innerhalb der Unsicherheit der statisch ermittelten Kopplungsgrade (Tabelle 1).

### 3.2.7 Relative Frequenzaufspaltung

Die relative Frequenzaufspaltung lässt sich mittels der gegebenen Formeln bestimmen.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{\omega_{gl}} = 2 \frac{T_{gl}}{T_S} \quad (15)$$

Wobei sich die Unsicherheit aus folgender Formel ergibt.

$$u(k) = \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}{\partial T_S} u(T_S)\right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}{\partial T_{gl}} u(T_{gl})\right)^2} \quad (16)$$

$$= 2k u(T_{gl}) \sqrt{\left(\frac{1}{T_S}\right)^2 + \left(\frac{1}{T_{gl}}\right)^2} \quad (17)$$

Tabelle 6: relative Frequenzaufspaltungen

	Kupfer	Edelstahl
$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$	$0,2099 \pm 0,0002$	$0,3966 \pm 0,0003$

### 3.2.8 Diskussion der Näherung

Zum Berechnen der relative Frequenzaufspaltung ist außerdem die folgende Formel aufgeführt

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} - 1 \quad (18)$$

und deren Näherung

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2} + O(k^4) \quad (19)$$

Die Unsicherheit von unserem statischen Kopplungsgrad  $k$  beträgt 0,006. Für die Formel ergibt sich die Unsicherheit

$$u\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) = \left|\frac{\partial\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)}{\partial k} u(k)\right| = \left|\frac{u(k)}{(k-1)^2 \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}}\right| \quad (20)$$

und für die Näherung

$$u\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) = \left|\frac{\partial(\frac{\Delta\omega}{\omega_0})}{\partial k}u(k)\right| = \left|u(k)\left(1 + k + \frac{3}{2}k^2\right)\right| \quad (21)$$

Tabelle 7: relative Frequenzaufspaltungen

	Kupfer	Edelstahl
Aus der Kopplungsformel	$0,2171 \pm 0,0076$	$0,3779 \pm 0,0091$
Aus der Kopplungsnäherung	$0,2165 \pm 0,0075$	$0,3729 \pm 0,0087$
Aus den Schwingdauern	$0,2099 \pm 0,0002$	$0,3966 \pm 0,0003$

Die relative Abweichung des Wertes der Näherung zu dem der Formel beträgt für die Edelstahlfeder ca. 1 % und für die Kupferfeder ca. 0,2 %. Es ist wieder eine Abweichung bei den Werten der Edelstahlfeder ersichtlich. Diese Varianz tritt bereits beim Vergleichen der Schwebungsdauern auf (siehe Abschnitt 3.2.5).

### Unsicherheiten

Der Ultraschallsensor misst lediglich den Abstand in der Horizontalen, das Pendel dagegen rotiert in einer Ebene. Da bei diesem Versuch der Fokus auf den Schwingdauern lag, ist der Fehler der Schwingungsamplitude irrelevant. Des Weiteren muss man davon ausgehen, dass das Verarbeiten der Daten des Sensors Zeit beansprucht. Da diese jedoch jeden Messpunkt gleichermaßen zeitlich verschiebt, kann auch dieser Fehler für eine Betrachtung der Schwingdauern vernachlässigt werden.

### 3.3 Doppelpendel

Das Doppelpendel schwingt sehr chaotisch, d.h. es ergeben sich auch bei einer nur sehr kleinen Änderung der Anfangsbedingungen deutlich andere Bahnen und auch eine längere Beobachtung der Bahn erlaubt keine Vorhersage auf deren zukünftigen Verlauf. Allerdings konnten wir zwei stabile Schwingungszustände beobachten, jedoch nur für ca. 5 Perioden. Danach ergaben sich minimal phasenverschobene Schwingungen. Bei einer der stabilen Schwingungen haben beide Pendel immer in die selbe Richtung gezeigt. Die andere zeichnet sich da durch aus, dass die Pendel immer den entgegengesetzten Winkel zur Vertikalen haben. Um diese stabilen Schwingungszustände präziser, und somit länger anhaltend, herzustellen, wäre eine Apparatur, die die Startauslenkung der Pendelarme kontrolliert und einen gleichzeitigen Start der Schwingung beider Arme ermöglicht, notwendig.

## 4 Schlussfolgerung

Da wir die Feder nur ca. 10 cm über den Gewichten der Pendel befestigt hatten, ergab sich für unsere Messungen ein hoher Kopplungsgrad. Entsprechend sind unsere relati-

ven Frequenzaufspaltungen hoch und die Schwebungsdauern klein. Dies machte die Auswertung ungenauer. Des Weiteren hätte sich mit geringerem Kopplungsgrad auch die Frequenzen der Gleichschwingungen weniger von der Eigenfrequenz des einzelnen Pendels unterschieden. Die Taylorentwicklung 3. Ordnung erwies sich bei unseren Kopplungsgraden als eine gute Approximation der Formel für die relative Frequenzaufspaltung mit ca. 1 % Abweichung. Gleichmaßen wie bei den gekoppelten Fadenpendeln gab es auch beim Doppelpendel zwei stabile Schwingungen. Deutlich unterschieden sich die Pendel, wenn keiner der Spezialfälle vorlag. Die gekoppelten Pendel oszillierten noch erkennbar mit der Überlagerung von zwei Schwingungen. Das Doppelpendel dagegen schwang chaotisch und ein periodischer Zusammenhang war nicht ersichtlich.