

VERSUCHSBERICHT ZU

M3 - ELASZIZITÄT

Gruppe 6Mi

Alexander Neuwirth (E-Mail: a_neuw01@wwu.de)
Leonhard Segger (E-Mail: l_segg03@uni-muenster.de)

durchgeführt am 29.11.2017
betreut von
Christian Thiede

5. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Kurzfassung	3
2	Methoden	3
2.1	Biegung Metallstäbe	3
2.2	Torsionspendel	3
3	Ergebnisse und Diskussion	4
3.1	Beobachtung	4
3.1.1	Bestimmung der benötigten Größen und deren Unsicherheiten . .	4
3.1.2	Biegung der Stäbe	5
3.1.3	Torsion des Drahtes	7
3.2	Diskussion	8
4	Schlussfolgerung	9

1 Kurzfassung

***Kurzfassung

Um die Elastizität verschiedener Materialien zu untersuchen, wurden zwei Experimente durchgeführt. Zunächst wurden die Auslenkungen von Stäben unter Last gemessen und daraus deren Elastizität bestimmt. Dies ließ Schlüsse auf die Art der Materialien zu. Dann wurde mithilfe verschiedener angehängter Objekte ein Torsionspendel untersucht und so der Schubmodul des Torsionsdrahtes bestimmt. Der so ermittelte Schubmodul wurde mit dem zu erwartenden Wert für das vermutete Material des Drahtes verglichen.

2 Methoden

2.1 Biegung Metallstäbe

Zunächst wurde, um den Elastizitätsmodul von verschiedenen Materialien zu bestimmen, ihre Durchbiegung in Abhängigkeit von der auf sie wirkenden Kraft gemessen. Dazu wurden vier Stäbe unterschiedlichen Materials an einem Ende waagrecht eingespannt, an ihr anderes Ende fünf verschiedene Gewichte gehängt und dann die senkrechte Auslenkung dieses Endes gemessen. Dabei wurde jeweils zwischen jeder Messung die Ruhelage des Stabes ohne Gewicht neu gemessen. Parallaxenfreiheit beim Ablesen der Auslenkungsskala wurde sichergestellt, indem man so über den Stab gepeilt hat, dass die Reflexion des Stabes im Spiegel hinter dem Stab verschwindet. Dann wurden die Abmessungen der Stäbe an fünf Stellen je dreimal mit einer Mikrometerschraube gemessen. Hierdurch wird der Fehler dieser Messung sehr gering, wenn sichergestellt ist, dass kein systematischer Fehler durch eine falsche Nullposition der Mikrometerschraube existiert. Dies wurde sichergestellt, indem die Position der Mikrometerschraube im komplett zugeschraubten Zustand überprüft wurde.

2.2 Torsionspendel

Der zweite Versuch bestand darin die Schwingung eines Torsionspendels zu untersuchen, um den Schubmodul des Drahtes, an dem das Pendel aufgehängt ist zu bestimmen. Dazu wurde erst die Schwingungsdauer mit angehängter zylindrischer Scheibe dreimal je über drei Perioden gemessen und der Durchmesser des Torsionsdrahtes an fünf verschiedenen Stellen je drei mal gemessen. Dann wurde noch Höhe, Durchmesser und Masse der Scheibe bestimmt. Daraufhin wurde die Schwingung des Torsionspendel mit angehängter Hantel untersucht. Hierzu wurde zunächst die Schwingungsdauer der Hantel ohne aufgelegte Scheiben und dann mit zwei Scheiben, die sich in fünf verschiedenen Abständen vom Schwerpunkt der Hantelachse befanden, über drei Perioden gemessen. Die Abmessungen (4 Messungen) und die Masse der Hantel sowie der Scheiben wurde ebenfalls festgestellt. Die Massen waren auf den betreffenden Teilen angegeben. Die Länge des Torsionsdrahtes wurde ebenfalls gemessen und in allen Fällen wurde eine Anfangsauslenkung von etwa 180° verwandt. Die Schwingungsdauer wurde jeweils bestimmt, indem

Tabelle 1: Unsicherheiten der verwendeten Messinstrumente. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen wurden als rechteckig angenommen.

	Mikroschraube	Maßband/Biegungsanzeige	Stoppuhranzeige	Reaktionszeit
u	0,005 77 mm	0,057 74 cm	0,005 774 s	0,115 47 s

Tabelle 2: Mittelwerte \bar{x} , die sich aus den Messwerten für die Abmessungen der Stäbe ergeben

	Stab 1, Breite	Stab 1, Höhe	Stab 2	Stab 3	Stab 4
\bar{x}	0,248 48 cm	0,549 66 cm	0,293 13 cm	0,2976 cm	0,2974 cm

mit einer Stoppuhr gemessen wurde, welche Zeit das Pendel für drei Perioden benötigt. Als Anfangs- und Endpunkt der Messung haben wir die Ruhelage der Scheibe gewählt, da sie sich dort näherungsweise mit konstanter Geschwindigkeit bewegt und man somit der Reaktionsfehler minimiert. Alternativ hätte man den linken oder rechten Wendepunkt der Bewegung wählen können. An dieser Stelle bewegt sich das Pendel allerdings langsam und der Zeitraum, in dem das Pendel scheinbar stillsteht, ist verhältnismäßig groß, weshalb das Ende der Bewegung kaum exakt zu erkennen ist.

3 Ergebnisse und Diskussion

3.1 Beobachtung

*** linear-> Fit und Algorithmus angeben vgl. Theorie

*** Biegungen in einen Graphen

*** Graphen beschreiben

*** Unsicherheitenrechnung

*** Schreiben welcher STab warum welches Material vermutlich ist. ERSTE BEOBACHTUNG

3.1.1 Bestimmung der benötigten Größen und deren Unsicherheiten

In Tabelle 1 sind zunächst die Unsicherheiten der verwendete Messinstrumente aufgelistet.

Wir nehmen an, dass sowohl die Stäbe als auch die Gewichte am Torsionspendel exakte Quader bzw. Zylinder sind. Dies ist natürlich nicht exakt gegeben, aber eine genauere Betrachtung würde ein komplexeres Modell erfordern und die Näherung dürfte in diesem Fall recht präzise sein. Für die Abmessungen der Stäbe bilden wir einen Mittelwert aus den je $n = 15$ Messungen.

Für diesen existiert eine Standardunsicherheit und die Unsicherheit der Mikrometer-

Tabelle 3: Unsicherheiten der Mittelwerte der Abmessungen der Stäbe. Soweit nicht anders gekennzeichnet, bezieht sich der Wert auf den Durchmesser des Stabes. u_S meint dabei die Standardunsicherheit und u die Gesamtunsicherheit.

	Stab 1, Breite	Stab 1, Höhe	Stab 2	Stab 3	Stab 4
u_S	0,000 165 cm	0,000 222 cm	0,000 192 cm	0,000 131 cm	0,000 306 cm
u	0,000 169 cm	0,000 225 cm	0,000 196 cm	0,000 137 cm	0,000 308 cm

Tabelle 4: Mittelwerte der Messwerte für die Abmessungen der Scheibe, Hantel und Hantelscheiben

		Abmessungen
Scheibe	Höhe	1,9 cm
	Durchmesser	14,65 cm
Hantel	Länge	25,1 cm
	Durchmesser	1,3 cm
Hantelscheiben	Höhe	2 cm
	Durchmesser	5 cm

schraube. Diese kombinieren sich gemäß

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\left(\frac{u_{\text{Schraube}}}{n}\right)^2 + u_S(\bar{x})^2}.$$

Dabei gilt für die Standardunsicherheit des Mittelwertes

$$u_S(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}.$$

In Tabelle 3 sind die sich daraus ergebenden Unsicherheiten dargestellt.

In gleicher Art und Weise lassen sich die Unsicherheiten der Abmessungen des Torsionsdrahtes, der Scheibe, der Hantel und der Hantelscheiben bestimmen. Dabei gilt für den Torsionsdraht die Unsicherheit der Mikrometerschraube und ansonsten die des Maßbandes. Für die Standardunsicherheiten ergibt sich hier jeweils $u_S = 0$ und für die Gesamtunsicherheiten beim Torsionsdraht $u = 0,000\,04\text{ cm}$ und bei Durchmesser sowie Höhe bzw. Länge der Scheibe, Hantel und Hantelscheiben $u = 0,0144\text{ cm}$. Die Massen der Gewichte, mit denen wir die Stäbe und den Torsionsdraht belasten, nehmen wir als exakt an.

3.1.2 Biegung der Stäbe

In Abb. 1 sind für jeden der Stäbe 5 Messpunkte der Legende entsprechend dargestellt. Der lineare Zusammenhang ist beim Betrachten der Werte bereits erkennbar und außerdem sollte dieser der Theorie zufolge auftreten. Deshalb haben wir einen Fit mit dem

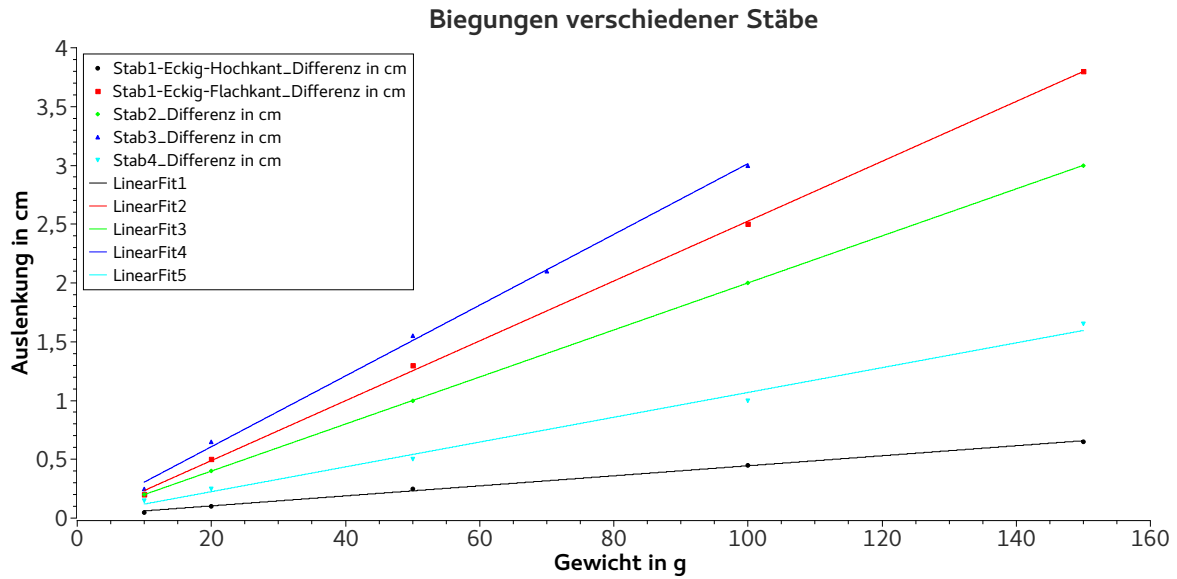


Abbildung 1: Biegungen verschiedener Stäbe. Die Fehler sind kleiner als die Symbole

Tabelle 5: Parameter die sich beim Fitten ergeben

	a in cm g^{-1}	b in cm
S1 hochkant	$0,004\,264 \pm 0,000\,100$	$0,018\,586 \pm 0,010\,000$
S1 flachkant	$0,025\,452 \pm 0,000\,300$	$-0,019\,825 \pm 0,030\,000$
S2	$0,02 \pm 6 \cdot 10^{-19}$	$(0 \pm 5) \cdot 10^{-17}$
S3	$0,030\,093 \pm 0,000\,700$	$0,005\,370 \pm 0,040\,000$
S4	$0,010\,546 \pm 0,000\,500$	$0,013\,921 \pm 0,040\,000$

„Scaled Levenberg-Marquardt“-Algorithmus, welcher die Methode der kleinsten Quadrate verwendet, durchgeführt. Die Fit-Funktion sollte wie folgt aussehen:

$$f(x) = a * x + b \quad (1)$$

Mit Hilfe von Gleichung (3) aus der Einführung des Versuchs lässt sich aus der Steigung der Graphen der Elastizitätsmodul bestimmen. In Tabelle 6 sind diese aufgelistet.

$$h_{max} = \frac{FL^3}{3EI_q} \quad (2)$$

$$E = \frac{gL^3}{3I_q m} \quad (3)$$

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=0}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (4)$$

Tabelle 6: Berechnete Elastizitätsmodule

	m in m kg^{-1}	L in m	I_q in m^4	E in Nm^{-2}
S1 hochkant	0,04264	0,289	$3,4387 \cdot 10^{-11}$	$5,383 \cdot 10^{10}$
S1 flachkant	0,25452	0,289	$7,0273 \cdot 10^{-12}$	$4,413 \cdot 10^{10}$
S2	0,2	0,285	$3,6242 \cdot 10^{-12}$	$1,04 \cdot 10^{11}$
S3	0,30093	0,29	$3,8504 \cdot 10^{-12}$	$6,882 \cdot 10^{10}$
S4	0,10546	0,2905	$3,8400 \cdot 10^{-12}$	$1,975 \cdot 10^{11}$

3.1.3 Torsion des Drahtes

Bestimmung des Schubmoduls

Die von uns bestimmte gemittelte Schwingdauer der Scheibe beträgt $T = (32,45 \pm 0,04) \text{ s}$. Der Schubmodul des Drahtes lässt sich aus gegebener Gleichung (5) berechnen.

$$G = \frac{4\pi L m_z R_z^2}{R^4 T^2} \quad (5)$$

Die weiter benötigten Werte wurden ermittelt.

- $T = (32,45 \pm 0,04) \text{ s}$
- $L = (1,8105 \pm 0,0016) \text{ m}$
- $m_z = 2,648 \text{ kg}$
- $R_z = (7,325 \pm 0,029) \text{ cm}$
- $R = (0,2500 \pm 0,0029) \text{ mm}$

Einsetzen ergibt ein G von $7,8587 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$.

Bestimmung des Direktionsmoments

In Abb. 2 sind für 5 verschiedene Hanteln die Schwingdauerquadrate auf den Radius der Hanteln aufgetragen. Der lineare Zusammenhang ist beim Betrachten der Werte bereits erkennbar und außerdem sollte dieser der Theorie zufolge auftreten. Deshalb haben wir einen Fit mit dem „Scaled Levenberg-Marquardt“-Algorithmus, welcher die Methode der kleinsten Quadrate verwendet, durchgeführt. Die Fit-Funktion sollte wie folgt aussehen:

$$f(x) = A * x + B \quad (6)$$

Mit Hilfe von Gleichung (7) aus der Einführung des Versuchs lässt sich aus der Steigung der Graphen der Direktionsmoment bestimmen.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*} (J_1 + 2J_2 + 2m_2 a^2) \quad (7)$$

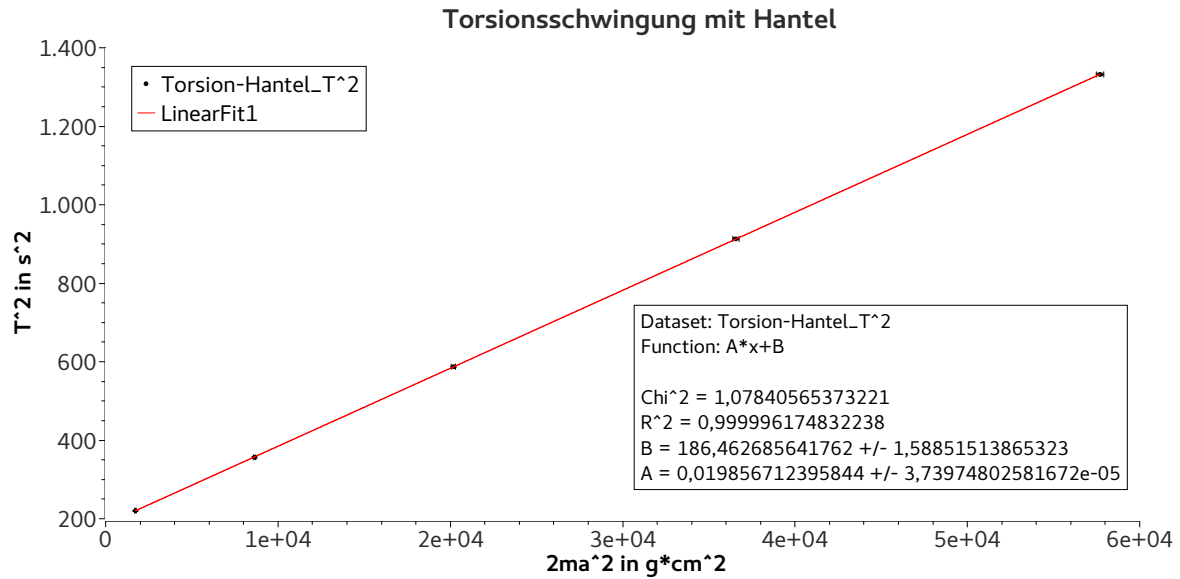


Abbildung 2: Torsion eines Drahtes mit verschiedene Hanteln. Die Fehler sind kleiner als die Symbole

Das Direktionsmoment ergibt sich mit $m = 0,019\,857\,\text{s}^2\text{g}^{-1}\text{cm}^{-2}$ aus:

$$D^* = \frac{4\pi^2}{m} = 0,000\,198\,814\,\text{Nm} \quad (8)$$

Das Trägheitsmoment der Hantelachse lässt sich aus Gleichung (7) mit $J_2 = 0$, $m_2 = 0$ und $T = (13,320 \pm 0,039)\,\text{s}$ berechnen.

$$J_1 = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} = 0,000\,893\,5\,\text{kgm}^2 \quad (9)$$

Aus dem Fit in Abb. 2 kann man den y-Achsenabschnitt der Gerade ablesen (T^2). Dieser entspricht der Gleichung (7) mit $2m^2a = 0$. Setzt man die zuvor berechneten Werte ein, erhält man J_2 .

$$J_2 = \frac{T^2 D^*}{8\pi^2} - \frac{J_1}{2} = 0,000\,022\,76\,\text{kgm}^2 \quad (10)$$

Die Trägheitsmomente der Hantelscheibe und der Hantelachse lassen sich auch direkt aus ihrem Gewicht und Form berechnen.

$$J_1 = m_1 \left(\frac{1}{12} l_1^2 + \frac{1}{4} r_1^2 \right) = 0,001\,15\,\text{kgm}^2 \quad (11)$$

$$J_2 = m_2 \left(\frac{1}{12} l_2^2 + \frac{1}{4} (r_2^2 + r_1^2) \right) = 0,000\,059\,4\,\text{kgm}^2 \quad (12)$$

3.2 Diskussion

*** Gewichte als exakt angenommen *** Materialien vergleich mit Literatur *** kleinste quadrate Zunächst stellen wir folgende Vermutungen für die Materialien der Stäbe

Tabelle 7: Literaturwerte der Elastizitätsmodule der Materialien, aus denen die Stäbe und der Torsionsdraht vermutlich bestehen und das Schubmodul von Stahl. Aluminium und Baustahl aus [3, S. 624 f.] und Messing aus [2, S. E 66.] sowie der Schubmodul von Stahl [1]

	Messing	Aluminium	Stahl
Elastizitätsmodul /GPa	78...123	70	210
Schubmodul /GPa			79,3

auf: Stab 1 und Stab 2 bestehen nach Farbe und Gewicht zu urteilen vermutlich aus Messing (goldfarben, aber weniger schwer als Gold). Stab 3 ist recht leicht und silbrig gefärbt. Daraus schließen wir, dass er wohl aus Aluminium besteht. Stab 4 ist schwerer und dunkler gefärbt, was die Vermutung aufkommen lässt, dass es sich um einen Stahl handelt. Daraus ergeben sich die in Tabelle 7 dargestellten Erwartungen für die Elastizitätsmodule der Stäbe. Ebenfalls aus Stahl besteht vermutlich der Torsionsdraht, der eine ähnliche Färbung wie Stab 4 aufweist. Da wir nicht wissen, um welche Art von Stahl es sich handelt, können wir auch nur eine ungenaue Erwartung für den Schub- und Elastizitätsmodul aufstellen. Wir verwenden hierfür den Elastizitätsmodul von Baustahl.

4 Schlussfolgerung

***Materialien vergleich mit Literatur

***Das metallene Ende der Maßbänder war lose, was Messung erschwerte.

Literatur

- [1] Crandall, Dahl und Lardner. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. Boston: McGraw-Hill, 1959.
- [2] Horst Czichos und Manfred Hennecke. *Hütte: Das Ingenieurwissen*. Springer, 2004.
- [3] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. Carl Hanser, 2011.