

# VERSUCHSBERICHT ZU

## W1 - STIRLING-MOTOR

Gruppe 14Mo

Alexander Neuwirth (E-Mail: a\_neuw01@wwu.de)  
Leonhard Segger (E-Mail: l\_segg03@uni-muenster.de)

durchgeführt am 14.05.2018  
betreut von  
Torsten Stiehm

28. Mai 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurzfassung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Methoden</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>4</b>
3.1	Beobachtung und Datenanalyse . . . . .	4
3.1.1	Unsicherheiten . . . . .	4
3.1.2	Bestimmung der Reibungsverluste . . . . .	5
3.1.3	Bestimmung der Kühlleistung . . . . .	5
3.1.4	Bestimmung der Heizleistung . . . . .	7
3.2	Diskussion . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Schlussfolgerung</b>	<b>9</b>

# 1 Kurzfassung

Es wurde der Stirling-Motor als Wärmepumpe und als Kältemaschine untersucht. Konkret wurde der Gefrier- und Schmelzvorgang einer geringen Menge Wasser durch die Heiz- bzw. Kühlleistung des Stirlingmotors betrachtet. Dazu konnte zunächst die Reibungswärme, die innerhalb des Motors auftritt und mit dem Kühlwasser abtransportiert wird, bestimmt werden. Dann wurde aus dem Temperaturverlauf in Abhängigkeit von der Zeit und der Betriebsrichtung des Stirling-Motors die Heiz- und Kühlleistung sowie die Leistungszahl des Motors als Kältemaschine bzw. Wärmemaschine bestimmt und verglichen. Außerdem wurden die Schmelzwärme und spezifische Wärme von Eis bestimmt. Es wurde angenommen, dass die Verwendung eines Stirling-Motors eine geeignete Methode ist, diese Werte zu bestimmen. Da die Literaturwerte die Messwerte von Schmelzwärme von Wasser  $S = (233,7 \pm 4,5) \text{ J/g}$  und spezifischer Wärme von Eis  $c_{\text{Eis}} = (2,254 \pm 0,007) \text{ J/g/K}$  nicht hinreichend präzise bestätigten, konnte diese Annahme nicht bestätigt werden. Im Falle der spezifischen Wärme konnte ein Wert gemessen werden, der innerhalb akzeptabler Abweichungen vom Literaturwert lag, während der Messwert der Schmelzwärme einen im Rahmen dieser Ausarbeitung nicht erklärbaren Unterschied vom Literaturwert aufwies.

# 2 Methoden

In Abb. 1 ist der verwendete Stirling-Motor dargestellt. Zunächst wurden die Verluste durch Reibung bestimmt. Dazu wurde der Motor mit offenem Zylinderkopf betrieben, sodass der Druck im Zylinder konstant bei Luftdruck lag und abgesehen von Reibungswärme keine Heiz- oder Kühlwirkung entstehen konnte. Bei diesem Betrieb wurde dann zunächst der Volumendurchsatz des Kühlwassers bestimmt, indem an der Pumpe mit Stoppuhr und Messzylinder die Zeit und der Füllstand nach ca. 9 s gemessen wurde. Dies wurde fünf mal durchgeführt, um den Mittelwert bilden und den Messfehler verringern zu können. Dann wurde die Temperaturerhöhung des aus dem Motor abfließenden Wassers gegenüber dem Wasser im Tank, der die Pumpe speist, gemessen. Für diese und die folgenden Messungen wurde für die Drehzahl des Elektromotors etwa 3 kHz gewählt. Gemessen wurde die Drehzahl, indem eine Fouriertransformation durchgeführt wurde und die Spitze dieser betrachtet wurde.

Im zweiten Teil wurde ein Reagenzglas mit ca. 1 mL Wasser (mit einer Pipette befüllt) in den Zylinderkopf eingesetzt und dieser geschlossen. Dann wurde bei gleicher Umlaufrichtung (als Kältemaschine) die Temperatur im Reagenzglas in Abhängigkeit von der Zeit gemessen und am Ende wie zuvor der Temperaturunterschied zwischen abfließendem Kühlwasser und Wassertank gemessen.

Sobald ca.  $-25^\circ\text{C}$  erreicht waren, wurde die Umlaufrichtung des Elektromotors geändert, sodass der Stirling-Motor als Wärmepumpe fungierte und erneut die Temperatur im Reagenzglas in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Auch hier wurde am Ende der Temperaturunterschied des Kühlwassers gemessen.

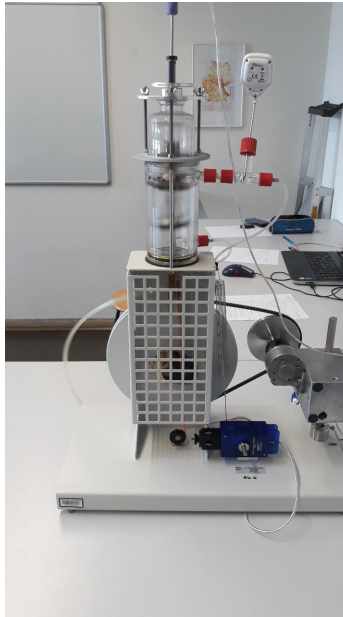


Abbildung 1: Aufbau des Stirling-Motors.

## 3 Ergebnisse und Diskussion

### 3.1 Beobachtung und Datenanalyse

#### 3.1.1 Unsicherheiten

Die Unsicherheiten wurden gemäß GUM ermittelt. Außerdem wurde für Unsicherheitsrechnungen die Python Bibliothek „uncertainties“ verwendet.

**Messzylinder:** Die Unsicherheit des Messzylinders wurde mit 0,04 mL abgeschätzt (dreieckige WDF).

**Stoppuhr:** Die Stoppuhr zeigt Sekunden mit zwei Nachkommastellen an, woraus eine Unsicherheit von 0,004 s folgt (rechteckige WDF), jedoch hat die Reaktionszeit einen größeren Einfluss, weshalb eine Unsicherheit von 0,1 s angenommen wird.

**Pipette:** Auf der Pipette, die zum Füllen des Reagenzglases im Zylinderkopf verwendet wurde, ist eine Unsicherheit von 0,007 mL angegeben.

**Thermometer:** Die Unsicherheit des Kühlwasserthermometers vom Typ K ist  $1,5^{\circ}\text{C}$  in dem gemessenen Temperaturintervall (vgl. [1]). Da eine derartig große Unsicherheit keine Aussage zulassen würde, nehmen wir an, dass dies im Wesentlichen ein systematischer Fehler ist, der für das Messen von Temperaturdifferenzen kaum Einfluss hat und schätzen die Unsicherheit der Temperaturdifferenz aufgrund der Schwankungen der Thermometeranzeige mit  $0,05^{\circ}\text{C}$  ab.

**Motorfrequenz** Die Unsicherheit der durch Fouriertransformation ermittelten Frequenzen wurde mit 0,01 Hz abgeschätzt, da die Frequenz kaum schwankte und keine anderen Frequenzen im Frequenzbild auftraten.

### 3.1.2 Bestimmung der Reibungsverluste

Die Reibungsverluste lassen sich aus der Erwärmung des Kühlwassers beim Betrieb der Wärmepumpe bzw. Kältemaschine bei offenem Zylinderkopf bestimmen. Die zugeführte Wärmemenge  $\Delta Q$  ist proportional zur Temperaturänderung  $\Delta T$ :

$$\Delta Q = C_W \cdot \Delta T = c \cdot m \cdot \Delta T \quad (1)$$

Für Wasser beträgt die spezifische Wärme  $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4,185 \text{ J/g/K}$ . Die Masse  $m$  der Gesamtwassermenge im System ist nicht direkt bestimmbar, der Durchfluss des Kühlwassers  $d = m/t$  hingegen schon. Somit lässt sich mit Gleichung (1) die an das Kühlwasser abgegebenen Leistung  $\Delta Q/t$  ermitteln. Die gesuchte Reibungsarbeit pro Umlauf erhält man durch Division der Leistung durch die Frequenz des Motors. Es folgt:

$$W_R = c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \frac{d}{f} \cdot \Delta T \quad (2)$$

Der Durchfluss  $d$  ergibt sich indem man die geflossene Wassermenge  $V$  durch die gestoppte Zeit  $t$  dividiert und mit der Dichte  $\rho_{\text{H}_2\text{O}}$  multipliziert. Aus Tabelle 1 ergibt sich ein Mittelwert von  $(4,61 \pm 0,13) \text{ mL/s}$  und somit ein Durchfluss  $d = (4,61 \pm 0,13) \text{ g/s}$ .

Die Frequenz des Motors wurde mittels FFT auf  $(3,15 \pm 0,01) \text{ Hz}$  eingestellt (vgl. Abschnitt 2). Die Temperaturänderung des Kühlwassers  $\Delta T$  betrug  $(0,50 \pm 0,05) ^\circ\text{C}$ . Es folgt eine Reibungsarbeit pro Umlauf gemäß Gleichung (2) von  $W_R = (2,76 \pm 0,29) \text{ J}$ .

Tabelle 1: Gemessene Kühlwassermenge, die durch den Stirling-Motor in einer bestimmten Zeit fließt.

Wassermenge $V$ in mL	Zeit $t$ in s
$38,00 \pm 0,03$	$8,16 \pm 0,10$
$40,80 \pm 0,03$	$8,50 \pm 0,10$
$41,40 \pm 0,03$	$9,34 \pm 0,10$
$49,20 \pm 0,03$	$10,78 \pm 0,10$
$47,00 \pm 0,03$	$10,22 \pm 0,10$

### 3.1.3 Bestimmung der Kühlleistung

Die pro Umlauf aufzuwendende mechanische Arbeit  $-W$  ist durch

$$W = Q_1 - Q_2 + W_R \quad (3)$$

gegeben. Die Wärme  $Q_2$  wird dem Zylinderkopf pro Umlauf entzogen und die Wärme  $-Q_1$  wird dem Kühlwasser zu geführt.

$Q_1 + W_R$  lässt sich analog zur Reibungsarbeit pro Umlauf mit Gleichung (2) bestimmen. Die gemessene Temperaturänderung des Kühlwassers betrug  $\Delta T = (1,00 \pm 0,05)^\circ\text{C}$  woraus  $Q_1 + W_R = (5,53 \pm 0,33) \text{ J}$  folgt.

$Q_2$  ergibt sich aus der Steigung der Messkurve in Abb. 2. Es wurde ein linearer Fit verwendet, um die Steigung  $s$  nahe der Raumtemperatur zu bestimmen. Die Kühlleistung  $P_{\text{Kühl}}$  ist gegeben durch zeitliches Ableiten von Gleichung (1).

$$\dot{Q} = P_{\text{Kühl}} = c \cdot m \cdot s = c \cdot \rho \cdot V \cdot s \quad (4)$$

Mittels Division der Kühlleistung  $P_{\text{Kühl}}$  durch die Frequenz des Motors erhält man die Wärme  $Q_2$  pro Umlauf:

$$Q_2 = \frac{P_{\text{Kühl}}}{f} = c \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{s}{f} \quad (5)$$

In dem Reagenzglas im Zylinderkopf befand sich  $V = (1,0 \pm 0,7) \text{ mL}$  destilliertes Wasser und die Steigung  $s$  beträgt  $(0,2004 \pm 0,0002)^\circ\text{C/s}$ . Folglich ist  $P_{\text{Kühl}} = (0,838 \pm 0,006) \text{ W}$  und  $Q_2 = (0,266 \pm 0,002) \text{ J}$ .

Die Leistungszahl  $\epsilon$  ist der Quotient der entnommenen Wärmemenge  $Q_2$  und aufgewandter Arbeit  $W$ :

$$\epsilon = \frac{|Q_2|}{|W|} \quad (6)$$

Hier beträgt  $W_{\text{real}} = Q_1 + W_R - Q_2 = (5,26 \pm 0,33) \text{ J}$  woraus eine Leistungszahl von  $\epsilon_{\text{real}} = (5,1 \pm 0,3) \%$  folgt, bzw.  $\epsilon_{\text{ideal}} = (10,6 \pm 1,9) \%$  mit  $W_{\text{ideal}} = Q_1 - Q_2 = (2,5 \pm 0,4) \text{ J}$ .

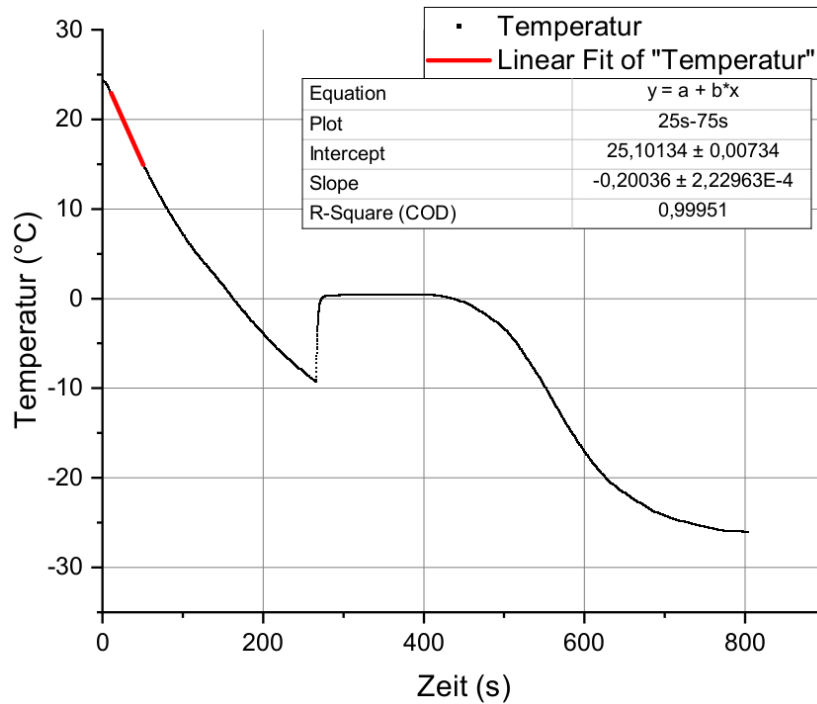


Abbildung 2: Gemessene Temperatur als Funktion der Zeit beim Betrieb des Stirling-Motors als Kältemaschine. Die Fehler sind kleiner als die Symbolgröße.

Unter der Annahme, dass der Motor der Probe konstant Wärme entzieht, lässt sich die von dem Wasser beim Gefrieren abgegebene Wärme anhand von Abb. 2 abschätzen. Im Zeitraum von  $(266 \pm 2)$  s bis  $(545 \pm 5)$  s entzieht der Motor dem Wasser Wärme, die Anfangs- und Endtemperatur sind jedoch gleich. Folglich entspricht die entzogene Wärme pro Masse der Schmelzwärme  $S = (233,7 \pm 4,5)$  J/g, gemäß:

$$S = \frac{Q}{m} = c \cdot s \cdot \Delta t \quad (7)$$

### 3.1.4 Bestimmung der Heizleistung

Die Heizleistung lässt sich analog zur Kühlleistung in Abschnitt 3.1.3 aus der Steigung  $s_1$  der Messkurve in flüssigem Zustand bei Raumtemperatur in Abb. 3 bestimmen.

Die Steigung  $s_1$  beträgt  $(0,377 \pm 0,001)$  °C/s somit folgt aus Gleichung (4) eine Heizleistung  $P_{\text{Heiz}}$  von  $(1,58 \pm 0,01)$  W.

Analog lässt sich auch die Leistungszahl  $\epsilon$  bestimmen. Die Temperaturänderung  $\Delta T$  betrug  $(0,30 \pm 0,05)$  °C woraus gemäß Gleichung (2) ein  $Q_1 + W_R$  von  $(1,66 \pm 0,28)$  J folgt.  $Q_2$  ergibt sich aus  $P_{\text{Heiz}}/f = (0,501 \pm 0,004)$  J. Die Leistungszahl  $\epsilon_{\text{real}} = Q_2/(Q_2 + W_R + Q_1)$  beträgt somit  $(23,2 \pm 3,0)$  %. Wenn man die Reibung berücksichtigt ist  $\epsilon_{\text{ideal}} = Q_2/|Q_2 + Q_1| = (83,6 \pm 40,3)$  %.

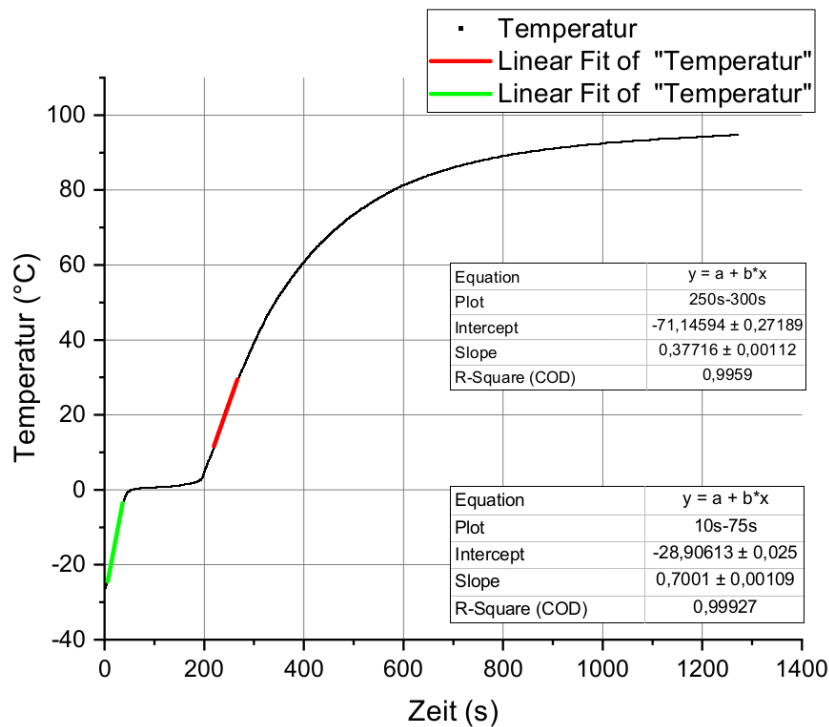


Abbildung 3: Gemessene Temperatur als Funktion der Zeit beim Betrieb des Stirling-Motors als Wärmepumpe. Die Fehler sind kleiner als die Symbolgröße.

Die spezifische Wärme von Eis lässt sich aus Gleichung (4) bestimmen:

$$c_{\text{Eis}} = \frac{P_{\text{Heiz}}}{m \cdot s_s} = c_{\text{H}_2\text{O}} \frac{s_1}{s_s} \quad (8)$$

Die Steigung  $s_s$  nimmt einen Wert von  $(0,700 \pm 0,001)^\circ\text{C/s}$  im festen Zustand im Bereich von  $-25^\circ\text{C}$  bis  $-5^\circ\text{C}$  an. Es ergibt sich eine spezifische Wärme für Eis  $c_{\text{Eis}}$  von  $(2,254 \pm 0,007) \text{ J/g/K}$ .

## 3.2 Diskussion

Der abrupte Sprung in Abb. 2 kommt durch die Natur des Kristallisationsprozesses zustande: Bei Raumtemperatur ist das destillierte Wasser eine ungesättigte Lösung, da trotz der Destillation kleine Mengen an Salzen im Wasser gelöst sind. Wenn nun das Wasser abgekühlt wird, sinkt die Menge an Salzen, die eine gesättigte Lösung ergeben würden, bis sie geringer als die tatsächlich im Wasser enthaltene Menge an Salzen ist, also eine übersättigte Lösung vorliegt. An diesem Punkt reicht eine leichte Störung des Systems durch äußere Einflüsse wie die Schwingungen, die der Elektromotor verursacht, aus, um den Salzen ein Anordnen um Kristallisationskeimen zu ermöglichen. Um diesen Keim herum kann dann die gesamte Lösung (hier Wasser) lawinenartig kristallisieren.

Das darauf folgende Intervall ohne Temperaturänderung lässt sich dadurch begründen, dass hier die Wärme, die dem Wasser entzogen wird, sich nicht mehr in einen Temperaturunterschied überträgt, sondern die Kristallisation des Wassers vorantreibt. Erst sobald der Großteil des Wassers fest ist, führt der Wärmeentzug wieder zu einer Temperaturänderung.

Analog ist das Intervall ohne Temperaturänderung in Abb. 3 zu erklären, da hier die dem Eis zugeführte Wärme nicht eine Temperaturänderung bewirkt, sondern die Kristallstruktur des Eis auflöst und es schmilzt.

In Abb. 3 ist außerdem zu erkennen, dass der Temperaturanstieg abnimmt, je näher die Probe an die Siedetemperatur kommt. Dies hängt einerseits mit der Abgabe von Wärme an die Umgebung und andererseits mit der stochastischen Natur des Phasenübergangs vom flüssigen in den gasförmigen Zustand zusammen. Hier wird ein zunehmender Anteil der zugeführten Wärme aufgewandt, um diesen Phasenübergang zu ermöglichen und Teile der Probe werden gasförmig.

Für die Schmelzwärme von Wasser wurde ein Messwert von  $(233,7 \pm 4,5) \text{ J/g}$  ermittelt. Der Literaturwert [2] von  $334 \text{ J/g}$  liegt weit oberhalb der Unsicherheiten dieses Messwerts. Eigentlich würde man im Gegenteil erwarten, dass der Messwert größer als der Literaturwert ist, da beim Betrieb als Kältemaschine die Wasserprobe, während ihr Wärme entzogen wird, Wärme aus der Umgebung des Motors aufnehmen kann und so mehr Wärme entzogen werden muss, als nur für den Kristallisationsvorgang nötig wäre. Dies ließ sich darin beobachten, dass zunächst Wasser am Zylinder kondensierte und dann kristallisierte und erklärt auch den gekrümmten Verlauf von Abb. 2 vor der Kristallisation.

Die Literatur [3] gibt für die spezifische Wärme von Eis bei  $-10^\circ\text{C}$  einen Wert von  $2,220 \text{ J/g/K}$  an. Dies liegt nah an dem Messwert von  $(2,254 \pm 0,007) \text{ J/g/K}$ , aber nur



innerhalb der fünffachen Unsicherheit. Dies hängt vermutlich damit zusammen, dass die spezifische Wärme temperaturabhängig ist und der Literaturwert keine Unsicherheit hat. Insofern kann die Möglichkeit der Verwendung eines Stirling-Motors zur Bestimmung der Schmelzwärme und spezifischen Wärme nicht bestätigt werden.

Wenn man die realen Leistungszahlen des Stirling-Motors als Wärmepumpe ( $(23,2 \pm 3,0) \%$ ) und als Kältemaschine ( $(5,1 \pm 0,3) \%$ ) vergleicht, stellt man fest, dass ersterer deutlich höher ist. Dies ist im Falle der idealen Leistungszahlen analog. Das kann damit zusammenhängen, dass beim Betrieb als Kältemaschine die Reibungswärme gegen den gewünschten Effekt des Kühlens arbeitet, während beim Betrieb als Wärmepumpe die Probe durch die Reibungswärme zusätzlich erhitzt wird. Der Fehler der idealen Leistungszahl der Wärmepumpe ( $(83,6 \pm 40,3) \%$ ) ist sehr groß, weil die Unsicherheit der Temperaturdifferenzmessung sehr groß gewählt wurde. Die Angabe eines deutlich geringeren Fehler wäre allerdings ob der Schwankungen auf der Anzeige des Thermometers nicht zu verantworten gewesen.

## 4 Schlussfolgerung

Es konnte der verwendete Stirling-Motor auf seine Eigenschaften als Wärmepumpe und als Kältemaschine untersucht werden. Dazu gehört die Bestimmung der Heiz- bzw. Kühlleistung sowie der Leistungszahlen beider Betriebsmodi, wobei festgestellt und erklärt wurde, dass die Leistungszahl als Wärmepumpe deutlich höher ist als als Kältemaschine. Auch konnte gezeigt werden, dass der Stirling-Motor keine geeignete Methode zur präzisen Bestimmung der Schmelzwärme und spezifischen Wärme von Eis ist, wobei allerdings nicht geklärt werden konnte, warum die Bestimmung der Schmelzwärme ein derartig vom Literaturwert abweichendes Ergebnis lieferte. Für einen Stirling-Motor mit höheren Leistungszahlen und einer genaueren Bestimmung der Schmelzwärme wäre eine bessere Isolation des Motors von der Umwelt nötig. Außerdem wäre für die präzisere Bestimmung der Leistungszahlen ein präziseres Thermoelement nötig gewesen.

## Literatur

- [1] R. Hörnemann GmbH. *DIN-Toleranzen für Thermopaare und Termoleitungen*. URL: [http://www.hoernemann-rh.de/technik\\_details.asp?technikid=3](http://www.hoernemann-rh.de/technik_details.asp?technikid=3) (besucht am 05.05.2018).
- [2] Engineering ToolBox. *Water - Thermophysical Properties*. URL: [https://www.engineeringtoolbox.com/water-thermal-properties-d\\_162.html](https://www.engineeringtoolbox.com/water-thermal-properties-d_162.html) (besucht am 27.05.2018).
- [3] Uni-Frankfurt. *Spezifische Wärmekapazität einiger Materialien*. URL: [https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm\\_data/lm\\_282/auto/anhang1/cd425.htm](https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_282/auto/anhang1/cd425.htm) (besucht am 27.05.2018).