

VERSUCHSBERICHT ZU

E3 - ELEKTRISCHE RESONANZ

Gruppe 6Mi

Alexander Neuwirth (E-Mail: a_neuw01@wwu.de)
Leonhard Segger (E-Mail: l_segg03@uni-muenster.de)

durchgeführt am 17.01.2018
betreut von
Wladislaw Hartmann

23. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Kurzfassung	3
2	Methoden	3
3	Ergebnisse und Diskussion	4
3.1	Beobachtung	4
3.1.1	Serienresonanzkreis	5
3.1.2	Parallelresonanzkreis	8
3.2	Diskussion	11
4	Schlussfolgerung	11

1 Kurzfassung

In diesem Versuch wurde das elektrische Resonanzverhalten von einem Serienresonanzkreis und einem Parallelresonanzkreis untersucht. Dazu wurden die entsprechenden Schwingkreise durch einem Frequenzgenerator zum Schwingen angeregt. Mit einem Multimeter wurde die Spannung über einen $10\ \Omega$ -Widerstand in Abhängigkeit von der Kapazität des Kondensators bestimmt, da die Variation der Frequenz des Stroms weniger praktikabel ist, um die Resonanz des Schwingkreises zu untersuchen.

Je Resonanzkreis wurde für 3 unterschiedliche Widerstände und ca. 20 um den Resonanzfall gehäufte Kapazitäten die Stromstärke erfasst. Der Innenwiderstand der jeweiligen Spulen im Schwingkreis lässt sich aus der aufgenommenen Resonanzkurve bestimmen. Die Hypothese, dass dieser dem direkt durch das Multimeter bestimmten Innenwiderstand entsprechen muss, wurde im Folgenden überprüft.

Des Weiteren konnte aus den bestimmten Eigenfrequenzen die Induktivität der Spulen bestimmt werden. Für die große Spule im Serienresonanzkreis ergab sich eine Induktivität von $(0,094 \pm 0,002)\ \text{H}$ und für die kleine Spule im Parallelresonanzkreis $(0,0669 \pm 0,0003)\ \text{H}$. Ein Innenwiderstand konnte nur für die kleine Spule mit $(19,16 \pm 1,70)\ \Omega$ bestimmt werden und überschneit sich mit dem Wert der durch das Multimeter bestimmt wurde. Für die große Spule ergaben sich zu große Fehler, als dass man daraus eindeutige Schlüsse auf deren Innenwiderstand schließen könnte.

2 Methoden

Als Erstes wurde eine Reihenresonanzkreis aufgebaut (Abb. 1). Mit dem Multimeter wurde die Spannung über dem $10\ \Omega$ -Messwiderstand gemessen, sodass sich daraus die Stromstärke bestimmen lässt. Mit dem Frequenzgenerator und dem Oszilloskop wurde die Frequenz des Wechselstroms auf 1 kHz und eine Peak-Peak-Spannung von 4 V eingestellt.

Für 3 Widerstände ($200\ \Omega$, $500\ \Omega$ und $0\ \Omega$) wurden die am Multimeter gemessenen Spannungen in Abhängigkeit von der eingestellten Kapazität aufgenommen. Diese Kapazität wurde in kleinen Schritten nahe dem Resonanzfall, also bei maximaler Spannung über dem Messwiderstand, abgetastet. Die im Resonanzfall angezeigte Peak-Peak-Spannung am Oszilloskop wurde ebenfalls erfasst. Zuletzt wurde der Widerstand der Spule mit dem Multimeter gemessen.

Die Untersuchung des Parallelschwingkreises erfolgte analog (Abb. 2), jedoch mit einer anderen Spule, anderen Widerständen ($2\ \text{k}\Omega$, $10\ \text{k}\Omega$ und $\infty\ \text{k}\Omega$) und einer Peak-Peak-Spannung von 10 V. Ein weiterer Unterschied der Schwingkreise ist, dass im Parallelresonanzkreis im Resonanzfall eine minimale (statt einer maximalen) Spannung am Multimeter auftritt.

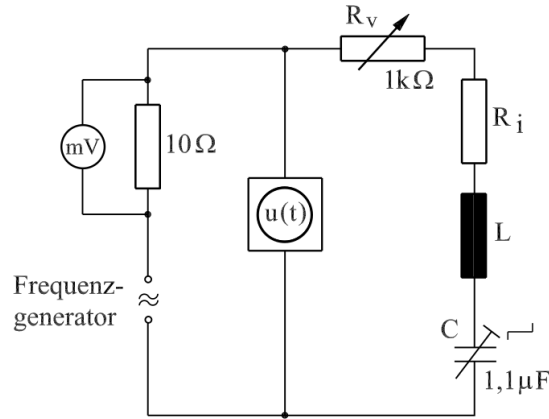


Abbildung 1: Experimenteller Aufbau des Serienresonanzkreises.[1]

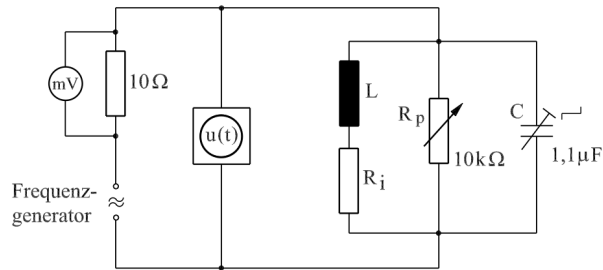


Abbildung 2: Experimenteller Aufbau des Parallelresonanzkreises.[1]

3 Ergebnisse und Diskussion

3.1 Beobachtung

Für die Unsicherheit des Multimeters und des Kondensators war kein Fehler angegeben, im Folgenden wird ein Fehler von 1% des Messwerts (mit rechteckiger WDF) angenommen. Hierbei schwankten die Messwerte kaum. Zusätzlich besteht eine Unsicherheit von 0,02 mV aufgrund der Digitalanzeige. Diese wurde im Fall der Widerstandsmessung vernachlässigt, da sie im Vergleich zur 1%-Unsicherheit verschwindet. In Tabelle 1 sind die Messwerte des Widerstands R_v bzw. R_p sowie die vom Oszilloskop angezeigte Spitze-Spitze-Spannung weit entfernt und am Resonanzfall angegeben. Für die Unsicherheit der Spannungsangabe des Oszilloskop wurde die Schwankung des Wertes (0,04 V mit rechteckiger WDF) zugrunde gelegt und vorausgesetzt, dass (weil sie relativ groß war) die Unsicherheit der Anzeige und des Messgerätes ihr gegenüber verschwinden lässt.

Es wurde die Frequenz mithilfe des Oszilloskops auf 1000 Hz eingestellt. Hieraus ergibt sich mit rechteckiger WDF mit einer Breite von 1 Hz ein Wert von $(1000,0 \pm 0,3)$ Hz. Die Messung des Innenwiderstands der Spule ergab im Fall des Serienresonanzkreises einen

Tabelle 1: Einstellungen der Resonanzkreise. Dabei entspricht S1 bis S3 den Messreihen im Serienresonanzkreis und P1 bis P3 den Messungen im Parallelresonanzkreis. „Spannung P-P“ bezieht sich auf die Spannung zwischen den Spitzen, die das Oszilloskop angab. „inf“ meint den Fall, bei dem kein Widerstand eingesetzt wurde und keine Verbindung zwischen den Anschlüssen, die ansonsten an den Widerstand angeschlossen waren, bestand.

	Spannung P-P fern (V)	Spannung P-P nah (V)	Widerstand R_v bzw. $R_p(\Omega)$
S1	$4 \pm 0,012$	$3,6 \pm 0,012$	$200 \pm 0,58$
S2	$4 \pm 0,012$	$3,72 \pm 0,012$	$497,4 \pm 1,44$
S3	$4 \pm 0,012$	$3,36 \pm 0,012$	$0 \pm 0,02$
P1	$10 \pm 0,012$	$10,04 \pm 0,012$	inf
P2	$10 \pm 0,012$	$10,12 \pm 0,012$	$(9,930 \pm 0,029) \cdot 10^3$
P3	$10 \pm 0,012$	$10,04 \pm 0,012$	$(2,0010 \pm 0,0058) \cdot 10^3$

Wert von $(52,30 \pm 0,15) \Omega$ und beim Parallelresonanzkreis $(19,10 \pm 0,06) \Omega$. Die Unsicherheit der Spannungsmessung über dem Widerstand von 10Ω beträgt die kombinierte Unsicherheit von Multimeter und Display des Multimeters.

Die Stromstärke wurde gemäß

$$I = \frac{U}{R}$$

mit $R = (10,0 \pm 0,3) \Omega$ (Angabe auf dem Widerstand) berechnet. Die Unsicherheit der Stromstärke ergab sich durch Gleichung (1).

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=0}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (1)$$

3.1.1 Serienresonanzkreis

In Abb. 3 bis 5 ist die Stromstärke im Serienresonanzkreis gegen den Kehrwert der Kapazität bei unterschiedlichen Widerständen R_v aufgetragen.

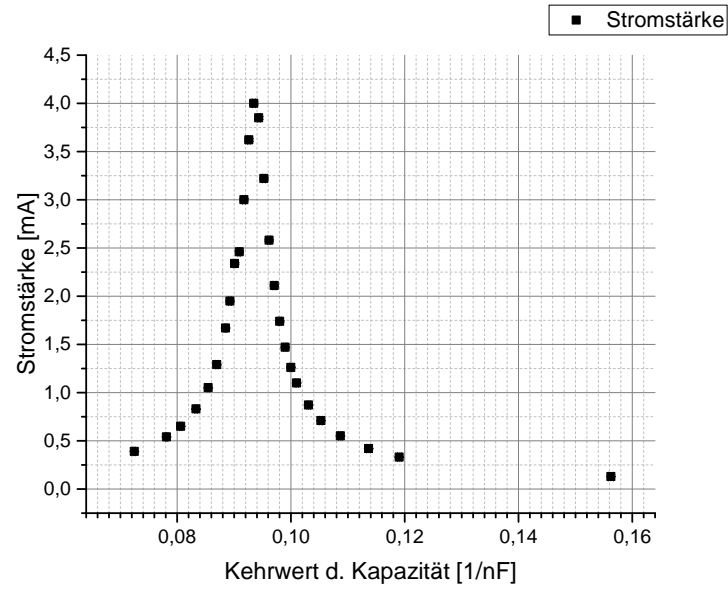


Abbildung 3: Hier ist die Stromstärke $|I|$ gegen den Kehrwert der Kapazität bei $R_v = 0 \Omega$ aufgetragen. Die Fehlerbalken sind kleiner als die Symbolgröße.

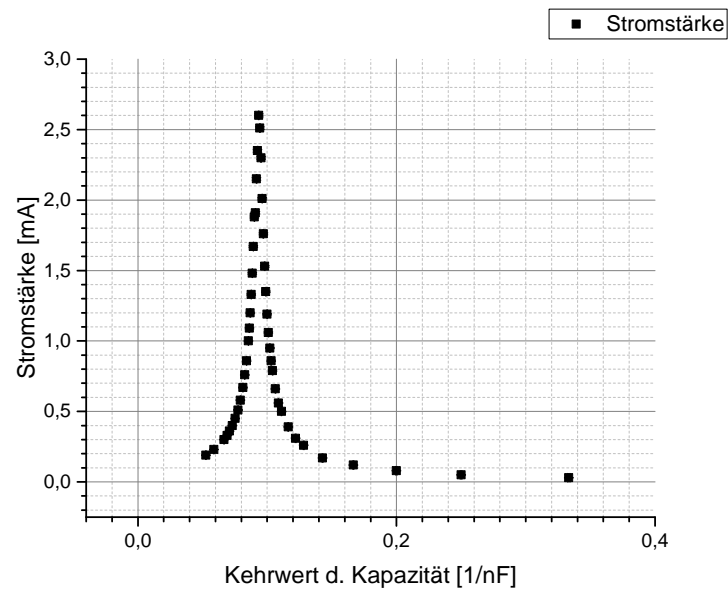


Abbildung 4: Hier ist die Stromstärke $|I|$ gegen den Kehrwert der Kapazität bei $R_v = 200 \Omega$ aufgetragen. Die Fehlerbalken sind kleiner als die Symbolgröße.

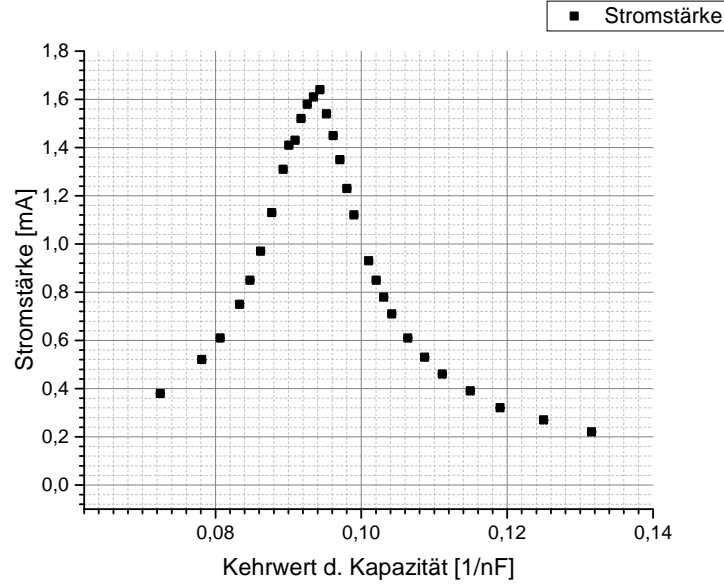


Abbildung 5: Hier ist die Stromstärke $|I|$ gegen den Kehrwert der Kapazität bei $R_v = 500 \Omega$ aufgetragen. Die Fehlerbalken sind kleiner als die Symbolgröße.

Es gilt nach der Thomsonschen Schwingungsformel:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (2)$$

Daraus ergibt sich im Fall der Variation von C und festem ω am Maximum C_{\max} :

$$L = \frac{1}{\omega^2 C_{\max}} \quad (3)$$

Für den Verlustwiderstand R gilt für die Orte C_i an denen der Strom das $1/\sqrt{2}$ -fache des Maximums annimmt:

$$R = \frac{2}{2\omega_0 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right)} \quad (4)$$

Diese Orte wurden anhand der Diagramme abgelesen, was hierbei einen recht hohen Ablesefehler nach sich zieht. Für Verlustwiderstand und Induktivität ergibt sich die Unsicherheit gemäß Gleichung (1). In Tabelle 2 sind die Ergebnisse aus Ablesen der Maxima und die daraus folgenden Induktivitäten der Spule sowie die Verlustwiderstände für die drei Messungen dargestellt.

Tabelle 2: Abgelesene Maxima der Resonanzkurven und daraus berechnete Induktivitäten L der Spule sowie Verlustwiderstände R des Serienresonanzkreises bei den drei Messungen. Als Unsicherheit wurde hier eine nach oben abgeschätzte Ableseungenauigkeit (dreieckige WDF) gewählt. Diese ist sehr groß, da zwischen Messwerten interpoliert werden musste. Es ist deutlich erkennbar, dass die Unsicherheiten der Messpunkte demgegenüber verschwinden. Der Innenwiderstand wurde nach Gleichung (5) berechnet.

	31: $0\ \Omega$	S1: $200\ \Omega$	S2: $500\ \Omega$
$ I _{\max} / \text{mA}$	$4 \pm 0,03$	$2,52 \pm 0,02$	$1,64 \pm 0,02$
$1/C_{\max} / \text{nF}^{-1}$	$0,095 \pm 0,004$	$0,092 \pm 0,004$	$0,0942 \pm 0,003$
L / H	$2,41 \pm 0,1$	$2,33 \pm 0,1$	$2,39 \pm 0,08$
R / Ω	398 ± 225	637 ± 225	796 ± 225
R_i / Ω	398 ± 225	437 ± 225	$300,6 \pm 225$

Im Serienresonanzkreis sollte für den Innenwiderstand der Spule gelten:

$$R_i = R - R_v \quad (5)$$

Wenn man für die drei gewählten R_v den Innenwiderstand der Spule auf diese Art und Weise ermittelt, erhält man die Ergebnisse, die in Tabelle 2 als R_i dargestellt sind mit den Unsicherheiten gemäß Gleichung (1). Hierfür wurde der Innenwiderstand der Spule, der durch Gleichstrommessung ermittelt wurde, benutzt.

3.1.2 Parallelresonanzkreis

In Abb. 6 bis 8 ist die Stromstärke im Serienresonanzkreis gegen die Kapazität bei unterschiedlichen Widerständen R_p aufgetragen.

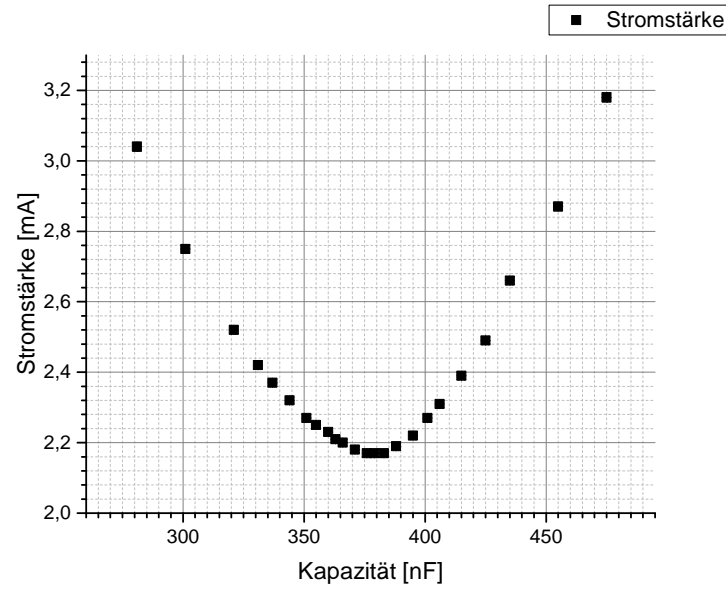


Abbildung 6: Hier ist die Stromstärke $|I|$ gegen die Kapazität bei $R_p = 2\text{ k}\Omega$ aufgetragen. Die Fehlerbalken sind kleiner als die Symbolgröße.

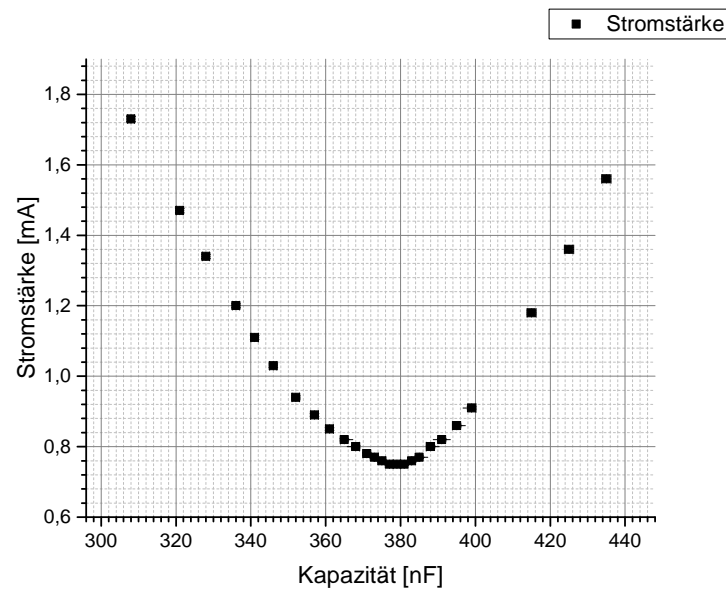


Abbildung 7: Hier ist die Stromstärke $|I|$ gegen die Kapazität bei $R_p = 2\text{ k}\Omega$ aufgetragen. Die Fehlerbalken sind kleiner als die Symbolgröße.

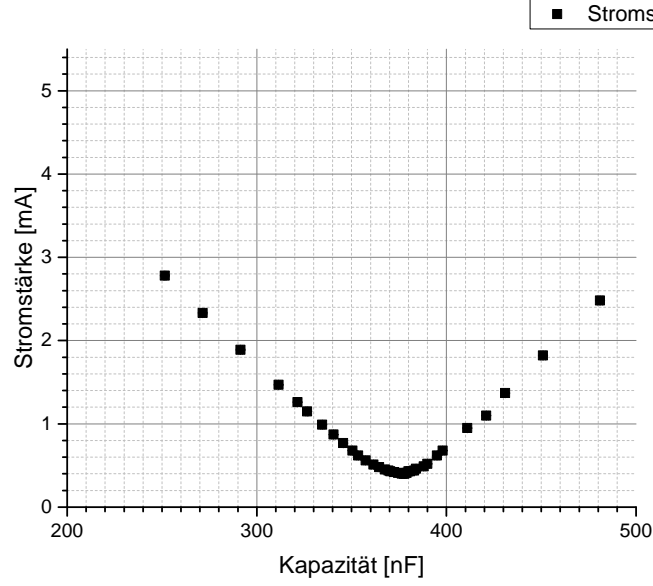


Abbildung 8: Hier ist die Stromstärke $|I|$ gegen die Kapazität bei unendlich großem Widerstand aufgetragen. Die Fehlerbalken sind kleiner als die Symbolgröße.

In Tabelle 3 sind die Ergebnisse aus Ablesen der Maxima und die daraus folgenden Induktivitäten der Spule sowie die Verlustwiderstände für die drei Messungen dargestellt. Auch hier gilt Gleichung (3). Für den Verlustwiderstand R gilt für die Orte C_i an denen der Strom das $\sqrt{2}$ -fache des Minimums annimmt:

$$R = \frac{2}{2\omega_0(C_2 - C_1)} \quad (6)$$

Tabelle 3: Abgelesene Minima der Resonanzkurven und daraus berechnete Induktivitäten L der Spule sowie Verlustwiderstände R des Parallelresonanzkreises bei den drei Messungen. Als Unsicherheit wurde hier eine nach oben abgeschätzte Ableseungenauigkeit (dreieckige WDF) gewählt. Es ist deutlich erkennbar, dass die Unsicherheiten der Messpunkte selbst demgegenüber verschwinden.

	P3: 2 k Ω	P3 10 k Ω	P1: $\infty\Omega$
$ I _{\min}/\text{mA}$	$2,17 \pm 0,01$	$0,75 \pm 0,01$	$0,041 \pm 0,02$
C_{\min}/nF	380 ± 2	379 ± 2	376 ± 2
L/H	$0,0666 \pm 0,00035$	$0,0668 \pm 0,00035$	$0,0674 \pm 0,00036$
R/Ω	1675 ± 27	5584 ± 294	9362 ± 826

Im Parallelresonanzkreis gilt bei $R_p = \infty$ für den Verlustwiderstand:

$$R = \frac{\omega^2 L^2}{R_i} \iff R_i = \frac{\omega^2 L^2}{R} \quad (7)$$

Setzt man hier die Werte der Messung mit unendlichem Widerstand aus Tabelle 3 ein und berechnet die Unsicherheit gemäß Gleichung (1), erhält man: $(19,16 \pm 1,70) \Omega$.

3.2 Diskussion

Eine Änderung des Widerstandes im Resonanzkreis führte zu keiner anderen Eigenfrequenzen und stimmt mit der Theorie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ überein. Auf den Spulen waren keine Induktivitäten angegeben, insofern ist es nicht möglich die von uns bestimmten Werte mit Werten des Herstellers zu vergleichen. Für die große Spule ergab sich eine gemittelte Induktivität von $(0,094 \pm 0,002) \text{ H}$ (Tabelle 2, L) und für die kleine Spule $(0,0669 \pm 0,0003) \text{ H}$ (Tabelle 3, L). Die Unsicherheit des Innenwiderstands der großen Spule, also beim Serienresonanzkreis, haben sich nur mit einer ziemlich großen Unsicherheit aus der Resonanzkurve bestimmen lassen und die Fehlerfortpflanzung vergrößerte diesen Fehler noch. Der mit dem Multimeter gemessene Innenwiderstand von $(52,30 \pm 0,15) \Omega$ liegt in der doppelten Unsicherheit des durch die Resonanz bestimmten (Tabelle 2, R_i). Allerdings haben die resultierenden Innenwiderstände eine relative Unsicherheit von mehr als 50% und sind entsprechend nicht sehr aussagekräftig, wenn man mit dieser Methode den Innenwiderstand bestimmen will. Der beim Parallelresonanzkreis bestimmte Innenwiderstand von $(19,16 \pm 1,70) \Omega$ überschneidet sich mit dem des Multimeters $(19,10 \pm 0,06) \Omega$.

Folglich ist die Hypothese, dass mit dem Experiment der Innenwiderstand einer Spule erfasst werden kann, nur für den Parallelresonanzkreis bestätigt.

4 Schlussfolgerung

Die Hypothese wurde für den Parallelresonanzkreis bestätigt, da sich die Fehler beider Messungen des Widerstands überschneiden. Beim Serienresonanzkreis überschneiden sich die Unsicherheiten ebenfalls, jedoch waren diese zu groß um praktikabel zum Bestimmen von Innenwiderständen zu sein.

Auf dem einstellbaren Kondensator war keine Unsicherheit angegeben, daher mussten wir diese abschätzen. Außerdem war auf den Spulen keine Induktivität angegeben, daher konnte die jeweilige aus der Eigenfrequenz bestimmte Induktivität nicht mit einem vorgegebenen Wert, bzw. dessen Unsicherheitsintervalls, verglichen werden. Die Bestimmung des Innenwiderstand durch das Multimeter ist sehr viel praktikabler und genauer als durch eine Untersuchung der Resonanzkurve eines Resonanzschwingkreises unter Variation der Kapazitäten.

Von beiden Resonanzkreisen erwies sich der Parallelresonanzkreis als genauer zum Ermitteln der Induktivität einer Spule, da die relative Unsicherheit in Serie 2% und parallel dagegen nur 0,4% betragen hat. Genauso war das Bestimmen des Innenwiderstand im Parallelresonanzkreis mit kleineren Unsicherheiten möglich. Dennoch ist die Unsicherheit bei der Messung des Innenwiderstands durch das Multimeter um einen Faktor 20 kleiner.

Literatur

- [1] WWU Münster. *Elektrische Resonanz*. URL: <https://sso.uni-muenster.de/LearnWeb/learnweb2/mod/resource/view.php?id=883523> (besucht am 23.01.2018).