

VERSUCHSBERICHT ZU

M5 - JO-JO UND KREISEL

Gruppe 6Mi

Alexander Neuwirth (E-Mail: a_neuw01@wwu.de)
Leonhard Segger (E-Mail: l_segg03@uni-muenster.de)

durchgeführt am 13.12.2017
betreut von
Kristina Mühlenstrodt

18. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Kurzfassung	3
2	Methoden	3
3	Ergebnisse und Diskussion	3
3.1	Beobachtung	3
3.1.1	Fallrad	3
3.1.2	Kreisel	6
3.2	Diskussion	6
4	Schlussfolgerung	6
5	Beantwortung der Aufgaben zur Vorbereitung	6

1 Kurzfassung

2 Methoden

3 Ergebnisse und Diskussion

3.1 Beobachtung

3.1.1 Fallrad

Fallzeitbetrachtung

In den Graphen Abb. 1 und Abb. 2 sind die Fallhöhen gegen die Fallzeiten, bzw deren Quadrate, aufgetragen. Abb. 3 zeigt das Verhältnis der Fallhöhen zu den Fallzeitquadraten in Abhängigkeit von der Fallzeit. Der lineare Zusammenhang ist beim Betrachten der Werte bereits erkennbar und außerdem sollte dieser auch der Theorie zufolge auftreten (Gleichung (1)).

$$h(t) = \frac{1}{2}g \frac{mR^2}{mR^2 + J_S} t^2 = \frac{1}{2}g^* t^2 \quad (1)$$

Deshalb haben wir einen Fit mit dem „Scaled Levenberg-Marquardt“-Algorithmus, welcher die Methode der kleinsten Quadrate verwendet, durchgeführt. Für den Fit wurde die folgende Funktion zugrunde gelegt:

$$f(x) = A * x + B \quad (2)$$

Es ergibt sich ein y-Achsenabschnitt von $(0,01754 \pm 0,00049) \text{ m/s}^2$, welcher $\frac{1}{2}g^*$ entspricht. Der Fit weißt zwar eine minimale Steigung auf, diese ist jedoch vernachlässigbar, da sie im Verhältnis zur Unsicherheit des y-Achsenabschnitts auf dem Messintervall verschwindet. Folglich ergibt sich ein g^* von $(0,03508 \pm 0,00098) \text{ m/s}^2$.

Berechnung des Trägheitsmoments

Das Trägheitsmoments des Fallrads setzt sich aus den Trägheitsmomenten der einzelnen Komponenten zusammen. In Tabelle 1 sind Volumen und Trägheitsmoment von Zylindern aufgeführt. Die Masse m ergibt sich jeweils aus

$$m = M \frac{V}{V_{\text{ges}}} \quad (3)$$

wobei M die Masse des gesamten Fallrads und V_{ges} entsprechend das gesamte Volumen ist. Es wird davon ausgegangen, dass der Stoff homogen ist.

Es folgt das Trägheitsmoment mit einer Gesamtmasse M von $(0,768070 \pm 0,000028) \text{ kg}$:

$$J = \frac{1}{2} \frac{M}{2V_S + V_A + V_R} (V_A R_A^2 + V_S (R_S^2 + \frac{1}{3} L_S^2) + V_R (R_{\text{Rad,Außen}}^2 + R_{\text{Rad,Innen}}^2)) \quad (4)$$

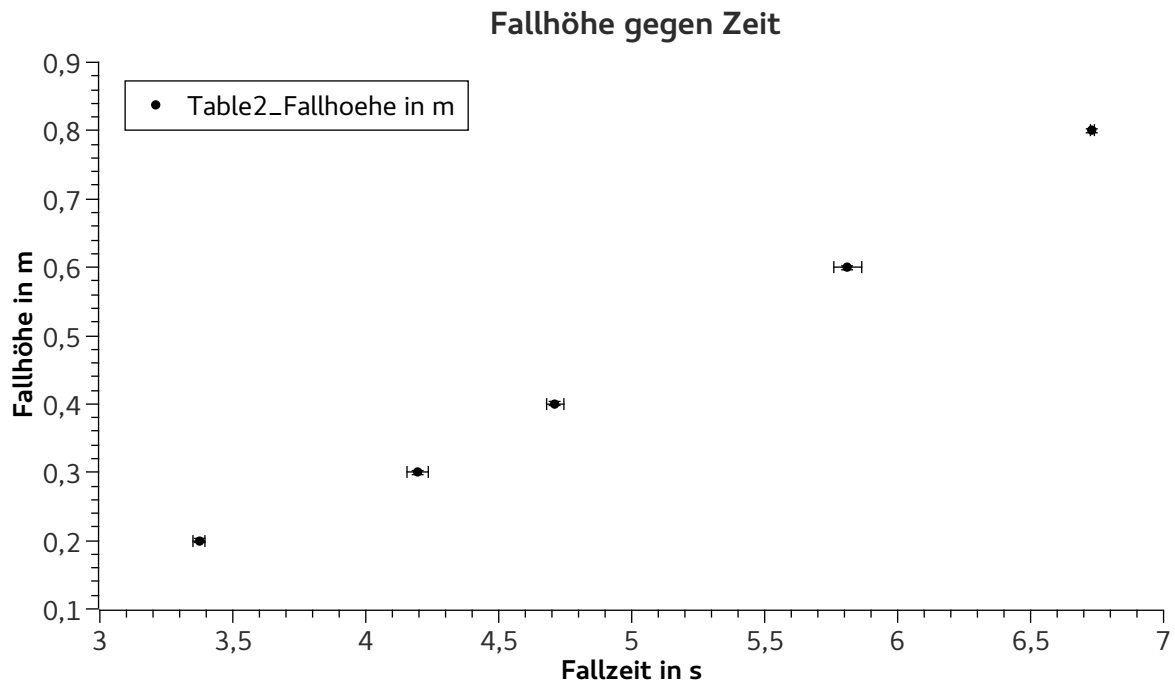


Abbildung 1: Die Fallhöhe des Fallrads ist gegen die Fallzeit aufgetragen.

Tabelle 1: Trägheitsmomente von (Hohl-)Zylindern zu verschiedenen Achsen.

Zylinder	Volumen V	Rotationsachse	Trägheitsmoment J
Vollzylinder	$\pi l r^2$	Symmetrieachse	$\frac{1}{2} m r^2$
Vollzylinder	$\pi l r^2$	Querachse	$\frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$
Hohlzylinder	$\pi l (r_2^2 - r_1^2)$	Symmetrieachse	$\frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=0}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (5)$$

Beim Einsetzen aller Größen ergibt sich ein Trägheitsmoment von $J = (42,5500 \pm 0,1875) \text{ kgcm}^2$ mit einer relativen Abweichung von 0,441%.

Bestimmung des Abrollradius

Aus

$$g^* = \frac{gMR^2}{MR^2 + J_S} \quad (6)$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{J_S g^*}{gM - g^* M} \quad (7)$$

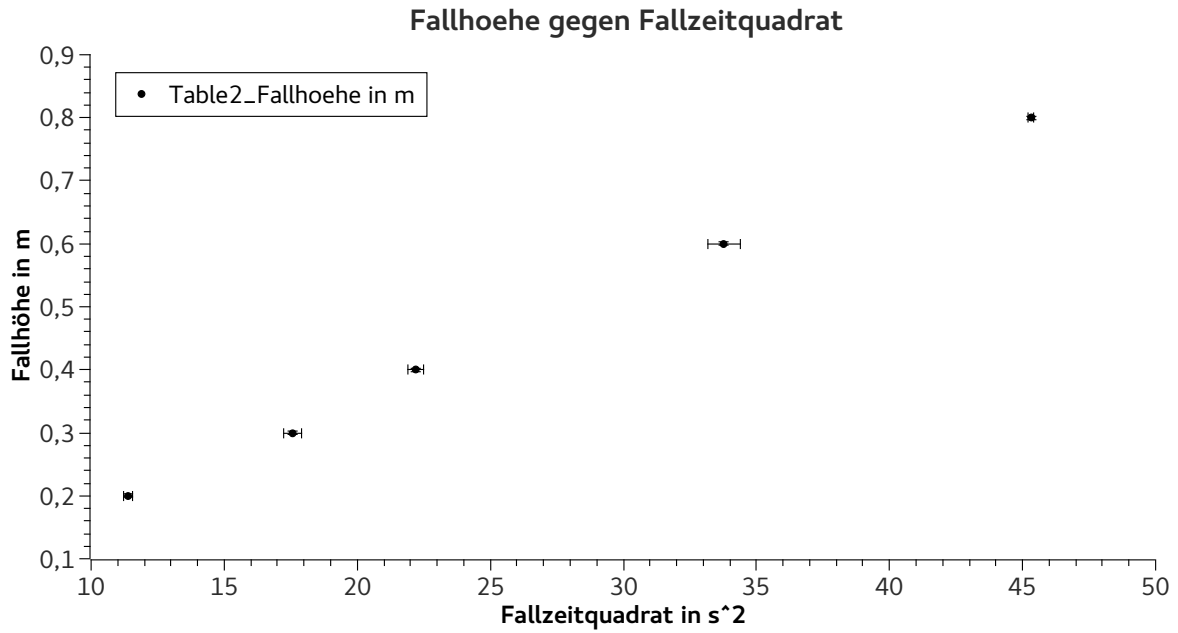


Abbildung 2: Die Fallhöhe des Fallrads ist gegen die Fallzeitquadrate aufgetragen.

folgt, dass der Abrollradius durch

$$R = \sqrt{\frac{J_S}{M} \frac{g^*}{g - g^*}} \quad (8)$$

berechnet werden kann. Setzt man die zuvor ermittelten Werte von g^* , J_S und M ein erhält man einen Abrollradius von $(0,446 \pm 0,006)$ cm mit einer Unsicherheit von ca. 1,5%. Der Radius der Achse beträgt $(0,405 \pm 0,006)$ cm und der Radius des Fadens $(0,052 \pm 0,002)$ cm. Folglich ergibt sich ein Abrollradius von $(0,457 \pm 0,006)$ cm.

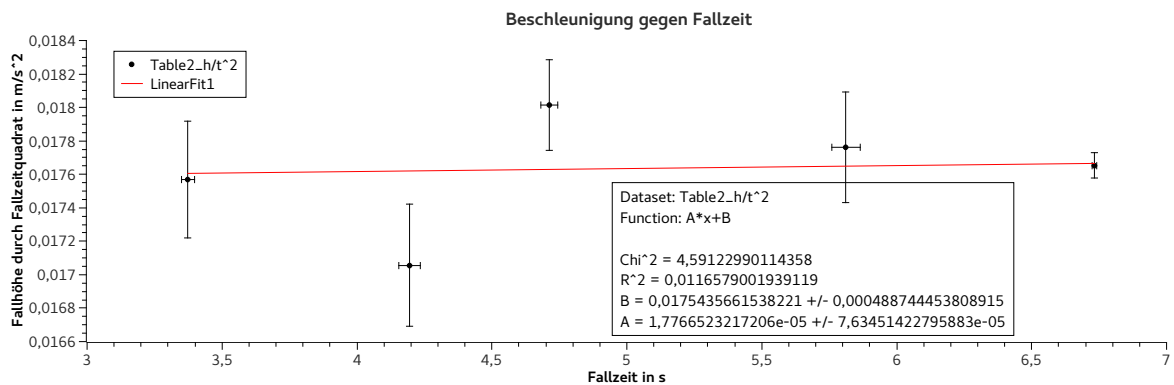


Abbildung 3: Die halbe Beschleunigung des Fallrads ist gegen die Fallzeit aufgetragen.

Tabelle 2: Gemessene Längen.

	Länge L	Radius R
Speiche	$(15,576 \pm 0,023) \text{ cm}$	$(0,407 \pm 0,006) \text{ cm}$
Achse	$(20,210 \pm 0,012) \text{ cm}$	$(0,405 \pm 0,006) \text{ cm}$
Rad außen	-	$(9,007 \pm 0,001) \text{ cm}$
Rad innen	-	$(7,788 \pm 0,012) \text{ cm}$
Dicke Rad	$(1,150 \pm 0,004) \text{ cm}$	-

3.1.2 Kreisel

Bestimmen des Trägheitsmoments

Für eine homogene Kugel gilt für das Trägheitsmoment, falls die Achse durch den Mittelpunkt läuft:

$$J_2 = \frac{2}{5} m_k r_k^2 \quad (9)$$

Es folgt ein Trägheitsmoment für den gesamten Kreisel mit den gemessenen Größen $m_k = (512,160 \pm 0,028) \text{ g}$ und $r_k = (2,540 \pm 0,006) \text{ cm}$ von:

$$J = J_1 + J_2 = 15 \text{ gcm}^2 + (1321,70 \pm 6,24) \text{ gcm}^2 = (1336,70 \pm 6,24) \text{ gcm}^2 \quad (10)$$

3.2 Diskussion

4 Schlussfolgerung

5 Beantwortung der Aufgaben zur Vorbereitung

1.

$$0 = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 - mgh \right) \quad (11)$$

$$= mva + \frac{J_S}{R^2} va - mgv \quad (12)$$

$$\frac{mg}{a} = m + \frac{J_S}{R^2} \quad (13)$$

$$\Rightarrow a(t) = g \frac{mR^2}{mR^2 + J_S} \quad (14)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2} g \frac{mR^2}{mR^2 + J_S} t^2 + v_0 t + h_0 \quad (15)$$

2. Die Kraft mit der das abrollende Rad an der Aufhängevorrichtung zieht ergibt sich aus

$$F = ma \quad (16)$$

und beträgt folglich $mg \frac{mR^2}{mR^2 + J_S}$. Dass die Kraft, bzw. Beschleunigung, konstant ist, ist auch in Abbildung 2 der Einführung zum Versuch dargestellt. Der Unterschied zur Gewichtskraft des Rades besteht in dem Faktor $\frac{mR^2}{mR^2 + J_S}$, welcher stets kleiner als 1 ist, somit fällt das Rad langsamer als im freien Fall.

3. Die Kraft wirkt nach wie vor in die gleiche Richtung mit gleichem Betrag.