

VERSUCHSBERICHT ZU

M5 - JO-JO UND KREISEL

Gruppe 6Mi

Alexander Neuwirth (E-Mail: a\_neuw01@wwu.de)  
Leonhard Segger (E-Mail: l\_segg03@uni-muenster.de)

durchgeführt am 13.12.2017  
betreut von  
Kristina Mühlenstrodt

19. Dezember 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurzfassung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Methoden</b>	<b>3</b>
2.1	Maxwell'sches Fallrad . . . . .	3
2.2	Kreisel . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>4</b>
3.1	Beobachtung . . . . .	4
3.1.1	Fallrad . . . . .	4
3.1.2	Kreisel . . . . .	7
3.2	Diskussion . . . . .	8
3.2.1	Maxwell'sches Fallrad . . . . .	8
3.2.2	Kreisel . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Schlussfolgerung</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Beantwortung der Aufgaben zur Vorbereitung</b>	<b>10</b>

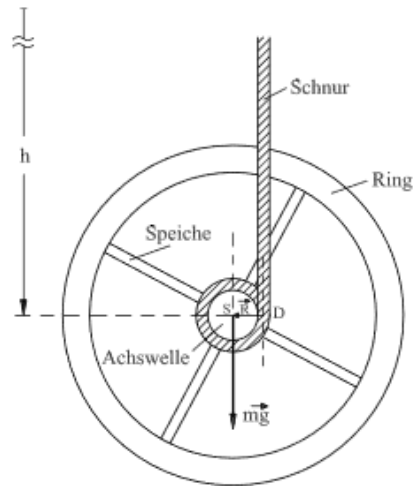


Abbildung 1: Maxwell'sches Fallrad

## 1 Kurzfassung

Um das Prinzip von Jo-Jos und Kreiseln zu untersuchen wurden zwei Experimente durchgeführt. Das Erste untersucht das Maxwell'sche Fallrad. Dabei wurde einmal mithilfe des Trägheitsmoments und einmal durch Messung der Falldauer in Abhängigkeit von der Fallhöhe der Abrollradius bestimmt und die beiden Ergebnisse verglichen. Dabei war zu erwarten, dass die Unsicherheiten der beiden Ergebniss überschneiden. Dies konnte tatsächlich im Versuch nachgewiesen werden.

Im zweiten Versuch wurde die Präzession eines schweren, symmetrischen Kreisels untersucht. Daraus wurde das Trägheitsmoment bestimmt und mit dem Trägheitsmoment, das aus Masse und Abmessungen bestimmt wurde, verglichen. Auch hier war zu erwarten, dass die Werte innerhalb der Vertrauensbereiche übereinstimmen.

## 2 Methoden

### 2.1 Maxwell'sches Fallrad

Zunächst wurde die Fallzeit eines Maxwell'schen Fallrads in Abhängigkeit vom Fallweg für fünf verschiedene Fallhöhen je fünf mal gemessen. Der Aufbau eines Maxwell'schen Fallrads ist in Abb. 1 dargestellt <sup>1</sup>. Dann wurde das Rad gewogen und mit einer Schiebellehre ausgemessen, um daraus das Trägheitsmoment bestimmen zu können. Dabei wurde Dicke, Außenradius und Innenradius sowie die Dicke des Aufhängefadens an fünf verschiedenen Stellen gemessen, um dann über diese Werte mitteln zu können, da diese Werte besonders bedeutend für das Trägheitsmoment bzw. den Abrollradius sind.

<sup>1</sup>Jo-Jo und Kreisel Einführung, Zugriff am 18.12.2017

## 2.2 Kreisel

Dann wurde ein schwerer, symmetrischer Kreisel untersucht. Dieser hatte die Form einer Metallkugel, in der in radialer Richtung eine Stange eingeschraubt war, auf der sich eine verschiebbare Zusatzmasse befand. Um die eine möglichst reibungsfreie Bewegung des Kreisels und die Eigenschaft der Schwere zu ermöglichen, war dabei die Kugel auf einem durch Pressluft in einer Hohlhalbkugel erzeugten Luftpolster gelagert. Die Eigenfrequenz der Kugel wurde dabei mit einem Pressluftstrahl aus einer Düse manuell kontrolliert. Zunächst wurde die Kugel gewiegt und ihr Durchmesser mit einer Schieblehre bestimmt. Dann wurde bei waagerechter Achse die Kraft bestimmt, mit der das Gewicht der Achse und des Zusatzgewichtes im Abstand  $l$  die Achse nach unten zieht, um die Größe  $amg$  bestimmen zu können. Diese Messung wurde für drei Abstände der Zusatzmasse von der Kugel je fünf mal durchgeführt. Nachdem die Kugel mit dem Pressluftstrahl beschleunigt wurde, wurde die Eigenfrequenz mit einem Stroboskop mit verstellbarer Frequenz bestimmt. Dazu wurde die Frequenz des Stroboskop solange verringert, bis der Kreisel im Licht der Stroboskoplampe scheinbar stillsteht und die Markierung auf der Kugel nur einmal sichtbar ist. Sobald dies erfüllt war wurde die Frequenz vom Stroboskop abgelesen und mit der Pressluftdüse versucht diese möglichst konstant zu halten, was dadurch erkennbar war, ob die Markierung auf der Kugel sich scheinbar bewegte. Dann wurde mit einer Stoppuhr die Präzessionszeit der Kreiselachse bestimmt. Dabei wurde nur eine Umdrehung gemessen, um die Abweichung der Eigenfrequenz gering halten zu können. Diese Messung wurde für dieselben drei Abstände der Zusatzmasse von der Kugel wie zuvor durchgeführt.

## 3 Ergebnisse und Diskussion

### 3.1 Beobachtung

#### 3.1.1 Fallrad

##### Fallzeitbetrachtung

In den Graphen Abb. 2 und Abb. 3 sind die Fallhöhen gegen die Fallzeiten, bzw deren Quadrate, aufgetragen. Abb. 4 zeigt das Verhältnis der Fallhöhen zu den Fallzeitquadraten in Abhängigkeit von der Fallzeit. Der lineare Zusammenhang ist beim Betrachten der Werte bereits erkennbar und außerdem sollte dieser auch der Theorie zufolge auftreten (Gleichung (1)).

$$h(t) = \frac{1}{2}g \frac{mR^2}{mR^2 + J_S} t^2 = \frac{1}{2}g^* t^2 \quad (1)$$

Deshalb haben wir einen Fit mit dem „Scaled Levenberg-Marquardt“-Algorithmus, welcher die Methode der kleinsten Quadrate verwendet, durchgeführt. Für den Fit wurde die folgende Funktion zugrunde gelegt:

$$f(x) = A * x + B \quad (2)$$

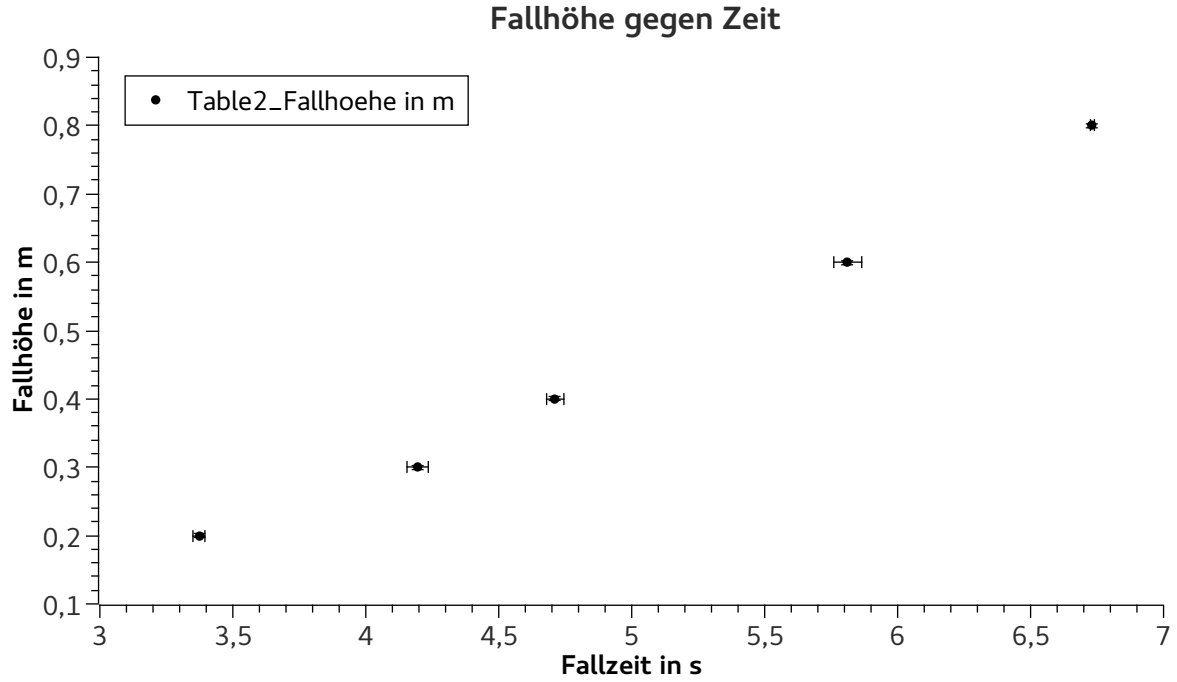


Abbildung 2: Die Fallhöhe des Fallrads ist gegen die Fallzeit aufgetragen.

Tabelle 1: Trägheitsmomente von (Hohl-)Zylindern zu verschiedenen Achsen.

Zylinder	Volumen $V$	Rotationsachse	Trägheitsmoment $J$
Vollzylinder	$\pi l r^2$	Symmetrieachse	$\frac{1}{2} m r^2$
Vollzylinder	$\pi l r^2$	Querachse	$\frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$
Hohlzylinder	$\pi l (r_2^2 - r_1^2)$	Symmetrieachse	$\frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$

Es ergibt sich ein y-Achsenabschnitt von  $(0,01754 \pm 0,00049) \text{ m/s}^2$ , welcher  $\frac{1}{2}g^*$  entspricht. Der Fit weist zwar eine minimale Steigung auf, diese ist jedoch vernachlässigbar, da sie im Verhältnis zur Unsicherheit des y-Achsenabschnitts auf dem Messintervall verschwindet. Folglich ergibt sich ein  $g^*$  von  $(0,03508 \pm 0,00098) \text{ m/s}^2$ .

### Berechnung des Trägheitsmoments

Das Trägheitsmoments des Fallrads setzt sich aus den Trägheitsmomenten der einzelnen Komponenten zusammen. In Tabelle 1 sind Volumen und Trägheitsmoment von Zylindern aufgeführt. Die Masse  $m$  ergibt sich jeweils aus

$$m = M \frac{V}{V_{\text{ges}}} \quad (3)$$

wobei  $M$  die Masse des gesamten Fallrads und  $V_{\text{ges}}$  entsprechend das gesamte Volumen ist. Es wird davon ausgegangen, dass der Stoff homogen ist.

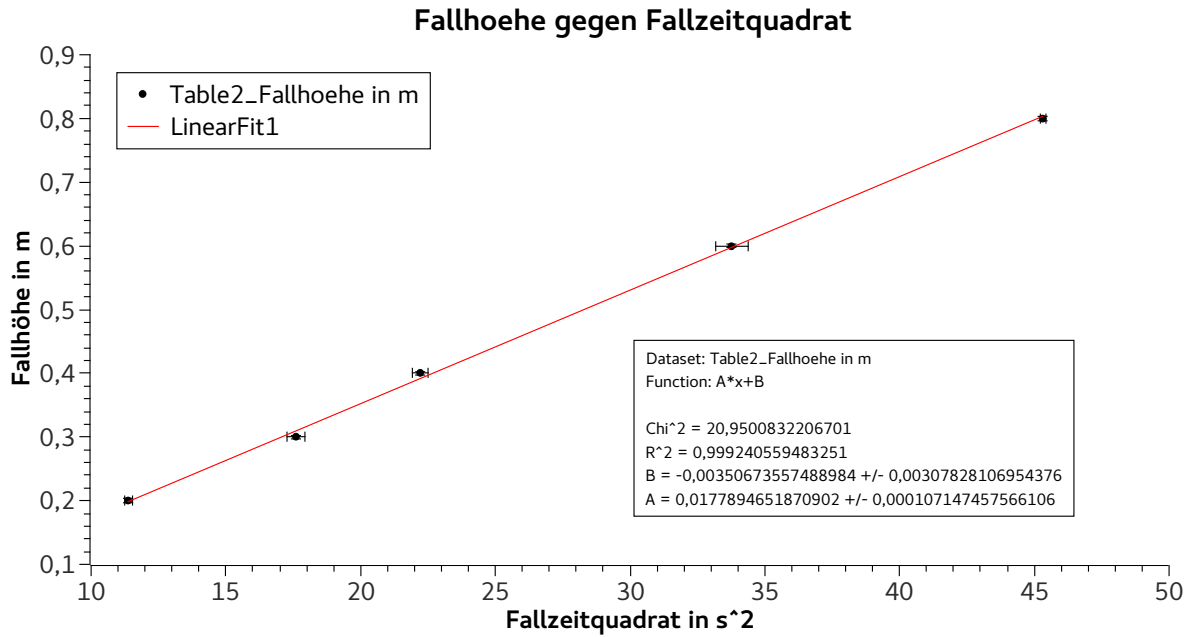


Abbildung 3: Die Fallhöhe des Fallrads ist gegen die Fallzeitquadrate aufgetragen.

Es folgt das Trägheitsmoment mit einer Gesamtmasse  $M$  von  $(0,768\,070 \pm 0,000\,028)$  kg:

$$J = \frac{1}{2} \frac{M}{2V_S + V_A + V_R} (V_A R_A^2 + V_S (R_S^2 + \frac{1}{3} L_S^2) + V_R (R_{\text{Rad,Außen}}^2 + R_{\text{Rad,Innen}}^2)) \quad (4)$$

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=0}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (5)$$

Beim Einsetzen aller Größen ergibt sich ein Trägheitsmoment von  $J = (42,5500 \pm 0,1875)$  kgcm<sup>2</sup> mit einer relativen Abweichung von 0,441%.

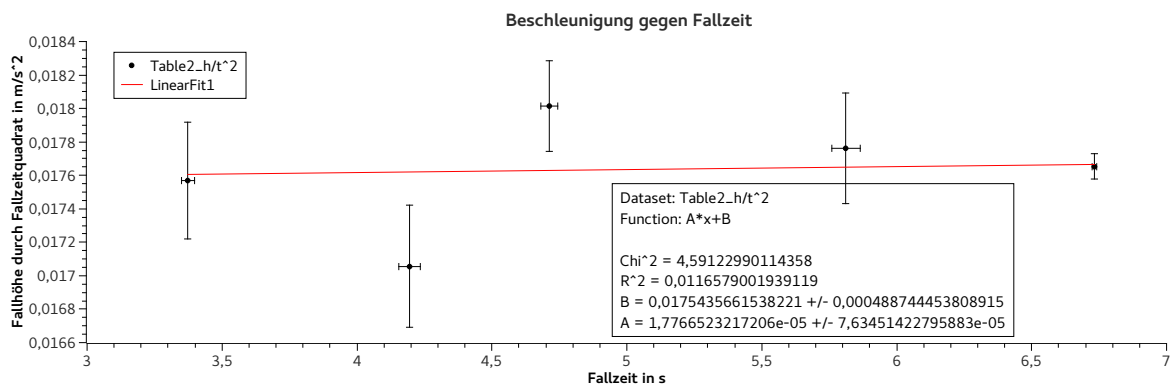


Abbildung 4: Die halbe Beschleunigung des Fallrads ist gegen die Fallzeit aufgetragen.

Tabelle 2: Gemessene Längen.

	Länge $L$	Radius $R$
Speiche	$(15,576 \pm 0,023) \text{ cm}$	$(0,407 \pm 0,006) \text{ cm}$
Achse	$(20,210 \pm 0,012) \text{ cm}$	$(0,405 \pm 0,006) \text{ cm}$
Rad außen	-	$(9,007 \pm 0,001) \text{ cm}$
Rad innen	-	$(7,788 \pm 0,012) \text{ cm}$
Dicke Rad	$(1,150 \pm 0,004) \text{ cm}$	-

### Bestimmung des Abrollradius

Aus

$$g^* = \frac{gMR^2}{MR^2 + J_S} \quad (6)$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{J_S g^*}{gM - g^* M} \quad (7)$$

folgt, dass der Abrollradius gemäß

$$R = \sqrt{\frac{J_S}{M} \frac{g^*}{g - g^*}} \quad (8)$$

berechnet werden kann. Setzt man die zuvor ermittelten Werte von  $g^*$ ,  $J_S$  und  $M$  ein erhält man einen Abrollradius von  $(0,446 \pm 0,006) \text{ cm}$  mit einer Unsicherheit von ca. 1,5%. Der Radius der Achse beträgt  $(0,405 \pm 0,006) \text{ cm}$  und der Radius des Fadens  $(0,052 \pm 0,002) \text{ cm}$ . Folglich ergibt sich durch Addition ein Abrollradius von  $(0,457 \pm 0,006) \text{ cm}$ .

### 3.1.2 Kreisel

#### Bestimmen des Trägheitsmoments

Für eine homogene Kugel gilt für das Trägheitsmoment, falls die Achse durch den Mittelpunkt läuft:

$$J_2 = \frac{2}{5} m_k r_k^2 \quad (9)$$

Es folgt ein Trägheitsmoment für den gesamten Kreisel mit den gemessenen Größen  $m_k = (512,160 \pm 0,028) \text{ g}$  und  $r_k = (2,540 \pm 0,006) \text{ cm}$  von:

$$J = J_1 + J_2 = 15 \text{ gcm}^2 + (1321,70 \pm 6,24) \text{ gcm}^2 = (1336,70 \pm 6,24) \text{ gcm}^2 \quad (10)$$

#### Bestimmen des Drehmoments

Gemessen wurde eine Länge  $l$  von  $(10,980 \pm 0,013) \text{ cm}$  durch Addition des Radius der Kugel und der Achsenlänge. In Tabelle 3 sind die gemessenen Mittelwerte der Kraft sowie das resultierende Drehmoment aufgelistet. Die Unsicherheiten der Drehmomente folgen aus der Gleichung für kombinierte Unsicherheiten (Gleichung (5)). In den Graphen

Tabelle 3: Gemessene Kraft  $F$  und daraus folgendes Drehmoment  $Fl$

	Kraft $F$	Drehoment $lF$
1.	$(0,114 \pm 0,004) \text{ N}$	$(1,252 \pm 0,044) \text{ Ncm}$
2.	$(0,172 \pm 0,004) \text{ N}$	$(1,889 \pm 0,044) \text{ Ncm}$
3.	$(0,226 \pm 0,004) \text{ N}$	$(2,481 \pm 0,044) \text{ Ncm}$

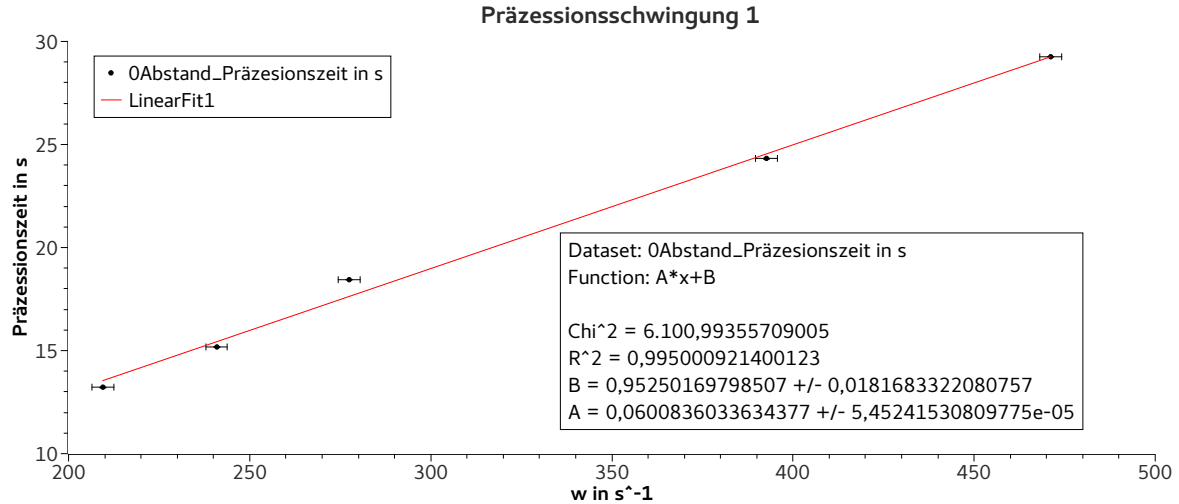


Abbildung 5: Erste Präzessionsschwingung

Abb. 5, Abb. 6 und Abb. 7 sind jeweils die Präzessionszeiten  $T_p$  gegen die Frequenz  $\omega$  des Kreisel aufgetragen. Die rote Funktion ist ein linearer Fit, jedoch betrachtet der Algorithmus lediglich die Messpunkte und nicht die Fehlerintervalle, deshalb ist es nicht praktisch die angegebenen Unsicherheiten weiter zu verwenden.

Durch Variieren der Steigung zeigte sich, dass diese um 5% abweichen kann und immer noch innerhalb der Unsicherheiten der Messpunkte liegt (bis auf vereinzelte Ausreißer). In Abb. 8 sind dann die Drehmomente aus Tabelle 3 gegen die Kehrwerte der zuvor bestimmten Steigungen aufgetragen. Die rote Funktion ist erneut ein linearer Fit. Der Theorie zu Folge sollte die Steigung  $2\pi J$  betragen. Die schwarze Funktion hat die Steigung nach der Theorie mit dem in Gleichung (10) bestimmten Trägheitsmoment. Es gilt zu beachten, dass die Steigung  $\text{cmNs}^2$  im Graphen enthalten ist und somit  $10^6 \text{ gcm}^2$  entspricht.

## 3.2 Diskussion

### 3.2.1 Maxwell'sches Fallrad

Wenn man des Abrollradius, der sich aus Messung der Dicke der Achse und des Seils ergibt, mit dem aus Messung der Falldauer in Abhängigkeit von der Fallhöhe vergleicht, stellt man fest, dass sich die Unsicherheitsintervalle wie erwartet überschneiden. Demnach kann hier die Theorie zum Fallvorgang (Gleichung (1)) als bestätigt angesehen



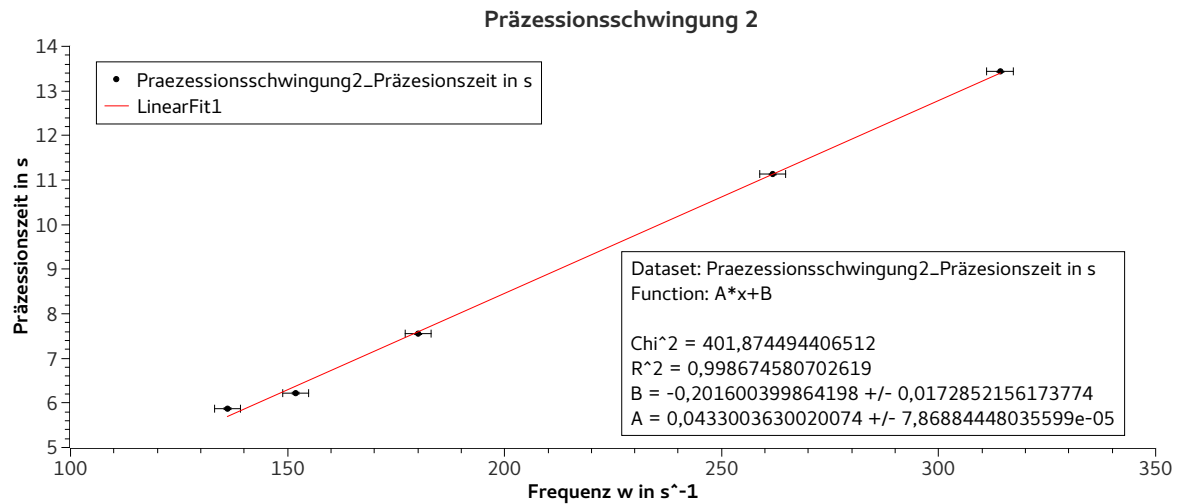


Abbildung 6: Zweite Präessionsschwingung

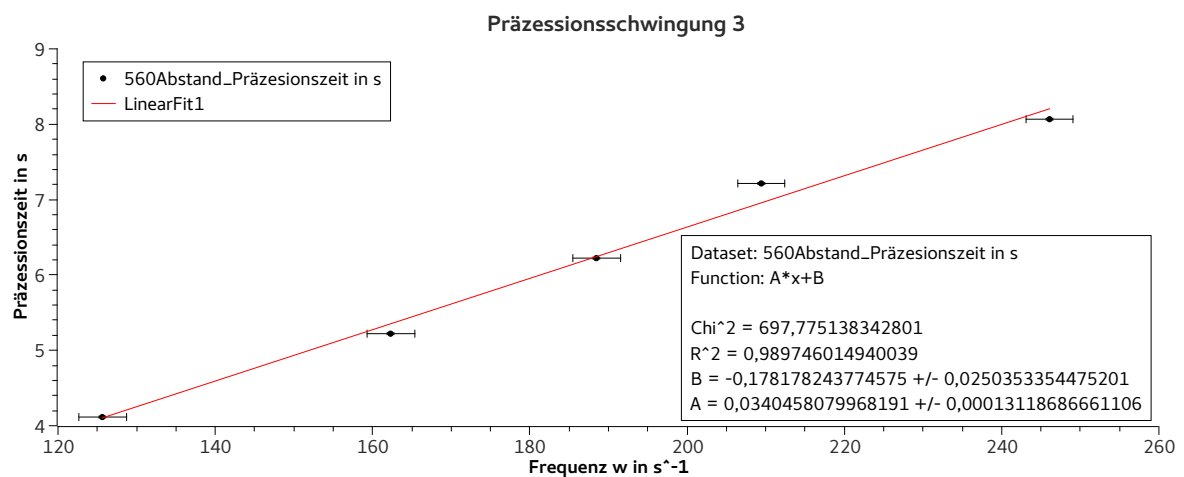


Abbildung 7: Dritte Präessionsschwingung

werden. Als mögliche Fehlerquellen, die nicht in Zahlenwerte gefasst werden konnten, sind hier die mögliche Verformung des Fallrades durch Kollision mit dem Boden bei vorherigen Benutzern sowie die Tatsache zu nennen.

### 3.2.2 Kreisel

In Abb. 8 entspricht die Steigung dem Drehmoment des Kreisels multipliziert mit  $2\pi$ . Dabei ist in Schwarz das Trägheitsmoment, das aus den Abmessungen von Kugel und der Achse mit Zusatzmasse bestimmt wurde, und in Rot Abb. 5 bis 7

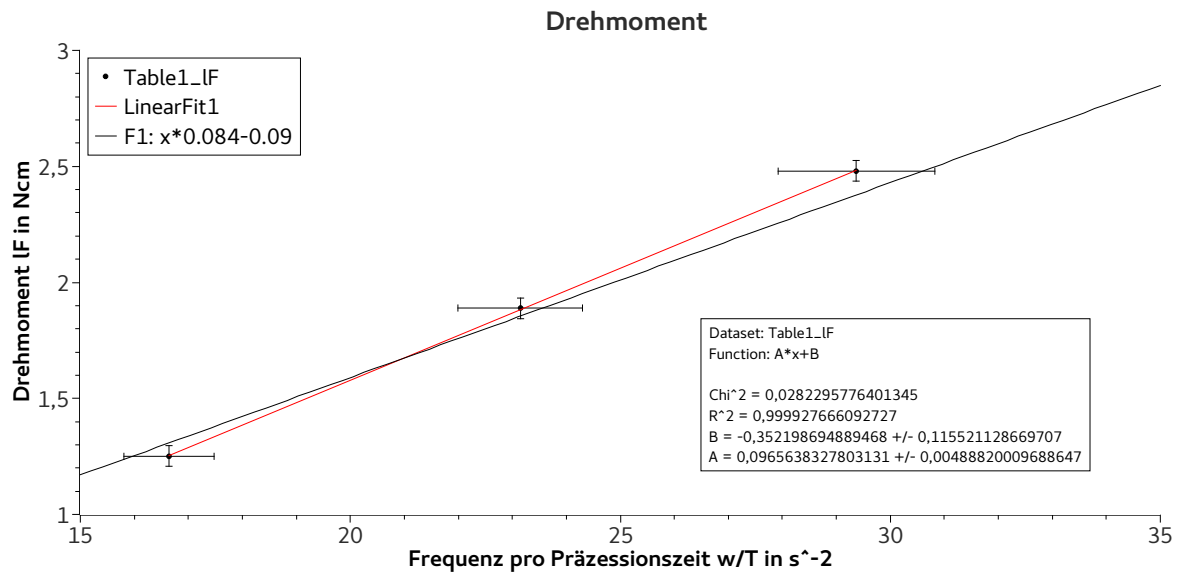


Abbildung 8: Drehmomente

Tabelle 4: Vergleich der Abrollradien berechnet einmal direkt durch Dicke der Achse und des Fadens und einmal aus Messung der Falldauer in Abhängigkeit von der Fallhöhe

aus direkter Messung	aus Messung der Falldauer
$(0,446 \pm 0,006) \text{ cm}$	$(0,457 \pm 0,006) \text{ cm}$

## 4 Schlussfolgerung

Beim Maxwell'schen Fallrad konnte die Theorie bestätigt werden, da die Berechnung des Abrollradius durch direktes Ausmessen durch Achse und Faden und durch Berechnung gemäß Gleichung (1) Werte ergaben, deren Unsicherheitsintervalle überschneiden. Interessant wäre noch eine Betrachtung des Verhaltens über mehrere Zyklen des Auf- und Abrollens, womit untersucht werden können, ob auch das postulierte Verhalten für den Aufstieg des Rades beobachtet werden kann.

## 5 Beantwortung der Aufgaben zur Vorbereitung

1.

$$0 = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2 - mgh \right) \quad (11)$$

$$= mva + \frac{J_S}{R^2}va - mgv \quad (12)$$

$$\frac{mg}{a} = m + \frac{J_S}{R^2} \quad (13)$$

$$\Rightarrow a(t) = g \frac{mR^2}{mR^2 + J_S} \quad (14)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}g \frac{mR^2}{mR^2 + J_S} t^2 + v_0 t + h_0 \quad (15)$$

2. Die Kraft mit der das abrollende Rad an der Aufhängevorrichtung zieht ergibt sich aus

$$F = ma \quad (16)$$

und beträgt folglich  $mg \frac{mR^2}{mR^2 + J_S}$ . Dass die Kraft, bzw. Beschleunigung, konstant ist, ist auch in Abbildung 2 der Einführung zum Versuch dargestellt. Der Unterschied zur Gewichtskraft des Rades besteht in dem Faktor  $\frac{mR^2}{mR^2 + J_S}$ , welcher stets kleiner als 1 ist, somit fällt das Rad langsamer als im freien Fall.

3. Die Kraft wirkt nach wie vor in die gleiche Richtung mit gleichem Betrag.