

VERSUCHSBERICHT ZU

O6 - OPTISCHE ABBILDUNGEN UND  
DIGITALE KAMERA

Gruppe 14Mo

Alexander Neuwirth (E-Mail: a\_neuw01@wwu.de)  
Leonhard Segger (E-Mail: l\_segg03@uni-muenster.de)

durchgeführt am 09.07.2018  
betreut von  
Robert Schneider

15. Juli 2018

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Kurzfassung</b>	<b>3</b>
<b>2 Methoden</b>	<b>3</b>
<b>3 Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>4</b>
3.1 Unsicherheiten . . . . .	4
3.2 Schärfentiefe des Nikkor-Objektivs . . . . .	5
3.2.1 Beobachtung und Datenanalyse . . . . .	5
3.2.2 Diskussion . . . . .	6
3.3 Auflösung des Nikkor-Objektivs . . . . .	8
3.3.1 Beobachtung und Datenanalyse . . . . .	8
3.3.2 Diskussion . . . . .	10
3.4 Auflösung einer Einzellinse . . . . .	10
3.4.1 Beobachtung und Datenanalyse . . . . .	10
3.4.2 Diskussion . . . . .	13
3.5 Auflösung der Lochblende . . . . .	14
3.5.1 Beobachtung und Datenanalyse . . . . .	14
3.5.2 Diskussion . . . . .	16
<b>4 Schlussfolgerung</b>	<b>16</b>

# 1 Kurzfassung

Es wird das Auflösungsvermögen und die Schärfentiefe einer Digitalkamera mit unterschiedlichen Objektive vor dem Sensor untersucht. Zunächst wird ein Nikkor-Objektiv betrachtet und dessen Schärfentiefe in Abhängigkeit von der Blendenzahl bestimmt. Dabei wird erwartet, dass die subjektive Schärfentiefe der theoretisch erwarteten entspricht. Dies kann nicht bestätigt werden, weshalb ein geringerer Wert für die Durchmessergrenze der Zerstreuungskreise vorgeschlagen wird, für den diese Diskrepanz zwischen Theorie und subjektiver Wahrnehmung nicht existiert. Außerdem wird die Auflösung des Objektivs untersucht, indem die Halbwertsfrequenzen der MTF-Kurve für verschiedene Blendenzahlen bestimmt werden.

Als Vergleich wird die Auflösung einer Einzellinse mit Blenden verschiedener Durchmesser ermittelt. Hierbei wird erwartet, dass sich aus dem Kehrwert der Auflösung in Liniennaaren und dem Umrechnungsfaktor von Pixeln im Bild zu Millimetern die Halbwertsfrequenz der MTF-Kurve bestimmen lässt. Dies kann nur größerenordnungsmäßig gezeigt werden, aber zumindest ein linearer Zusammenhang zwischen Halbwertsfrequenz und Kehrwert der Auflösung in Liniennaaren lässt sich zeigen.

Zuletzt wird eine Lochblende als Objektiv ausgebeinelt. Dabei wird vermutet, dass sich bei Bestimmung des Lochdurchmessers durch Extrapolation aus der benötigten Belichtungszeit ein Wert ergibt, der in der Größenordnung mit dem mit dem Auge wahrgenommenen Durchmessers übereinstimmt. Dies wird gezeigt. Die Auflösung in Liniennaaren wird auch hier bestimmt.

# 2 Methoden

Für die Versuchsdurchführung wird eine Nikon D3200 verwendet, die zunächst auf die Werkseinstellungen zurückgesetzt wird. Als erstes wird ein Nikkor 50 mm Objektiv an die Kamera angebracht und die Kamera auf den rechten, um  $45^\circ$  gekippten Teil des in Abb. 1 dargestellten Testcharts ausgerichtet. Mithilfe von digitalen Zoom wird die Mitte der Skala von  $-10\text{ cm}$  bis  $10\text{ cm}$  am Objektiv scharf gestellt. Dann werden für alle acht Blendenzahlen in ganzen Stufen von 1 bis 22 je ein Bild des Testcharts aufgenommen, um die Schärfentiefe in Abhängigkeit von der Blendenzahl bestimmen zu können. Die Belichtungszeit wählt die Kamera automatisch.

Das Objektiv wird durch eine Einzellinse mit einer Brennweite von 60 mm ersetzt. Um die Auflösung bestimmen zu können, wird für drei verschiedene Durchmesser der eingeschraubter Blende und ohne zusätzliche Blende je eine Fotografie von zwei Siemenssternen angefertigt. Einer der Siemenssterne befindet sich dabei möglichst nah an der Mitte und einer am Rand der Fotografie. Die Belichtungszeit wird dabei bei Halbierung des Blendendurchmessers vervierfacht, um die Belichtung der Bilder konstant zu halten. Das Scharfstellen erfolgt durch Drehen des Tubus der Einzellinse. Aus denselben Bildern wird anhand der schrägen Kante die MTF-Kurve und die Halbwertsfrequenz bestimmt.

Zuletzt werden Linse und Blende durch eine Lochblende mit einem deutlich kleineren Durchmesser ersetzt. Die Kamera wird deutlich näher am Testchart positioniert.

Bei allen Fotografien wird der Abstand der Kamera vom Testchart mit einem Maßband gemessen und notiert.

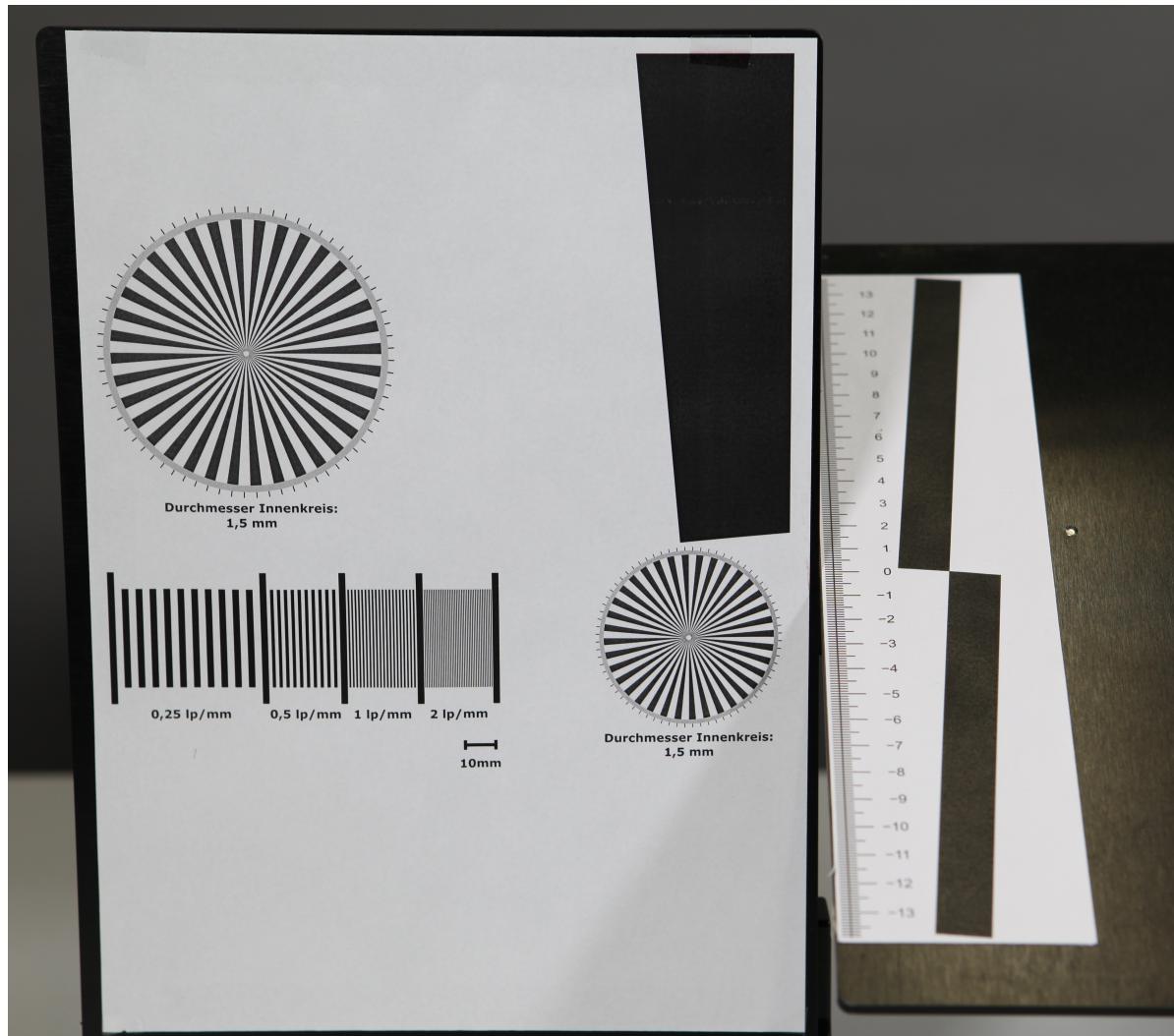


Abbildung 1: Das Testchart, das verwendet wurde, um die Eigenschaften der Kamera und Optiken zu untersuchen. Entnommen aus [1].

### 3 Ergebnisse und Diskussion

#### 3.1 Unsicherheiten

Die Unsicherheiten werden gemäß GUM ermittelt. Außerdem wird für Unsicherheitsrechnungen die Python-Bibliothek „uncertainties“ verwendet.

**Abstandmessung:** Die Messung des Abstands zwischen Kamera und Testchart wurde mit einem Maßband durchgeführt. Dafür wird die Unsicherheit mit 0,81 cm

abgeschätzt (dreieckige WDF), da die Entfernung des Schirms zum Sensor bzw. angeschraubter Optik der Kamera nicht sehr präzise gemessen werden kann

**Pixelanzahl:** Die farblichen Übergänge der Pixel sind bei einem eigentlich exakt zu erwartenden Übergang von schwarz zu weiß nicht eindeutig von schwarz zu weiß. Deshalb wird hierbei eine Unsicherheit von 3 px verwendet.

**Subjektive Schärfe:** Inwiefern ein Fehler für die Angabe eines subjektiven Werts sinnvoll ist, ist fraglich. Dennoch wird hier eine Unsicherheit von 1 cm auf der schrägen Skala angenommen, um sicherzugehen, dass immer möglichst gleich scharfe Bereiche gewählt werden.

## 3.2 Schärfentiefe des Nikkor-Objektivs

### 3.2.1 Beobachtung und Datenanalyse

#### Theoretische Berechnung

Die Schärfentiefe  $S_{\text{theo}}$  ergibt sich aus der Entfernung zwischen Nah- und Fernpunkt. Also  $S_{\text{theo}} = |d_h - d_f|$ . Mit den in der Einführung gegebenen Formeln:

$$d_n = \frac{g \cdot (d_h - f)}{(d_h - f) + (g - f)} \quad (1)$$

$$d_f = \begin{cases} \frac{g \cdot (d_h - f)}{(d_h - f) + (f - g)} & \text{wenn } g < d_h \\ \infty & \text{wenn } g \geq d_h \end{cases} \quad (2)$$

wobei  $d_h$  die hyperfokale Entfernung ist:

$$d_h = \frac{f^2}{k \cdot Z} + f \quad (3)$$

Es folgt also eine Schärfentiefe von:

$$S_{\text{theo}} = \left| \frac{2f^2 g k Z (f - g)}{f^4 - k^2 Z^2 (f - g)^2} \right| \quad (4)$$

Dabei ist  $Z$  definiert als  $D_B/1500$ .  $D_B$  ist die Bilddiagonale. Sie wurde berechnet durch die Größe eines Pixels und die Auflösung der Kamera mit 6016 x 4000 Pixeln. Eine Strecke von 2 cm wurde mit  $(474 \pm 3)$  Pixel aufgelöst, das heißt:

$$D_B = \frac{2 \text{ cm}}{(474 \pm 3) \text{ px}} \cdot \sqrt{6016 \text{ px}^2 + 4000 \text{ px}^2} = (30,5 \pm 0,2) \text{ cm} \quad (5)$$

Die Brennweite  $f$  des Objektivs beträgt 50 mm. Die Messung des Abstands zwischen Testchart und Kamera ergab  $g = (64,00 \pm 0,81)$  cm. Einsetzen der jeweiligen Blendenzahl  $k$  ergibt die Schärfentiefen in Tabelle 1.

## Subjektive Schärfentiefe

Die Skala ist in einem Winkel von  $(45 \pm 5)^\circ$  gekippt. Es ergibt sich ein Faktor  $1/\sqrt{2} \pm 0,3$  für die Umrechnung der Skala in Schärfentiefe, welche parallel zur Optischen Achse gemessen wird. Da die schräge Skala bei  $\pm 14$  cm endet, lassen sich keine Schärfentiefen größer als 20 cm messen. In Tabelle 1 sind die subjektiven Schärfentiefen in Abhängigkeit von der Blendenzahl  $k$  aufgelistet.

Tabelle 1: Die nach Gleichung (4) berechneten Schärfentiefen  $S_{\text{theo}}$  sowie die subjektiven Schärfentiefen  $S_{\text{subj}}$  zu zugehöriger Blendenzahl  $k$ .

$k$	$S_{\text{theo}}$	$S_{\text{subj}}$
1,8	$(11,1 \pm 0,3)$ cm	$(4,2 \pm 0,8)$ cm
2,8	$(17,5 \pm 0,5)$ cm	$(6,4 \pm 0,9)$ cm
4	$(25,5 \pm 0,7)$ cm	$(9,2 \pm 1,1)$ cm
5,6	$(37,7 \pm 1,1)$ cm	$(16,3 \pm 1,6)$ cm
8	$(57,6 \pm 1,9)$ cm	$\geq 20$ cm
11	$(93,6 \pm 3,6)$ cm	$\geq 20$ cm
16	$(239,4 \pm 16,8)$ cm	$\geq 20$ cm
22	$(1180,0 \pm 318,1)$ cm	$\geq 20$ cm

### 3.2.2 Diskussion

Die subjektive Schärfentiefe ist wie in Tabelle 1 deutlich erkennbar geringer als die theoretische Schärfentiefe. Der Grund dafür ist vermutlich eine andere Definitionsgrenze zwischen einem scharfen und einem unscharfen Bereich zwischen subjektiver Einschätzung und theoretisch bestimmtem Wert. Um dies zu prüfen sind in Abb. 2 die gemessenen subjektiven Schärfentiefen und der theoretische Verlauf mit einer strengeren Definition der Schärfe dargestellt. Der Wert  $Z$  gibt die Durchmessergrenze der Zerstreuungskreise an. In der Einführung wurde ein Wert von  $Z = D_B/1500$  vorgeschlagen, jedoch zeigt sich in Abb. 2, dass ein  $Z = D_B/3500$  näher an der subjektiven Schärfentiefe liegt.

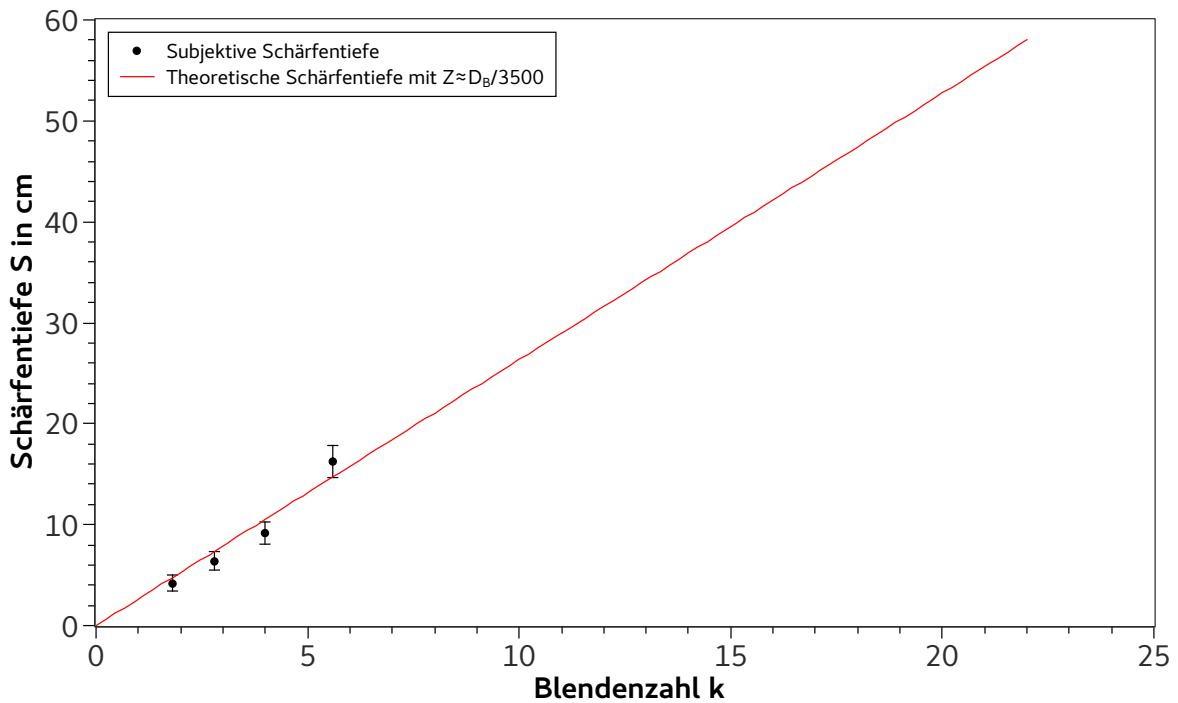


Abbildung 2: Die schwarzen Messpunkte sind die subjektiven Schärfentiefen, die noch mit der begrenzten Länge des Testcharts messbar waren. Die rote Funktion ist die theoretische Schärfentiefe nach Gleichung (4) mit entsprechenden Parametern. Die einzige Änderung, die durchgeführt wurde, ist die Skalierung der Durchmessergrenze  $Z$  der Zerstreuungskreise mit einem Faktor von ca.  $3/7$ .

Außergewöhnlich ist die hohe theoretische Schärfentiefe bei  $k = 22$  in Tabelle 1. Der gesamte Verlauf der theoretischen Schärfentiefen ist in Abb. 3 abgebildet. Es ist auffällig, dass die Schärfentiefe bei  $k \approx 21$  sehr hohe Werte annimmt. Grund hierfür ist, dass der bei dieser Blendenzahl  $d_h \approx g \approx 64$  cm ist. Die Definition des Fernpunkts Gleichung (2) sagt, dass dieser bei  $g \geq d_h \Rightarrow d_f = \infty$ . Daraus wiederum folgt nach  $S = |d_h - d_f|$  eine sehr hohe Schärfentiefe.

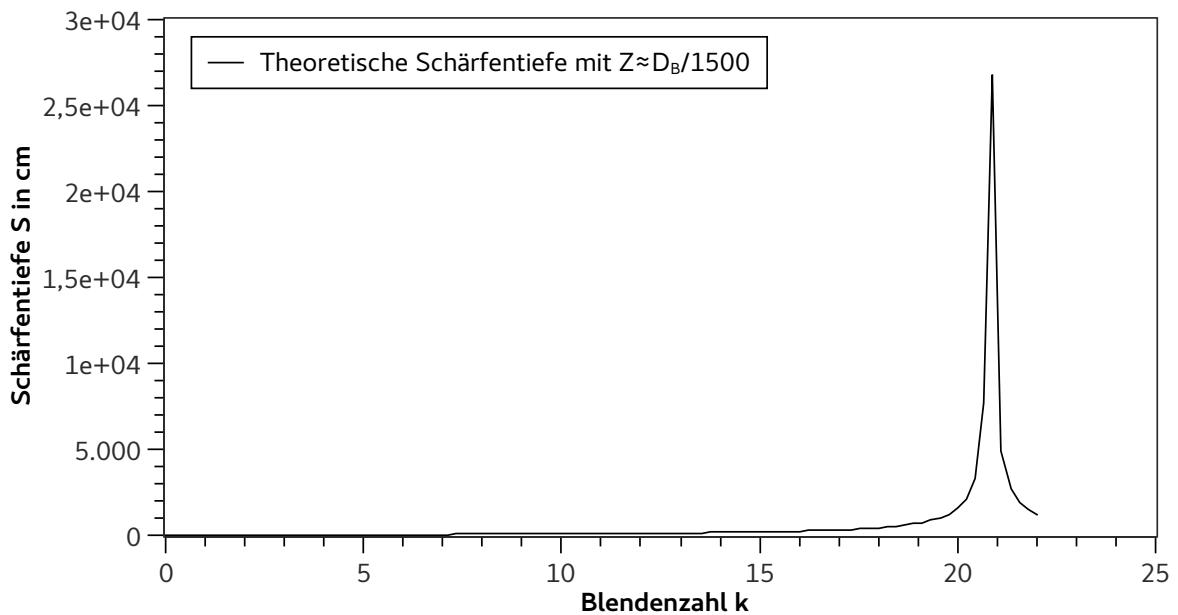


Abbildung 3: Die rote Funktion ist theoretische Schärfentiefe nach Gleichung (4) mit entsprechenden Parametern. Die Schärfentiefe  $S_{\text{theo}}$  divergiert gegen hohe Werte bei  $k \approx 21$ . Dies entspricht dem Fall  $g \approx d_h$ , sodass  $d_f$  divergiert.

### 3.3 Auflösung des Nikkor-Objektivs

#### 3.3.1 Beobachtung und Datenanalyse

Beim Fotografieren war das Testchart ( $107,00 \pm 0,81$ ) cm von der Kamera entfernt und orthogonal ausgerichtet. Die MTF-Kurven, die sich mit dem ImageJ-Plugin berechnen lassen, sind in Abb. 4 dargestellt. Es wird für alle Kurven ein Oversampling von 1 verwendet. Die resultierenden Halbwertsfrequenzen sind in Abb. 5 gegen die Blendenzahl aufgetragen.

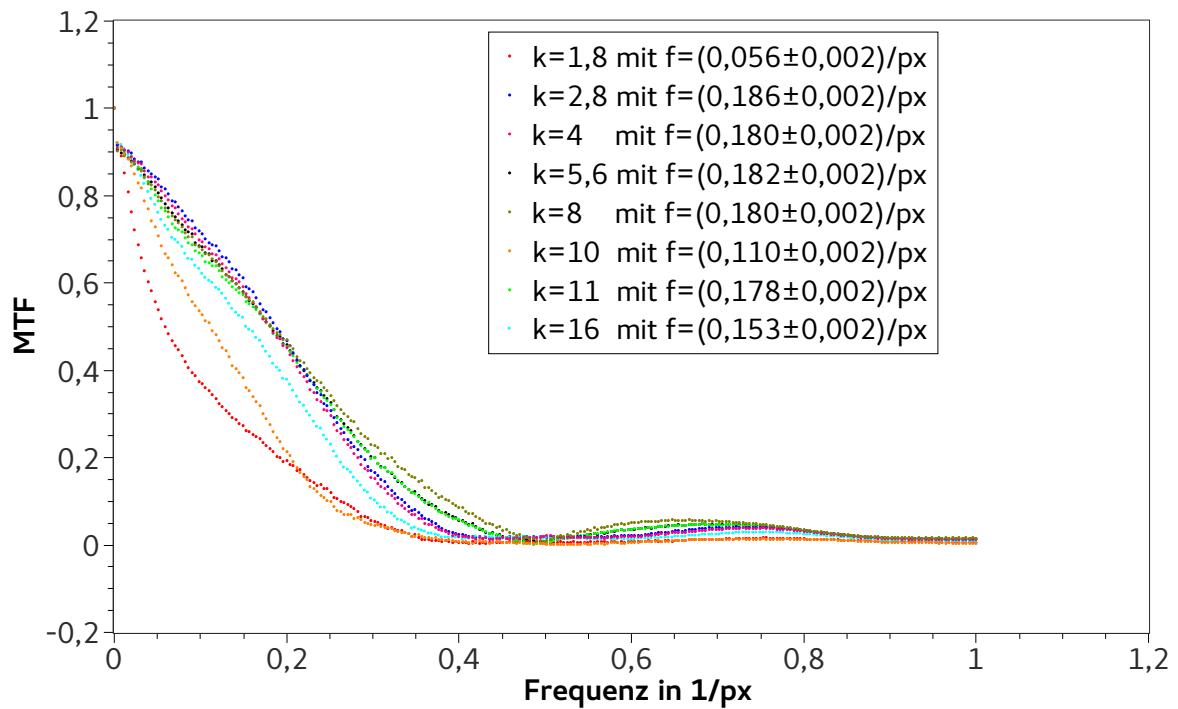


Abbildung 4: MTF-Kurven der untersuchte Blendenzahlen  $k$ , die durch das ImageJ-Plugin „Praktikum Slanted Edge MTF“ berechnet werden. Zur jeweiligen Funktion ist die Halbwertsfrequenz  $f$  angegeben.

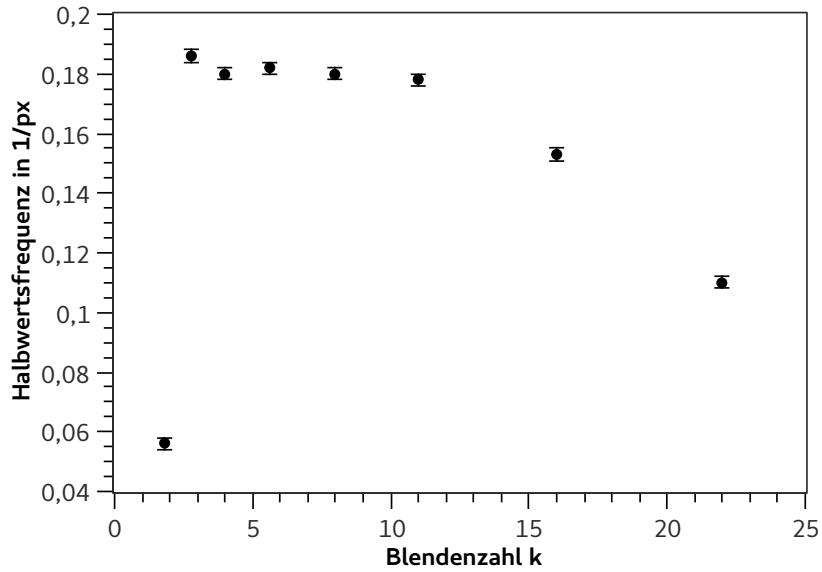


Abbildung 5: Die Halbwertsfrequenz der MTFs aus Abb. 4 ist gegen die Blendenzahl aufgetragen.

### 3.3.2 Diskussion

Die beste Auflösung erhält man bei maximaler Halbwertsfrequenz, da scharfe Kanten nur durch hohe Frequenzen dargestellt werden können. Ist die Halbwertsfrequenz gering, ist der Übergang ungenauer und „verschwommen“. Folglich ist nach Abb. 5 die Auflösung des 107 cm entfernten Testcharts am besten bei einer Blendenzahl  $k$  von 2,8 bis 8.

## 3.4 Auflösung einer Einzellinse

### 3.4.1 Beobachtung und Datenanalyse

Zunächst wird das Bild um den Faktor vier hochskaliert, um Interpolationsungenauigkeiten bei der Erstellung der Linienprofile zu vermeiden. Dann wird jeweils eine Achse durch zwei gegenüberliegende schwarze und zwei gegenüberliegende weiße Bereiche des Siemenssterns gezogen und ein Linienprofil der Grauwerte erstellt. Die beiden Profile werden übereinander gelegt, sodass die Grauwerte am grauen Rand des Siemenssterns und die Maxima in der weißen Mitte übereinander liegen. Als Beispiel ist eine Überlagerung dieser Profile in Abb. 6 dargestellt. Dann wird, um den Durchmesser der grauen Fläche in der Mitte der Aufnahme des Siemenssterns in Pixeln zu bestimmen, der Schnittpunkt der beiden Graphen, ab dem die Profile näherungsweise gleich verlaufen, auf beiden Seiten der Mitte abgelesen. Dies erlaubt die Umrechnung des Durchmessers der grauen Fläche von Pixeln in Meter, da bekannt ist, dass der weiße Innenkreis einen Durchmesser von 1,5 mm hat. Diese Angabe sowie die Durchmesser der Blenden werden als exakt angenommen. Die Unsicherheit beim richtigen Überlagern der Kurven und Ab-

lesen der Schnittpunkte wird mit 30 px abgeschätzt. Für die Differenz der Schnittpunkte ergibt sich somit gemäß GUM  $u(d) = 43$  px. Da bei manchen Blendendurchmessern aufgrund der hohen Asymmetrie das Ablesen der Schnittpunkte nicht eindeutig war, wurde dort der doppelte Fehler verwendet. Die Breite der Mitte ist meistens deutlich eindeutiger ablesbar, weshalb hier eine Unsicherheit von 13 px aufgrund der geringen Schwankung des eigentlich als konstant erwarteten Wertes (bei konstantem Abstand der Kamera vom Schirm) angenommen wird.

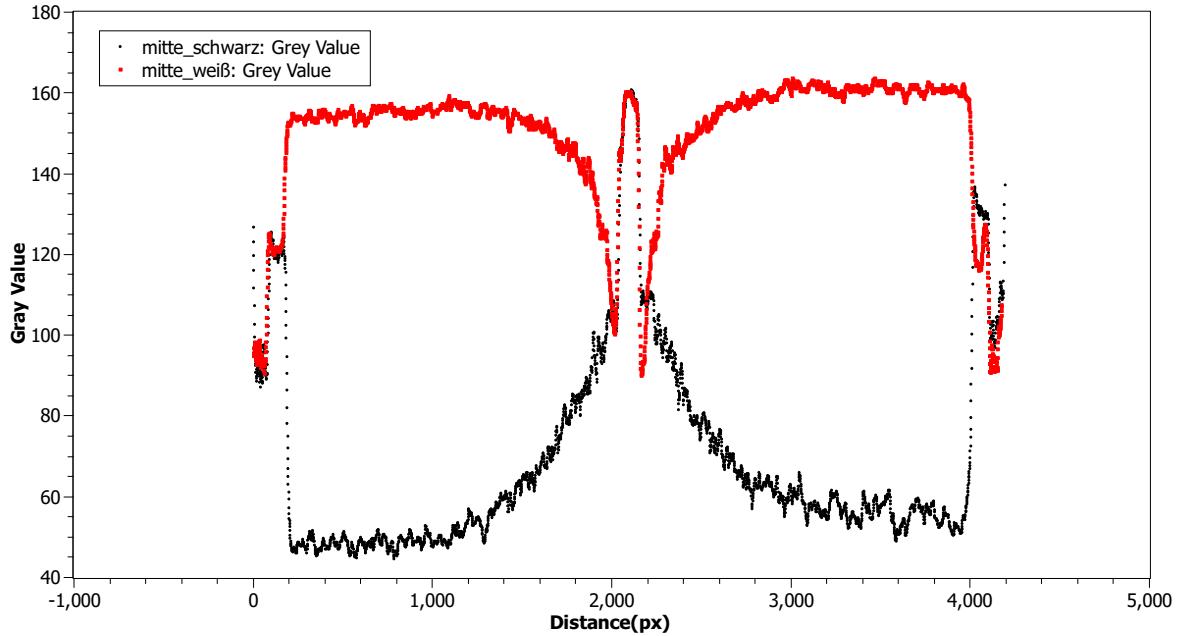


Abbildung 6: Überlagerung der Linioprofile von schwarzem zu schwarzem bzw. weißem zu weißem Bereich des Siemenssterns. Abgelesen werden der Abstand der Schnittpunkte der Profile in der Mitte sowie die Breite des Maximums in der Mitte.

Die Umrechnung der Breite  $d$  der grauen Fläche in mm erfolgt gemäß:

$$d = \frac{1,5 \text{ mm} \cdot b}{m} \quad (6)$$

Dabei ist  $b$  die Breite  $d$  in Pixeln und  $m$  die Breite des weißen, 1,5 mm breiten Bereichs in der Mitte. Dass das Bild mit dem Faktor 4 hochskaliert wurde spielt hier keine Rolle, da dieser Faktor sowohl in  $m$  als auch in  $b$  einfließt und durch den Bruch wegfällt. Die Unsicherheit ergibt sich gemäß:

$$u(d) = \sqrt{\left( \frac{1,5 \text{ mm} \cdot b \cdot u(m)}{m^2} \right)^2 + \left( \frac{1,5 \text{ mm} \cdot u(b)}{m} \right)^2} \quad (7)$$

Für die Auflösung in Linienpaaren  $l$  gilt

$$l = \frac{\pi d}{n} \quad (8)$$

mit der Unsicherheit

$$u(l) = \left| \frac{\pi u(d)}{n} \right|. \quad (9)$$

Das Ergebnis aus dieser Rechnung für den Siemensstern am Rand der Fotografie ist in Abb. 7 dargestellt.

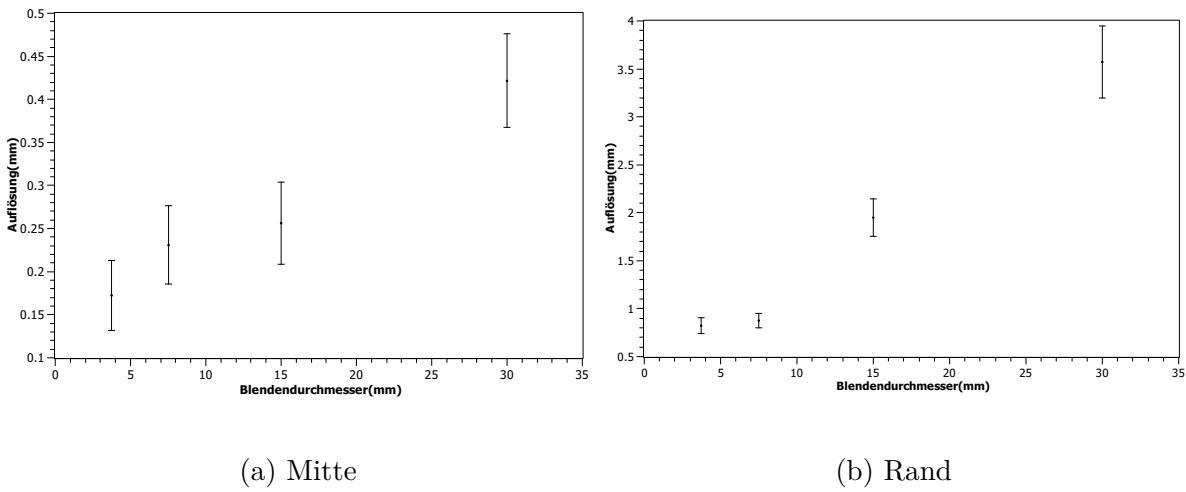


Abbildung 7: Auflösung in Liniennaaren der Kamera mit Einzellinse bei verschiedenen Blendendurchmessern am Rand und in der Mitte der Fotografie.

Zusätzlich wird für die vier Bilder des Testcharts mit unterschiedlichen Blendendurchmessern die MTF-Kurve mit dem ImageJ-Plugin berechnet und die Halbwertsfrequenz abgelesen. Das Ergebnis ist in Abb. 8 abgebildet.

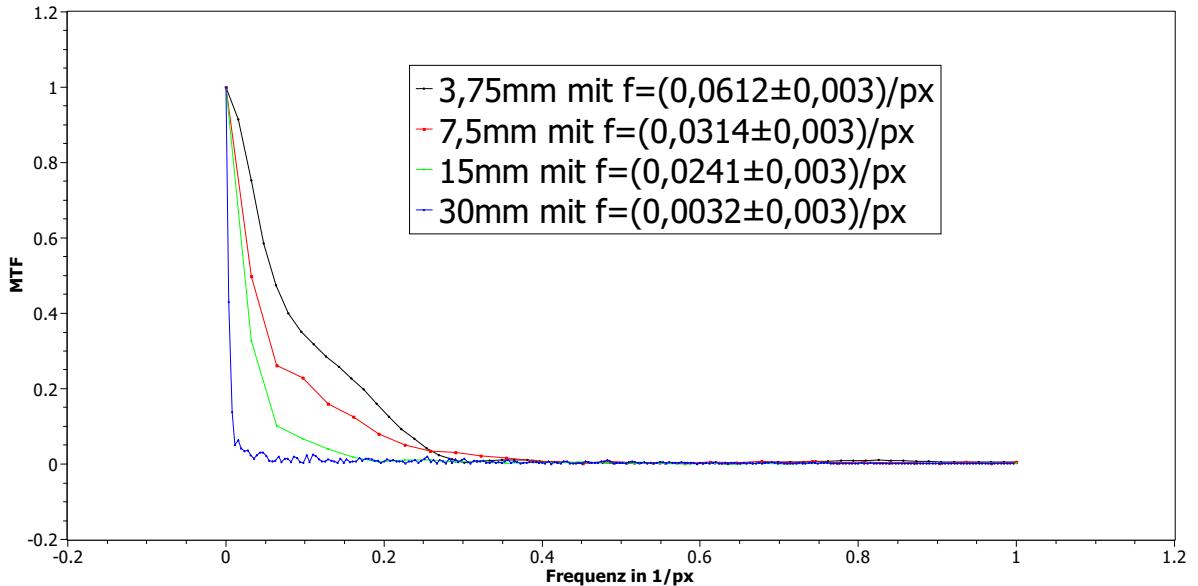


Abbildung 8: MTF-Kurven der Einzellinse bei unterschiedlichen Blendendurchmessern, die durch das ImageJ-Plugin „Praktikum Slanted Edge MTF“ berechnet wurden. Die Messpunkte sind durch Linien verbunden, um die Interpolation zu erleichtern. Zur jeweiligen Funktion ist die Halbwertsfrequenz  $f$  angegeben.

### 3.4.2 Diskussion

Es fällt auf, dass die Profile nicht immer, wie zu erwarten war, achsensymmetrisch zur Mitte sind. Dies lässt sich auf Linsenfehler zurückführen, die dazu führen, dass achsenferne Strahlen nicht gleich abgebildet werden wie achsennahe. Dies lässt sich dadurch bestätigen, dass dies bei den Linienprofilen des Siemenssterns am Rande der Fotografie deutlich stärker auffällt als bei dem nahe der Mitte, was auch durch die im Allgemeinen geringere Auflösung durch den Siemensstern am Rand unterstützt wird.

In Abb. 9 ist die Halbwertsfrequenz aus den MTF-Kurven gegen den Kehrwert der Auflösung in Linienpaaren aufgetragen, wobei sich aus jedem Blendendurchmesser ein Punkt ergibt. Dabei wird nur der Siemensstern nahe der Mitte des Bildes verwendet. Zu erwarten ist hier ein linearer Zusammenhang, wobei die Steigung des Graphen dem Umrechenfaktor von Pixel zu Millimeter entsprechen sollte, der gemäß der Bestimmung des Durchmessers des Mittelpunkts der Siemenssterne etwa

$$\frac{1,5 \text{ mm}}{142 \text{ px}} \approx 0,011 \text{ mm/px}$$

beträgt. Um dies zu überprüfen wurde ein linearer Fit durchgeführt. Dieser ergibt für die Steigung einen Faktor von  $(0,017 \pm 0,002) \text{ mm}$ . Die Vermutung, dass sich aus dem Kehrwert der Auflösung mit dem Umrechnungsfaktor von Pixeln zu Millimeter die Halbwertsfrequenz der MTF-Kurve bestimmen lässt, kann also nur großenordnungsmäßig

bestätigt werden. Der lineare Zusammenhang lässt sich jedoch sehr eindeutig erkennen.

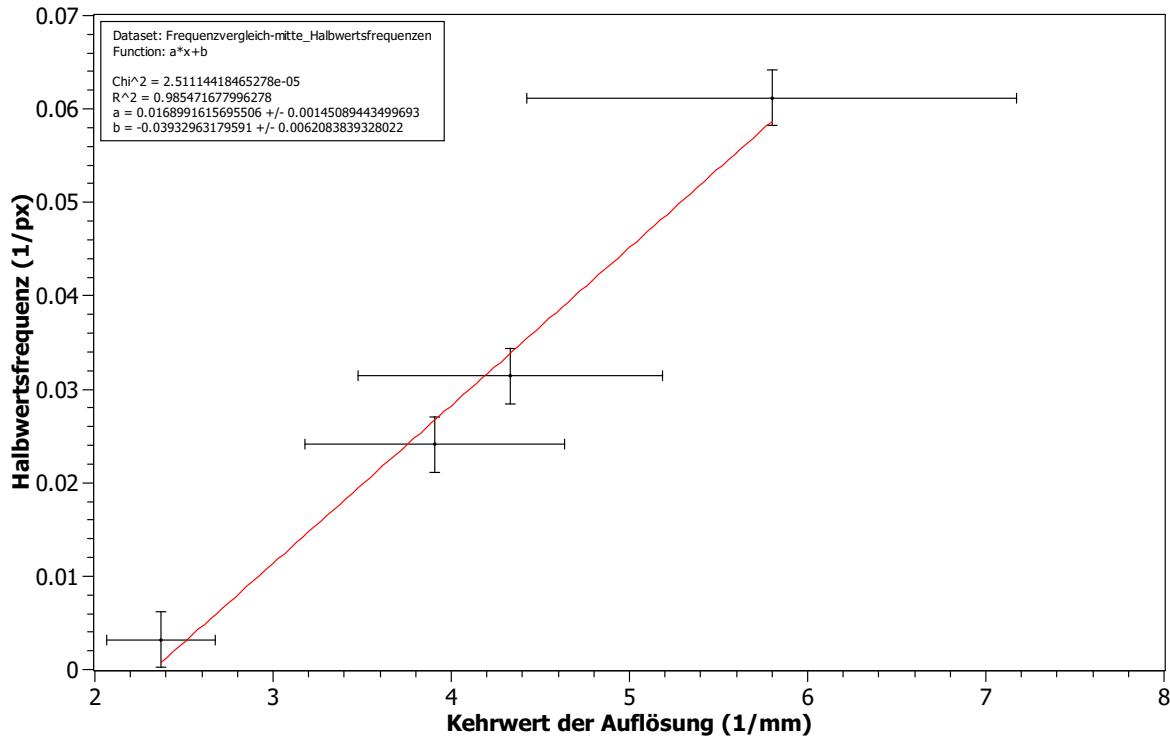


Abbildung 9: Es ist die Halbwertsfrequenz gegen den Kehrwert der Auflösung in Linienepaaren  $l$  bei gleichem Blendendurchmesser aufgetragen. Es wurde ein linearer Fit durchgeführt, der in rot dargestellt ist.

### 3.5 Auflösung der Lochblende

#### 3.5.1 Beobachtung und Datenanalyse

Analog zur Einzellinse werden die Linienprofile des Siemenssterns erstellt und in Abb. 10 dargestellt.

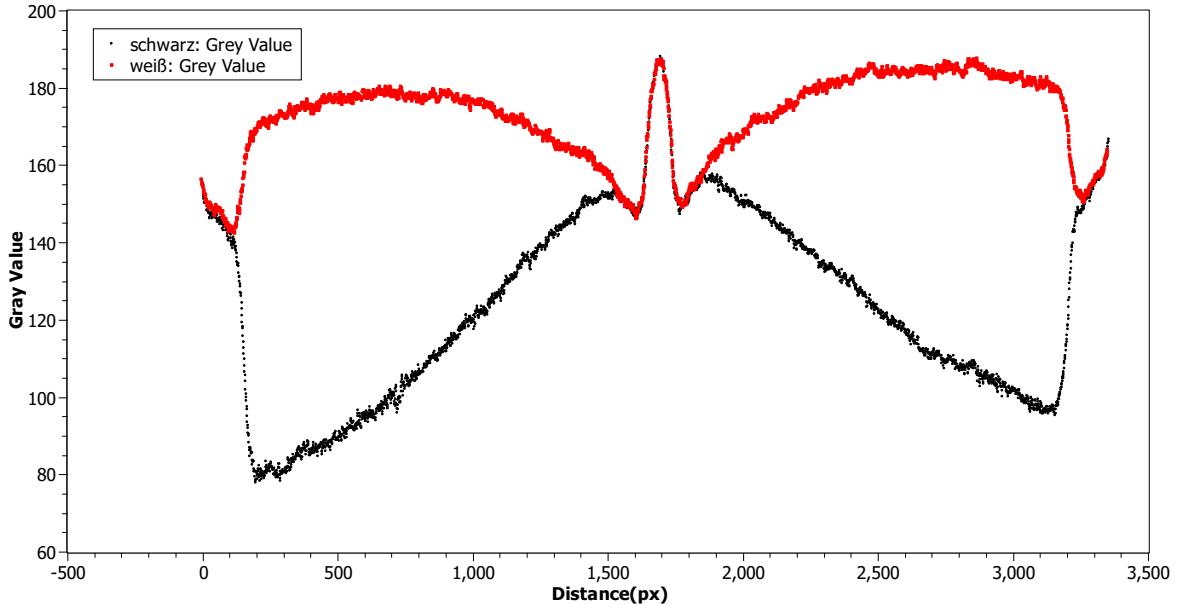


Abbildung 10: Überlagerung der Linienprofile von schwarzem zu schwarzem bzw. weißem zu weißem Bereich des Siemenssterns bei Fotografie durch Lochblende. Hier ist als Beispiel das Profil bei einer Blende mit einem Durchmesser von 3,75 mm für den Siemensstern nahe der Mitte des Fotos dargestellt. Abgelesen werden der Abstand der Schnittpunkte der Profile in der Mitte sowie die Breite des Maximums in der Mitte.

Durch analoge Berechnungen wie oben ergibt sich für die Auflösung in Linienpaaren  $l = (0,28 \pm 0,05)$  mm.

### Größe der Blendenöffnung

Die Belichtung beim Fotografieren ergibt sich aus der Blendenöffnungsfläche und der Belichtungszeit:

$$B = A \cdot t_B = \frac{\pi d^2}{4} \cdot t_B \quad (10)$$

Um die Belichtung für verschiedene Blenden konstant zu halten muss die Belichtungszeit vervierfacht werden, wenn sich der Blendendurchmesser halbiert. In Abschnitt 3.4 wurden für jede Linse eine Belichtung von  $4,42 \text{ mm}^2/\text{s}$  gewählt. Da das Bild der der Lochblende ähnlich belichtet ist wie die der Einzellinsen, kann von einer gleichen Belichtung ausgegangen werden. Lässt man sich von ImageJ Grau-Weiß-Histogramme ausgeben, zeigt sich jedoch eine Abweichung in dem Grauton der reinen weißen Flächen. Da dies durch den geänderten Abstand zum Testchart verursacht wird, kann nicht von der gleichen Belichtung ausgegangen werden und diese muss mit einem Fehler abgeschätzt werden. Außerdem variiert der Mittelwert des Histogramms je nach gewähltem (möglichst großem) weißen Segment des Bilds durch die ungleichmäßige Beleuchtung der Lampe zwischen 120 und 170 (0=schwarz, 255=weiß).

Deshalb wird die Belichtung  $B$  mit  $(4 \pm 2) \text{ mm}^2/\text{s}$  abgeschätzt und es folgt mit einer Belichtungszeit von  $t_B = 6 \text{ s}$ :

$$d = \sqrt{\frac{4B}{\pi t_B}} = (0,9 \pm 0,3) \text{ mm} \quad (11)$$

$$u(d) = \sqrt{\frac{1}{\pi t_B B}} u(B) \quad (12)$$

### 3.5.2 Diskussion

Das Abschätzen des Durchmessers der Lochblende mit dem Auge ergibt einen Wert in der Größenordnung von einem Millimeter. Dies deckt sich erwartungsgemäß mit dem experimentellen Befund von  $(0,9 \pm 0,3) \text{ mm}$ .

Weiterhin lässt sich sagen, dass die Lochblende eine schlechtere Auflösung ergibt als die Einzellinse bei Blendendurchmessern, die kleiner oder gleich 15 mm sind. Dies entspricht der Erwartung.

## 4 Schlussfolgerung

### Literatur

- [1] WWU Münster. *O6 - Optische Abbildungen und digitale Kamera*. URL: <https://sso.uni-muenster.de/LearnWeb/learnweb2/course/view.php?id=28561&section=24> (besucht am 14.07.2018).