

# VERSUCHSBERICHT ZU

## V06 - $\beta$ -ZERFALL

Gruppe BA-C-04

Alexander Neuwirth (E-Mail: a\_neuw01@wwu.de)  
Leonhard Segger (E-Mail: l\_segg03@uni-muenster.de)

durchgeführt am 29.04.2019

betreut von  
Lucia Anna Husová

2. Februar 2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurzfassung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Beta-Zerfall . . . . .	4
2.2	Elektroneneinfang . . . . .	4
2.3	Tröpfchen-Modell . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Methoden</b>	<b>5</b>
3.1	$\beta$ -Spektrometer . . . . .	5
3.2	Messung des Spektrums . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>7</b>
4.1	Beobachtung und Datenanalyse . . . . .	7
4.1.1	Unsicherheiten . . . . .	7
4.1.2	Untergrund . . . . .	7
4.1.3	Kalibration des Spektrometers . . . . .	8
4.1.4	Kurie-Plot . . . . .	10
4.2	Diskussion . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Schlussfolgerung</b>	<b>12</b>

# 1 Kurzfassung

Es wird ein Toroid-Spektrometer verwendet, um das Energiespektrum des ausgesandten Elektrons beim  $\beta$ -Zerfall von  $^{137}\text{Cs}$  zu bestimmen. Mit Hilfe dieses Spektrums wird durch einen Kurie-Plot die Grenzenenergie des Übergangs in den angeregten Zustand des entstehenden  $^{137}\text{Ba}$  bestimmt. Dazu wird das Spektrum zunächst um den Hintergrund korrigiert. Die Bestimmung der Übergangsenergie ist insofern erfolgreich, als dass das Ergebnis von  $(538 \pm 10) \text{ keV}$  um weniger als 10 % und um weniger als die dreifache Standardunsicherheit vom Literaturwert abweicht. Die Abweichung wird diskutiert und Methoden zur genaueren Bestimmung nahegelegt. Außerdem wird die Impulsauflösung des Spektrometers bestimmt.

# 2 Theorie

Die untersuchte Quelle enthält  $^{137}\text{Cs}$ . Dessen Zerfallsschema ist in Abb. 1 dargestellt. Man sieht, dass es jeweils über  $\beta^-$ -Zerfall mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95 % zu einem angeregten Zustand von  $^{137}\text{Ba}$  und ansonsten direkt in den Grundzustand zerfällt.

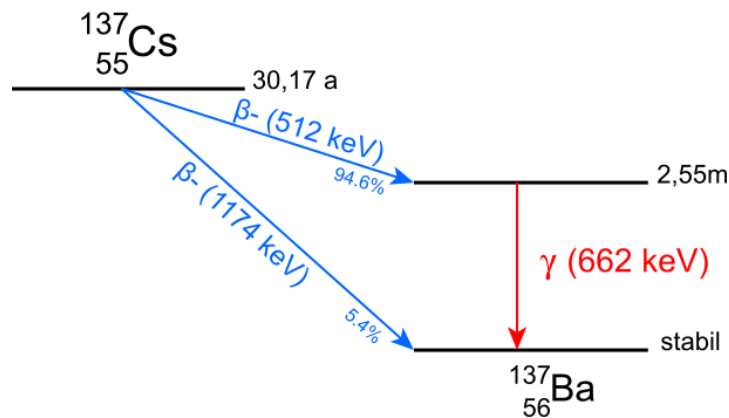


Abbildung 1: Zerfallsschema von  $^{137}\text{Cs}$ . Es gibt außer den zwei aufgeführten Endzuständen auch noch einen weniger angeregten zwischen dem Grundzustand und dem 95 %-igem Endzustand. Dieser tritt jedoch nur mit einer vernachlässigbaren Wahrscheinlichkeit von 0,0006 % auf. [1]

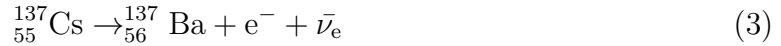
Beim  $\beta$ -Zerfall trennt man in:

$$\beta^- : {}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^A_{Z+1}\text{Y} + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1)$$

$$\beta^+ : {}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{Y} + e^+ + \nu_e \quad (2)$$

## 2.1 Beta-Zerfall

Beim  $\beta^-$ -Zerfall ergibt sich daraus die folgende Kernreaktion:



Da im Impulserhaltungssatz hier die Impulse von drei Teilchen eine Rolle spielen, nimmt das Elektron nach dem Zerfall keine diskrete Energie (wie der Heliumkern beim  $\alpha$ -Zerfall) an, sondern ergibt ein kontinuierliches Spektrum.

Um trotzdem die Übergangsenergie des Zerfalls messen zu können, muss das hochenergetische Ende des Spektrums extrapoliert werden, da hier die gesamte Übergangsenergie in Ruheenergie und kinetische Energie des Elektrons übergeht. Die Ruheenergie des Neutrinos muss hierbei vernachlässigt werden. Dies ist aber nach aktuellem Forschungsstand innerhalb der Messunsicherheiten problemlos möglich. Mit der Übergangsenergie  $E_0$  ist im Folgenden aber nur die kinetische Energie des Elektrons gemeint, sodass hier seine Ruheenergie nicht miteinbezogen werden muss.

## 2.2 Elektroneneinfang

Beim Elektroneneinfang findet aufgrund der Überlagerung der Wellenfunktionen von Hüllenelektronen und Kern im Kern die folgende Umwandlung statt:



Insofern ist der Elektroneneinfang unwahrscheinlicher als der Beta-Zerfall, da der Überlapp der Wellenfunktionen im Allgemeinen gering ist. Andererseits stellt er aber weniger strikte Anforderungen an die Zerfallsenergie.

## 2.3 Tröpfchen-Modell

Im Tröpfchenmodell werden die Protonen und Neutronen, die einen Kern bilden wie Atome oder Moleküle, die einen Flüssigkeitstropfen bilden, betrachtet. Dabei entspricht die Kernkraft dann den Kräften zwischen den Atomen/Molekülen, die den Tropfen zusammenhalten. Dieses Modell erlaubt es, die Bindungsenergien von Atomkernen vorherzusagen und erklärt, warum schwere Kerne instabil werden. Die sich aus dem Tröpfchenmodell ergebende Formel wird „Bethe-Weizsäcker-Formel“ genannt:

$$E_{\text{Bindung}} = a_V \cdot A - a_O \cdot A^{\frac{2}{3}} - a_C \cdot Z \cdot (Z-1) \cdot A^{-\frac{1}{3}} - a_S \cdot \frac{(N-Z)^2}{4A} + \begin{cases} a_P A^{-\frac{1}{2}}, & \text{gg} \\ 0, & \text{ug/gu} \\ -a_P A^{-\frac{1}{2}}, & \text{uu} \end{cases} \quad (5)$$

Dabei steht u und g für eine ungerade bzw. gerade Anzahl von Protonen bzw. Neutronen.  $a_P$ ,  $a_O$ ,  $a_C$ ,  $a_S$  und  $a_P$  sind Parameter, die experimentell bestimmt werden müssen und  $A$  die Nukleonenzahl und  $Z$  die Ladungszahl. Die Formel ergibt sich aus den möglichen bindenden und abstoßenden Kräften im Kern, wie in Abb. 2 dargestellt ist. Das

Modell reicht aber nicht aus, um für alle Isotope korrekt vorherzusagen, ob sie stabil sind. Dennoch sieht man an dem Symmetrieterm  $a_S$ , dass  $\beta$ -Zerfälle stattfinden wenn der Kern sich dadurch  $N = Z$  anzunähern.

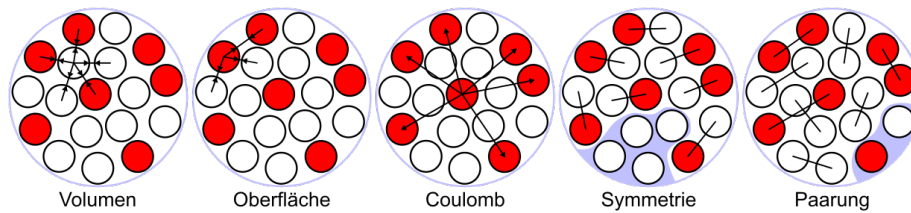


Abbildung 2: Die für die Bethe-Weizsäcker-Formel verwendeten bindenden bzw. bindungsschwächenden Effekte. Der Volumenterm meint die Anziehung zwischen Nukleonen durch die starke Kernkraft, die die Bindungsenergie erhöht. Manche Protonen/Neutronen liegen jedoch an der Oberfläche und haben weniger Bindungspartner, weshalb der Oberflächenterm abgezogen wird. Gleichzeitig existiert eine Coulombabstoßung der Protonen, die die Bindungsenergie verringert. Der Symmetrieterm verringert die Bindungsenergie in Abhängigkeit von der Differenz der Protonen- und Neutronenzahl. Der Paarungsterm verringert die Bindungsenergie, wenn Protonen/Neutronen vorliegen, die mit keinem anderen Proton/Neutron ein Paar bilden können, da die jeweilige Zahl ungerade ist oder erhöht die Bindungsenergie, wenn sie gerade ist. Grund hierfür ist die Kopplung der Isospins (Fermi-Potenzialtopfmodell). [2]

## 3 Methoden

### 3.1 $\beta$ -Spektrometer

Das Halbkreispektrometer nutzt die Tatsache, dass geladene Teilchen im magnetischen Feld eine Kreisflugbahn mit Radius in Abhängigkeit von der kinetischen Energie des Teilchens vollführen. Im verwendeten Spektrometer wird dabei der Radius für verschiedene Energien konstant gehalten, indem das Magnetfeld verändert wird. Um auch die Variation des Radius berücksichtigen zu können und vergleichbare Ergebnisse zu erzielen, wird häufig und auch im Folgenden die Auftragung gegen das Produkt aus Magnetfeld  $B$  und Radius  $\rho = \frac{P}{eB}$  gewählt. Wegen der festen Detektorposition kann immer nur ein ausgewähltes Energiefenster gemessen werden. Hierbei tritt der Effekt auf, dass die Teilchen (hier Elektronen) in den Detektor durch den Eintrittsspalt nicht als paralleler Strahl eintreten. Dies führt zu Elektronen gleichem betragsmäßigen Impulses, aber unterschiedlicher Impulsrichtung, die alle das Messfenster (vgl. Abb. 3) erreichen. Nach Zurücklegen eines Halbkreises ist die hieraus resultierende Strahlbreite  $\Delta X$  minimal, weshalb durch diesen Aufbau eine Fokussierung in der Impulsrichtung erreicht wird, wodurch mehr Elektronen nachgewiesen werden können.

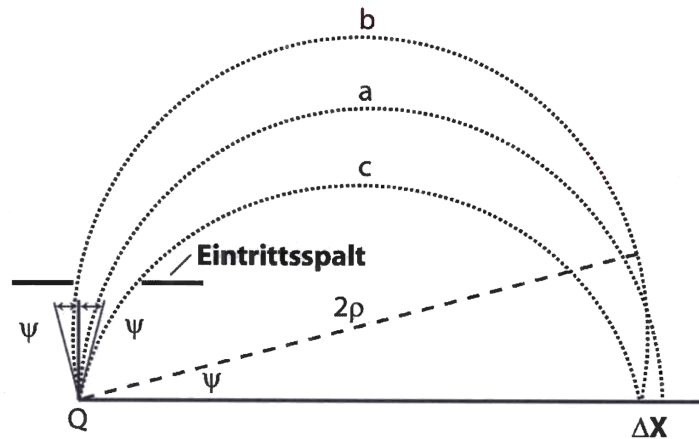


Abbildung 3: Fokussierungsprinzip eines Halbkreispektrometers. [3]

Eine zusätzliche Fokussierung kann erreicht werden, indem ein radialsymmetrisches Feld verwendet wird, welches mit  $1/r$  abnimmt. Dies sorgt für eine Fokussierung in beide Streurichtungen der eintretenden Elektronen. Der Detektor ist dementsprechend keilförmig geformt.

Für die Erzeugung des Magnetfelds wird eine Spule verwendet. Hier ist aufgrund der Restmagnetisierung eines ferromagnetischen Materials eine Hysteresekurve anstelle eines gleichmäßigen linearen Zusammenhangs zwischen Strom und Magnetfeld zu erwarten. Gemäß [3] kann der Zusammenhang innerhalb des Messbereiches jedoch als linear angenommen werden. Es wird aber immer bei hohen Spannungen angefangen zu messen, da dann immer der gleiche Hysteresepfad gewählt wird.

Die Elektronen werden mit einem Szintillator in Verbindung mit einem Photomultiplier detektiert. Das Signal wird nach dem Vorverstärker in den Hauptverstärker geleitet und dann über den gewählten Messzeitraum akkumuliert und digitalisiert.

## 3.2 Messung des Spektrums

Für die Messung wird das Spektrometer mit einer Vakuumpumpe evakuiert. Zunächst wird das Spektrum in Schritten von  $\frac{1V}{9}$  60 min lang gemessen. Mithilfe dieser Messung wird dann das Spektrum in mehrere Teile eingeteilt. Dabei werden den Bereichen, in denen vor allem der Untergrund gemessen wird, lange Messdauern und hohe Schrittweiten zugewiesen, während in Bereichen hoher Messrate kurze Messzeiträume und geringe Schrittweiten verwendet werden. Dies erlaubt, dass nahe der Peaks besonders kleinschrittig gemessen wird, während in den Bereichen geringer Ereignisrate noch immer ausreichend Ereignisse gemessen werden. Mit dieser Einteilung wird das Spektrum dann über einen Zeitraum von 6,5 d gemessen. Zur Aufnahme und Speicherung sowie Steuerung der Messparameter wird ein LabVIEW-Programm geschrieben und verwendet.

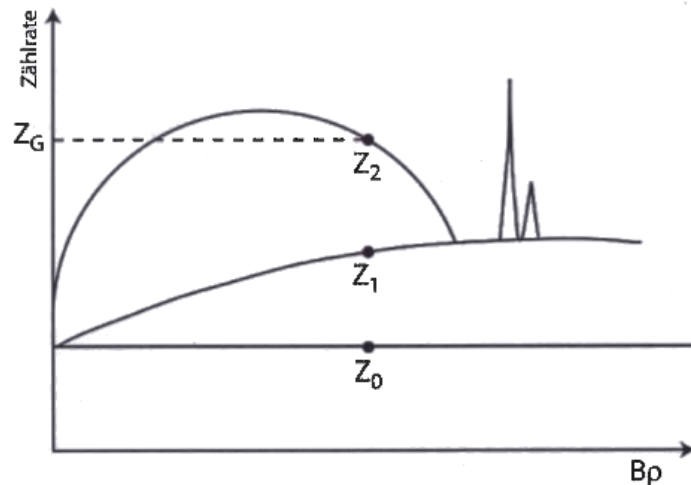


Abbildung 4: Schematisches erwartetes Gesamtspektrum. [3]

In Abb. 4 ist das erwartete Spektrum in schematischer Form dargestellt.  $Z_0$  entspricht dabei einem horizontalen Untergrund aus Hintergrundstrahlung.  $Z_1$  ist der oben erwähnte Zerfall in den Grundzustand von  $^{137}\text{Ba}$ , der später als näherungsweise linear angenommen wird.  $Z_2$  stellt den gesuchten Zerfall in den angeregten Zustand dar. Die beiden schmalen Peaks treten durch Konversionselektronen von K- und L-Schale auf. Sie sollen im Folgenden zur Kalibrierung des Spektrums verwendet werden.

Konversionselektronen treten dadurch auf, dass, wenn das angeregte  $^{137}\text{Ba}$  in den Grundzustand übergeht und der Energieübertrag zur Aussendung eines Elektrons aus der K- oder L-Schale führt.

## 4 Ergebnisse und Diskussion

### 4.1 Beobachtung und Datenanalyse

#### 4.1.1 Unsicherheiten

Alle Unsicherheiten werden nach GUM bestimmt und berechnet. Für diese Berechnungen wurde die Python Bibliothek „uncertainties“ herangezogen, welche den Richtlinien des GUM folgt. Die Fits verwenden die Methode der kleinsten Quadrate.

#### 4.1.2 Untergrund

In Abb. 5 sind die gemessenen Ereignisraten gegen die angelegte Spannungen aufgetragen. Die blaue Horizontale ist jeweils an einen Bereich von 0,25 V am Anfang und Ende der Messkurve angepasst und beschreibt so die Untergrundrate. Die Unsicherheit der gemessenen Ereignisse ist durch  $\sqrt{N}$  gemäß Poisson-Verteilung gegeben. Damit folgt für die Unsicherheit der Ereignisrate  $u(R) = \sqrt{N}/T$ , wobei  $T$  die Messdauer bei gegebener Spannung ist.

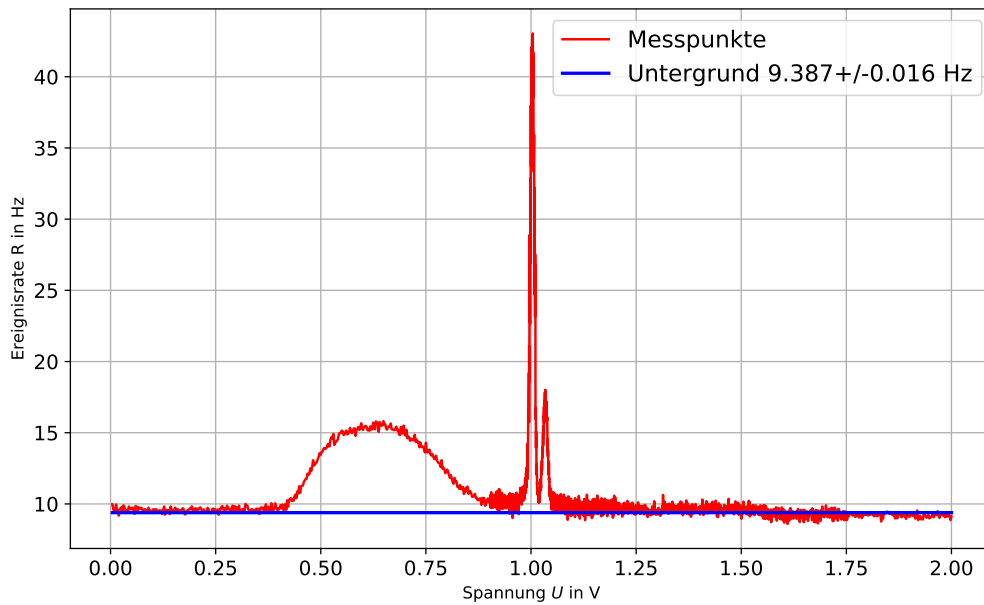


Abbildung 5: Die Anzahl der Ereignisse wurde durch die Messzeit bei einer festen Spannung dividiert, sodass sich die Ereignisrate ergibt. Die Unsicherheiten sind kleiner als die Symbole.

#### 4.1.3 Kalibration des Spektrometers

Um das Spektrometer zu kalibrieren, nutzt man, dass die Konversionselektronen des  $^{137}\text{Ba}$  eine scharfe Energie haben. Diese Energien sind bekannt und in Tabelle 1 aufgelistet. Dabei ist der Wert für die L-Linie der nach den Intensitäten der drei L-Linien gewichtete Mittelwert.

Tabelle 1: Gemittelte Energie der L und K Konversionselektronen von  $^{137}\text{Ba}$  und zugehöriger  $B\rho$ -Wert. [3]

Schale	E in keV	$B\rho$ in Tcm
K	624,21	$0,338\,14 \pm 0,000\,05$
L	655,8	$0,3499 \pm 0,0001$

In Abb. 6 sind die zwei Peaks vergrößert dargestellt und es wurden jeweils die Spitzen mit einer Gaußfunktion angepasst. Außerdem wurde der zuvor bestimmte Untergrund subtrahiert.



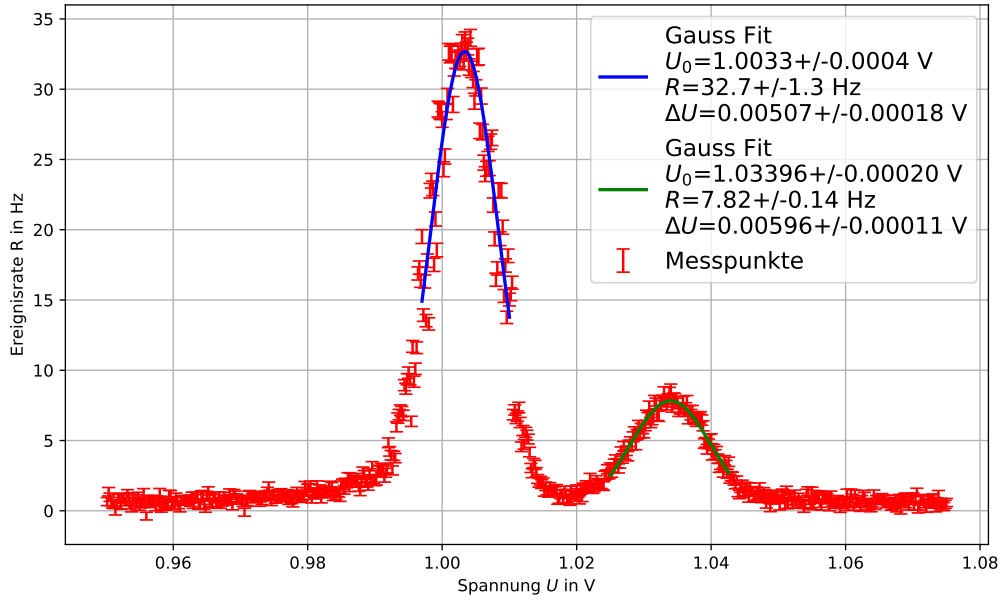


Abbildung 6: Vergrößerte und um den Untergrund reduzierte Messung der Peaks. Der größere Peak ist der K-Peak.

Da mit einem Magnetspektrometer jedoch ein Impuls  $p = eB\rho$  anstelle einer Energie gemessen wird, kalibriert man zunächst nach  $B\rho$ . Der Kalibrationsparameter ergibt sich aus dem Verhältnis von der Differenz der  $B\rho$ -Werte und dem Abstand der Peaks.

$$a = \frac{\Delta B\rho}{\Delta U_{KL}} = \frac{(0,0118 \pm 0,0001) \text{ Tcm}}{(0,031 \pm 0,007) \text{ V}} = (0,384 \pm 0,089) \text{ Tcm/V} \quad (6)$$

Für die Unsicherheit der Peakpositionen wurde die Breite des Gaußfits verwendet. Die gemäß Gleichung (7) kalibrierte Messkurve ist in Abb. 7 enthalten.

$$B\rho = aU - aU_{0,K} + (B\rho)_K \quad (7)$$

Für die Impulsauflösung folgt:

$$R = \frac{\Delta B\rho}{B\rho} = \frac{2\sqrt{2\ln 2}a\Delta U}{aU - aU_{0,K} + (B\rho)_K} \quad (8)$$

Der Faktor  $2\sqrt{2\ln 2}$  kommt daher, dass  $\Delta U$  die Standardabweichung der Gaußkurve ist, während die Definition der Impulsauflösung aber  $\Delta B\rho$  als Halbwertsbreite verlangt. Für die zwei Peaks ergibt sich:

$$R_K = (1,4 \pm 0,3) \% \quad (9)$$

$$R_L = (1,6 \pm 0,4) \% \quad (10)$$

#### 4.1.4 Kurie-Plot

In Abb. 7 wird der Beitrag durch den  $\beta$ -Zerfall direkt in den Grundzustand linear approximiert. Als Anfangspunkt für diesen wurden einige Messpunkte vor dem deutlichen Anstieg des  $\beta$ -Spektrums und einige unmittelbar vor dem Anstieg des L-Konversionspeaks gewählt (Siehe Anfang und Ende der blauen Linie). Die genaue Wahl des zweiten Punktes ist nicht wichtig, da eine Verschiebung um  $\pm 0,05 T_{cm}$ , den Fit kaum verändert. Wenn man die Messkurve dann um diesen Beitrag reduziert erhält man die Ereignisrate  $N(eB\rho) = N(p)$ .

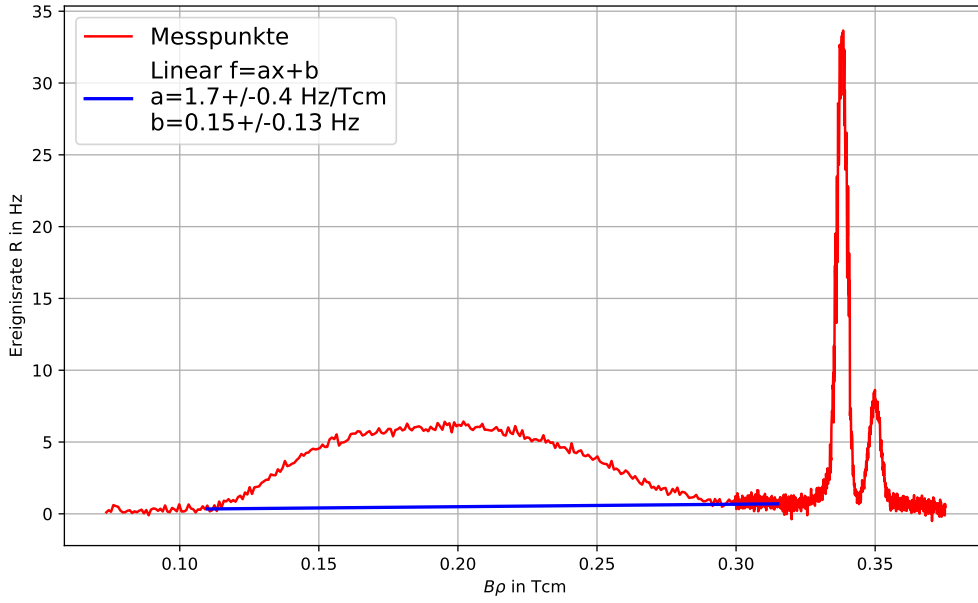


Abbildung 7: Um den Beitrag des direkten Zerfalls in den Grundzustand und die Ränder reduzierte kalibrierte Messung. Die Unsicherheiten sind kleiner als die Symbole.

$N(p)$  lässt sich zum Kurie-Plot gemäß

$$K(p) = \sqrt{\frac{N(p)}{F(Z, E)p^2}} \quad (11)$$

mit

$$F = \frac{k}{1 - \exp^{-k}} \quad \text{und} \quad k = \frac{2\pi Z\alpha c}{v} \quad (12)$$

transformieren.  $F$  ist die genäherte Fermifunktion und ist notwendig für die Coulombkorrektur durch die Kernladung  $Z$ .  $\alpha$  ist die Feinstrukturkonstante. Relativistisch gilt

für die Geschwindigkeit  $v$  des Elektrons.

$$v = \frac{p}{\gamma m} = \frac{p\sqrt{1 - (v/c)^2}}{m} \quad (13)$$

Nun quadriert man und formt nach  $v^2$  um:

$$v^2 = \frac{p^2}{m^2 c^2} (c^2 - v^2) = \frac{p^2}{m^2} \frac{1}{1 + p^2/(mc)^2} = \frac{p^2}{m^2 + (p/c)^2} \quad (14)$$

Für die Kurie-Darstellung gilt  $K(p) \propto (E_0 - E)$  [3]. Damit erhält man die Energie des  $\beta$ -Zerfalls als Schnittpunkt mit der x-Achse, wenn man die x-Achse von  $B\rho = p/e$  zu  $E_{kin} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$  umskaliert. Das Ergebnis dieser Umformungen ist in Abb. 8 abgebildet.

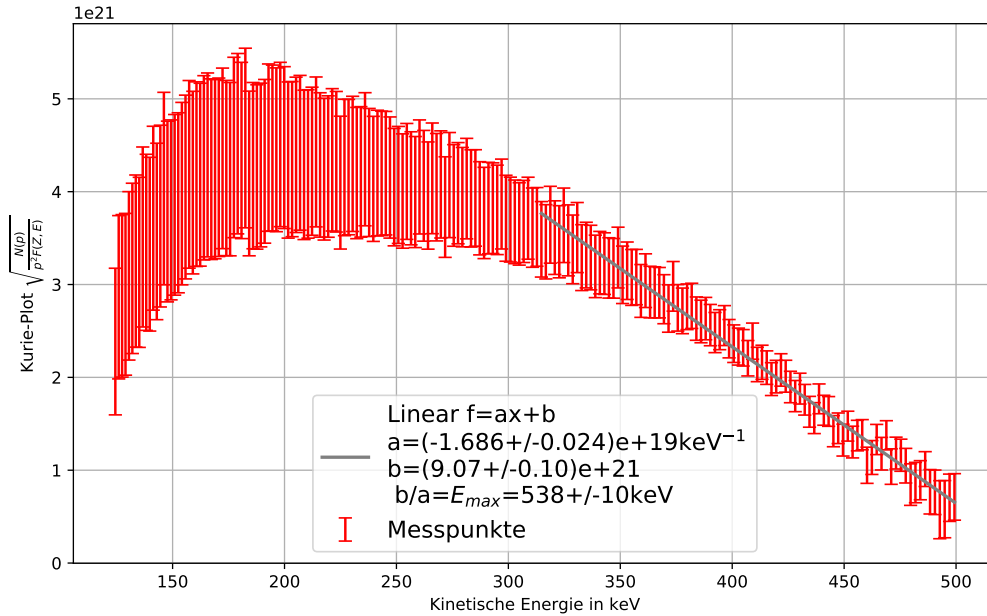


Abbildung 8: Kurie-Darstellung der Messung.

Als maximale kinetische Energie des Elektrons, die der  $\beta$ -Zerfallsenergie entspricht, ergibt sich  $E_0 = E_{max} = (538 \pm 10) \text{ keV}$ .

## 4.2 Diskussion

Zunächst lässt sich sagen, dass das gemessene Spektrum (vgl. Abb. 5) prinzipiell dem schematisch erwarteten Spektrum (vgl. Abb. 4) entspricht. Da der Zerfall in den Grundzustand nur mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 5 % auftritt, ist es nicht überraschend,

dass er im Spektrum am schwersten zu erkennen ist. Das Kalibrieren anhand der Peaks ist möglich, da diese eindeutig zu identifizieren sind.

Bei der Betrachtung von Abb. 8 fällt zunächst auf, dass der erwartete lineare Zusammenhang in der Kurie-Darstellung für hohe Energien erkennbar ist, aber für geringere Energien stark anders aussieht. Dies wird einerseits darauf zurückgeführt, dass die Kalibrierung weit vom Kalibrierpunkt entfernt weniger präzise wird, was ein Grund für die Abweichung sein kann. Andererseits ist zu erwähnen, dass das Abziehen des Einflusses des Übergangs in den Grundzustand durch einen linearen Fit zu Abweichungen führen kann, da es sich lediglich um eine Approximation erster Ordnung des eigentlichen Verlaufs handelt. Bei Betrachtung von Abb. 4 sieht man, dass die Linearität vor allem für höhere Energien gegeben ist, was die Vermutung, dass dies ein Grund für die Abweichungen ist, bekräftigt.

Außerdem führt die Fehlerfortpflanzung zu einem größeren Fehler bei kleiner Energie, wie ebenfalls aus Abb. 8 entnommen werden kann. Dies drückt sich auch in der Impulsauflösung aus, die wie es in Abschnitt 4.1.3 beim Peak, anhand dessen kalibriert wurde, auftritt, besser ist als an dem anderen Peak. Dies lässt sich für das gesamte Spektrum annehmen. Sie liegt wie nach [3] üblich in der Nähe von 1 %.

Die bestimmte Übergangsenergie  $E_0 = (538 \pm 10)$  keV ist nun mit dem Literaturwert von 512 keV gemäß [1] zu vergleichen. Der Literaturwert liegt innerhalb der dreifachen Unsicherheit des Messwerts und die Abweichung ist geringer als 10 %. Diese Abweichung ist ebenfalls auf die oben genannten Gründe zurückzuführen.

## 5 Schlussfolgerung

Insgesamt gesehen lässt sich sagen, dass die Messung der Zerfallsenergie von  $^{137}\text{Cs}$  erfolgreich war. Der Messwert weicht ausreichend gering vom Literaturwert ab, als dass dieser als bestätigt angesehen werden kann. Um die Abweichung zu reduzieren, könnte ein passenderer Fit für den Abzug des Übergangs in den Grundzustand gewählt werden. Auch die Kalibrierung könnte präziser durchgeführt werden, indem einzelne Messungen mit Proben mit bekannten Konversionspeaks durchgeführt werden würden. Hierfür könnten Proben mit Peaks im Bereich geringerer Energien ausgewählt werden, wodurch die Abweichung durch Messpunkte weit entfernt von den Kalibrierpunkten ausgeschlossen werden.

## Literatur

- [1] Leifi Physik. *Gammaspektrum von Cs-137*. URL: <https://www.leifiphysik.de/kern-teilchenphysik/radioaktivitaet-fortfuehrung/versuche/gammaspektrum-von-cs-137> (besucht am 19.05.2019).
- [2] Daniel FR. *Tröpfchenmodell*. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Bethe-Weizs%C3%A4cker-Formel#/media/Datei:Tr%C3%B6pfchenmodell.svg> (besucht am 08.06.2019).

- [3] WWU Münster. *Praktikumsversuch -  $\beta$ -Zerfall*.