Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Übungen zur Vorlesung „Datenstrukturen und Algorithmen" im SoSe 2017

Prof. Dr. Klaus Hinrichs
Aaron Scherzinger

Blatt 4

Abgabe im Learnweb bis zum 26.05.2017 um 10 Uhr

Aufgabe 12: (12+18=30 Punkte) Betrachten Sie die aus der Vorlesung bekannte RISC-Maschine.

(a) Realisieren Sie die folgenden Hilfsprozeduren mit dem `STJ`-Befehl der RISC-Maschine:

(i) `a:=0`	(v) `a:=b`	(ix) `if (a<=0) then goto x`
(ii) `a:=1`	(vi) `a:=-a`	(x) `if (a>=0) then goto x`
(iii) `a:=a-b`	(vii) `a:=a+b`	(xi) `if (a=0) then goto x`
(iv) `a:=-b`	(viii) `goto x`	(xii) `if (a>=b) then goto x`

(b) Benutzen Sie den `STJ`-Befehl der RISC-Maschine bzw. die in Aufgabe 12 a erstellten Hilfsprozeduren, um die folgenden Programme zu schreiben:

(i) `a:=b*c`	(iii) `a:=b div c`	(v) `a:=min(b,c)`
(ii) `a:=|b|`	(iv) `a:=b mod c`	(vi) `a:=gcd(b,c)`

Dieser Aufgabenteil wird unabhängig von der Korrektheit von Aufgabe 12 a bewertet. Sie können also die Hilfsprozeduren aus Aufgabe 12 a voraussetzen, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben.

Hinweis: Es existieren verschiedene Definitionen von `div` und `mod`. Verwenden Sie im Kontext dieser Aufgabe die Definition von Knuth (siehe Kapitel 1, Folie 38).

Aufgabe 13: (6+4=10 Punkte) Betrachten Sie den folgenden *divide-and-conquer* Algorithmus zur Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen. Hierbei gelte $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Für den Rekursionsschritt wird auf folgendes Verfahren zurückgegriffen (die Großbuchstaben bezeichnen hierbei Blockmatrizen):

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & J \\ K & L \end{bmatrix}$$

Hierbei werden zunächst (evtl. rekursiv) die folgenden Blockmatrizen berechnet:

$$\begin{array}{lllll} s_1 = G + H & s_5 = J - I & m_1 = s_2 \cdot s_6 & m_5 = s_1 \cdot s_5 & t_1 = m_1 + m_2 \\ s_2 = s_1 - E & s_6 = L - s_5 & m_2 = E \cdot I & m_6 = s_4 \cdot L & t_2 = t_1 + m_4 \\ s_3 = E - G & s_7 = L - J & m_3 = F \cdot K & m_7 = H \cdot s_8 & \\ s_4 = F - s_2 & s_8 = s_6 - K & m_4 = s_3 \cdot s_7 & & \end{array}$$

Danach wird das Ergebnis wie folgt berechnet:

$$A = m_2 + m_3 \qquad B = t_1 + m_5 + m_6 \qquad C = t_2 - m_7 \qquad D = t_2 + m_5$$

(a) Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus korrekt ist.

(b) Welche Laufzeit besitzt dieser Algorithmus?

Aufgabe 14: (6+4+10=20 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Definitionen äquivalent sind, d.h., dass durch beide Definitionen die "$\mathcal{O}$-Notation" beschrieben wird. Hierbei sei jeweils $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion über $\mathbb{N}_0$.

$$\mathcal{O}(g) := \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\} \quad (1)$$

$$\mathcal{O}(g) := \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\} \quad (2)$$

(b) Zeigen Sie für Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(n) \in \mathcal{O}(g(n)).$$

(c) Gruppieren Sie die nachfolgenden 18 Funktionen so, dass zwei Funktionen f_i und f_j genau dann in einer Gruppe sind, wenn gilt: $f_i(n) \in \Theta(f_j(n))$. Sortieren Sie diese Gruppen weiterhin nach aufsteigender Komplexität.

$f_1(n) := \sqrt{n}$	$f_2(n) := n$	$f_3(n) := 2^n$
$f_4(n) := n \log_2 n$	$f_5(n) := n - n^3 + 7n^5$	$f_6(n) := n^2 + \log_2 n$
$f_7(n) := n^2$	$f_8(n) := n^3$	$f_9(n) := \log_2 n$
$f_{10}(n) := n^{1/3} + \log_2 n$	$f_{11}(n) := \log^2 n$	$f_{12}(n) := n!$
$f_{13}(n) := \ln n$	$f_{14}(n) := n/\log_2 n$	$f_{15}(n) := \log_2 \log_2 n$
$f_{16}(n) := (1/3)^n$	$f_{17}(n) := (3/2)^n$	$f_{18}(n) := 6$

Hinweis zu Teilaufgabe (a) und (b): In der Menge $\mathbb{R}^+$ ist die 0 nicht enthalten.