RANG I INVERZ

- Samo kvadratne matrice

Matrična jednadžba

A i B su dvije kvad mat reda n.

↳ matrična jednadžba : $AX = B$

X – nepoznata kvad. matrica

Primjer: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3a + 1c & 3b + d \\ 5a + 2c & 5b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$3a + c = -1 \,/\cdot(-2)$ $\quad$ $3b + d = 2 \,/\cdot(-2)$

$5a + 2c = 3$ $\quad$ $5b + 2d = 1$

$-6a - 2c = 2$
$5a + 2c = 3$ $\,/+$

$-a = 5$

$\underline{a = -5}$

$\underline{c = 14}$

$-6b - 2d = -4$
$5b + 2d = 1$

$-b = -3$

$\underline{b = 3}$

$\underline{d = -7}$

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}$$

Drugi način: pomoćna jed. $YA = I$

Pretpostavimo da je $Y = A' \rightarrow A'A = I$

$I \cdot A = A \rightarrow AX = B$

$A \cdot IX = B$

$A \cdot A'A\, X = B \,/\cdot A'$ (s lijeve strane)

$$\underbrace{A'A}_{I} \cdot \underbrace{A'A}_{I} X = A'B$$

$$\underline{X = A'B}$$

Inverzna matrica

A je kvad. mat. reda n

Mat A' za koju vrijedi $\underline{\underline{A'A = AA' = I}}$ naziva se inverzna mat. od mat. A.

Inverznu mat. označavamo s A^{-1}.

→ ako postoji inverz matrice za nju kažemo da je <u>regularna</u>.

TM 1 Postoji najviše 1 matrica A' za koju vrijedi $A'A = AA' = I$

DOKAZ: pretpostavimo da postoje dvije mat A' i A'' koje zadovoljavaju ovu jednakost (tkd. je $AA' = A'A = I$)

$$A'A = I \quad / \cdot A''$$

$$(A'A)A'' = IA'' = A''$$

po pretpostavci vrijedi

$$(A'A)A'' = A'(AA'') = \underline{A'I = A'}$$

* teorem ne kaže da postoji A^{-1} već da <u>ako</u> postoji, onda je samo jedna takva.

TM 2 Umnožak regularnih matrica

A i B su regularne mat istog reda

↳ AB je regularna i vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

DOKAZ: $B^{-1}A^{-1}$ postoji po pretpostavci

① → $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\underbrace{BB^{-1}}_{I}A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = AA^{-1} = I$

② → $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

znači to zasigurno jest inverz

Primjena Binet Cauchyjevog teorema: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

$\det(AA^{-1}) = \det(A^{-1})\det(A) = \det(I) = 1$

$\hookrightarrow$ za regularnu mat. $\det A \neq 0$!

OBRAT tvrdnje: ?

TM3 Matrica A je regularna onda i samo onda kada vrijedi $\det A \neq 0$.

Definicija $\det A$: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}A_{jk}$ (razvoj po k-tom stupcu)

$\longrightarrow$ uzmemo alg. komplemente nekog drugog stupca: $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{jk}A_{ji} = 0}$, za $i \neq k$

ovo je suma po i-tom stupcu det. koja ima dva jednaka stupca: i-ti i k-ti

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}A_{ji} = \begin{cases} \det A, & \text{ako je } i = k \\ 0, & \text{ako je } i \neq k \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{nakon dijeljenja}}$ s $\det A \neq 0$ $\quad \underline{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{A_{ji}}{\det A}\right)a_{jk} = \delta_{ik}}$

$\tilde{A} = A_{ij} \longrightarrow \underset{\text{adjunkta matrice}}{\tilde{A}^T} \cdot A = \det(A)\cdot I$

vrijedi čak i za $\det A = 0$

Računanje inverzne matrice - Cramerovo pravilo

- A je kvad mat reda n; regularna samo ako $\det A \neq 0$

Elementi inverzne mat.: $(A^{-1})_{ij} = a'_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$

Eksplicitni zapis inverzne matrice: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$

Algoritam za računanje inverzne mat Cramerovim pravilom

▸ KORAK 1:

Izračunaj det A. Ako je ona različita od $\emptyset$ nastavi. U suprotnome, matrica nema inverza

▸ KORAK 2:

Odredi algebarski komplement svakog matričnog člana i zapiši ih u odgovarajuće mjesto u matrici.

▸ KORAK 3:

Transponiraj dobivenu matricu i podjeli je s det A.

TM5 Neka je A kvad. mat. i neka za matricu A' vrijedi $A'A = I$. Tad vrijedi i $AA' = I$, tj. A' je inverzna matrica.

DOKAZ: Po Binetu-Cauchyjevom teoremu je $1 = \det I = \det(A'A)$ ako $\det(A'A) \Rightarrow \det A' \det A$

$\hookrightarrow$ $\det A \neq 0$ – regularna je i postoji njen inverz A^{-1}

$$A'A = I \,/\cdot A^{-1} \text{ (zdesna)}$$

$$A'\underbrace{AA^{-1}}_{I} = \underbrace{I \cdot A^{-1}}_{A^{-1}} \longrightarrow A'\cancel{I} = A^{-1}$$

$$\boxed{A' = A^{-1}}$$

* ovaj teorem ne vrijedi ako nije kvad. matrica

ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE I REDUCIRANI OBLIK MATRICE → Gaussov algoritam za računanje inverzne matrice

1) Zamjena dvaju redaka
2) Množenje nekoga retka skalarom različitim od nule
3) Dodavanje nekog retka (pomnoženog skalarom) nekom drugom retku

→ linearni sustavi
→ računanje determinanti
→ određivanje ranga
→ nalaženje inverzne matrice

⇒ cilj nam je matricu svesti na što jednostavniji oblik

Reducirani oblik matrice

- prvi ne nul element (STOŽER) svakog retka iznosi 1
  - L svi ostali elementi jednaki su 0 (u stupcu)
- svi retci koji sadrže samo nul elemente (ako ima takvih) nalaze se iza onih koji sadrže bar jedan ne-nul element
- svaki sljedeći stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera

REDUCIRANI OBLIK:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

NEREDUCIRANI OBLIK:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primjer:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&10&10\\2&2&4&6\\2&2&8&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&4&6\\0&0&10&10\\2&2&8&10\end{bmatrix}/:2=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&0&10&10\\2&2&8&10\end{bmatrix}\cdot(-2)$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&0&10&10\\0&0&4&4\end{bmatrix}:10\ \begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&0&1&1\\0&0&4&4\end{bmatrix}\cdot(-2)=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&4&4\end{bmatrix}\cdot(-4)=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Primjer 9.)

$$B=\begin{bmatrix}2&-3&16&1\\1&6&-2&3\\1&3&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&2&2\\1&6&-2&3\\2&-3&16&1\end{bmatrix}\begin{matrix}-\\ \cdot(-2)\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&3&2&2\\0&3&-4&1\\0&-9&12&-3\end{bmatrix}\cdot(3)$$

$$=\begin{bmatrix}1&3&2&2\\0&3&-4&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}-\ =\begin{bmatrix}1&0&6&1\\0&3&-4&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}/:3=\begin{bmatrix}1&0&6&1\\0&1&-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2&1&3&-2&4\\4&2&5&1&7\\2&1&1&8&2\end{bmatrix}\begin{matrix}(-2)\\-\end{matrix}=\begin{bmatrix}2&1&3&-2&4\\0&0&-1&\cancel{-3}\,5&-1\\0&0&-2&\cancel{12}\,10&-2\end{bmatrix}\begin{matrix}/:2\\(-2)\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-1&2\\0&0&-1&-3&-1\\0&0&0&18&0\end{bmatrix}/\cdot(-1)$$

$$=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-1&2\\0&0&1&3&1\\0&0&0&18&0\end{bmatrix}\left(-\frac{3}{2}\right)=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&-\frac{11}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&3&1\\0&0&0&18&0\end{bmatrix}/:18=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&-\frac{11}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&3&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}+\frac{11}{2}\\-3\end{matrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2&1&3&2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&-2&10&-2\end{bmatrix}\begin{matrix}/:2\\(-2)\end{matrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1&2\\0&0&-1&5&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot(-1)=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1&2\\0&0&1&-5&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&-\frac{13}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-5&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ELEMENTARNE MATRICE & EKVIVALENTNE MATRICE

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & 8 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ tu zamjenu redaka možemo obaviti

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & 8 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

=> odnosno umjesto raspisivanja strelicama, raspišemo kao umnožak matrice s kojima baratamo

zamjena redaka:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A$$

dijeljenje retka sa λ

u redak koji želimo podijeliti $\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$

množenje retka sa λ

u redak koji želimo množiti $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$

kako smo već iskoristili neko polje matrice u željenom retku, onda a stavljamo na njegovo „slobodno" polje

Oblik elementarne matrice

matrica A $m \times n$ ⟶ el. mat X reda m $(m \times m)$ (jedinična)

- elementarnoj transformaciji nad retcima mat A odgovara takva ista transformacija nad retcim jedinične matrice

- ekvivalentnu mat. označavamo sa E

- Mat B je dobivena iz mat A elementarnim transformacijama

$B = E_r \cdots E_1 A$ $\Rightarrow$ A i B su ekvivalentne po retcima

↳ $A \sim B$

(TM) Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije

Lema: El mat su regularne. Invert elementarne transformacije opet je elementarna transformacija

DOKAZ:

Inverz #1: $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

Inverz #2: $E_i(\lambda)^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

inverz #3: $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$

refleksivnost $A \sim A$

simetričnost $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

tranzitivnost $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$\Downarrow$

matrica A i njezina reducirana forma A_R ekvivalentne su matrice, jedna se može rekonstruirati iz druge

Rang matrice (rang A)

· broj ne nul redaka u reduciranom obliku matrice.

Određivanje ranga

! potrebno je mat svesti na reducirani oblik

- rang A nije veći od broja redaka matrice, niti od broja stupaca mat.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \text{reducirana} \quad \text{rang } A = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :4$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ rang } 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \text{rang } 1$$

Lema: Kvad mat A reda n ima rang $A = n$ samo ako je $A = I$.

Lema: $\det A \neq 0$, $A \sim B \longrightarrow \det B \neq 0$.

TM Kvad mat je regularna akko ima puni rang. (rang $A = n$)

mat A - regularna, svedemo ju na reducirani oblik

DVIJE MOGUĆNOSTI

A_R nema niti jedan nul redak

↳ dakle ima n složenih elemenata $\Rightarrow$ rang $= n$

A_R ima barem jedan nul redak

↳ $\det A_R = 0 \to$ nije reg.

$\Rightarrow$ ni A nije regularna jer su ekvivalentne

Algoritam za računanje inverzne matrice

1. Matrica $n \times 2n$ u kojoj je lijevo mat A, a desno mat I

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \underline{[A \,\vdots\, I]}$$

2. Primjenimo el. transf. na mat A. Sve ih istodobno vršimo i na desnoj strani proširene mat. El. transformacije daju niz matrica oblika $[A \,\vdots\, I] \sim [A_1 \,\vdots\, E_1] \sim [A_2 \,\vdots\, E_2 E_1] \sim \cdots [A_R \,\vdots\, E_n \cdots E_2 E_1]$

Rezultat je $[A_R \,\vdots\, B]$

3. Ako je $A_R = I$ → matrica je regularna
   ↳ desno (B) joj je inverzna matrica ($B = A^{-1}$)

! Ako $A_R \neq I$ → nije regularna i ne postoji inverzna mat.

Primjer: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow [A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] /:2$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 3/2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ - \\ + \; (-4) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] /\cdot 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ + \\ -2 \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] /:10 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & 1/10 \end{array}\right] \begin{matrix} + \; (2) \\ + \\ (7) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4/5 & 7/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/5 & 1/10 \end{array}\right]$$

A je reg. $\quad$ ↓ B

rang = 3

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ -1 & -4/5 & 7/10 \\ 0 & -2/5 & 1/10 \end{bmatrix}}$$

Linearna zavisnost vektora i rang matrice

V^n - prostor svih vektor stupaca duljine n

Linearna kombinacija; prostor razapet vektorima

$a_1, a_2, \dots a_k \rightarrow$ vektori iz prostora V^n

LINEARNA KOMB: vektor oblika $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$

* $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ - proizvoljni skalari

$\Rightarrow$ skup ovakvih linearnih kombinacija = prostor razapet vektorima $a_1, \dots, a_k$

$$L(a_1, \dots, a_k) = \{x : x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Primjer: V^2, $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow L(a_1) = \{x = \lambda a_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ * pravac kroz ishodište određen s a_1

Primjer: & $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow L(a_1, a_2) = \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$\hookrightarrow$ tvrdimo da je ovaj prostor jednak V^2

- svaki vektor iz V^2 može se napisati u obliku linearne komb. vektora a_1 i a_2

UVJERIMO SE:

$\Rightarrow$ uzet ćemo bilokoji vektor $x \in V^2 \rightarrow x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zapiš u obliku linearnog sust.

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= x_1 \\ \lambda_1 &= x_2 \end{aligned} \Rightarrow x_2 = \lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = x_1 - x_2$$

Linearna nezavisnost

vektori su linearno nezavisni ako iz $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$ slijedi da svi skalari moraju biti jednaki nuli: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

→ linearno zavisni ako nisu linearno nezavisni (LOW)

$a_1, \dots, a_k$ lin. zav. ako postoje skalari $\lambda_1 \dots \lambda_k$ od kojih barem jedan nije jednak 0 tako da vrijedi $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$

⇒ Lin. komb. vekt. IŠČEZAVA NA NETRIVIJALAN NAČIN

Primjer: Dva vektora a i b su linearno zavisna onda i samo onda ako postoji $\lambda \neq 0$ takav da je $b = \lambda a$.

↳ to znači da vektor b leži u prostoru razapetom s vektorom a,

⇒ b je kolinearan s vektorom a

▸ u isto vrijeme i vektor a leži u prostoru razapetom s b

! Primjer:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \; e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$$ = linearno nezavisni

Linearna komb: $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$

a ona je jednaka 0 samo ako je

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

⇒ svaki vektor $x = [x_1, x_2, \dots x_n]^T$ može se prikazati u obliku linearne kombinacije vektora $e_1, \dots e_n$

↳ $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

TM El. transformacijama ne mijenja se broj linearno nezavisnih redaka matrice

TM Rang matrice jednak je broju njezinih linearno nezavisnih redaka.

TM Svaka se regularna mat. može napisati u obliku produkta elementarnih matrica

Korolar: $\underline{A \text{ je regularna mat.} \Rightarrow \text{rang}(AB) = \text{rang}(B)}$

Primjer: Jesu li sljedeći vektori linearno nezavisni?

A) $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}}$

ako rang $A \neq n$ (3) onda nisu nezavisni

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ (-5) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ (+7) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

nisu linearno nezavisni

$\Rightarrow$ TM Broj linearno nez. redaka bilo koje matrice jednak je broju njezinih linearno nezavisnih stupaca, dakle $r(A) = r(A)^T$.

TM A je kvad. mat reda n. Jednadžba $Ax = 0$ ima jedinstveno rješenje $x = 0$ ako i samo ako je A regularna matrica

* za kvad. mat A reda n

UVJETI ZA REGULARNOST MATRICE

a) $\det A \neq 0$

b) $r(A) = n$

c) $Ax = 0$ samo za $x = 0$

UVJETI ZA SINGULARNOST MATRICE

a) $\det A = 0$

b) $r(A) < n$

c) $Ax = 0$ za neki $x \neq 0$