4. Diferencijalne jednadžbe prvog reda

3. (9 bodova)

(a) **(4b)** Riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} xy^2y' - x^2 = y^3, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

(b) **(5b)** Nađite diferencijalnu jednadžbu familije krivulja za koju normala povučena iz svake njene točke odsjeca na pozitivnim dijelovima osi x i osi y odsječke jednake duljine. Skicirajte sliku. (Napomena: nije potrebno riješiti dobivenu diferencijalnu jednadžbu.)

3) Cauchyev problem $\begin{cases} xy^2y' - x^2 = y^3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

Stavimo li novo varijablo $z = y^3$ dobimo $z' = 3y^2y'$

$\Rightarrow$ Imamo jednadžbu $\frac{1}{3}xz' - x^2 = z \Leftrightarrow \frac{1}{3}xz' - z = x^2$

Homogeno: $\frac{1}{3}xz' - z = 0 \Rightarrow xz' = 3z \Rightarrow \frac{1}{z}z' = \frac{3}{x} \,/\int \Rightarrow \ln|z| = 3\ln|x| + C$

$= \ln C|x|^3$

$\boxed{z = Cx^3}$

Varijacija konstanti $z(x) = C(x)x^3$

$z'(x) = C'x^3 + 3x^2C$

Uvrstimo: $\frac{1}{3}xC'x^3 + \cancel{x^3C} - \cancel{Cx^3} = x^2$

$\Rightarrow C' = 3\frac{1}{x^2} \,/\int \quad C(x) = -\frac{3}{x} + D$

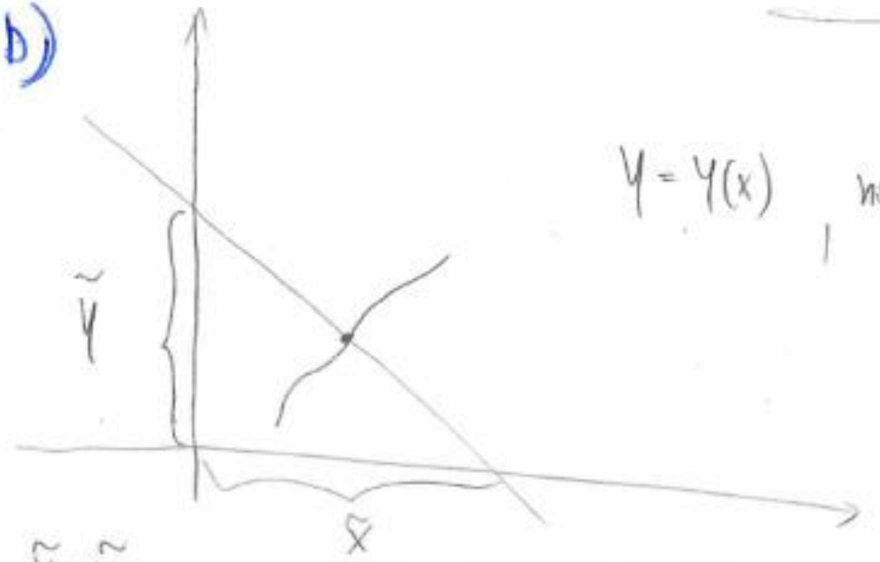
$z(x) = -3x^2 + Dx^3$

$\Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{-3x^2 + Dx^3}$, $y(1) = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt[3]{-3 + D} \Rightarrow D = 3$

$y = \sqrt[3]{3(x^3 - x^2)}$

b)

b)



$\tilde{x} = \tilde{y}$

$y = y(x)$, normala u točki (x_0, y_0):

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

Sjecište s x-osi $\quad -y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}\cdot(\tilde{x} - x_0)$

$$\underbrace{\tilde{x} = y_0 \cdot y'(x_0)}_{} + x_0$$

Sjecište s y osi

$$\tilde{y} - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(-x_0) = \frac{x_0}{y'(x_0)} \Rightarrow \underbrace{\tilde{y} = y_0 + \frac{x_0}{y'(x_0)}}_{}$$

$=$

Imamo jednadžbu: $\quad y + \frac{x}{y'} = y \cdot y' + x$

4. **(8 bodova)**

(a) **(2b)** Iskažite Picardov teorem o lokalnoj jedinstvenosti rješenja Cauchyjevog problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

(b) **(2b)** Nađite pravokutnik na kojem Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y - 2x} + 2, \\ y(-1) = 0, \end{cases}$$

zadovoljava uvjete Picardovog teorema. Obrazložite sve tvrdnje.

(c) **(4b)** Koristeći supstituciju $z = y - 2x$ nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \sqrt[3]{y - 2x} + 2$ te pokažite da je $y = 2x$ njeno singularno rješenje.

a) Picardov teorem:

$$(*)\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

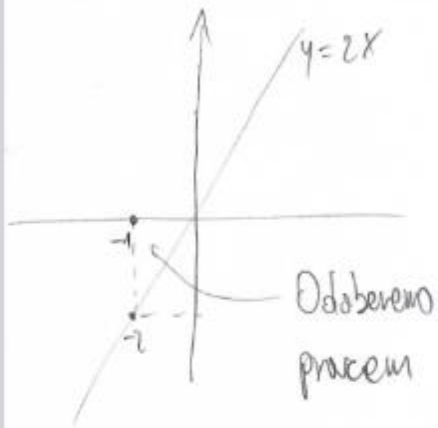
f definirana na pravokutniku $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0| < a, |y-y_0| < b \}$

i neka je: $\begin{cases} f \text{ neprekinuta na } D \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ omeđena funkcija na } D \end{cases}$

Tada postoji interval oko točke x_0 na kojem $(*)$ ima jedinstveno rješenje.

b) $$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y-2x} + 2 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x,y) = \sqrt[3]{y-2x} + 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{3}(y-2x)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(y-2x)^{2/3}} \end{cases}$$ ← eksplodira blizu pravca $y = 2x$



Odaberemo bilo koji pravokutnik oko točke $(-1,0)$ koji se ne presijeca s pravcem $y=2x$. Primjerice $D = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

c) $z = y - 2x$, $z' = y' - 2 \Rightarrow y' = z' + 2 \leftarrow$ uvrstimo u jednadžbu

$\Rightarrow z' = \sqrt[3]{z} \leftarrow$ jedno rješenje je $z \equiv 0 \Rightarrow y = 2x$

Dalje tražimo sva rješenja osim $z \equiv 0$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{z}} z' = 1 \quad \int \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}} = x + C \Rightarrow z(x) = \left[\frac{2}{3}(x+C) \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$z^{-\frac{1}{3}} z' = 1$$

$$y(x) = 2x + \left[\frac{2}{3}(x+C) \right]^{\frac{3}{2}}, \; C \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Rješenje $z \equiv 0$ je singularno ako se u svakoj točki siječe s nekim rješenjem iz familije $(*)$. Za $x_0 \in \mathbb{R}$ stavimo $C = -x_0$ i tada je

$$2x_0 = 2x_0 + \left[\frac{2}{3}(x_0 - x_0) \right]^{\frac{3}{2}}$$

$\Rightarrow y = 2x$ je singularno rješenje.

5. **(10 bodova)**

(a) **(5b)** Pokažite da je diferencijalna jednadžba $x\frac{dy}{dx} = 3y + \frac{y^2}{x}$ homogenog stupnja te odredite rješenje te jednadžbe koje prolazi točkom $(1, 4)$.

(b) **(5b)** Odredite i skicirajte krivulje sa svojstvom da je svaka točka krivulje polovište odreska normale u toj točki izmedu koordinatnih osi.

Zadatak 5.

RJEŠENJE **a)** Jednadžba se može zapisati kao

$$x^2 dy = (3xy + y^2)dx,$$

Iz čega se vidi da je jednadžba homogena sa stupnjem homogenosti 2, jer su funkcije x^2 i $3xy + y^2$ polinomi homogenog stupnja 2. Radimo supstituciju

$$z = \frac{y}{x} \implies y' = z + xz' \implies z + xz' = 3z + z^2 \implies \frac{dz}{2z + z^2} = \frac{dx}{x} \implies$$

$$\int \frac{dz}{2z + z^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \right) dz = \frac{1}{2}(\ln|z| - \ln|z+2|) = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln C \implies$$

$$\frac{z}{z+2} = \frac{y}{y+2x} = Cx^2 \implies y(x) = \frac{2Cx^3}{1 - Cx^2}.$$

Uvrštavajući uvjet $y(1) = 4$, dobivamo konačno rješenje

$$y(x) = \frac{4x^3}{3 - 2x^2}.$$

b) Neka je $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$ proizvoljna točka na krivulji. Jednadžba normale na tu krivulju dana je s

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Neka su $(0, y_1)$ i $(x_1, 0)$ točke gdje ta normala, redom, siječe y i x os. Prema uvjetu zadatka, točka (x_0, y_0) je na polovištu odreska normale između koordinatnih osi. Dakle, $x_1 = 2x_0$ i $y_1 = 2y_0$. Uvrštavajući ove jednakosti u jednadžbu normale, dobivamo

$$y_1 = y_0 + \frac{x_0}{y'(x_0)} \implies y_0 = \frac{x_0}{y'(x_0)} \implies x_0 = y_0 y'(x_0).$$

Kako smo odabrali proizvoljnu točku na krivulji, ona mora zadovoljavati diferencijalnu jednadžbu $yy' = x$. Ovo je separabilna jednadžba, čije je rješenje

$$y dy = x dx \implies y^2 = x^2 + C \implies y^2 - x^2 = C.$$

Dakle, potrebno je skicirati hiperbole sa danim svojstvom. □

5. **(10 bodova)**

(a) **(3b)** Izvedite formulu za potencijal $U(x,y)$ egzaktne diferencijalne jednadžbe

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

(b) **(2b)** Izvedite formulu za Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(y)$.

(c) **(5b)** Koristeći Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(y)$ riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} (\frac{3}{y} + x)dx + (\frac{3x}{y^2} + \frac{x^2}{y})dy = 0, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

5. (a) Teorem 6.6.2 u skripti.

(b)

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad / \cdot \mu(y)$$
$$\mu(y)P(x,y)dx + \mu(y)Q(x,y)dy = 0$$

Iz uvjeta egzaktnosti

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

dobivamo:

$$\frac{d\mu}{dy} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy$$
$$\ln \mu = \int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy$$

(c)

$$\ln \mu(y) = \int \frac{1}{\frac{3}{y} + x}\left(\frac{6}{y^2} + \frac{2x}{y}\right) dy = \int \frac{2}{y}\, dy = 2 \ln y$$
$$\Rightarrow \mu(y) = y^2$$

Egzaktna jednadžba glasi:

$$\left(3y + xy^2\right) dx + \left(3x + x^2 y\right) dy = 0$$

$$U(x,y) = \int_0^x \left(3y + xy^2\right) dx + \int_0^y 0\, dy = 3xy + \frac{1}{2}x^2y^2$$

Opće rješenje je $3xy + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$, a uvrštavanjem početnog uvjeta dobivamo $C = 8$, odnosno konačno rješenje Cauchyjevog problema

$$3xy + \frac{1}{2}x^2y^2 = 8.$$

4. **(9 bodova)**

(a) **(3b)** Izvedite formulu za Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(y)$ diferencijalne jednadžbe

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

te odredite uvjet uz koji taj multiplikator postoji.

(b) **(6b)** Riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} (1 + \cos(x + y)e^{-y^2})\,dx + (2xy + \cos(x + y)e^{-y^2})\,dy = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

4. **(a)** Dana je diferencijalna jednadžba $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ i tražimo uvjete na funkcije P i Q pod kojima postoji Eulerov multiplikator ovisan samo o varijabli y. Pomnožimo, dakle, jednadžbu s $\mu = \mu(y)$. Dobivena jednadžba $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ je egzaktna akko je zadovoljeno

$$\frac{\partial(\mu(y)P(x,y))}{\partial y} = \frac{(\partial \mu(y)Q(x,y))}{\partial x} \iff \mu'(y)P + \mu(y)\frac{\partial P}{\partial y} = \mu(y)\frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{3}$$

Dakle, $\mu(y)$ će biti Eulerov multiplikator akko vrijedi (3), za sve x, y. To će vrijediti akko μ zadovoljava

$$\mu' + \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)\mu = 0\,. \tag{4}$$

Ako funkcija

$$f(x,y) = \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)$$

ne ovisi o x, tada je (4) linearna ODJ prvog reda, koja ima rješenje. I obratno, ako μ ne ovisi o x, ne smije ni f. Slijedi da je $\mu = \mu(y)$ Eulerov multiplikator akko f ne ovisi o x, i u tom slučaju je μ rješenje jednadžbe (4):

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -f(y) \implies \mu(y) = \exp\left(-\int f(y)dy\right)$$

(b) Tražimo rješenje Cauchyjevog problema

$$\begin{cases} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,, \\ y(\pi) = 0\,, \end{cases}$$

gdje su

$$P(x,y) = 1 + \cos(x+y)e^{-y^2} \qquad \text{i} \qquad Q(x,y) = 2xy + \cos(x+y)e^{-y^2}\,.$$

Primjećujemo da su P i Q "slični", odnosno, da je jednadžba "gotovo" egzaktna. Doista, računamo

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\cos(x+y)e^{-y^2} - 2y = -2yP\,.$$

Slijedi da postoji Eulerov multiplikator $\mu = \mu(y)$ i određujemo ga iz jednadžbe

$$\mu' - 2y\mu = 0 \implies \ln\mu = y^2 + \ln C \implies \mu(y) = e^{y^2}\,.$$

Ovdje smo stavili $C = 1$ jer multiplikativna konstanta ne utječe na egzaktnost jednadžbe. Množenjem naše ODJ s μ dobivamo sljedeću jednadžbu

$$(e^{y^2} + \cos(x+y))dx + (2xye^{y^2} + \cos(x+y))dy = 0\,,$$

za koju se lako provjeri da zadovolja uvjet egzaktnosti.

Tražimo potencijal $U(x,y)$ takav da je $dU = P_1dx + Q_1dy$. Stavimo $(x_0,y_0) = (0,0)$. Potencijal računamo prema formuli

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x P_1(x,y)dx + \int_0^y Q_1(0,y)dy + C = \int_0^x (e^{y^2} + \cos(x+y))dx + \int_0^y \cos(y)dy + C \\ &= (xe^{y^2} - 0 + \sin(x+y) - \sin(y)) + (\sin(y) - 0) + C = xe^{y^2} + \sin(x+y) + C. \end{aligned}$$

Stoga je opće rješenje jednadžbe

$$xe^{y^2} + \sin(x+y) = C.$$

Konstantu C određujemo iz početnog uvjeta $y(\pi) = 0$. Imamo

$$\pi + \sin\pi = C \implies C = \pi,$$

pa je konačno rješenje Cauchyjevog problema

$$xe^{y^2} + \sin(x+y) = \pi.$$

6. **(8 bodova)** Zadana je diferencijalna jednadžba

$$2(xy)^\lambda y' = x^2 - y^2.$$

(a) **(4b)** Odredite vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje je diferencijalna jednadžba
(i) Bernoullijeva (ii) homogenog stupnja (iii) egzaktna.

(b) **(4b)** Za neki dobiveni λ iz (a), riješite diferencijalnu jednadžbu metodom po vlastitom izboru te nadite ono rješenje koje prolazi točkom $T(3, 2)$.

6. (a) Jednadžba je Bernoullijeva za $\lambda = \pm 1$, a iz oblika:

$$(y^2 - x^2)\,dx + 2(xy)^\lambda\,dy = 0$$

dobivamo da je homogenog stupnja samo za $\lambda = 1$ (pritom je stupanj homogenosti 2). Iz uvjeta egzaktnosti

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = 2\lambda x^{\lambda-1} y^\lambda = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

takodjer dobivamo da je jedino rješenje $\lambda = 1$.

(b) Jednadžba rješavamo kao egzaktnu za $\lambda = 1$ pa tražimo potencijal:

$$U(x,y) = \int_0^x (y^2 - x^2)dx + \int_0^y 0\,dy + C = xy^2 - \frac{1}{3}x^3 = C$$

Uvrštavanjem točke $T(3,2)$ slijedi

$$\begin{aligned} 12 - 9 &= C \\ C &= 3 \end{aligned}$$

pa je njeno opće rješenje

$$3xy^2 - x^3 = 9.$$

6. **(8 bodova)**

(a) (**3b**) Izvedite formulu za opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe

$$y' + f(x)y = g(x).$$

(b) (**2b**) Supstitucijom linearizirajte Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu

$$y' + f(x)y = g(x)y^n$$

te potom koristeći (a) napišite formulu za opće rješenje Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe.

(c) (**3b**) Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' + \frac{y}{x}(1 + x^2 y) = 0.$$

6. (a) Poglavlje 6.2.1 u skripti: formulu izvodimo metodom varijacije konstanti.

(b) Poglavlje 6.3.1 u skripti. Supstitucijom $z = y^{1-\alpha}$ dobivamo linearnu DJ

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x)$$

pa korištenjm (a) slijedi opće rješenje

$$y(x) = e^{-\inf f(x)\,dx}\left(C + (1-\alpha)\int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)\,dx}\,dx\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(c) Riječ je o Bernoullijevoj diferencijabilnoj jednadžbi

$$y' + \frac{1}{x}y = -xy^2.$$

Jednadžbu dijelimo s y^2, uvodimo supstituciju $z = \frac{1}{y}$ (iz čega je $z' = \frac{-1}{y^2}y'$) te množimo s -1. Tako dobivamo

$$z' - \frac{1}{x}z = x.$$

Korištenjem formule iz (a) dijela zadatka slijedi

$$z = e^{-\int \frac{-1}{x}dx}(C + \int xe^{\int \frac{-1}{x}dx}dx) = Cx + x^2,$$

pa je rješenje početne jednadžbe dano s

$$y = \frac{1}{Cx + x^2}.$$

(2. način: direktno koristimo izvedenu formulu iz (b))

4. (7 bodova)

(a) **(2b)** Iskažite Picardov teorem za Cauchyjev problem $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

(b) **(5b)** Zadan je Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{(y-1)^2}, \\ y(3) = y_0. \end{cases}$$

(i) Pokažite da za $y_0 = 1$ Cauchyjev problem nema jedinstveno rješenje te skicirajte barem 2 rješenja.
(ii) Za $y_0 = 2$ odredite neki pravokutnik $D \subset \mathbb{R}^2$ na kojem zadani Cauchyjev problem zadovoljava uvjete Picardovog teorema.

4.a) $\boxed{\text{Teorem } 6.7.2.}$

4. b) $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{(y-1)^2} \\ y(3) = y_0 \end{cases}$

$y' = \sqrt[3]{(y-1)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-1)^2} \quad \Big| : \sqrt[3]{(y-1)^2} \quad , \; y \neq 1 \Rightarrow \boxed{y=1}$ je rješenje

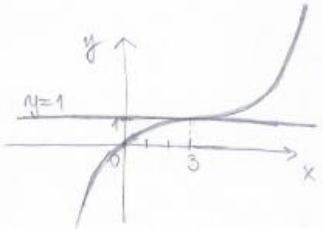
$\frac{dy}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = dx$

$3 \cdot \sqrt[3]{(y-1)} = x + C$

$\sqrt[3]{y-1} = \frac{x}{3} + \frac{C}{3}$

$$\boxed{y = \frac{(x+C)^3}{27} + 1}$$

OPĆE RJ.



(i) (CP) s $y(3)=1$ ima 2 rješenja

$\boxed{y=1}$

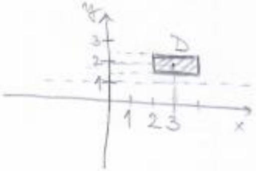
$1 = \frac{(3+C)^3}{27} + 1 \Rightarrow C = -3$

$$\boxed{y = \frac{(x-3)^3}{27} + 1}$$

(ii) $f(x,y) = \sqrt[3]{(y-1)^2}$ nepr. na $\mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(y-1)^{-\frac{1}{3}}$ nije omeđena u $y=1$

$y(3) = 2 \Rightarrow D$ je oko $T(3,2)$



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : |x-3| < 1, |y-2| < \frac{1}{2}\}$

6. **(8 bodova)**

(a) **(5b)** Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$xy' + y - x\sqrt{y} = 0.$$

(b) **(2b)** Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe iz (a) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. Je li rješenje jedinstveno? Obrazložite.

(c) **(1b)** Postoji li singularno rješenje diferencijalne jednadžbe iz (a)? Obrazložite.

6. (a) Rješavamo kao Bernoullijevu DJ:

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{y}$$

Uvodimo supstituciju

$$v = y^{\frac{1}{2}}, \quad v' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$$

čime dobivamo linearnu DJ:

$$v' + \frac{1}{2x}v = \frac{1}{2}$$

Sada koristimo formulu za opće rješenje sa $f(x) = \frac{1}{2x}$ i $g(x) = \frac{1}{2}$

$$v = e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}\left(\int \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\ln(x)}\,dx + C\right)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx + C\right)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + C\right)$$

$$v = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

S obzirom da je $y = v^2$, slijedi da je opće rješenje

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2$$

Primijetimo da je $y = 0$ takodjer rješenje početne DJ koje nije sadržano u općem rješenju.

(b) Za navedeni početni uvjet dobivamo $C = -\frac{1}{3}$, odnosno partikularno rješenje

$$y = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^2.$$

No to rješenje nije jedinstveno jer $y = 0$ takodjer zadovoljava početni uvjet.

(c) $y = 0$ je singularno rješenje jer za svaki x_0 za koji je funkcija definirana imamo $y(x_0) = 0$ za y iz općeg rješenja. Tada je $C = -\frac{2}{3}x_0\sqrt{x_0}$.

6. (**7 bodova**) Zadana je diferencijalna jednadžba $x\,dy = (y + (xy)^{\beta})\,dx$.

(a) (**5b**) Odredite $\beta \in \mathbb{R}$ za koji je zadana jednadžba homogenog stupnja te za takav β nađite ono rješenje jednadžbe koje prolazi točkom $(1, 1)$.

(b) (**2b**) Za koje $\beta \in \mathbb{R}$ je zadana jednadžba Bernoullijeva diferencijalna jednadžba?

Zad 7

a) $x\,dy = \left(y + (xy)^{\beta}\right)dx$

$P(x,y)$ i $Q(x,y)$ su homogene istog stupnja ako postoji α takav da vrijedi $P(tx,ty) = t^{\alpha}P(x,y)$ i $Q(tx,ty) = t^{\alpha}Q(x,y)$

$Q(x,y) = x \Rightarrow Q(tx,ty) = tx = t\,Q(x,y)$

da bi jednadžba bila homogenog stupnja α mora biti jednak 1

$P(x,y) = y + (xy)^{\beta} \Rightarrow P(tx,ty) = ty + t^{2\beta}(x,y) = tP(x,y)$

mora biti jednako

jedino moguće ako je $2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad xy' = y + \sqrt{xy} \quad |:x \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}$

pa imamo supstituciju $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$z'x + z = z + \sqrt{z} \Rightarrow \quad z'x = \sqrt{z} \Rightarrow \quad \frac{z'}{\sqrt{z}} = \frac{1}{x} \quad |\int$

$\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \ln x + c = \ln(cx) \Rightarrow \sqrt{z} = \frac{1}{2}\ln(cx)$

$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2}\ln(cx), \; c \neq 0$

Uvrstimo li točku $(1,1)$ dobijemo $\sqrt{\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}\ln C \Rightarrow \ln C = 2$

$C = e^2$ i ukupno rješenje je

$\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2}\ln(e^2 x) \quad \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x\,(2 + \ln x)^2}$

Kod $z'x = \sqrt{z}$ dijelili smo sa $z = \frac{y}{x}$, ali $\frac{y}{x} = 0$ tj. $y = 0$ nije rješenje jer ne prolazi kroz točku $(1,1)$

b) Bernoullijeva ODJ je ODJ oblika

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha} \quad \text{za } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \text{ i } \alpha \neq 1$$

Naša jednadžba je oblika

$$xy' = y + (xy)^{\beta} = y + x^{\beta}y^{\beta} \quad |:x$$

$$y' - \frac{1}{x}y = x^{\beta-1}y^{\beta}$$

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$g(x) = x^{\beta-1}$

Iz definicije vidimo da je zadana ODJ Bernoullijeva za $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ i $\beta \neq 1$

Primjeti: za $\beta = 0$ i $\beta = 1$, zadana jednadžba je linearna ODJ sa separiranim varijablama

7. **(7 bodova)**

(a) **(2b)** Izvedite formulu za Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(x)$ diferencijalne jednadžbe $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$. Uz koji uvjet taj multiplikator postoji?

(b) **(5b)** Koristeći odgovarajući Eulerov multiplikator, nađite opće rješenje jednadžbe $(y^2 + 4x^2)\,dx - 4xy\,dy = 0$.

Zad 7.

a) Pomnožimo $Pdx + Qdy = 0$ s $\mu(x)$ i ispitajmo uvjet egzaktnosti

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \qquad \text{i vrijedi } \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'$$

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} = \mu' Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \mu' \cdot Q = \mu\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

Imamo separabilnu jednadžbu

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

s rješenjem $\mu(x) = \exp\left[\int \underbrace{\frac{1}{Q(x)}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]}_{\text{uvjet: funkcija od } x} dx\right]$

b) $P(x,y) = y^2 + 4x^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$

$Q(x,y) = -4xy \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -4y$ i $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$

Providnošću velikog matematičkog uma, a poučen iskustvom iz a) dijela zadatka, tražim Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(x)$

$$\mu(x) = \exp\left[\int \frac{1}{-4xy}(2y + 4y)dx\right] = \exp\left[\int \frac{6y}{-4xy}dx\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x}\right] = \exp\left[-\frac{3}{2}\ln x\right] = \exp\left[\ln x^{-\frac{3}{2}}\right] = x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\mu P dx + \mu Q dy = \left(y^2 x^{-\frac{3}{2}} + 4\sqrt{x}\right)dx - \frac{4y}{\sqrt{x}}dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\, x^{-\frac{3}{2}} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -4y \cdot x^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2y\, x^{-\frac{3}{2}}$$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ i jednadžba je egzaktna

Tražimo potencijal ϕ takav da vrijedi $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = -\frac{4y}{\sqrt{x}} \Rightarrow \phi(x,y) = -\frac{4}{\sqrt{x}}\int y\,dy + \varphi(x)$$

$$= -\frac{2y^2}{\sqrt{x}} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2y^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} + \varphi' = y^2 x^{-\frac{3}{2}} + \varphi' = P = y^2 x^{-\frac{3}{2}} + 4\sqrt{x}$$

$$\Longrightarrow \varphi'(x) = 4\sqrt{x} \Rightarrow \varphi(x) = 4\int \sqrt{x}\,dx + \varphi_0$$

$$\varphi(x) = 4 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + \varphi_0$$

$$\Longrightarrow \phi(x,y) = -\frac{2y^2}{\sqrt{x}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + \varphi_0$$

i opće rješenje je $\phi(x,y) = C$, tj

$$\boxed{-\frac{2y^2}{\sqrt{x}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} = C}$$

2. način: $\phi(x,y) = \int_1^x \left(y^2 x^{-\frac{3}{2}} + 4\sqrt{x}\right)dx + \int_0^y -\frac{4y}{\sqrt{1}}dy$

$$= -2\frac{y^2}{\sqrt{x}}\Big|_1^x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^x - 2y^2\Big|_0^y$$

$$= -\frac{2y^2}{\sqrt{x}} + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + \cancel{2y^2} - \frac{8}{3} - \cancel{2y^2}$$

$$= -\frac{2y^2}{\sqrt{x}} + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + C$$

$\Longrightarrow$ opće rj. $\boxed{\phi(x,y) = C}$

6. **(6 bodova)**

(a) **(3b)** Izvedite formulu za opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe

$$y' + f(x)y = g(x).$$

(b) **(3b)** Koristeći (a), pronađite opće rješenje jednadžbe

$$y' + 2xy = e^{-x^2}.$$

6. a) $y' + f(x)y = g(x)$

KNJIGA 6.2.2

b) $y' + 2xy = e^{-x^2}$

$f(x) = 2x$ $\qquad \int f(x)dx = \int 2x\,dx = x^2$

$g(x) = e^{-x^2}$

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left[c + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right] \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = e^{-x^2}\left[c + \int e^{-x^2}e^{x^2}dx\right]$$

$$y(x) = e^{-x^2}\left[c + \int dx\right]$$

$$y(x) = e^{-x^2}\left[c + x\right]$$

7. (8 bodova)

(2b) Izvedite formulu za Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(x)$ diferencijalne jednadžbe $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, te odredite uvjet uz koji on postoji.

(6b) Nađite Eulerov multiplikator oblika $\mu(x)$ i riješite pripadni Cauchjev problem:

$$(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

7.

$$\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\mu = 0$$

$$Q = y$$

$$P = x^2 + y^2 + x$$

$$\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] = \frac{1}{y}\left[0 - 2y\right] = -2$$

$$\frac{d\mu}{dx} - 2\mu = 0$$

$$\frac{d\mu}{dx} = 2\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = 2\,dx$$

$$\ln|\mu| = 2x$$

$$\mu = e^{2x}$$

MNOŽENJEM S MULTIPLIKATOROM JEDNADŽBA POSTAJE

$$e^{2x}(x^2+y^2+x)\,dx + e^{2x}y\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{2x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ✓ \text{ egzaktna}$$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C$$

$(x_0,y_0) = (0,0)$

$$= \int_0^x e^{2x}(x^2+x)\,dx + \int_0^y e^{2x}y\,dy + C$$

$$\left|\begin{matrix} u = x^2+x & dv = e^{2x}dx \\ du = (2x+1)dx & v = \frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}e^{2x}(x^2+x) - \int \underbrace{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)}_{u}\underbrace{e^{2x}dx}_{dv}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2+x) - \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot x^2$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot x^2\Big|_0^x + e^{2x}\frac{y^2}{2}\Big|_0^y + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2+y^2) + C$$

Rješenje je dano u implicitnom obliku $U(x,y) = C$

tj. $$e^{2x}(x^2+y^2) = C$$

Poč. uvjet $y(0) = 1 \Rightarrow 1(1+0) = C$

$$C = 1$$

Konačno rješenje: $$e^{2x}(x^2+y^2) = 1$$

6. **(5 bodova)** Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x^2y' = 2xy - y^2 \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

⑥ 1 način:

$$y' = \frac{2xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$y' = 2\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$\Rightarrow$ supst $\quad z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx$

$$y' = z'x + z$$

$$\Rightarrow xz' + z = 2z - z^2$$

$$xz' - z + z^2 = 0$$

$$xz' = z - z^2$$

$\rightarrow z=0$; $z=1$ su rješenja

$$\frac{z'}{z - z^2} = \frac{1}{x} \quad \Big| \int \rightarrow \text{parcijalni razlomci} \quad \frac{1}{z-z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

$$\int \frac{1}{z-z^2}\,dz = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|z| - \ln|1-z| = \ln|cx|$$

$$\ln\left|\frac{z}{1-z}\right| = \ln|cx|$$

$$\frac{z}{1-z} = Cx$$

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right)Cx = \frac{y}{x}$$

$$Cx - Cy = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{y = \frac{Cx^2}{1+Cx}}$$

Cauchyjev uvjet $y(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{4C}{1+2C} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{x^2}{2+x}}$

7. **(6 bodova)** Odredite parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba

$$\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dx + \left(\frac{\alpha \cdot (x - \sin x \cos x)}{y^3} + \cos y\right) dy = 0$$

bude egzaktna te za dobiveni α odredite opće rješenje zadane jednadžbe.

(7) $\frac{d}{dy}\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha(x - \sin x\cos x)}{y^3} + \cos y\right)$

$\sin^2 x \cdot (-2)\, y^{-3} = \frac{\alpha}{y^3} - \frac{\alpha}{y^3}\big(\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos(2x)}\big) \quad \Big|\cdot y^3$

$-2\sin^2 x = \alpha - \alpha\cos 2x$

$\alpha = \frac{-2\sin^2 x}{1-\cos(2x)} = \frac{-2\cancel{\sin^2 x}}{2\cancel{\sin^2 x}} = -1$

$\boxed{\alpha = -1}$

Tražimo funkciju $u(x,y)$ t.d. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin^2 x}{y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x + \sin x\cos x}{y^3} + \cos y$

$\Big| \int dy$

$u(x,y) = (-x + \sin x\cos x)\cdot\left(-\frac{1}{2y^2}\right) + \sin y + C(x)$

$u(x,y) = \left(-x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right)\cdot\left(\frac{-1}{2y^2}\right) + \sin y + C(x)$

$u(x,y) = \frac{-\frac{1}{2}\sin(2x) + x}{2y^2} + \sin y + C(x)$

[Bez naslova]

$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2y^2}\left(-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)\cdot 2 + 1\right) + C'(x)$

$\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} + C'(x) \quad \Big|\cdot 2$

$2\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1 + 2C'(x)$

$0 = C'(x)$

$\Leftrightarrow C(x) = C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x - \frac{1}{2}\sin(2x)}{2y^2} + \sin y = C \in \mathbb{R}$

6. **(5 bodova)** Odredite ortogonalnu familiju familije krivulja zadanih jednadžbom

$$xy = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

6. $xy = a \quad \Big/ \frac{d}{dx}$

$y + xy' = 0$ $\rightsquigarrow$ diferencijalna jednadžba zadane familije

Diferencijalna jednadžba ortogonalne familije glasi

$$y + x \cdot \left(-\frac{1}{y'}\right) = 0$$

$$y\,dy = x\,dx \quad \Big/ \int$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C = \frac{1}{2}x^2 \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = C \qquad C \in \mathbb{R}$$

(ortogonalna familija jednakostraničnih hiperbola u prvom i trećem kvadrantu je ponovno familija jednakostraničnih hiperbola)

7. (8 bodova)

(a) **(2b)** Izvedite formulu za Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(y)$ diferencijalne jednadžbe $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

(b) **(6b)** Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{1}{x+y}dx + \left(\frac{2\ln(x+y)}{y} + \frac{1}{x+y}\right)dy = 0.$$

7. (a) Ako je $\mu=\mu(y)$ Eulerov multiplikator diferencijalne jednadžbe

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

onda uvjet egzaktnosti povlači

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \mu'(y)P(x,y) + \mu(y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \mu(y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \mu' \cdot P = \mu \cdot (Q'_x - P'_y)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P}(Q'_x - P'_y)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}d\mu = \frac{1}{P}(Q'_x - P'_y)dy \quad \Big/\int$$

$$\Rightarrow \ln|\mu(y)| = \int \frac{1}{P}(Q'_x - P'_y)\,dy$$

(b) Imamo

$$P(x,y) = \frac{1}{x+y} \quad \Rightarrow \quad P'_y(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2},$$

$$Q(x,y) = \frac{2\ln(x+y)}{y} + \frac{1}{x+y} \quad \Rightarrow \quad Q'_x(x,y) = \frac{2}{y(x+y)} - \frac{1}{(x+y)^2},$$

pa diferencijalna jednadžba za Eulerov multiplikator oblika $\mu=\mu(y)$ glasi

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{\frac{1}{x+y}}\left(\frac{2}{y(x+y)} - \cancel{\frac{1}{(x+y)^2}} + \cancel{\frac{1}{(x+y)^2}}\right) = \frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu}d\mu = \frac{2}{y}dy \quad \Big/\int$$

$$\Rightarrow \quad \ln|\mu| = 2\ln|y| + \ln C \qquad C>0$$

$$\ln|\mu| = \ln C|y|^2 \qquad C>0$$

$$\mu = Cy^2 \qquad C\in\mathbb{R}$$

Dakle, traženi Eulerov multiplikator je $\mu=y^2$ (određujemo ga do na množenje konstantom) pa imamo egzaktnu jednadžbu:

$$\frac{y^2}{x+y}dx + \left(2y\ln(x+y) + \frac{y^2}{x+y}\right)dy = 0$$

Odredimo njen prvi integral (rješenje):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2}{x+y} & \Big/\int dx \quad \Rightarrow u(x,y) = y^2\ln(x+y) + \varphi(y) \quad \Big/\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y\ln(x+y) + \frac{y^2}{x+y} & \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y\ln(x+y) + \frac{y^2}{x+y} + \varphi'(y) \end{cases}$$

$$\cancel{2y\ln(x+y)} + \cancel{\frac{y^2}{x+y}} = \cancel{2y\ln(x+y)} + \cancel{\frac{y^2}{x+y}} + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C, \quad C\in\mathbb{R}$$

Rješenje zadane jednadžbe je

$$y^2\ln(x+y) = C, \quad C\in\mathbb{R}$$

6. **(7 bodova)** Zadana je diferencijalna jednadžba

$$(2x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$$

(a) **(1b)** Pokažite da je zadana diferencijalna jednadžba homogenog stupnja i odredite joj stupanj homogenosti.

(b) **(1b)** Pokažite da je zadana jednadžba Bernoullijeva diferencijalna jednadžba.

(c) **(5b)** Riješite zadanu diferencijalnu jednadžbu metodom po vlastitom izboru.

6. a) $P(x,y) = 2x^2 + y^2$

$Q(x,y) = -2xy$

$P(tx,ty) = 2(tx)^2 + (ty)^2 =$

$= t^2(2x^2+y^2) = t^2 P(x,y)$

$Q(tx,ty) = -2txty = t^2(-2xy) = t^2 Q(x,y)$

$\Rightarrow$ Jednadžba je homogena stupnja homogenosti 2.

b)

$2x^2+y^2-2xyy'=0$, odnosno

$y' - \frac{1}{2x}y = xy^{-1}$

$\Rightarrow$ Jednadžba je Bernoullijeva

c) Množenjem s $2y$ i uvođenjem supstitucije $z=y^2$ dobivamo

$z' - \frac{1}{x}z = 2x$

$z(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(C + \int 2x e^{-\int \frac{1}{x}dx}\right) = e^{\ln x}\left(C + \int 2x e^{-\ln x}dx\right) =$

$= x\left(C + \int 2\,dx\right) = x(C+2x) = Cx + 2x^2$

$y^2 = Cx + 2x^2$ je implicitno zadano rješenje

2. način: $y' - \frac{1}{2}\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ supst. $u = \frac{y}{x}$

$y' = u'x + u$

$u'x + u - \frac{1}{2}u = \frac{1}{u}$

$\frac{du}{dx}\cdot x = \frac{2-u^2}{2u}$

$\int \frac{2u}{u^2-2}du = -\int \frac{dx}{x} \quad /\int$

$\ln|u^2-2| = -\ln|x| + \ln C$

$\ln\left|\frac{y^2}{x^2}-2\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \quad /e$

$\frac{y^2-2x^2}{x^2} = \frac{C}{x} \quad /\cdot x^2$

$y^2 = Cx + 2x^2$

7. (5 bodova) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(2x + y^2 \cos(xy^2))\,dx + (2xy \cos(xy^2) + 3y^2)\,dy = 0.$$

7.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\cos(xy^2) - y^2\sin(xy^2)\cdot 2xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos(xy^2) - 2xy\sin(xy^2)\cdot y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ jednadžba je egzaktna

$$U(x,y) = \int_0^x P(s,y)\,ds + \int_0^y Q(0,t)\,dt + C =$$

$$= \int_0^x \left[2s + y^2\cos(sy^2)\right]ds + \int_0^y 3t^2\,dt + C =$$

$$= s^2 + \sin(sy^2)\Big|_0^x + t^3\Big|_0^y + C =$$

$$= x^2 + \sin(xy^2) + y^3 + C$$

Rješenja $y = y(x)$ implicitno su zadana jednadžbama $x^2 + \sin(xy^2) + y^3 = c$.

4. **(9 bodova)**

(a) **(3b)** Izvedite formulu za Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(y)$ diferencijalne jednadžbe

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

te odredite uvjet uz koji taj multiplikator postoji.

(b) **(6b)** Riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} (\cos x + y)\,dx + \left(3x + \dfrac{2}{y}\sin x\right)dy = 0, \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$$

4. (a) Ako diferencijalna jednadžba

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

ima Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(y)$, onda uvjet egzaktnosti povlači

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(y)P(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\mu(y)\,Q(x,y)\big)$$

$$\mu'(y)P(x,y) + \mu(y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \mu(y)\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

$$\mu'(y)P(x,y) + \mu(y)\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) = 0$$

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)$$

Budući da je lijeva strana funkcija koja ovisi samo o varijabli y, to i desna strana mora biti funkcija ovisna samo o y.

Uz taj uvjet postoji traženi multiplikator i vrijedi

$$\ln\mu(y) = \int \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dy\,.$$

(b) $P(x,y) = \cos x + y$

$Q(x,y) = 3x + \frac{2}{y}\sin x$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 3 + \frac{2}{y}\cos x - 1 = 2 + \frac{2}{y}\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{2 + \frac{2}{y}\cos x}{\cos x + y}$$

$$= \frac{2}{y}\cdot\frac{y+\cos x}{\cos x + y} = \frac{2}{y} \qquad (\text{ovisi samo o } y)$$

Prema (a) dijelu slijedi da zadana jednadžba ima Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(y)$ i vrijedi

$$\ln\mu(y) = \int \frac{2}{y}\,dy = \ln y^2 \Rightarrow \mu(y) = y^2.$$

Zato rješavamo egzaktnu jednadžbu

$$(y^2\cos x + y^3)\,dx + (3xy^2 + 2y\sin x)\,dy = 0.$$

Odredimo pripadni potencijal:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = y^2\cos x + y^3 \quad \Big/\int dx \Rightarrow u(x,y) = y^2\sin x + y^3x + \varphi(y) \quad \Big/\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 + 2y\sin x \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y\sin x + 3xy^2 + \varphi'(y)$$

$$\cancel{2y\sin x} + \cancel{3xy^2} + \varphi'(y) = \cancel{3xy^2} + \cancel{2y\sin x}$$

$$\varphi'(y) = 0$$

$$\varphi(y) = C$$

$$\Rightarrow u(x,y) = y^2\sin x + y^3x + C$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe je dano s

$$y^2\sin x + y^3x = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Iz početnog uvjeta

$$C = 1^2\cdot\sin\pi + 1^3\cdot\pi = \pi.$$

Zato je rješenje

$$y^2\sin x + y^3x = \pi.$$

6. (9 bodova)

(a) **(2b)** Navedite koje uvjete postavljamo na funkciju $f(x,y)$ u Picardovom teoremu da bismo osigurali lokalnu egzistenciju i jedinstvenost Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

(b) **(4b)** Pronađite neki pravokutnik $D = \langle a,b \rangle \times \langle c,d \rangle$ oko točke $(x_0, y_0) = (0,1)$ na kojem su ispunjeni uvjeti Picardovog teorema za Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} y' = x + \sqrt{y + 4x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Pokažite da su ti uvjeti ispunjeni na tom pravokutniku!

(c) **(3b)** Eulerovom metodom aproksimirajte vrijednost $y(1)$ ako funkcija y zadovoljava Cauchyjevu zadaću iz (b). Koristite podjelu intervala na 3 jednaka dijela.

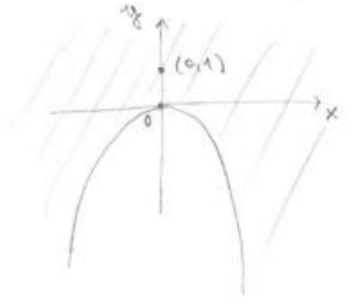
6.

(a) Da bi Cauchyjeva zadaća $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ lokalno imala egzistenciju i jedinstvenost rješenja treba postojati pravokutnik oko točke (x_0,y_0) na kojem je $f(x,y)$ neprekinuta i $\frac{\partial f}{\partial y}$ omeđena.

(b) $(x_0,y_0) = (0,1)$

$$\begin{cases} y' = x + \sqrt{y+4x^2} = f(x,y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\mathcal{D}_f = \{ (x,y) : y + 4x^2 \geq 0 \}$
$y \geq -4x^2$



$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y+4x^2}}$$

za $D = \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \times \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$:

- f je neprekinuta jer je $D \subseteq \mathcal{D}_f$ ($y + 4x^2 \geq \frac{1}{2} > 0$) , a f je po svojoj definiciji neprekinuta na domeni
- $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \frac{1}{2\underbrace{\sqrt{y+4x^2}}_{\geq \frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall (x,y) \in D$

Zadovoljeni su uvjeti Picardovog teorema $\Rightarrow$ postoji jedinstveno rješenje $y(x)$ na ol x

(c) $n=3$, $y(1) = ?$, $h = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$, $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

n	x_n	y_n	$f(x_n,y_n) = x_n + \sqrt{y_n + 4x_n^2}$
0	0	1	$0 + \sqrt{1+0} = 1$
1	$1/3$	$4/3$	$1/3 + \sqrt{4/3 + 4 \cdot 1/9} = 1/3 + 4/3 = 5/3$
2	$2/3$	$17/9$	$2/3 + \sqrt{17/9 + 4 \cdot 4/9} = 2/3 + \frac{\sqrt{33}}{3}$
3	1	$\frac{19+\sqrt{33}}{9}$	

$$\Rightarrow y(1) \approx \frac{19+\sqrt{33}}{9}$$

7. (6 bodova) Pronađite opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

(a) **(3b)** $y' = \dfrac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$

(b) **(3b)** $(ye^x + 2x)\,dx + e^x\,dy = 0$

7.

(a) $$y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$$

Uvedimo supstituciju: $z = \frac{y}{x}$

$$z \cdot x = y \quad /'$$

$$y' = z' \cdot x + z$$

$$z' \cdot x + \cancel{z} = \cancel{z} + e^{-z}$$

separacija varijabli

$$\int e^{z}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$e^{z} = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow e^{y/x} = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) $$(ye^{x} + 2x)\,dx + e^{x}\,dy = 0$$

uvjet egzaktnosti:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ✓$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_0^x (ye^{x} + 2x)\,dx + \int_0^y e^{0}\,dy$$

$$= (ye^{x} + x^2)\Big|_0^x + y\Big|_0^y$$

$$= ye^{x} + x^2 - \cancel{y} + \cancel{y}$$

$$\Rightarrow \text{Rj: } ye^{x} + x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

6. (6 bodova) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' + \frac{2}{x}y = x^4y^4$.

6. $y' + \frac{2}{x}y = x^4 y^4$ ⇝ Bernoullijeva jednadžba, $n=4$

Supstitucija: $z = y^{1-4} = y^{-3}$

$\Rightarrow z' = -3y^{-4}y'$

Jednadžba postaje:

$$y^{-4}y' + \frac{2}{x}y^{-3} = x^4$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}z' + \frac{2}{x}z = x^4 \qquad \text{(linearna ODJ 1. reda)}$$

1° Homogena jednadžba

$$-\frac{1}{3}z' + \frac{2}{x}z = 0$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{6dx}{x} \quad / \int \qquad \text{Slučaj } z=0 \Rightarrow \frac{1}{y^3}=0 \text{ nije moguć.}$$

$$\ln|z| = 6\ln|x| + \ln C \quad C>0$$

$$|z| = C|x|^6 \quad C>0$$

$$z = Cx^6 \quad C \neq 0$$

2° Varijacija konstant

$$z(x) = C(x)x^6$$

$$z' = C'x^6 + 6Cx^5$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}z' + \frac{2}{x}z = -\frac{1}{3}C'x^6 - \cancel{2Cx^5} + \cancel{2Cx^5} = -\frac{1}{3}C'x^6 = x^4$$

$$\Rightarrow C' = -3 \cdot \frac{1}{x^2} \quad / \int dx$$

$$\Rightarrow C = \frac{3}{x} + D \quad D \in \mathbb{R}$$

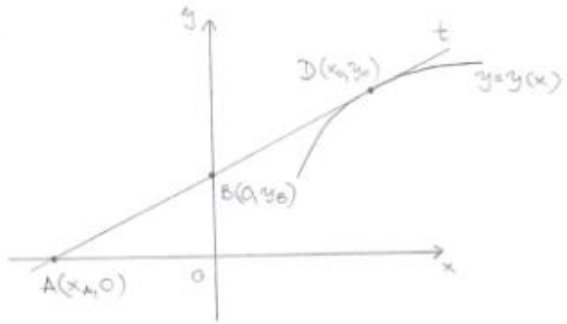
$$\Rightarrow z = 3x^5 + Dx^6 \quad D \in \mathbb{R}$$

Opće rješenje:

$$y^{-3} = 3x^5 + Dx^6 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x^5 + Dx^6}}, \ D \in \mathbb{R}}$$

7. (6 bodova) Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $(3, 1)$, a čija tangenta u proizvoljnoj točki ima svojstvo da njeno sjecište s y-osi raspolavlja dužinu koja spaja njeno sjecište s x-osi i dirallište s krivuljom.

7.



Tangenta na krivulju u točki (x_0, y_0):

$$t \ldots \quad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

U točki presjeka tangente s osi apscisa imamo

$$y = 0 \Rightarrow x_A = x_0 - \frac{1}{y'(x_0)} y_0$$

U točki presjeka tangente s osi ordinata imamo

$$x = 0 \Rightarrow y_B = y_0 - y'(x_0) x_0$$

Iz uvjeta da je B polovište dužine $\overline{AD}$:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}(x_A + x_D) &\Rightarrow 2x_0 - \frac{1}{y'(x_0)} y_0 = 0 \\ y_B = \frac{1}{2}(y_A + y_D) &\Rightarrow y_0 - y'(x_0) y_0 = \frac{1}{2} y_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_0 = 2y'(x_0) x_0$$

Budući da je (x_0, y_0) proizvoljna točka krivulje:

$$y = 2y'x$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2x}\,dx \quad \Big/ \int$$

• $y=0$ nije rješenje (početni uvjet)

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C \qquad C > 0$$

$$y = C\sqrt{x} \qquad C \neq 0$$

Iz početnog uvjeta: $y(3) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{x}{3}} \Rightarrow \boxed{y^2 = \frac{1}{3}x}$$