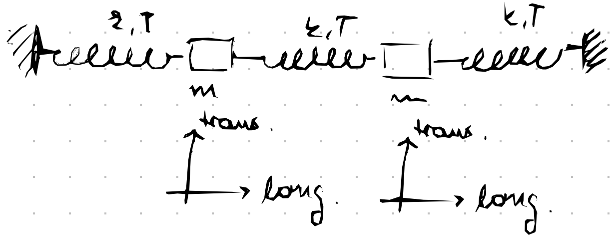
MEHANIČKI VALOVI

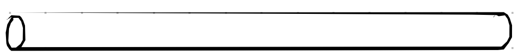
Podsjetnik: vezani oscilatori



-> svaka masa može titrati longitudinalno ili transverzalno

Frekv. titranja vlastitih modova: $\underbrace{\omega_{long} \sim \sqrt{k}}$ · presudnu ulogu ima tvrdoća $\underbrace{\omega_{trans} \sim \sqrt{T}}$ · presudnu ulogu ima napetost

Beskonačno dugačak lanac ~ možemo shvatiti kao tanki el. štap, (napeta struna ili napeta struna)



l, m, k, T

ima neku duljinu i masu — elastični — napeti

- valno gibanje "gura" čestice jednu po jednu redom

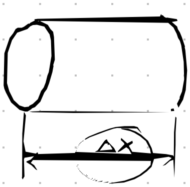
* ako se veliki štap ponaša kao opruga konstante k, onda se svaki el. ponaša kao opruga konstante

$$k \cdot \frac{l}{\Delta x}$$

=> rastavimo sustav na male komadiće

$$\Delta m = m \cdot \frac{\Delta x}{l}$$

to je taj jedan elem. =>

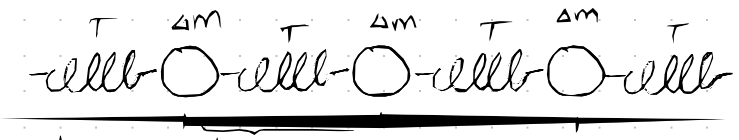


pa kad bismo zbrajali za svaki komadić (zbrajali bismo recipročno jer serija) dobili bismo k čitavog štapa

T - napetost

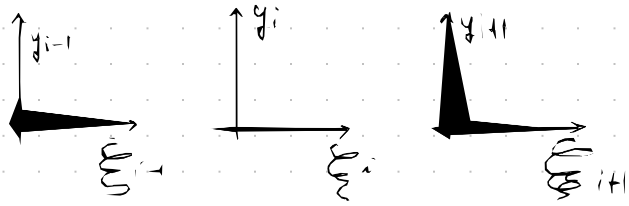
nastavak →

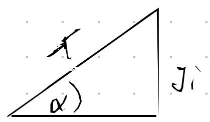
↳ shvatimo štap kao lanac:



rav. pol.: x_{i-1} Δx x_i x_{i+1}

otklon od ravn. pol.:





$\sin\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

▸ transverzalno ↕

Lijevo desno

j.g. $\Rightarrow \Delta m \ddot{y}_i = -T \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} - T \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow -T \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - T \cdot \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} \ddot{y}_i = T \cdot \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

y_i shvatimo kao funkciju po x i t

↳ linijska gustoća mase (kg po metru) $\mu = \frac{dm}{\Delta x} = \frac{m}{\ell}$

$y_i \to y[x_i, t]$

$y_{i-1} \to y[x_{i-1}, t]$

↳ $y[x_i - \Delta x, t]$

$$\mu \ddot{y}_i = T \cdot \underbrace{\frac{y[x_i - \Delta x, t] - 2y[x_i, t] + y[x_i + \Delta x, t]}{(\Delta x)^2}}$$

* kada $x \to 0$ (limes) → to je druga derivacija $\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} y[x,t] \Big|_{x = x_i}$

akc. je po vremenu $= \frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x,t]$

$$\Rightarrow \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x,t] - T \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} y[x,t] = 0$$

$$\boxed{\mu \cdot \ddot{y} - T \cdot y'' = 0}$$

– vrijedi u bilokojoj točki

po vremenu   po položaju

$\Rightarrow \ddot{y} - \frac{T}{\mu} y'' = 0$

v^2

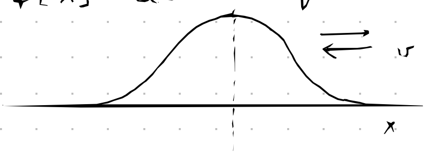
nešto pozitivno

→ Valna jednadžba $\ddot{y} - v^2 y'' = 0$

ima rješenje $y[x,t] = f[x \pm vt]$

npr.

$f[x] = a e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}$ (Gausova)



$\rightleftarrows$ $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

što smo jače napeli žicu, to val brže putuje

DOKAZ:

$t \to$ gibanje u lijevo

$- \to$ gibanje u desno

$$\ddot{y} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x,t] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f[x \pm vt] = f''[x \pm vt] v^2$$

$$y'' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y[x,t] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f[x \pm vt] = f''[x \pm vt]$$

↳ $\ddot{y} - v^2 \cdot y'' = 0 \longrightarrow f''[x \pm vt] v^2 - v^2 \cdot f''[x \pm vt] = 0$

↳ $0 = 0$ ✓

$$\mu \ddot{y}_i = T \cdot \underbrace{\frac{y[x_i-\Delta x, t] - 2y[x_i, t] + y[x_i+\Delta x, t]}{(\Delta x)^2}}$$

kada $x \to 0$ (limes) $\longrightarrow$ to je druga deriv $\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} y[x,t] \Big|_{x=x_i}$

ZAŠTO?

prva deriv:

$$f'[x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x/2] - f[x-\frac{\Delta x}{2}]}{\Delta x}$$

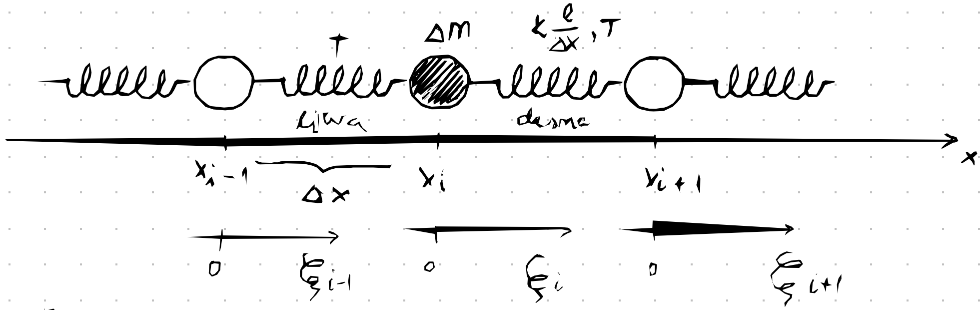
* isto kao $f[x+\Delta x] - f(x)$

druga deriv:

$$f''[x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\frac{\Delta x}{2}] - f'[x-\frac{\Delta x}{2}]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f[x+\Delta x] - f(x)}{\Delta x} - \frac{f[x] - f[x-\Delta x]}{\Delta x}\right)$$

$$f''[x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[x-\Delta x] - 2f(x) + f[x+\Delta x]}{(\Delta x)^2}$$

Longitudinalno valno gibanje



$\Delta m \cdot \ddot{\xi}_i =$ (T zanemarimo jer je lijevo i desno isto)

$$= \underbrace{k\frac{l}{\Delta x}(\xi_{i+1} - \xi_i)}_{\text{djelovanje desne na srednji}} - \underbrace{k\frac{l}{\Delta x}(\xi_i - \xi_{i-1})}_{\text{djelovanje lijeve}} \quad / : \Delta x$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}\ddot{\xi}_i = k \cdot l \, \frac{\xi_{i-1} - 2\xi_i + \xi_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\mu \cdot \ddot{\xi}_i - k \cdot l \cdot \frac{\xi[x-\Delta x, t] - 2\xi[x,t] + \xi[x+\Delta x, t]}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi[x,t] = k \cdot l \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi[x,t]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\ddot{\xi} - \underbrace{\frac{kl}{\mu}}_{v^2}\xi'' = 0} \quad \Rightarrow \ddot{\xi} - v^2 \xi'' = 0$$

Superpozicija valova i refleksija na čvrstom i slobodnom kraju sredstva

Refleksija vala na čvrstom kraju sredstva

- transverz. val → $y[x,t]$ ima čvrsti kraj sredstva $x = x_0$
  - ↳ njegovo ponašanje u x_0 opisujemo **rubnim uvjetom čvrstog kraja**
    - ↳ $y[x=0,t] = y[x_0,t] = 0$

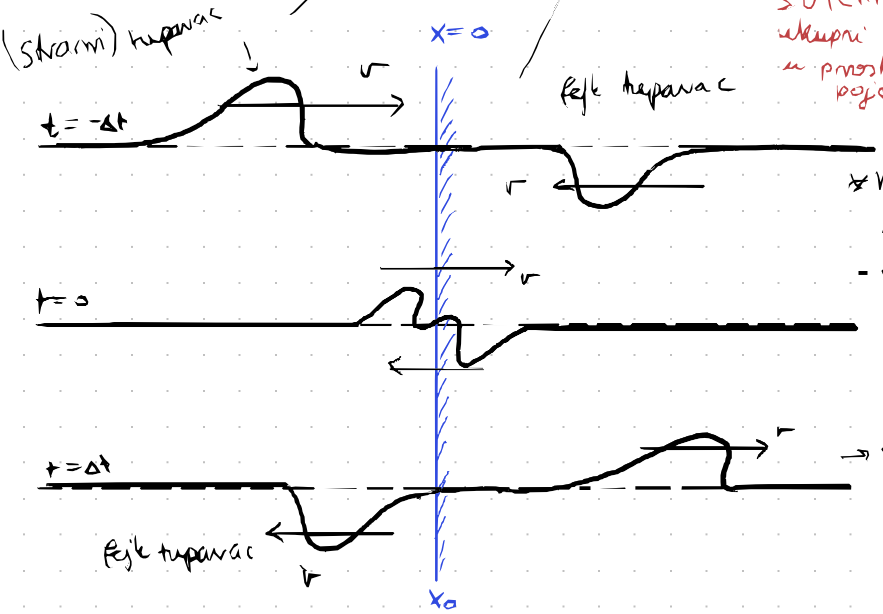
· čestica pri čvrstom kraju sredstva je nepomična

- longitud ⇒ samo zamijenimo $y[x,t]$ sa $\xi[x,t]$

ovaj val $f[x-vt]$ + drugi val $= -f[-(x+vt)]$ → ZADOVOLJAVA RUBNI UVJET

$x<0$ $\qquad$ $x>0$

SUPERPOZICIJA: ukupni pomak čestice sredstva u prostoru je zbroj svakog pojedinog vala

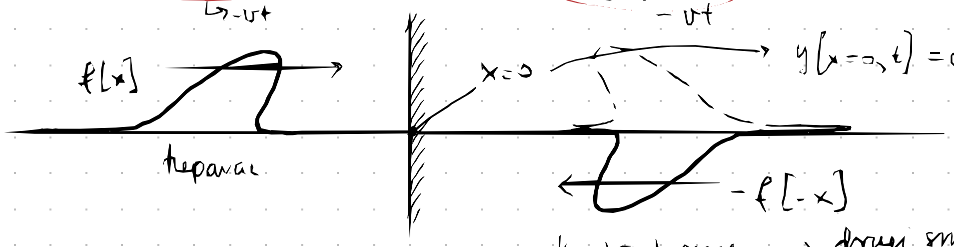


* mi vidimo samo njenu stranu,
- desna je „iza zida"

→ stvarni hupavac ide „izmišljenim mjestom"

· šaljemo jednu funkciju, zovemo drugu nazad

$y[x,t] = \underbrace{f[x-vt]}_{-vt}$ $+$ $\underbrace{-f[-(x+vt)]}_{-vt}$



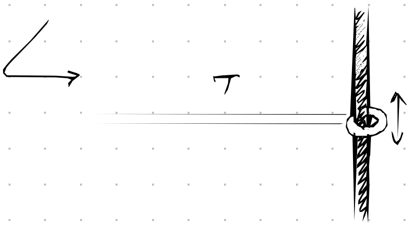
– drugi smjer, druga pozicija

$y[x,t] \xrightarrow[x=0]{\text{u spoju}} y[x=0,t] = \cancel{f[vt]} - \cancel{f[-(0+vt)]} \Rightarrow \boxed{y[x=0,t]=0}$

Oblik se ne mijenja, jedino biva preslikan na drugu stranu

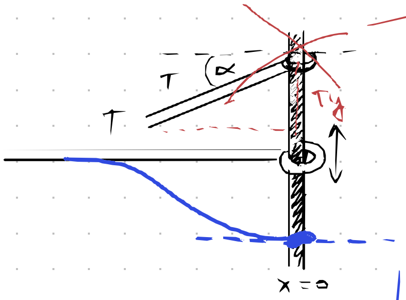
Slobodni kraj

- TRANSVERZ. na napetom užetu → slobodan kraj = slobodno gibanje u ↕
- LONGITUD: kraj užeta mora biti učvršćen na neki način da bi se osigurala napetost T



nije stabiliziran kraj, ali ako potegnemo je napeto

- rubni uvjet slobodnog tipa



zadnji komadić mase $\Delta m \to 0$

ali ima F

$\Delta m = \frac{F}{a} \longrightarrow 0$

da bi to bilo točno $a \to \infty$

a to ne može!

može doći samo okomito

Zabrana prostorne derivacije → nema nagiba na slobodnom kraju

rubni uvjet

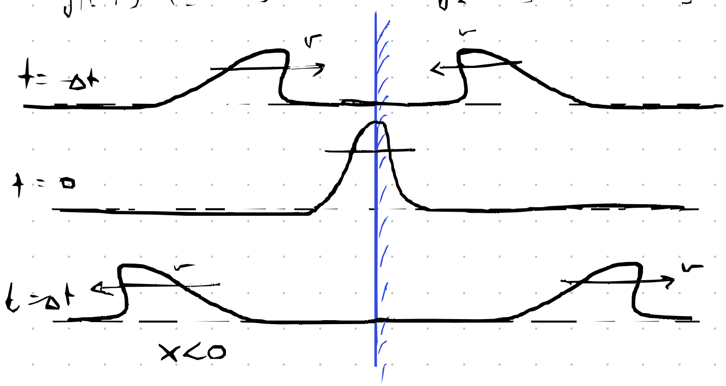
$$\frac{\partial}{\partial x} y[x=0,t] = \boxed{y'[x=0,t]=0}\ !$$

* LONGITUD → samo zamijenimo $y[x,t]$ za $\xi[x,t]$

formula lijevog vala ne zadovoljava $y'[x=0,t]=0$

→ zato dodajemo drugi val $y_2[x,t]$

$y_1(x,t) = f[x-vt]$ $\qquad$ $y_2[x,t] = f[-(x+vt)]$



$$y[x,t] = f[x-vt] + f[-(x+vt)] \to x=0 \to y[0,t] = f(-vt) + f(-vt)$$

$$y[0,t] = 0 \to y'[x=0,t] = 0 \quad ✗$$

→ promatramo li val u $x<0$ (lijevi) možemo ga shvatiti kao superpoziciju upadnog vala $f[x-vt]$ i reflektiranog vala $f[-(x+vt)]$

⇒ reflektirani kraj zadržava oblik & predznak upadnog vala

Putujući i stojni harmonijski val

Putujući harmonijski val

- čestica el. sustava titraju ↕ ili ↔

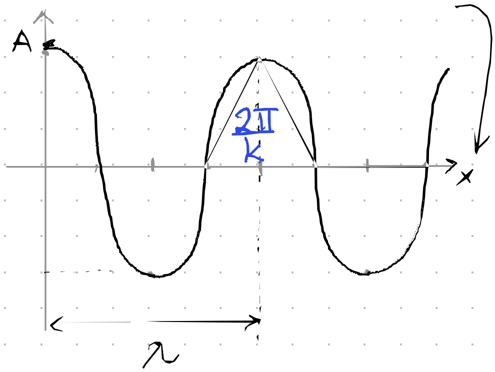
· Amplituda, valni broj, faza

$$y[x,t] = f[x - vt] = \underbrace{A}_{\text{amplituda}}\cos\overbrace{[\underbrace{k}_{\text{valni broj}}(x - vt) + \underbrace{\varphi}_{\text{početna faza u } x=0 \text{ i } t=0}]}^{\text{faza harm vala}}$$

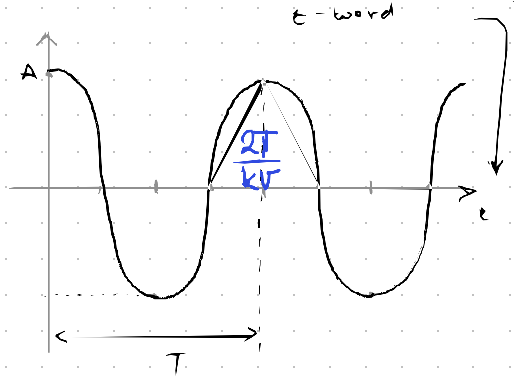
tu longitud → $y[x,t]$ ↷ $\xi[x,t]$

Valna duljina i frekvencija harmonijskog vala

ovisnost otklona u prostornoj x-koord.



ovisnost otklona u vremenskoj t-koord.



- period u x-osi = valna duljina

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- period u t-osi = vremenski period

$$T = \frac{2\pi}{kv}$$

, možemo povezati sa ω → $\underline{\omega = kv}$

$$\lambda k = 2\pi$$

$$k = \frac{\omega}{v}$$

$$\lambda \frac{\omega}{v} = 2\pi$$

$$\boxed{\lambda \cdot \omega = 2\pi v}$$

Stojni harmonijski val

· dva trans. ili longitud. vala jednake frekvencije i amplitude putuju istim sredstvom u suprotnim smjerovima

↳ njihovom superpozicijom nastaje gibanje koje u kojem više ne prepoznajemo gibanje vala u jednom ili drugom smjeru

⇒ možemo samo razaznati je li TRANS ili LONG

Superpozicija 2 harm. vala

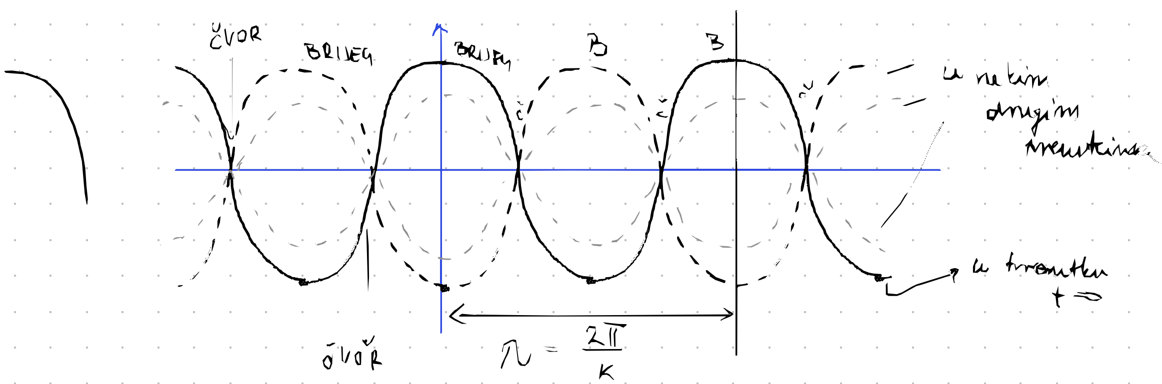
↳ valna duljina ⇒ $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, ω , $\frac{A}{2}$

amplituda ovisi o x-koord.

$$\Rightarrow y[x,t] = \frac{A}{2}\cos(kx - \omega t) + \frac{A}{2}\cos(kx+\omega t) = \overbrace{A\cos kx}\cdot\underline{\cos\omega t}$$

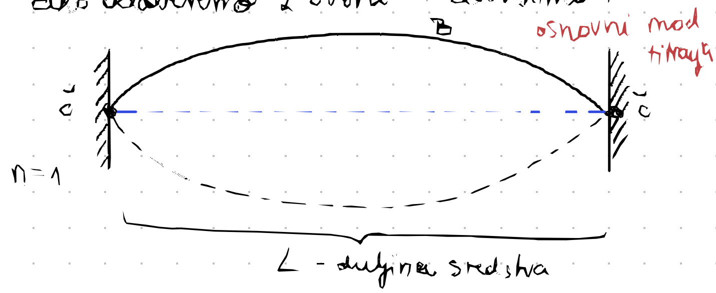
čestice titraju frekv ω

Valna duljina, čvorovi i brjegovi stojnog harm vala

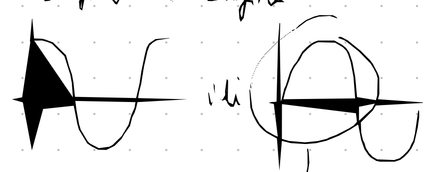


U sredstvu s čvrstim krajevima → bilo koji čvor može biti čvrst

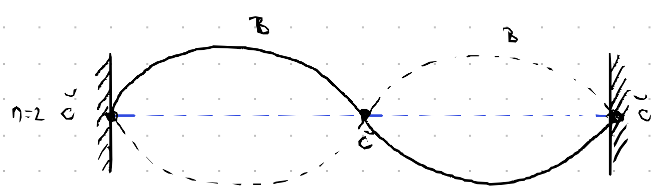
ako odaberemo 2 čvora i učvrstimo ih



ako je valna duljina



onda je ovo pola → $\boxed{L = \frac{\lambda}{2}}$

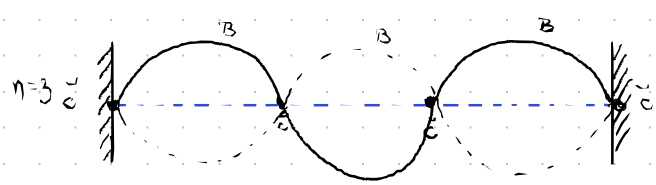


- nameće se uvjet

$$\boxed{L = n\frac{\lambda}{2}}$$

$n = 1, 2 \dots$

↳ broj trbuha



ako znamo do

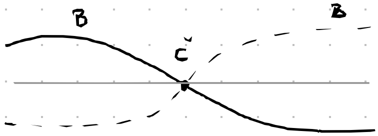
$$\Leftarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad \omega_n = \frac{2\pi v}{\lambda_n} = n\frac{\pi v}{L}$$

Stojni harm val u sredstvu sa slobodnim krajevima

- ne dolazi do naprezanja sredstva

↳ f-ja koja opisuje mora poštovati rubni uvjet slobodnog kraja na oba kraja ($y'[x,t]=0$) - prostornu deriv jednaku nuli

$n=1$

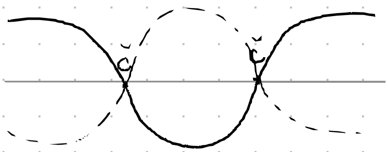


vrijedi isto: $L = n\frac{\lambda}{2}$ $n=1,2\dots$

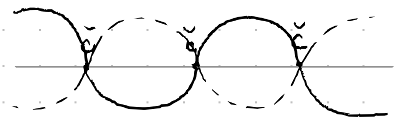
↓

n = broj čvorova!

$n=2$



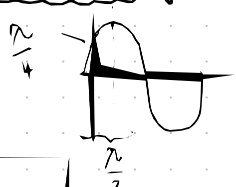
$n=3$

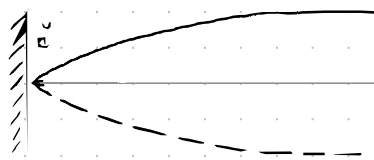


Jedan čvrsti i jedan slobodni kraj

čvor - čvrst kraj

brijeg - slobodni kraj

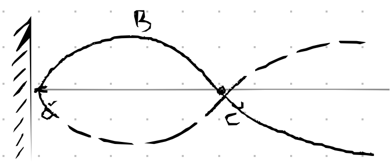




$n=1$

$L = \frac{1}{4}\lambda$

$$L = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4} \quad , n=1,2\dots$$



$n=2$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n-1}, \quad \omega_n = \frac{2\pi v}{\lambda_n} = \left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi v}{L}$$