6. REDOVI

6.1.1. Definicije i osnovna svojstva

- niz: $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$

- red: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$

Pr.) $a_n = n^2 \quad 1, 4, 9, 16 \dots$

ovakav red divergira

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum n^2 = 1+4+9+16+25+\dots = +\infty$

red konvergira

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{1.5}+\frac{1}{4}}_{1,75}+\frac{1}{8}}_{1,875}+\dots \approx 1.999 = 2$

3) da bi red konvergirao opći član se mora smanjivati

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots = +\infty$$

WOW! huh?

DEF Red brojeva ($a_n \in \mathbb{R}$)

Izraz oblika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pri čemu a_n zovemo općim članom reda, a svakom redu je pridružen NIZ parcijalnih suma.

Parcijalna suma: suma prvih n članova: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

DEF red $\sum a_n$ konvergira prema broju S ako konvergira niz njegovih parc. sum, tj. ako je $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (S zovemo suma reda).

Pr.: Geometrijski niz: $a_1, a_2 = a_1 \cdot q, a_3 = a_1 \cdot q^2, \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1-q^n) = \frac{a}{1-q} \cdot 1 \Rightarrow$$

$q^n \to 0$ ako je $|q|<1$

Zaključak: Suma geom. reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}, \quad |q|<1$$

Primjer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots$

a)

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$$

pokrati se sa zadnjim članom prijašnjeg el.

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{1} + \cancel{\frac{-\frac{1}{2}}{3}}}_{n=1} + \underbrace{\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{3}} + \cancel{\frac{-\frac{1}{2}}{5}}}_{n=2} + \overbrace{\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{5}} + \cancel{\frac{-\frac{1}{2}}{7}}}^{n=3} + \dots + \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$$

pokrati se sa sljedećim prvim članom

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2n+1}$ to ostane

$\hookrightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{-1}{2n+1}}\right) = \frac{1}{2}$ red konvergira

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$S_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$S_n = \ln(2) + \underbrace{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ $\quad \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \frac{n-1+1}{n-1} = \ln(n) - \ln(n-1)$

$S_n = \cancel{\ln(2)} + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)} + \ln(4) - \cancel{\ln(3)} + \dots + \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)}$ pokrati se

$\longrightarrow S = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$

TM Ako $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergiraju, tada $\sum(a_n+b_n)$ isto konvergira

Pr.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^{n+2}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} + 9\,\frac{\frac{3}{4}}{1-3/4} = \frac{1}{3} + 27 = \frac{82}{3}$

PAZI: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{1} + \dots (-1)^n$ = divergira

0 1 2 3 4 5

$S_1 = 1 \quad S_2 = 0 \quad S_3 = 1 \quad \dots$ dva gomilišta parcijalnih suma

$\lim_{n\to\infty} S_n$ ne postoji!

TM Nužan uvjet konvergencije

Ako red $\sum a_n$ konvergira, tada $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

DOKAZIĆ: $a_n = S_n - S_{n-1}$ $\longleftarrow$ $S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n$

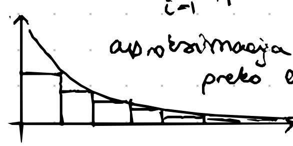
napadnimo s limesom: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} = S - S = 0$$

OBRAT NE VRIJEDI: ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ne znamo konvergira li ili divergira red.

=> PROTUPRIMJER: harmonijski red: $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

ALI DIVERGIRA!



aproksimacija preko ln ∫ Banić

znamo iz MATAN I: $e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ / ln (rastuća)

$$\ln e > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$1 > n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad / : n$$

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_n \frac{1}{n} > \sum_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1)$$

$$\sum_n \frac{1}{n} > \infty \longrightarrow \text{DIVERGIRA}$$

6.1.2. REDOVI S NENEG. ČLANOVIMA

gledamo redove s $a_n \geq 0$, tada je S_n rastući niz

TM Red s ne neg. čl. konvergira akko mu je niz S_n omeđen.

Dokaz: očito iz matan 1

TM Poredbeni kriterij. Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s ne neg. članovima t.d. $a_n \leq b_n$

a) Ako $\sum a_n$ divergira $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ divergira

b) Ako $\sum b_n$ konvergira $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ konvergira

DOKAZ: Ako $\sum a_n$ div $\Rightarrow$ parc suma A_n nije omeđena (zbog $B_n \geq A_n$)
a) ni parc suma B_n nije omeđena $\rightarrow$ $\sum b_n$ divergira

b) Ako $\sum b_n$ konv. $\Rightarrow$ parc suma B_n je omeđena pa je omeđena i parc suma A_n $\rightarrow$ $\sum a_n$ konvergira

OBRATI NE VRIJEDE

Prošli put: veći konv $\longrightarrow$ manji konv.
manji div $\longrightarrow$ veći diverg.

Pr.) $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_n \frac{1}{n}$ div $\rightarrow$ divergira po poredbenom

Općenito:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \begin{cases} r>1, & \text{red konvergira} \\ r \leq 1, & \text{red divergira} \end{cases}$$

(dokaz kasnije

$\Longrightarrow$ dokazali poredbeni

Obrat ne vrijedi: npr. $\sum \frac{1}{n^2} \leq \sum \frac{1}{n}$
manji konv., ali veći div.