10. Skalarni umnozak. Ortogonalne i simetricne matrice

zadaci sa ispita

ZI23

5. (10 bodova)

   (a) Definirajte ortogonalnu matricu.

   (b) Nađite sve ortogonalne matrice oblika

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & a \\ b & c \end{bmatrix}.$$

   (c) Dokažite da za svaku ortogonalnu matricu $S \in \mathcal{M}_n$ i za svaki vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\|S\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

Zadatak 5.

RJEŠENJE **a) (2 boda)**
Matrica $S \in \mathcal{M}_n$ je ortogonalna ako su joj stupci ortonormirani vektori.

b) (4 boda)
Stupci i retci zadane matrice $S = \begin{bmatrix} 1/3 & a \\ b & c \end{bmatrix}$ moraju biti ortonormirani vektori. Zato je

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} + a^2 = 1 &\implies |a| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{9} + b^2 = 1 &\implies |b| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ a^2 + c^2 = 1 &\implies |c| = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Predznaci od a, b i c se lako odrede iz uvjeta ortogonalnosti $\frac{1}{3}a + bc = 0$. Sveukupno dobivamo četiri rješenja:

$$S_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad S_4 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

c) (4 boda)

$$||S\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\langle S\boldsymbol{x} | S\boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\langle \boldsymbol{x} | S^T S\boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \rangle} = ||\boldsymbol{x}||.$$

□

JIR23

6. (10 bodova)

(a) Neka je $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ ortogonalna baza u unitarnom prostoru i neka je $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n$. Odredite koeficijente a_i.

(b) Nadopunite skup

$$\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

do ortonormirane baze u $\mathbb{R}^4$.

Zadatak 6.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** Teorem 4 u knjižici, poglavlje 10.

b) Promotrimo skup $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset \mathbb{R}^4$, gdje je

$$e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1), \quad e_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \quad e_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1).$$

Lako se provjeri da je ovaj skup ortonormiran.

Napomena: Općenit postupak nadopunjavanja nekog ortonormiranog skupa do ortonormirane baze jest nadopuniti skup do baze, a potom ga ortonormirati (Gramm-Schmidt). Međutim, u ovom zadatku je bilo jednostavno odabrati dva nova vektora koji automatski nadopunjavaju početni skup vektora do ortonormirane baze. $\square$

DIR23

6. (10 bodova)

   (a) Neka je $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da je $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ simetrična matrica.

   (b) Za vektor $\boldsymbol{x} = (1, 2, -1)$ nađite ortonormiranu bazu u kojoj je $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ dijagonalna.

Zadatak 6.

RJEŠENJE **a)**

$$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)^T = (\boldsymbol{x}^T)^T\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T.$$

Dakle, $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ je simetrična matrica.

b)

$$X := \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice X su nultočke karakterističnog polinoma:

$$\det(\lambda I - X) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 6).$$

Dakle, svojestvene vrijednosti su $\lambda_{12} = 0$ i $\lambda_3 = 6$. Kako je λ_{12} dvostruka nultočka, dimenzija njenog svojstvenog potprostora će biti 2. Štoviše, jednom kad nađemo svojstveni potprostor svojstvene vrijednosti λ_3 (koji je jednodimenzionalan), odmah znamo i kako izgleda svojstveni potprostor svojstvene vrijednosti λ_{12}, budući da su svojstveni vektori simetrične matrice pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno okomiti (teorem 8, poglavlje 10). Dakle, naći ćemo (jedinični) svojstveni vektor $\boldsymbol{v}_3$ svojstvene vrijednosti λ_3, nakon čega odmah znamo da je svojstveni potprostor pridružen λ_{12} skup

$$V_{12} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_3 = 0\}.$$

Naći ćemo ortonormiranu bazu za taj potprostor i bit ćemo gotovi.

Vektor $\boldsymbol{v}_3 = (x, y, z)$ zadovoljava jednadžbu $(6 - X)\boldsymbol{v}_3 = 0$. Radimo elementarne transformacije na retcima matrice $6I - X$:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $y = -2z$ i $x = -z$, pa je

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1).$$

Sada tražimo ortonormiranu bazu za V_{12}. Dovoljno je da nađemo proizvoljan jedinični $\boldsymbol{v}_1 \in V_{12}$, a potom $\boldsymbol{v}_2$ ili pogodimo ili izračunamo kao $\boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{v}_1$. Neka je $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in V_{12}$.

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_3 = 0 \implies x + 2y - z = 0 \implies \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \implies$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}}(2, -2, -2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1).$$

$\square$

ZI22

5. (10 bodova) Na vektorskom prostoru X dan je skalarni produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{R}$.

   (a) Definirajte normu od $\mathbf{x}$, $\|\mathbf{x}\|$, te kut φ između $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, gdje su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

   (b) Koristeći funkciju
   $$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = \langle t\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid t\mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle,$$
   dokažite da za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ vrijedi Cauchy-Schwarzova nejednakost:
   $$|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

   (c) Dokažite da za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ vrijedi nejednakost trokuta: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

   (d) Ukratko obrazložite zašto je definicija kuta između $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ koju ste naveli u (a) podzadatku dobra (ima smisla).

(5.) (a) NORMA vektora $\vec{x} \in X$ je dana s

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}\,.$$

KUT φ između vektora $\vec{x}, \vec{y} \in X$ je definiran izrazom

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}\,.$$

(b) Za zadanu funkciju f imamo

$$f(t) = \langle t\vec{x} + \vec{y} \,|\, t\vec{x} + \vec{y} \rangle$$

$$= \langle t\vec{x} | t\vec{x} \rangle + \langle t\vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{y} | t\vec{x} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle$$

$$= t^2 \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle + t \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + t \underbrace{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}_{= \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle} + \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle$$

$$= \|\vec{x}\|^2 t^2 + 2 \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle t + \|\vec{y}\|^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

S druge strane

$$f(t) = \|t\vec{x} + \vec{y}\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

a budući da je vodeći koeficijent ove kvadratne funkcije nenegativan, njena diskriminanta mora biti manja ili jednaka nuli kako bi vrijedila gornja nejednakost:

$$D = 4 \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2 - 4 \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow |\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|,$$

što je upravo Cauchy-Schwarzova nejednakost.

(c) Koristimo funkciju f i Cauchy-Schwarzovu nejednakost iz (b) podzadatka. Imamo

$$\begin{aligned}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= f(1)\\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2\\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle| + \|\vec{y}\|^2\\ &\overset{CS}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2\\ &= (\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

(d) Prema Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti

$$|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

$$\Rightarrow -\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \leq \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \quad \Big| : \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| > 0$$

(ovo smijemo pretpostaviti jer se kut definira za ne-nul vektore)

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} \leq 1$$

Dakle, za svaka dva (ne-nul) vektora $\vec{x}, \vec{y} \in X$, vrijednost izraza $\frac{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$ je element intervala $[-1,1]$ pa postoji jedinstveni $\varphi \in [0,\pi]$ takav da $\cos\varphi = \frac{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$, što definicija kuta iz (a) podzadatka

čini dobrom.

ZIR22

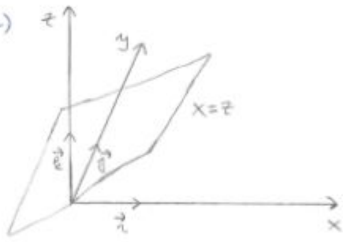
6. (10 bodova) Neka je $A\colon V^3 \to V^3$ operator zrcaljenja s obzirom na ravninu $x = z$.

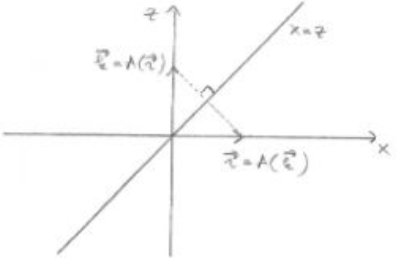
   (a) Odredite matricu $\mathbf{A}$ pridruženu operatoru A u bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

   (b) Nađite svojstvene vrijednosti operatora A.

   (c) Nađite ortogonalnu matricu $\mathbf{S}$ takvu da je matrica $\mathbf{S}^\top \mathbf{A} \mathbf{S}$ dijagonalna matrica.

(a)





Zadana ravnina prolazi y-osi i simetralom prvog i trećeg kvadranta u Oxz ravnini. Zato

$$A(\vec{i})=\vec{k},\quad A(\vec{j})=\vec{j},\quad A(\vec{k})=\vec{i},$$

pa je matrični prikaz od A u kanonskoj bazi

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

(b) Svojstvene vrijednosti od A se podudaraju sa svojstvenim vrijednostima njegovog matričnog prikaza u bilo kojem paru baza:

$$k_A(\lambda)=\det(\lambda I-\mathbb{A})=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&\lambda-1&0\\\lambda^2-1&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$+\ 1\cdot\lambda$

$$=-\begin{vmatrix}\lambda^2-1&0&\lambda\\0&\lambda-1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)(\lambda-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti od A su $\lambda_1=1$ (kratnosti 2) i $\lambda_2=-1$ (kratnost 1)

(c) Budući da je matrica $\mathbb{A}$ simetrična, znamo da takva matrica S postoji i njeni stupci čine ortonormiranu bazu svojstvenih vektora od $\mathbb{A}$:

1° $\lambda_1 = 1 \Rightarrow (I - \mathbb{A})\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} /\cdot 1 \\ \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=: \vec{v}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \vec{v}_2}, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Ortonormiramo skup $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\vec{a}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2 | \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{2} \cdot 0\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\|\vec{a}_2\|}\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2° $\lambda_2 = -1 \Rightarrow (-I - \mathbb{A})\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} /\cdot(-1) \\ \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x_3 = -x_1 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=: \vec{v}_3}, \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

Vektor $\vec{v}_3$ je već okomit na $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ (pridruženi su različitim svojstvenim vrijednostima simetrične matrice) pa ga je dovoljno samo normirati:

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tražena matrica je $S = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ i vrijedi: $S^T \mathbb{A} S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = D$.

JIR22

6. (10 bodova)

   (a) Neka je X vektorski prostor. Definirajte skalarni umnožak vektora u X.

   (b) Ako je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}$ simetrična matrica te $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ standardni skalarni umnožak u $\mathbb{R}^n$, dokažite da za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\langle \mathbf{Ax} \mid \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{Ay} \rangle.$$

   (c) Dokažite da međusobno različitim svojstvenim (vlastitim) vrijednostima simetrične matrice odgovaraju međusobno okomiti svojstveni vektori.

(a) Preslikavanje $\langle \cdot | \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ zovemo SKALARNI UMNOŽAK

ukoliko vrijedi:

1° $(\forall \vec{x} \in X)\ \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0,$

2° $(\forall \vec{x} \in X)\ \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = 0,$

3° $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X)\ \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle,$

4° $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X)\ \langle \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} | \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle + \beta \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle.$

(b) Neka su $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ proizvoljni. Imamo

$$\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = (A\vec{x})^T \vec{y} = (\vec{x}^T A^T)\vec{y} = \vec{x}^T (A^T \vec{y})$$

$$= \langle \vec{x} | A^T \vec{y} \rangle = \begin{bmatrix} A \text{ je simetrična} \\ \text{pa } A^T = A \end{bmatrix} = \langle \vec{x} | A\vec{y} \rangle .$$

(c) Neka je A simetrična matrica te λ i μ dvije njene različite svojstvene vrijednosti kojima su redom pridruženi svojstveni vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

Tada vrijedi

$$\lambda\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle = \langle\lambda\vec{x}\mid\vec{y}\rangle = \langle A\vec{x}\mid\vec{y}\rangle \overset{(b)}{=} \langle\vec{x}\mid A\vec{y}\rangle$$

$$= \langle\vec{x}\mid\mu\vec{y}\rangle = \mu\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda-\mu)\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle = 0.$$

Budući da je $\lambda-\mu \neq 0$ po pretpostavci, slijedi $\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle = 0$, tj.

$\vec{x}$ i $\vec{y}$ su međusobno ortogonalni.

ZI21

Pitanje **8**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 4,00

Zadan je operator ortogonalnog projiciranja na koordinatnu ravninu yOz u prostoru V^3.

Koliko različitih vlastitih vrijednosti ima taj operator?

○1 ☒2 ○3 ○ovisi o izboru baze za V^3 ○Ne znam (0 bodova)

(2 boda za točan odgovor; -0.66 za netočan; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Kolika je dimenzija najvećeg vlastitog potprostora tog operatora?

○0 ○1 ☒2 ○3 ○Ne znam (0 bodova)

(1 bod za točan odgovor; -0.33 za netočan; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Jedna baza za sliku tog operatora je:

☒$\{\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{j}\}$ ○$\{\mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{j}+\mathbf{k}\}$ ○Ne znam (0 bodova) ○$\{\mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{j}\}$ ○$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

(1 bod za točan odgovor; -0.33 za netočan; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

8) Označimo traženi operator sa P. Uočimo da za svaki vektor $\vec{v}$ okomit na yOz ravninu (ravninu projiciranja) vrijedi

$$P\vec{v} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v}.$$

Nadalje, svi takvi vektori leže na x-osi pa vidimo da je 0 svojstvena vrijednost ovog operatora i dimenzija pripadnog svojstvenog potprostora je 1. Jednako tako, za svaki vektor $\vec{w}$ koji leži u yOz ravnini (ravnini projiciranja) vrijedi

$$P\vec{w} = \vec{w} = 1 \cdot \vec{w}.$$

Dakle, 1 je također svojstvena vrijednost od P i dimenzija pripadnog svojstvenog potprostora je 2.
Budući da P ne može imati više od tri linearno nezavisna svojstvena vektora ($\dim V^3 = 3$), slijedi da su to jedine svojstvene vrijednosti od P.
Dakle, P ima 2 različite svojstvene vrijednosti i dimenzija najvećeg svojstvenog potprostora je jednaka 2.
Uočimo i da iz prethodnih razmatranja slijedi da je x-os jezgra, a yOz ravnina slika od P. Od ponuđenih skupova, $\{\vec{j}+\vec{k}, \vec{j}\}$ je jedini čiji svi elementi leže u yOz ravnini (i oni zaista jesu linearno nezavisni).

Alternativno, operator P možemo zapisati i eksplicitno formulom

$$P : V^3 \to V^3, \quad P(x,y,z) = (0, y, z).$$

Odavde mu možemo odrediti matricu u kanonskoj bazi

$$P(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i na standardni način, računom, doći do istih zaključaka kao gore.

Pitanje **9**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 10,00

Neka je V vektorski potprostor od $\mathbf{R}^4$ razapet vektorima $\mathbf{u} = (7, 7, 0, 7)$ i $\mathbf{v} = (0, 0, -7, 0)$.

Kolika je dimenzija ortogonalnog komplementa $V^{\perp}$?

2 **(1 bod)**

Odredite jednu bazu za $V^{\perp}$.

Možete upisivati brojeve s DECIMALNOM TOČKOM na 4 decimale. Ukoliko smatrate da u bazi ima manje od 5 vektora; u suvišne kućice morate upisati NULE da bi vam zadatak bio bodovan.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$ **(4 boda)**

Ortogonalna projekcija vektora $\mathbf{x} = (-5, -4, 28, -96)$ na potprostor V je vektor $\mathbf{y} \in V$:

$\mathbf{y} = ($ -35 , -35 , 28 , -35 $)$. **(4 boda)**

Ortogonalna komponenta vektora $\mathbf{x}$ s obzirom na potprostor V je vektor:

$\mathbf{z} = ($ 30 , 31 , 0 , -61 $)$. **(1 bod)**

(9) Neka je $\vec{z} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in V^{\perp}$ proizvoljan. Imamo

$$\langle \vec{z} | \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow 7a_1 + 7a_2 \qquad + 7a_4 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 - a_4$$

$$\langle \vec{z} | \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \qquad -7a_3 \qquad = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

Dakle,

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} -a_2 - a_4 \\ a_2 \\ 0 \\ a_4 \end{bmatrix} = -a_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \vec{e}_1} - a_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=: \vec{e}_2}, \quad a_{2,4} \in \mathbb{R}$$

Budući da je skup $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ linearno nezavisan, on čini jednu bazu za $V^{\perp}$ i $\dim V^{\perp} = 2$.

Sada vektor $\vec{x} = (-5, -4, 28, -96)$ zapišimo u bazi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ za $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{e}_1 + \delta \vec{e}_2$$

$$\begin{cases} 7\alpha \qquad + \gamma + \delta = -5 \\ 7\alpha \qquad - \gamma \qquad = -4 \\ \qquad -7\beta \qquad = 28 \\ 7\alpha \qquad\qquad - \delta = -96 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow 21\alpha = -105 \Rightarrow \alpha = -5 \\ \Rightarrow \gamma = -31 \\ \Rightarrow \beta = -4 \\ \Rightarrow \delta = 61 \end{matrix}$$

Dakle, ortogonalna projekcija vektora $\vec{x}$ na potprostor V je vektor

$$\vec{y} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = -5 \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 \\ -35 \\ 28 \\ -35 \end{bmatrix},$$

dok je ortogonalna komponenta vektora $\vec{x}$ s obzirom na V

$$\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} = \gamma \vec{e}_1 + \delta \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 28 \\ -96 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -35 \\ -35 \\ 28 \\ -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 31 \\ 0 \\ -61 \end{bmatrix}.$$

ZIR21

6. (10 bodova) Na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_2$ stupnja ne većeg od 2 definirana je operacija $\langle\ |\ \rangle : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ formulom:

$$\langle p_1(t) | p_2(t) \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 p_1(t) p_2(t) dt \,.$$

(a) Dokažite da je $\mathcal{P}_2$ uz ovu operaciju unitarni prostor.

(b) Neka je L potprostor od $\mathcal{P}_2$ koji sadrži polinome $p_1(t) = t + 1$ i $p_2(t) = 2t + 3$. Odredite ortogonalni komplement $L^{\perp}$ potprostora L.

6.

(a) Provjeravamo svojstva skalarnog produkta.

Simetričnost:

$$\langle p_1(t) \mid p_2(t) \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 p_1(t) p_2(t)\, dt = \int_{-1}^{1} t^2 p_2(t) p_1(t)\, dt =$$

$$= \langle p_2(t) \mid p_1(t) \rangle$$

Zbog simetričnosti je dovoljno provjeriti linearnost samo u jednom argumentu:

Linearnost (u prvom argumentu):

$$\langle \alpha p(t) + \beta q(t) \mid r(t) \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 [\alpha p(t) + \beta q(t)]\, r(t)\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} [\alpha t^2 p(t) r(t) + \beta t^2 q(t) r(t)]\, dt = [\text{linearnost integrala}]$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1} t^2 p(t) r(t)\, dt + \beta \int_{-1}^{1} t^2 q(t) r(t)\, dt =$$

$$= \alpha \langle p(t) \mid r(t) \rangle + \beta \langle q(t) \mid r(t) \rangle$$

Pozitivna definitnost:

Za $p \in \mathcal{P}_2$ imamo da je $t^2 p(t)^2$ pozitivna funkcija pa slijedi da je

$$\langle p | p \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 p(t)^2 \, dt \geq 0 .$$

Ako je $\langle p | p \rangle = 0$, nužno je $t^2 p(t)^2 = 0, \forall t \in [-1,1]$

(jer je $t^2 p(t)^2$ neprekidna)

$\Rightarrow p(t) = 0$ za beskonačno mnogo t pa je p nul-polinom tj $p = 0$.

6.b) Dovoljno je pronaći sve polinome $q \in \mathcal{P}_2$ takve da je

$$\langle q | p_1 \rangle = 0 \quad \&$$
$$\langle q | p_2 \rangle = 0$$

Potražimo ih u općem obliku

$$q(t) = at^2 + bt + c$$

$$0 = \langle q | p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 (t+1)(at^2 + bt + c)\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t^2 \left(at^3 + (a+b)t^2 + (b+c)t + c\right] dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[at^5 + (a+b)t^4 + (b+c)t^3 + ct^2\right] dt =$$

$$= \left(\frac{a}{6}t^6 + \frac{a+b}{5}t^5 + \frac{b+c}{4}t^4 + \frac{c}{3}t^3\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{5}(a+b) + \frac{2}{3}c \qquad (*)$$

$$0 = \langle q | p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 (2t+3)(at^2 + bt + c)\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t^2 \left(2at^3 + (3a+2b)t^2 + (3b+2c)t + 3c \right) dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[2at^5 + (3a+2b)t^4 + (3b+2c)t^3 + 3ct^2 \right] dt =$$

$$= \left(\frac{a}{3} t^6 + \frac{3a+2b}{5} t^5 + \frac{3b+2c}{4} t^4 + ct^3 \right) \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{5}(3a+2b) + 2c =$$

$$= 3 \underbrace{\left[\frac{2}{5}(a+b) + \frac{2}{3} c \right]}_{=0} - \frac{2}{5} b$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow c = -\frac{3}{5} a$$

$$\Rightarrow L^{\perp} = \left\{ at^2 - \frac{3}{5} a : a \in \mathbb{R} \right\}$$

JIR21

6. (10 bodova) Na vektorskom prostoru $\mathcal{M}_{22}$ kvadratnih matrica reda 2 definiran je skalarni produkt formulom

$$\text{za } A, B \in \mathcal{M}_{22}, \quad \langle A|B\rangle = tr(AB^T).$$

Neka je

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Izračunajte $\|C\|$.

(b) Nađite bazu i dimenziju potprostora W, definiranog sa

$$W = \{X \in \mathcal{M}_{22} \mid X = X^T, \langle C|X\rangle = 0\}.$$

Je li W ortogonalni komplement vektorskog prostora $L(C)$?

6. (a) $\|C\| = \sqrt{\langle C | C \rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(CC^T)} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}} = \sqrt{5+4} = \boxed{3}$

(b) Za proizvoljnu matricu $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ imamo

$$X \in W \iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \ \& \ \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\iff b = c \ \& \ \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 2a-b & 2b-d \\ -2a & -2b \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff b = c \ \& \ 2a - 3b = 0$$

$$\iff b = c \ \& \ a = \frac{3}{2} b$$

$$\iff X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}b & b \\ b & d \end{bmatrix} = b\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:D_1} + d\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:D_2}$$

Budući da direktnom provjerom po definiciji vidimo $D_1, D_2 \in W$ te da je skup $\{D_1, D_2\}$ linearno nezavisan, taj je skup baza za W i $\dim W = 2$.

W nije ortogonalni komplement prostora $L(C)$ zbog dodatnog uvjeta da sadrži samo simetrične matrice (on je zapravo potprostor vektorskog prostora $L(C)^\perp$).

ZI20

5. (10 bodova) Dokažite sljedeće tvrdnje:

   (a) Svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima matrice međusobno su linearno nezavisni.

   (b) Svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima simetrične matrice međusobno su ortogonalni.

5. (a) Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po broju k različitih svojstvenih vrijednosti matrice.

1° Baza $k=1$

Tvrdnja vrijedi (skup od jednog ne-nul vektora uvijek je linearno nezavisan).

2° Korak

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja u slučaju k različitih svojstvenih vrijednosti (za neki $k \in \mathbb{N}$).

Neka su sada $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$ različite svojstvene vrijednosti matrice A te $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ pripadni svojstveni vektori.

Promotrimo njihovu linearnu kombinaciju jednaku nul-vektoru.

$$A \cdot \Big| \quad \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{k+1} \vec{v}_{k+1} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1} = \vec{0} \qquad (2)$$

Ako pomnožimo jednakost (1) sa λ_{k+1} i oduzmemo od (2), dobivamo

$$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} \vec{v}_1 + \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Prema induktivnoj pretpostavci, vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ su linearno nezavisni pa slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

Uvrštavanjem u (1) slijedi i $\alpha_{k+1} = 0$ pa po definiciji slijedi da su vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}$ linearno nezavisni.

Q.E.D.

(b) Neka su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima λ i μ simetrične matrice A.

Računamo

$$\langle A\vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \lambda \vec{v} | \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle,$$

$$\langle A\vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} | A^T \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} | \mu \vec{w} \rangle$$

$$= \mu \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \mu \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0$$

Dakle, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ su ortogonalni.

Q.E.D.

ZIR20

6. (10 bodova) Zadan je realan unitarni prostor X sa skalarnim produktom $(\cdot \mid \cdot)\colon X \times X \to \mathbb{R}$. Neka je norma $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ dobivena iz skalarnog produkta.

   (a) Ako su ne-nul vektori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \in X$ međusobno ortogonalni, dokažite i da su oni linearno nezavisni.

   (b) Ako je $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ortogonalna baza za X, dokažite da za svaki vektor $\mathbf{x} \in X$ vrijedi

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_j)}{\|\mathbf{e}_j\|^2} \mathbf{e}_j.$$

   (c) Ako je $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ortonormirana baza za X, dokažite da za svaki vektor $\mathbf{x} \in X$ vrijedi

$$\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_1)^2 + \ldots + (\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_n)^2.$$

6. (a) Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ skalari takvi da

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k = \vec{0}.$$

Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, skalarnim množenjem gornje jednakosti sa $\vec{e}_i$ dobivamo

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{e}_j \,\middle|\, \vec{e}_i \right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \underbrace{(e_j | e_i)}_{\substack{=0 \\ \text{za } j \neq i}} = \alpha_i (e_i | e_i).$$

Budući da je $\vec{e}_i \neq \vec{0}$, slijedi $(\vec{e}_i | \vec{e}_i) = \|\vec{e}_i\|^2 > 0$ pa $\alpha_i = 0$.

Dakle, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ pa su vektori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ po definiciji linearno nezavisni.

(b) Budući da je $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ baza za X, za svaki vektor $\vec{x} \in X$ postoje jedinstveni skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j .$$

Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, skalarnim množenjem gornje jednakosti sa $\vec{e}_i$ dobivamo

$$(\vec{x} | \vec{e}_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j \,\middle|\, \vec{e}_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{(\vec{e}_j | \vec{e}_i)}_{\substack{=0 \\ \text{za } j \neq i}} = \alpha_i (\vec{e}_i | \vec{e}_i)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{(\vec{x} | \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i | \vec{e}_i)} = \frac{(\vec{x} | \vec{e}_i)}{\|\vec{e}_i\|^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(\vec{x} | \vec{e}_j)}{\|\vec{e}_j\|^2} \vec{e}_j$$

(c) Neka je $\vec{x} \in X$ proizvoljan. Tada postoje jedinstveni skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j .$$

Računamo

$$\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x} \mid \vec{x})$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{e}_k \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k (\vec{e}_j \mid \vec{e}_k)$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Budući da je } \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \text{ ortonormiran skup,} \\ \text{za sve } j, k \in \{1, \dots, n\} \text{ vrijedi} \\ \qquad (\vec{e}_j \mid \vec{e}_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \end{array} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \alpha_j \cdot 1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 .$$

No, prema (b) dijelu je

$$\alpha_j = \frac{(\vec{x} \mid \vec{e}_j)}{\underbrace{\|\vec{e}_j\|^2}_{=1}} = (\vec{x} \mid \vec{e}_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

pa slijedi

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{e}_j)^2 .$$

LJIR20

6. (10 bodova) Odredite ortonormiranu bazu u kojoj je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

dijagonalna.

6.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Odredimo svojstvene vrijednosti od A. Karakteristični polinom od A je:

$$\kappa_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda+7 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda+7 \end{vmatrix} \; {}^{+}_{1\cdot 1}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & \lambda+3 \\ 2 & -4 & \lambda+7 \end{vmatrix} = (\lambda+3) \begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & \lambda+7 \end{vmatrix}$$

$$1\cdot(-1) \quad +$$

$$= (\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & \lambda+11 \end{vmatrix} \leftarrow \; = (\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda+4 & 4 \\ 2 & \lambda+11 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)\left[(\lambda+4)(\lambda+11) - 8\right] = (\lambda+3)(\lambda^2+15\lambda+36)$$

$$= (\lambda+3)(\lambda^2+3\lambda+12\lambda+36) = (\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda+12) = (\lambda+3)^2(\lambda+12)$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = -12$ i $\lambda_2 = -3$

Odredimo pripadne svojstvene potprostore:

1° $\lambda_1 = -12$

$$(-12I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \xleftarrow{+} \cdot 4 \\ \xleftarrow{+} \cdot 1 \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -18 & -18 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} |:(-18) \\ |:(-9) \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \cdot 4 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \Rightarrow x_2 = -x_3 = -2x_1 \\ \\ \Rightarrow x_3 = 2x_1 \end{matrix}$$

$x_1 = t, \; t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ 2t \end{bmatrix} = t \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{=\vec{v}_1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Normirajmo dobiveni vektor:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2° $\lambda_2 = -3$

$(-3I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 - 2x_3 \\ x_2 = t \qquad t, u \in \mathbb{R} \\ x_3 = u \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 2t - 2u \\ t \\ u \end{bmatrix} = t \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\vec{v}_2} + u \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3}, \quad t, u \in \mathbb{R}$$

Ortonormirajmo skup $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ Gram-Schmidtovim postupkom:

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{f}_3 = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3 | \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} (-2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{\|\vec{f}_3\|} \vec{f}_3 = \frac{1}{\frac{1}{5}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 5^2}} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Budući da su vektori $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$, tj. $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_3$ već ortogonalni (to su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima simetrične matrice A), tražena ortonormirana baza je

$$\left\{ \frac{1}{3}(1, -2, 2),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0),\ \frac{\sqrt{5}}{3}(-2, 4, 5) \right\}.$$

ZI19

5. (10 bodova)

   (a) Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, definiramo skalarni umnožak $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{y}$ gdje je $\cdot$ standardni skalarni umnožak u $\mathbb{R}^2$.

   - Odredite formulu za $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle$.
   - Odredite α tako da vektori $\mathbf{x} = (1,1), \mathbf{y} = (1,\alpha)$ budu ortogonalni u tom skalarnom umnošku.

   (b) Neka je sada $\mathbf{A}$ proizvoljna matrica reda n. Definirajmo analogno $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{y}$ gdje je $\cdot$ standardni skalarni umnožak u $\mathbb{R}^n$. Uz koje uvjete na $\mathbf{A}$ će $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle$ biti skalarni umnožak? Provjerite sva svojstva: pozitivnost, homogenost, komutativnost i aditivnost.

5. a) $\cdot \langle x | y \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_2 y_2$

$\cdot \alpha = -\frac{2}{3}$

b) A mora biti regularna matrica