6. Pravac i ravnina

zadaci sa ispita

ZI19

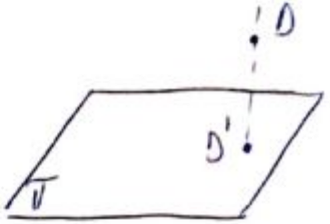
1. (10 bodova) Dane su točke $A(1,-2,0), B(2,0,1), C(0,-1,2)$ i $D(4,2,4)$.

   (a) Neka je Π ravnina koja prolazi točkama A, B i C. Odredite ortogonalnu projekciju točke D na ravninu Π.

   (b) Neka je Π ravnina iz a) dijela zadatka i p pravac koji prolazi točkama C i D. Odredite jednadžbu pravca s simetričnog pravcu p s obzirom na ravninu Π.

① a) $\vec{n} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$

$\Pi \ldots \quad x - y + z = 3$

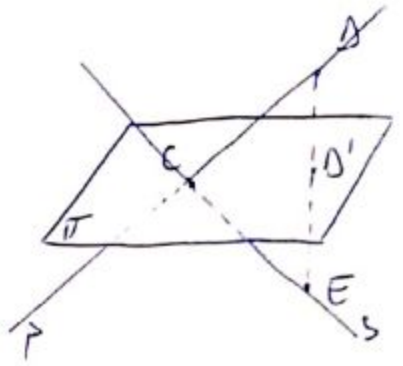


d - pravac kroz D okomit na Π

$$d \ldots \begin{cases} x = \lambda + 4 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda + 4 \end{cases}$$

$D' = d \cap \Pi$

$D' = (3,3,3)$



b) D' je polovište dužine $\overline{DE} \Rightarrow E(2,4,2)$

$$s = CE \ldots \quad \frac{x}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{0}$$

JIR20

3. (10 bodova) Zadani su pravci

$$p_1 \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1},$$
$$p_2 \ldots \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-a}{1},$$

gdje je $a \in \mathbb{R}$.

(a) Odredite vrijednost parametra a takvu da se pravci p_1 i p_2 sijeku.

(b) Za dobivenu vrijednost parametra a u (a) podzadatku, odredite jednadžbu ravnine π koja sadrži pravce p_1 i p_2.

3. (a) Zapišimo parametarske jednadžbe pravaca p_1 i p_2:

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = -t \end{cases}, \qquad p_2 \ldots \begin{cases} x = -2+3s \\ y = 3+2s \\ z = a+s \end{cases}$$

Tražimo vrijednost parametra a takvu da sljedeći sustav jednadžbi ima rješenje:

$$\begin{cases} 1+2t = -2+3s & \Rightarrow & 2t-3s = -3 \\ -2+t = 3+2s & \Rightarrow & t-2s = 5 \\ -t = a+s \end{cases} \Rightarrow s = -13,\ t = -21$$

$$\Rightarrow \quad 21 = a - 13 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 34}$$

(b) Vektor normale tražene ravnine π mora biti okomit na vektore smjera dva pravca pa možemo uzeti njihov vektorski produkt:

$$\vec{n}_\pi = \vec{s}_{p_1} \times \vec{s}_{p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}.$$

Budući da ta ravnina prolazi npr. točkom $(1,-2,0)$ (koja leži na p_1), njena je jednadžba

$$3(x-1)-5(y+2)+(z-0)=0$$

$$\pi \ldots \; 3x-5y+z=13.$$

LJIR20

3. (10 bodova) Zadane su ravnine

$$\pi_1 \ \ldots \ 2x - y + 3z - 1 = 0,$$
$$\pi_2 \ \ldots \ x + 2y + z = 0.$$

(a) Odredite ravninu koja prolazi ishodištem i okomita je na ravnine π_1 i π_2.

(b) Odredite presjek ravnina π_1 i π_2.

3. (a) Vektor normale tražene ravnine π mora biti okomit na vektore normale od π_1 i π_2 pa možemo uzeti

$$\vec{n}_{\pi} = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}.$$

Zato je opća jednadžba ravnine π oblika

$$-7x + y + 5z = D.$$

Budući da π prolazi ishodištem

$$D = -7 \cdot 0 + 0 + 5 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \pi \ldots \; -7x + y + 5z = 0$$

(b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ $\big| \cdot (-2)$ +

$\Rightarrow \begin{cases} -5y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ $\big| \cdot (-1)$ +

$\Rightarrow \begin{cases} -5y + z = 1 & \Rightarrow z = 1 + 5y \\ x + 7y = -1 & \Rightarrow x = -1 - 7y \end{cases}$

Ukoliko stavimo $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, dobivamo da je presjek ravnina π_1 i π_2 pravac čije su parametarske jednadžbe

$$p \ldots \begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

ili u kanonskom obliku

$$p \ldots \frac{x+1}{-7} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$$

ZIR20

1. (10 bodova) Zadana je točka $A(1,1,0)$ i ravnina

$$\pi \ldots 3x - 2y + z = 0.$$

(a) Odredite ortogonalnu projekciju točke A na ravninu π.

(b) Neka je zadan i pravac

$$p \ldots \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+2}{1}.$$

Odredite točku T tog pravca takvu da polovište dužine $\overline{AT}$ leži u ravnini π.

1. (a) Jednadžba pravca koji je okomit na ravninu π i prolazi točkom A glasi

$$q \ldots \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \iff \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -2t+1 \\ z = t \end{cases}$$

Tražena točka je presjek pravca q i ravnine π:

$$3(3t+1) - 2(-2t+1) + t = 0$$

$$14t = -1$$

$$t = -\frac{1}{14} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11}{14},\ y = \frac{8}{7},\ z = -\frac{1}{14}$$

Ortogonalna projekcija od A na π je $\left(\frac{11}{14}, \frac{8}{7}, -\frac{1}{14}\right)$.

(b) Parametarske jednadžbe pravca p glase

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4 \\ z = t - 2 \end{cases}$$

Za točku $T(3t+1, 4, t-2) \in p$, polovište dužine $\overline{AT}$ ima koordinate

$$\left(\frac{1}{2}(3t+2), \frac{5}{2}, \frac{1}{2}(t-2)\right).$$

Prema uvjetu zadatka,

$$\frac{3}{2}(3t+2) - 5 + \frac{1}{2}(t-2) = 0$$

$$5t - 3 = 0$$

$$t = \frac{3}{5}$$

pa je tražena točka $T\left(\frac{14}{5}, 4, -\frac{7}{5}\right)$.

JIR21

4. (**10 bodova**) Ako je $A(2,4,5)$ jedan vrh kvadrata čija dijagonala $\overline{BD}$ leži na pravcu

$$p \ldots \frac{x-4}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-3}{4},$$

odredite preostale vrhove kvadrata.

4. Uočimo da je sjecište S dijagonala tog kvadrata upravo nožište okomice iz točke A na zadani pravac p. Odredimo jednadžbu ravnine π okomite na pravac p, a koja prolazi točkom A:

$$-(x-2)+(y-4)+4(z-5)=0$$

$$-x+y+4z-22=0$$

$$\pi \ldots \ -x+y+4z=22$$

Točka S je presjek ravnine π i pravca p. Parametarske jednadžbe tog pravca su

$$p \ldots \begin{cases} x=4-t \\ y=5+t \\ z=3+4t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

pa njihovim uvrštavanjem u jednadžbu od π dobivamo koordinate točke S:

$$-(4-t)+(5+t)+4(3+4t)=22$$

$$18t+13=22$$

$$18t=9$$

$$t=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{S=\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, 5\right)}$$

Budući da je S polovište dužine $\overline{AC}$, odavde slijedi

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_c+2}{2}&=\frac{7}{2} \Rightarrow x_c=5 \\ \frac{y_c+4}{2}&=\frac{11}{2} \Rightarrow y_c=7 \\ \frac{z_c+5}{2}&=5 \Rightarrow z_c=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{C=(5,7,5)}$$

Uočimo da je $|AS| = \sqrt{\left(2-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(4-\frac{11}{2}\right)^2 + (5-5)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = |BS| = |CS| = |DS|$

Sve točke na pravcu BD imaju koordinate oblika $(4-t, 5+t, 3+4t)$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Zanimaju nas one čija je udaljenost od S jednaka $\frac{3\sqrt{2}}{2}$:

$$\sqrt{\left(\frac{7}{2}-4+t\right)^2 + \left(\frac{11}{2}-5-t\right)^2 + (5-3-4t)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \Big|^2$$

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + (4t-2)^2 = \frac{9}{2}$$

$$18t^2 - 18t + \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{+4} = \cancel{\frac{9}{2}}$$

$$t(t-1) = 0$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 1$$

Ovi parametri odgovaraju točkama B i D pa imamo

$$\boxed{\begin{array}{l} B(4,5,3), \\ D(3,6,7) \end{array}}$$

(i još jedno rješenje u kojem su koordinate od B i D zamijenjene).

ZI21 1

Za svaki od sljedeća četiri sustava jednadžbi odredite što geometrijski predstavljaju rješenja tog sustava.

A. $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 26 \\ 2x - y + 3z = 13 \end{cases}$ ravnina

B. $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 26 \\ 2x - y + 3z = -11 \\ -3x - y + 2z = 5 \end{cases}$ prazan skup

C. $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 26 \\ -2x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$ pravac

D. $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 26 \\ -2x + 3y + 4z = 4 \\ -3x - y + 2z = 5 \end{cases}$ točka

(1 bod za svaki točan odgovor; -0.33 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)

1) A. Ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja ovise o dva parametra

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 26 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-2) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}\right] \Rightarrow 2x-y+3z=13$$

Dakle, ovim je sustavom određena ravnina $2x-y+3z=13$.

B. Ovaj sustav nema rješenja

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 26 \\ 2 & -1 & 3 & -11 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-2) \\ |\cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 48 \\ 2 & -1 & 3 & -11 \\ -5 & 0 & -5 & 16 \end{array}\right]$$

Dakle, riječ je o trima ravninama kojima je zajednički presjek prazan skup.

C. Ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja ovise o jednom parametru

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 26 \\ -2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ |\cdot 2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 14 & 34 \\ -2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] |:2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 17 \\ -2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-\frac{3}{2}) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 17 \\ -2 & 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{43}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow y = \frac{17}{2} - \frac{7}{2}z \\ \Rightarrow x = \frac{43}{4} - \frac{13}{4}z \end{array}$$

Dakle, ravnine se sijeku u pravcu s parametarskim jednadžbama

$$\begin{cases} x = \frac{43}{4} - \frac{13}{4}t \\ y = \frac{17}{2} - \frac{7}{2}t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

D. Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje, riječ je o trima ravninama koje se sijeku u jednoj točki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 26 \\ -2 & 3 & 4 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \; |\cdot(-2) \\ + \\ |\cdot 3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 2 & 16 \\ -11 & 0 & 10 & 19 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 2 & 16 \\ -1 & 0 & 12 & 35 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid \cdot 10 \\ \\ \mid \cdot(-3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 122 & 366 \\ -1 & 0 & 12 & 35 \\ 0 & -1 & -34 & -100 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid : 122 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 12 & 35 \\ 0 & -1 & -34 & -100 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid \cdot(-12) \\ \\ \mid \cdot 34 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow z = 3 \\ \Rightarrow x = 1 \\ \Rightarrow y = -2 \end{array}$$

Dakle, ravnine se sijeku u točki $(1, -2, 3)$.

ZI21

Pitanje **2**
Nije još odgovoreno
Broj bodova od 6,00

Dan je pravac

$$p \ldots \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-2}{5}$$

i točka $T(2, 3, 18)$.

Odredite jednadžbu ravnine π koja je okomita na pravac p i prolazi točkom T:

3 $\cdot x +$ −3 $\cdot y +$ 5 $\cdot z =$ 87 . **(2 boda)**

Odredite točku S na pravcu p koja je najbliža točki T:

$S($ 7 , −2 , 12 $)$ **(2 boda)**

Odredite točku R simetričnu točki T s obzirom na pravac p:

$R($ 12 , −7 , 6 $)$. **(2 boda)**

U svim poljima brojeve koji nisu cijeli možete upisivati kao decimalne brojeve s DECIMALNOM TOČKOM na 4 točne decimale ili kao razlomke (npr. -2.3333 ili -7/3).

2. Budući da je $p \perp \pi$, za vektor normale od π možemo uzeti vektor smjera od p, $\vec{n}_\pi = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$.

Zato je jednadžba od π

$$3(x-2) - 3(y-3) + 5(z-18) = 0$$

$$\pi \ldots \; 3x - 3y + 5z = 87$$

Tražena točka S je nožište okomice iz T na p, što je upravo presjek dobivene ravnine π i pravca p.

Parametarske jednadžbe od p su

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 - 3t \\ z = 2 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu ravnine π dobivamo traženu točku

$$3(1+3t) - 3(4-3t) + 5(2+5t) = 87$$

$$43t + 1 = 87$$

$$t = 2 \qquad \Rightarrow \quad S(7, -2, 12)$$

Konačno, točka S je polovište dužine $\overline{RT}$ odakle dobivamo koordinate od R:

$$\frac{1}{2}(x_R + 2) = 7 \;\Rightarrow\; x_R = 12$$

$$\frac{1}{2}(y_R + 3) = -2 \;\Rightarrow\; y_R = -7 \qquad \Rightarrow \quad R(12, -7, 6)$$

$$\frac{1}{2}(z_R + 18) = 12 \;\Rightarrow\; z_R = 6$$

ZI22

1. (10 bodova) Zadani su pravci

$$p_1 \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}, \quad p_2 \ldots \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

Odredite jednadžbu ravnine π s obzirom na koju su pravci p_1 i p_2 simetrični.

1. Iz kanonskih jednadžbi pravaca p_1 i p_2 vidimo da p_1 prolazi točkom $A_1(1,-1,4)$, a p_2 točkom $A_2(5,1,2)$. Jednako tako, oba pravca imaju vektor smjera $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Zato za vektor normale ravnine ρ u kojoj leže ti pravci možemo uzeti

$$\vec{n}_\rho = \vec{s} \times \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 8\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Vektor normale tražene ravnine π je okomit na taj vektor i vektor smjera tih pravaca pa imamo

$$\vec{n}_\pi = \vec{s} \times \vec{n}_\rho = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix} = -16\vec{i} - 16\vec{j} + 16\vec{k}.$$

S druge strane, ravnina π prolazi polovištima svih dužina $\overline{T_1T_2}$, gdje je $T_1 \in p_1$ i $T_2 \in p_2$ – zato posebno prolazi i polovištem dužine $\overline{A_1A_2}$:

$$P = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (3,0,3).$$

Jednadžba ravnine π je

$$-16(x-3) - 16y + 16(z-3) = 0 \qquad \Big| :(-16)$$

$$\pi \ldots\ x + y - z = 0$$

LJIR23

4. (10 bodova)

Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da se pravci

$$p_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{\lambda} = \frac{z+3}{4} \qquad \text{i} \qquad p_2 \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{-5}$$

sijeku. Za taj λ odredite jednadžbu ravnine koja sadrži ta dva pravca.

Zadatak 4.

<u>RJEŠENJE</u> Zapišimo prvo parametarske jednadžbe pravaca:

$$p_1 \equiv \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + \lambda t \\ z = -3 + 4t \end{cases} \qquad \text{te} \qquad p_2 \equiv \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = -2 + 4s \\ z = 4 - 5s \end{cases} .$$

Pravci će se sjeći ako postoje $s, t \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\begin{aligned} -2 + t &= 3 + 2s \\ 3 + \lambda t &= -2 + 4s \\ -3 + 4t &= 4 - 5s. \end{aligned}$$

Iz prve i treće jednadžbe dobivamo $s = -1$ i $t = 3$, pa iz druge jednadžbe dobivamo $\lambda = -3$.
Da bismo našli jednadžbu ravnine π, naći ćemo jednu točku te ravnine i njenu normalu $\boldsymbol{n}$. Za točku možemo uzeti sjecište; uvrštavajući gore dobivene parametre, dobivamo da je sjecište točka $(1, -6, 9) \in \pi$. Kako oba pravca leže u ravnini, njihovi vektori smjera $\boldsymbol{c}_1$ i $\boldsymbol{c}_2$ leže u ravnini, pa je

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{c}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (-1, 13, 10).$$

Dakle,

$$\pi \equiv -(x - 1) + 13(y + 6) + 10(z - 9) = 0.$$

□

ZIR23

4. (10 bodova) Pravac p zadan je kao presjek dviju ravnina

$$p \equiv \begin{cases} x + y + 2z - 9 = 0 \\ 2x + y + 3z - 13 = 0. \end{cases}$$

(a) Odredite kanonsku jednadžbu za p.

(b) Odredite ravninu koja sadrži pravac p i ishodište $(0, 0, 0)$.

Zadatak 4.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** Prvo ćemo odrediti vektor smjera $\boldsymbol{v}$ pravca p, a potom naći neku točku kroz koju pravac prolazi, što će nam dati kanonsku jednadžbu za p. Neka su

$$\pi_1 \ldots\ x + y + 2z - 9 = 0$$
$$\pi_2 \ldots\ 2x + y + 3z - 13 = 0$$

i neka su $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$ vektori normale tih dviju ravnina. Iščitavamo ih jednostavno iz jednadžbi ravnina:

$$\boldsymbol{n}_1 = (1, 1, 2), \qquad \boldsymbol{n}_2 = (2, 1, 3).$$

Budući da p leži u π_1, $\boldsymbol{v}$ mora biti okomit na $\boldsymbol{n}_1$, a kako p leži u π_2, $\boldsymbol{v}$ je okomit i na $\boldsymbol{n}_2$. Dakle,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (1, 1, -1).$$

Nađimo sad neku točku $T(x_0, y_0, z_0) \in \pi_1 \cap \pi_2$. Kako imamo slobodu odabrati bilo koju točku u presjeku, odaberimo $z_0 = 0$. Sada imamo

$$x_0 + y_0 = 9$$
$$2x_0 + y_0 = 13,$$

što daje $x_0 = 4$ i $y_0 = 5$. Dakle, $T(4, 5, 0)$ i

$$p \ldots\ \frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-1}.$$

b) Neka je π tražena ravnina. Odredit ćemo joj vektor normale $\boldsymbol{n}$, što će zajedno s činjenicom da je $(0, 0, 0) \in \pi$ u potpunosti odrediti π. Budući da p leži u π, $\boldsymbol{v}$ je okomit na $\boldsymbol{n}$, a kako i dužina $\overline{OT}$ leži u π, vektor $\overrightarrow{OT}$ je također okomit na $\boldsymbol{n}$. Dakle,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} \times \overrightarrow{OT} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (5, -4, 1).$$

Konačno,

$$\pi \ldots\ 5(x-0) + (-4)(y-0) + (z-0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \pi \ldots\ 5x - 4y + z = 0.$$

□

ZI23

1. (10 bodova)

   Dane su točke $A(1,2,0)$, $B(2,1,-1)$, $C(0,3,2)$ i $D(4,2,2)$. Odredite točku D' koja je simetrična točki D s obzirom na ravninu određenu točkama A, B i C.

Zadatak 1.

<u>RJEŠENJE</u> Prvo ćemo odrediti jednadžbu ravnine π određene s točkama A, B i C. Potom određujemo točku D_0, projekciju točke D na ravninu π. Naposljetku, kako je D' simetrična točki D s obzirom na ravninu π, slijedi da je $\overrightarrow{DD_0} = \overrightarrow{D_0D'}$, iz čega određujemo točku $D'(x', y,' z,')$.

Kako je π određena s točkama A, B i C, vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ leže u ravnini. Kako je $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ okomit i na $\overrightarrow{AB} = (2-1, 1-2, -1-0) = (1, -1, -1)$ i na $\overrightarrow{AC} = (0-1, 3-2, 2-0) = (-1, 1, 2)$, to je upravo (jedan) vektor normale ravnine π. Računamo ga:

$$\boldsymbol{n}_\pi = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} = (-1, -1, 0).$$

Kako je $A \in \pi$, jednadžbu za π dobivamo iz

$$((x, y, z) - (1, 2, 0)) = 0 \cdot \boldsymbol{n}_\pi \implies -(x-1) - (y-2) = 0 \implies x + y = 3.$$

Neka je $D_0(x_0, y_0, z_0)$. Kako D i D_0 leže na pravcu koji je okomit na ravninu π, a koji ima vektor smjera $\boldsymbol{n}_\pi$, vektor $\overrightarrow{DD_0}$ mora biti kolinearan s $\boldsymbol{n}_\pi$:

$$\overrightarrow{DD_0} = \lambda \boldsymbol{n}_\pi \implies \begin{cases} x_0 = 4 + \lambda \\ y_0 = 2 + \lambda \\ z_0 = 2 \end{cases}$$

Kako D_0 leži u π,

$$x_0 + y_0 = 6 + 2\lambda = 3 \implies \lambda = -\frac{3}{\lambda} \implies D_0\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2\right).$$

Konačno, imamo

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - 4 &= x' - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} - 2 &= y' - \frac{1}{2} \\ 2 - 2 &= z' - 2 \end{aligned} \qquad \implies \qquad D'(1, -1, 2).$$

$\square$