3.3. EL. TRANSFORMACIJE I REDUCIRANI OBLIK MATRICE

→ Gaussov alg. za računanje inverzne mat.

⇒ elementarne transformacije

1) zamjena dvaju redaka

2) množenje nekog retka skalarom $\neq 0$

3) dodavanjem nekog retka (pomnoženog skalarom) nekom drugom retku

* lin sust, rač det, određivanje ranga mat, nalaženje inverz. mat.

3.3.1. Reducirani oblik matrice

- oblik mat. koji uzimamo kao najprihvatljiviji

— mora vrijediti: mat je dovedena na reducirani oblik ako:

- prvi ne-nul. elem. (stožer) svakog retka iznosi 1, svi ostali el. u stupcu tog stožernog el. jednaki su nuli

- svi retci koji sadrže samo nul elem. (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan ne-null elem.

- svaki sljedni stožer (gledajući po redcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera.

↳ strogo zapisano, ako stožer u retku i_1 leži u stupcu j_1, a stožer u retku i_2, $i_2 > i_1$ leži u stupcu j_2, tada je $j_2 > j_1$.

Algoritam svođenja mat. na reduc. oblik

1. Izaberemo u prvom stupcu neki el $\neq 0$

   · zamjenom redaka možemo ga dovesti na poziciju stož. el. a_{11}

   (ako je $a_{11} \neq 0$ $\uparrow$ nepotrebno)

   (ako su el. prvog stupca $= 0$, idemo na slj stupac i nastavljamo

2. Podijelimo el. prvog retka s a_{11} $\longrightarrow$ stožerni el. postaje 1

3. Pomoću stožernog el. poništavamo sve preostale el. u njegovom stupcu

Nastavljamo s korakom 1, tražeći među el. sljed. stupca ne-nul el.
Smijemo birati samo u preostalim retcima

Primjer 8.) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 10 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 10 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} :2 \sim \begin{array}{c} \text{st. el.} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \cdot(-2)\, + \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot\frac{1}{10}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \cdot(-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot(-4)\, + \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_R}$$

reducirani oblik mat.

Primjer 9.) Pokušaj sama

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot(-2)\, + \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ ovaj red već ima 1 pa ga ne želim osakatiti

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \cdot(-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} :2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{4} \;\; \cdot -\frac{1}{2}$$

poništavanje pomoću stožera

ovaj stupac se ne mijenja jer $0 \cdot x = 0$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 16 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 12 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -9 & 12 & -3 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -9 & 12 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

kako ja znam da je tu kraj?

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :2 \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

? je li možda jer kada bih ju htjela do kraja reducirati samo bih pomnožila sa zadnjim redom?