VEKTORI

Opis vektora ima 3 podatka

- nosač - pravac na kojem se vektor nalazi
- orijentacija - na tom pravcu
- duljina vektora $|\vec{AB}|$ - udaljenost točaka A i B $(d(A,B))$

NUL VEKTOR - vektor duljine 0

↳ označavamo sa $0 \rightarrow 0 = \vec{AA}$

- nema nosač ni smjer

RADIJ-VEKTOR

- V je skup svih vektora (V^2 2D i V^3 3D)

- neka točka O u prostoru ; $\vec{OT}$ je radij vektor

Zbrajanje vektora

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ asocijativnost

2) $a+0 = 0+a = a$ neutralan element

3) $(\forall a \in V)(\exists a' \in V) \Rightarrow a+a' = a'+a = 0$ suprotan član

4) $a+b = b+a$ komutativnost

Oduzimanje vektora - zbrajanje sa suprotnim vektorom

Množenje vektora skalarom
operacija $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

· za realan broj λ vektor λ ima

↳ nosač identičan nosaču od a

↳ duljinu $|\lambda a| = |\lambda||a|$

↳ $\lambda > 0$ – iste orijentaciju

$\lambda < 0$ – suprotnu orijentaciju

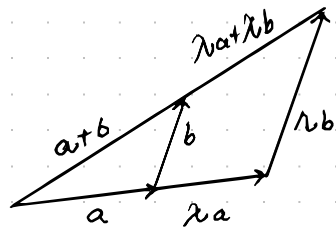
1) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

2) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

3) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$

4) $1 \cdot a = a$, $-1a = -a$

5) $\lambda \cdot 0 = 0$



JEDINIČNI VEKTOR

· isti smjer kao a, duljina 1

$$\boxed{\hat{a} = \frac{1}{|a|} \cdot a}$$

V^3 VEKTORSKI PROSTOR

* Linearna nezavisnost vektora

Vektori $a_1, a_2, \dots, a_n$ su linearno nezavisni ako iz jednakosti

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$ slijedi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

! **Dimenzija prostora** – Najveći broj linearno nez. vektora u nekom prostoru

→ ako je $\underline{n}$ dimenzija prostora V tad svaki skup $a_1, \dots a_n$ od n linearno nez. vektora nazivamo <u>BAZOM</u> vektorskog prostora

$\longrightarrow$ ako znamo dimenziju $\rightarrow$ znamo <u>koliko</u> lin. nez. vektora sadrži baza (i obrnuto)

Primjer:

Prostor V^1 vektora na pravcu dobiven je vektorom a $(a \neq 0)$

$\{\lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ – podprostor V^1 sadrži sve vekt. oblika λa

$\hookrightarrow$ svi ti vektori su višekratnici od a za neki λ

$\Rightarrow$ $L(a)$ predstavlja lin. komb. vektora a, svi vektori su linearno zavisni – najveći broj nez. vektora je 1

$\Rightarrow$ dimenzija = 1

..... V^2 je 2D vekt prostor; u njemu su najviše 2 vekt. lin. nez.

Primjer: a_1 i a_2 su dva nekolinearna vektora

$\hookrightarrow$ linearno nezavisni; svaki treći vektor se izražava preko njih

$$V^2 = L\underbrace{(a_1, a_2)}_{\text{baza}} = \{\underbrace{a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}_{\text{bilo koji treći vektor}} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

TM Neka su a_1 i a_2 nezavisni. Prikaz vektora $a \in V^2$ u obliku $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ je jednoznačan (skalari λ_1 i λ_2 su jednoznačni)

DOKAZ:

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2$$

$$\Downarrow$$

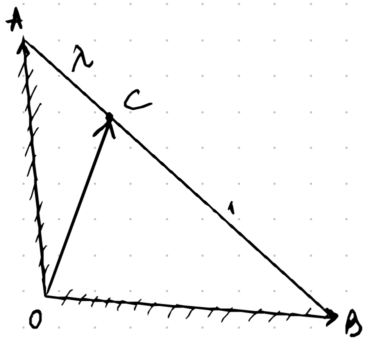
$$a_1(\lambda_1 - \mu_1) + a_2(\lambda_2 - \mu_2) = 0 \quad * \ a_1, a_2 \text{ su lin nezavisni}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \mu_1 \text{ i } \lambda_2 = \mu_2$$

Primjer: Točka C dijeli dužinu AB u omjeru $\lambda : 1$ $(\lambda > 0)$

$$d(A, C) : d(C, B) = \lambda : 1$$

Prikaži $\vec{OC}$ kao linearnu komb. vektora $\vec{OA}$ i $\vec{OB}$.



$$\frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|} = \frac{\lambda}{1} \rightarrow |\vec{AC}| = \lambda |\vec{CB}|$$

$$\hookrightarrow \vec{AC} = \lambda \vec{CB}$$ jer isti nosač i orijentacija

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$$

$$\vec{BC} = -\vec{CB}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{CB}$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$$

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \lambda(\vec{OB} - \vec{OC})$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB} - \lambda \vec{OC}$$

$$\vec{OC} + \lambda \vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB}$$

$$\vec{OC}(1+\lambda) = \vec{OA} + \lambda \vec{OB}$$

$$\vec{OC} = \frac{\vec{OA}}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{OB}$$

$$t = \frac{1}{1+\lambda} \qquad (1-t)$$

Radijvektor svake točke koja leži na dužini $\overline{AB}$ može prikazati u obliku $\vec{OT} = t\,\vec{OA} + (1-t)\,\vec{OB}$

Težište trokuta

Odaberemo li za koeficijente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ točka T će biti težište trokuta

$$\boxed{\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})}$$

KOORDINATNI SUSTAV I KANONSKA BAZA

Koordinatni sustav

- a_1 i a_2 dva nekolinearna vektora sa zajedničkim hvatištem u O
  ↳ ishodište = (O, a_1, a_2)
  a_1 i a_2 određuju koordinatne osi

• Svakoj točki T u toj ravnini jednoznačno odgovara radij-vektor $\vec{OT}$. Njega možemo rastaviti po bazi a_1 i a_2:

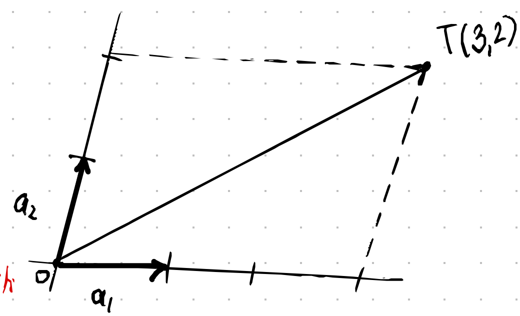
$$\vec{OT} = x_1 a_1 + x_2 a_2$$

koordinate

↳ time je položaj točke T opisan parom skalara (x_1 i x_2)

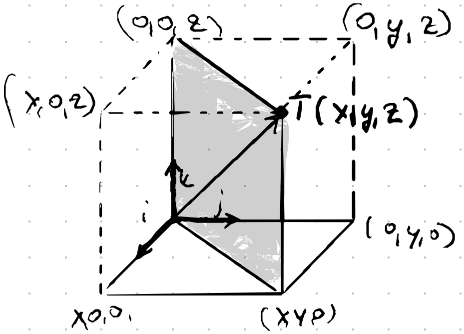
Koordinatni sustav u prostoru (3D)

↳ svaka 3 nekomplanarna vektora a_1, a_2 i a_3 određuju koord. sustav $(O; a_1, a_2, a_3)$



↳ za zadanu točku T nije lako odrediti koordinate (treba rastaviti $\vec{OT}$ na lin. komb. a_1, a_2 i a_3).

Kanonska baza



O_x - os apscisa

O_y - os ordinata

O_z - os aplikata

→ Kartezijev sustav $(O; i, j, k)$ je određen točkom O i trima vektorima i, j i k

$\boxed{i, j, k = \text{kanonska baza prostora } V^3}$

Rastav vektora po bazi :

- radijvektor $\vec{OT}$ $(T(x,y,z)) \rightarrow \vec{OT} = xi + yj + zk$
- zadani vektor a : $a = a_x i + a_y j + a_z k$

koeficijenti a_x, a_y, a_z?

$$a = \vec{OB} - \vec{OA} \quad \cdots \quad a = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{a_x = x_2 - x_1} i + \underbrace{(y_2 - y_1)}_{a_y = y_2 - y_1} j + \underbrace{(z_2 - z_1)}_{a_z = z_2 - z_1} k$$

Orijentacija ravnine i prostora

(+) poz. neg (−)

- ako rotacijom koord. sust. u poz smjeru i se preklapi s j
  ↳ desni ili pozitivan sustav
- ako rotacijom koord. sust. u neg. smjeru (↻) → lijevi ili negativni

SKALARNI UMNOŽAK

- Skalarni umnožak je produkt vektora a i b : $\boxed{a \cdot b := |a||b| \cos\varphi}$

KUT MEĐU VEKTORIMA - manji od dvaju kutova koji zatvaraju 2 vektora (po apsolutnoj vrijednosti)

$\varphi(a,b)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$

* ako je jedan od vektora 0, nije definiran kut

$a \cdot b = 0$ (za okomite vektore) $(\cos\frac{\pi}{2} = 0)$

$$|a|^2 = a \cdot a$$

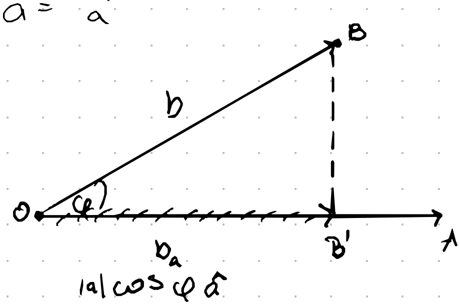
$$a \cdot \hat{a} = |a|$$

Projekcija vektora na vektora

$a = \vec{OA}$ $\quad b = \vec{OB}$, projiciramo b na a, to označavamo s b_a

$$\boxed{b_a = |b|\cos\varphi\,\hat{a}}$$

$* \; a\cdot\hat{a} = |a| \rightarrow \hat{a} = \frac{|a|}{a}$



$$a\cdot\frac{b_a}{|b|\cos\varphi} = |a| \;/\cdot|b|\cos\varphi$$

$$a\cdot b_a = |a|\cdot|b|\cos\varphi \longrightarrow |a||b|\cos\varphi = a\cdot b$$

$$\Rightarrow \boxed{a\cdot b_a = a\cdot b = b\cdot a_b}$$

$|b|\cos\varphi$ = skalarna projekcija vektora b na vektor a $= \pi_a(b)$

$$\longrightarrow \boxed{b_a = \pi_a(b)\hat{a}} \qquad a\cdot b = |a|\cdot\pi_a(b)$$

Svojstva skalarnog umnoška

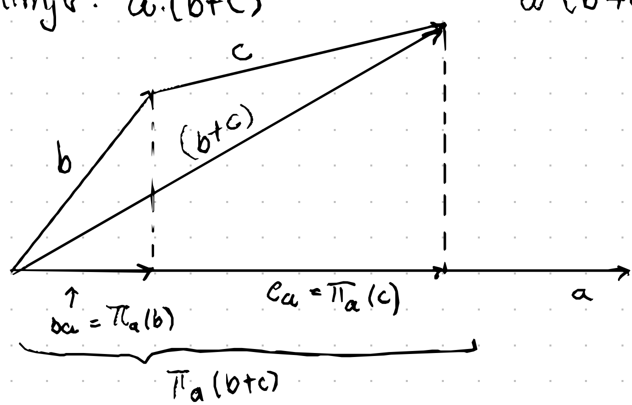
pozitivnost	$a\cdot a \geq 0$, $\quad a\cdot a = 0 \Leftrightarrow a = 0$
homogenost	$\lambda(a\cdot b) = (\lambda a)\cdot b = a\cdot(\lambda b)$
komutativnost	$a\cdot b = b\cdot a$
distributivnost	$a\cdot(b+c) = ab + ac$

$\hat{a}$ je samo za smjer, skalarno je to 1

$\Downarrow$

$b_a = \pi_a(b)$

Primjer: $a\cdot(b+c)$

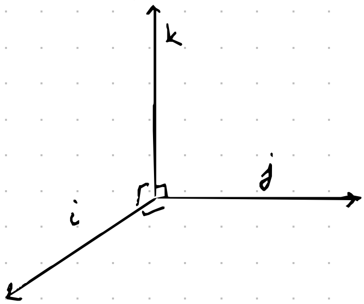


$$a\cdot(b+c) = |a|\cdot\pi_a(b+c)$$
$$= |a|(\pi_a(b) + \pi_a(c))$$
$$= |a|\pi_a b + |a|\pi_a(c)$$
$$= a\cdot b + a\cdot c$$

Skalarni umnožak u koordinatnom sustavu

- i, j, k je kanonska baza u prostoru V^3

↳ čine ju međusobno okomiti vektori pa zato



$i \cdot i = 1 \quad j \cdot j = 1 \quad k \cdot k = 1$

$i \cdot j = 0 \quad j \cdot k = 0 \quad k \cdot i = 0$

→ svaki vektor se može prikazati pomoću linearne kombinacije i, j i k

Računanje skalarnog umnoška

Skalarni umnožak dvaju vektora a i b, gdje su

$a = a_x i + a_y j + a_z k$ i $b = b_x i + b_y j + b_z k$, računa se

formulom: $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

DULJINA VEKTORA $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

KUT IZMEĐU VEKTORA $\cos\varphi = \dfrac{a \cdot b}{|a||b|} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Vektorski umnožak (vektorski ili vanjski umnožak a i b vektora)

- produkt je $a \times b$ sa sljedećim svojstvima

1) $|a \times b| = |a||b| |\sin \varphi|$

2) $a \times b$ je okomit na vektor a i na b

3) Trojka $(a, b, a \times b)$ čini desni sustav

→ ako je jedan $\vec{0}$ = i produkt je $\vec{0}$

$a \cdot \lambda a = a \lambda$ ↳ SAT= ≠0

→ ako su a i b kolinearni = (1) produkt je $\vec{0}$

← ako je $a \times b = 0$; vektori moraju biti kolinearni ili je jedan od njih jednak $\vec{0}$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

- apsolutna vrijednost vekt. produkta $a \times b$ jednaka je površini paralelograma što ga zatvaraju ta dva vektora

TM svojstva vektorskog umnoška

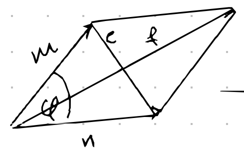
posljedica da $(a, b, a \times b)$ čini desni sustav

1) $a \times b = -b \times a$ antikomutativnost

2) $(\lambda a) \times b = \lambda (a + b)$ homogenost

3) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ distributivnost

Primjer: Neka su m i n jedinični vektori koji zatvaraju kut od 45°. Odredi površinu paralelograma s dijagonalama $c = 2m - n$, $f = 4m - 5n$.



$P = |a \times b|$ (geometrijska interpretacija)

$\longrightarrow P = |n \times m|$

$f = a + b \rightarrow a = f - b$

$e = -b + a \rightarrow b = a - e$

$a = f - a + e$

$a = \frac{f + e}{2}$

$b = f - a$

$b = f - (e + b)$

$b = f - e - b$

$b = \frac{f - e}{2}$

$P = \frac{1}{4}(f + e)(f - e) = \frac{1}{4}(\cancel{ff} - fe + ef - \cancel{ee})$ ← $+ef$

$P = \frac{1}{4} \cdot 2 e \cdot f = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{(2m - n)(4m - 5n)}{2}$

$P = \left|\frac{-10 m \cdot n + 4mn}{2}\right| = \left|\frac{-6}{2}\right| mn = 3 mn$

$P = |a||b| \cdot \sin \measuredangle(a, b) = 3 \cdot \sin 45° = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Vektorski umnožak u koord sustavu

×	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

$a = a_x i + a_y j + a_z k \qquad b = b_x i + b_y j + b_z k$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \rightarrow = i\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

→ baza a, b, c je poz. or. ako je vrijednost > 0

Mješoviti umnožak – umnožak tipa $(a \times b) \cdot c$

$a = a_x i + a_y j + a_z k$

$b = b_x \cdot i + b_y j + b_z k$

$c = c_x \cdot i + c_y j + c_z k$

$$\rightarrow (a \times b) \cdot c = \cdots \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Mješoviti umnožak jednak je determinanti u kojoj su ti retci komponente pojedinih vekt.

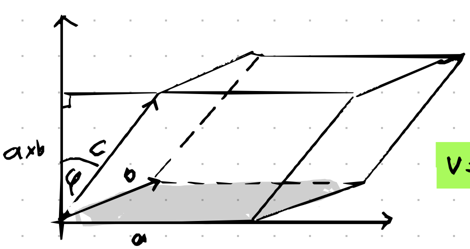
$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

→ ne mijenja se cikličkom zamjenom redaka (vektora)

▶ ako zamijenimo prva 2 vekt → (antikomutativnosti) $= (a \times b)c = -(b \times a)c$

$$\rightarrow \underline{(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)} = -(b \times a) \cdot c = -b(a \times c) = -a(c \times b) = -c(b \times a)$$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA:



Mješoviti prod. = volumen paralelepipeda razapetog vekt a, b i c

$$\boxed{V = |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos\varphi = |[a, b, c]|}$$

RASTAV VEKTORA PO BAZI

- bilo koja baza a, b, c $\qquad d = \alpha a + \beta b + \gamma c$
- Želimo odrediti komponente vektora d u toj bazi

$\Rightarrow$ sve vekt. prikazujemo u kanonskoj bazi i, j, k

$$d_x i + d_y j + d_z k = \alpha(a_x i + a_y j + a_z k) + \beta(b_x i + b_y j + b_z k) + \gamma(c_x i + c_y j + c_z k)$$

$$\left.\begin{aligned} a_x \alpha + b_x \beta + c_x \gamma &= d_x \\ a_y \alpha + b_y \beta + c_y \gamma &= d_y \\ a_z \alpha + b_z \beta + c_z \gamma &= d_z \end{aligned}\right\}$$

ovaj sustav uvijek ima jednoznač. rješenje jer su retci matrice linearno nezavisni vektori a, b i c te je ona regularna

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} d_x & b_x & c_x \\ d_y & b_y & c_y \\ d_z & b_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}} \rightarrow \alpha = \frac{[d, b, c]}{[a, b, c]}$$ - Crammerovim pravilom

$$\dots \beta = \frac{[a, d, c]}{[a, b, c]} \qquad \gamma = \frac{[a, b, d]}{[a, b, c]}$$

$$\Rightarrow d = a \frac{[d, b, c]}{[a, b, c]} + b \frac{[a, d, c]}{[a, b, c]} + c \cdot \frac{[a, b, d]}{[a, b, c]}$$

Prikaz vektora u ortogonalnoj bazi

$$\frac{[d, b, c]}{[a, b, c]} = \frac{d \cdot (b \times c)}{a \cdot (b \times c)} = \frac{d \cdot \lambda a}{a \cdot \lambda a} = \frac{d \cdot a}{|a|^2}$$

Ako vektori a, b, c čine ortogonalnu bazu u V^3, onda se svaki vektor d prostora V^3 može zapisati u obliku:

$$\boxed{d = \frac{d \cdot a}{|a|^2} \cdot a + \frac{d \cdot b}{|b|^2} \cdot b + \frac{d \cdot c}{|c|^2} \cdot c}$$

Prikaz vektora u ortonominiranoj bazi

Koord vektora $a = a_x i + a_y j + a_z k$ u ortonominiranoj bazi (i, j, k) računaju se formulama

$$a_x = a \cdot i \qquad a_y = a \cdot j \qquad a_z = a \cdot k$$

$$\Rightarrow \quad a = (a \cdot i) i + (a \cdot j) j + (a \cdot k) k$$

Dvostruki umnožak

$d = (a \times b) \cdot c$

$$d = d_x i + d_y j + d_z k = \underbrace{(d \cdot i)}_{d_x} i + \underbrace{(d \cdot j)}_{d_y} j + \underbrace{(d \cdot k)}_{d_z} k$$

$\rightarrow d_x = [(a \times b) \cdot c] \cdot i = (a \times b) \cdot (c \times i)$

$$d_x = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_x & c_y & c_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{(a \cdot c) b_x - (b \cdot c) a_x}$$

$$d_y = (a \cdot c) b_y - (b \cdot c) a_y$$

$$d_z = (a \cdot c) b_z - (b \cdot c) a_z$$

$\longrightarrow$ dakle vrijedi $(a \times b) \times c = (a \cdot c) b - (b \cdot c) a$