3.2. DETERMINANTE I INVERZNA MATRICA

→ regularna matrica ima jedinstveni inverz (A^{-1})
$(A \cdot A^{-1} = I)$

↳ Primjena Binet-Cauchyjevog teorema:
$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

↳ $\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A)$
$= \det(I) = 1$

za regularnu matricu mora biti $\det A \neq 0$

TEOREM 3. Matrica A je regularna $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

+ **TEOREM 4** Računanje inverzne mat. – Cramerovo pravilo

Elementi inverzne matrice su $(A^{-1})_{ij} = a'_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\det A}$

$A_{ij} = (A_{ji})^T$

Eksplicitni zapis inverzne matrice možemo predočiti na sljedeći način:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Dokaz:

$\boxed{\Rightarrow}$ neka je A reg. mat. Tada postoji jedinstveni inverz A^{-1} td $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

↳ Binet Cauchyjev t. $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$
$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$
$\Rightarrow \det(A) \neq 0$ w

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $\det A \neq 0$. Pokazuje se da tada postoji A^{-1} i vrijedi
$(A^{-1})_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\det A}$

Algoritam za računanje inverzne mat. Cramerovim pravilom

1. Izračunaj $\det A$

   Ako je $\det A \neq 0$; nastavi. Inače mat. nema inverz.

2. Odredi alg. komploment svakog mat. el. i zapiši ih u odgovarajuće mjesto u matrici

3. Transponiraj dobivenu matricu i podijeli s $\det A$.

Pr. 4) (UDŽ)

– inverz mat. reda 2 ; $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Pretp. $\det A = ad - bc \neq 0$

$\Rightarrow$ mat. alg. kompl. glasi $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

$\longrightarrow$ zato je inverzna mat. $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Pr. 5.) Odredi inverznu mat, mat $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

1. $\det A \neq 0$?

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-4+3) - 2(8+1) + 3(6+1)$$

$$= -1 - 18 + 21 = \underline{2} \neq 0 \checkmark$$ $\rightarrow$ postoji inverzna mat.

2. Komplement svakog mat. el.

↳ predznaci ispred minora mijenjaju predznak na isti način kao pri rač. $\det A$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -9 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rješenje