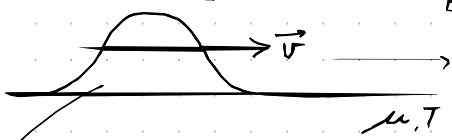
Energija, snaga, refleksija i transmisija vala

Energija vala

$E = ?$



- taj val ima neku E → meh. en

$E = K + U$

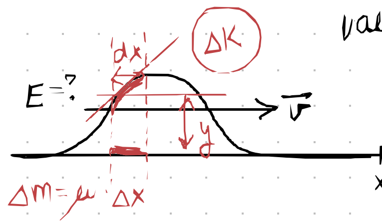
$\to v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

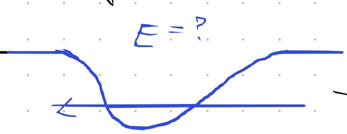
μ, T

→ možemo opisati:

$y[x,t] = f[x - vt]$, dodamo (plan) valni paket

$E = ?$





porište u $t=0$

$y[x,t] = f[x - vt] - f[x + vt]$

$t = 0 \to y[x,t] = f(x) - f(x) = 0$

$y[x, t=0] = 0$!!

- ima na fiz svojstva ista
  ↳ ima istu energiju

u t_0 = ravnotežni položaj → nema potencijalne en.

↳ $E = K$ samo izračunamo K

⇒ jednadžba vala ⇒ $y[x,t] = f[x - vt] - f[x + vt]$ } ovaj val (crni + plavi) ima dvostruko veću en od crnog/plavog

$2E = K$ jer u $t=0$ → $U = 0$

$2E = K = \int_{poč}^{kon} dK = \int \frac{1}{2} dm\, v^2 \neq \dot{y}$ — bolje da ne pomiješamo sa brzinom vala $= \int \frac{1}{2} dm (\dot{y})^2$

zbroj svih malih komadića koji nju čine → mali komadić mase

brzina kojom se komadić užeta giba

$\dot{y}[x,t] = f'[x - v \cdot 0] \cdot (-v) - f'[x + v \cdot 0] \cdot v = -v f'[x] - v f'[x] = -2 v f'[x]$ ($t=0$)

$\to 2E = \int \frac{1}{2} \overbrace{\mu \cdot dx}^{dm} \cdot (-2 v f[x])^2 = \int \frac{1}{2} \mu dx \cdot 4 v^2 f[x]^2$ $\quad$ $*\ \mu = \frac{dm}{dx} \to dm = \mu\, dx$

konstanta

$2E = 2\mu v^2 \int (f'[x])^2 \cdot dx \Big/_{-\infty}^{\infty}$

$2E = 2\mu v^2 \int_{-\infty}^{\infty} (f'[x])^2 dx \longrightarrow \boxed{E = \mu v^2 \int_{-\infty}^{\infty} (f'[x]) dx}$ meh. en. vala

Harmonijski val $y[x,t]$

$$y[x,t] = A\cos[kx - \omega t + \varphi]$$

$$\rightarrow E = \mu v^2 \int_{-\infty}^{\infty} [f'(x)]^2 dx$$

energija:

$$E = \mu v^2 \int_{x_1}^{x_2} \left(y'[x, t=0]\right)^2 dx$$

$$= \mu v^2 \int_{x_1}^{x_2} \left(-kA\sin[kx - 0 + \varphi]\right)^2 dx$$

$$= (-kA)^2 \mu v^2 \int_{x_1}^{x_2} \left(\sin[kx+\varphi]\right)^2 dx = A^2 k^2 \mu v^2 \int_{x_1}^{x_2} \sin^2[kx+\varphi]\, dx$$

$$= A^2 \omega^2 \mu \int_{x_1}^{x_2} \sin^2[kx+\varphi]\, dx$$

* $f[x] = A\cos kx$

$$\underbrace{k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

$\omega = k v$ brzina kojom val putuje kroz medij

ω^2

$\frac{1}{2}$ * to je ono što naučimo iz prakse

točsto nas zanima kin. gust. en (po jedinici duljine, ~~tada~~ niske litne jznice)

↳ srednja vrijednost energije

Srednja linijska gustoća meh. en.: (koliko en. po koliko duljine)

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2$$

ako se radi o longitudinalnom valu $\Rightarrow \mu = \rho \cdot S$

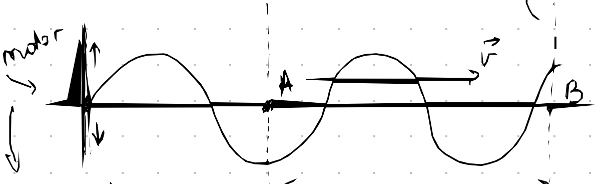
volumna gustoća mase

S – površina pop. presjeka štapa ili čega već

⟿ ova analiza se ne mijenja u odnosu na longitudinalni val

Kolika je snaga vala:

snaga – en. sadržana na nekoj duljini nekog sredstva da bi val došao iz A u B



ΔE

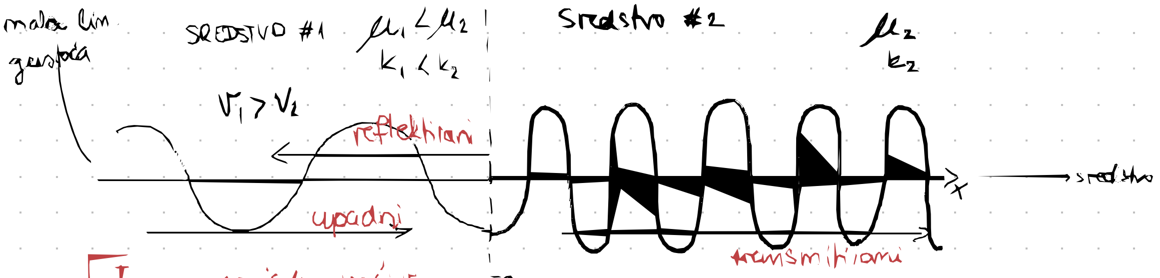
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

$$P = \left\langle \frac{\Delta E}{\Delta x} \right\rangle \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left\langle \frac{\Delta E}{\Delta t} \right\rangle \cdot v \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v}$$

v – brzina kojom val putuje kroz prostor ≠ brzina čestice $(\dot{y})$

Refleksija & transmisija transverzalnog harmonijskog vala na granici dvaju sredstava



$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ → manji μ, veći v

$\omega = kv \Rightarrow \omega \sim v^2$

T, ω ... jednaki s obje strane

pretpostavimo da val dolazi s lijeve strane

$k_1 v_1 = \omega = k_2 v_2$

upadni val: $y_u[x,t] = A_u \cos[k_1 x - \omega t]$

reflektirani val: $y_r[x,t] = A_r \cos[-(k_1 x + \omega t + \varphi_r)]$ } LIJEVO $x \le 0$

transmitirani val: $y_t[x,t] = A_t \cos[k_2 x - \omega t + \varphi_t]$ ⇒ DESNO $x > 0$

• kompleksni zapis

[redacted] $[x,t] = A_u e^{i(k_1 - \omega t)} + A_r e^{-i(k_1 x + \omega t + \varphi_r)}$ → superpozicija upadnog i reflektiranog (lijevo je računato)

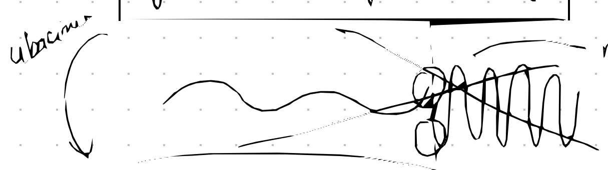
[redacted] $] = A_t e^{i(k_2 x - \omega t + \varphi_t)}$

• spojni uvjeti

(I) Uže s lijeve i uže desne su spojeni u $x=0$

$$\boxed{y_1[x=0,t] = y_2[x=0,t]}$$

ubacimo



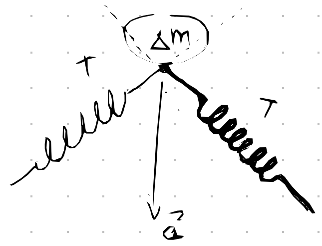
$A_u + A_r e^{i\varphi_r} = A_t e^{i\varphi_t}$

(II) u $x=0$

[redacted] $= y_2[x=0,t]$

$k_1 A_u - k_1 A_r e^{i\varphi_r} = k_2 A_t e^{i\varphi_t}$

druga u prirodi nema



Formula predviđa zaobljene šiljke

Dobijemo sustav:

$$\left.\begin{aligned} & A_u + A_r e^{-i\varphi_r} = A_t e^{i\varphi_t} \\ \Rightarrow\ & k_1 A_u - k_1 A_r e^{-i\varphi_r} = k_2 A_t e^{i\varphi_t} \end{aligned}\right\} \longrightarrow A_r e^{-i\varphi_r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_u$$

A reflektirani

A upadni

$$k_{1,2} \sim \sqrt{\mu_{1,2}}$$

$k_2 >> k_1 \rightarrow k_1$ možemo zanemariti

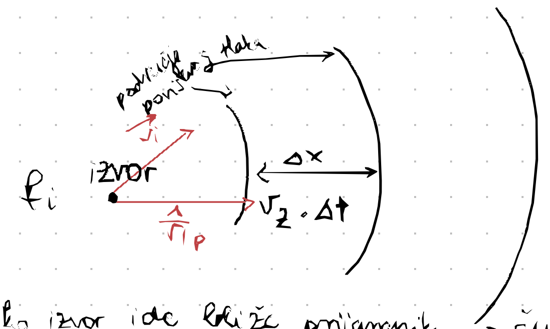
$$A_r e^{i\varphi_r} = \frac{-\cancel{k_2}}{\cancel{k_2}} A_u$$

$$A_r e^{i\varphi_r} = (-1) \cdot A_u \qquad A_r, A_u \in \mathbb{R}, > 0$$

$$\Rightarrow e^{i\varphi_r} = -1$$

- ako je zdesna beskonačno masivno uže (ili čvrst kraj) dobivamo izlazni val koji je u protufazi u točki spoja
  - ↳ kao da titra sa suprotnom fazom
- ako je desna strana beskonačno lagana
  - ↳ ref val titra u fazi
  - u točki spoja je dupla amplituda

Zvuk i Dopplerova pojava



$\vec{r}_{ip}$ -> jedinični vektor smjera od izvora do prijemnika

f_p

prijamnik → svakih $1\,dt$ dolazi jedno područje povišenog tlaka
↳ frekvencija

$\vec{r}_p$

→ ako izvor ide bliže prijamniku → čujemo veću frekv.

ako se izvor i prijamnik gibaju

$$\boxed{\frac{f_p}{f_i} = \frac{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot \vec{v}_p}{v_z - \vec{r}_{ip} \cdot \vec{v}_i}}$$

skalarni produkt

* nije svejedno gibamo li se mi prema izvoru, ili izvor prema nama

Primjer: $v_p = 0$, $v_i > 0$, (izvor se giba prema nama)

$$\frac{f_p}{f_i} = \frac{v_z - 0}{v_z - v_i} = \frac{v_z}{v_z - v_i}$$

pretpostavljamo da se izvor giba u odnosu na mirnu zračnu masu

* $v_p > 0$, $v_i = 0$ (mi se gibamo prema izvoru)

$$\frac{f_p}{f_i} = \frac{v_z - (-v_p)}{v_z - 0}$$

→ mi se gibamo kontra smjera širenja zvuka ⇒ $-v_p$

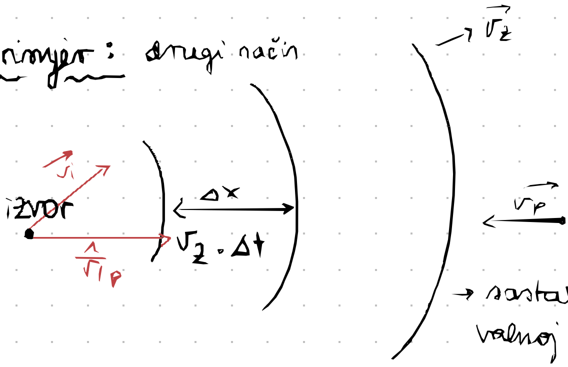
$$\frac{f_p}{f_i} = \frac{v_z + v_p}{v_z}$$

$$\frac{v_z}{v_z - v_i} \neq \frac{v_z + v_p}{v_z} \;!$$

pretpostavljamo da zračna masa miruje s izvorom

Primjer: drugi način

$v_p > 0$, $v_i = 0$



→ sastat će se nešto ranije jer ide PREMA valnoj fronti

$$\Delta x = v_z \cdot \Delta t' + v_p \cdot \Delta t' = v_z \cdot \Delta t$$

$$\Delta x = \Delta t'(v_z + v_p) - v_z \cdot \Delta t \implies \Delta t' = \frac{v_z}{v_z + v_p} \cdot \Delta t$$

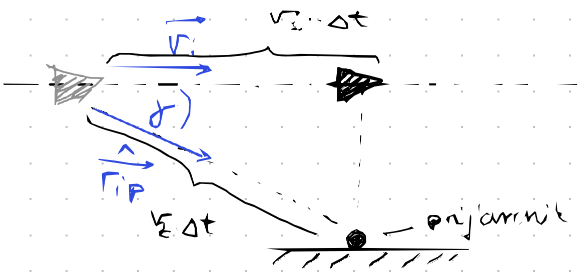
$$\Delta t = \frac{1}{f_i} \qquad \Delta t' = \frac{1}{f_p} \implies \frac{1}{f_p} = \frac{v_z}{v_z + v_p} \cdot \frac{1}{f_i}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{f_p}{f_i} = \frac{v_z + v_p}{v_z}}$$

ili

Primjer: 7.8.4 u skripti

Avion nad glavom



$f_i = 100\,\text{Hz}$

$v_i = 0.8\, v_z$

$f_p = ?$

! u trenutku kada je avion iznad nas tek dolazi zvuk otprije (sivi avion)

$$\implies \cos\gamma = \frac{v_i}{v_z}$$

skalarni produkt:

$\vec{r}_{ip} \cdot \vec{v}_i = |\hat{r}_{ip}|\,|\vec{v}_i| \cdot \cos\gamma$, $|\hat{r}_{ip}| = 1$

$$\cos\gamma = \frac{v_i}{\hat{r}_{ip}}$$

$$\frac{f_p}{f_i} = \frac{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot \vec{v}_p}{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot \vec{v}_i} = \frac{v_z - 0}{v_z - v_i \cdot \cos\gamma} = \frac{v_z}{v_z - \frac{v_i^2}{v_z}}$$

$$f_p = \frac{f_i}{1 - \left(\frac{v_i}{v_z}\right)^2}$$