1. Matrice

zadaci sa ispita

MI 2018 1

1. ***Inverz matrice.***

   (a) Dokažite tvrdnju ili je opovrgnite kontra-primjerom:

   $$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ regularne kvadratne matrice reda } n.$$

   (b) Zadane su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Riješite matričnu jednadžbu $(\mathbf{AXB}^{-1})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{B}^2\mathbf{A}^{-1}$.

① a) $\alpha \in \mathbb{R}$ td. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}$ ortogonalna

$A^{-1} = A^t \,/\cdot A$

$I = A \cdot A^t \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{4} + \alpha^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\frac{1}{4} + \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

b) Determinanta ortogonalne matrice?

$A^{-1} = A^t \Rightarrow \det A^{-1} = \det A^t \Rightarrow \frac{1}{\det A} = \det A \,/\cdot \det A$

$\Rightarrow 1 = (\det A)^2 \Rightarrow \boxed{\det A = \pm 1}$

c) A-ortogonalna $\Rightarrow A^{-1} = A^t$

B-simetrična $\Rightarrow B^t = B$

dokazati $A^{-1}BA$ simetrična

Treba dokazati da je $(A^{-1}BA)^t = A^{-1}BA$

$(A^{-1}BA)^t = A^t B^t (A^{-1})^t = A^{-1} B (A^t)^t = A^{-1}BA$

QED

MI 2019 1

1. (10 bodova) Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je *idempotentna* ako je $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

   (a) Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je matrica $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 1/4 & \alpha \end{bmatrix}$ idempotentna.

   (b) Koje su moguće vrijednosti determinante idempotentne matrice $\mathbf{A}$? Svoju tvrdnju dokažite.

   (c) Dokažite da je matrica $\mathbf{A}$ idempotentna ako i samo ako je matrica $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ idempotentna.

1. (a)

$$X^2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 4\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 4\alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & \sqrt{3}(1+4\alpha) \\ 1+4\alpha & \sqrt{3}+16\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \frac{1}{16}(1+\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Ne postoji takav α.

(b) $A^2 = A \quad / \det$

$\Rightarrow \det(A^2) = \det A$

$\underset{\text{Binet-Cauchy}}{\Rightarrow} (\det A)^2 = \det A$

$\Rightarrow \det A \cdot (\det A - 1) = 0 \Rightarrow \det A \in \{0, 1\}$

(c) $I - A$ idempotentna $\Leftrightarrow (I-A)^2 = I - A \Leftrightarrow \cancel{I^2} - \cancel{A} - A + A^2 = \cancel{I} - \cancel{A}$

$\Leftrightarrow -A + A^2 = 0 \Leftrightarrow A^2 = A \Leftrightarrow A$ idempotentna

MI 2020 1

1. (10 bodova) Za kvadratnu regularnu matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je *involutorna* ako je $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.

   (a) Odredite $\mathbf{A}^2$ za involutornu matricu $\mathbf{A}$.

   (b) Odredite sve involutorne matrice oblika

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

   gdje su a, b i c realni brojevi.

   (c) Ako su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ involutorne matrice, moraju li $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{ABA}$ nužno biti involutorne? Obrazložite!

1. (a) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

(b) Primijetimo da identitet $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, iz (a) dijela zadatka, karakterizira involutorne matrice. Sada računamo

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{bmatrix}$$

pa dobivamo $a^2 = c^2 = 1$ i $b(a+c) = 0$.

1. *slučaj* $b = 0$

$\Rightarrow a = \pm 1$ i $c = \pm 1$ (Primijetimo da su, zaista, sve ovakve matrice involutorne.)

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

2. *slučaj* $b \neq 0$

$\Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow c = -a, a = \pm 1$

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R}$$

(c) Pokažimo prvo da je $\mathbf{ABA}$ nužno involutorna. Računamo: $(\mathbf{ABA})^2 = \mathbf{ABAABA} = \mathbf{ABIBA} = \mathbf{ABBA} = \mathbf{AIA} = \mathbf{AA} = \mathbf{I}$, što pokazuje željenu tvrdnju.

Računamo sada $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{ABAB}$, no ako $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ nemamo razloga vjerovati da je taj izraz jednak $\mathbf{I}$. Potražimo sada dvije involutorne matrice koje ne komutiraju:

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Po (b) dijelu zadatka vidimo da su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}^\top$ involutorne pa je i $\mathbf{B}$ involutorna. No, računamo li

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

dobivamo

$$(\mathbf{AB})^2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}$$

Ovaj primjer nam pokazuje da $\mathbf{AB}$ ne mora nužno biti involutorna matrica.

MI 2021 1

1. (10 bodova)

   (a) Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n,p}$. Napišite i dokažite formulu u kojoj $(\mathbf{AB})^T$ izražavamo pomoću $\mathbf{A}^T$ i $\mathbf{B}^T$.

   (b) Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ simetrične matrice, mora li $\mathbf{AB}$ također biti simetrična? Obrazložite.

1°) a) Neka je $A \in \mathcal{M}_{mn}$, $B \in \mathcal{M}_{np}$, tada je $AB \in \mathcal{M}_{mp}$ i vrijedi

$(AB)^T = B^T A^T$.

$$B^T \in \mathcal{M}_{pn},\ A^T \in \mathcal{M}_{nm} \Rightarrow B^T A^T \in \mathcal{M}_{pm}$$

Računamo: $$\left[(AB)^T\right]_{ij} = \left[AB\right]_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \left[B^T\right]_{ik} \left[A^T\right]_{kj}$$

$$= \left[B^T A^T\right]_{ij}.$$

b) A, B simetrične

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

AB nije simetrična.

MI 2022 1

1. (10 bodova)

   Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda - 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Odredite vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje matrice A i B komutiraju. Za utvrđene vrijednosti $\lambda \in \mathbb{R}$, dokažite da je B inverzna matrica matrice A.

Zadatak 1.

<u>RJEŠENJE</u> Matrice A i B komutiraju ako je $AB = BA$. Dakle, računamo:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda^2+\lambda-1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda^2+\lambda & 2\lambda^2+\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da bi ove matrice bile jednake, potrebno je samo provjeriti jednakost elemenata na koordinatama $(2,3)$ i $(3,2)$ ovih dviju matrica. To daje jedan uvjet: $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$. Dakle, matrice komutiraju za $\lambda_1 = 1/2$ i $\lambda_2 = -1$. Sada vidimo da za te vrijednosti λ vrijedi

$$AB = BA = I.$$

Iz ovoga odmah slijedi da je B inverzna matrica matrice A. $\square$

LJIR 2022 1

1. (10 bodova)

   Odredite sve kvadratne matrice A reda 2 koje komutiraju sa svim kvadratnim dijagonalnim matricama D reda 2.

Zadatak 1.

<u>RJEŠENJE</u> Neka je A fiksna i D proizvoljna:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}.$$

Iz zahtjeva komutativnosti dobivamo

$$AD = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{bmatrix} = DA = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & bx \\ cy & dy \end{bmatrix}.$$

Gornja jednakost vrijedi za sve dijagonalne matrice D ako i samo ako je

$$bx - by = b(x-y) = 0 \qquad \text{i} \qquad cx - cy = c(x-y) = 0,$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. To je moguće ako i samo ako je $b = c = 0$. Dakle, matrice A s danim svojstvom su upravo sve dijagonalne matrice. $\square$

ZIR 2022 1

1. (10 bodova)

   (a) Odredite sve matrice koje komutiraju s matricom

   $$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (b) Navedite dva primjera nenul matrica iz $\mathcal{M}_3$ koje komutiraju *sa svim* matricama iz $\mathcal{M}_3$.

   S $\mathcal{M}_n$ označavamo skup svih realnih kvadratnih matrica n-tog reda.

Zadatak 1.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

matrica koja komutira s J. Određujemo joj koeficijente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & a+b \\ 0 & d & d+e \\ 0 & g & g+h \end{bmatrix}.$$

Odmah primjećujemo da je $g = 0$ i $d = h$, iz čega odmah slijedi $g + h = 0 \implies h = 0 \implies d = 0$. Dalje, $i = d + e = e$ i $a = e + h = e$, iz čega slijedi $a = e = i$. Konačno, $f + i = a + b \implies f = b$. Uvjeta na c nema. Dakle, proizvoljna matrica A koja komutira s J je oblika

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

b) Svaka matrica oblika

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, komutira sa svim matricama iz $\mathcal{M}_3$. $\square$