2. Diferencijalni racun funkcija vise varijabli

zadaci sa ispita

MI19

1. **(9 bodova)**

   (a) Zadana je funkcija

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (i) **(3b)** Ispitajte neprekinutost funkcije $f(x,y)$ u točki $(0,0)$.

   (ii) **(2b)** Po definiciji ispitajte postoji li parcijalna derivacija $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

   (b) **(1b)** Je li sljedeća tvrdnja točna ili netočna? Dokažite je ako je točna ili opovrgnite protuprimjerom ako je netočna:

   Funkcija za koju postoje parcijalne derivacije u točki (x_0, y_0) je i diferencijabilna u (x_0, y_0).

   (c) **(3b)** Neka je $g = g(u,v)$, $u = x^2+y^2$, $v = \frac{x}{y}$ i $G(x,y) = g(x^2+y^2, \frac{x}{y})$. Izrazite $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial G}{\partial y}$ pomoću $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ i $\dfrac{\partial g}{\partial v}$.

1. (a) (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy}{x^2+y^2} = \left[\begin{array}{c} \text{POLARNE KOORDINATE} \\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \\ r \to 0 \end{array}\right] = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{4r^{\cancel{2}}\cos\varphi\sin\varphi}{\cancel{r^2}} = \lim\limits_{r\to 0} 2\sin(2\varphi) =$

$= 2\cdot\sin(2\varphi)$

Po definiciji funkcije f, da bi bila neprekidna u $(0,0)$, mora biti $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Za $\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ limes je $2\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

$\Rightarrow$ funkcija nije neprekidna u $(0,0)$.

(ii) Po definiciji: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{4\cdot h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$\Rightarrow$ postoji parcijalna derivacija $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(b) Tvrdnja je <u>netočna</u>. Protuprimjer je funkcija f iz (a) dijela zadatka.
Na isti način kao u (ii) se pokaže da postoji $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, međutim pod (i)
smo vidjeli da f nije neprekidna u $(0,0)$ pa posebno nije niti diferencijabilna.

(c) $\dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x\cdot\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial v}$

$\dfrac{\partial G}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3y\cdot\dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{x}{y^2}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial v}$

MI19

2. **(9 bodova)** Neka je $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna i neka je $P_0 \in D(f)$ takva da je $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$, te neka je $\vec{h} \in V^2$, $\vec{h} \neq \vec{0}$.

   (a) **(3b)** Napišite definiciju usmjerene derivacije $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0)$ te pokažite da vrijedi

   $$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{h}_0.$$

   (b) **(2b)** Pokažite da za $\forall \vec{h} \in V^2$ vrijedi

   $$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) \in [-\|\nabla f(P_0)\|, \|\nabla f(P_0)\|\,].$$

   (c) **(3b)** Odredite usmjerenu derivaciju funkcije $f(x, y) = x^2y+y^3$ iz točke $T(1, 2)$ u smjeru najbržeg rasta.

   (d) **(1b)** Ako neka diferencijabilna funkcija $g(x, y)$ ima najveću brzinu pada u točki P_0 u smjeru vektora $\vec{j}$, koliko iznosi maksimalna vrijednost usmjerene derivacije iz točke P_0?

(2.)

(a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\cdot \vec{h}_0) - f(P_0)}{t}$, gdje je $\vec{h}_0 = \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$.

TVRDNJA: $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{h}_0$

DOKAZ: Označimo $P_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{h}_0 = (h_1, h_2)$.

Po definiciji usmjerene derivacije, želimo pronaći brzinu promjene vrijednosti funkcije f kada se gibamo po pravcu određenom točkom P_0 i vektorom smjera $\vec{h}$, čiji parametarski oblik je $\begin{cases} x = x_0 + s\cdot h_1 \\ y = y_0 + s\cdot h_2 \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$. P_0 se postiže za $s = 0$.

$z = f(x,y) = f(x_0 + s\cdot h_1, y_0 + s\cdot h_2) \quad / \frac{\partial}{\partial s}$

$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = f_x \cdot h_1 + f_y \cdot h_2$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) = \frac{\partial z}{\partial s}(0) = f_x(x_0,y_0)\cdot h_1 + f_y(x_0,y_0)\cdot h_2 = \nabla f(P_0)\cdot \vec{h}_0 \quad \square$

(b) TVRDNJA: za $\forall \vec{h} \in V^2$ vrijedi: $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) \in \left[-\|\nabla f(P_0)\|, \|\nabla f(P_0)\|\right]$.

DOKAZ: Po tvrdnji (a) imamo: $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{h_0} = \|\nabla f(P_0)\| \cdot \underbrace{\|\vec{h_0}\|}_{=1} \cdot \underbrace{\cos(\measuredangle \nabla f(P_0), \vec{h_0})}_{\in[-1,1]}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) \in \left[-\|\nabla f(P_0)\|, \|\nabla f(P_0)\|\right]$. $\square$

(c) Po (b) dijelu, usmjerena derivacija funkcije f u smjeru najbržeg rasta iznosi $\|\nabla f(P_0)\|$.

$\nabla f(x,y) = \left[2xy \quad x^2+3y^2\right] \Rightarrow \nabla f(1,2) = \left[4 \quad 13\right]$

$\|\nabla f(1,2)\| = \sqrt{4^2+13^2} = \sqrt{16+169} = \underline{\underline{\sqrt{185}}}$

(d) $\nabla g(P_0) \cdot \vec{q} = \frac{\partial g}{\partial q}(P_0)$ je minimalna vrijednost usmjerene derivacije u P_0.

Po (b) dijelu znamo da se minimalna vrijednost postiže za $\vec{h_0} = -\frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$,

a maksimalna za $\frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$. Dakle, $\vec{q} = \frac{-\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|} \Leftrightarrow -\vec{q} = \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$

Zaključujemo, maksimalna vrijednost usmjerene derivacije iz točke P_0 je

$\nabla g(P_0) \cdot (-\vec{q}) = -\frac{\partial g}{\partial q}(P_0)$.

MIZI20

1. **(8 bodova)**

(a) **(2b)** Ukoliko postoji, odredite $a \in \mathbb{R}$ takav da funkcija f bude neprekinuta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{ako } (x,y) \neq (0,0), \\ a, & \text{ako } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b) **(2b)** Definirajte diferencijabilnost funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ u točki $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(c) **(4b)** Za svaku od sljedećih tvrdnji napišite je li istinita ili lažna:

T1: Ako je f diferencijabilna u (x_0, y_0), onda je f i neprekinuta u (x_0, y_0).

T2: Ako je f neprekinuta u (x_0, y_0), onda je f i diferencijabilna u (x_0, y_0).

Istinite tvrdnje dokažite, a lažne opovrgnite kontraprimjerom i obrazložite.

1. a)

Ako takav a postoji onda je jedinstven i jednak limesu: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Računamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)$$

Budući da je $\cos^3\varphi + \sin^3\varphi$ ograničena, po teoremu o sendviču dobivamo da je traženi limes jednak 0.

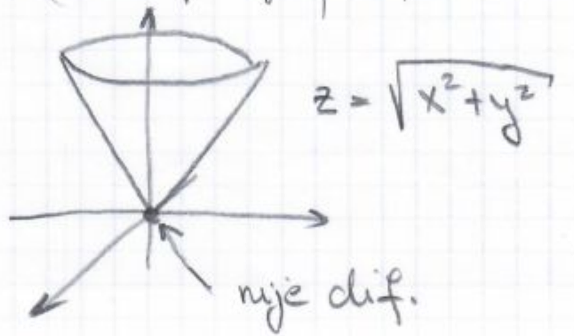
b) Definicija iz skripte.

c) T1: Istinita. Dokaz u skripti.

T2: Lažna.

Protuprimjer: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

neprekidna u $(0,0)$ no nije diferencijabilna u $(0,0)$ (ne postoji parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$)



MIZI20

2. **(8 bodova)**

   (a) **(2b)** Skicirajte i imenujte plohu zadanu jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 = 2y - 2z$.

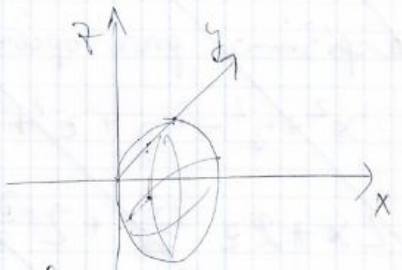
   (b) **(2b)** Odredite tangencijalnu ravninu na plohu iz (a) u točki $T(0, 2, 0)$.

   (c) **(3b)** Ako je jednadžbom iz (a) implicitno zadana funkcija $z = z(x, y)$ u okolini točke $T(0, 2, 0)$, odredite $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0, 2)$ i $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 2)$.

   (d) **(1b)** U kojim točkama plohe iz (a) nije moguće (implicitno) definirati jedinstvenu funkciju $z = z(x, y)$?

2. a) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$.

$\Rightarrow$ Ploha je sfera radijusa $\sqrt{2}$ s centrom u $(0,1,-1)$.



b) Ploha je implicitno zadana s

$F(x,y,z)=0$, gdje je $F(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+(z+1)^2-2$.

$\nabla F(x,y,z)=(2x,2y-2,2z+2)$, $\nabla F(0,2,0)=(0,2,2)$

Tangencijalna ravnina na sferu u točki $(0,2,0)$ zadana je s $(x-0,y-2,z-0)\cdot\nabla F(0,2,0)=0$,

odnosno $2y+2z-4=0$

c) $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y-2}{2z+2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,2) = -\frac{2}{0+2} = -1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2(2z+2)-(2y-2)\cdot 2\,\frac{\partial z}{\partial y}}{(2z+2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,2) = -\frac{2\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot(-1)}{(0+2)^2} = -2$$

d) $z = z(x,y)$ nije jedinstveno definirana u točkama plohe u kojima je $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow \quad 2z+2=0$$

$$z=-1$$

MI21

1. **(7 bodova)**

   (a) **(1b)** Definirajte neprekinutost funkcije $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ u točki $(x_0, y_0) \in D_f$.

   (b) **(3b)** Ispitajte neprekinutost funkcije f u točki $(0,0)$ ako je:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{4x^4 + 3y^{4/3}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{7}, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

   (c) **(2b)** Je li sljedeća tvrdnja istinita ili neistinita? Dokažite ako je istinita ili opovrgnite protuprimjerom ako je neistinita:

   Ako je funkcija f diferencijabilna u (x_0, y_0), onda je neprekinuta u (x_0, y_0).

   (d) **(1b)** Je li funkcija iz **(b)** diferencijabilna? Obrazložite.

1. (a) Kažemo da je funkcija $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ NEPREKIDNA u točki (x_0, y_0) ako

postoji limes $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ i vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

(b) Promotrimo ponašanje sljedećih dviju restrikcija od f:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{4x^4+3x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{7x^4} = \frac{1}{7},$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{4x^4+3\cdot 0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

2. način: polarne koord.

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{4r^4\cos^4\varphi+3r^{\frac{4}{3}}\sin^{\frac{4}{3}}\varphi}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^{\frac{2}{3}}\cos\varphi\sin\varphi}{4r^{\frac{8}{3}}\cos^4\varphi+3\sin^{\frac{4}{3}}\varphi}$$

$\Rightarrow$ limes ovisi o φ

Budući da se dobivene vrijednosti razlikuju, ne postoji limes od f u $(0,0)$ pa f u toj točki nije neprekidna.

(c) TOČNO

Ako je f diferencijabilna u (x_0, y_0), onda postoje $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \in \mathbb{R}$

te vrijedi

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \sigma(\Delta x, \Delta y), \quad (*)$$

gdje

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\sigma(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0. \qquad (**)$$

No, zbog $(**)$ mora vrijediti i $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sigma(\Delta x,\Delta y) = 0$ pa puštanjem

$(*)$ na limes kada $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ dobivamo

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

tj. f je neprekidna u (x_0,y_0).

(d) Prema (c) podzadatku, funkcija iz (b) nije diferencijabilna. Naime,

ta funkcija nije diferencijabilna u $(0,0)$ jer u toj točki nije neprekidna.

MI21

2. **(7 bodova)** Ploha u $\mathbb{R}^3$ dana je sljedećim izrazom:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0.$$

(a) **(2b)** Primjenom teorema o implicitnoj funkciji, obrazložite može li se izraziti z u obliku $z = f(x, y)$ na okolini točke $(1, -2)$ tako da vrijedi $f(1, -2) = 0$.

(b) **(5b)** Nađite točke na zadanoj plohi u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s ravninom $x - 2y + 2z = 3$.

(2.) (a) Definiramo funkciju

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5.$$

Budući da je

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 6$$

i posebno,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,-2,0) = -6 \neq 0,$$

prema teoremu o implicitnoj funkciji, z se može izraziti kao funkcija varijabli x i y na nekoj okolini točke $(1,-2)$.

(b) Vektor normale tangencijalne ravnine na zadanu plohu u točki (x,y,z) je jednak

$$\nabla F(x,y,z) = (2x-2,\ 2y+4,\ 2z-6)$$

i prema uvjetu zadatka taj vektor mora biti kolinearan s vektorom normale ravnine $x-2y+2z=3$, tj. mora postojati $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da

$$(2x-2,\ 2y+4,\ 2z-6) = \lambda(1,-2,2)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(\lambda+2), \quad y = \frac{1}{2}(-2\lambda-4) = -\lambda-2, \quad z = \frac{1}{2}(2\lambda+6) = \lambda+3$$

Budući da tražene točke moraju ležati na plohi

$$\frac{1}{4}(\lambda+2)^2 + (\lambda+2)^2 + (\lambda+3)^2 - (\lambda+2) - 4(\lambda+2) - 6(\lambda+3) + 5 = 0$$

$$5(\lambda^2+4\lambda+4) + 4(\lambda^2+6\lambda+9) - 20(\lambda+2) - 24(\lambda+3) + 20 = 0$$

$$9\lambda^2 - 36 = 0$$

$$\lambda^2 = 4$$

$\lambda_1 = 2$ $\quad$ $\lambda_2 = -2$

$\boxed{(x,y,z) = (2,-4,5)}$ $\quad$ $\boxed{(x,y,z) = (0,0,1)}$

MI22

1. **(8 bodova)**

(a) **(3b)** Ispitajte i obrazložite postoji li limes funkcije

$$f(x, y) = \frac{e^{x+2y} - 1}{y}$$

u točki $(0, 0)$.

(b) **(2b)** Po definiciji parcijalne derivacije, odredite $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, za funkciju iz (a).

(c) **(3b)** Koristeći definiciju diferencijabilnosti, dokažite da je funkcija $g(x, y) = xy$ diferencijabilna za svaki $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Zadatak 1.

RJEŠENJE **(a)** Ako postoji limes funkcije $f(x,y)$ u točki $(0,0)$, tada je vrijednost izraza

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \tag{1}$$

neovisna o načinu na koji se točke (x,y) približavaju ishodištu $(0,0)$. Primijetimo da približavanjem točki $(0,0)$ po pravcu $x=0$ imamo:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0} f(0,y) &= \lim_{y\to 0} \frac{e^{0+2y}-1}{y} = 2\cdot \lim_{y\to 0}\frac{e^{2y}-1}{2y} = 2\cdot 1\\ &= 2,\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti proširili razlomak s 2 kako bismo mogli iskoristiti nama poznati limes s MATANa 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{2}$$

S druge strane, ako se približavamo točki $(0,0)$ po pravcu $x=y$ dobivamo:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0} f(y,y) &= \lim_{y\to 0} \frac{e^{y+2y}-1}{y} = 3\cdot \lim_{y\to 0}\frac{e^{3y}-1}{3y} = 3\cdot 1\\ &= 3\end{aligned}$$

otkuda zaključujemo da izraz (1) ovisi o tome na koji način se približavamo točki $(0,0)$ pa slijedi da ne postoji limes funkcije $f(x,y)$ u točki $(0,0)$.

(b) Računamo direktno po DEFINICIJI 2.2.1 koju smo radili na predavanjima uzimajući u obzir da računamo za sve točke (x_0,y_0) za koje je $y_0 \neq 0$ pa se taj broj smije pojaviti u nazivniku:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{e^{x_0+\Delta x+2y_0}}{y_0}-\frac{e^{x_0+2y_0}}{y_0}}{\Delta x}\\ &= \frac{1}{y_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0+\Delta x+2y_0}-e^{x_0+2y_0}}{\Delta x}\\ &= \frac{e^{x_0+2y_0}}{y_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\\ &= \frac{e^{x_0+2y_0}}{y_0},\end{aligned}$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti ponovno iskoristili poznati limes (2).

(c) Diferencijabilnost dokazujemo direktno po DEFINICIJI 2.3.1 koju smo radili na predavanjima u drugom poglavlju - u tu svrhu fiksirajmo proizvoljnu točku (x_0,y_0) u $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{1}$ Za to je prvo potrebno provjeriti postoje li parcijalne derivacije funkcije $g(x,y)$ u (x_0,y_0), no ovdje se jednostavno vidi da je

$$g_x(x_0,y_0) = y_0 \quad \text{i} \quad g_y(x_0,y_0) = x_0.$$

$\boxed{2}$ Zapišimo sada promjenu funkcije $g(x, y)$ u traženom obliku:

$$g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) = g_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + g_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + o(\Delta x, \Delta y), \tag{3}$$

a potom ćemo trebat pokazati da je

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{o(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Naime, uvrštavanjem u jednakost (3) dobivamo da je

$$(x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + o(\Delta x, \Delta y)$$

pa rješavanjem za $o(\Delta x, \Delta y)$ nalazimo da je

$$o(\Delta x, \Delta y) = \Delta x \Delta y.$$

Sada računamo traženi limes prelaskom u drugoj jednakosti na polarne koordinate:

$$\begin{aligned}
\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{o(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\
&= \begin{bmatrix} \Delta x = r \cos \varphi & \\ \Delta y = r \sin \varphi & r \to 0 \end{bmatrix} \\
&= \lim_{r \to 0} \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}} \\
&= \lim_{r \to 0} r \cos \varphi \sin \varphi \\
&= 0
\end{aligned}$$

i time zaključujemo rješenje ovog zadatka. $\square$

MI22

3. **(9 bodova)**

   (a) **(2b)** Dokažite sljedeću tvrdnju: Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna. Tada za svaki $\vec{v} \in V^2$ i $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

   $$-\|\nabla f(x_0, y_0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \leq \|\nabla f(x_0, y_0)\|.$$

   (b) **(4b)** Odredite jedinične vektore $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ u smjeru kojih funkcija

   $$f(x, y) = x^3 - x^2y^2 + xy^2 + 10x$$

   najbrže raste i najbrže pada iz točke $T(2, 3)$. Nađite iznose usmjerenih derivacija u tim slučajevima.

   (c) **(3b)** Odredite nivo-krivulju funkcije iz (b) koja prolazi točkom $T(2, 3)$ te nađite tangentu na tu nivo-krivulju u toj točki.

Zadatak 3.

RJEŠENJE **(a)** Neka su $\vec{\mathbf{v}} \in V^2$ i $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljni. Označimo s $\vec{\mathbf{v}}_0$ jedinični vektor

$$\vec{\mathbf{v}}_0 = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}.$$

Prema PROPOZICIJI 4 iz POGLAVLJA 2 (stranica 66) vidimo da je tada

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{\mathbf{v}}_0.$$

Budući da skalarni produkt vektora možemo zapisati kao produkt njihovih normi pomnoženo s kosinusom kuta između njih, slijedi da je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \|\vec{\mathbf{v}}_0\| \cdot \cos\varphi = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \cos\varphi,$$

za neki $\varphi \in [0, 2\pi]$, gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili da je $\|\vec{\mathbf{v}}_0\| = 1$. Konačno, budući da je uvijek $\cos\varphi \in [-1, 1]$, zaključujemo da je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(x_0, y_0) \in \big[- \|\nabla f(x_0, y_0)\|, \|\nabla f(x_0, y_0)\|\big].$$

(b) Smjer najbržeg rasta funkcije $f(x, y)$ u točki $(2, 3)$ određen je vektorom $\nabla f(2, 3)$, dok je smjer najbržeg pada određen vektorom $-\nabla f(2, 3)$ - budući da tražimo normirane vektore $\vec{\mathbf{v}}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}_2$, njih ćemo trebati normirati. Dakle, računamo:

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x_0, y_0) = \big(3x_0^2 - 2x_0y_0 + y_0^2 + 10, -2x_0^2y_0 + 2x_0y_0\big)\\
&\nabla f(2, 3) = \big(12 - 36 + 9 + 10, -24 + 12\big) = (-5, -12)\\
&\|\nabla f(2, 3)\| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13.
\end{aligned}$$

Odavde sada slijedi da je jedinični smjer najbržeg rasta funkcije $f(x, y)$ u točki $(2, 3)$ dan kao vektor

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \frac{\nabla f(2, 3)}{\|\nabla f(2, 3)\|} = -\frac{1}{13}(5, 12),$$

dok je smjer najbržeg pada funkcije $f(x, y)$ iz točke $(2, 3)$ dan vektorom

$$\vec{\mathbf{v}}_2 = -\frac{\nabla f(2, 3)}{\|\nabla f(2, 3)\|} = \frac{1}{13}(5, 12).$$

Iznosi usmjerenih derivacija tada su dani jednostvnim izrazima:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}_1}(2, 3) = \|\nabla f(2, 3)\| = 13,\\
&\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}_2}(2, 3) = -\|\nabla f(2, 3)\| = -13.
\end{aligned}$$

(c) Nivo-krivulje funkcije $f(x, y)$ dane su formulama $f(x, y) = c$ za različite $c \in \operatorname{Im} f$ - da bismo pronašli onu nivo-krivulju koja prolazi točkom $T(2, 3)$ računamo:

$$\begin{aligned} f(2,3) &= 8 - 4 \cdot 9 + 2 \cdot 9 + 20 = 8 - 36 + 18 + 20 \\ &= 10 \end{aligned}$$

otkuda zaključujemo da se točka $T(2, 3)$ nalazi upravo na nivo-krivulji $f(x, y) = 10$. Definiramo li

$$g(x, y) = f(x, y) - 10 = x^3 - x^2y^2 + xy^2 + 10x - 10,$$

tada je ta ista nivo-krivulja zadana implicitnom jednadžbom $g(x, y) = 0$. Za ovakvu krivulju smo vidjeli (Poglavlje 2, stranica 59) da je tangenta na točku $T(2, 3)$ dana jednadžbom:

$$g_x(2,3)(x-2) + g_y(2,3)(y-3) = 0 \tag{4}$$

Budući da je $g(x, y) = f(x, y) - 10$ (g i f se razlikuju za konstantu), onda je jasno $g_x = f_x$ i $g_y = f_y$. Prisjetimo li se računa iz (b) dijela zadatka, sada brzo možemo vidjeti da je

$$\big(g_x(2,3), g_y(2,3)\big) = \big(f_x(2,3), f_y(2,3)\big) = \nabla f(2,3) = (-5, -12).$$

Konačno, uvrstimo li dobivene vrijednosti za $g_x(2, 3)$ i $g_y(2, 3)$ u jednadžbu pravca (4) dobivamo traženu tangentu:

$$5(x-2) + 12(y-3) = 0.$$

$\square$

MI23

1. **(8 bodova)**

   (a) **(4b)** Izvedite jednadžbu stožaste plohe s vrhom $O(0,0,0)$ i krivuljom baze zadane jednadžbom $x^2 + y^2 = 3$ u ravnini $z = 2$. Imenujte i skicirajte traženu plohu.

   (b) **(4b)** Nađite točke na krivulji $\vec{r}(t) = (t^2, 3\ln t, 8t)$ u kojima je tangenta na tu krivulju paralelna s tangencijalnom ravninom na plohu $z = x^2 - 2y^2$ u točki $(1, 1, -1)$.

Zadatak 1.

RJEŠENJE **a)** Pratimo izvod jednadžbe plohe napravljen na stranicama 39 i 40 prvog poglavlja skripte. Tu nam je $c = 2$ i $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ pa je

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 3 = 0 \text{ i } z = 2\right\}.$$

Točka $T(x_T, y_T, z_T)$ je na konusu ako i samo ako pravac OT siječke krivulju $\mathcal{C}$ u točki T'. Jednadžba pravca OT:

$$\frac{x}{x_T} = \frac{y}{y_T} = \frac{z}{z_T}.$$

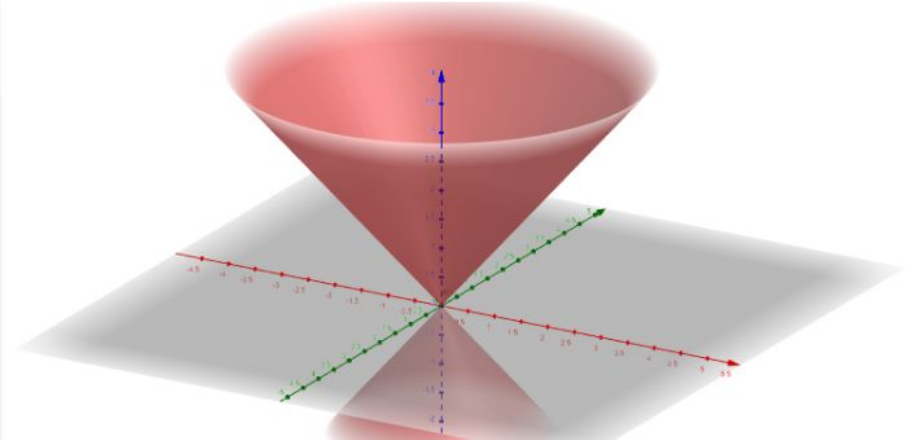
Sjedište pravca OT i ravnine $z = 2$ je točka $T'\left(2\frac{x_T}{z_T}, 2\frac{y_T}{z_T}, 2\right)$. Kao i u izvodu, točka T je na konusu ako i samo vrijedi $F\left(2\frac{x_T}{z_T}, 2\frac{y_T}{z_T}\right) = 0$. Raspisivanjem posljednje jednakosti dobivamo:

$$\left(2\frac{x_T}{z_T}\right)^2 + \left(2\frac{y_T}{z_T}\right)^2 - 3 = 0$$

otkuda sređivanjem dobivamo jednadžbu konusa:

$$4x_T^2 + 4y_T^2 - 3z_T^2 = 0.$$

Dobiveni konus je kružni stožac:



b) Tangenta i ravnina su paralelne ako i samo ako je vektor smjera tangente okomit na vektor normale ravnine. U točki $\vec{r}(t)$ krivulje pripadna tangenta ima vektor smjera

$$\vec{r}'(t) = \left(2t, \frac{3}{t}, 8\right).$$

Označimo li $f(x, y) = x^2 - 2y^2$, tada je vektor normale na tangencijalnu ravninu plohe $z = x^2 - 2y^2$ u točki $(1, 1, -1)$ dan kao

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1), -1\right) \\ &= (2, -4, -1). \end{aligned}$$

Sada provjeravamo za koje parametre t vrijedi $\vec{r}'(t) \perp \vec{n}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) \perp \vec{n} &\iff \left(2t, \frac{3}{t}, 8\right) \perp (2, -4, -1) \\ &\iff \left(2t, \frac{3}{t}, 8\right) \cdot (2, -4, -1) = 0 \\ &\iff 4t - \frac{12}{t} - 8 = 0 \\ &\iff t^2 - 2t - 3 = 0 \\ &\iff t = 3 \text{ ili } t = -1. \end{aligned}$$

Budući da krivulja $\vec{r}(t)$ nije definirana u $t = -1$ zaključujemo da je

$$\vec{r}(3) = (9, 3\ln 3, 24)$$

jedina tražena točka krivulje $\vec{r}(t)$. $\square$

MI23

2. **(8 bodova)**

(a) **(4b)** Zadana je funkcija $f(x,y) = \sqrt[3]{x^5 y} + x \operatorname{arctg} y$.

(a1) Izračunajte $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ u $T(1,1)$.

(a2) Koristeći prvi diferencijal (linearnu aproksimaciju) izračunajte približnu vrijednost izraza

$$\sqrt[3]{0.98^5 \cdot 1.1} + 0.98 \operatorname{arctg}(1.1).$$

(b) **(4b)** Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$, gdje je D_f otvoreni podskup od $\mathbb{R}^2$. Dokažite tvrdnju: Ako je f diferencijabilna u $(x_0, y_0) \in D_f$, tada je f neprekinuta u (x_0, y_0). Vrijedi li obrat tvrdnje? Obrazložite.

Zadatak 2.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** $\boxed{\text{a.1}}$ Račun:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2y} + \arctan y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^5}{y^2}} + x\frac{1}{1+y^2}.$$

Sada je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{4},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{5}{6}.$$

$\boxed{\text{a.2}}$ Želimo odrediti vrijednost $f(x,y)$ u točki $(x,y) = (0.98, 1.1)$. Znamo da $f(x,y)$ u $(x_0,y_0) = (1,1)$ ima vrijednost $1 + \frac{\pi}{4}$. Sada je

$$f(0.98, 1.1) \approx f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot (\Delta x, \Delta y),$$

gdje je $(\Delta x, \Delta y) = (x,y) - (x_0,y_0) = (-0.02, 0.1)$. Budući da je $\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right)$ slijedi da je

$$f(0.98, 1.1) \approx 1 + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{5}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{-1}{50} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{10} \approx \frac{21}{20} + \frac{49}{200}\pi \approx 1.81969020\ldots.$$

b) Iz skripte TEOREM 2.3.1. Obrat ne vrijedi, na primjer funkcija $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (pogledati primjer nakon dokaza istog TEOREMA). $\square$

MI23

3. **(9 bodova)**

(a) **(3b)** Definirajte usmjerenu derivaciju funkcije dviju varijabli $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(T_0)$ te pokažite da vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(T_0) = \nabla f(T_0) \cdot \vec{s}_0, \quad \text{gdje je } \vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}.$$

(b) **(6b)** Funkcija $z = f(x, y)$ implicitno je zadana jednadžbom

$$e^{xz} + xy = z.$$

(b1) Pokažite da je gornjom jednadžbom implicitno zadana jedinstvena funkcija $z = f(x, y)$ u okolini točke $(0, 1)$ takva da je $f(0, 1) = 1$.

(b2) Izračunajte $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 1)$, gdje smjer $\vec{s}$ leži na pravcu $y = \sqrt{3}\,x$.

Zadatak 3.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** Pogledati DEFINICIJU 2.8.1 i PROPOZICIJU 4 (str. 66, poglavlje 2) u skripti.

b) $\boxed{\text{b.1}}$ Neka je

$$F(x, y, z) = e^{xz} + xy - z$$

i

$$f(x, y) = e^{xz} + xy.$$

Zanima nas ponašanje funkcije F u točki $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$ (jer želimo da je $z_0 = f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1$). Imamo $F_z(x, y, z) = xe^{xz} - 1$ pa je $F_z(0, 1, 1) = -1 \neq 0$. Sada prema Teoremu o implicitno zadanoj funkciji dviju varijabli (TEOREM 2.7.2) znamo da postoji jedinstvena funkcija $z = f(x, y)$ u okolini točke $(0, 1)$ takva da je $f(0, 1) = 1$.

$\boxed{\text{b.2}}$ Vektor smjera danog pravca je $\vec{s} = \pm(1, \sqrt{3})$ pa je pripadni jedinični vektor $\vec{s}_0 = \pm\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Sada je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \vec{s}_0.$$

Kako bismo odredili gradijent, trebamo izračunati parcijalne derivacije:

$$F_x(x, y, z) = ze^{xz} + y \quad , \quad F_y(x, y, z) = x \quad , \quad F_z(x, y, z) = xe^{xz} - 1.$$

Stoga imamo:

$$\nabla f(1, 0) = \left(-\frac{F_x(0, 1, 1)}{F_z(0, 1, 1)}, -\frac{F_y(0, 1, 1)}{F_z(0, 1, 1)}\right) = (2, 0).$$

Konačno:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, 0) = (2, 0) \cdot \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm 1.$$

□

LJIR23

1. (**10 bodova**)

   (a) (**3b**) Definirajte limes $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$. Obrazložite postoji li limes $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{3x^2+5y^6}$.

   (b) (**2b**) Pomoću definicije parcijalne derivacije, izvedite $\frac{\partial z}{\partial x}$ ako je $z(x,y) = x^2 y$.

   (c) (**5b**) Pronađite sve točke na plohi $z = x^2 y$ u kojima je tangencijalna ravnina okomita na pravac

$$p \ldots \begin{cases} x = 2 - 6t, \\ y = 1 + 8t, \\ z = 5 - 2t. \end{cases}$$

   Odredite tangencijalne ravnine u tim točkama.

Zadatak 1.

RJEŠENJE **a)** Definicija: za $L \in \mathbb{R}$ kažemo da je limes funkcije f u točki (x_0, y_0) ako $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in D_f)(0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta)(|f(x,y) - L| < \varepsilon)$.

Limes ne postoji jer na pravcu $y = 0$ limes funkcije je

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 0}{3x^2 + 0} = 0,$$

dok je na krivulji $x = y^3$ limes

$$\lim_{y \to 0} \frac{y^6}{3y^6 + 5y^6} = \frac{1}{8}.$$

b) Neka je $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljan. Po definiciji parcijalne derivacije,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 y - x^2 y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2xy + \Delta xy)}{\Delta x} = 2xy.$$

c) Ploha S je graf funkcije $z(x,y) = x^2 y$. Vektor normale na tu plohu u točci $T = (x, y, z(x,y))$ je dan s

$$\boldsymbol{n}_S(T) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}(x,y), -1\right) = (2xy,\ x^2,\ -1).$$

Vektor normale određuje tangencijalnu ravninu, i pravac p je okomit na tu ravninu ako i samo ako je vektor smjera $\boldsymbol{c}_p$ pravca p paralelan s $\boldsymbol{n}_S(T)$, što vrijedi ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\boldsymbol{n}_S(T) = \lambda \boldsymbol{c}_p \iff (2xy,\ x^2,\ -1) = \lambda(-6, 8, -2) \iff \lambda = \frac{1}{2},\ x = \pm 2,\ y = \mp \frac{3}{4}.$$

Dakle, tražene točke su

$$T_1 = \left(2, -\frac{3}{4}, -3\right) \quad \text{i} \quad T_2 = \left(-2, \frac{3}{4}, 3\right),$$

s pripadajućim normalnim vektorima

$$\boldsymbol{n}_S(T_1) = (-3, 4, -1) = \boldsymbol{n}_S(T_2 = (-3, 4, -1).$$

Slijedi da su jednadžbe pripadajućih tangencijalnih ravnina

$$\pi_1 \ldots -3(x-2) + 4(y + 3/4) - (z+1) = 0 \Rightarrow -3x + 4y - z + 8 = 0,$$
$$\pi_2 \ldots -3(x+2) + 4(y - 3/4) - (z+1) = 0 \Rightarrow -3x + 4y - z - 10 = 0.$$

$\square$

JIR22

1. (**8 bodova**)

   (a) (**4b**) Na spojnici točaka $A(1,0,1)$ i $B(0,2,1)$ nađite točku T koja zadovoljava Lagrangeov teorem srednje vrijednosti diferencijalnog računa za funkciju

   $$f(x,y,z) = \frac{1}{1+xy^2z}.$$

   (b) (**2b**) Dokažite ili protuprimjerom opovrgnite tvrdnju:

   Ako je $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tada je f konstantna funkcija.

   (c) (**2b**) Nađite sve funkcije $f(x,y)$ za koje vrijedi $\nabla f(x,y) = \vec{i} + 2y\vec{j}$. Obrazložite svoj odgovor.

1. (a) Spojnica točaka A i B definirana je s $\overrightarrow{r}(t) = (1,0,1) + t(-1,2,0)$. Također, vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y^2 z}{(1+xy^2z)^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xyz}{(1+xy^2z)^2}.$$

Koristeći Lagrangeov teorem srednje vrijednosti slijedi

$$f(B) - f(A) = \nabla f(\overrightarrow{r}(t_0)) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$1 - 1 = 0 = \frac{-y^2 z \cdot (-1)}{(1+xy^2z)^2} + \frac{-2xyz \cdot 2}{(1+xy^2z)^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 0$$

$$y^2 - 4xy = 0$$

$$y(y - 4x) = 0$$

Uz $(x,y,z) = (1-t, 2t, 1)$ dobivamo $2t(2t - 4 + 4t) = 0$, tj. $t = 0, \frac{2}{3}$. Stoga su rješenja $T_1(1,0,1)$ i $T_2(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1)$.

(b) Tvrdnja vrijedi: Za $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, po Teoremu srednje vrijednosti slijedi

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0,$$

pa je f konstantna funkcija.

(c) Za $g(x,y) = x + y^2$ vrijedi $\nabla g(x,y) = \vec{i} + 2y\vec{j}$. Po Korolaru 2.9.4 (ii) slijedi $f(x,y) = x + y^2 + C$.

JIR22

2. (**7 bodova**) Ploha u $\mathbb{R}^3$ dana je jednadžbom:

$$x\sin(z) - z\sin(y) = 0.$$

   (a) **(2b)** Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu u točki $(1, 0, \pi)$.

   (b) **(2b)** Pokažite da je jednadžbom plohe implicitno zadana jedinstvena funkcija $z = z(x, y)$ u okolini točke $(1, 0)$ takva da je $z(1, 0) = \pi$.

   (c) **(3b)** Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 0)$ za implicitno zadanu funkciju $z = z(x, y)$.

2. (a) Stavimo $F(x,y,z) = x\sin z - z\sin y$. Sada je $F_x = \sin z, F_y = -z\cos y, F_z = x\cos z - \sin y$. U točki $T(1,0,\pi)$ tangencijalna ravnina glasi

$$\pi \ldots \quad F_x \cdot (x-1) + F_y \cdot (y-0) + F_z \cdot (z-\pi) = 0$$

$$0(x-1) - \pi(y-0) + (-1)(z-\pi) = 0$$

$$-\pi y - z + \pi = 0.$$

(b) Primijetimo da $z(1,0) = \pi$ zadovoljava jednadžbu dane plohe: $0 - 0 = 0$. Također vrijedi $F_z(1,0,\pi) = -1 \neq 0$. Po Teoremu o implicitno zadanoj funkciji slijedi tvrdnja zadatka.

(c)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z\cos y}{x\cos z - \sin y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = \frac{\pi}{-1} = -\pi$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos y + z(-\sin y))(x\cos z - \sin y) - z\cos y(-x\sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \cos y)}{(x\cos z - \sin y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,0) = \frac{(-\pi \cdot \cos 0 + \pi(-\sin 0))(1\cos\pi - \sin 0) - \pi\cos 0(-1\sin\pi \cdot (-\pi) - \cos 0)}{(1\cos\pi - \sin 0)^2} =$$

$$= \frac{(-\pi)(-1) - \pi \cdot 1(0-1)}{(-1)^2} = 2\pi$$

LJIR22

1. (**8 bodova**)

   (a) (**3b**) Odredite jednadžbu tangente na krivulju $\mathcal{C}$ u točki $T(-2, 0, 4)$ gdje je krivulja $\mathcal{C}$ zadana kao presjek ploha

$$\mathcal{C} \ldots \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y + z = 4. \end{cases}$$

   (b) (**5b**) Nađite tangencijalne ravnine na plohu $3y^2 + z^2 = y - z$ koje su paralelne s tangentom iz (a).

1. (a) Krivulja je parametrizirana sa

$$r(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4 - 2\sin t),$$

a tražena točka T postiže se za $t = \pi$. Vektor smjera tangente dobijemo derivacijom vektorske krivulje:

$$\vec{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, -2\cos t)$$
$$\vec{r}'(\pi) = (0, -2, 2)$$

Stoga je jednadžba tangente t... $\frac{x+2}{0} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{2}$.

(b) Normala tangencijalne ravnine na danu plohu u točki T_0 je

$$\vec{n}_t = (0, 6y_0 - 1, 2z_0 + 1)$$

Ako je ravnina paralelna sa nekim pravcem, njena normala je okomita na vektor smjera tog pravca, odnosno iz $(0, 6y_0 - 1, 2z_0 + 1) \perp (0, -1, 1)$ slijedi da je njihov skalarni produkt jednak nuli:

$$-6y_0 + 1 + 2z_0 + 1 = 0 \Rightarrow z_0 = 3y_0 - 1$$

Uvrstimo u jednadžbu plohe

$$3y_0^2 + (3y_0 - 1)^2 = y_0 - 3y_0 + 1$$
$$12y_0^2 - 4y_0 = 0$$
$$y_{0_1} = 0, \quad z_{0_1} = -1$$
$$y_{0_2} = \frac{1}{3}, \quad z_{0_2} = 0$$

Tražene ravnine su

$$\pi_1 \ldots -1(y - 0) - 1(z + 1) = 0 \Rightarrow y + z + 1 = 0$$
$$\pi_2 \ldots 1(y - \frac{1}{3}) - 1(z - 0) = 0 \Rightarrow y + z - \frac{1}{3} = 0$$

LJIR22

2. (**6 bodova**)

(a) (**2b**) Koristeći definiciju, izvedite $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ za funkciju $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

(b) (**2b**) Koristeći lančano deriviranje, izračunajte $\dfrac{df}{dt}$, gdje je $f(x,y)$ funkcija iz (a), a zamjena varijabli zadana je s $x = \sin t$, $y = t^3$.

(c) (**2b**) Neka je $g(x,y) = x^2 + y^2 + \varphi(xy)$, gdje je $\varphi = \varphi(t)$ diferencijabilna funkcija. Dokažite da $g(x,y)$ zadovoljava jednakost:

$$x\frac{\partial g}{\partial x} - y\frac{\partial g}{\partial y} = 2x^2 - 2y^2.$$

2. (a)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{x}{y+\Delta y} - \frac{x}{y}}{\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{xy - x(y+\Delta y)}{y(y+\Delta y)}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{-x\Delta y}{y^2 + y\Delta y}}{\Delta y} = \frac{-x}{y^2}$$

(b)

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}\cos t - \frac{x}{y^2}3t^2 = \frac{\cos t}{t^3} - \frac{3\sin t}{t^4}$$

(c)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + \varphi'(xy)y$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y + \varphi'(xy)x$$

$$x\frac{\partial g}{\partial x} - y\frac{\partial g}{\partial y} = 2x^2 - \varphi'(xy)xy - (2y^2 - \varphi'(xy)xy) = 2x^2 - 2y^2$$

LJIR21

1. (**8 bodova**) Zadana je funkcija $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

   (a) (**2b**) Izvedite po definiciji $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

   (b) (**2b**) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije $z = f(x, y)$ u točki $(1, 1, z)$.

   (c) (**4b**) Dokažite da sve točke grafa funkcije $z = f(x, y)$ u kojima tangencijalna ravnina prolazi točkom $(0, 0, 4)$ leže u istoj ravnini i odredite jednadžbu te ravnine.

1. (a) Po definiciji

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y+h}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{y+h}-\frac{1}{y}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{y(y+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{y(y+h)} = -\frac{1}{y^2}$$

(b) Za točku $(1,1,z)$ vrijedi $z = f(1,1) = 2$, odnosno točku $(1,1,2)$ uvrštavamo u formulu za tangencijalnu ravninu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-1) = z-2$$

Uvrštavanjem parcijalnih derivacija $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ imamo

$$\begin{aligned} -1\cdot(x-1) - 1\cdot(y-1) &= z-2 \\ x+y+z &= 4 \end{aligned}$$

(c) Formula za tangencijalnu ravninu u (x_0, y_0, z_0) je

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) &= z - z_0 \\ -\frac{1}{x_0^2}(x-x_0) - \frac{1}{y_0^2}(y-y_0) &= z-z_0 \end{aligned}$$

Iz uvjeta da ravnina prolazi kroz $(0,0,4)$ slijedi:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x_0^2}(0-x_0) - \frac{1}{y_0^2}(0-y_0) &= 4-z_0 \\ \frac{1}{x_0}+\frac{1}{y_0} &= 4-z_0 \\ z_0 &= 4-z_0 \\ 2z_0 &= 4 \\ z_0 &= 2 \end{aligned}$$

Stoga sve tražene točke leže u ravnini $z=2$.

LJIR21

2. (**6 bodova**)

   (a) (**3b**) Neka je $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija definirana na otvorenom i konveksnom skupu $U \subset \mathbb{R}^2$. Iskažite i dokažite teorem srednje vrijednosti za funkciju f.

   (b) (**3b**) Za funkciju $f(x,y) = x^2 - 2xy$ odredite točku S na spojnici točaka $T_1(-2,0)$ i $T_2(0,3)$ za koju je zadovoljen teorem iz (a).

2. (a) Teorem 2.9.1. u skripti.

(b) Pravac T_1T_2 je dan jednadžbom $y = \frac{3}{2}x + 3$. Po teoremu 2.9.1 vrijedi da postoji točka $S = (x_0, y_0)$ na spojnici T_1T_2 takva da

$$f(T_2) - f(T_1) = \nabla f(S)(T_2 - T_1)$$

$$\begin{aligned} f(T_1) &= 4 \\ f(T_2) &= 0 \\ \nabla f &= (2x - 2y, -2x) \end{aligned}$$

Uvrstimo u TMSV:

$$\begin{aligned} 0 - 4 &= (2x - 2y, -2x) \cdot ((0,3) - (-2,0)) \\ -4 &= (2x - 2y, -2x) \cdot (2,3) \\ -4 &= 4x - 4y - 6x \\ -4 &= -2x - 4y \quad (*) \end{aligned}$$

Kako točka mora ležati na pravcu, imamo dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ y &= \frac{3}{2}x + 3 \end{aligned}$$

iz kojih dobivamo $x = -1, y = \frac{3}{2}$, odnosno tražena točka je $S(-1, \frac{3}{2})$

2. način: parametriziramo spojnicu T_1T_2 (kao u dokazu teorema):

$$(x, y) = (-2, 0) + t(2, 3), \; t \in [0, 1]$$

Odnosno imamo $x = -2 + 2t, \; y = 3t$ što uvrstimo u (*) i dobijemo:

$$-4 = -2(-2 + 2t) - 4 \cdot 3t \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{2}$$

Odnosno tražena točka je $S(-1, \frac{3}{2})$

JIR21

1. (**9 bodova**)

   (a) (**3b**) Dodefinirajte funkciju $f(x, y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, tako da bude neprekinuta u točki $(0, 0)$.

   (b) (**2b**) Za dodefiniranu funkciju iz (a), izračunajte po definiciji $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

   (c) (**4b**) Ispitajte je li dodefinirana funkcija iz (a) diferencijabilna u točki $(0, 0)$.

Zad 1.

a) Izračunajmo limes u (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ (x,y)\to(0,0) \Rightarrow r\to 0 \end{array} \right| = \lim_{r\to 0} \frac{2r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi}{\sqrt{r^2}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \sin 2\varphi}{r} = \lim_{r\to 0} r \underbrace{\sin 2\varphi}_{\text{ograničeno},\ |\sin 2\varphi| \le 1} = 0$$

Sada
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i f je neprekinuta jer je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{2\Delta x \cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2 + 0^2}} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$$

na isti način $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

c) Funkcija f je diferencijabilna u točki $(0,0)$ ako postoji linearni operator $A = \nabla f(0,0)$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot\binom{\Delta x}{\Delta y}}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\frac{2\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} - 0 - \binom{0}{0}\cdot\binom{\Delta x}{\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{2\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2} = \left|\begin{matrix}\Delta x = r\cos\varphi \\ \Delta y = r\sin\varphi\end{matrix}\right| = \lim_{r\to 0} \frac{2r\cos\varphi\, r\sin\varphi}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin 2\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} \sin 2\varphi$$, a ovaj limes

ovisi o φ $\Rightarrow$ LIMES NE POSTOJI

$\Rightarrow$ dodefinirani f nije diferencijabilna funkcija

JIR21

2. (**7 bodova**) Neka je $u(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z$.

   (a) **(3b)** Odredite, skicirajte i imenujte nivo plohu funkcije u koja prolazi točkom $T(0, 1, 2)$.

   (b) **(2b)** Odredite smjer najbržeg rasta funkcije u u točki $T(0, 1, 2)$. Koliko iznosi taj rast?

   (c) **(2b)** Ucrtajte smjer iz (b) na skici iz (a) u točki T. U kojem su odnosu taj smjer i tangencijalna ravnina na nivo plohu u točki T? Odredite jednadžbu te tangencijalne ravnine.

Zad 2

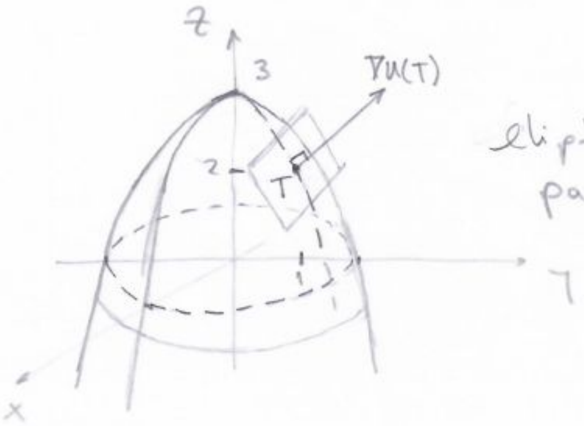
a) $U(T) = U(0,1,2) = 2\cdot 0^2 + 1^2 + 2 = 3$ i trebamo nacrtati

$2x^2 + y^2 + z = 3$

crtamo $z = 3 - 2x^2 - y^2$

- u ravnini $y=0$ imamo $z = 3 - 2x^2$
- u ravnini $x=0$ imamo $z = 3 - y^2$
- u ravnini $z=0$ imamo $2x^2 + y^2 = 3 \quad /:3$

$$\frac{x^2}{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{3} = 1$$



eliptički paraboloid

b) $\nabla u = (4x, 2y, 1)^T \Rightarrow \nabla u(T) = \begin{bmatrix} 4\cdot 0 \\ 2\cdot 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Smjer najbržeg rasta funkcije u ~~iz~~ točke $T=(0,1,2)$ jednak je upravo smjeru $\nabla u(T)$, a iznosi $\|\nabla u(T)\| = \sqrt{0^2+2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

c) $\nabla u(T)$ okomit je na nivo plohu, tj. $\nabla u(T)$ je normala tangencijalne ravnine na nivo plohu $u(x,y,z)=3$ u točki $T(0,1,2)$.

Tang. ravnina: $0\cdot(x-0) + 2(y-1) + 1(z-2) = 0$

$$\boxed{2y + z = 4}$$

LJIR20

1. (**9 bodova**)

   (a) (**4b**) Neka je $f(x,y) = \sin(2x+3y)$. Izračunajte usmjerenu derivaciju funkcije f iz točke $T(-6,4)$ u smjeru vektora $\vec{h} = \sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j}$. Zatim odredite jedinični vektor u smjeru kojeg funkcija f najbrže pada iz točke T te odredite pripadnu minimalnu vrijednost usmjerene derivacije funkcije f iz točke T.

   (b) (**3b**) Neka je $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija definirana na otvorenom i konveksnom skupu $U \subset \mathbb{R}^2$. Iskažite i dokažite teorem srednje vrijednosti za funkciju f.

   (c) (**2b**) Ako za funkciju f iz (b) dijela dodatno vrijedi da je $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ za sve $(x,y) \in U$, dokažite da je tada f konstantna funkcija na U.

1. (a) $f(x,y) = \sin(2x+3y)$

$$\vec{h} = \sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \vec{h}_0 = \frac{1}{\|\vec{h}\|}\vec{h} = \frac{1}{\sqrt{3+1}}(\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(2x+3y)\cdot 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-6,4) = 2\cos(-12+12) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(2x+3y)\cdot 3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(-6,4) = 3\cos(-12+12) = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(-6,4) = \nabla f(-6,4)\cdot \vec{h}_0 = (2\vec{i}+3\vec{j})\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$$

Funkcija f najbrže pada iz točke $(-6,4)$ u smjeru jediničnog vektora

$$-\frac{1}{\|\nabla f(-6,4)\|}\nabla f(-6,4) = -\frac{1}{\sqrt{4+9}}(2\vec{i}+3\vec{j}) = -\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

te je minimalna vrijednost usmjerene derivacije jednaka $-\|\nabla f(-6,4)\| = -\sqrt{13}$.

(b) Teorem.

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i konveksan skup te $f: U \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Tada za svake dvije točke $\vec{a}, \vec{b} \in U$ postoji točka $\vec{c}$ na njihovoj spojnici takva da

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a}).$$

Dokaz.

Definiramo funkciju

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f(\vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a})).$$

Funkcija g je diferencijabilna i vrijedi $g(0) = f(\vec{a})$, $g(1) = f(\vec{b})$.

Prema lančanom pravilu

$$g'(t) = \nabla f(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})) \cdot \frac{d}{dt}(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}))$$

$$= \nabla f(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})) \cdot (\vec{b} - \vec{a}).$$

Primjenom Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti na funkciju jedne varijable g slijedi da postoji $s \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da

$$g(1) - g(0) = g'(s)(1-0),$$

odnosno,

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a})) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

pa tvrdnja teorema slijedi stavljanjem $\vec{c} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a})$.

Q.E.D.

(c) Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in U$ proizvoljni. Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti slijedi da postoji $\vec{c} \in U$ na spojnici tih točaka takav da

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \underbrace{\nabla f(\vec{c})}_{= \vec{0}} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\Rightarrow f(\vec{b}) = f(\vec{a}),$$

odakle zbog proizvoljnosti $\vec{a}$ i $\vec{b}$ slijedi da je f konstantna na U.

JIR201

2. **(7 bodova)**

(a) **(2b)** Neka je f realna funkcija dvije varijable $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$. Definirajte limes $L \in \mathbb{R}$ funkcije f u točki $\vec{x} = \vec{a}$, $\vec{a} \in \mathcal{D}_f$.

(b) **(2b)** Iskazana je sljedeća tvrdnja:

T: Funkcija $f(x, y)$ ima limes u ishodištu ako vrijedi:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y=x^2} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x=y^2} f(x,y)\right] = L.$$

Da li je iskazana tvrdnja točna ili netočna? Obrazložite svoj odgovor!

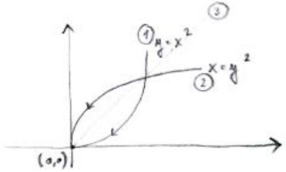
(c) **(3b)** Ispitajte neprekinutost funkcije u ishodištu:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

② (a)

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = L \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\Big[(0<|\vec{x}-\vec{a}|<\delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(\vec{x})-L|<\varepsilon\Big]$$

② (b) Navedena tvrdnja općenito NIJE TOČNA, jer nemamo informacija što se dešava po ostalih beskonačno mnogo približavanja ishodištu. (npr. $y=x$)



② (c) $$z(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^2}{\sqrt{r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi}} \quad \dots \; r\neq 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}} \quad \dots \; r\neq 0$$

$\Rightarrow$ Limes ovisi o kutu φ, pa zaključujemo da NE POSTOJI, odnosno funkcija z ima prekid u (0,

JIR202

1. **(7 bodova)** Presjekom ploha $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $x + z = 5$ dobivena je krivulja C.

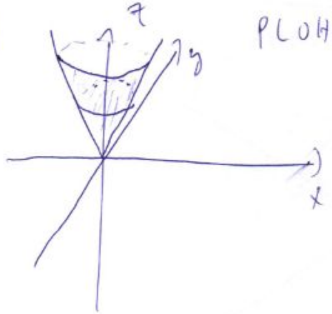
   (a) **(1b)** Skicirajte i imenujte plohu $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (b) **(2b)** Odredite neku parametrizaciju krivulje C.

   (c) **(4b)** Odredite sve točke $T(x_T, y_T, z_T)$ krivulje C za koje vrijedi da tangenta na krivulju u točki T ujedno siječe x-os u nekoj točki A.

1.

a)



PLOHA JE STOŽAC

b)

$$C \ldots \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x + z = 5 \end{cases} \qquad \boxed{z = 5 - x}$$

$$5 - x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$25 - 10x + x^2 = x^2 + y^2$$

$$x = \frac{25 - y^2}{10}$$

$$z = 5 - \frac{25 - y^2}{10} = \frac{25 + y^2}{10}$$

$y = t$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{25 - t^2}{10}, t, \frac{25 + t^2}{10} \right)$$

1.c) $\vec{r}\,'(t) = \left(-\frac{t}{5}, 1, \frac{t}{5}\right)$

$T(x_T, y_T, z_T)$ ... $x_T = \frac{25 - t_0^2}{10}$

$y_T = t_0$

$z_T = \frac{25 + t_0^2}{10}$

TANGENTA U TOČKI T...

$$\frac{x - \frac{25 - t_0^2}{10}}{-\frac{t_0}{5}} = \frac{y - t_0}{1} = \frac{z - \frac{25 + t_0^2}{10}}{\frac{t_0}{5}}$$

SIJEČE x-OS => $y = 0$, $z = 0$

$$\frac{x - \frac{25 - t_0^2}{10}}{-\frac{t_0}{5}} = \boxed{-t_0 = \frac{-\frac{25 + t_0^2}{10}}{\frac{t_0}{5}}} \ldots$$

$$-\frac{t_0^2}{5} = -\frac{25 + t_0^2}{10}$$

$$2t_0^2 = 25 + t_0^2$$

$$t_0 = \pm 5$$

$\vec{r}(5) = (0, 5, 5)$

$\vec{r}(-5) = (0, -5, 5)$

JIR202

2. **(7 bodova)** Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija i točka $P \in \mathbb{R}^2$ takva da je $\nabla f(P) \neq \vec{0}$. Za navedene tvrdnje napišite jesu li istinite ili lažne. Istinite tvrdnje dokažite, a lažne opovrgnite protuprimjerom.

T1: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}(P) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(P)$.

T2: Ako je $\vec{v} \in V^2 \setminus \{\vec{0}\}$ vektor smjera tangente na nivo krivulju od f u točki P, onda je $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = 0$.

T3: Ako su $\vec{h}_1, \vec{h}_2 \in V^2 \setminus \{\vec{0}\}$ kolinearni vektori, onda je $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{h}_1}(P) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{h}_2}(P)$.

2. T_1: TOČNO

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(P) = \nabla f(P)\cdot \vec{i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\vec{j}\right)\cdot i$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(P)$$

T_2: TOČNO

$\nabla f(P)$ JE OKOMIT NA NIVO KRIVULJE OD

f KROZ TOČKU P

$\Rightarrow$ OKOMIT JE NA TANGENTU NA

TE KRIVULJE U TOČKI P

$$\Rightarrow\ 0 = \nabla f(P)\cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P)$$

T_3: NETOČNO

NA PRIMJER $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$

$P = (0,0)$ $\quad \vec{h}_1 = \vec{i}$, $\vec{h}_2 = -\vec{i}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}_1}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot \vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{i} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}_2}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot(-\vec{i}) = \vec{i}\cdot(-\vec{i}) = -1$$

JIR19

1. (**7 bodova**)

(a) (**2b**) Napišite definiciju parcijalnih derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ za $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) (**2b**) Koristeći (a), pokažite da za funkciju $f(x, y) = x^2y^3$ vrijedi $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3$.

(c) (**3b**) Pomoću prvog diferencijala približno izračunajte izraz $(0.99)^2(1.01)^3$.

1. (a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

(b) $f(x,y)=x^2y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2\cdot 1^3-1^2\cdot 1^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2)=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1,1+h)-f(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1^2\cdot(1+h)^3-1^2\cdot 1^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2+3h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+3)=3$$

(c) $$f(x+h,y+k)\approx f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$(0.99)^2(1.01)^3=f(0.99,1.01)=f(1-0.01,1+0.01)$$

$$\approx f(1,1)-0.01\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)+0.01\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$$

$$=1-0.01\cdot 2+0.01\cdot 3=1+0.01=1.01$$

JIR19

2. (**6 bodova**)

(a) **(3b)** Zadana je krivulja

$$\mathcal{C} \dots \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} \\ y(t) = t \\ z(t) = t^3 \end{cases}, \quad t \in [1,3].$$

Odredite točku $T_0(x_0, y_0, z_0)$ te krivulje u kojoj je tangenta na krivulju paralelna s ravninom $2x + \frac{1}{2}y = 0$.

(b) **(3b)** Koristeći derivaciju složene funkcije, odredite $\dfrac{dw}{dt}$ u točki $t = \sqrt{\pi}$ ako je $w(x, y, z) = 5\cos(xy) - \sin(xz)$, a zamjena varijabli je definirana vektorskom funkcijom $(x(t), y(t), z(t))$ iz (a) dijela.

2. (a) Vektor smjera tangente na krivulju u točki $T_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$:

$$\vec{s} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = \left(-\frac{1}{t_0^2}, 1, 3t_0^2\right).$$

Prema uvjetu zadatka ovaj vektor mora biti okomit na vektor normale zadane ravnine, $\vec{n} = 2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$:

$$\vec{n} \parallel \vec{s} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{t_0^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow t_0^2 = 4$$

$$\Rightarrow t_0 = 2 \qquad (t_0 \in [1,3])$$

Dakle, tražena točka je $T_0\left(\frac{1}{2}, 2, 8\right)$.

(b)
$$\frac{dw}{dt}(\sqrt{\pi}) = \frac{\partial w}{\partial x}(x(\sqrt{\pi}), y(\sqrt{\pi}), z(\sqrt{\pi}))\frac{dx}{dt}(\sqrt{\pi})$$
$$+ \frac{\partial w}{\partial y}(x(\sqrt{\pi}), y(\sqrt{\pi}), z(\sqrt{\pi}))\frac{dy}{dt}(\sqrt{\pi})$$
$$+ \frac{\partial w}{\partial z}(x(\sqrt{\pi}), y(\sqrt{\pi}), z(\sqrt{\pi}))\frac{dz}{dt}(\sqrt{\pi})$$
$$= \left(-5\sin\left(x(\sqrt{\pi})y(\sqrt{\pi})\right)y(\sqrt{\pi}) - \cos\left(x(\sqrt{\pi})z(\sqrt{\pi})\right)z(\sqrt{\pi})\right)\cdot\left(-\frac{1}{(\sqrt{\pi})^2}\right)$$
$$+ \left(-5\sin\left(x(\sqrt{\pi})y(\sqrt{\pi})\right)\cdot x(\sqrt{\pi}) - 0\right)\cdot 1$$
$$+ \left(0 - \cos\left(x(\sqrt{\pi})z(\sqrt{\pi})\right)x(\sqrt{\pi})\right)\cdot 3(\sqrt{\pi})^2$$
$$= \left(-5\sin 1\cdot\sqrt{\pi} - \cos(\pi)\cdot(\sqrt{\pi})^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)$$
$$-5\sin 1\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \cos(\pi)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 3\pi$$
$$= \cancel{\frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 1} - \sqrt{\pi} - \cancel{\frac{5}{\sqrt{\pi}}\sin 1} + 3\sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$$

LJIR19

1. (**7 bodova**)

(a) (**2b**) Skicirajte graf funkcije $g(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ -1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ te ispitajte neprekinutost ove funkcije u točki $(0,0)$. *Obrazložite sve svoje tvrdnje!*

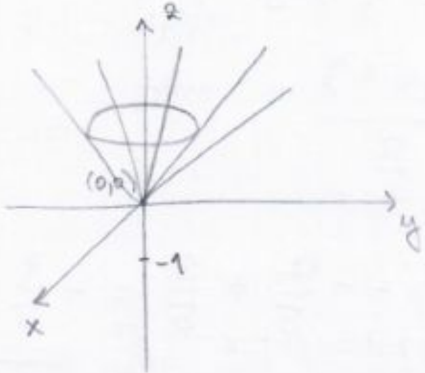
(b) (**2b**) Neka je $f : D(f) \to \mathbb{R}$, gdje je $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Definirajte diferencijabilnost funkcije f u točki $(x_0, y_0) \in D(f)$.

(c) (**3b**) Koristeći definiciju iz (b) pokažite da je funkcija $f(x,y) = 2x + 3y$ diferencijabilna u točki $(2,1)$.

RJEŠENJA

1.

(a) Skica grafa: pogledamo presjek grafa funkcije $z=\sqrt{2x^2+y^2}$ sa xz i yz ravninama.



Funkcija nije neprekinuta u $(0,0)$ jer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \neq -1$. To vidimo ako se u $(0,0)$ približimo po pravcu (x,x), dobivamo $\lim_{x\to 0}\sqrt{2x^2+x^2} = \lim_{x\to 0}\sqrt{3}\cdot|x| = 0$. $(\neq -1)$.

(b) Funkcija $f: \mathcal{D}(f)\to\mathbb{R}$ je diferencijabilna u $(x_0,y_0)\in\mathcal{D}(f)$ ako postoji vektor u $\mathbb{R}^2$ $\nabla f(x_0,y_0)$ za koji vrijedi:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-\nabla f(x_0,y_0)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

(c) $f(x,y) = 2x + 3y$

(T:) $f(x,y)$ je diferencijabilna u točki $(2,1)$.

DOKAZ: Znamo da je $\nabla f(x_0,y_0)$ dan sa $\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$ pa računamo:

$f(2,1) = 7$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(2+h_1, 1+h_2) - f(2,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\cdot h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\cdot h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{2(2+h_1) + 3(1+h_2) - 7 - 2h_1 - 3h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \underline{\underline{0}}$$

□