2. 2. Determinante:

Binet - Cauchyjev teorem

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

3.2. Rang i inverz

Cramerovo pravilo - računanje inverzne

$$(A^{-1})_{ij} = a'_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^T$$

4.1. Linearni sustavi

Gaussova metoda eliminacije

- sustav se elementarnim transform. svede na ekvivalentan
- dva sustava nazivamo ekvivalentima ako imaju isti skup rj.

· zamjena dvaju redaka

· množenje skalarom $(\lambda \neq 0)$

- dodavanje retka drugom retku pomnoženog skalarom $(\lambda \neq 0)$

4.3. Nehomogeni sustavi

Kronecker-Capelli sustav

$Ax = b$ ima rješenje $\overset{\text{onda i}}{\underset{\text{samo onda}}{\Longleftrightarrow}}$ $\text{rang}(A) = \text{rang}(\underbrace{A_p}_{[A \,\vdots\, b]})$

4.4. Cramerovo pravilo #2

$A \in M_n$, b po volji odabran vektor

$Ax = b$ ima jedno rj. $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

1. Matrice

$A = B$ ako $\begin{cases} n_A = n_B, \ m_A = m_B \\ a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i,j \end{cases}$

nul matrica

$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{bmatrix}$

dijagonalna mat

$\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ ...

jedinična mat I

$I = \begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\ \vdots&1&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$ samo po dijagonali 1

$I = \delta_{ij}$ (kroneckerov delta simbol)

$\delta_{ij} = \begin{cases}1 & i=1\\0 & i\neq j\end{cases}$

trokutaste mat

Gornja $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&0&8&9\\0&0&0&10\end{bmatrix}$ Donja $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&4&0&0\\&&6&0\\3&5&7&8\end{bmatrix}$

transponirana

$(A)_{ij} = (B)_{ji}$

$A = \begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix}1&5\\2&6\\3&7\\4&8\end{bmatrix}$

simetrične mat: $\longrightarrow$ asimetrične mat.

$\begin{bmatrix}3&-1&2\\-1&3&7\\2&7&3\end{bmatrix}$ simetrične s obzirom na dijagonalu istih el.

$(A^T) = A$

* ima samo $\emptyset$ na dijagonali

$a_{ij} = -a_{ji}$ $\boxed{(A)^T = -A}$

ostalim el. promijenimo predznak

ZBRAJANJE

- asocijativnost $A + (B + C) = (A + B) + C$
- komutativnost $A + B = B + A$
- postojanje neutralnog el. $A + 0 = A$
- postojanje suprotnog člana $A + (-A) = 0$

MNOŽENJE SKALAROM

- distributivnost $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- distributivnost $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- usklađenost množenja $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- ne trivijalnost množenja $1 \cdot A = A$

Algebra matrica

množimo ako: A tipa $m \times n$, B tipa $n \times p$ — mora biti isto

*ako je AB $\longrightarrow$ ne znači da je $BA = AB$

$AB = 0 \longrightarrow A = 0, B = 0$ ne vrijedi

SVOJSTVA MATRIČNOG MNOŽENJA

- asocijativnost $(AB)C = A(BC)$

$A \in M_{mn}$ $B \in M_{np}$ $C \in M_{pr}$

- distributivnost $(\underbrace{A+B}_{\text{istog tipa}})C = AC + BC$
- umnožak jed. mat. $I \cdot A = A$ kao množenje brojem 1

→ transponiranje produkta $(AB)^T = A^T \cdot B^T$

! $(A+B)^T = A^T + B^T$

2. DETERMINANTE

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

uzmemo element stupca/retka i osterimo samo one koje nisu u tom stupcu i retku

$$a_{11} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Minora}} \cdot$$

kada dobijemo „mat" sa 2x2 to je kraj

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{ij} = a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

* $\det(A) = \det(A^T)$

$\boxed{\det = 0}$

=> ako mat. ima redak/stupac sastavljen od samo $\emptyset$

=> ako mat. ima 2 retka/stupca jednaka $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$

trokutaste – $\det(A)$ = umnožak elemenata na gl. dijagonali

množenje det. skalarom: $\lambda \cdot \det A = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot \lambda) A_{ij} = \det \tilde{A}$

↳ cijeli jedan red/stupac mat. se množi skalarom

- rastave li se svi el. nekog retka na zbroj dvaju elemenata onda je det. jednaka zbroju dvaju odgovarajućih det.

$$\underset{\det A}{\begin{vmatrix} \vec{a}_1' + \vec{a}_1'' \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}} = \underset{\det A'}{\begin{vmatrix} \vec{a}_1' \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix}} + \underset{\det A''}{\begin{vmatrix} \vec{a}_1'' \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}}$$

$\det A = \det A' + \det A''$

3. Rang i inverz

$\boxed{T1}$ Jedinstvenost inverza: $A'A = A \cdot A' = I$

$\boxed{T2}$ Regularnost mat: $\det A \neq 0$

$\boxed{T3}$ Umnožak regularnih mat: $(AB)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

* inverz postoji ako je mat regularna

Računanje inverzne mat.

1. izračunaj $\det A \rightarrow \det A = 0$ nema inverz
   $\searrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ regularna
2. odrediti alg. kompl. svakog el. i zapisati u mat
3. Transponirati dobivenu mat

RANG = broj linearno nezavisnih redaka i ne-null redaka

Svođenje mat na reducirani oblik

$\boxed{1}$. izaberemo u prvom stupcu el $\neq 0$
 ↳ ako nije a_{11} onda ga dovesti zamjenom redaka

$\boxed{2}$ podijelimo el. prvog. retka s $a_{11} \longrightarrow$ stožerni el. $= 1$

$\boxed{3.}$ pomoću stožernog el. poništavamo sve ostale u stupcu

Linearna kombinacija vektora

- linearna komb. vekt. $a_1 \dots a_k$ je vektor
  oblika: $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$
  po volji odabrani skalari

Skup svih linearnih kombinacija = prostor razapet vektorima

$$L(a_1, \dots, a_k) = \{ x : x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n,\ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$\Rightarrow$ Linearna nezavisnost vektora

Ako iz jednakosti $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_1 + \lambda_k a_k = 0$
slijedi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

zavisnost: Ako postoje skalari $\lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ od kojih je bar jedan $\neq 0$

$\longrightarrow$ Primjer: $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

$\Longrightarrow a_3 = 2a_1 - a_2 \Longrightarrow a_3 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ znači zavisni su

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1$

4. Linearni sustavi

Gaussova metoda eliminacije

- bilokoji sustav jednadžbi se može zapisati u obliku matrične jednadžbe $Ax=b$

$$A = \begin{array}{c} n \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} m \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

matrica koeficijenata sustava — vektor nepoznanica — desna strana

$[A \,\vdots\, b]$ = proširena matrica

$\Rightarrow$ elementarnim transformacijama svodimo sustav na ekvivalentan

dva sustava su ekvivalentna ako imaju isti skup rj.

HOMOGENI SUSTAV $Ax=0$ $\longrightarrow$ uvijek ima rješenje

- desna strana uvijek jednaka 0

* ako je A regularna matrica, jedino rješenje je nul-mat.

ako nije regularna $\rightarrow$ singularna

$Ax=0$

$[A \,\vdots\, 0] \xrightarrow[\text{dobiti}]{\text{želimo}} [A_R \,\vdots\, 0]$ reducirani oblik

> $Ax=0$ ima jedinstveno rješenje $x=0$ ako i samo ako je A regularna mat

stupci sa stožernim el = VEZANI STUPCI — njihov rang = rang(A)

stupci bez stož. el. = SLOBODNI STUPCI — njihov rang = n − rang(A)

T1 Ako je u sustavu n nepoznanica rang mat sustava jednak r onda je dimenzija $(d) = n-r$

* ako je $n=r \longrightarrow d=0$; sustav ima jednoznačno rj.

Rješavanje homogenog sustava

1. $Ax=0$ zapišemo kao $[A \,\vdots\, 0]$
2. Gaussovom metodom $\longrightarrow [A_R \,\vdots\, 0]$
   - nepoznanice u stupcu sa stož. el. = vezane
3. Vrijednost slobodnih nepoznanica određujemo po volji
   $\rightarrow$ vezane izražavamo preko slobodnih
4. Rj. zapisujemo u vekt. obliku, kao lin. kom. $n-r$ vektora

NEHOMOGENI SUSTAVI $Ax=b$

- sustav uopće ne mora imati rješenja!

T2 Kronicker - Capelli

Sustav $Ax=b$ ima rješenje onda i samo onda kad je $\text{rang}(A) = \text{rang}(A \,\vdots\, b)$

T3 Opće rješenje sustava $Ax=b$ ima oblik $x = x_h + x_p$

$\rightsquigarrow x_h$ = opće rješenje pripadnog homogenog sustava $Ax=0$

$\rightsquigarrow x_p$ = jedno rješenje nehomogenog sustava

$\hookrightarrow$ partikularno

malo nema smisla ovo x_h i x_p, ali ajde kužim kao

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ A\vec{x_p} &= \vec{b} \quad /- \\ \hline A\vec{x} - A\vec{x_p} &= 0 \\ A(\vec{x} - \vec{x_p}) &= 0 \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} \vec{x} - \vec{x_p} &= \vec{x_h} \\ \vec{x} &= \vec{x_h} + \vec{x_p} \end{aligned}$$

Rješavanje nehomogenog sustava

1. $Ax=b$ napišemo u mat obliku $[A \,\vdots\, b]$
2. Mat. A reduciramo u A_R.
   $\hookrightarrow$ dobivamo ekvivalentni sustav $[A_R \,\vdots\, b']$
   ! * ako je $\text{rang}(A) < \text{rang}[A \,\vdots\, b]$ = nema rješenja
3. Odrediti vrijednost slobodnih varijabli po volji
   $\hookrightarrow$ odredimo vezane prema slobodnima
4. Rješenje sustava zapišemo u vektorskom obliku

T4. Cramerovo pravilo #2 (jer ono #1 je za inverz)

Neka je A kvadratna mat

$\longrightarrow$ sustav $Ax=b$ imat će točno jedno rješenje onda i samo onda kada je A regularna mat.

* kao za $Ax=0$

***TM 5** A je regularna mat.

Svaka komponenta x_i rješenja sustava $Ax=b$ može se zapisati u obliku razlomka:

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

D_i — determin. mat kojoj je i-ti stupac zamijenjen vektorom b

D — det A

Primjer)

$ax + by = e$

$cx + dy = f$

$ad - bc \neq 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right]$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc} \qquad y = \frac{af - ec}{ad - bc}$$