2.9. TEOREM SREDNJE VRIJEDNOSTI

4. tjedan

MATAN 1: $f(b) - f(a) = \underline{f'(c)}(b-a)$

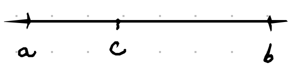
ovo će biti gradijent — ali to je vektor → to će biti skalarni produkt

TM Lagrange

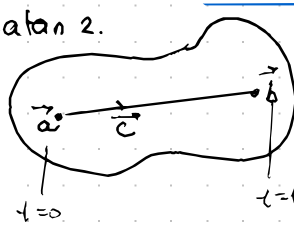
Neka je $f : U \to \mathbb{R}$ diferenc. funkcija na $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Je neka su $\vec{a}$ i $\vec{b} \in U$ t.d. je spojnica točaka $\vec{a}$ i $\vec{b}$ također u U. Tada na toj spojnici postoji c takav da $\underline{f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})}$

skalarni produkt

matan 1.



matan 2.



! ne dijeliti sa $(\vec{b} - \vec{a})$

DOKAZ:

vekt. smjera

1) Parametriziramo spojnicu od $\vec{a}$ i $\vec{b}$: $\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$, $t \in [0,1]$

2) Pogledajmo fiju $g(t)$ = parametrizaciju uvrstimo u f:

$g(t) = f(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}))$ ⇒ diferencijabilna, (jer je f, a je linearna)

* ↳ fija jedne varijable! → MOŽEMO KORISTITI LTSV za 1 var (matan 1)

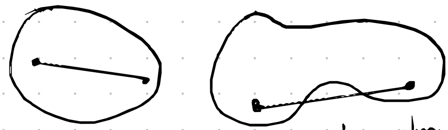
⇒ postoji $s \in [0,1]$ t.d. $g(1) - g(0) = g'(s)(1-0)$

* $g'(t)$ = TM o lanč. deriv. $= \nabla f \cdot (0 + 1 \cdot (\vec{b} - \vec{a})) = \nabla f (\vec{b} - \vec{a})$

$\vec{c} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a})$ ⟶ $\boxed{f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c})(\vec{b} - \vec{a})}$

Korolar: Neka je U konveksan skup te neka su f i g dif. na U.

a) Ako je $\nabla f \equiv \vec{0}$, $\forall \vec{x} \in U$
$\Rightarrow$ tada je f konstantna funkcija



konveksan   nije konveksan

DOKAZIĆ: Za bilo koje dvije točke a i $b \in U$, spojnica će biti unutar U i možemo iskoristiti LTSV pa imamo:

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \vec{0}\,(\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$f(\vec{b}) = f(\vec{a}) \quad \Rightarrow \text{ fja je konstantna}$$

*b) Ako dvije fje imaju istu derivaciju, onda se razlikuju za konstantu

↳ Ako je $\nabla f \equiv \nabla g$, tada se f i g razlikuju za konstantu c, tj. $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) + c$.

DOKAZIĆ: $\nabla f \equiv \nabla g \rightarrow \nabla(f - g) \equiv \vec{0}$

* ∇ je operator - ima svojstva linearnosti

$$\nabla f - \nabla g \equiv \vec{0}$$

$$\Rightarrow f - g = c$$

$\boxed{\text{JIR-2022-1}}$ spojnica točaka $A(1,0,1)$ i $B(0,2,1)$

→ naći točku T koja zadovoljava LTSV

$$f(x,y,z) = \frac{1}{1+xy^2z}$$

$$f(A) = 1 \qquad f(B) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y^2z}{(1+xy^2z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xyz}{(1+xy^2z)^2}$$

$*b-a$

$$\vec{r}(t) = (1,0,1) + t(-1,2,0)$$

$$\vec{r}(t) = (\underset{x}{1-t},\ \underset{y}{2t},\ \underset{z}{1})$$

$$f(B) - f(A) = \underbrace{\nabla f(T)}(\overbrace{\vec{r}_B - \vec{r}_a}^{\vec{AB}})$$

ne treba jer nema promjene

$$1-1 = \left(\frac{-y^2z}{(1+xy^2z)^2}, \frac{-2xyz}{(1+xy^2z)^2}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(-1,2,0)$$

$$0 = 1\cdot\frac{y^2z}{(1+xy^2z)^2} + 2\cdot\frac{-2xyz}{(1+xy^2z)^2}$$

$$0 = \frac{y^2z}{(1+xy^2z)^2} - \frac{4xyz}{(1+xy^2z)^2} \Big/ \cdot(1+xy^2z)^2$$

uvijek $\neq 0$

$$0 = y^2z - 4xyz$$

$$0 = 4t^2 - 4(1-t)(2t)$$

$$0 = 4t^2 - (4-4t)2t$$

$$0 = 4t^2 - 8t + 8t^2 \Longrightarrow 12t^2 - 8t = 0$$

$$3t^2 - 2t = 0$$

$$t(3t-2) = 0$$

$t_1 = 0$ → točka A

$t_2 = \frac{2}{3}$ → na $2/3$ od te spojnice

$T_1(1,0,1) = A$

$T_2(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1)$

b) $\nabla f(x,y) = \vec{i} + 2x\vec{j} \longrightarrow f(x,y) = x + y^2 + C$

↓

derivacija je uz jedinični vektor $\Longrightarrow$ razlikuje za C

2. zad