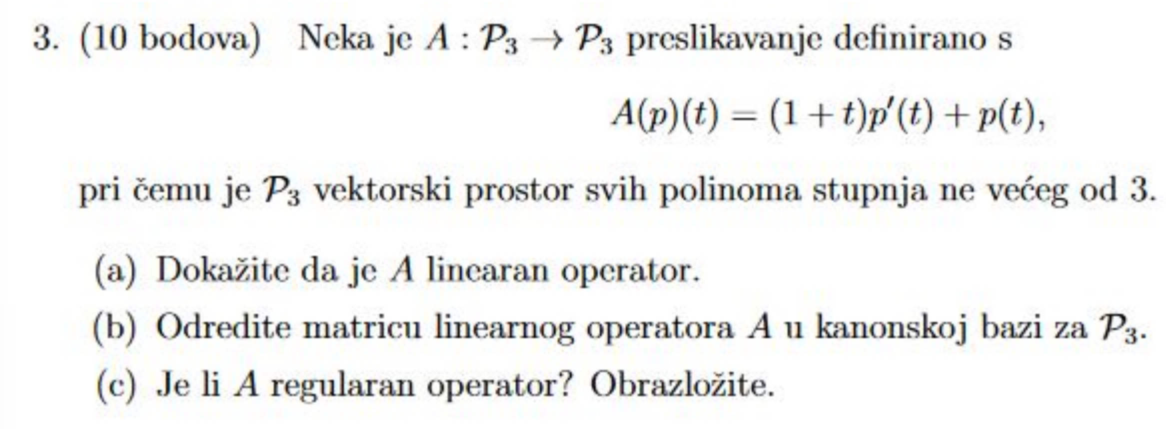
8. Linearni operatori

zadaci sa ispita

ZI23



3. (10 bodova) Neka je $A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ preslikavanje definirano s

$$A(p)(t) = (1 + t)p'(t) + p(t),$$

pri čemu je $\mathcal{P}_3$ vektorski prostor svih polinoma stupnja ne većeg od 3.

(a) Dokažite da je A linearan operator.

(b) Odredite matricu linearnog operatora A u kanonskoj bazi za $\mathcal{P}_3$.

(c) Je li A regularan operator? Obrazložite.

Zadatak 3.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $p, q \in \mathcal{P}_3$ proizvoljni. Imamo

$$\begin{aligned} A(\alpha p + \beta q)(t) &= (1+t)(\alpha p + \beta q)'(t) + (\alpha p + \beta q)(t) \\ &= (1+t)(\alpha p'(t) + \beta q'(t)) + \alpha p(t) + \beta q(t) \\ &= \alpha A(p)(t) + \beta A(q)(t)\,, \qquad \text{za sve } t \in \mathbb{R} \implies \\ A(\alpha p + \beta q) &= \alpha A(p) + \beta A(q). \end{aligned}$$

Dakle, A je linearan operator na $\mathcal{P}_3$.

b) Označimo s $e = (e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, t, t^2, t^3)$ kanonsku bazu za $\mathcal{P}_3$. Za određivanje matrice $A[e]$ pridružene operatoru A u bazi e, trebamo odrediti koordinate vektora $A(e_j)$ u bazi e.

$$\begin{aligned} A(1) &= (1+t)1' + 1 = (1+t)\cdot 0 + 1 = 1 \\ A(t) &= (1+t)t' + t = 1 + 2t \\ A(t^2) &= (1+t)(t^2)' + t^2 = 2t + 3t^2 \\ A(t^3) &= (1+t)(t^3)' + t^3 = 3t^2 + 4t^3. \end{aligned}$$

Dakle,

$$A[e] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

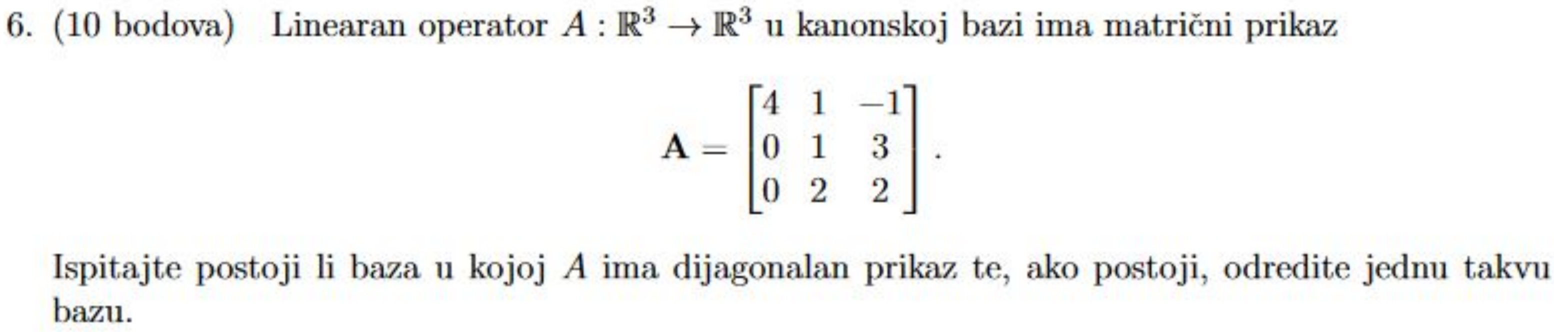
c) *Napominjemo da je rang operatora A, dimenzija* ImA, *jednak rangu matrice* $A[e]$. Iz teorema o rangu i defektu slijedi da je $d(A) = 0$ akko je $r(A) = 4$. Dakle, A injektivan akko je surjektivan, akko je regularan, akko je $A[e]$ regularna. Evo nekih od jednostavnijih dokaza je da je A regularan:

1. $A[e]$ se može elementarnim transformacijama svesti na jediničnu matricu, pa je $r(A) = 4$. Pomnožimo prvi stupac $A[e]$ s -1 i dodamo ga drugom. Pomnožimo drugi stupac s -1 i dodamo ga trećem. Još pomnožimo i treći stupac s -1 i dodamo ga četvrtom. Podijelimo sada k-ti stupac s k i pokazali smo tvrdnju.

2. Determinanta gornje trokutaste matrice je umnožak elemenata na dijagonali, pa je $\det(A[e]) = 24$ i $A[e]$ je regularna.

$\square$

ZIR23



6. (10 bodova) Linearan operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ u kanonskoj bazi ima matrični prikaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ispitajte postoji li baza u kojoj A ima dijagonalan prikaz te, ako postoji, odredite jednu takvu bazu.

Zadatak 6.

RJEŠENJE Baza vektora u kojoj je matrica operatora A dijagonalna je upravo baza vlastitih vektora. Tražimo vlastite vrijednosti:

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} =$$
$$= (\lambda-4)(\lambda^2-3\lambda-4) = (\lambda-4)^2(\lambda+1) = 0 \implies \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4.$$

Vektor $\boldsymbol{v}$ je vlastiti vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_i ako i samo ako je rješenje sustava $(\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A})\boldsymbol{v} = 0$. Riješavamo sustave:

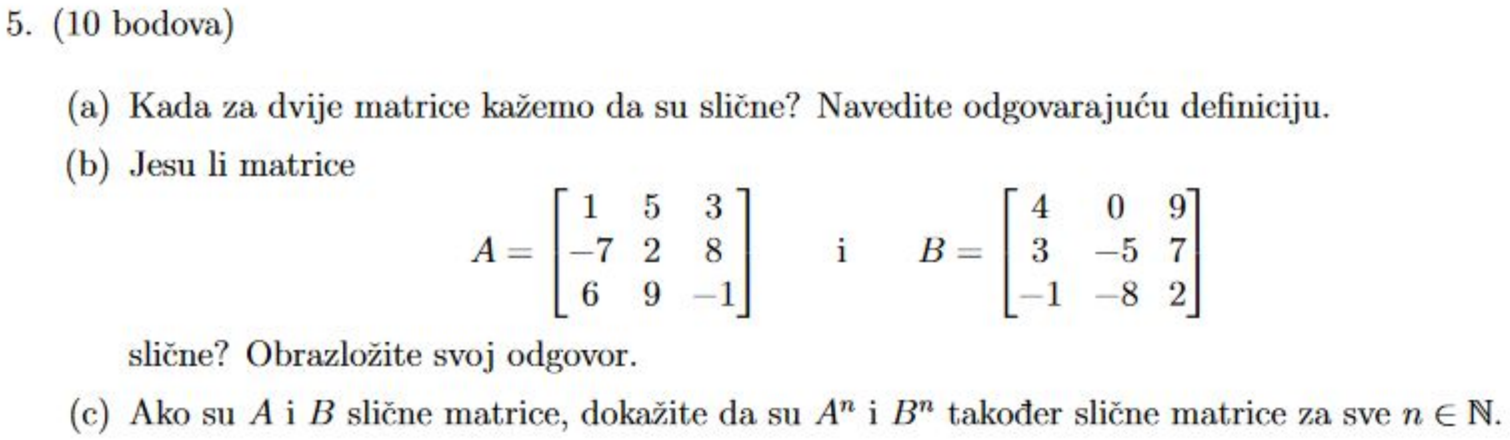
$$\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{v}_1 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$
$$\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \neq 0.$$

Dakle, takva baza postoji:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

□

LJIR23



5\. (10 bodova)

(a) Kada za dvije matrice kažemo da su slične? Navedite odgovarajuću definiciju.

(b) Jesu li matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -7 & 2 & 8 \\ 6 & 9 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 3 & -5 & 7 \\ -1 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

slične? Obrazložite svoj odgovor.

(c) Ako su A i B slične matrice, dokažite da su A^n i B^n također slične matrice za sve $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 5.

RJEŠENJE **a)** Kažemo da su A i B slične matrice ako postoji regularna matrica T takva da je $A = TBT^{-1}$.

b) Slične matrice imaju iste tragove i iste determinante.

$$\mathrm{tr}A = 2, \quad \mathrm{tr}B = 1, \quad \det A = -94, \quad \det B = -77.$$

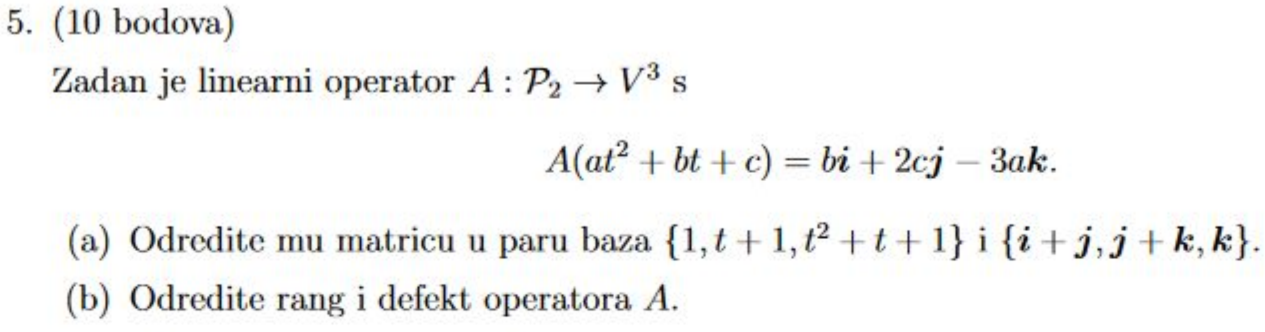
Dakle, A i B nisu slične. (Dovoljno je pokazati da im se ne podudara jedna od ove dvije veličine, trag ili determinanta.)

c) Neka je T regularna matrica takva da je $A = TBT^{-1}$. Tada je

$$\begin{aligned} A^n &= (TBT^{-1})(TBT^{-1})\dots(TBT^{-1}) && (n \text{ puta}) \\ &= TB(T^{-1}T)B(T^{-1}T)B\dots B(T^{-1}T)BT^{-1} \\ &= TB\dots BT^{-1} \\ &= TB^nT^{-1}. \end{aligned}$$

Dakle, A^n i B^n su slične, za svaki $n \in \mathbb{N}$. $\square$

JIR23



5. (10 bodova)

Zadan je linearni operator $A : \mathcal{P}_2 \to V^3$ s

$$A(at^2 + bt + c) = b\boldsymbol{i} + 2c\boldsymbol{j} - 3a\boldsymbol{k}.$$

(a) Odredite mu matricu u paru baza $\{1, t+1, t^2+t+1\}$ i $\{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\}$.

(b) Odredite rang i defekt operatora A.

Zadatak 5.

RJEŠENJE **a)** Stavimo $B_{\mathcal{P}_2} = \{1, t+1, t^2+t+1\}$ i $B_{V^3} = \{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\}$. Provjeravamo djelovanje A na elemente iz $B_{\mathcal{P}_2}$ i prikazujemo dane vektore u bazi B_{V^3}:

$$\begin{aligned}
A(1) &= 2\boldsymbol{j} = 2(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) - 2\boldsymbol{k} \\
A(t+1) &= \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} = (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) + (\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{k} \\
A(t^2+t+1) &= \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) + (\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) - 4\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Dakle, matrica $\boldsymbol{A}$ operatora A u bazama $B_{\mathcal{P}_2}$ i B_{V^3} je

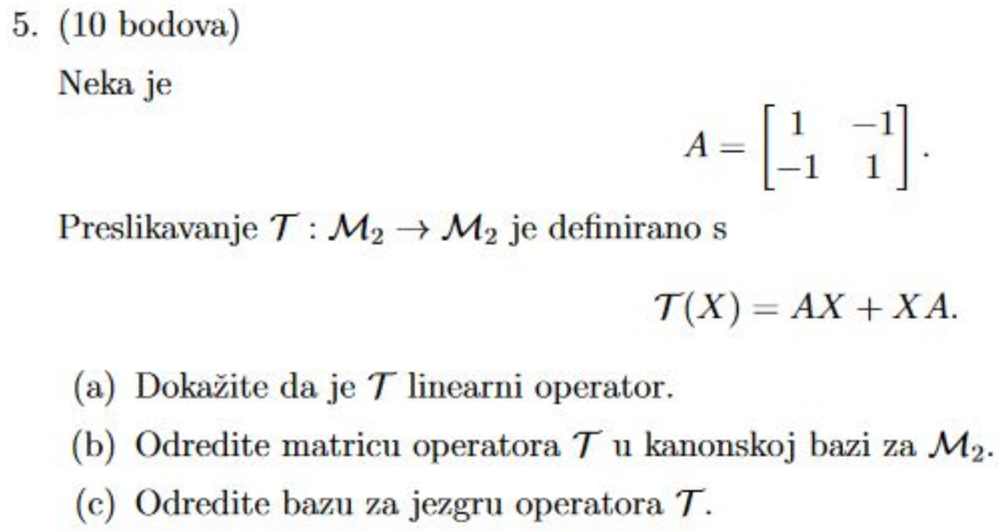
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

b) Radimo elementarne transformacije na retcima matrice $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle, $r(A) = 3$ i prema teoremu o rangu i defektu, $d(A) = 3 - r(A) = 0$. □

DIR23



5. (10 bodova)

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preslikavanje $\mathcal{T} : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ je definirano s

$$\mathcal{T}(X) = AX + XA.$$

(a) Dokažite da je $\mathcal{T}$ linearni operator.

(b) Odredite matricu operatora $\mathcal{T}$ u kanonskoj bazi za $\mathcal{M}_2$.

(c) Odredite bazu za jezgru operatora $\mathcal{T}$.

Zadatak 5.

RJEŠENJE **a)** Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $X, Y \in \mathcal{M}_2$ proizvoljni.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha X + \beta Y) &= A(\alpha X + \beta Y) + (\alpha X + \beta Y)A = \alpha AX + \beta AY + \alpha XA + \beta YA \\ &= \alpha(AX + XA) + \beta(AY + YA) = \alpha\mathcal{A}(X) + \beta\mathcal{A}(Y).\end{aligned}$$

Dakle, $\mathcal{A}$ je linearni operator.

b) Kanonska baza za $\mathcal{M}_2$ je

$$E_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Ispitujemo djelovanje operatora $\mathcal{A}$ na elemente baze:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(E_1) &= \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = 2E_1 - E_2 - E_3\\ \mathcal{A}(E_2) &= \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1- & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = -E_1 + 2E_2 - E_4\\ \mathcal{A}(E_3) &= \quad \ldots \quad = -E_1 + 2E_3 - E_4\\ \mathcal{A}(E_4) &= \quad \ldots \quad = -E_2 - E_3 + 2E_4.\end{aligned}$$

Dakle, matrica operatora $\mathcal{A}$ u kanonskoj bazi za $\mathcal{M}_2$ je

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

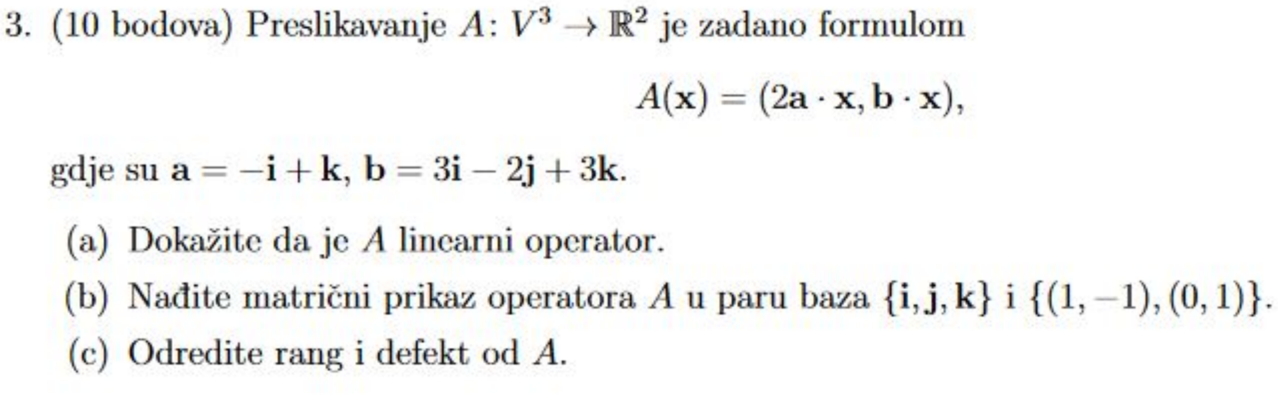
c) Neka je X proizvoljna matrica iz jezgre operatora $\mathcal{A}$:

$$0 = AX + XA = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x - y - z & 2y - x - w\\ 2z - x - w & 2w - y - z\end{bmatrix}.$$

Izjednačavajući prvu i četvrtu koordinatu, dobivamo $x = w$, dok izjednačavanje druge i treće daje $y = z$. Uvrštavajući, dobivamo $2x - 2y = 0$, pa je $x = y = z = w$. Dakle, baza za $\ker(\mathcal{A})$ je

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}.$$

ZI22



3. (10 bodova) Preslikavanje $A\colon V^3 \to \mathbb{R}^2$ je zadano formulom

$$A(\mathbf{x}) = (2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}),$$

gdje su $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

(a) Dokažite da je A linearni operator.

(b) Nađite matrični prikaz operatora A u paru baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ i $\{(1, -1), (0, 1)\}$.

(c) Odredite rang i defekt od A.

③ (a) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te $\vec{x}, \vec{y} \in V^3$ proizvoljni. Imamo

$$
\begin{aligned}
A(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) &= \left(2\vec{a}\cdot(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}),\ \vec{b}\cdot(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\right) \\
&= \left(\alpha(2\vec{a}\cdot\vec{x})+\beta(2\vec{a}\cdot\vec{y}),\ \alpha(\vec{b}\cdot\vec{x})+\beta(\vec{b}\cdot\vec{y})\right) \\
&= \alpha\left(2\vec{a}\cdot\vec{x}, \vec{b}\cdot\vec{x}\right)+\beta\left(2\vec{a}\cdot\vec{y}, \vec{b}\cdot\vec{y}\right) \\
&= \alpha A(\vec{x})+\beta A(\vec{y})
\end{aligned}
$$

pa po definiciji slijedi da je A linearni operator.

(b) Za slike vektora baze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ imamo

$$A(\vec{i}) = (2\cdot(-1), 3) = (-2,3) = -2\cdot(1,-1)+(0,1),$$

$$A(\vec{j}) = (2\cdot 0, -2) = (0,-2) = 0\cdot(1,-1)-2\cdot(0,1),$$

$$A(\vec{k}) = (2\cdot 1, 3) = (2,3) = 2\cdot(1,-1)+5\cdot(0,1),$$

pa je traženi matrični prikaz

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

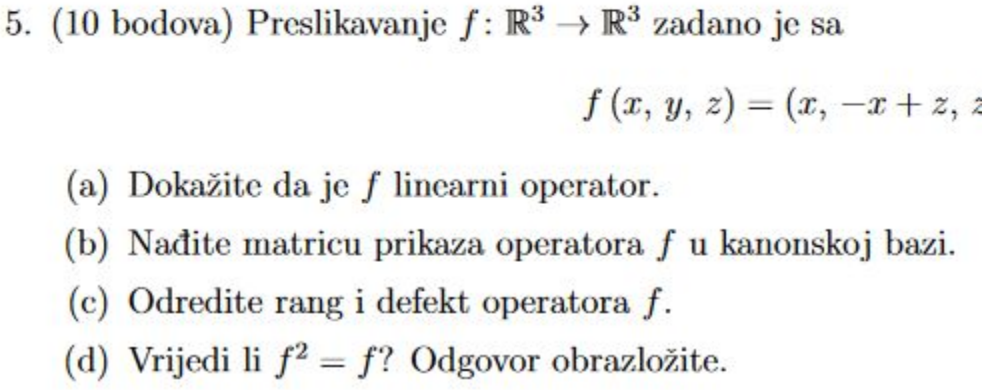
(c) Rang operatora jednak je rangu njegovog matričnog prikaza (u bilo kojem paru baza):

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \big|\cdot\frac{1}{2} \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} |:(-2) \\ |:(-2) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Dakle, rang od A je jednak $r(A)=2$, dok prema teoremu o rangu i defektu slijedi

$$d(A) = \dim V^3 - r(A) = 3-2 = 1.$$

LJIR22



5. (10 bodova) Preslikavanje $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadano je sa

$$f(x, y, z) = (x, -x + z, z$$

(a) Dokažite da je f linearni operator.

(b) Nađite matricu prikaza operatora f u kanonskoj bazi.

(c) Odredite rang i defekt operatora f.

(d) Vrijedi li $f^2 = f$? Odgovor obrazložite.

(a) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ proizvoljni. Imamo

$$f(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha y_3 + \beta z_3)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, -(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2), \alpha z_1 + \beta z_2)$$

$$= \alpha(x_1, -x_1 + z_1, z_1) + \beta(x_2, -x_2 + z_2, z_2)$$

$$= \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2),$$

odakle po definiciji slijedi da je f linearni operator.

(b)

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1, -1, 0) \\ f(0,1,0) &= (0, 0, 0) \\ f(0,0,1) &= (0, 1, 1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad f(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ | \cdot (-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} | \cdot 1 \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(f) = r(f(e)) = 2$$

Prema teoremu o rangu i defektu

$$d(f) = \dim \mathbb{R}^3 - r(f) = 3 - 2 = 1.$$

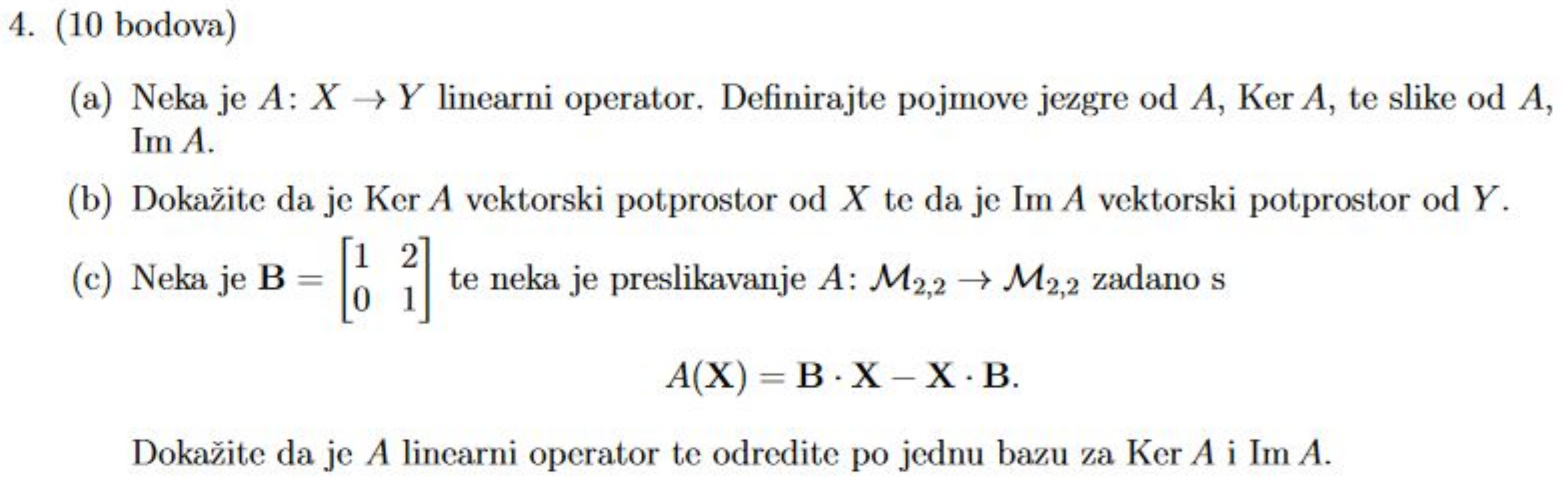
(d) Za matrični prikaz od f^2 u kanonskoj bazi imamo

$$f^2(e) = f(e) \cdot f(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = f(e),$$

odakle slijedi $f^2 = f$.

JIR 22



4. (10 bodova)

(a) Neka je $A\colon X \to Y$ linearni operator. Definirajte pojmove jezgre od A, $\operatorname{Ker} A$, te slike od A, $\operatorname{Im} A$.

(b) Dokažite da je $\operatorname{Ker} A$ vektorski potprostor od X te da je $\operatorname{Im} A$ vektorski potprostor od Y.

(c) Neka je $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ te neka je preslikavanje $A\colon \mathcal{M}_{2,2} \to \mathcal{M}_{2,2}$ zadano s

$$A(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{B}.$$

Dokažite da je A linearni operator te odredite po jednu bazu za $\operatorname{Ker} A$ i $\operatorname{Im} A$.

(a) Jezgra od A je skup $\mathrm{Ker}\,A := \{\vec{x} \in X \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$.

Slika od A je skup $\mathrm{Im}\,A := \{\vec{y} \in Y \mid (\exists \vec{x} \in X)\ A\vec{x} = \vec{y}\}$.

(b) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}\,A$ proizvoljni. Imamo

$$A(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha \underbrace{A\vec{x}_1}_{=\vec{0}} + \beta \underbrace{A\vec{x}_2}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

pa po definiciji slijedi $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}\,A$, tj. $\mathrm{Ker}\,A$ je potprostor od X.

Neka su sada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathrm{Im}\,A$ proizvoljni. Tada postoje $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X$ takvi da $\vec{y}_1 = A\vec{x}_1$, $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2$. Sada slijedi

$$\alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2 = \alpha A\vec{x}_1 + \beta A\vec{x}_2 = A(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2)$$

pa po definiciji slijedi $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathrm{Im}\,A$, tj. $\mathrm{Im}\,A$ je potprostor od Y.

(c) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te $X, Y \in M_{2,2}$ proizvoljni. Imamo

$$\begin{aligned} A(\alpha X + \beta Y) &= B(\alpha X + \beta Y) - (\alpha X + \beta Y) B \\ &= \alpha BX + \beta BY - \alpha XB - \beta YB \\ &= \alpha (BX - XB) + \beta (BY - YB) \\ &= \alpha A(X) + \beta A(Y) \end{aligned}$$

pa po definiciji slijedi da je A linearni operator.

Neka je sada $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ proizvoljna matrica. Imamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BX - XB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c & 2d-2a \\ 0 & -2c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a = d, \; c = 0$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=: C_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=: C_2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Dakle, matrice C_1 i C_2 razapinju Ker A. Te su matrice i linearno nezavisne; naime, za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha C_1 + \beta C_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Dakle, $\{C_1, C_2\}$ je jedna baza za $\operatorname{Ker} A$ i $\dim(\operatorname{Ker} A) = d(A) = 2$.

Prema teoremu o rangu i defektu slijedi: $r(A) = \dim M_{2,2} - d(A) = 2$.

Neka je sada $Y \in \operatorname{Im} A$ proizvoljna. Tada postoji $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2}$

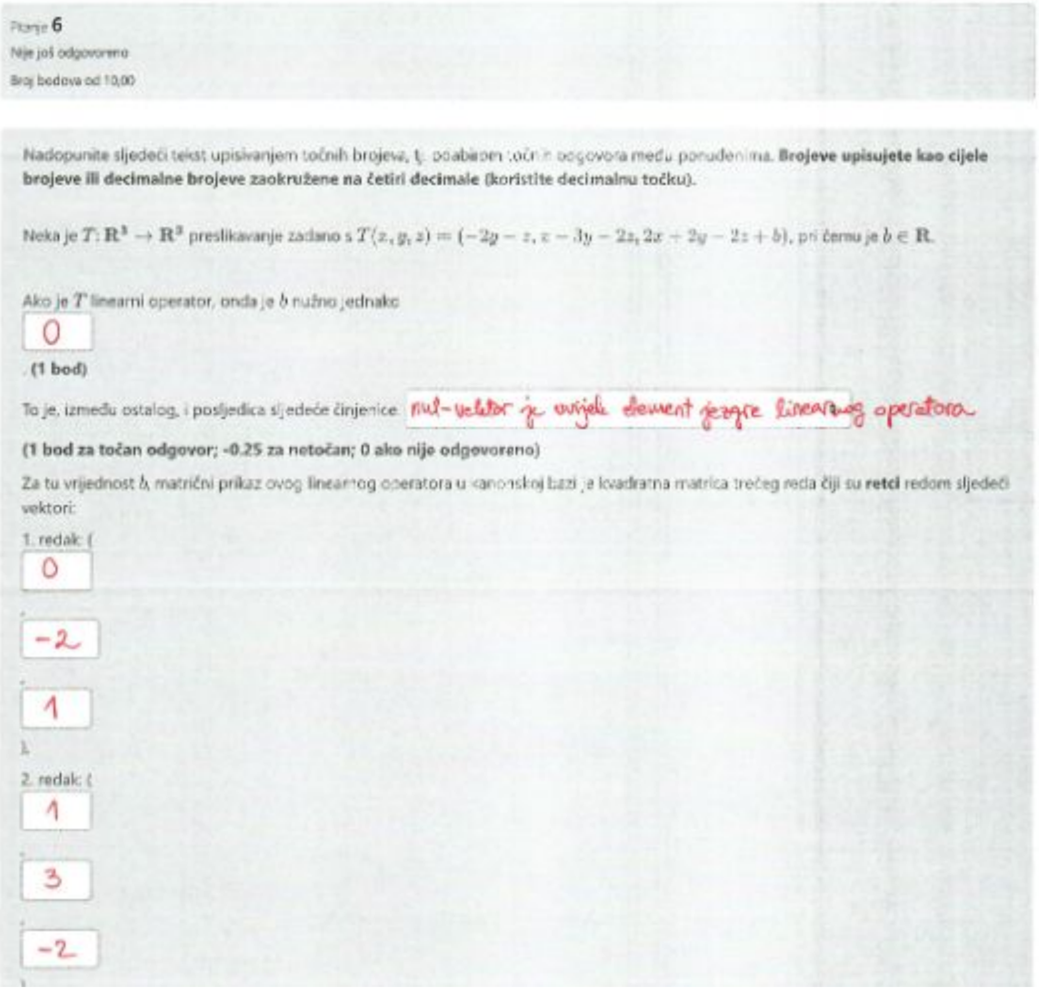
takva da

$$Y = A(X) = \begin{bmatrix} 2c & 2d-2a \\ 0 & -2c \end{bmatrix}$$

$$= a \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:D_1} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{=:D_2} + d \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:D_3}, \quad a, c, d \in \mathbb{R}.$$

Odavde slijedi da matrice D_1, D_2 i D_3 razapinju $\operatorname{Im} A$. Uočimo da je $D_3 = -D_1$. Budući da je $\dim(\operatorname{Im} A) = r(A) = 2$, slijedi da je $\{D_1, D_2\}$ jedna baza za $\operatorname{Im} A$.

ZI21



Pitanje **6**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 10,00

Nadopunite sljedeći tekst upisivanjem točnih brojeva, tj. odabirom točnih odgovora među ponuđenima. **Brojeve upisujete kao cijele brojeve ili decimalne brojeve zaokružene na četiri decimale (koristite decimalnu točku).**

Neka je $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ preslikavanje zadano s $T(x, y, z) = (-2y - z, x - 3y - 2z, 2x + 2y - 2z + b)$, pri čemu je $b \in \mathbf{R}$.

Ako je T linearni operator, onda je b nužno jednako

0

. **(1 bod)**

To je, između ostalog, i posljedica sljedeće činjenice: nul-vektor je uvijek element jezgre linearnog operatora

(1 bod za točan odgovor; -0.25 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)

Za tu vrijednost b, matrični prikaz ovog linearnog operatora u kanonskoj bazi je kvadratna matrica trećeg reda čiji su **retci** redom sljedeći vektori:

1. redak: (

0

,

-2

,

1

).

2. redak: (

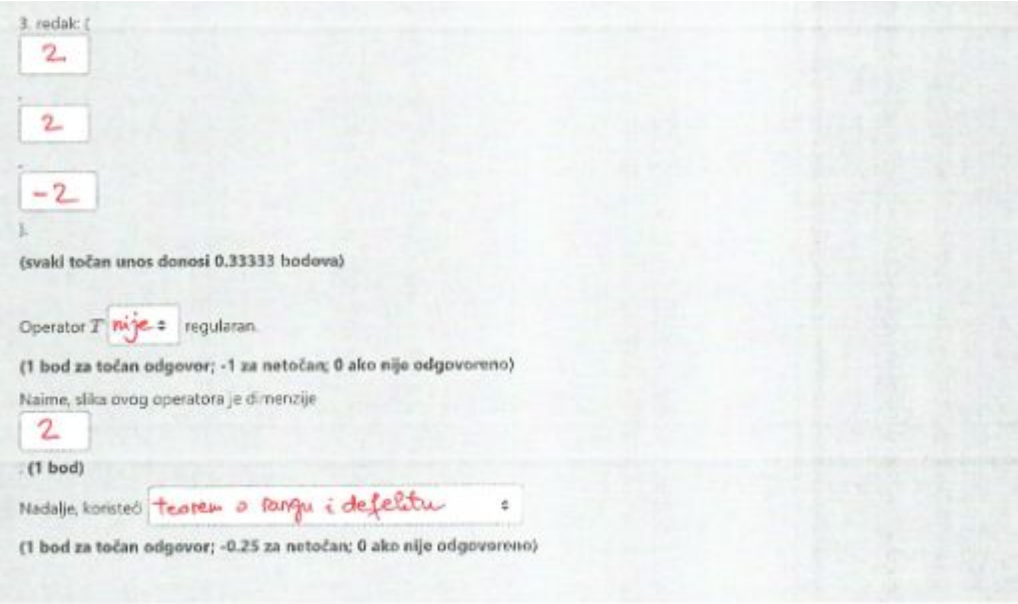
1

,

3

,

-2



3. redak: (

2

,

2

,

-2

).

(svaki točan unos donosi 0.33333 bodova)

Operator T nije regularan.

(1 bod za točan odgovor; -1 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)

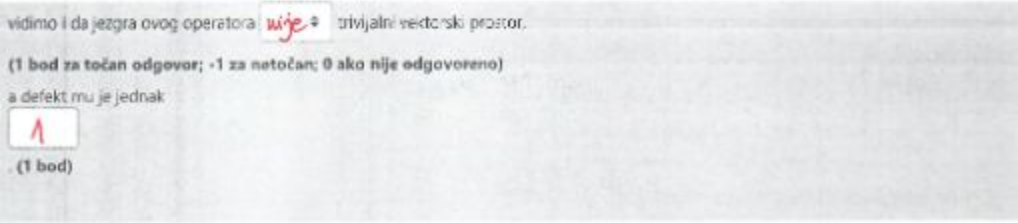
Naime, slika ovog operatora je dimenzije

2

. **(1 bod)**

Nadalje, koristeći teorem o rangu i defektu

(1 bod za točan odgovor; -0.25 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)



vidimo i da jezgra ovog operatora nije trivijalni vektorski prostor.

(1 bod za točan odgovor; -1 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)

a defekt mu je jednak

1

. **(1 bod)**

⑥ Ako je T linearan operator, onda je nužno $T(\vec{0})=\vec{0}$. Naime, zbog svojstva linearnosti

$$2T(\vec{0})=T(2\cdot\vec{0})=T(\vec{0}) \Rightarrow T(\vec{0})=\vec{0}.$$

Dakle,

$$T(0,0,0)=(0,0,b)=(0,0,0) \Rightarrow b=0$$

i prema prethodnom zaključivanju vidimo da nul-vektor uvijek mora biti element jezgre linearnog operatora.

U tom je slučaju

$$T(1,0,0)=(0,1,2),\quad T(0,1,0)=(-2,3,2),\quad T(0,0,1)=(1,-2,-2)$$

pa je njegov matrični prikaz u kanonskoj bazi

$$T(e)=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}.$$

Odavde možemo odrediti rang ovog operatora

$$\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}\overset{\cdot(-2)}{\underset{+}{\downarrow}} \sim \begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}\overset{\cdot 2}{\underset{+}{\downarrow}} \sim \begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(T(e))=2 \Rightarrow r(T)=2$ (dimenzija slike ovog operatora je 2)

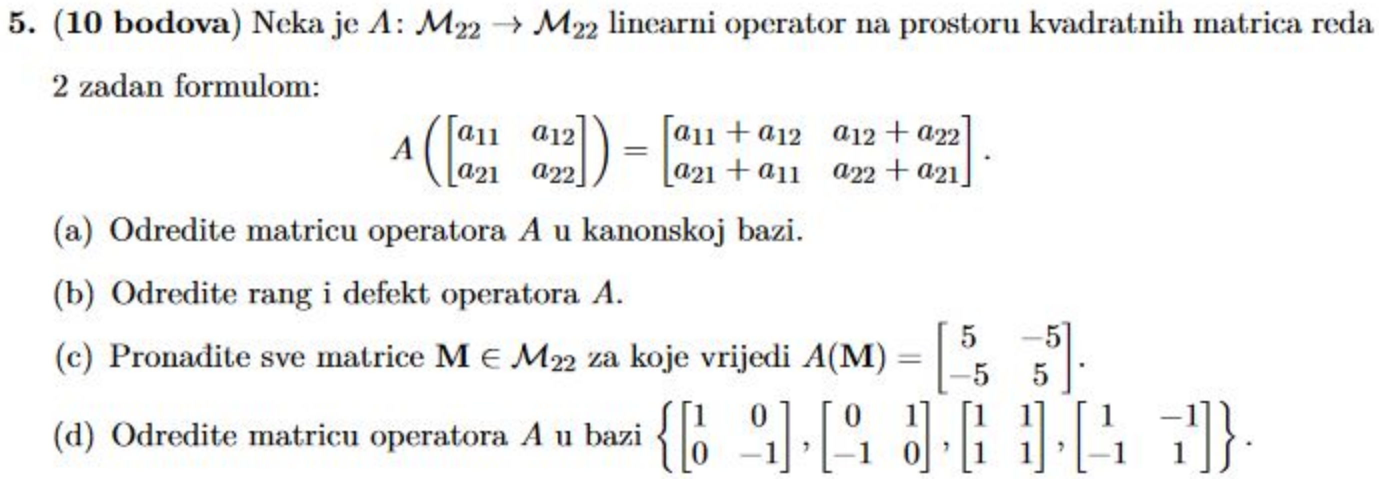
Budući da matrica $T(e)$ nije regularna (nije punog ranga), ni T nije regularan operator.

Nadalje, prema teoremu o rangu i defektu imamo

$$d(T)=\dim\mathbb{R}^3-r(T)=3-2=1$$

i jezgra ovog operatora nije trivijalni vektorski prostor, njena dimenzija, tj. defekt od T nije jednak nuli.

ZIR21



5. (10 bodova) Neka je $A\colon \mathcal{M}_{22} \to \mathcal{M}_{22}$ linearni operator na prostoru kvadratnih matrica reda 2 zadan formulom:

$$A\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12}+a_{22} \\ a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{21} \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi.

(b) Odredite rang i defekt operatora A.

(c) Pronađite sve matrice $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{22}$ za koje vrijedi $A(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) Odredite matricu operatora A u bazi $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

5. (a)

Kanonska baza $e = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

$$A(E_{11}) = A\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{11} + \quad E_{21}$$

$$A(E_{12}) = A\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{11} + E_{12}$$

$$A(E_{21}) = A\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \cancel{E} \quad E_{21} + E_{22}$$

$$A(E_{22}) = A\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{12} + \quad E_{22}$$

$$A(e,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Rang operatora jednak je rangu bilo kojeg matričnog prikaza.

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Rang operatora $r(A) = 3$. Po teoremu o rangu i defektu, defekt operatora je $d(A) = 4 - r(A) = 1$.

(c) Pretpostavimo da je $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrica takva da je $A(M) = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\Rightarrow a_{11} + a_{12} = 5$$
$$a_{12} + a_{22} = -5$$
$$a_{22} + a_{21} = 5$$
$$a_{21} + a_{11} = -5$$

$$\Rightarrow 0 = (a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{22}) + (a_{22} + a_{21}) - (a_{21} + a_{11}) =$$
$$= 5 - (-5) + 5 - (-5) = 20$$
$$\Rightarrow \Leftarrow$$

Došli smo do kontradikcije, odnosno nema takvih matrica M.

5. d)

$$A\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

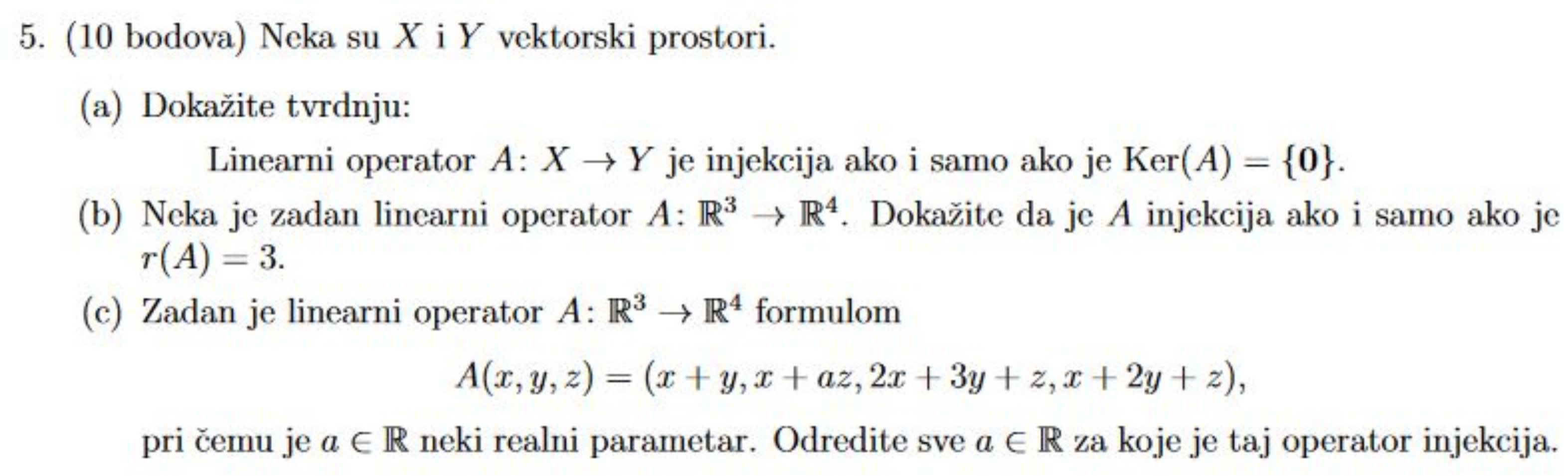
$$A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Zapis operatora A u bazi $b = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

je $A(b,b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

LJIR21



5. (10 bodova) Neka su X i Y vektorski prostori.

   (a) Dokažite tvrdnju:

   Linearni operator $A\colon X \to Y$ je injekcija ako i samo ako je $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

   (b) Neka je zadan linearni operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Dokažite da je A injekcija ako i samo ako je $r(A) = 3$.

   (c) Zadan je linearni operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ formulom

   $$A(x, y, z) = (x + y, x + az, 2x + 3y + z, x + 2y + z),$$

   pri čemu je $a \in \mathbb{R}$ neki realni parametar. Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje je taj operator injekcija.

5. (a) $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $A : X \to Y$ injekcija i $\vec{x} \in \operatorname{Ker} A$ proizvoljan.

Zbog

$$A\vec{x} = \vec{0} = A\vec{0}$$

te injektivnosti A slijedi $\vec{x} = \vec{0}$, tj. $\operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $\operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$ te neka su $\vec{x}, \vec{y} \in X$ takvi da je $A\vec{x} = A\vec{y}$.

Zbog linearnosti A

$$\vec{0} = A\vec{x} - A\vec{y} = A(\vec{x} - \vec{y}),$$

tj. $\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker} A$ pa $\vec{x} - \vec{y} = 0$ odakle slijedi $\vec{x} = \vec{y}$.

Dakle, A je injekcija.

(b) Prema teoremu o rangu i defektu

$$r(A) + d(A) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\Rightarrow d(A) = 3 - r(A)$$

Prema (a) podzadatku imamo

$$A \text{ injekcija} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$$
$$\Leftrightarrow d(A) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3 - r(A) = 0$$
$$\Leftrightarrow r(A) = 3$$

(c) 1. način

Koristimo (b) podzadatak. Neka je $A(e)$ matrica od A u kanonskoj bazi, tj.

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Znamo da je rang ove matrice jednak rangu operatora A pa je dovoljno naći vrijednosti a za koje je rang ove matrice jednak 3 :

$$\begin{matrix} (-1)\cdot 1 \\ + \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} + \\ \cdot 1 \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vidimo da je $r(A(e)) = 2$ za $a = -1$ te $r(A(e)) = 3$ za $a \neq -1$ pa je A injekcija za sve $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. način

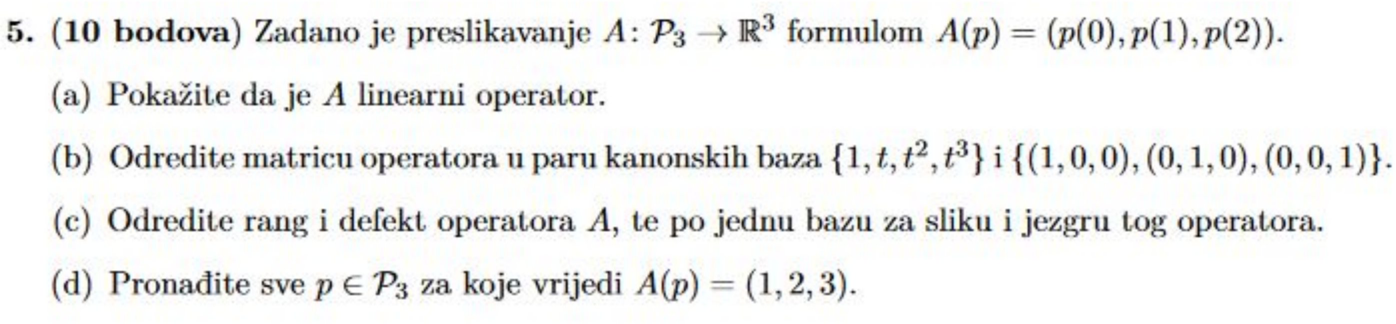
Koristimo (a) podzadatak, tj. određujemo za koje vrijednosti a homogeni sustav $A\vec{x} = \vec{0}$ ima jedinstveno rješenje $\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} \text{iste transformacije} \\ \text{kao u prvom rješenju} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Za $a = -1$ je rang matrice sustava jednak 2 pa sustav ima beskonačno mnogo rješenja (koja ovise o $3 - 2 = 1$ parametru), dok u slučaju $a \neq -1$ vidimo da sustav ima jedinstveno rješenje.

Dakle, A je injekcija za sve $a \neq -1$.

JIR21



5. (**10 bodova**) Zadano je preslikavanje $A\colon \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ formulom $A(p) = (p(0), p(1), p(2))$.

(a) Pokažite da je A linearni operator.

(b) Odredite matricu operatora u paru kanonskih baza $\{1, t, t^2, t^3\}$ i $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

(c) Odredite rang i defekt operatora A, te po jednu bazu za sliku i jezgru tog operatora.

(d) Pronađite sve $p \in \mathcal{P}_3$ za koje vrijedi $A(p) = (1, 2, 3)$.

⑤ (a) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $p, q \in \mathcal{P}_3$ proizvoljni. Imamo

$$A(\alpha p+\beta q) = ((\alpha p+\beta q)(0), (\alpha p+\beta q)(1), (\alpha p+\beta q)(2))$$

$$= (\alpha p(0)+\beta q(0), \alpha p(1)+\beta q(1), \alpha p(2)+\beta q(2))$$

$$= \alpha (p(0), p(1), p(2)) + \beta (q(0), q(1), q(2))$$

$$= \alpha A(p) + \beta A(q),$$

pa po definiciji slijedi da je A linearni operator.

(b) $A(1) = (1,1,1)$, $A(t) = (0,1,2)$, $A(t^2) = (0,1,4)$, $A(t^3) = (0,1,8)$

$$\Rightarrow [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid\cdot(-1) \\ + \\ \mid\cdot(-1) \; + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid\cdot(-2) \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 3$

$\Rightarrow d(A) = \dim \mathcal{P}_3 - r(A) = 4 - 3 = 1$

(po teoremu o rangu i defektu)

Neka je $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \in \mathcal{P}_3$ proizvoljan polinom.

Elementi slike od A su oblika

$$A(p) = (p(0), p(1), p(2))$$

$$= (d, a+b+c+d, 8a+4b+2c+d)$$

$$= a(0,1,8) + b(0,1,4) + c(0,1,2) + d(1,1,1), \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Budući da je

$$(0,1,8) = 3\,(0,1,4) - 2\,(0,1,2),$$

vidimo da skup $\{(0,1,4), (0,1,2), (1,1,1)\}$ razapinje $\operatorname{Im} A$, a budući da je $\dim \operatorname{Im} A = r(A) = 3$, slijedi da je taj skup baza za $\operatorname{Im} A$.

Nadalje, jezgru od A čine svi polinomi $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \in \mathcal{P}_3$ za koje je

$$A(p) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \ (d,\ a+b+c+d,\ 8a+4b+2c+d) = (0,0,0)$$

Rješavamo pripadni homogeni sustav

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \big| \cdot(-1) \\ + \\ + \ \big| \cdot(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \big| : 2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \big| \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ + \\ \big| \cdot(-1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow d = 0 \\ \Rightarrow c = 2a \\ \Rightarrow b = -3a \end{array} \qquad a = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -3\alpha \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Budući da je $\dim \operatorname{Ker} A = d(A) = 1$, (jedna) baza za $\operatorname{Ker} A$ je skup

$$\{t^3 - 3t^2 + 2t\}.$$

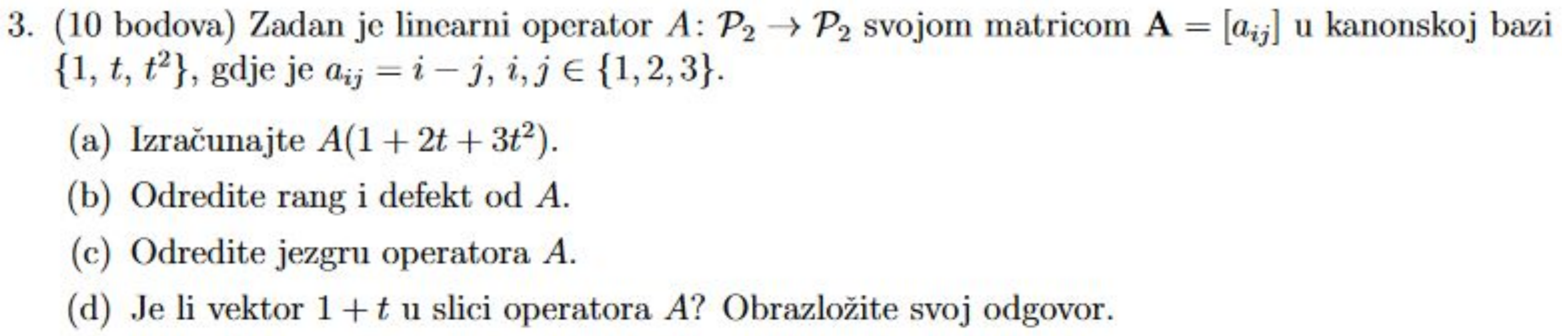
(d) Uočimo da za polinom $p_0(t) = t+1$ vrijedi

$$A(p_0) = (0+1,\ 1+1,\ 2+1) = (1,2,3).$$

Dakle, svi traženi polinomi su zbroj p_0 i linearne kombinacije elemenata baze od Ker A, tj.

$$p(t) = p_0(t) + \alpha\left(t^3 - 3t^2 + 2t\right)$$
$$= \alpha t^3 - 3\alpha t^2 + (2\alpha+1)t + 1, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

ZI20



3. (10 bodova) Zadan je linearni operator $A\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ svojom matricom $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ u kanonskoj bazi $\{1,\ t,\ t^2\}$, gdje je $a_{ij} = i - j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

   (a) Izračunajte $A(1 + 2t + 3t^2)$.

   (b) Odredite rang i defekt od A.

   (c) Odredite jezgru operatora A.

   (d) Je li vektor $1 + t$ u slici operatora A? Obrazložite svoj odgovor.

③ Matrica od A u kanonskoj bazi glasi

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A(1+2t+3t^2) = -8-2t+4t^2$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \cdot 1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow r(A(e)) = 2 \Rightarrow r(A) = 2$

Prema teoremu o rangu i defektu

$r(A) + d(A) = 3 \Rightarrow d(A) = 3-2 = 1$

(c) $p(t) = a + bt + ct^2 \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow Ap = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, rješavamo homogeni sustav

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \text{iste transformacije} \\ \text{kao u (b) dijelu} \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \Rightarrow a = c \\ \Rightarrow b = -2c \end{matrix}$$

Zato

$$\operatorname{Ker} A = \{ c - 2ct + ct^2 \mid c \in \mathbb{R} \}$$

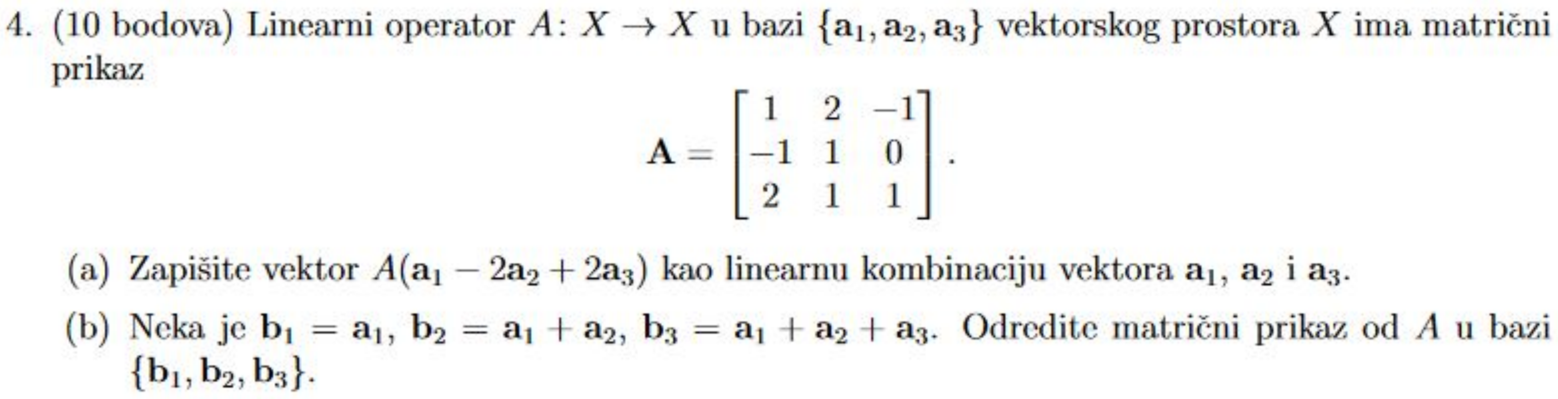
$$= L(\{1 - 2t + t^2\})$$

(d) Ispitujemo postoji li vektor $p(t) = a + bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2$ takav da $Ap = 1 + t$, tj. rješavamo nehomogeni sustav

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \text{iste transformacije} \\ \text{kao u (b) dijelu} \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right].$$

Iz prvog retka proširene matrice sustava vidimo da sustav nema rješenja, tj. $1 + t \notin \operatorname{Im} A$.

ZIR20



4. (10 bodova) Linearni operator $A \colon X \to X$ u bazi $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ vektorskog prostora X ima matrični prikaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Zapišite vektor $A(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ i $\mathbf{a}_3$.

   (b) Neka je $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$. Odredite matrični prikaz od A u bazi $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

④ (a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\left(\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3\right) = -5\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$$

(b) Matrica prijelaza iz baze $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ u bazu $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} + \\ + \;\; |\cdot(-1) \\ |\cdot(-1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} + \\ |\cdot(-1) \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

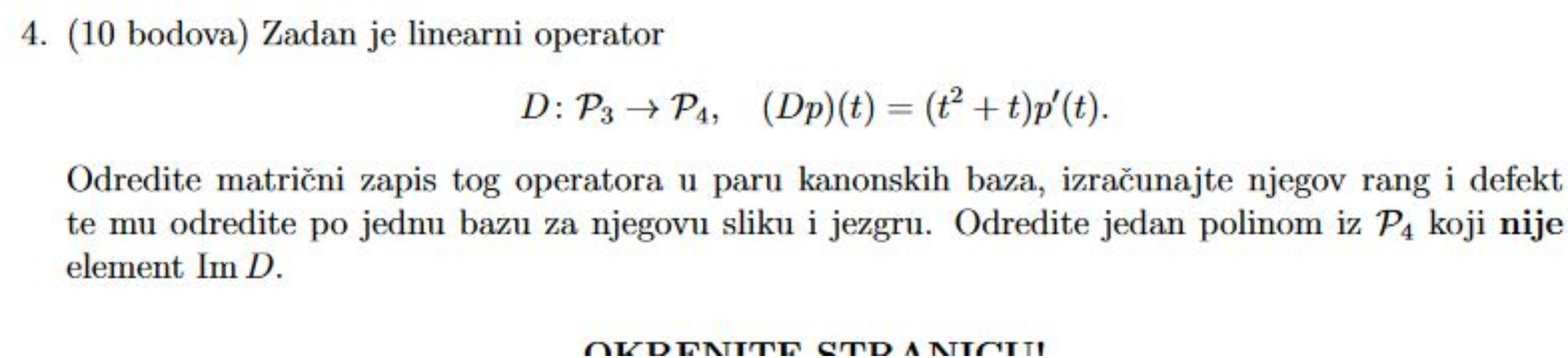
$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{T^{-1}}$$

Zato matrični prikaz od A u bazi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ glasi:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

LJIR20



4. (10 bodova) Zadan je linearni operator

$$D\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_4, \quad (Dp)(t) = (t^2 + t)p'(t).$$

Odredite matrični zapis tog operatora u paru kanonskih baza, izračunajte njegov rang i defekt te mu odredite po jednu bazu za njegovu sliku i jezgru. Odredite jedan polinom iz $\mathcal{P}_4$ koji **nije** element $\operatorname{Im} D$.

OKRENITE STRANICU!

④ $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_4, \quad (Dp)(t) = (t^2+t)\,p'(t)$

Za vektore e_1, e_2, e_3, e_4 kanonske baze za $\mathcal{P}_3$ vrijedi:

$$(De_1)(t) = (t^2+t)\cdot 1' = (t^2+t)\cdot 0 = 0,$$

$$(De_2)(t) = (t^2+t)\cdot t' = (t^2+t)\cdot 1 = t^2+t,$$

$$(De_3)(t) = (t^2+t)\cdot (t^2)' = (t^2+t)\cdot 2t = 2t^3+2t^2,$$

$$(De_4)(t) = (t^2+t)\cdot (t^3)' = (t^2+t)\cdot 3t^2 = 3t^4+3t^3,$$

pa je matrični zapis od D u paru kanonskih baza

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Za proizvoljan vektor $p(t) = at^3+bt^2+ct+d \in \mathcal{P}_3$ imamo

$$\begin{aligned}(Dp)(t) &= (t^2+t)(3at^2+2bt+c) \\ &= 3a(t^4+t^3)+2b(t^3+t^2)+c(t^2+t),\end{aligned}$$

pa vidimo da skup $\{t^4+t^3, t^3+t^2, t^2+t\}$ razapinje $\operatorname{Im} D$. Uočimo i da su ti vektori linearno nezavisni:

$$\alpha(t^4+t^3)+\beta(t^3+t^2)+\gamma(t^2+t) = \alpha t^4+(\alpha+\beta)t^3+(\beta+\gamma)t^2+\gamma t = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Dakle, ti vektori čine bazu za $\operatorname{Im} D$ i $r(D) = \dim(\operatorname{Im} D) = 3$.

Prema teoremu o rangu i defektu slijedi: $d(D) = \dim \mathcal{P}_3 - r(D) = 4-3 = 1$.

Odredimo bazu za jezgru: za $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \in \operatorname{Ker} D$ imamo

$$(Dp)(t) = 3at^4 + (3a+2b)t^3 + (2b+c)t^2 + ct = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a & = 0 \Rightarrow a = 0 \\ 3a + 2b & = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 2b + c & = 0 \Rightarrow c = 0 \\ c & = 0 \end{cases} \quad d \in \mathbb{R},$$

pa je $p(t) = d \cdot 1$. Dakle, $\{1\}$ je (jedna) baza za jezgru od D.

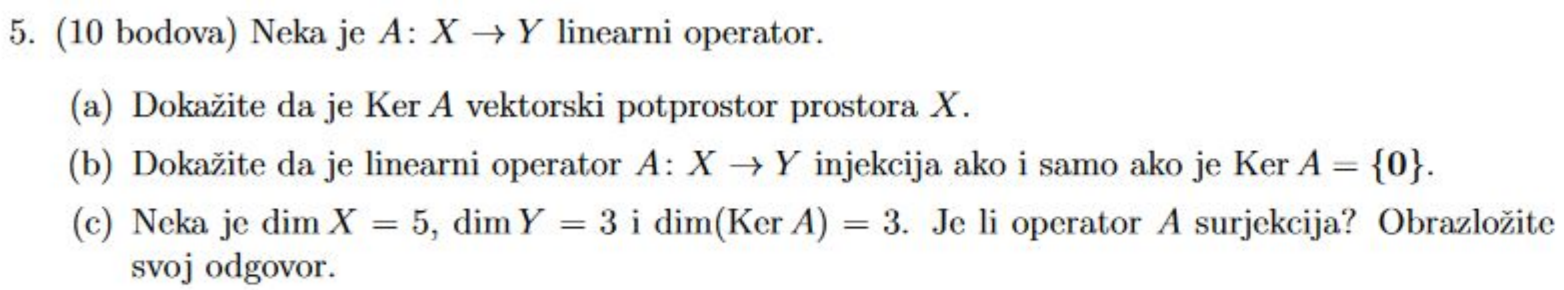
Da bismo odredili jedan polinom iz $\mathcal{P}_4$ koji nije element $\operatorname{Im} D$, možemo naći neki polinom koji je linearno nezavisan s onima iz dobivene baze za $\operatorname{Im} D$ (kao kad bismo tu bazu nadopunjavali do baze za $\mathcal{P}_4$). Uzmimo, na primjer, vektor kanonske baze za $\mathcal{P}_4$, t^4:

$$\alpha(t^4+t^3) + \beta(t^3+t^2) + \gamma(t^2+t) + \delta t^4 = (\alpha+\delta)t^4 + (\alpha+\beta)t^3 + (\beta+\gamma)t^2 + \gamma t = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \delta & = 0 \Rightarrow \delta = 0 \\ \alpha + \beta & = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \beta + \gamma & = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \gamma & = 0 \end{cases}$$

Dakle, t^4 je linearno nezavisan s vektorima baze za $\operatorname{Im} D$ pa vrijedi $t^4 \notin \operatorname{Im} D$ (t^4 ne može biti element prostora razapetog vektorima s kojima je linearno nezavisan).

LJIR20



5. (10 bodova) Neka je $A\colon X \to Y$ linearni operator.

   (a) Dokažite da je $\operatorname{Ker} A$ vektorski potprostor prostora X.

   (b) Dokažite da je linearni operator $A\colon X \to Y$ injekcija ako i samo ako je $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$.

   (c) Neka je $\dim X = 5$, $\dim Y = 3$ i $\dim(\operatorname{Ker} A) = 3$. Je li operator A surjekcija? Obrazložite svoj odgovor.

⑤ (a) Neka su $x, y \in \operatorname{Ker} A$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Po definiciji jezgre, $A(x) = A(y) = 0$.

Imamo

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{Ax}_{=0} + \beta \underbrace{Ay}_{=0} = 0,$$

pa slijedi $\alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} A$, tj. $\operatorname{Ker} A$ je potprostor od X.

(b) $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $A : X \to Y$ injekcija i $x \in \operatorname{Ker} A$. Budući da je A linearan operator, vrijedi $A(0) = 0$, tj. $A(0) = A(x)$, odakle zbog injektivnosti slijedi $x = 0$. Dakle, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Obratno, pretpostavimo $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Neka su $x, y \in X$ takvi da $A(x) = A(y)$. Imamo

$$\begin{aligned} A(x) = A(y) &\Rightarrow A(x) - A(y) = 0 \\ &\Rightarrow A(x-y) = 0 \\ &\Rightarrow x - y \in \operatorname{Ker} A \\ &\Rightarrow x - y = 0 \qquad \Rightarrow x = y, \end{aligned}$$

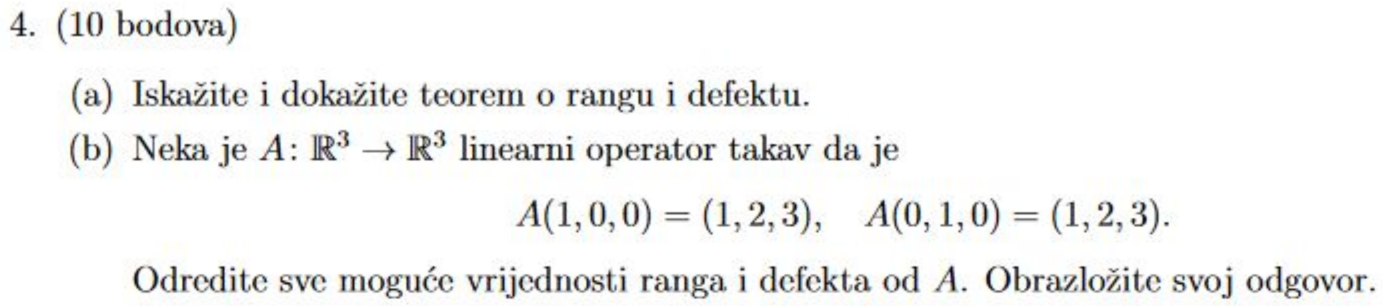
pa po definiciji slijedi da je A injekcija.

(c) Prema teoremu o rangu i defektu slijedi

$$\dim(\operatorname{Im} A) = \dim X - \dim(\operatorname{Ker} A) = 5 - 3 = 2 < 3 = \dim Y.$$

Dakle, $\operatorname{Im} A \neq Y$ pa A nije surjekcija.

JIR201



4. (10 bodova)

(a) Iskažite i dokažite teorem o rangu i defektu.

(b) Neka je $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearni operator takav da je

$$A(1,0,0) = (1,2,3), \quad A(0,1,0) = (1,2,3).$$

Odredite sve moguće vrijednosti ranga i defekta od A. Obrazložite svoj odgovor.

④ (a) Teorem. Neka su X, Y vektorski prostori, $\dim X = n$ te neka je $A : X \to Y$ linearni operator. Tada

$$r(A) + d(A) = n.$$

Dokaz.

Prema pretpostavci teorema je jezgra od A, $\operatorname{Ker} A$, vektorski potprostor od X dimenzije d. Neka je $\{e_1, \dots, e_d\}$ neka baza za $\operatorname{Ker} A$. Nadopunimo ju do baze za X: $\{e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n\}$.

Tvrdimo da je skup $\{A(e_{d+1}), \dots, A(e_n)\}$ baza za $\operatorname{Im} A$ (uočimo da je tad tvrdnja teorema dokazana). Pokazujemo:

1° $A(e_{d+1}), \dots, A(e_n)$ razapinju $\operatorname{Im} A$

Neka je $y \in \operatorname{Im} A$ proizvoljan. Tada postoji $x \in X$ takav da $y = A(x)$. Budući da je $x \in X$, postoje jedinstveni skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Slijedi

$$y = A(x) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = [\text{linearnost}]$$

$$= \alpha_1 \underbrace{A(e_1)}_{=0} + \dots + \alpha_d \underbrace{A(e_d)}_{=0} + \alpha_{d+1} A(e_{d+1}) + \dots + \alpha_n A(e_n)$$

jer $e_1, \dots, e_d \in \operatorname{Ker} A$

$$= \sum_{i=d+1}^{n} \alpha_i A(e_i)$$

Dakle, $A(e_{d+1}), \dots, A(e_n)$ razapinju $\operatorname{Im} A$.

2° $\{A(e_{d+1}),\dots,A(e_n)\}$ je linearno nezavisan skup vektora

Neka su $\lambda_{d+1},\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ proizvoljni skalari takvi da

$$\lambda_{d+1}A(e_{d+1})+\dots+\lambda_n A(e_n)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad A(\lambda_{d+1}e_{d+1}+\dots+\lambda_n e_n)=0$$

Dakle, mora biti $\sum\limits_{i=d+1}^{n}\lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} A$ pa postoje (jedinstveni) skalari

$\mu_1,\dots,\mu_d \in \mathbb{R}$ takvi da

$$\lambda_{d+1}e_{d+1}+\dots+\lambda_n e_n=\mu_1 e_1+\dots+\mu_d e_d$$

$$\Leftrightarrow \quad -\mu_1 e_1-\dots-\mu_d e_d+\lambda_{d+1}e_{d+1}+\dots+\lambda_n e_n=0$$

No odavde zbog linearne nezavisnosti skupa $\{e_1,\dots,e_d,e_{d+1},\dots,e_n\}$ (to je baza za X) slijedi $\mu_1=\dots=\mu_d=\lambda_{d+1}=\dots=\lambda_n=0$.

Dakle, $\{A(e_{d+1}),\dots,A(e_n)\}$ je baza za $\operatorname{Im} A$ pa slijedi:

$$r(A)+d(A)=(n-d)+d=n.$$

U slučaju da je $d=n$, tada bi bilo $\operatorname{Ker} A = X$ pa bi A bio nul-operator (svaki vektor preslikava u nul-vektor), odakle bi slijedilo

$$r(A)=\dim \operatorname{Im} A=\dim\{0\}=0,$$

tj. $d(A)+r(A)=n+0=n$, pa tvrdnja teorema ponovno vrijedi.

Q.E.D.

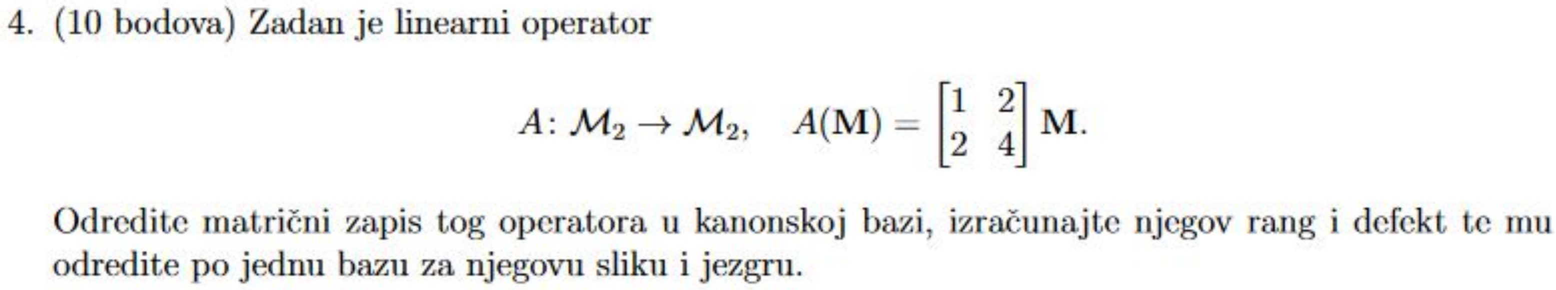
(b) Neka je $A(0,0,1)=(x,y,z)$. Tada je matrični zapis od A u paru kanonskih baza

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & 3 & z \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid\cdot(-2) \\ + \\ \mid\cdot(-3) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-2x \\ 0 & 0 & z-3x \end{bmatrix}$$

Dakle, rang ove matrice je barem 1, a uočimo da je najviše 2 (ova matrica nije regularna jer ima dva jednaka stupca).

Tako, na primjer, za $x=0$, $y=z=1$ dobivamo $r=2$ i $d=3-r=1$ (prema teoremu o rangu i defektu), dok za $x=y=z=0$ dobivamo $r=1$ i $d=2$.

JIR202



4. (10 bodova) Zadan je linearni operator

$$A\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2, \quad A(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{M}.$$

Odredite matrični zapis tog operatora u kanonskoj bazi, izračunajte njegov rang i defekt te mu odredite po jednu bazu za njegovu sliku i jezgru.

④ Za vektore $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ kanonske baze za $\mathcal{M}_2$ imamo

$$A(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(E_{12}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A(E_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(E_{22}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

pa je matrični zapis od A u kanonskoj bazi

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Odredimo $\operatorname{Im} A$. Za proizvoljnu matricu $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ imamo

$$A(M) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2z & y+2w \\ 2x+4z & 2y+4w \end{bmatrix}$$

$$= x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Reducirajmo skup $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}$ do

linearno nezavisnog skupa u $\mathcal{M}_2$.

Budući da je

$$\begin{bmatrix}2&0\\4&0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&2\\0&4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix},$$

a skup $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}\right\}$ je linearno nezavisan u $\mathcal{M}_2$

$$\alpha\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \alpha=\beta=0,$$

slijedi da je taj skup (jedna) baza za A i $r(A)=2$.

Neka je sada $M=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\in \operatorname{Ker}A$. Imamo

$$A(M)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x+2z&y+2w\\2x+4z&2y+4w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2z=0\\ y+2w=0\\ 2x+4z=0\\ 2y+4w=0\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}x=-2z\\ y=-2w\end{matrix}$$

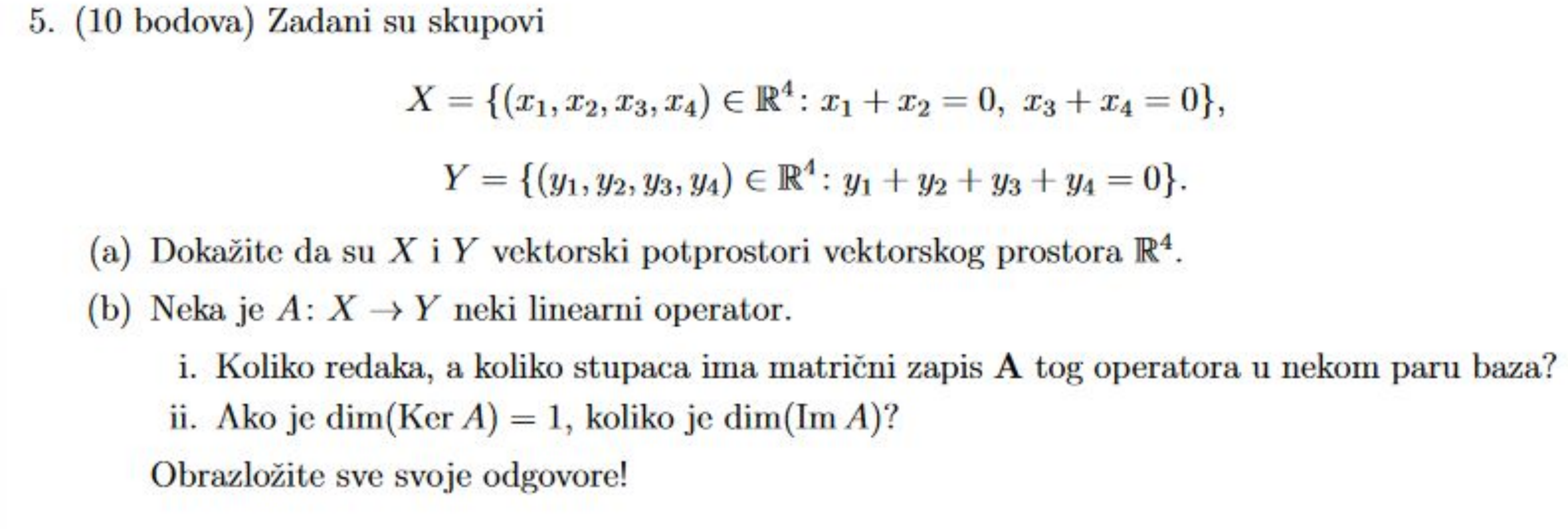
Dakle, $M=\begin{bmatrix}-2z&-2w\\z&w\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}-2&0\\1&0\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}0&-2\\0&1\end{bmatrix}.$

Budući da je skup $\left\{\begin{bmatrix}-2&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ linearno nezavisan u $\mathcal{M}_2$:

$$\alpha\begin{bmatrix}-2&0\\1&0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0&-2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \alpha=\beta=0,$$

taj je skup (jedna) baza za Ker A i $d(A)=2$.

JIR202



5. (10 bodova) Zadani su skupovi

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\},$$

$$Y = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \colon y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0\}.$$

(a) Dokažite da su X i Y vektorski potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$.

(b) Neka je $A \colon X \to Y$ neki linearni operator.

  i. Koliko redaka, a koliko stupaca ima matrični zapis $\mathbf{A}$ tog operatora u nekom paru baza?

  ii. Ako je $\dim(\mathrm{Ker}\, A) = 1$, koliko je $\dim(\mathrm{Im}\, A)$?

Obrazložite sve svoje odgovore!

5. **(a)** Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \in X$, $(c_1, c_2, c_3, c_4), (d_1, d_2, d_3, d_4) \in Y$ proizvoljni. Imamo

$$(\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2) = \alpha \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=0} + \beta \underbrace{(b_1 + b_2)}_{=0} = 0,$$

$$(\alpha a_3 + \beta b_3) + (\alpha a_4 + \beta b_4) = \alpha \underbrace{(a_3 + a_4)}_{=0} + \beta \underbrace{(b_3 + b_4)}_{=0} = 0,$$

pa slijedi $\alpha(a_1, a_2, a_3, a_4) + \beta(b_1, b_2, b_3, b_4) \in X$, tj. X je potprostor od $\mathbb{R}^4$.

Slično,

$$(\alpha c_1 + \beta d_1) + (\alpha c_2 + \beta d_2) + (\alpha c_3 + \beta d_3) + (\alpha c_4 + \beta d_4) =$$

$$= \alpha \underbrace{(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)}_{=0} + \beta \underbrace{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)}_{=0} = 0,$$

pa $\alpha(c_1, c_2, c_3, c_4) + \beta(d_1, d_2, d_3, d_4) \in Y$, tj. i Y je potprostor od $\mathbb{R}^4$.

(b) Neka je $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X$ proizvoljna uređena četvorka. Tada

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1, \\ x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = -x_3, \end{cases}$$

tj.

$$\vec{x} = x_1(1, -1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, -1).$$

Budući da je skup $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ linearno nezavisan u $\mathbb{R}^4$:

$$\alpha(1, -1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, -1) = (\alpha, -\alpha, \beta, -\beta) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

slijedi da je taj skup baza za X i $\dim X = 2$.

Jednako tako, za $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in Y$ imamo

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \Rightarrow y_4 = -y_1 - y_2 - y_3 - y_4,$$

tj.

$$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, -y_1 - y_2 - y_3)$$

$$= y_1 (1,0,0,-1) + y_2 (0,1,0,-1) + y_3 (0,0,1,-1).$$

Budući da je skup $\{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)\}$ linearno nezavisan u $\mathbb{R}^4$:

$$\alpha(1,0,0,-1) + \beta(0,1,0,-1) + \gamma(0,0,1,-1) = (\alpha, \beta, \gamma, -\alpha - \beta - \gamma) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

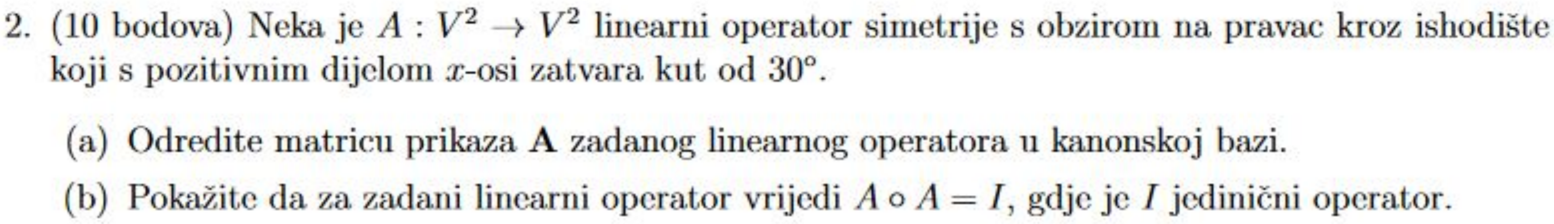
taj je skup baza za Y i $\dim Y = 3$.

i. Matrični zapis bilo kojeg linearnog operatora $A : X \to Y$ u bilo kojem paru baza imat će $\dim Y = 3$ retka i $\dim X = 2$ stupca.

ii. Prema teoremu o rangu i defektu

$$\dim(\operatorname{Im} A) = \dim X - \dim(\operatorname{Ker} A) = 2 - 1 = 1.$$

ZI19



2. (10 bodova) Neka je $A : V^2 \to V^2$ linearni operator simetrije s obzirom na pravac kroz ishodište koji s pozitivnim dijelom x-osi zatvara kut od $30°$.

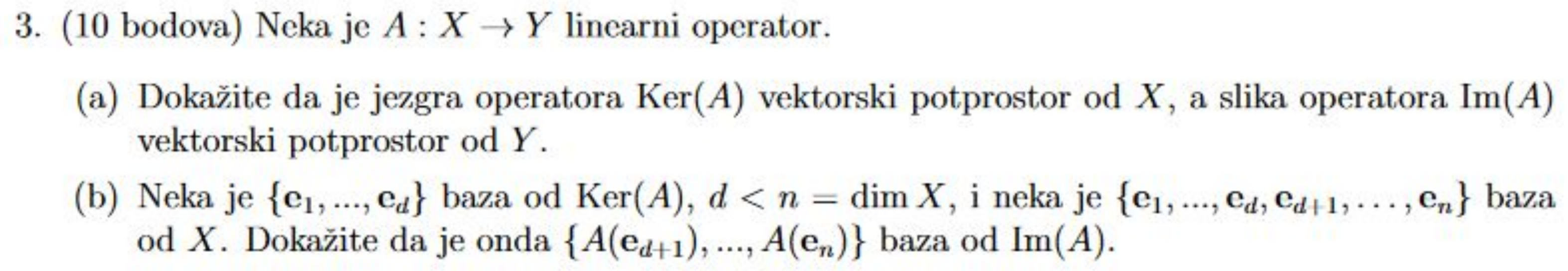
   (a) Odredite matricu prikaza $\mathbf{A}$ zadanog linearnog operatora u kanonskoj bazi.

   (b) Pokažite da za zadani linearni operator vrijedi $A \circ A = I$, gdje je I jedinični operator.

② a) $A = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ZI19



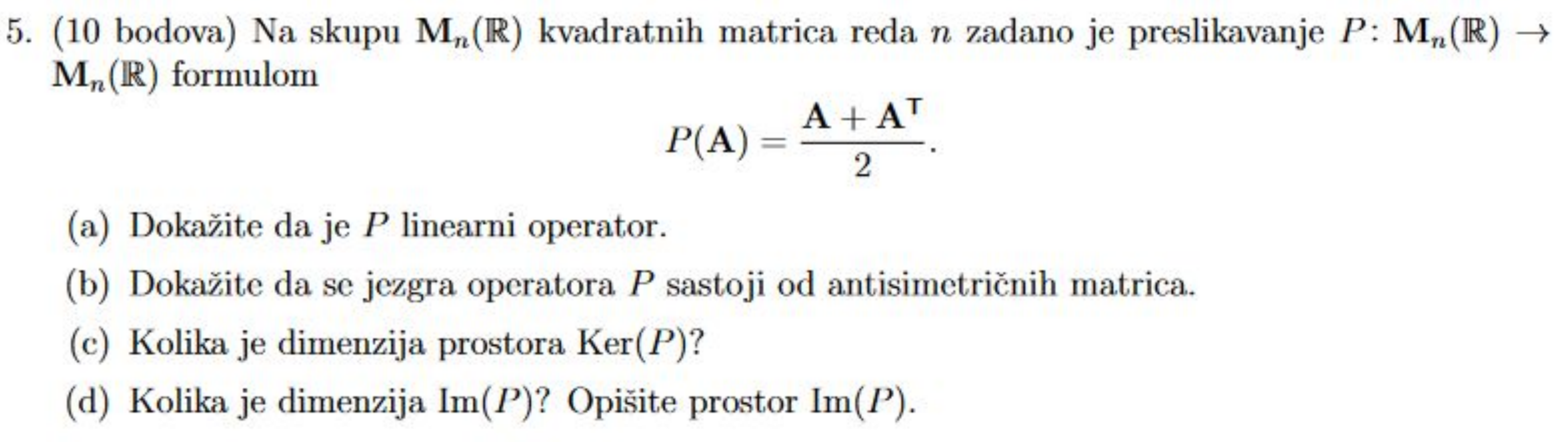
3. (10 bodova) Neka je $A : X \to Y$ linearni operator.

   (a) Dokažite da je jezgra operatora $\mathrm{Ker}(A)$ vektorski potprostor od X, a slika operatora $\mathrm{Im}(A)$ vektorski potprostor od Y.

   (b) Neka je $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d\}$ baza od $\mathrm{Ker}(A)$, $d < n = \dim X$, i neka je $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza od X. Dokažite da je onda $\{A(\mathbf{e}_{d+1}), ..., A(\mathbf{e}_n)\}$ baza od $\mathrm{Im}(A)$.

③ Vidi predavanja ili knjižicu „Linearni operatori"

LJIR19



5. (10 bodova) Na skupu $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ kvadratnih matrica reda n zadano je preslikavanje $P\colon \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formulom

$$P(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^\intercal}{2}.$$

(a) Dokažite da je P linearni operator.

(b) Dokažite da se jezgra operatora P sastoji od antisimetričnih matrica.

(c) Kolika je dimenzija prostora $\mathrm{Ker}(P)$?

(d) Kolika je dimenzija $\mathrm{Im}(P)$? Opišite prostor $\mathrm{Im}(P)$.

⑤ Zadano je preslikavanje $P: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$

$$P(A) = \frac{A+A^T}{2}.$$

(a) Dokažite da je P linearni operator.

(b) Dokažite da se jezgra operatora P sastoji od antisimetričnih matrica.

(c) Kolika je dimenzija $Ker(P)$?

(d) Kolika je dimenzija $Im(P)$? Opišite prostor $Im(P)$.

Rješenje

(a) $A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$P(\alpha A + \beta B) = \frac{1}{2}\left[(\alpha A + \beta B) + (\alpha A + \beta B)^T\right] = \frac{1}{2}\left[\alpha A + \beta B + \alpha A^T + \beta B^T\right] =$$
$$= \alpha \cdot \frac{1}{2}(A + A^T) + \beta \cdot \frac{1}{2}(B + B^T) = \alpha P(A) + \beta P(B).$$

(b) $A \in Ker(P) \Leftrightarrow P(A) = 0 \Leftrightarrow \frac{A+A^T}{2} = 0 \Leftrightarrow A^T = -A$

(c) Promotrimo skup

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ -1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ -1 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \{F_{12}, F_{13}, \dots, F_{n-1,n}\}$$

S je očito linearno nezavisan.

Neka je A antisimetrična matrica, $A = (a_{ij})$.

$$A^T = -A \Rightarrow a_{ii} = 0 \text{ i } a_{ij} = -a_{ji}$$

$$\Rightarrow A = a_{12}F_{12} + a_{13}F_{13} + \dots + a_{n-1,n}F_{n-1,n} \in L(S)$$

$\Rightarrow$ S je baza prostora antisimetričnih matrica.

$\Rightarrow d(P) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$

(d) $r(P) + d(P) = n^2 \Rightarrow r(P) = \frac{1}{2}(n^2 + n)$

$B \in Im(P) \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ za neku matricu $A \Rightarrow B^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = B \Rightarrow B$ je simetrična

Obratno, ako je B sim. matrica onda je $B = \frac{1}{2}(B + B^T) \in Im(P)$.

Slika je jednaka prostoru simetričnih matrica.