# 6.1. Ravnina

- fokusiramo se na $V^3$

= računom gledano; pravac je u 2D ono što je ravnina u 3D

GEOMETRIJSKI ZOR:

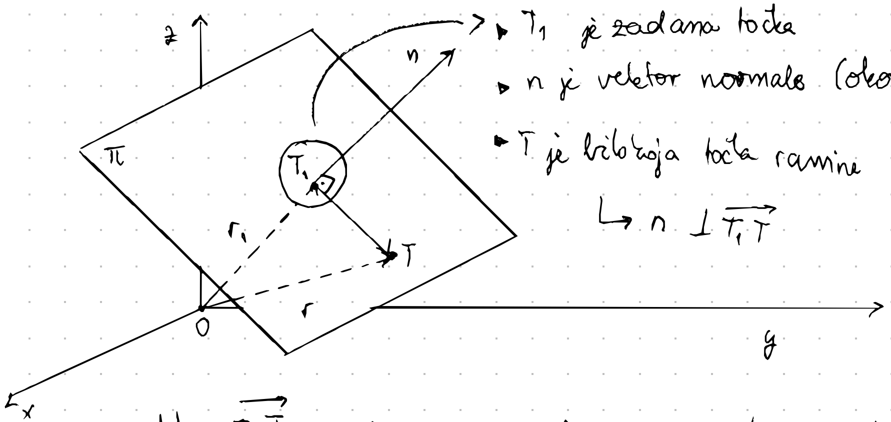
Ravnina $\pi$ u prostoru određena je na neki od:

- s tri točke koje nisu kolinearne $(x, y, z)$
- pravac i točka koja nije na pravcu (van njega)
- 2 usporedna pravca
- 2 pravca koja se sijeku

} dva pravca koja leže u toj ravnini

*ako su 2 pravca mimoilazna, oni razapinju prostor; ne tvore ravninu.

Normala: vektor koji je okomit na ravninu




- $T_1$ je zadana točka
- n je vektor normale (okomit na sve ostale
- T je bilo koja točka ravnine

↳ $n \perp \overrightarrow{T_1T}$

vektor $\overrightarrow{T_1T}$ možemo zapisati kao razliku radijvektora

$\overrightarrow{T_1T} = r - r_1 \Rightarrow$ jednadžba ravnine u vektorskom obliku $\boxed{n(r - r_1) = 0}$

$T_1(x_1, y_1, z_1)$

$T(x, y, z)$

$n = Ai + Bj + Ck$

Jednadžba ravnine zadane točkom i vektorom normale

$$\boxed{(x - x_1)A + (y - y_1)B + (z - z_1)C = 0}$$

Zad. 1.) Jednadžba ravnine?

a) $M(1,0,-1)$ ($x_1, y_1, z_1$) nema $x, y, z$

$\vec{n} = \vec{j} + 2\vec{k}$

$\hookrightarrow 0 = n(r - r_1) \Rightarrow 0 = 1(y-0) + 2(z+1)$

$\boxed{0 = y + 2z + 2}$

b) $T(1,0,2) \perp O_x$

$O_x \Rightarrow n = i \rightarrow 1$

$0 = 1(x-1)$

$0 = x - 1$

$\boxed{x = 1}$

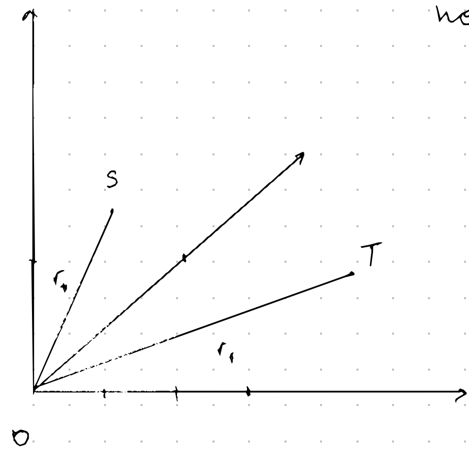
3.) $S(1,2,-1)$ $T(3,0,2) \parallel O_x$

* budući da je ravnina usporedna s $O_x$ onda će i normala biti usporedna s $O_x$ → dobijemo vektor 1 $[1,0,0]$

→ koristimo opću jednadžbu ravnine

$d = ax + by + cz$

$[a,b,c]$ je vektor normale  d je konstanta




vektor 2 $= (r - r_1)$

* $T - S \rightarrow -2, 2, 3$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} k$$

$\vec{n} = 0 \cdot i - j(3-0) + k(2+0)$ $\boxed{= -3j + 2k}$

$0 = -3(y-2) + 2(z+1)$

$0 = -3y + 6 + 2z + 2 \Rightarrow \underline{-3y + 2z + 8 = 0}$

# Opća jednadžba ravnine

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

$$Ax-Ax_1+By-By_1+Cz-Cz_1=0$$

$$Ax+By+Cz-Ax_1-By_1-Cz_1=0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{Ax+By+Cz}_{\text{vektor normale}}+D=0$$ opća jednadžba ravnine

- dovoljno je uvrstiti 2 točke i treću odrediti jednadžbom

Zadatak: $\pi$ - ravnina

1) Ravnina $\pi$ je okomita na ravnine $\pi_1$ i $\pi_2$ i prolazi $T$

$\pi_1 \equiv 2x-y+z-2=0$

$\pi_2 \equiv x+z+1=0$

$T(1,2,-1)$

$\pi=?$

normala ravnine mu je vektorski produkt koji mora biti okomit na normalu prve i normalu druge ravnine

$\pi_1 = 2i-1j+1k$

$\pi_2 = 1i+0j+1k$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-i-\vec{j}+\vec{k}}}$$

uvrstimo ravnine

$$-(x-1)-(y-2)+(z+1)=0$$

$$-x+1-y+2+z+1=0$$

$$-x-y+z+4=0$$

2) $\pi$ je $\perp$ na $\pi_1$ i prolazi točkama T i S

$\pi_1 = 3x - 2y + z - 3 = 0$

$T(2, 1, 3)$

$\longrightarrow$ $T - S$ $\quad$ $2-1, \; 1-0, \; 3+1$

$S(1, 0, -1)$ $\quad$ $1 \quad 1 \quad 4$

$$\vec{n} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \pi_1 \\ T-S \end{array}$$

$$= i(-8-1) - j(12-1) + k(3+2)$$

$\vec{n} = -9i - 11j + 5k$

↓ uvrštavamo S

$-9(x-1) - 11(y-0) + 5(z+1) = 0$

$-9x + 9 - 11y + 5z + 5 = 0$

$$\boxed{-9x - 11y + 5z + 14 = 0}$$

# Jednadžba ravnine zadane s 3 točke

$T_1(x_1, y_1, z_1)$
$T_2(x_2, y_2, z_2)$ } tri nekolinearne točke
$T_3(x_3, y_3, z_3)$

$T(x, y, z) \longrightarrow$ po volji odabrana točka ravnine

$\overrightarrow{T_1T}, \overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3} \rightarrow$ vektori leže u ravnini

$\hookrightarrow$ njihov mješoviti umnožak: $[\overrightarrow{T_1T}, \overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3}] = 0$

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{rastavom determinante}} \underline{\underline{Ax + By + Cz + D = 0}}$$

Opća jednadžba ravnine

Zad: Odredimo jednadžbu ravnine $\pi$ određenu točkama $M, N$ i $P$

$M(1, -1, 2)$ $T_1$
$N(3, 2, 0)$ $T_2$
$P(1, -2, 1)$ $T_3$

$\pi = ?$

$$\pi = \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 3-1 & 2+1 & 0-2 \\ 1-1 & -2+1 & 1-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1)(-3-2) - (y+1)(-2-0) + (z-2)(-2-0) = 0$

$\boxed{-5(x-1) + 2(y+1) - 2(z-2) = 0} \rightarrow \boxed{-5x + 2y - 2z + 11 = 0}$

# Segmentni oblik jednadžbe ravnine

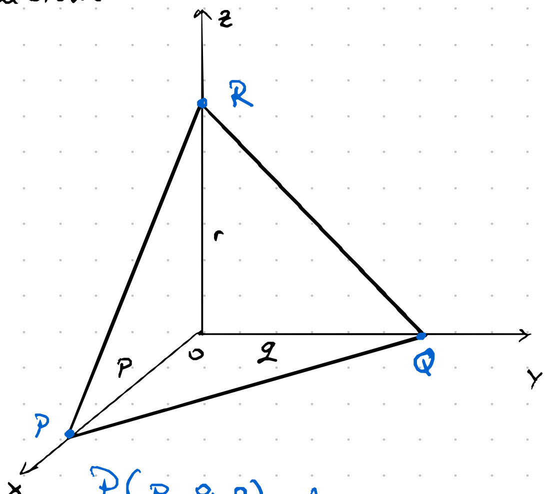
$Ax + By + Cz + D = 0$ je jednadžba ravnine $\pi$

▸ $\underline{D = 0}$ – ravnina prolazi ishodištem

▸ $D \neq 0$ dijelimo s $-D$:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

(uz pretp. da su $A, B, C \neq 0$)




↳ $\underbrace{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r}}$ $= 1$ → $P(\underline{p}, 0, 0)$, $Q(0, \underline{q}, 0)$, $R(0, 0, \underline{r})$ } segmenti

Zadatak:

2) $x + y - 3z - 12 = 0 \,/ : (12)$

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{(-\cancel{3})z}{\cancel{12}} = 1$$

$$\boxed{\frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{z}{-4} = 1}$$

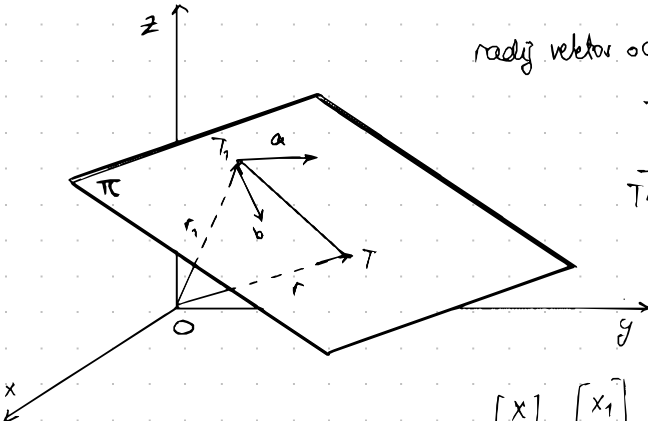
3) $3x - 2y - 6 = 0 \,/ : (6)$

$$\boxed{\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1}$$

nema odsječka na z osi

↳ paralelan s $\underline{\text{osi } z}$

# Parametarska jednadžba ravnine




radij vektor od T → $\vec{OT} = \vec{OT_1} + \vec{T_1T}$

$T_1$ je točka ravnine π

$\vec{T_1T}$ leži u π → može se rastaviti u lin. kom $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{T_1T} = \vec{OT_1} + \overbrace{\lambda a + \mu b}^{\vec{T_1T}}$$

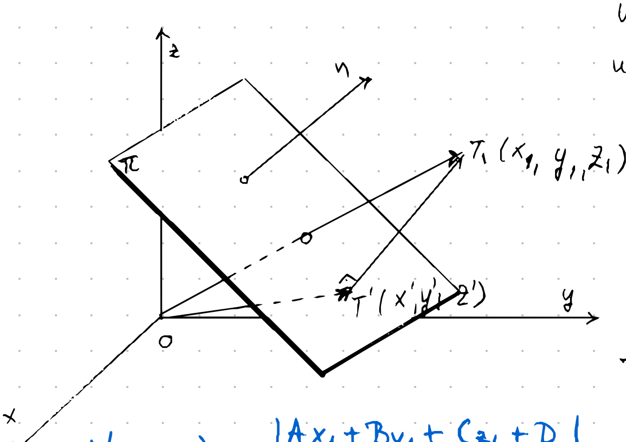
preko koordinata vektora: $\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}}_{\text{Parametarska jednadžba ravnine}}$

$$x = x_1 + \lambda a_x + \mu b_x$$

$$y = y_1 + \lambda a_y + \mu b_y$$

$$z = z_1 + \lambda a_z + \mu b_z$$

# Udaljenost točke od ravnine




udaljenost $d(T_1, \pi)$ je jednaka duljini udaljenosti $d(T_1, T')$

↳ $T'$ je projekcija $T_1$ na ravninu (okomito)

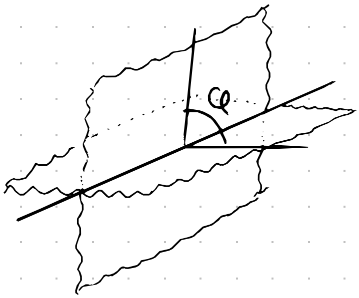
$$d(T_1, \pi) = |T_1T'|$$

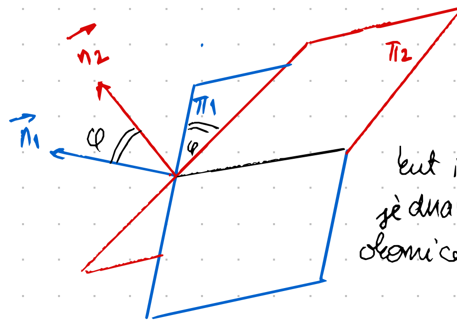
$\vec{T'T_1}$ kolinearan je s $\vec{n}$

$$d(T_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

# Kut između dviju ravnina

→ ako su ravnine paralelne ili se podudaraju ; $\varphi = 0$




kut između ravnina jednak je kutu između okomica ravnine

$$\varphi = \sphericalangle(n_1, n_2) \quad \text{ili} \quad \varphi = 180° - \sphericalangle(n_1, n_2)$$

kut je jednak kutu koji zatvaraju normale ravnina ili njegovom suplementu

$$\cos\varphi = |\cos\sphericalangle(n_1, n_2)| = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|} \longrightarrow \cos\varphi \; \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

## PARALELNE $\pi_1$ i $\pi_2$

$$n_1 = \lambda n_2$$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

## OKOMITE $\pi_1$ i $\pi_2$

$$n_1 \cdot n_2 = 0$$

$$\Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$