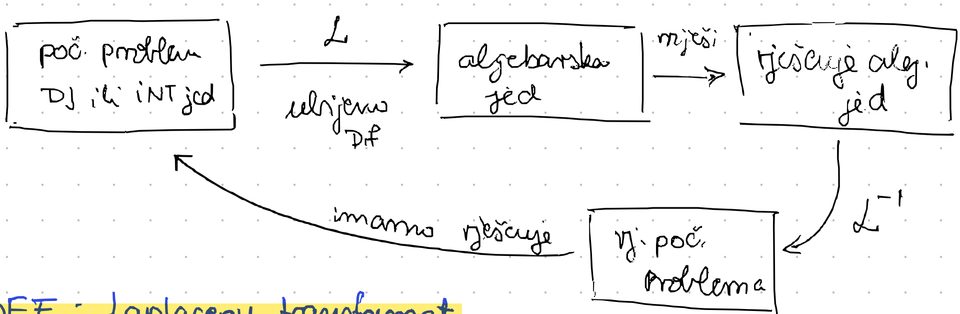
1. dio

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

(original) (slika/transformat)

$f(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F(s)$ f pridružimo F, imaju različite varijable

· dif jed. podvrgnemo Laplaceu → ublaži diferencijaciju („napadnemo")



DEF : Laplaceov transformat

• Postupak ali ono što dobijemo trans. = Laplaceov transformat

Neka je f funkcija realnog argumenta t definirana za $t > 0$ i s vrijednostima u skupu realnih ili kompleksnih brojeva.

*tj. $f(t)$ je realan ILI! kompleksan

Neka je s realni ili kompleksni parametar.

Laplaceov transformat od f je: $\boxed{F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}$

Za sve s za koje integral konvergira.

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ ili $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

f - početna fja,
original,
fja u gornjem području

F - slika,
Laplaceov transformat,
fja u donjem području

(pomoću Taylora)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\underbrace{\cos y + i\sin y}_{e^{iy}}) \qquad z \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R}$$

$$|e^z| = |e^x| \cdot |e^{iy}| \qquad |e^{iy}| = 1 = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}$$

$$\Longrightarrow |e^z| = e^x \qquad z = x + iy$$

Primjer 1.) $f(t) = t$, $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ ?$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t \, dt = \text{parcijalno int.}$$

$$u = t \longrightarrow du = 1$$
$$dv = e^{-st} \longrightarrow v = \frac{1}{-s} e^{-st}$$

$$\Big\{ = \frac{t}{-s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \, dt$$

$$\frac{t}{-s} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty \longrightarrow \lim_{t \to \infty} \left(\frac{t e^{-st}}{-s} \right) = \frac{1}{-s} \lim_{t \to \infty} \left(t \cdot e^{-st} \right) = \frac{1}{s} \lim_{t \to \infty} \left(\frac{t}{e^{-st}} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \; L'H$$

$$= \frac{1}{s^2} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{st}} \text{ – za } s > 0 \text{, limes postoji } = 0$$

$$\longrightarrow F(s) = \underset{\text{za } s>0}{0} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{-1}{s^2} \Big(\lim_{t \to \infty} \underbrace{\frac{1}{e^{st}}}_{=0} - 1 \Big)$$

$$\boxed{F(s) = \frac{-1}{s^2}}$$

BITNO: $\int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt$ $\forall s$ za koje konv.

$$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$$

Linearnost

$$\mathcal{L} \left(\alpha f(t) + \beta g(t) \right) = \alpha \mathcal{L} \left(f(t) \right) + \beta \mathcal{L} \left(g(t) \right)$$

DOKAZ: $\mathcal{L} \left(\alpha f(t) + \beta g(t) \right) = \int_0^\infty e^{-st} \left(\alpha f(t) + \beta g(t) \right) dt$

$$= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t) \, dt$$

$$= \alpha \mathcal{L} \left(f(t) \right) + \beta \mathcal{L} \left(g(t) \right)$$

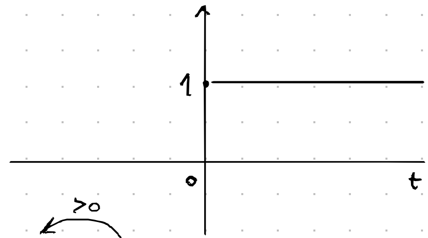
So called tablica:

$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \, dt$ za s za koje konv.	$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$	$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-\alpha}$
	$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$	$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2}$		
$\sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{i\omega}{s^2+\omega^2}$		

Primjeri Laplaceovih transformacija

1. Step funkcija

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}(u(t)) = \int_0^\infty e^{-st} u(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\overset{>0}{s}t} \cdot 1\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{-1}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty$$

$$\frac{-1}{s} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{st}} = 0, \quad s>0$$

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-st} + \frac{1}{s} e^{0}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{s}}$$

2. Eksponencijalna funkcija

$$f(t) = e^{\alpha t}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{\alpha t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t(s-\alpha)}\,dt = \frac{-1}{s-\alpha} e^{-t(s-\alpha)}\Big|_0^\infty$$

$$\to \frac{-1}{s-\alpha} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{t(s-\alpha)}} \to s-\alpha>0, \quad \underline{s>\alpha} \Rightarrow F(s) = 0 + \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s-a}}$$

$\forall$

$\alpha \in \mathbb{C}$

$\alpha = \beta + i\gamma$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{\alpha t}\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{(\beta+i\gamma)t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t(s-\beta-i\gamma)}\,dt$$

$$F(s) = \frac{e^{-t(s-\beta-i\gamma)}}{-(s-\beta-i\gamma)}\Bigg|_0^\infty$$

$$\lim_{t\to\infty} \left| \frac{e^{-(s-\beta-i\gamma)t}}{-(s-\beta-i\gamma)} \right| \to {}^{*}\, e^{i\gamma t} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \left|\frac{1}{-(s-\beta-i\gamma)}\right| \cdot \underbrace{e^{-(s-\beta)}}_{s-\beta>0 \text{ konv}} \cdot \overset{1}{\overset{\parallel}{\left|e^{i\gamma t}\right|}}$$

$$\longrightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-t(s-\beta-i\gamma)}\,dt = \frac{1}{s\underbrace{-\beta-i\gamma}_{-\alpha}} = \frac{1}{s-\alpha}$$

3. Hiperboličke funkcije

$\mathcal{L}(\operatorname{sh}(\omega t)) = ?$

$$\operatorname{Sh}(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \longrightarrow \mathcal{L}(\operatorname{sh}(\omega t)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{\omega t}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(-e^{\omega t})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+\omega} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2} \qquad s > |\omega|$$

4. Trigonometrijske funkcije

$$e^{i\omega t} \multimap \frac{1}{s - i\omega}$$ (jer $e^{\alpha t} \longrightarrow \frac{1}{s-\alpha}$ vrijedi i za kompleksne)

$$\frac{1}{s-i\omega} \cdot \frac{s+i\omega}{s+i\omega} = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t) + i\sin(\omega t) = e^{i\omega t} \multimap \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Primjer: Pronađi original

a) $\frac{1}{s^2+3}$

$\hookrightarrow \sin(\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \rightarrow \omega = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{s^2+3}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)$

b) $\frac{s+3}{s^2+5} = \frac{s}{s^2+5} + \frac{3}{s^2+5}$

$\frac{s}{s^2+5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3\cdot\sqrt{5}}{s^2+5}$

$\multimap \cos(\sqrt{5}t) + \frac{3}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t)$

5. Polinomi

$(n \in \mathbb{N})$

$$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^n \, dt = \frac{e^{-st}}{-s} \cdot t^n \Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} \cdot n \cdot t^{n-1} dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}(t^{n-1}),$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n}{s}\mathcal{L}(t^{n-1})$$

$$\mathcal{L}(t^{n-1}) = \frac{n-1}{s}\mathcal{L}(t^{n-2})$$

$$\Rightarrow t^n \multimap \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Primjer:

$$e^{2t} + \sin(3t) + t^3 \multimap \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s^2+9} + \frac{6}{s^4}$$

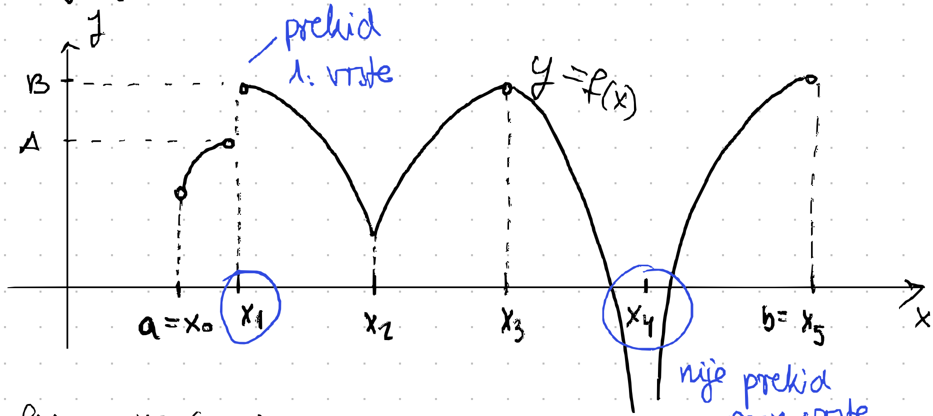
Postojanje Laplaceovog transformatora

$\rightarrow$ prigušenje $\quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$

prigušiti ne možemo rastuće eksponencijalne

$\Longrightarrow$ Lap. transf. – ne smiju rasti brže od eksponencijalne

ponavljanje:



$y = f(x) \quad x \in (a, b)$

x_1 – prekid, $\lim\limits_{x \to x_1^-} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_1^+} f(x) = B$

x_2 – neprekinuta, nije diferencijalna (nije glatka)

x_3 – prekid, ali L i D limesi su isti $\rightarrow \lim\limits_{x \to x_3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_3^-} f(x)$

x_4 – prekid $\lim\limits_{x \to x_4^{\pm}} f(x) = -\infty$ *limes ne postoji ili kažemo da je $\pm\infty$

* $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ zbilja ne postoji za razliku od $\pm\infty$

DEF:

Funkcija f na (a,b) je na dijelovima neprekinuta ako se (a,b) može rastaviti na beskonačno mnogo intervala na kojima je neprekinuta.

Prekidi prve vrste: ako su jednostrani limesi konačni

*dopušteni su

- Funkcije plohe C^1 su funkcije koje su diferencijabilne i deriv. su im neprekinute
- $C^1 \equiv$ neprekinuto diferencijabilna

DEF: Original

Za funkciju f kažemo da je original ako zadovoljava:

1) $f(t) = 0$ za $t < 0$

2) Na svakom kon. int. je neprekinuta — na konačnom intervalu — po dijelovima ili prekidi su 1. vrste

3) f je eksponencijalnog rasta

$$\exists\, M > 0,\ a \in \mathbb{R} \quad t.d. \ |f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \ \forall t > 0$$

Infimum (najmanji br., najveća donja ograda, ne mora biti u skupu) skupa svih a označavamo a_0 i nazivamo eksponentom rasta.

Primjer: $I \ (1, 2]$ Infimum $= 1$ supermum $= 2$

min ne postoji max $= 2$

Primjer:

a) $f(t) = e^{-3t} \sin t$ je, $|e^{-3t} \sin t| \leq e^{-3t}$

b) $f(t) = e^{x^2}$ nije, ne možemo nikako

c) $f(t) = e^{-x^2}$ je, koliko god dižemo potenciju

d) $f(t) = t^n, \ n \in \mathbb{N}$ je, ali to drugi put

Ponovi

a) Eksp rasta: $\exists\, M>0,\ \alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow |f(t)| \leq Me^{\alpha t},\ \forall t>0$

a_0 je infimum svih eksp. rasta

TM Eksponent rasta

Funkcija f eksponencijalnog rasta $\xleftrightarrow{}$ akko $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-at}|f(t)|$ je konačan za neku konstantu a.

Eksponent rasta $a_0 \leq a$.

Primjer: $f(t)=t^2 \longrightarrow$ pomoću teorema o eksp. rasta

a) $$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{at} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{ae^{at}} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{2}{a^2e^{at}} = 0$$

$\hookrightarrow$ za koji $a \in \mathbb{R}$, je limes konačan? $\longrightarrow a>0$, a_0 = eksp. rasta = 0

b) $f(t) = e^{-t^2}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t^2}}{e^{at}} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ fija je eksp. rasta}$$