Algebra matrica

Umnožak vektora retka i vektora stupca

$$a = [a_1 \ a_2 \cdots a_n] \in \mathbb{R}^{1\times n}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

skalarni produkt vektora u $\mathbb{R}^n$

$$a \cdot b = [a_1 \ a_2 \cdots a_n] \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \cdots a_n b_n$$

$$a \cdot b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Primjer 1.)

$$a = [3 \ 1 \ 2] \qquad b\, [2 \ -1 \ \ 1]$$

$$a \cdot b = a b^T = [3 \ \ 1 \ \ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 7$$

↳ moramo transponirati b da bismo mogli množiti

Množenje matrica

- $A (a_{ij})$ matrica tipa $m \times n$
- $B = (b_{ij})$ matrica tipa $n \times p$

da bi postojao umnožak dviju matrica, broj stupaca prve mora biti jednak broju redaka druge

$\Rightarrow AB = (c_{ij})$ matrica tipa $m \times p$

$$(AB)_{ij} = [a_{i1} \ \ a_{i2} \cdots a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Primjer 2.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(AB)_{ij} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ -1\cdot 3 + 1\cdot 1 & -1\cdot 1 + 1(-1) & -1\cdot 2 + 1\cdot 0 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1(-1) & 2\cdot 2 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 0\cdot 0 \end{bmatrix}$$

* **Neke napomene:**

- ako je definiran umnožak AB to ne znači da je definiran umnožak BA

$$\begin{matrix} A & B \\ 2\times 3 & 3\times 4 \end{matrix} \longrightarrow A\cdot B$$

- $AB \neq BA$

$$B\cdot A \qquad 3\times 4 \quad 2\times 3$$

$$4 \neq 2$$

i da uspijemo izmnožiti ne znači da će biti jednako ij

Za matrice ne vrijedi komutativnost

- iz $AB = AC$ ne slijedi $B = C$
- iz $AB = 0$ ne slijedi $A = 0$ ili $B = 0$

→ operacije s realnim brojevima nisu primjenjive na matrice (ne vrijede općenito)

Zad. 1.) izračunaj $x^T y$ i xy^T

$$x = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Primjer 3.)

$$\underset{3\times\cancel{2}}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\cancel{2}\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}} =$$

3×3

$3\cdot 2 + (-1)\cdot 0 \qquad 3\times 3 + (-1)\cdot 1 \ \ldots$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 8 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = AB$$

$$\underset{2\times\cancel{3}}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \underset{\cancel{3}\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 13 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} = BA$$

Za matrice A i B za koje vrijedi $AB = BA$ kažemo da komutiraju.

PR. 4.) $\longrightarrow$ DZ

Uvjerite se da matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A i B komutiraju

$AB = ?$ $\qquad BA = ?$

Pr. 5.)

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{nul matrica}}$$

$AB = 0$! ali $A \neq 0$ $B \neq 0$

Pr 6.)

$AB = AC$ ali $B \neq C$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jednake

Zad. 1.)

$x = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad x^T y$; $x y^T$

$$x^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad y^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^T y = \overset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \overset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & -1\cdot 3 & 1\cdot 3 \\ 1\cdot 2 & 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x y^T = \overset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \overset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \overset{6}{3\cdot 2} + \overset{-1}{1\cdot(-1)} + \overset{2}{2\cdot 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$$

SVOJSTVA MATRIČNOG MNOŽENJA

1. Asocijativnost $A \in \mathcal{M}_{mn}$, $B \in \mathcal{M}_{np}$, $C \in \mathcal{M}_{pr}$

$$(AB)C = A(BC)$$

2. Distributivnost

istog tipa

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$C(A+B) = CA + CB$$

mat dobrih odg tipova da bi ovo moglo vrijediti

moramo ova dva dokaza na ispitu (As i Dis)

3. Umnožak s jediničnom matr. $A \in \mathcal{M}_n$, $I \in \mathcal{M}_n$

$$AI = IA = A$$

ako imamo jed. mat., nju smijemo pomnožiti s bilo kojom matricom i ta se neće promijeniti (kao množenje s brojem 1)

Transponiranje produkta

$$(AB)^T = A^T B^T$$

→ ulančanost:

A tipa $m \cdot n \longrightarrow A^T$ tipa $n\,m$

B tipa $n \cdot p \longrightarrow A^T$ tipa $p\,n$

$A \cdot B = AB$ tipa $m \cdot p$

$(AB)^T$ tipa $p \cdot m \longrightarrow B^T A^T$ tipa $p \times m$

morali smo okrenuti

$$[(AB)^T]_{ik} = (AB)_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, b_{ji}$$

zbog komutat. možemo zamijeniti redoslijed

suma po nekom indeksu j'ot

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\, a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} [B^T]_{ij} \cdot [A^T]_{jk} = [B^T A^T]_{ik}$$

kako ovo vrijedi za $\forall_i \in (1-m)$ i $\forall_k \in (1-p)$

onda $(AB)^T = B^T A^T$

dvije mat su jednake ako su svake odg pozicije jednake

Napomena : $(A+B)^T = A^T + B^T$

Dokaz:

$$[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\to [(A+B)^T]_{ij} = [(A+B)]_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

$$\to [A^T + B^T]_{ij} = [A^T]_{ij} + [B^T]_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$$

$\forall\ i = 1 \ldots n \qquad \forall\ j = 1 \ldots m$

$$\Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$$

Zad.) Neka su A i B sim. matrice onda je i

AB + BA sim. mat. Dokažite!

→ ako je A sim to znači da je $A^T = A$

—"— B sim ... $B^T = B$

→ Želimo dokazati da je ovo AB + BA sim mat

$\Downarrow$

$$\boxed{(AB+BA)^T = AB+BA}$$

$$(AB+BA)^T = (AB)^T + (BA)^T$$

$$= B^T \cdot A^T + A^T \cdot B^T = B \cdot A + A \cdot B$$

asocijativnost

$$\boxed{= AB + B \cdot A}$$

Zad. 3.) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Pokažite da je

AA^T sim mat.

dvaput transponiramo je isto kao početno

Želimo dok: $(A A^T)^T = A \cdot A^T$

$$(A A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$$

Z 3. 2 neka su AB sim. Mat. Dokažite:

Zad. 3.) 2) Neka su A i B sim mat. Dokažite:

tvrdnju AB je sim mat onda i samo onda

(akko) mat A i B komutiraju ↳ ekvivalencija ⇔

$\boxed{\Rightarrow}$ pretp da je AB sim. Treba pokazati da vrijedi $AB = BA$

$(AB)^T = AB \quad (1)$

$(AB)^T = B^T A^T = BA \quad (2)$

$B^T = B$, $A^T = A$

iz (1) i (2) slijedi $AB = BA$ ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretp da $AB = BA$. Treba pok. da je $(AB)^T = AB$

$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ ✓

dvije implikacije. Lijeva povlači desnu, a desna lijevu.
Moramo dokazivati u dva smjera.

Zad. 4.) Ispitajte istinitost sljedećih tvrdnji. Dokažite ili opovrgnite protuprimjerom.)

1) $x = (\forall A \in M_n)(\forall B \in M_n)(AB = 0 \Rightarrow A = 0 \lor B = 0)$

$\downarrow \neg$

$(\exists A \in M_n)(\exists B \in M_n)(AB = 0 \land \neg(A = 0 \lor B = 0))$

$(\exists A \in M_n)(\exists B \in M_n)(AB = 0 \land A \neq 0 \land B \neq 0)$

Laž: protuprimjer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A \neq 0 \quad B \neq 0$

2) $y = (\forall A \in M_n \setminus \{0\})(\exists B \in M_n)(AB = I)$

LAŽ: protupr.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$a + c = 1$

$a + c = 0$

$\lightning$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) $\mathcal{Z} = (\forall A \in \mathcal{M}_n)(\exists B \in \mathcal{M}_n)(AB = BA)$

istina:

DOKAZ: uzmimo $B = I$

očito $AI = A$

$IA = A$

1.34 MATRIČNI POLINOM

Primjer:

A kvad. mat.

$A^2 := AA$, $A^0 := I$

$A^p := \underbrace{AA\dots A}_{p \text{ faktora}}$

$A^p A^q = A^q A^p$ $(A^p)^q = A^{p \cdot q}$

$= A^{p+q}$

Def. matrični polinom

Ako je $f(x) = \alpha_p x^p + \dots \alpha_1 x + \alpha_0$ bilo koji polinom stupnja p, tada definiramo

$$f(A) = \underbrace{\alpha_p A^p}_{\text{množenje mat. skalarom}} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 \cdot I$$

P.. 7.) Množenje

neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^3 - x + 3$

$g(x) = x^2 - 4x + 7$

$f(A) = DZ$

$$g(A) = A^2 - 4 \cdot A + 7$$

$$g(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + 7$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ +12 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A tipa $m \times n$

x vektor stupac duljine n $\left[\;\right]\}\, n$

$y = Ax$ $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= a_{11} \cdot x_1 \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n} \cdot x_n \end{aligned}$$

Želimo da mat množ. odg ~~kp~~ komp. preslikavanja