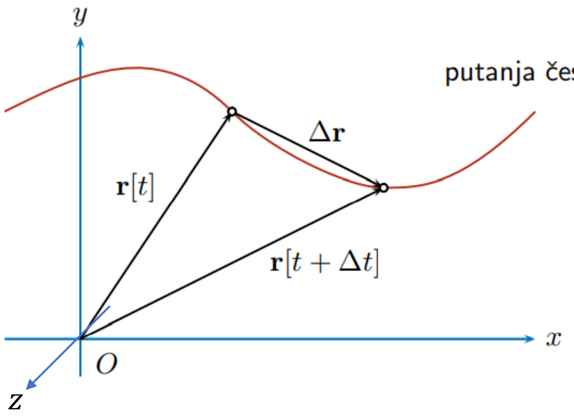
Teorijska pitanja

1. Skicirajte putanju čestice u trodimenzionalnom prostoru, označite vektor položaja u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$. Pomoću tih veličina definirajte pomak čestice, brzinu čestice, akceleraciju čestice.



Pomak $\Delta\vec{r}$ je vektor koji opisuje promjenu položaja čestice koja nastupa u vremenskom intervalu od trenutka t do trenutka $t + \Delta t$, odnosno

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}[t + \Delta t] - \vec{r}[t]$$

Neka je $\Delta\vec{r}$ pomak čestice koji se dogodio u vremenskom intervalu Δt.
Brzina čestice je vektorska veličina definirana kao limes "omjera" $\Delta\vec{r}/\Delta t$ kad Δt teži u nulu,

$$\mathbf{v}[t] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}[t + \Delta t] - \mathbf{r}[t]}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}[t]$$

što prepoznajemo kao derivaciju položaja čestice opisanog vektorskom funkcijom $\vec{r}[t]$ po vremenu t.

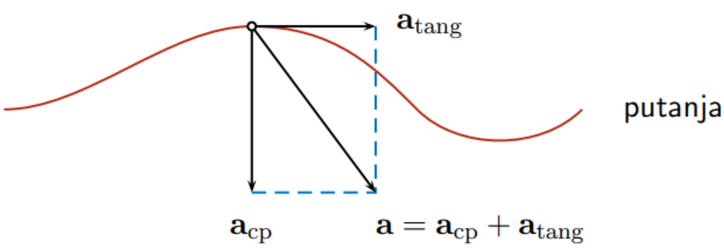
Neka je $\Delta\vec{v}$ promjena brzine koja je nastupila u vremenskom intervalu Δt. Akceleracija je vektorska veličina definirana kao limes "omjera" $\Delta\vec{v}/\Delta t$ kad $\Delta t \to 0$ teži u nulu, odnosno

$$\mathbf{a}[t] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}[t + \Delta t] - \mathbf{v}[t]}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}[t]$$

što prepoznajemo kao derivaciju brzine čestice $\vec{v}[t]$ po vremenu t.

■

2. Skicirajte dio zakrivljene putanje čestice, označite vektor akceleracije. Pomoću te skice definirajte centripetalnu akceleraciju $\vec{a}_{cp}$ i tangencijalnu akceleraciju $\vec{a}_{tang}$.



Centripetalna akceleracija (engl. *centripetal acceleration*) je prisutna kad se čestica giba duž zakrivljene putanje, okomita je na putanju i odražava promjenu smjera gibanja čestice. Možemo ju izraziti kao

$$\mathbf{a}_{\mathrm{cp}} = v\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t}, \tag{2.20}$$

gdje je v iznos brzine čestice, a $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t}$ je derivacija jediničnog vektora $\hat{\mathbf{v}}$ po vremenu.

Tangencijalna akceleracija (engl. *tangential acceleration*) leži na tangenti na putanju i govori o promjeni iznosa brzine čestice. Možemo ju izraziti kao

$$\mathbf{a}_{\text{tang}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{v}}, \tag{2.21}$$

gdje je $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ derivacija iznosa brzine po vremenu, a $\hat{\mathbf{v}}$ je jedinični vektor vektora brzine koji gleda u smjeru gibanja.

■

3. Krenuvši od izraza za akceleraciju čestice $\vec{a}(t)$, integracijom odredite vektor brzine čestice u bilo kojem trenutku. Krenuvši od izraza za brzinu čestice $\vec{v}(t)$, integracijom odredite vektor položaja čestice u bilo kojem trenutku. Primijenite ove izraze na gibanje sa stalnom akceleracijom $\vec{a}_0$.

Vektor brzine čestice u bilo kojem trenutku

$$\vec{a}[t] = \frac{d}{dt}\vec{v}[t]$$

$$d\vec{v}[t] = \vec{a}[t]dt$$

$$\vec{v}[t] - \vec{v}[t_0] = \int_{t_0}^{t} \vec{a}[t]\, dt$$

$$\vec{v}[t] = \vec{v}[t_0] + \int_{t_0}^{t} \vec{a}[t]\, dt$$

Vektor položaja čestice u bilo kojem trenutku

$$\vec{v}[t] = \frac{d}{dt}\vec{r}[t]$$

$$d\vec{r}[t] = \vec{v}[t]\, dt$$

$$\vec{r}[t] - \vec{r}[t_0] = \int_{t_0}^{t} \vec{v}[t]\, dt$$

$$\vec{r}[t] = \vec{r}[t_0] + \int_{t_0}^{t} \vec{v}[t]\, dt$$

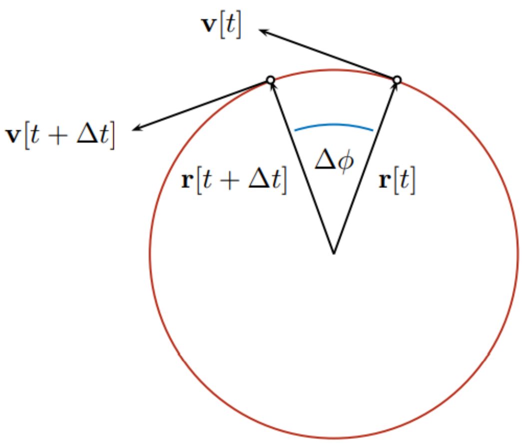
Gibanje sa stalnom akceleracijom $\vec{a}_0 = \vec{a}[t_0] = \vec{a}[t]$

$$\vec{r}[t] = \vec{r}[t_0] + \int_{t_0}^{t} [\vec{v}[t_0] + \vec{a}(t - t_0)]\, dt$$

$$\vec{r}[t] = \vec{r}[t_0] + \vec{v}[t_0](t - t_0) + \frac{\overrightarrow{a_0}}{2}(t - t_0)^2$$

■

4. Skicirajte kružnu putanju čestice, označite vektore položaja i brzine u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$. Označite kut koji je za to vrijeme „prebrisao“ vektor položaja. Pomoću tih veličina definirajte kutnu brzinu čestice i kutnu akceleraciju čestice.



Kutna brzina (engl. *angular velocity*) je vektorska fizička veličina kojom opisujemo kružno gibanje. Smjer vektora kutne brzine je po definiciji okomit na ravninu gibanja, a orijentiran je u skladu s pravilom desnog vijka odnosno onako kako bi napredovao desni vijak kad bismo ga okretali u smjeru u kojem se giba čestica. Iznos vektora kutne brzine jest limes omjeru kuta

zakreta $\Delta\phi$ izraženog u radijanima (puni krug iznosi $2\pi\,\mathrm{rad}$) i vremena Δt u kojem je zakret nastupio, kad $\Delta t \to 0$,

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}. \tag{2.23}$$

Tangencijalna i kutna akceleracija: Vektor tangencijalne akceleracije pri kružnom gibanju može se izraziti kao

$$\mathbf{a}_{\mathrm{tang}} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \tag{2.27}$$

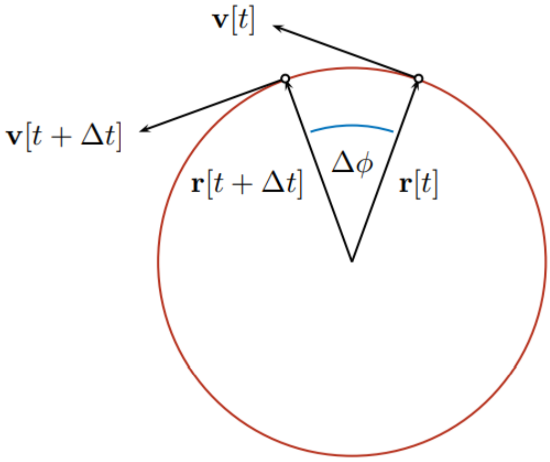
gdje vektorsku veličinu

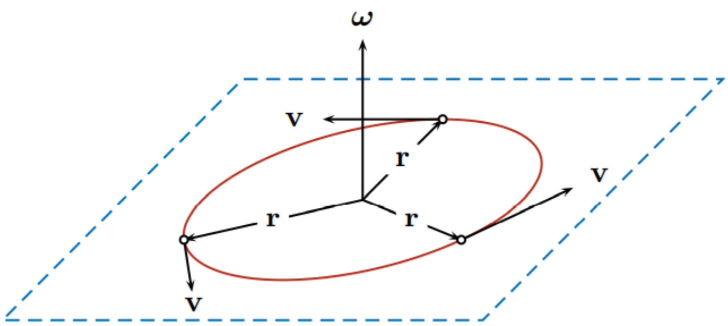
$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{2.28}$$

zovemo kutnom akceleracijom.

■

5. Skicirajte kružnu putanju čestice, označite vektore položaja i brzine u trenutku *t* i kasnijem trenutku *t + Δt*. Označite kut koji je za to vrijeme „prebrisao" vektor položaja. Pomoću tih veličina izvedite vezu između obodne i kutne brzine čestice. Napišite taj izraz u vektorskom obliku. Derivirajte izraz za obodnu brzinu i identificirajte tangencijalnu i centripetalnu akceleraciju.





S obzirom na to da pri zakretu vektora $\mathbf{r}$ za kut $\Delta\phi$ čestica duž kružnice prevali put duljine $\Delta s = R\,\Delta\phi$, iznos njene brzine možemo izraziti kao

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\,\Delta\phi}{\Delta t} = R\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = R\omega, \tag{2.24}$$

gdje je ω iznos kutne brzine.

Brzina čestice: Smjer vektora brzine se pri kružnom gibanju podudara sa smjerom vektora $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (vidi gornju sliku), a s obzirom na to da zbog okomitosti $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{r}$ vrijedi $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega R = v$, vektor brzine možemo izraziti kao

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{2.25}$$

Kako bismo deriviranjem po vremenu izračunali akceleraciju, primijenili smo pravilo za deriviranje vektorskog umnoška funkcija.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

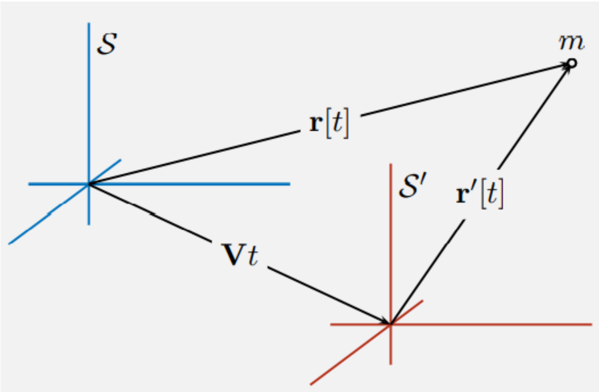
Prvi član na desnoj strani je tangencijalna akceleracija, sada pokazujemo da je drugi član centripetalna akceleracija.

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

Gdje smo koristili činjenicu da su $\vec{\omega}$ i $\vec{r}$ okomiti, tj. $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$.

■

6. Skicirajte dva referentna okvira koji se jedan u odnosu na drugi gibaju stalnom brzinom $\vec{V}$. Označite vektor položaja neke čestice u oba referentna okvira i izvedite Galileijeve transformacije za položaj, brzinu čestice i akceleraciju čestice.



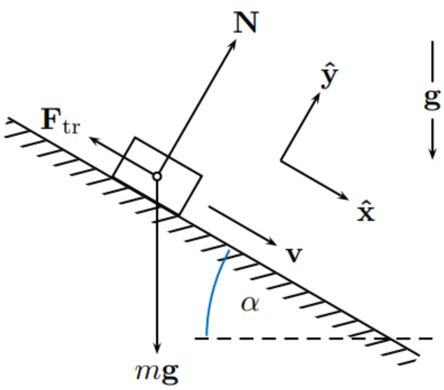
$$\vec{r}[t] = \vec{V}t + \vec{r}'[t] \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\vec{v}[t] = \vec{V} + \vec{v}'[t] \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\vec{a}[t] = \vec{a}'[t]$$

■

7. Skicirajte dijagram sila za tijelo na kosini nagiba α s kojom tijelo ima koeficijent trenja μ u slučaju kad tijelo klizi uz kosinu te u slučaju kad tijelo klizi niz kosinu. Dodajte odgovarajući koordinatni sustav i napišite jednadžbu gibanja u vektorskom obliku te po komponentama u odabranom koordinatnom sustavu.



Jednadžba gibanja u vektorskom obliku

$$m\mathbf{a} = \mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\mathrm{tr}}$$

Jednadžba gibanja po komponentama

$$ma_x\,\hat{\mathbf{x}} = N\,\hat{\mathbf{y}} + mg(\sin\alpha\,\hat{\mathbf{x}} - \cos\alpha\,\hat{\mathbf{y}}) \mp \mu_{\mathrm{d}} N\,\hat{\mathbf{x}}$$

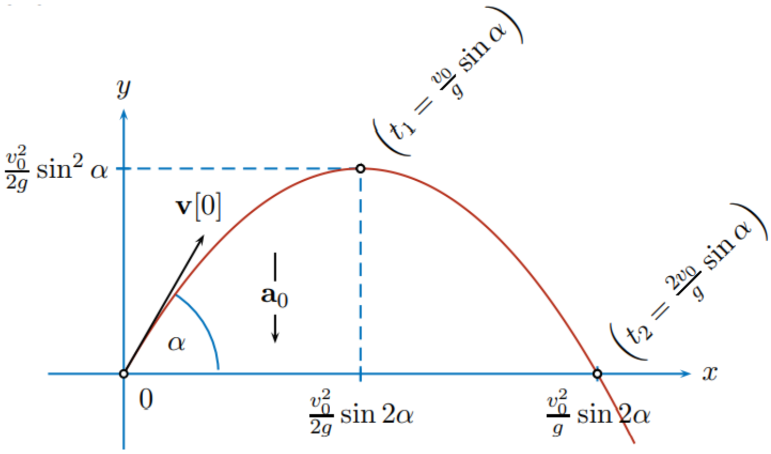
$$(v_x \gtrless 0)$$

Uočavamo tri važna slučaja:

- Gibanje *niz* kosinu (gornji predznak) pri čemu $\mu_{\mathrm{d}} < \mathrm{tg}\,\alpha$: x-komponenta akceleracije je pozitivna, iznos brzine tijela se povećava.
- Gibanje *niz* kosinu (gornji predznak) pri čemu $\mu_{\mathrm{d}} > \mathrm{tg}\,\alpha$: x-komponenta akceleracije je negativna, iznos brzine tijela se smanjuje, tijelo će se zaustaviti.
- Gibanje *uz* kosinu (donji predznak): x-komponenta akceleracije je pozitivna, iznos brzine se smanjuje, tijelo će se zaustaviti.

■

8. Skicirajte dijagram sila za projektil koji se giba pod djelovanjem gravitacijske sile bez prisutnosti sila otpora, uz zadanu početnu brzinu iznosa v_0 pod kutem α u odnosu na horizontalnu ravninu. Dodajte odgovarajući koordinatni sustav i napišite jednadžbu gibanja u vektorskom obliku te po komponentama u odabranom koordinatnom sustavu. Riješite jednadžbu gibanja.



$$\mathbf{a}_0 = -g\,\hat{\mathbf{y}}, \qquad \mathbf{v}[0] = v_0(\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\alpha\,\hat{\mathbf{y}}), \qquad \mathbf{r}[0] = 0,$$

$$\mathbf{v}[t] = \mathbf{v}[0] + \mathbf{a}_0 t = v_0\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + (v_0\sin\alpha - gt)\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{r}[0] + \mathbf{v}[0]t + \frac{\mathbf{a}_0}{2}t^2 = v_0 t\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \left(v_0 t\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2\right)\,\hat{\mathbf{y}}.$$

Koordinate položaja su $x[t] = v_0 t\cos\alpha$ i $y[t] = v_0 t\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2$, a eliminacijom vremena iz njih dobivamo jednadžbu putanje koju možemo napisati u obliku

$$y[x] = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha).$$

Trenutak t_1 u kojem se tijelo nalazi u najvišoj točki putanje dobivamo iz uvjeta da je y-komponenta brzine tom trenutku jednaka nuli,

$$v_y[t_1] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t_1 = \frac{v_0}{g}\sin\alpha.$$

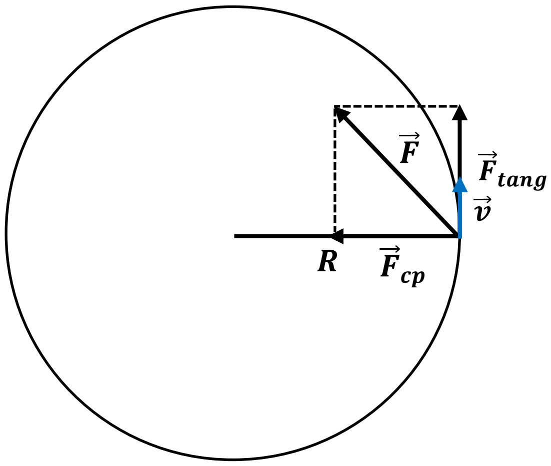
Trenutak t_2 u kojem se tijelo nalazi na visini s koje je bačeno dobivamo iz uvjeta da je y-koordinata položaja jednaka nuli,

$$y[t_2] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t_2 = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha.$$

Udaljenost te točke od ishodišta koju još zovemo "dometom projektila" dobivamo uvrštavanjem trenutka t_2 u izraz za x-koordinatu čestice ili pronalaženjem nultočke parabole koja predstavlja putanju čestice.

■

9. Skicirajte kružnu putanju čestice, označite polumjer zakrivljenosti i vektor brzine u nekom trenutku. Označite silu koja djeluje na tijelo i napišite iznos i smjer koji sila mora imati da bi omogućila gibanje tijela prikazano na slici.



$$\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_{cp} = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\vec{F}_{tang} = m\vec{a}_{tang} = -m(\vec{\alpha} \times \vec{r})$$

$$F_{cp} = m\omega^2 R$$

$$F_{tang} = m\alpha R$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{cp} + \vec{F}_{tang}$$

$$F = |\vec{F}_{cp} + \vec{F}_{tang}| = \sqrt{F_{cp}^2 + F_{tang}^2}$$

$$F = mR\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

■

10. Napišite izraz za rad koji obavi sila $\vec{F}$ kada se pod njenim djelovanjem tijelo pomakne za vektor pomaka $d\vec{r}$. Napišite i dokažite teorem o radu i kinetičkoj energiji.

Rad sile: Ako pod djelovanjem sile $\mathbf{F}$ čestica napravi diferencijal pomaka $\mathrm{d}\mathbf{r}$, kažemo da je sila obavila diferencijal rada $\mathrm{d}W$ definiran izrazom

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{4.1}$$

$$W_{PQ} = \int_P^Q \mathrm{d}W = \int_{\mathbf{r}_P}^{\mathbf{r}_Q} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}, \tag{4.2}$$

Teorem o radu i kinetičkoj energiji: Rad ΔW koji obavi rezultantna sila djelujući na česticu jednak je promjeni kinetičke energije čestice ΔK,

$$\Delta W = \Delta K. \tag{4.5}$$

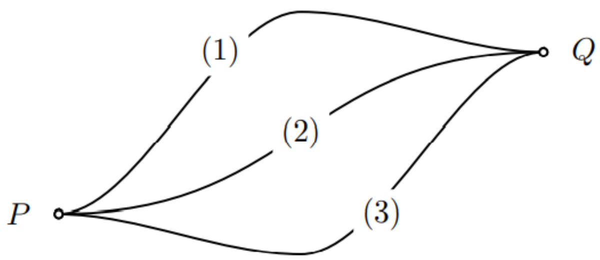
Teorem dokazujemo pokazujući jednakost diferencijala rada i diferencijala kinetičke energije,

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{v} = m\frac{\mathrm{d}v^2}{2} = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathrm{d}K, \tag{4.6}$$

gdje smo najprije koristili Newtonovu jednadžbu gibanja $\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$, a zatim jednakost $\mathrm{d}v^2 = \mathrm{d}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{v}$. Integracijom $\int \mathrm{d}W = \int \mathrm{d}K$ od početnog do konačnog stanja slijedi (4.5), čime je teorem dokazan.

■

11. Skicirajte nekoliko mogućih putanja za putanje čestice između točaka A i B u polju sile $\vec{F}(\vec{r}, t)$. Pomoću skice definirajte konzervativnu silu. Primijenite tu definiciju na izvod izraza za potencijalnu energiju (a) pri sabijanju ili rastezanju opruge konstante elastičnosti k i (b) pri podizanju tijela mase m na visinu h u gravitacijskom polju.



Konzervativna sila $\vec{F}[\vec{r}]$ – sila opisana poljem $\vec{F}[\vec{r}]$ koje ne ovisi o vremenu i koje ima svojstvo da za bilo koji odabir točaka P i Q rad W_{PQ} koji sila obavi pomičući česticu od P do Q ne ovisi o odabiru putanje.

$$W_{PQ}^{(1)} = W_{PQ}^{(2)} = \cdots = W_{PQ}$$

Odnosno, $\oint dW = 0$

Rad W_{PQ} koji konzervativna sila obavi duž neke putanje od točke P do točke Q i rad W_{QP} koji ona obavi duž iste putanje u suprotnom smjeru jednaki su po apsolutnoj vrijednosti i suprotnog su predznaka,

$$W_{QP} + W_{PQ} = 0$$

a s obzirom na to da rad konzervativne sile ne ovisi o odabiru putanje, gornja jednakost vrijedi i kada na putu od P do Q i u povratku od Q do P koristimo različite putanje.

(a)

Silu koja djeluje na česticu duž osi x po opruzi konstante k opisujemo poljem $F_x[x] = -kx$.

Potencijalna energija čestice u polju konzervativne sile $\vec{F}[\vec{r}]$ je skalarna veličina $U[\vec{r}]$ definirana kao rad koji je potrebno obaviti kako bismo svladavajući konzervativnu silu prenijeli česticu od dogovorenog referentnog položaja $\vec{r_0}$ do položaja $\vec{r}$.

$$U[\vec{r}] = -\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{F}\left[\vec{r'}\right] \cdot d\vec{r'}$$

$$U[x] = -\int_0^x F_x[x']\,\mathrm{d}x' = -\int_0^x (-kx')\,\mathrm{d}x' = k\int_0^x x'\,\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F_x[x] = -\frac{\partial}{\partial x}U[x] = -kx$$

(b)

Pri podizanju tijela mase m na visinu h sila koja djeluje na česticu duž osi z u polju gravitacije $F_t = -mg$.

Uzimajući $\vec{r_0} = 0$ kao referentnu točku imamo

$$U[\mathbf{r}] = -\int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}' = -\int_0^{\mathbf{r}} (-mg\,\hat{\mathbf{z}})\cdot(\mathrm{d}x'\,\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}y'\,\hat{\mathbf{y}} + \mathrm{d}z'\,\hat{\mathbf{z}}) = mg\int_0^z \mathrm{d}z' = mgz$$

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}] = -\frac{\partial U}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}} = -\frac{\partial}{\partial z}(mgz)\,\hat{\mathbf{z}} = -mg\,\hat{\mathbf{z}}$$

■

12. Definirajte mehaničku energiju te objasnite u kojim okolnostima je ta veličina očuvana. Opišite primjer sustava u kojem je mehanička energija očuvana te primjer sustava u kojem ona nije očuvana.

Mehanička energija čestice koja se giba pod djelovanjem konzervativne sile je zbroj njene kinetičke i njene potencijalne energije.

$$E = K + U$$

Ukoliko istovremeno na česticu djeluje nekoliko konzervativnih sila, U predstavlja zbroj odgovarajućih potencijalnih energija.

Očuvanje mehaničke energije: Mehanička energija čestice koja se giba isključivo pod djelovanjem konzervativnih sila je stalna u vremenu (ne mijenja se) te kažemo da je ona očuvana fizička veličina.

$$E = konst.$$

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$$

Na osnovu teorema o radu i kinetičkoj energiji imamo $\Delta K = \Delta W$, a na osnovu definicije potencijalne energije imamo $\Delta U = -\Delta W$, gdje je ΔW rad koji obavi konzervativna sila.

Sustavi u kojima je mehanička energija očuvana:

- matematičko njihalo (bez otpora zraka)
- slobodan pad (bez otpora zraka)
- uteg na opruzi (bez otpora zraka)

Sustavi u kojima mehanička energija nije očuvana:

- klizanje tijela uz prisutnost sile otpora
- kosi hitac uz prisutnost otpora zraka

■

13. Za zadanu potencijalnu energiju sustava $U(\vec{r})$ odredite silu koja djeluje na česticu u sustavu. Primijenite izraz za jednodimenzionalni sustav $\big(U(x)\big)$ i pomoću toga objasnite pojmove stabilne i nestabilne ravnoteže.

Diferencijal potencijalne energije možemo izraziti kao

$$dU = -\vec{F}[\vec{r}] \cdot d\vec{r}$$

gdje je $\vec{F}[\vec{r}] \cdot d\vec{r}$ diferencijal rada koji obavi konzervativna sila. Taj nam izraz dopušta da polje konzervativne sile izrazimo kao negativnu derivaciju potencijalne energije po položaju.

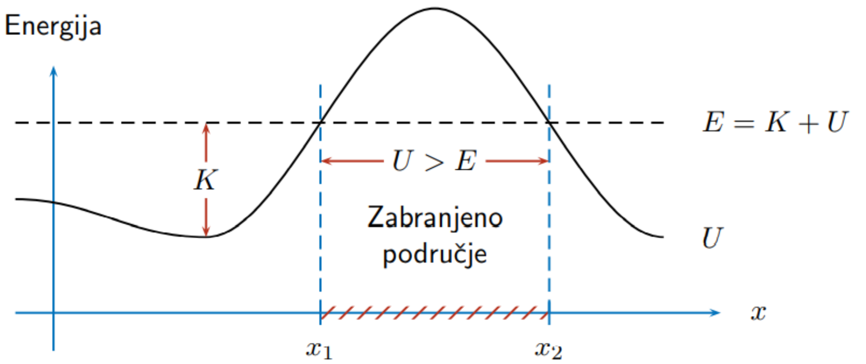
$$\vec{F}[\vec{r}] = -\frac{d}{d\vec{r}} U[\vec{r}]$$

$$\vec{F}[\vec{r}] = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{F}[\vec{r}] = -\vec{\nabla} U[\vec{r}]$$

U jednodimenzionalnom sustavu vrijedi:

$$F_x[x] = -\frac{\partial}{\partial x} U[x]$$



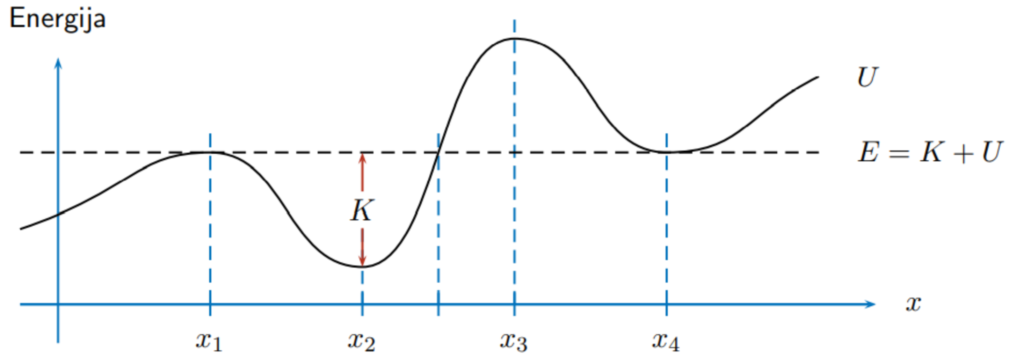
Na dijagramu prepoznajemo sljedeće:

- U područjima $x < x_1$ i $x > x_2$ mehanička energija čestice $E = K + U$ veća je od potencijalne energije U. To znači da je kinetička energija K veća od nule odnosno da se čestica giba u jednom ili u drugom smjeru (sam dijagram energije ne govori o smjeru gibanja).
- U području $x_1 < x < x_2$ potencijalna energija U veća je od mehaničke energije $E = K + U$. S obzirom na to da kinetička energija K ne može biti negativna, čestica se ne može naći u ovom području. To područje zovemo zabranjenim područjem.
- U području u kojem je $E > U$, smjer gibanja u kojem se potencijalna energija čestice smanjuje odgovara smjeru u kojem kinetička energija čestice raste, a to znači da na česticu djeluje sila upravo tog smjera odnosno smjera u kojem se potencijalna energija smanjuje. Taj zaključak je u skladu s izrazom za x-komponentu sile

$$F_x[x] = -\frac{\partial}{\partial x} U[x]$$

koji slijedi iz (4.15). Ovdje možemo uočiti da u neposrednoj blizini zabranjenog područja na česticu djeluje “odbojna sila”.

- Kad čestica usporavajući naiđe na rubnu točku zabranjenog područja (ovdje su to točke $x = x_1$ i $x = x_2$), njena kinetička energija jednaka je nuli što znači da ona u tom trenutku miruje. Međutim, kako na nju djeluje “odbojna sila”, njena akceleracija gleda u smjeru iz kojeg je čestica došla i čestica se počinje gibati unazad. Zbog toga rubne točke zabranjenog područja zovemo točkama obrata.



Uočavamo sljedeće:

- U x_1 i x_3 potencijalna energija ima maksimume što znači da su to točke nestabilne ravnoteže.
- U x_2 i x_4 potencijalna energija ima minimume što znači da su to točke stabilne ravnoteže.
- Čestica s energijom E naznačenom na dijagramu može trajno mirovati u x_1 i u x_4, ali ne i u x_2 gdje ima kinetičku energiju veću od nule kao ni u x_3 koja se nalazi u zabranjenom području.

Stabilna ravnoteža – kinetička energija čestice koja se giba u nekom smjeru (prethodno je pomaknuta iz položaja ravnoteže) počne se smanjivati, a čestica naiđe na točku obrata i počne se vraćati prema točki ravnoteže.

Netabilna ravnoteža – kinetička energija čestice koja se giba u nekom smjeru (prethodno je pomaknuta iz položaja ravnoteže) počne se povećavati.

■

14. Definirajte količinu gibanja $\vec{p}$ sustava čestica te je povežite sa zbrojem vanjskih sila koje djeluju na sustav. Pokažite da je količina gibanja očuvana ako je zbroj vanjskih sila koje djeluju na sustav jednak nuli.

Količina gibanja sustava čestica čije su mase m_i i koje se gibaju brzinama $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, N$, je zbroj količina gibanja $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ svih čestica u sustavu,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_N = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \tag{5.3}$$

Vremenska derivacija količine gibanja sustava jednaka je zbroju vanjskih sila koje djeluju na čestice sustava,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \right) = \sum_i \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}, \tag{5.4}$$

dok unutarnje sile u sustavu nemaju nikakav utjecaj. U gornjem računu smo najprije koristili definiciju (5.3) i nakon toga jednadžbu gibanja i-te čestice (5.2). U posljednjem koraku smo prepoznali da je član $\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}$ jednak nuli jer je svaka sila $\mathbf{F}_{ij}$, prema trećem Newtonovom zakonu, u zbroju poništena njoj suprotnom silom $\mathbf{F}_{ji}$.

Očuvanje količine gibanja sustava čestica: Prema (5.4), ako je zbroj vanjskih sila koje djeluju na čestice nekog sustava jednak nuli, onda je količina gibanja tog sustava očuvana veličina (stalna u vremenu),

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{ext})} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{5.5}$$

Ta tvrdnja još je poznata kao *zakon o očuvanju količine gibanja sustava čestica*.

■

15. Definirajte vektor položaja središta mase sustava čestica $\vec{r}_{cm}(t)$. Pokažite da je brzina središta mase sustava razmjerna ukupnoj količini gibanja čestica u sustavu. Pokažite da je ukupna vanjska sila na sustav čestica $(\vec{F}_{ext})$ povezana s akceleracijom središta mase $(\vec{a}_{ext})$.

Središte mase sustava čestica (engl. *centre of mass*, kratica CM) je točka u prostoru čiji je položaj definiran izrazom

$$\mathbf{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \tag{5.6}$$

gdje je m masa sustava čestica (5.1), a $\mathbf{r}_i$ i m_i su položaj i masa i-te čestice u sustavu.

Brzina središta mase: Deriviranjem (5.6) po vremenu pokazuje se da je brzina središta mase razmjerna količini gibanja sustava,

$$\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{m} \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{p}}{m}, \tag{5.7}$$

$$\mathbf{p}_{\mathrm{cm}} = \mathbf{p} = m\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}. \tag{5.8}$$

Jednadžba gibanja središta mase: Korištenjem (5.8) i (5.4) sastavljamo jednadžbu gibanja središta mase sustava čestica,

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{ext})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p} = m \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t} = m\,\mathbf{a}_{\mathrm{cm}}. \tag{5.9}$$

■

16. Napišite jednadžbu gibanja za masu na opruzi i izvedite njezino opće rješenje. Napišite izraze za brzinu i akceleraciju mase.

Jednadžba gibanja: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ili $m\ddot{x} = -kx$ (skalarni oblik)

Početni uvjeti: $x(0) = A \qquad \dot{x}(0) = 0$

Zapravno rješavamo Cauchyjev problem.

Pretpostavimo rješenje $x(t) = X_0 e^{\alpha t}$ i uvrstimo ga u skalarni oblik.

$$mX_0\alpha^2 e^{\alpha t} + kX_0 e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$$

$$x(t) = X_0 e^{\pm i\omega_0 t}$$

$$x(t) = X_1 e^{-i\omega_0 t} + X_2 e^{i\omega_0 t}$$

Konstante X_1 i X_2 određuju se iz početnih uvjeta.

$$x(0) = A = X_1 + X_2$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -i\omega_0 X_1 + i\omega_0 X_2 \Rightarrow X_1 = X_2 = \frac{A}{2}$$

Opće rješenje:

$$x(t) = \frac{A}{2}\left(e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}\right) = Acos\omega_0 t$$

$$x(t) = Acos(\omega_0 t + \phi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Brzina i akceleracija

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d}{dt}v(t) = -\omega_0^2 Acos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x(t)$$

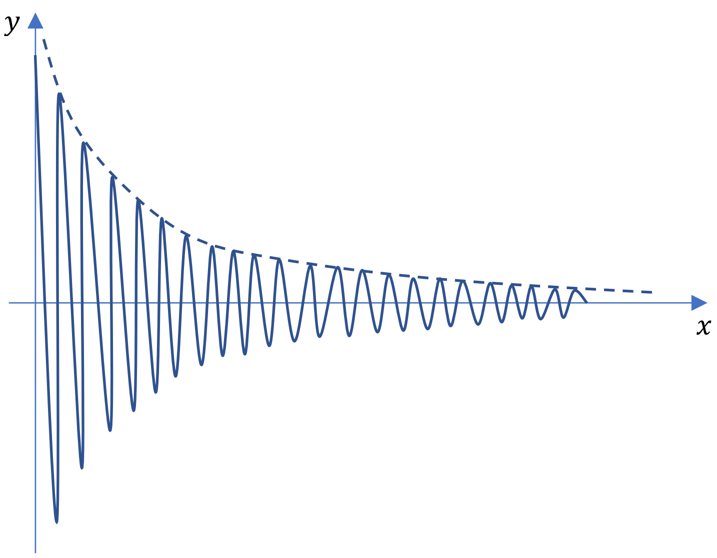
■

17. Napišite jednadžbu gibanja oscilatora prigušenog silom razmjernom brzini te izvedite njena tri rješenja (ovisno o jakosti prigušenja).

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Podkritično prigušenje $\delta < \omega_0$



$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(-1)(\omega_0^2 - \delta^2)}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \equiv -\delta \pm i\omega$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

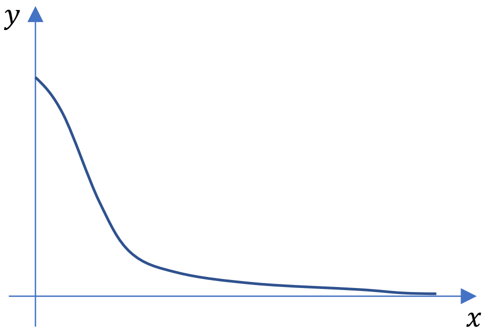
$$x_1(t) = X_1 e^{(-\delta + i\omega)t}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{(-\delta - i\omega)t}$$

$$x(t) = X_1 e^{(-\delta + i\omega)t} + X_2 e^{(-\delta - i\omega)t}$$

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\, cos(\omega t + \phi)$$

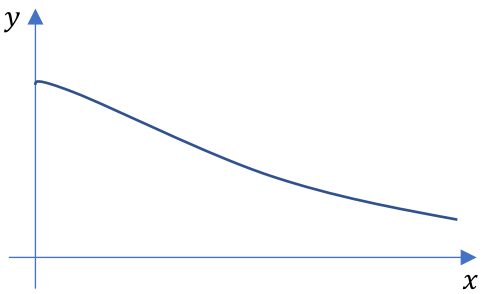
Kritično prigušenje $\delta = \omega_0$



$$\alpha_{1,2} = -\delta$$

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{\alpha t} = (a_1 + a_2 t)e^{-\delta t} \qquad a_{1,2} \epsilon \mathbb{R}$$

Nadkritično prigušenje $\delta > \omega_0$



$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm q$$

$$q = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = (a_1 e^{qt} + a_2 e^{-qt})e^{-\delta t} \qquad a_{1,2} \epsilon \mathbb{R}$$

■

18. Krenuvši od izraza za ukupnu energiju prigušenog oscilatora, pokažite da energija u vremenu opada s kvadratom brzine.

$$E_{uk} = E_k + E_p$$

$$\frac{dE_{uk}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(E_k(\dot{x}) + E_P(x)\big) = \frac{d\dot{x}}{d\dot{x}}\frac{d}{dt}E_k + \frac{dx}{dx}\frac{d}{dt}E_p =$$

$$= \frac{d\dot{x}}{dt}\frac{d}{d\dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x$$

$$= (m\ddot{x} + kx)\dot{x}$$

$$= -b\dot{x}^2$$

■

19. Krenuvši od njegove općenite definicije, izvedite izraz za Q-faktor prigušenog oscilatora.

Logaritamski dekrement – veličina kojom je moguće izraziti jakost podkritičnog prigušenja oscilatora, tj. prirodni logaritam omjera dvaju uzastopnih maksimalnih otklona oscilatora.

$$\lambda = ln\frac{x[t]}{x[t+T]} = \ln\frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = \delta T$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Pri vrlo slabom prigušenju:

$$\omega = \omega_0 \qquad \lambda \approx \frac{2\pi\delta}{\omega_0}$$

Q-faktor (faktor kakvoće) – veličina kojom iskazujemo jakost podkritičnog prigušenja oscilatora, tj. recipročna vrijednost prosječnog relativnog gubitka energije oscilatora u vremenskom intervalu koji odgovara promjeni faze oscilatora od jednog radijana.

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\Delta E}{E}\right|_{Period} = \frac{1}{2\pi}\frac{E[t]-E[t+T]}{E[t]} = \frac{1}{2\pi}\left(1-e^{-2\delta T}\right) \approx \frac{\delta T}{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega}{2\delta} \approx \frac{\omega_0}{2\delta}$$

■

20. Napišite jednadžbu gibanja prisilnog titranja, izvedite njeno rješenje i izraz za rezonantnu frekvenciju (najveća amplituda).

Jednadžba gibanja harmonijskog oscilatora s prigušenjem:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_P \cos \omega_P t$$

Partikularno rješenje:

$$x(t) = A\cos(\omega_P t - \phi) \qquad A = A(\omega_P)$$

Deriviramo:

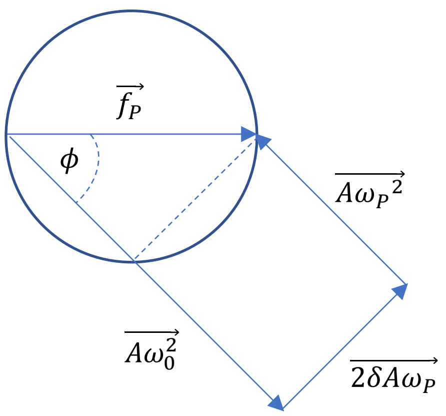
$$\dot{x}(t) = -A\omega_P \sin(\omega_P t - \phi) = A\omega_P \cos\left(\omega_P t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -A{\omega_P}^2 \cos(\omega_P t - \phi) = A{\omega_P}^2 \cos(\omega_P t - \phi + \pi)$$

Uvrstimo u jednadžbu:

$$A{\omega_P}^2 \cos(\omega_P t - \phi + \pi) + 2\delta A\omega_P \cos\left(\omega_P t - \phi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A\cos(\omega_P t - \phi) = f_P \cos \omega_P t$$

$$\overrightarrow{A{\omega_P}^2} + \overrightarrow{2\delta A\omega_P} + \overrightarrow{\omega_0^2 A} - \overrightarrow{f_P} = 0$$



Pitagorin poučak:

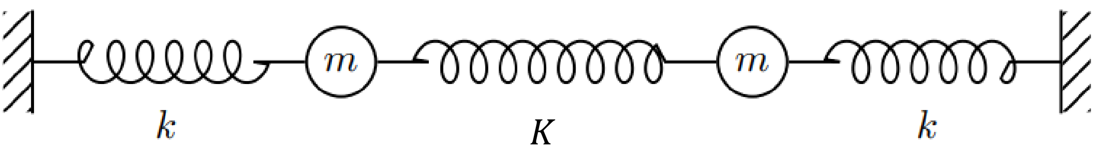
$$(f_P)^2 = (2\delta A\omega_P)^2 + (A\omega_0^2 - A{\omega_P}^2)^2$$

$$A = \frac{f_P}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_P^2)^2 + 4\delta^2\omega_P^2}}$$

$$tg\,\phi = \frac{2\delta\omega_P}{\omega_0^2 - \omega_P^2}$$

■

21. Napišite jednadžbu gibanja simetričnog vezanog oscilatora $| - k - m - K \; - m - k - |$, izvedite frekvencije (vlastitih modova) titranja te napišite opća rješenja $x_1(t)$ i $x_2(t)$.



1. vlastiti mod

- tijela titraju jednakom amplitudom, $x_1 = x_2$
- srednja opruga K ne mijenja svoju duljinu
- frekv. titranja jednaka je onoj koju bismo imali kada bismo središnju oprugu zamijenili krutom šipkom
- tijelo mase $2m$ titra na dvije konstante opruge k, tj.

$$\omega_A = \sqrt{\frac{2k}{2m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- otkloni: $x_1[t] = x_2[t] = A\,cos[\omega_A t + \phi_A]$

2. vlastiti mod

- tijela su u protufazi $x_1 = -x_2$
- kada se bočne opruge rastegnu za Δx i djeluju silom iznosa $k\Delta x$ središnja se sabije za $2\Delta x$ i djeluje silom iznosa $2K\Delta x$
- ukupna sila koja djeluje na tijela je $(k + 2K)\Delta x$, a frekvencija:

$$\omega_B = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}$$

-otkloni:

$$x_1[t] = A\,cos[\omega_A t + \phi_A] + B\,cos[\omega_B t + \phi_B]$$
$$x_2[t] = A\,cos[\omega_A t + \phi_A] - B\,cos[\omega_B t + \phi_B]$$

■

22. Krenuvši od općeg rješenja za titranje simetričnog vezanog oscilatora $|-k-m-K\ -m-k-|$, $x_1(t) = A\,cos(\omega_A t + \phi_A) - B\,cos(\omega_B t + \phi_B)$, $x_2(t) = A\,cos(\omega_A t + \phi_A) + B\,cos(\omega_B t + \phi_B)$, izvedite osnovnu frekvenciju i frekvenciju udara za gibanje s početnim uvjetima $x_1(0) > 0$, $v_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $v_2(0) = 0$. (Moguće su varijacije zadanih početnih uvjeta.)

Početni uvjeti

$x_1[0] = a \qquad x_2[0] = 0$

$v_1[0] = 0 \qquad v_2[0] = 0$

su zadovoljeni za početne faze $\phi_A = \phi_B = 0$ i amplitude $A = B = \frac{a}{2}$.

$$x_1[t] = \frac{a}{2}\,cos\omega_A t - \frac{a}{2}\,cos\omega_B t$$

$$x_2[t] = \frac{a}{2}\,cos\omega_A t + \frac{a}{2}\,cos\omega_B t$$

Uočavamo titranje složeno od jednakih amplituda i bliskih frekvencija, odnosno pojavu udara.

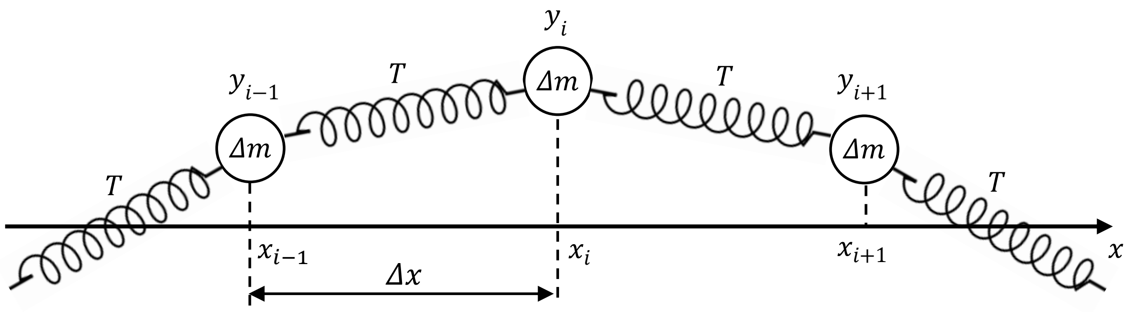
$$\overline{\omega} = \frac{\omega_A + \omega_B}{2} \qquad \delta = \frac{\omega_A - \omega_B}{2}$$

$$f_u = f_B - f_A$$

$$x_1[t] = a\sin(\delta t)\sin(\overline{\omega} t) \qquad x_2[t] = a\cos(\delta t)\cos(\overline{\omega} t)$$

■

23. Izvedite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) za transverzalno titranje niza masa povezanih napetim oprugama.



Uže linijske gustoće μ i napetosti T kao beskonačni lanac čestica razmaknute za Δx.

Mase $\Delta m = \mu \Delta x$ su povezane oprugama napetosti T.

$$\Delta m \ddot{y}_i = T \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + T \frac{y_{i-1} - y_i}{\Delta x}$$

$$\ddot{y}_i = \frac{T}{\mu} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x_i, t] = \frac{T}{\mu} \frac{y[x_i + \Delta x, t] - 2y[x_i, t] + y[x_i - \Delta x, t]}{(\Delta x)^2}$$

Prepoznajemo da je $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ desne strane jednak 2. parcijalnoj derivaciji $y[x, t]$ po x, slijedi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x, t] = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} y[x, t] = 0 \qquad v^2 = \frac{T}{\mu}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x, t] - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y[x, t] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} y[x, t] - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x, t] = 0$$

■

24. Izvedite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) za longitudinalno titranje niza masa povezanih oprugama.

Elastični štap ili stupac stlačivog fluida gustoće ρ i površine poprečnog presjeka S duž kojeg putuje longitudinalni val prikazujemo kao lanac čestica koje su u ravnotežnom stanju razmaknute za Δx, mase su $\Delta m = \rho S \Delta x$.

$$\Delta m \ddot{\xi}_i = -k(\xi_i - \xi_{i+1}) - (\xi_i - \xi_{i-1})$$

$$\ddot{\xi}_i = \frac{E}{\rho} \frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Pretpostavljamo da je $\xi[x, t]$ glatka funkcija, slijedi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi[x, t] = \frac{E}{\rho} \frac{\xi[x_i + \Delta x, t] - 2\xi[x_i, t] + \xi[x_i - \Delta x, t]}{(\Delta x)^2}$$

Prepoznajemo da je $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ desne strane jednak 2. parcijalnoj derivaciji $\xi[x, t]$ po x, slijedi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi[x, t] - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi[x, t] = 0$$

■

25. Napišite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) vala, dokažite da su funkcije oblika $f(x - vt)$ i $g(x + vt)$ njezina opća rješenja. Pokažite u kojem se smjeru svako od tih rješenja giba.

$y[x,t] = f[x - vt] + g[x + vt]$ najopćenitije rješenje

$$y[x,t] = f[x - vt]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 f''$$

$$f[x_1 - vt_1] = f[x_2 - vt_2]$$

$$x_1 - vt_1 = x_2 - vt_2$$

$$x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1)$$

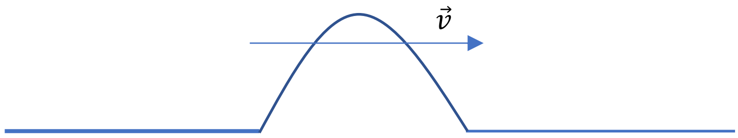
$x_2 > x_1$ $f[x - vt]$

$x_2 < x_1$ $g[x + vt]$

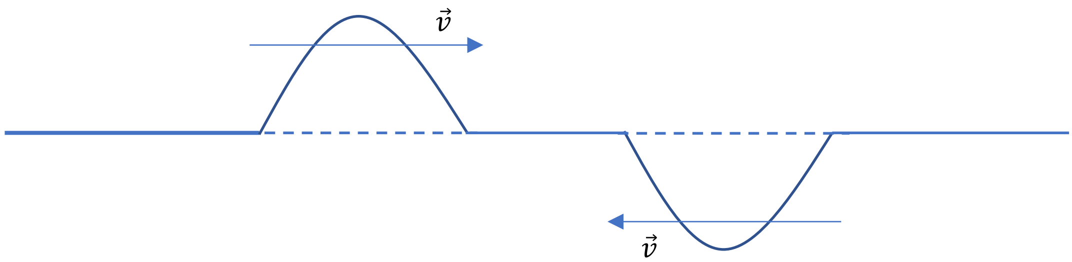
■

26. Izvedite izraz za prosječnu kinetičku energiju harmoničkog progresivnog vala. Napišite izraze za potencijalnu i ukupnu energiju harmoničkog progresivnog vala, diskutirajte.

Polazimo od vala čiji je otklon od ravnotežnog položaja dan s $f[x - vt]$ koji putuje udesno.



Tom valu dodajemo $-f[x + vt]$ koji se šiti u suprotnom smjeru, superpoziciji valova odgovara energija $2E$.



$$y[x,t] = f[x - vt] - f[x + vt]$$

$$y[x,0] = 0$$

Budući da se sredstvo nalazi u ravnotežnom stanju, $E_P = 0$.

$$2E = \int \frac{1}{2}(\dot{y}[x,0])^2\, dm$$

Brzinu čestice izračunamo iz izraza

$$\frac{d}{dt} y[x,t] = -vf'[x - vt] - vf'[x + vt]$$

$$\frac{d}{dt} y[x,0] = -2vf'[x] = \dot{y}[x,0]$$

Element sredstva pišemo kao $dm = \mu\, dx$.

$$E = \mu v^2 \int (f'[x])^2\, dx$$

$$\mu = \rho S$$

$$E = \rho S v^2 \int (f'[x])^2\, dx$$

Linijska gustoća:

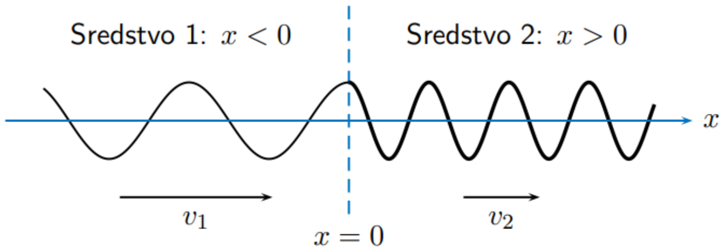
$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2$$

Srednja snaga:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 v$$

■

27. Za progresivni transverzalni harmonički val koji nailazi na granicu sredstava izvedite izraze za amplitude transmitiranog i reflektiranog vala.



Linijska gustoća sredstva 1 je manja od linijske gustoće sredstva 2, tj. $\mu_1 < \mu_2$.

Napetost T je svugdje jednaka.

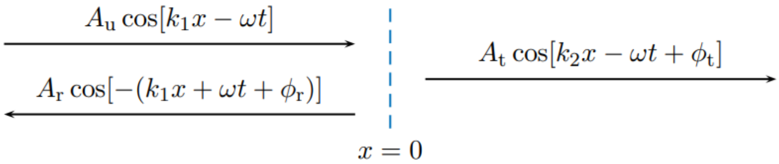
Iz $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ slijedi $v_1 > v_2$.

Lijevom stranom užeta nailazi upadni harmonijski val koji se na granici sredstava $x = 0$ dijelom reflektira. Nastaje reflektirani val koji se giba unazad i zajedno s upadnim valom čini superpoziciju prikazanu na lijevoj strani, a dijelom prelazi i na desnu stranu kojom nastavlja putovati kao transmitirani val.

Ta tri harmonijska vala titraju jednakom frekvencijom ω, ali njihovi valni brojevi $k_{1,2}$, odnosno valne duljine $\lambda_{1,2}$, ovise o brzini.

$$k_{1,2} = \frac{\omega}{v_{1,2}} = \omega\sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{T}} = \frac{2\pi}{\lambda_{1,2}}$$

Upadni, reflektirani i transmitirani val možemo opisati izrazima



ili zapisati u kompleksnom obliku

$$\begin{aligned} y_1[x,t] &= A_\mathrm{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 x - \omega t)} + A_\mathrm{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1 x + \omega t + \phi_\mathrm{r})}, \qquad && x \le 0 \\ y_2[x,t] &= A_\mathrm{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2 x - \omega t + \phi_\mathrm{t})}, && x \ge 0 \end{aligned}$$

Amplitude $A_r > 0$ i $A_t > 0$ i fazne pomake ϕ_r i ϕ_t reflektiranog i transmitiranog vala određujemo na osnovu spojnih uvjeta.

Prvi spojni uvjet zahtijeva da uže bude neprekinuto odnosno da pri $x = 0$ otklon superpozicije valova u sredstvu 1 bude jednak otklonu vala u sredstvu 2.

$$y_1[0,t] = y_2[0,t]$$

$$A_u + A_r e^{-i\phi_r} = A_t e^{i\phi_t}$$

Drugi spojni uvjet zahtijeva da ukupna sila koja djeluje na element sredstva mase Δm koji se nalazi na samom spojištu teži u nulu kad $\Delta m \to 0$.

$$y_1'[0,t] = y_2'[0,t]$$

$$k_1 A_u - k_1 A_r e^{-i\phi_r} = k_2 A_t e^{i\phi_t}$$

$$A_t e^{i\phi_t} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_u, \qquad A_r e^{-i\phi_r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_u$$

Desna strana prve jednadžbe je pozitivan realan broj, $\phi_t = 0$, a transmitirani val titra u fazi s upadnim.

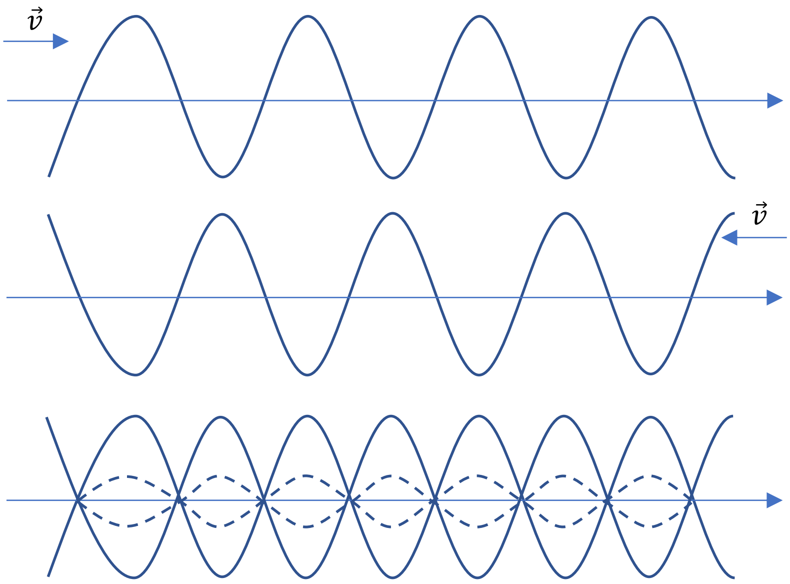
$k_2 > k_1 \Rightarrow \mu_2 > \mu_1$, izraz je negativan, $\phi_r = \pi$

$k_2 < k_1 \Rightarrow \mu_2 < \mu_1$, izraz je pozitivan, $\phi_r = 0$

■

28. Pokažite da superpozicijom dvaju progresivnih harmoničkih valova može nastati stojni val.

Kada se 2 putujuća vala jednake frekv. i amplitude šire istim sredstvom u suprotnim smjerovima, njihovom superpozicijom nastaje ω kojem ne prepoznajemo gibanje ω_0 u jednom ili drugom smjeru već titranje do njihovog ravnotežnog položaja.



$$y_1[x,t] = A cos[kx - \omega t]$$

$$y_2[x,t] = A cos[kx + \omega t]$$

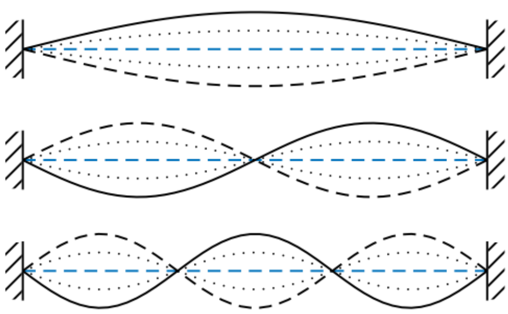
Primjenom trigonometrijskih identiteta dobivamo

$$y[x,t] = y_1[x,t] + y_2[x,t] = 2A cos(kx)\cos(\omega t)$$

Gdje je $2A cos(kx)$ amplituda stojnog vala.

■

29. Izvedite izraze za frekvencije i valne duljine stojnih valova na užetu linijske gustoće μ, napetom silom T i duljine L, s učvršćenim krajevima.



$n = 1 \quad L = \frac{\lambda}{2} \quad \lambda_1 = 2L \quad f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$n = 2 \quad L = \frac{2\lambda}{2} \quad \lambda_2 = L \quad f_2 = \frac{2}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$n = 3 \quad L = \frac{3\lambda}{2} \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}L \quad f_3 = \frac{3}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad \lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Čvorovi:

$x_n = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Trbusi:

$x_n = (2n-1)\frac{\lambda}{4}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

■

30. Izvedite izraz promjenu frekvencije zvuka za:

(a) izvor koji se giba direktno prema ili od nepomičnog prijemnika

Tijekom perioda T valna fronta V_1 se pomakne za vT, a izvor za v_iT.

Udaljenost između valnih fronti: $vT - v_iT$.

Gibanje prema prijemniku

$$f_p = \frac{v}{\lambda_P} = \frac{v}{vT - v_iT} = \frac{r}{\frac{v}{f_i} - \frac{v_i}{f_i}} = f_i\frac{v}{v - v_i}$$

Gibanje od prijemnika

$$f_p = f_i\frac{v}{v + v_i}$$

Općenito:

$$f_p = f_i\frac{v}{v \mp v_i}$$

(b) prijemnik koji se giba direktno prema ili od nepomičnog izvora

$$f_p = f_i = \frac{\frac{vt}{\lambda}}{t} = \frac{v}{\lambda}$$

Prijemnik se giba prema izvoru

$$f_p = \frac{\frac{vt + v_pt}{\lambda}}{t} = \frac{v + v_p}{\lambda} = f_i\frac{v + v_p}{v}$$

Prijemnik se giba od izvora

$$f_p = f_i\frac{v - v_p}{v}$$

Općenito:

$$f_p = f_i\frac{v \pm v_p}{v}$$

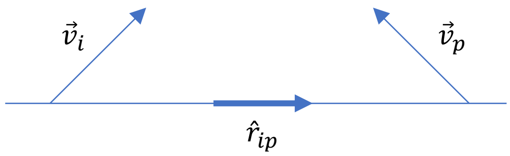
(c) kada se i izvor i prijemnik gibaju direktno jedan prema drugome ili jedan od drugoga

$$f_p = f_i\frac{v \pm v_p}{v \mp v_i}$$

Kada se izvor i prijemnik približavaju predznak je takav da se frekv. povećava $\left(\frac{+}{-}\right)$.

Kada se udaljavaju predznak je takav da se frekv. smanjuje $\left(\frac{-}{+}\right)$.

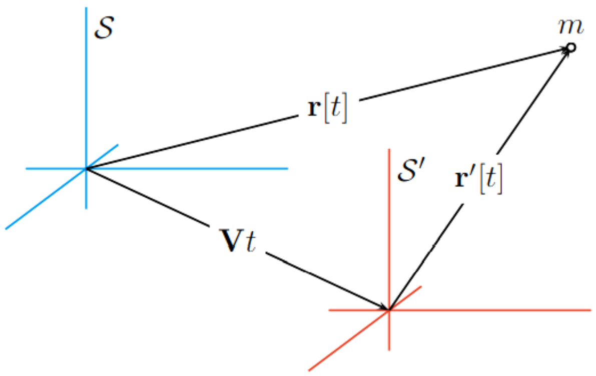
Općenito:



$$f_p = f_i \frac{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot \vec{v}_p}{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot \vec{v}_i}$$

31. Skicirajte dva inercijalna referentna sustava koji se jedan u odnosu na drugi gibaju brzinom $\vec{v}$. Napišite izraze za Galileijeve i Lorentzove transformacije za tri prostorne i jednu vremensku koordinatu u tim sustavima, te za komponente brzine čestice. Detaljno objasnite razlike izmedu tih transformacija.

Galileijeve transformacije

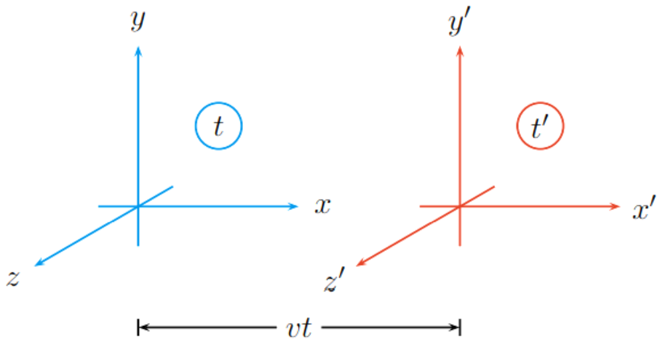


$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{V}t + \mathbf{r}'[t]$$

$$\mathbf{v}[t] = \mathbf{V} + \mathbf{v}'[t]$$

$$\mathbf{a}[t] = \mathbf{a}'[t]$$

Lorentzove transformacije



$$x' = \gamma(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

$$x = \gamma(x' + vt'), \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \gamma(t' + vx'/c^2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Komponente brzine čestice

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \qquad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}, \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}, \qquad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}$$

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}, \qquad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}, \qquad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}, \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}$$

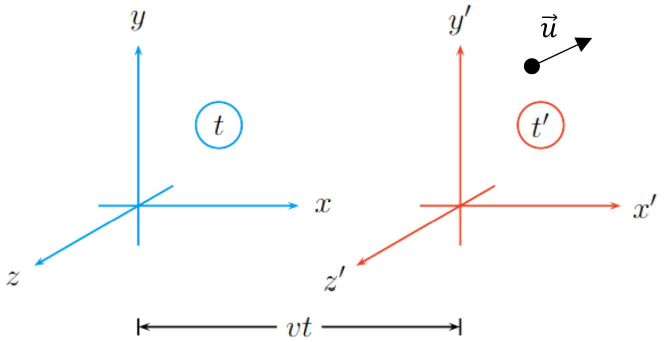
Za razliku od Galilejevih transformacija, Lorentzove transformacije su sukladne s postulatom specijalne relativnosti prema kojemu je iznos brzine svjetlosti u vakuumu jednak za svakog opažača koji se u inercijskom referentnom okviru giba stalnom brzinom, bez obzira na brzinu izvora svjetlosti u odnosu na samog opažača.

Poput Galilejevih transformacija, Lorentzove transformacije su linearne transformacije prostorvremenskih koordinata, ali osim prostornih koordinata one djeluju i na vremensku koordinatu.

Kada je $v \ll c$, Lorentzove transformacije postaju istovjetne Galilejevim transformacijama.

■

32. Skicirajte dva inercijalna referentna sustava koji se jedan u odnosu na drugi gibaju brzinom $\vec{v}$ i česticu koja se giba brzinom $\vec{u}$ mjerenom u jednom od sustava. Izvedite Lorentzove transformacije za komponente brzine čestice.



Transformacije

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}, \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}$$

možemo izvesti iz transformacija razlika koordinata. Najprije nalazimo izraz za omjer:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta t - v\,\Delta x/c^2)}{\Delta t} = \gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

Taj rezultat nam služi kako bismo omjer $\Delta x'/\Delta t'$ koji prepoznajemo kao komponentu brzine u'_x izrazili s pomoću komponente u_x.

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x'}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\,\Delta t)}{\Delta t}\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^{-1} = \gamma\,(u_x - v)\;\gamma^{-1}\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$$

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y'}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^{-1} = u_y\,\gamma^{-1}\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}$$

Analogno dobijemo u'_z.

■

33. Uvedite pojam vlastitog vremena i vlastite duljine. Pomoću uvedenih pojmova i Lorentzovih transformacija izvedite izraze za kontrakciju duljine i dilataciju vremena.

Vlastito vrijeme – vrijeme koje protječe za opažača koji miruje u nekom inercijskom referentnom okviru.

Ako mirni opažač u referentnom okviru S' u nekom trenutku pokrene i ubrzo nakon toga zaustavi zaporni sat, vremenski razmak $\Delta t'$ medu tim događajima koje on izmjeri odgovara njegovom vlastitom vremenu, a s obzirom na to da on miruje, prostorni razmak medu tim dogadajima je $\Delta x' = 0$.

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\,\Delta x'/c^2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c} < 1$$

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$ dilatacija vremena

Vlastita duljina – zamislimo mirni štap položen paralelno s x' -osi u referentnom okviru S' . S obzirom na to da štap miruje, x' - koordinate njegovih krajeva su stalne u vremenu, a razliku tih koordinata $\Delta x'$ smatramo vlastitom duljinom štapa.

U referentnom okviru S u odnosu na koji se taj štap giba, smisleno je govoriti o duljini štapa Δx jedino ako njegove krajeve shvatimo kao istovremene događaje. To znači da je u S vremenski razmak medu krajevima štapa jednak nuli, $\Delta t = 0$.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\,\Delta t)$$

$$\Delta x' = \gamma\,\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}\,\Delta x' = \sqrt{1-(v/c)^2}\,\Delta x'$$ kontrakcija duljine

■

34. Napišite izraz za relativističku količinu gibanja i relativističku energiju. Primijenite teorem o radu i kinetičkoj energiji i izvedite izraz za relativističku kinetičku energiju.

$$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + K$$

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}W = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{p} = \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{p}$$

Pretpostavimo da sila djeluje u smjeru gibanja čestice i uvrstimo relativističku količinu gibanja:

$$dK = udp = u\,d\left(\frac{mu}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right) = \frac{mudu}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^3}}$$

$$K = \int_0^u \frac{mudu}{\sqrt{\frac{(c^2-u^2)^3}{c^6}}} = (\gamma-1)mc^2$$

■

35. Pokažite da se nabijena čestica u homogenom magnetskom polju može gibati po kružnici, odredite polumjer kružnice (za zadano: m, q, v i B).

$$\vec{F_n} = q\vec{v}x\vec{B}$$

$$dW = \overrightarrow{F_n}\,d\vec{l} = q(\vec{v}x\vec{B})\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

$$\vec{v} \perp \vec{B}$$

$$F_{Cp} = F_n = qvB = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

■

36. Izvedite izraz za silu na element vodiča kojim teče struja I, a nalazi se u magnetskom polju $\vec{B}$.

$$\vec{F}_n = q\vec{v}x\vec{B}$$

$$d\vec{F} = \left(q\vec{v}x\vec{B}\right)nSd\vec{l}$$

$$I = qvnS$$

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = I\int_P^R d\vec{l}\,x\vec{B}$$

■

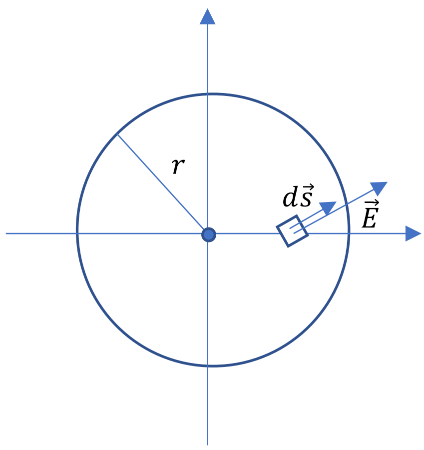
37. Pomoću Gaussovog zakona izvedite: polje točkastog naboja, polje unutar i izvan jednoliko nabijene kugle, polje jednoliko nabijene ravne tanke žice, polje jednoliko nabijene plohe.

Točkasti naboj

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S E \cdot ds \cdot cos\, 0^0 = E\oint_S ds = E \cdot 4r^2\pi$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

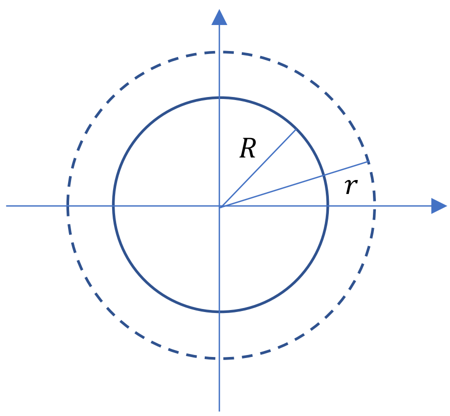


Jednoliko nabijena kugla

Izvan kugle

$$E \cdot 4r^2\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

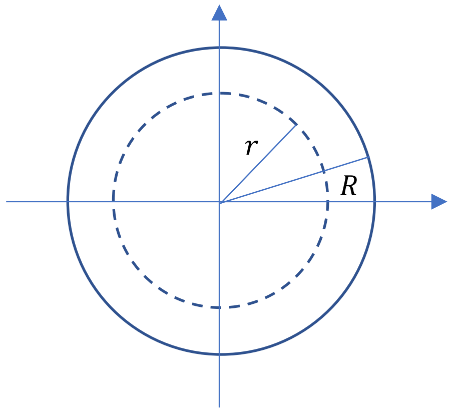
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$



Unutar kugle

$$E \cdot 4r^2\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}r$$



Jednoliko nabijena ravna tanka žica

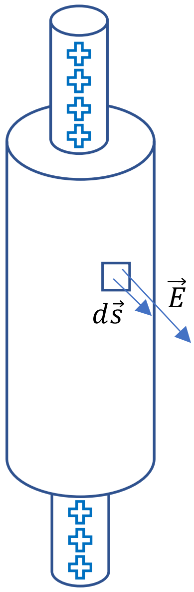
$$\oint_s \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_s \vec{E}\,d\vec{s} = \oint_{baza} \vec{E}\,d\vec{s} + \oint_{plašt} \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} \perp d\vec{S} \;=> \oint_{baza} \vec{E}\,d\vec{s} = 0$$

$$E2r\pi h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2r\pi\varepsilon_0}$$



Jednoliko nabijena ploha

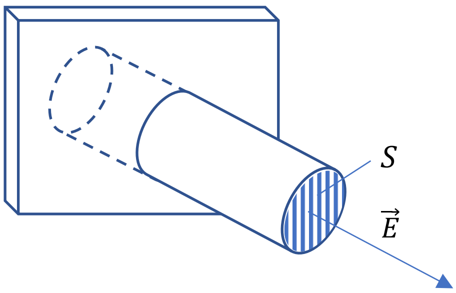
$$\oint_s \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_s \vec{E}\,d\vec{s} = \oint_{baza} \vec{E}\,d\vec{s} + \oint_{plašt} \vec{E}\,d\vec{s} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{baza} \vec{E}\,d\vec{s} = 0$$

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



■

38. Izvedite izraz za elektromotornu silu pri gibanju vodiča u magnetskom polju.

$$F_e = qE$$

$$F_m = qvB$$

$$F_e = F_m$$

$$qE = qvB$$

$$E = vB = \frac{U}{l} / \cdot l$$

$$U = Blv$$

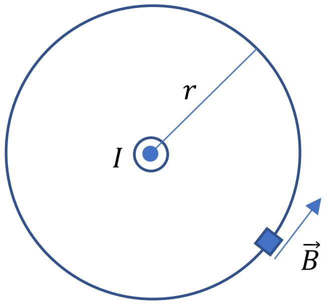
$$\Phi_B = Blx$$

$$|\varepsilon_i| = \frac{d\Phi_B}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv \qquad \varepsilon_i = \vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

■

39. Koristeći Ampere-Maxwellov zakon izračunajte magnetsko polje beskonačnog ravnog tankog vodiča, a zatim učinite isto primjenom Biot-Savartovog zakona.

Ampere-Maxwell



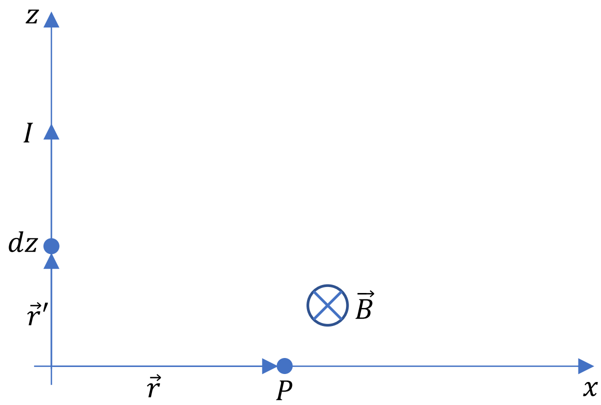
$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{r} = \mu_0 I$$

$$B \cdot 2r\pi = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r\pi}$$

Biot-Savart



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I d\vec{r} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$d\vec{r}' = dz\vec{k}$$

$$\vec{r} = r\vec{\imath}$$

$$\vec{r}' = z\vec{k}$$

$$|\vec{r} - r'| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{r} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ r & 0 & -z \end{vmatrix} = r\vec{\jmath}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\jmath} \quad /\int$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot r\vec{\jmath} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot r\vec{\jmath} \cdot \frac{2}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{\jmath}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r\pi}$$

■

40. Krenuvši od Maxwellovih jednadžbi u vakuumu izvedite valnu jednadžbu za $\vec{E}$ ili $\vec{B}$.

Maxwellove jednadžbe u vakuumu bez naboja i struja:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$ identitet (divergencija divergencije uvijek jednaka nuli)

Valna jednadžba za električno polje $\vec{E}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Valna jednadžba za magnetsko polje $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

■

41. Napiši izraz za vektore $\vec{E}$ i $\vec{B}$ ravnog linearno polariziranog elektromagnetskog vala te pokažite da su oni rješenja odgovarajućih valnih jednadžbi. Skicirajte vektore $\vec{E}$ i $\vec{B}$ i smjer njihovog širenja.

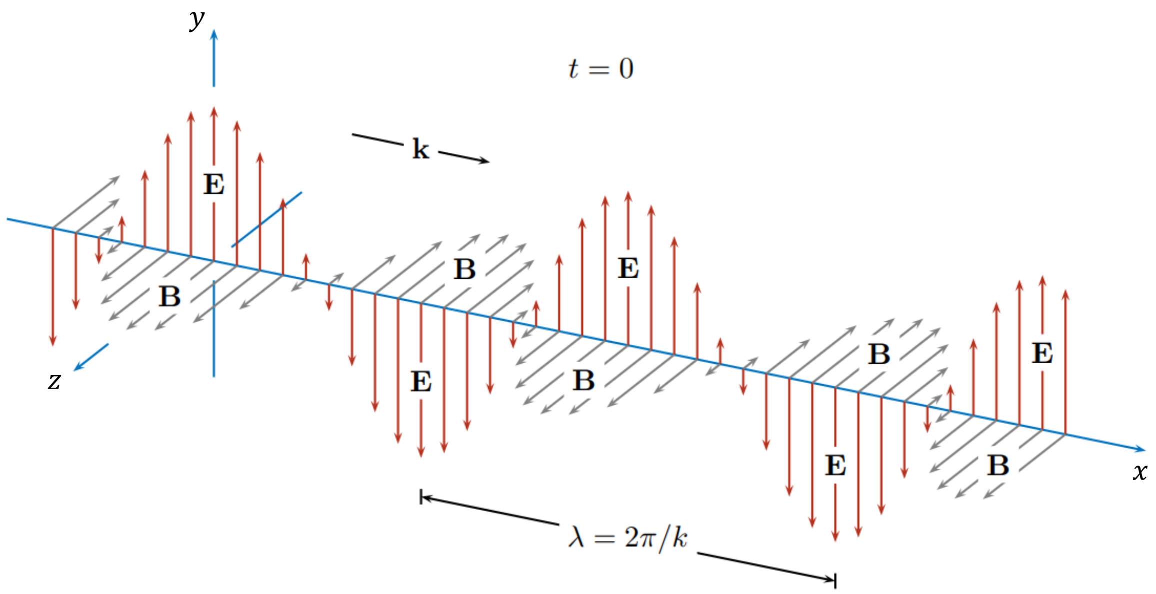
$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \qquad \frac{\omega}{k} = c \qquad \frac{E_0}{B_0} = c$$

$$\vec{E}(x,t) = \hat{\jmath} E_0 \cos[kx - \omega t]$$

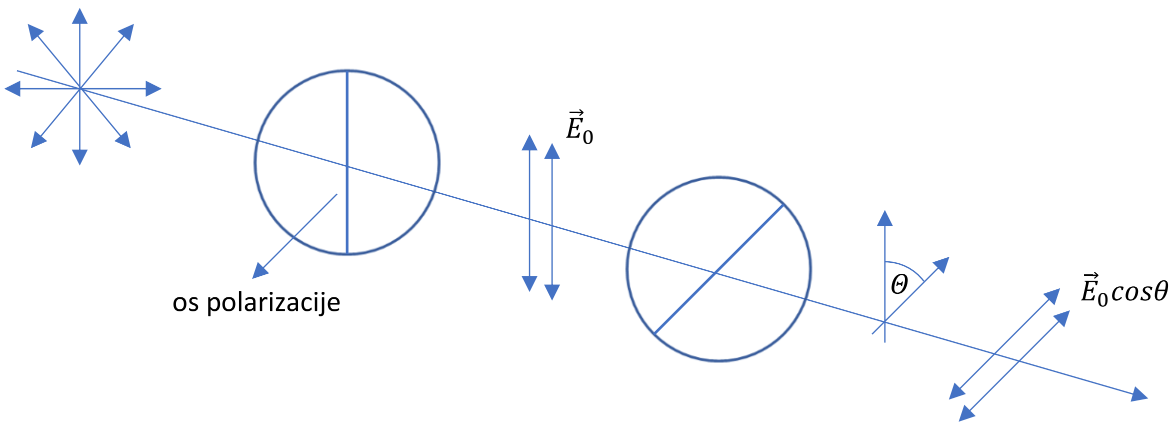
$$\vec{B}(x,t) = \hat{k} B_0 \cos[kx - \omega t]$$



■

42. Opišite polarizaciju elektromagnetskog vala (koje se polje koristite za opis, uloga polarizatora) i izvedite Malusov zakon.

Nepolarizirana svjetlost prolazi kroz polarizator i preostaje samo električna komponenta okomita na smjer širenja vala.



$I_{trans} = I_0 \, cos^2 \, \Theta$

Za nepolariziranu svjetlost:

$\langle cos^2 \, \theta \rangle = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad I_{trans} = \frac{1}{2} I_0$

■

43. Napišite Poyntingov vektor ravnog vala čije je električno polje dano izrazom $\vec{E}(x,t) = E_0 \vec{j} \cdot cos(\omega t - kx)$. Konačni izraz mora sadržavati smjer, iznos i jedinicu.

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

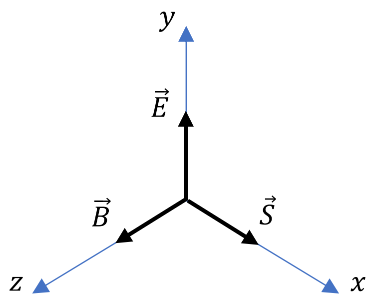
$\vec{E}(x,t) = \hat{\jmath} E_0 \, cos[kx - \omega t]$

$\vec{B}(x,t) = \hat{k} B_0 \, cos[kx - \omega t]$

$\vec{s}(x,t) = \hat{\imath} c \varepsilon_0 E_0^2 \, cos^2[kx - \omega t]$

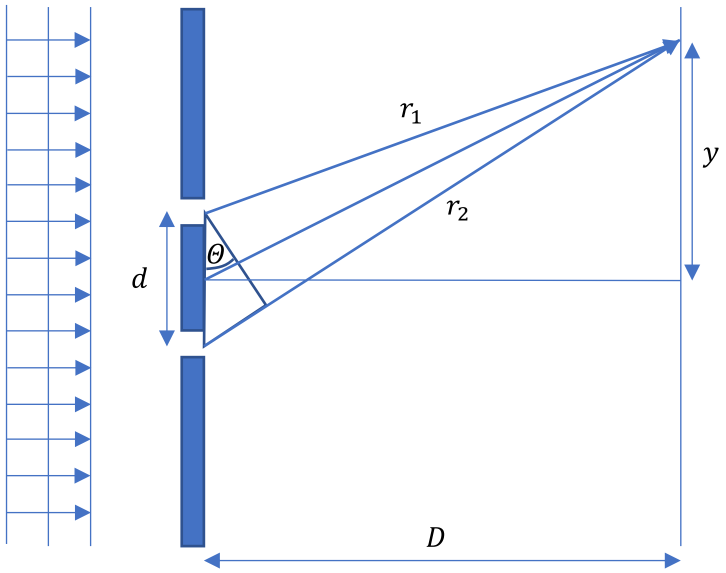
$\langle \vec{S} \rangle = i \frac{1}{2} c \varepsilon E_0^2, \qquad \frac{W}{m^2}$

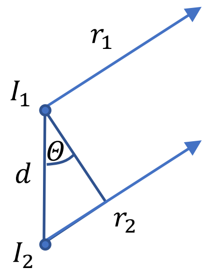
$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}$



■

44. Izvedite izraz za položaje maksimuma intenziteta na zastoru u Youngovom pokusu.





$E_1 = E_0\,sin(\omega t) \qquad E_2 = E_0\,sin(\omega t + \phi)$

$r_2 - r_1 = d\,sin\,\Theta$

$\delta = r_2 - r_1 = d\,sin\,\Theta$

$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi}$

$E_1 + E_2 = 2E_0\,cos\left(\frac{\phi}{2}\right) sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$

maksimum:

$d\,sin\,\theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$y_{max} = m\frac{\lambda D}{d} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

■

45. Izvedite izraz za položaje minimuma intenziteta na zastoru u Youngovom pokusu.

$E_1 = E_0\,sin(\omega t) \qquad E_2 = E_0\,sin(\omega t + \phi)$

$r_2 - r_1 = d\,sin\,\Theta$

$\delta = r_2 - r_1 = d\,sin\,\Theta$

$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi}$

$E_1 + E_2 = 2E_0\,cos\left(\frac{\phi}{2}\right) sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$

minimum:

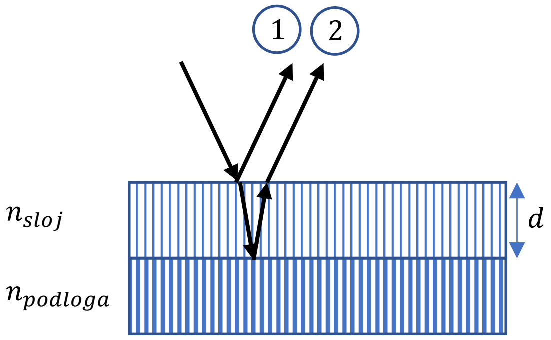
$d\,sin\,\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$y_{min} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{d} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

■

46. Izvedite uvjete maksimuma za interferenciju pri refleksiji na tankom filmu u slučaju

kada je $\mathrm{n}_{\mathrm{sloj}} > n_{podloga}$.



(1) promjena faze za π

(2) nema promjena u fazi

Razlika između valova 1 i 2:

- promjena faze vala 1 za π
- geometrijska razlika putova je $2d$

Da bi valovi 1 i 2 bili u fazi:

$$2d = \frac{\lambda_n}{2}, \frac{3\lambda_n}{2}, \frac{5\lambda_n}{2}, \dots \quad - maksimum$$

$$2d = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

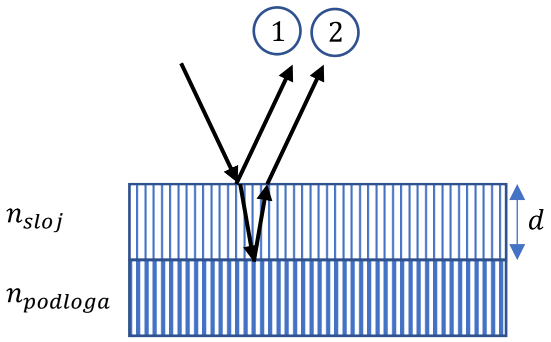
Val 2 širi se kroz sredstvo indeksom loma $n\left(\lambda_n = \frac{\lambda}{n}\right)$

$$2nd = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

■

47. Izvedite uvjete maksimuma za interferenciju pri refleksiji na tankom filmu u slučaju

kada je $\mathrm{n}_{\mathrm{sloj}} < n_{podloga}$.



(1) promjena faze za π

(2) promjena faze za π

Razlika između valova 1 i 2:

- promjena faze vala 1 za π
- geometrijska razlika putova je $2d$

Da bi valovi 1 i 2 bili u fazi:

$$2d = 0, \lambda_n, 2\lambda_n, \dots \quad - maksimum$$

$$2d = n\lambda_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Val 2 širi se kroz sredstvo indeksom loma $n\left(\lambda_n = \frac{\lambda}{n}\right)$

$$2nd = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

▪

Tales