MATRICE

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

matrica tipa $m \times n$

↳ kvadratna $\Rightarrow m = n$

Jednakost matrica

Dvije matrice su jednake ako:

- su istog tipa ($m_1 = m_2$ i $n_1 = n_2$)
- imaju jednake odgovarajuće elemente tj. $a_{ij} = b_{ij}$ za sve i, j

Nul matrica

- svi elementi su 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

Dijagonalna matrica

→ samo za kvadratne matrice!

- svi elementi osim na dijagonali jednaki su 0

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jedinična matrica

↳ dijagonalna matrica

- el. na dijagonali = 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} = I$$

Trokutaste matrice

→ kvadratne matrice

gornja

- svi njezini elementi ispod gl. dijagonale = 0

donja

- svi njeni el. iznad gl. dijagonale su 0

transponirana matrica $(B)_{ij} = (A)_{ji}$

– elemente prvog retka matrice A zapišemo kao elemente prvog stupca matrice B

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

transponiranu matricu označavamo simbolom A^T

$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} \quad \forall i,j$

Primjer 1.)

- D je dijagonalna matrica $\longrightarrow$ $D^T = D$ (transponirana joj je jednaka)
- Ako je L gornja trokutasta $\longrightarrow$ L^T je donja trokutasta (i obrnuto)
- $(A^T)^T = A$ za svaku matricu A

Simetrične matrice

A je simetrična ako je $A^T = A$ (tj. $a_{ij} = a_{ji}$)

→ nužno kvadratna

→ zrcaljenjem s obzirom na dijagonalu se ne mijenja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

→ anti simetrična $A^T = -A$ $\quad a_{ij} = -a_{ji}$

→ nužno kvadratna

→ ima nule na dijagonali

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektor kao matrica (trebat će u 4 i 5. cjelini)

! matrice koje imaju samo jedan redak ili stupac = VEKTORI

VEKTOR STUPCA

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

dimenzija 2   dimenz. 3   dimenzija n

→ transponiranjem vektor-retka dobiva se vektor stupac

VEKTOR RETKA

- b je vektor-stupac
  ↳ b^T je vektor-redak

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

OPERACIJE:

Zbrajanje matrica

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

→ matrice moraju biti istog tipa

→ rezultat je matrica istog tipa

- el. mat A+B na mjestu i, j jednak je zbroju elemenata mat. A i mat B. na tom istom mjestu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Množenje matrice skalarom

$\lambda \in \mathbb{R}$ je bilokoji skalar

$A \in M_{mn}$ $\Rightarrow$ $(\lambda A)_{ij} := \lambda (A)_{ij}$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

ALGEBRA MATRICA

Množenje matrica

Umnožak vektor-retka i vektor stupca

$a = [a_1\ a_2\ \dots\ a_n]$ $\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ $\Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_n b_n$

$\Rightarrow$ Da bi postojao umnožak dviju matrica one moraju biti ulančane

$\hookrightarrow$ broj stupaca prve m. = broj redaka druge mat.

da bi postojao AB, A mora biti $m \times n$, a B $n \times p$

$$(AB)_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} + b_{nj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Primjer:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\rightarrow (AB)_{ij} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ -1\cdot 3 + 1\cdot 1 & -1\cdot 1 - 1\cdot 1 & -1\cdot 2 + 0 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 - 1\cdot 1 & 2\cdot 2 + 0 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0 & 1\cdot 2 + 0 \end{bmatrix}$

$4 \times \cancel{2}$ $\quad \cancel{2} \times 3$ $\quad \rightarrow 4 \times 3$

! Ako je definiran AB to ne znači da je definiran i BA

! Ako postoje AB i BA, ; $AB \neq BA$

! $AB = 0 \longrightarrow$ to ne znači da je $A = 0$ ili $B = 0$

Primjer:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = ?$ za koje vrijedi $AB = 0$. $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

* istog tipa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot a + 2\cdot c & 1\cdot b + 2\cdot d \\ 3\cdot a + 6\cdot c & 3\cdot b + 6\cdot d \end{bmatrix}$$

$a + 2c = 0$ | $b + 2d = 0$

$3a + 6c = 0 \; / :3$ isto | $3b + 6d = 0 \; / :3$ isto

$a + 2c = 0$

$a = -2c$

$b + 2d = 0$

$b = -2d$

$B \Rightarrow \begin{bmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{bmatrix}$

Komutacija matrica: matrice A i B za koje vrijedi $AB = BA$

Primjer: Odredi sve A tako da komutiraju s $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \rightarrow AX = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix}$

$\rightarrow XA = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$0 = d \qquad a = e \qquad e = k$

$0 = g \qquad 0 = h$

$0 = 0 \qquad b = f$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}}$$

Matrični umnožak vektora

- a i b su vektor-stupci istog tipa
- gledamo ih kao matrice → umnošci a i b su $a^T b$ i $a b^T$

npr. $a = 3\times1$ $b = 3\times1$ → $a^T b = 1\times1$, $ab^T = 3\times3$

$$\rightarrow a^T b = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow a b^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

! matrično množenje možemo opisati na potpuno identičan način shvatimo li retke / stupce mat. kao zasebne vektore

MATRICA A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{vektor-retci}} \begin{array}{l} a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ a_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ a_n = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

↓ vektor-stupci

$$a^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad a^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad a^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 & \cdots & a^n \end{bmatrix}$$

onda je umnožak ⇓ ovako zapisan:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^1 & b^2 & \cdots & b^p \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 b^1 & a_1 b^2 & \cdots & a_1 b^p \\ a_2 b^1 & a_2 b^2 & \cdots & a_2 b^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b^1 & a_m b^2 & \cdots & a_m b^p \end{bmatrix} \longrightarrow$$ opći element matrice $(AB)_{ij} = a_i b^j$

Primjer: $x=[3,1,2]$ $\;y=[2,-1,1]$ izračunajmo x^Ty i xy^T

$$\underset{3\times 1}{x^T}\;\underset{1\times 3}{y} = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}[2,-1,1] = \begin{bmatrix}3\cdot2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot1\\ 1\cdot2 & 1\cdot(-1) & 1\cdot1\\ 2\cdot2 & 2\cdot(-1) & 2\cdot1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$xy^T = \underset{1\times 3}{[3,1,2]}\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}} = [3\cdot2+1\cdot(-1)+2\cdot1] = [7]$$

$\hookrightarrow \underline{\underline{xy^T=7}}$

Matrice i linearna preslikavanja

Umnožak matrice i vektora *4. i 5. godina

mat A tipa $m\times n$ $\xrightarrow[\text{duljine } m]{\text{definiran umnožak}}$ $\boxed{\underset{m\times n \;\; n\times 1}{y = A\,x}}$ $\rightarrow$ $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$

vektor-stupac n

$\hookrightarrow m$

$\hookrightarrow$ prema def. mat. množenja

$$y_1 = a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n$$
$$y_2 = a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n$$
$$\vdots$$
$$y_m = a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \dots + a_{mn}\cdot x_n$$

$\longrightarrow$ matrica inducira preslikavanje $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ koje elementu $(x_1,\dots x_n)$ pridružuje element $(y_1,\dots y_m)$

$\Rightarrow$ Linearno preslikavanje inducirano matricom A

Kompozicija linearnih preslikavanja i umnožak matrica

1)

→ B je kvad mat. reda 2 i $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pripadno linearno preslikavanje

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{možemo zapisati:}]{Y = BX} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

→ odnosno komponentama

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 \\ Y_2 &= b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2 \end{aligned}\right\}$$

dakle f paru (x_1, x_2) pridružuje par (y_1, y_2)

2) A je matrica drugog reda koja preslikava vektor y u vektor z, i g o njom određeno linearno preslikavanje:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 \\ z_2 &= a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 \end{aligned}\right\}$$

Dakle g paru (y_1, y_2) pridružuje par (z_1, z_2)

Onda za kompoziciju funkcije $g \circ f$ koja paru (x_1, x_2) pridružuje par (z_1, z_2) vrijedi

$$z_1 = a_{11}(b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2) + a_{12}(b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2)$$

$$z_2 = a_{21}(b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2) + a_{22}(b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 = (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) x_1 + (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) x_2$$

$$z_2 = (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}) x_1 + (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) x_2$$

I kompoziciji $g \circ f$ odgovara matrica

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{bmatrix} = AB$$

SVOJSTVA MATRIČNOG MNOŽENJA

Asocijativnost matričnog množenja $(AB)C = A(BC)$

$$(AB)_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \qquad (BC)_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{kl}$$

$$[(AB)C]_{il} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} (BC)_{jl} = \underline{\underline{[A(BC)]_{il}}}$$

Distributivnost $(A+B)C = AC + BC$

$$[(A+B)C]_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{ij} \cdot c_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} c_{jk} + \sum_{k=1}^{n} b_{ij} c_{jk}$$

$$= (AC)_{ik} + (BC)_{ik} = \underline{\underline{[AC + BC]_{ik}}}$$

Umnožak s jediničnom matricom $A \cdot I = I \cdot A = A$

Lako imamo jediničnu mat., nju smijemo pomnožiti s bilokojom matricom i ta se neće promijeniti

Transponiranje produkta $(AB)^T = B^T A^T$

→ ulančanost

A tipa $m \times n$ → $A^T \Rightarrow n \times m$

B tipa $n \times p$ → $B^T \Rightarrow p \times n$

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{AB}$$

$$\underset{m \times p}{(AB)^T} = \underset{m \times p}{B^T A^T}$$

morali smo obrnuti

Matrični polinom

- ako je A kvad matrica (samo u tom slučaju!)

$A^2 := AA$

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{p \text{ faktora}}$$

- zbog asocijativnosti množenja:

$$A^p A^q = A^q A^p = A^{p+q}$$

$$(A^p)^q = A^{pq}$$

za sve $p, q \in \mathbb{N}$

$* \; A^0 = I$

definicija matričnog polinoma:

$$f(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p-1} x^{p-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\Downarrow$$

$$f(A) = \alpha_p A^p + \alpha_{p-1} A^{p-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 \cdot I$$

Izračunaj A^n $(n \in \mathbb{N})$ ako je $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \quad A^2 A = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} \rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$$