7. Vektorski prostori

zadaci sa ispita

ZI23

2. (10 bodova)

   (a) Napišite definiciju baze vektorskog prostora.

   (b) Dokažite da je prikaz svakog vektora u bazi vektorskog prostora jedinstven.

   (c) Neka je $\mathcal{A}_3$ skup svih antisimetričnih matrica reda 3. Dokažite da je $\mathcal{A}_3$ vektorski potprostor od $\mathcal{M}_3$, nađite mu jednu bazu te mu odredite dimenziju.

   S $\mathcal{M}_n$ označavamo skup svih realnih kvadratnih matrica n-tog reda.

Zadatak 2.

RJEŠENJE **a)** i **b)** Knjižica.

c) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $A, B \in \mathcal{A}_3$ proizvoljni. Koristeći svojstva transponiranja matrica, imamo

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha(-A) + \beta(-B) = -(\alpha A + \beta B).$$

Dakle, $\alpha A + \beta B \in \mathcal{A}_3$, pa je $\mathcal{A}_3$ vektorski potprostor od $\mathcal{M}_3$.

Da odredimo bazu za $\mathcal{A}_3$, provjeravamo koje uvjete zadovoljavaju koeficijenti matrica iz $\mathcal{A}_3$.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} a = e = i = 0, \\ b = -d,\ c = -g,\ f = -h. \end{gathered}$$

Dakle, proizvoljna matrica $A \in \mathcal{A}_3$ je oblika

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} &= a \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= a(E_{12} - E_{21}) + b(E_{13} - E_{31}) + c(E_{23} - E_{32}), \end{aligned}$$

odnosno, skup $\{E_{12} - E_{21},\ E_{13} - E_{31},\ E_{23} - E_{32}\}$ razapinje $\mathcal{A}_3$. Kako je taj skup još linearno nezavisan, on je i baza za $\mathcal{A}_3$, pa je $\dim \mathcal{A}_3 = 3$. $\square$

ZIR23

5. (10 bodova) Neka je V skup svih simetričnih $A \in \mathcal{M}_2$ takvih da je

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

simetrična matrica.

(a) Dokažite da je $\mathcal{M}_2$ vektorski prostor.

(b) Dokažite da je V potprostor od $\mathcal{M}_2$.

(c) Nađite jednu bazu za V i odredite $\dim V$.

Zadatak 5.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** Na skupu svih kvadratnih matrica drugog reda imamo definirano zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a & y+b \\ z+c & w+d \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \lambda \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda w \end{bmatrix}.$$

Potrebno je provjeriti zadovoljava li $\mathcal{M}_2$, s ovako definiranim zbrajanjem i množenjem skalarom, aksiome vektorskog prostora. Provjeravamo ih redom i pritom koristimo samo svojstva zbrajanja i množenja realnih brojeva:

$(VP1)$ $$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a & y+b \\ z+c & w+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

$(VP2)$ $$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & r \\ s & t \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a+p & b+r \\ c+s & d+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p+x & b+r+y \\ c+s+z & d+t+w \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x+a & y+b \\ z+c & w+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & r \\ s & t \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} p & r \\ s & t \end{bmatrix}.$$

$(VP3)$ Postoji nul-vektor $\mathbf{0}$: to je upravo nul-matrica.

$(VP4)$ Svaki element iz $\mathcal{M}_2$ ima suprotan element:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & -y \\ -z & -w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+(-x) & y+(-y) \\ z+(-z) & w+(-w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$(VP5)$ $$\alpha \left(\beta \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = \alpha \begin{bmatrix} \beta x & \beta y \\ \beta z & \beta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta x & \alpha\beta y \\ \alpha\beta z & \alpha\beta w \end{bmatrix} = (\alpha\beta) \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

$(VP6)$ $$\alpha \left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \alpha \begin{bmatrix} x+a & y+b \\ z+c & w+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \alpha a & \alpha y + \alpha b \\ \alpha z + \alpha c & \alpha w + \alpha d \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

$(VP7)$ $$(\alpha+\beta) \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta x & \alpha y + \beta y \\ \alpha z + \beta z & \alpha w + \beta w \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

$(VP8)$ $$1 \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x & 1 \cdot y \\ 1 \cdot z & 1 \cdot w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

b) Označimo $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Neka su $A, B \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Treba pokazati da je $T = (\alpha A + \beta B) \in V$, odnosno, da je T simetrična matrica i da je TS simetrična matrica. Kako je linearna kombinacija simetričnih matrica ponovno simetrična, provjeravamo drugi uvjet:

$$\begin{aligned}
(TS)^T &= (\alpha(AS) + \beta(BS))^T \\
&= \alpha(AS)^T + \beta(BS)^T && \text{(svojstva transponiranja matrica)} \\
&= \alpha(AS) + \beta(BS) && (AS \text{ i } BS \text{ su simetrične matrice}) \\
&= (\alpha A + \beta B)S = TS.
\end{aligned}$$

Dakle, $T \in V$, pa je V vektorski potprostor od $\mathcal{M}_2$.

c) Određujemo uvjete na koeficijente (simetričnih) matrica iz V:

$$\begin{aligned}
X = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in V &\iff \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & -a+2b \\ b-c & -b+2c \end{bmatrix} \text{ je simetrična} \\
&\iff -a+2b = b-c \iff b = a-c.
\end{aligned}$$

Dakle, $X \in V$ ako i samo ako je X oblika

$$X = \begin{bmatrix} a & a-c \\ a-c & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \implies \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ razapinje } V.$$

Kako je taj skup linearno nezavisan, on je i baza za V, pa je $\dim V = 2$. $\square$

JIR23

4. (10 bodova)

Jesu li sljedeći skupovi vektorski potporstori od $\mathbb{R}^4$? Ako jesu, odredite im bazu i dimenziju.

(a) $V_a = \{(x, 0, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$,

(b) $V_b = \{(x, 0, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$,

(c) $V_c = \{(x, 1, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$,

(d) $V_d = \{(x, y, x - y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$,

(e) $V_e = \{(x, x + 1, y, y - 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$,

(f) $V_f = \{(x, x + y, y, 2x - 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Zadatak 4.

RJEŠENJE Koristimo sljedeću karakterizaciju vektorskog potprostora: *Neka je V realni vektorski prostor i W podskup od V. Tada je W vektorski potprostor od V ako i samo ako za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i za sve $v, w \in W$ vrijedi $\alpha v + \beta w \in W$.* Dakle, da bismo pokazali da je neki skup potprostor, moramo pokazati gornju tvrdnju, dok je za dokazivanje suprotnog potrebno pokazati negaciju gornje tvrdnje, odnosno, naći kontraprimjer.

a) $\alpha(x_1, 0, y_1, 0) + \beta(x_2, 0, y_2, 0) = (\alpha x_1 + \beta x_2, 0, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \in V_a \implies V_a$ je vektorski potprostor,

b) $\frac{1}{2}(1, 0, 1, 0) = (1/2, 0, 1/2, 0) \notin V_b \implies V_b$ nije vektorski potprostor,

c) $(1, 1, 1, 0) + (1, 1, 1, 0) = (2, 2, 2, 0) \notin V_c \implies V_c$ nije vektorski potprostor,

d) $\alpha(x_1, y_1, x_1 - y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, x_2 - y_2, z_2) =$
$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha_{y1} + \beta y_2, (\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2), \alpha z_1 + \beta z_2) \in V_d \implies V_d$ je v. p.,

e) $2(0, 1, 0, -1) = (0, 2, 0, -2) \notin V_e \implies V_e$ nije v. p.,

f) $\alpha(x_1, x_1 + y_1, y_1, 2x_1 - 3y_1) + \beta(x_2, x_2 + y_2, y_2, 2x_2 - 3y_2) =$
$(\alpha x_1 + \beta x_2, (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2), \alpha y_1 + \beta y_2, 2(\alpha x_1 + \beta x_2) - 3(\alpha y_1 + \beta y_2)) \in V_f$
$\implies V_f$ je vektorski potprostor.

Sada ćemo za dane vektorske potprostore naći bazu. Baza je linearno nezavisan skup vektora koji razapinje cijeli potprostor, što znači da se svaki element potprostora može prikazati kao linearna kombinacija tih vektora. Jednom kad nađemo skup koji razapinje potprostor, dovoljno je provjeriti je li linearno nezavisan. Ako nije, možemo izbacivati vektore dok ne dođemo do linearno nezavisnog skupa.

$$(x, 0, y, 0) = x(1, 0, 0, 0) + y(0, 0, 1, 0) \implies B_a := \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\} \text{ razapinje } V_a.$$

Kako je B_a linearno nezavisan, to je baza za V_a, što znači da je V_2 dvodimenzionalan.

$$(x, y, x - y, z) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, -1, 0) + z(0, 0, 0, 1) \implies$$
$$\implies B_d := \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \text{ razapinje } V_d.$$

Lako se pokaže da je B_d linearno nezavisan, pa je baza za V_d, i V_d je trodimenzionalan. Konačno,

$$(x, x + y, y, 2x - 3y) = x(1, 1, 0, 2) + y(0, 1, 1, -3) \implies B_f := \{(1, 1, 0, 2), (0, 1, 1, -3)\} \text{ razapinje } V_f.$$

B_f je linearno nezavisan, pa je baza za V_f i V_f je dvodimenzionalan. □

DIR23

4. (10 bodova)

   (a) Definirajte bazu vektorskog prostora V.

   (b) Čine li vektori

   $$v_1 = (2, 1, -2, -1), \quad v_2 = (-1, 2, -3, 1), \quad v_3 = (0, 5, -8, 1), \quad v_4 = (1, -1, 0, -1)$$

   bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$? Obrazložite svoj odgovor.

   (c) Čine li vektori

   $$w_1 = (1, 2, -1, 2), \quad w_2 = (2, -1, 0, 1), \quad w_3 = (3, 1, 1, 4)$$

   bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$? Obrazložite svoj odgovor.

Zadatak 4.

RJEŠENJE **a)** Neka je V vektorski prostor. Kažemo da je skup $\{v_1, \ldots, v_n\}$ baza vektorskog prostora V ako je linearno nezavisan i ako razapinje čitav V.

b) Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ je 4, pa će skup $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ biti baza za $\mathbb{R}^4$ akko je linearno nezavisan (teorem 4, poglavlje 7). Sastavimo matricu A čiji su stupci vektori v_i. $\mathcal{B}$ će biti linearno nezavisan akko je A punog ranga.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & -8 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -8 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dakle, $r(A) = 3 < 4$, pa $\mathcal{B}$ nije baza.

c) Kako su sve baze jednakobrojne, a dimenzija od $\mathbb{R}^4$ je 4, skup $\{w_1, w_2, w_3\}$ ne može biti baza. $\square$

ZI22

2. (10 bodova) Neka je $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0\}$.

   (a) Dokažite da je V vektorski prostor.

   (b) Zadani su vektori

   $$\mathbf{b}_1 = (1, -1, 0, 0, 0, 0),\ \mathbf{b}_2 = (0, 1, -1, 0, 0, 0),\ \mathbf{b}_3 = (0, 0, 1, -1, 0, 0).$$

   Nadopunite skup $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ do baze prostora V.

(2.) (a) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_6) \in V$ proizvoljni. Tada za vektor $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_6 + \beta y_6)$ imamo

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) + (\alpha x_4 + \beta y_4) + (\alpha x_5 + \beta y_5) + (\alpha x_6 + \beta y_6) =$$

$$= \alpha \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)}_{=0 \ (\text{jer } \vec{x} \in V)} + \beta \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)}_{=0 \ (\text{jer } \vec{y} \in V)}$$

$$= 0,$$

tj. $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$ pa je V vektorski prostor (potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^6$).

(b) Odredimo jednu bazu za V. Za vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6) \in V$ imamo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \implies x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6$$

$$\implies \vec{x} = (-x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$= x_2(-1,1,0,0,0,0) + x_3(-1,0,1,0,0,0)$$
$$+ x_4(-1,0,0,1,0,0) + x_5(-1,0,0,0,1,0)$$
$$+ x_6(-1,0,0,0,0,1)$$

Dakle,

$$V = L(\{\underbrace{(-1,1,0,0,0,0)}_{=:\vec{a}_1}, \underbrace{(-1,0,1,0,0,0)}_{=:\vec{a}_2}, \underbrace{(-1,0,0,1,0,0)}_{=:\vec{a}_3},$$
$$\underbrace{(-1,0,0,0,1,0)}_{=:\vec{a}_4}, \underbrace{(-1,0,0,0,0,1)}_{=:\vec{a}_5}\}),$$

te vidimo da su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ linearno nezavisni:

ako su $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ skalari takvi da $\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3 + \delta\vec{a}_4 + \varepsilon\vec{a}_5 = \vec{0}$, imamo

$$(-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = 0$$

$$\begin{cases} -\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \varepsilon = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$$

Dakle, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5\}$ je baza za V i $\dim V = 5$.

Sada treba reducirati skup $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5\}$ do linearno nezavisnog u V:

1° Vidimo da je $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1$ pa $\vec{a}_1$ izbacujemo iz skupa.

2° Tražimo skalare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takve da

$$\alpha \vec{b}_1 + \beta \vec{b}_2 + \gamma \vec{b}_3 = \vec{a}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 & \Rightarrow \alpha = -1 \\ -\alpha + \beta = 0 & \Rightarrow \beta = \alpha = -1 \\ -\beta + \gamma = 1 & \Rightarrow \gamma = 1 + \beta = 0 \\ -\gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dakle, $\vec{a}_2 = -\vec{b}_1 - \vec{b}_2$ pa i $\vec{a}_2$ izbacujemo iz skupa.

3° Tražimo skalare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takve da

$$\alpha \vec{b}_1 + \beta \vec{b}_2 + \gamma \vec{b}_3 = \vec{a}_3$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 & \Rightarrow \alpha = -1 \\ -\alpha + \beta = 0 & \Rightarrow \beta = \alpha = -1 \\ -\beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = \beta = -1 \\ -\gamma = 1 & \Rightarrow \gamma = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_3 = -\vec{b}_1 - \vec{b}_2 - \vec{b}_3$$

pa i $\vec{a}_3$ izbacujemo iz skupa

Preostaje nam peteročlani skup $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5\}$ koji je zbog $\dim V = 5$ tražena baza.

ZIR22

4. (10 bodova) Za zadane skupove u $\mathbb{R}^3$ odredite jesu li potprostori od $\mathbb{R}^3$.

   (a) $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 12 \\ 3x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$,

   (b) $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : 2x - 5y + 3z = 11,\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$,

   (c) $S_3 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \right\}$, za neku fiksnu kvadratnu matricu A reda 3.

(a) Budući da

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin S_1,$$

S_1 nije potprostor od $\mathbb{R}^3$.

(b) Budući da je

$$2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \neq 11,$$

ponovno vidimo da $\vec{0} \notin S_2$ pa ni S_2 nije potprostor od $\mathbb{R}^3$.

(c) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\vec{x}, \vec{y} \in S_3$ proizvoljni. Imamo

$$\begin{aligned} A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} \\ &= \left[\vec{x}, \vec{y} \in S_3\right] \\ &= \alpha \cdot 2\vec{x} + \beta \cdot 2\vec{y} \\ &= 2(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \end{aligned}$$

pa slijedi $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in S_3$, tj. S_3 je potprostor od $\mathbb{R}^3$.

LJIR22

4. (10 bodova) Za svaki od sljedećih skupova ustanovite je li vektorski potprostor vektorskog prostora svih kvadratnih matrica zadanog reda n s obzirom na operaciju zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom:

   (a) skup svih regularnih matrica reda n,

   (b) skup svih singularnih matrica reda n,

   (c) skup svih simetričnih matrica reda n,

   (d) skup svih ortogonalnih matrica reda n,

   (e) skup svih matrica $\mathbf{A}$ reda n za koje je $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$?

   Odgovore obrazložite.

   Napomena: ako je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ kvadratna matrica reda n, onda je $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(a) Zbroj dvije regularne matrice reda n općenito ne mora biti regularna matrica.

Na primjer, matrice $I, -I \in M_n$ su regularne, ali njihov zbroj,

$I + (-I) = O$, nije regularna matrica.

Dakle, ovaj skup nije potprostor od M_n.

(b) Zbroj dvije singularne matrice reda n općenito ne mora biti singularna matrica.

Na primjer, matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in M_n$$

su singularne, ali njihov zbroj, $A + B = I$, nije singularna matrica.

Dakle, ni ovaj skup nije potprostor od M_n.

(c) Neka su $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ dvije simetrične matrice reda n te

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da je $\alpha A + \beta B$ također simetrična matrica.

Naime, za sve $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ imamo

$$\begin{aligned}(\alpha A+\beta B)_{ji} &= \alpha a_{ji} + \beta b_{ji} \\ &= \alpha a_{ij} + \beta b_{ij} \qquad \text{(jer su } A \text{ i } B \text{ simetrične)} \\ &= (\alpha A+\beta B)_{ij},\end{aligned}$$

odakle slijedi tvrdnja. Dakle, ovaj skup je potprostor od $\mathcal{M}_n$.

(d) Matrice $I, -I \in \mathcal{M}_n$ su ortogonalne:

$$I^T I = I I^T = I, \qquad (-I)^T(-I) = (-I)(-I)^T = I.$$

S druge strane, njihov zbroj, $I+(-I)=0$, nije ortogonalna matrica:

$$0^T 0 = 0 0^T = 0.$$

Ovaj skup nije potprostor od $\mathcal{M}_n$.

(e) Neka su $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ dvije kvadratne matrice reda n za koje je $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(B)=0$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Imamo

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\alpha A+\beta B) &= \sum_{i=0}^{n} (\alpha A+\beta B)_{ii} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) \\ &= \alpha \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_{ii}}_{=0} + \beta \underbrace{\sum_{i=0}^{n} b_{ii}}_{=0} = 0.\end{aligned}$$

Ovaj skup je potprostor od $\mathcal{M}_n$.

ZI21

Pitanje **3**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 4,00

Zadani su vektori:

- $\mathbf{a} = (-1, -1, -1, 1, 2, -1)$,
- $\mathbf{b} = (-1, 0, -1, 1, 1, 0)$,
- $\mathbf{c} = (2, -2, 1, 1, 2, -1)$,
- $\mathbf{d} = (1, -1, 0, 2, 2, 0)$,
- $\mathbf{e} = (0, -1, 0, 0, 1, -1)$.

Neka je $V = L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$.

Koliko iznosi $\dim V$? 3 **(4 boda za točan odgovor)**

(3) Tražena dimenzija je jednaka rangu matrice čiji su retci (ili stupci) upravo zadani vektori:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r = 3 \Rightarrow \dim V = 3$

Pitanje **4**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 2,00

Neka je $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$.

Neka su $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$.

Tada je:

$\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \ldots + \alpha x_n + \beta y_n =$

$= \alpha(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + \beta(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = 0 + 0 = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

Time smo dokazali da:

- X je V vektorski potprostor od $\mathbf{R}^n$
- ○ linearna kombinacija dvaju vektora iz V iščezava samo na trivijalan način
- ○ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ čine bazu
- ○ Ne znam (0 bodova)
- ○ su $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ linearno zavisni
- ○ je $\dim V = 2$

(2 boda za točan odgovor, -0.5 za netočan, 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

(4) Navedenim dokazom smo dokazali tvrdnju

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)\ \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V,$$

tj. skup V je zatvoren za linearne kombinacije svojih elemenata

pa je on potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Pitanje **5**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 4,00

Neka je V vektorski prostor i neka je $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ baza tog vektorskog prostora.

Neka je $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ skup vektora iz V za koji vrijedi:

- $\mathbf{f}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3$
- $\mathbf{f}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3$
- $\mathbf{f}_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3$

i neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

(i) Neka je $\det \mathbf{A} \neq 0$. Koja od sljedećih tvrdnji vrijedi za skup $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$?

- [x] F je baza vektorskog prostora V
- [ ] F nije baza vektorskog prostora V
- [ ] F može, ali ne mora biti baza vektorskog prostora V
- [ ] Ne znam (0 bodova)

(2 boda za točan odgovor; -1 za netočan odgovor; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

(ii) Neka je $\det \mathbf{A} = 0$. Koja od sljedećih tvrdnji vrijedi za skup $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$?

- [ ] Ne znam (0 bodova)
- [ ] F je baza vektorskog prostora V
- [x] F nije baza vektorskog prostora V
- [ ] F može, ali ne mora biti baza vektorskog prostora V

(2 boda za točan odgovor; -1 za netočan odgovor; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

5) Uočimo da iz pretpostavke zadatka slijedi $\dim V = 3$. Zato je $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ baza za V ako i samo ako je taj skup linearno nezavisan u V.

Neka su sada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ proizvoljni takvi da vrijedi: $\alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 + \gamma \vec{f}_3 = \vec{0}$.

Zbog pretpostavke zadatka, ovu jednakost možemo zapisati kao

$$\alpha(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) + \beta(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + \gamma(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)\vec{e}_1 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)\vec{e}_2 + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma)\vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

jer je $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ baza za V pa je taj skup linearno nezavisan

Sada imamo sljedeći niz ekvivalencija:

skup F je baza za V $\Leftrightarrow$ F je linearno nezavisan u V

$\Leftrightarrow$ homogeni sustav $(*)$ ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$\Leftrightarrow$ matrica tog sustava, matrica A, je regularna

$\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Dakle, za $A = 0$ skup F nije, a za $\det A \neq 0$ skup F je baza za V.

ZIR21

4. (10 bodova)

(a) Definirajte bazu vektorskog prostora.

(b) Neka je B baza vektorskog prostora V i $\mathbf{v} \in V$. Dokažite da je prikaz vektora $\mathbf{v}$ kao linearne kombinacije vektora baze B jedinstven.

(c) Neka je $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ jedna baza za V. Ispitajte je li tada i $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{w}+\mathbf{u}\}$ baza za V. Obrazložite odgovor!

4. (a)

Baza vektorskog prostora je linearno nezavisan sustav izvodnica.

(b)

Označimo elemente baze B s $b_1, b_2, \ldots b_n$. Zbog toga što je baza sustav izvodnica znamo da je vektor v prikaziv kao linearna kombinacija elemenata baze: $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$.

Pretpostavimo da v ima 2 zapisa ovog oblika.

$$V = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$$
$$= \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n$$

$$\Rightarrow \quad 0 = (\alpha_1 - \beta_1) b_1 + (\alpha_2 - \beta_2) b_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) b_n$$

Linearna nezavisnost sada daje

$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$, odnosno

$$\alpha_1 = \beta_1$$
$$\alpha_2 = \beta_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = \beta_n$$

iz čega vidimo da su ova 2 zapisa nužno

ista, odnosno da je zapis jedinstven.

(c) Primijetimo da je

$$u = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(w+u) - \frac{1}{2}(v+w)$$

$$v = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(v+w) - \frac{1}{2}(u+w)$$

$$w = \frac{1}{2}(v+w) + \frac{1}{2}(u+w) - \frac{1}{2}(u+v)$$

pa zaključujemo da je $\{u+v, v+w, w+u\}$ sustav izvodnica, jer je to i $\{u, v, w\}$.

Pokažimo i da je linearno nezavisan:

$$\alpha(u+v) + \beta(v+w) + \gamma(w+u) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\alpha+\gamma)u + (\alpha+\beta)v + (\gamma+\beta)w = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha+\gamma = 0, \ \alpha+\beta = 0, \ \gamma+\beta = 0 \quad (\text{zbog lin. nez. } \{u,v,w\})$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\left[(\alpha+\gamma) + (\alpha+\beta) - (\gamma+\beta)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \gamma = 0$$

Ovaj izvod pokazuje linearnu nezavisnost.

LJIR21

4. (10 bodova) Neka je $V = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(1) = 0\}$ podskup prostora polinoma $\mathcal{P}_4$ stupnja ne većeg od 4.

   (a) Dokažite da je V vektorski potprostor od $\mathcal{P}_4$.

   (b) Nađite jednu bazu i dimenziju za V.

4. (a) Neka su $p, q \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Imamo

$$(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha \underbrace{p(1)}_{=0} + \beta \underbrace{q(1)}_{=0} = 0$$

(jer $p, q \in V$)

pa slijedi $\alpha p + \beta q \in V$, tj. V je vektorski potprostor od $\mathcal{P}_4$.

(b) Neka je $p(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e \in V$ proizvoljan. Imamo

$$p \in V \Rightarrow p(1) = 0$$
$$\Rightarrow a + b + c + d + e = 0$$
$$\Rightarrow e = -(a + b + c + d)$$

Dakle,

$$p(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt - (a + b + c + d)$$
$$= a\underbrace{(t^4 - 1)}_{=p_1(t)} + b\underbrace{(t^3 - 1)}_{=p_2(t)} + c\underbrace{(t^2 - 1)}_{=p_3(t)} + d\underbrace{(t - 1)}_{=p_4(t)}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Vidimo da se svaki polinom iz V može zapisati kao linearna kombinacija polinoma p_1, p_2, p_3, p_4, a budući da su ti polinomi elementi V, oni razapinju taj potprostor. Provjerimo njihovu linearnu nezavisnost:

$$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \delta p_4 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha t^4 + \beta t^3 + \gamma t^2 + \delta t - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \qquad \text{(teorem o jednakosti polinoma)}$$

Dakle, ti polinomi su i linearno nezavisni pa čine jednu bazu za V i $\dim V = 4$.

ZI20

2. (10 bodova)

   (a) Napišite definiciju linearne nezavisnosti vektora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ u vektorskom prostoru V.

   (b) Napišite definiciju baze vektorskog prostora.

   (c) Neka je $\mathcal{S}_2$ vektorski prostor simetričnih matrica drugog reda. Za svaki od sljedećih skupova ispitajte čini li bazu tog vektorskog prostora:

      i. $\mathbf{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$,

      ii. $\mathbf{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$,

      iii. $\mathbf{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$,

      iv. $\mathbf{B}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(2.) (a) Kažemo da su vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ LINEARNO NEZAVISNI

ako za sve skalare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

(b) Kažemo da vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ čine BAZU za V ako vrijedi:

(1) ti su vektori linearno nezavisni,

(2) svaki drugi vektor $\vec{v} \in V$ se može zapisati kao linearna kombinacija tih vektora.

(c) Za proizvoljnu matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2$ imamo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S_2 \Leftrightarrow b = c$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa zbog linearne nezavisnosti vektora $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

slijedi $\dim S_2 = 3$.

Zato odmah vidimo da B_1 i B_4 ne mogu biti baze za S_2.

Za skup B_3 imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tj. on je linearno zavisan pa također ne može biti baza za S_2.

Skup B_2 je linearno nezavisan po definiciji

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

pa taj skup je baza za S_2.