6.1.2. REDOVI S NENEG. ČLANOVIMA

gledamo redove s $a_n \geq 0$, tada je S_n rastući niz

TM Red s ne neg. čl. konvergira akko mu je niz S_n omeđen.

Dokaz: očito iz matan 1

TM Poredbeni kriterij. Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s ne neg. članovima t.d. $a_n \leq b_n$.

a) Ako $\sum a_n$ divergira $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ divergira

b) Ako $\sum b_n$ konvergira $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ konvergira

DOKAZ: Ako $\sum a_n$ div $\Rightarrow$ parc. suma A_n nije omeđena (zbog $B_n \geq A_n$)

a) ni parc. suma B_n nije omeđena $\rightarrow$ $\sum b_n$ divergira

b) Ako $\sum b_n$ konv. $\Rightarrow$ parc. suma B_n je omeđena pa je omeđena i parc. suma A_n $\rightarrow$ $\sum a_n$ konvergira

OBRATI NE VRIJEDE

Prošli put: veći konv $\longrightarrow$ manji konv.
manji div $\longrightarrow$ veći diverg.

Pr.) $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_n \frac{1}{n}$ div $\rightarrow$ divergira po poredbenom

Općenito:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \begin{cases} r>1, & \text{red konvergira} \\ r \leq 1, & \text{red divergira} \end{cases}$$

(dokaz kasnije $\Longrightarrow$ dokazali poredbeni

$\longrightarrow$ Obrat ne vrijedi: npr. $\sum \frac{1}{n^2} \leq \sum \frac{1}{n}$

manji konv., ali veći div.

Pr) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ → veći divergira pa ne znamo za manji

ovo je podred od

jer $\frac{1}{\sqrt{1+3}}, \frac{1}{\sqrt{2+3}}$ su elementi reda $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{10}, \dots \frac{1}{\infty}$

$\left(\frac{1}{2}\right) \quad \frac{1}{\sqrt{5}}$

⇒ isto se ponašaju u ∞

TM Poredbeni limes oblik — zadnja dva TM su kao u integralima

Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s NE-NEG članovima.

tako da je $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L} \neq 0, \infty$. Tada dva reda ili div ili konv.,

tj. $\sum a_n \sim \sum b_n$.

DOKAZ: U def limesa $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$, uzmemo $\varepsilon = \frac{L}{2}$. proizvoljno

tada: $\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$ $/ \cdot b_n$ (ok jer su ne-neg.)

▶ $a_n < \frac{3L}{2} b_n$ koristimo poredbeni
- ako veći $\sum b_n$ div ⇒ $\sum a_n$ div
- ako manji $\sum a_n$ konv. ⇒ $\sum b_n$ konv.

▶ $\frac{L}{2} b_n < a_n$
- veći $\sum a_n$ konv ⇒ $\sum b_n$ konv
- manji $\sum b_n$ div ⇒ $\sum a_n$ div

! SKRIPTU POGLEDATI

Pr.)

a) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+3}} \sim \sum \frac{1}{n}$, oba očito divergiraju

b) $\sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+5}} \sim \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \sum \frac{1}{n^{2/3}}$, < 1 div. pa po limes-poredbenom div. i poč.

jer $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2n+5}}{\sqrt[3]{n^2}} = 1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n+1}{n^3+n+2}\right) \sim \sum \frac{1}{n^2}$ — $n > 1$, red konvergira po limes poredbenom

jer $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$!

▶ $\sin x \sim x, x \to 0$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + \sin(n^2)}{n^3+1}$ — $\lim_{n\to\infty} (\sin(n^2))$ ne postoji

ali možemo reći da je $\sin(n^2) \leq 1$ ⇒ koristimo običan poredbeni

$\leq \sum \frac{3}{n^3}$ >1 veći konvergira pa konvergira i manji //

* male promjene mogu usrat zadatke: $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ ne možemo odrediti

TM | D'Alambert Neka je $\sum a_n$ red s nereg. član.

a) Ako $\exists q < 1$ t.d. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, $\forall n$ tada $\sum a_n$ konv.

b) Ako $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $\forall n$ tada $\sum a_n$ div.

DOKAZ:

a) Očito $a_2 \leq q a_1$, mat. ind. je očito $a_n \leq a_1 q^{n-1}$.

geometrijski red konvergira za $q<1$ po poredbenom kriteriju konv. i manji $\sum a_n$.

b) Ako je $a_{n+1} \geq a_n$, očito a_n je rastući niz pa nije zadovoljen NUK ($\lim a_n = 0$)

. nije zadovoljen NUK $\Rightarrow \sum a_n$ div.

TM | D'Alambert - limes oblik Neka je $\sum a_n$ red s neneg. članovima

Tada $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} <1, & \text{red konv.} \\ >1, & \text{red div.} \\ =1, & \text{nema odluke} \end{cases}$

Pr.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ — čim su faktorijele = D'Alambert

* Taylorova formula

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Zad.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} = \left(\frac{\cancel{e^n} \cdot e \cdot \cancel{n!}\,\cancel{(n+1)} \cdot n^n}{\cancel{e^n} \cdot \cancel{n!}\,(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e\,n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} e \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}} = \frac{e}{e} = 1$$

nema odluke po D'Al.

2oo) $\sum \frac{1}{n^r}$, $q=1$ nema odluke po D'Alambertu

Dok: $\sum_n \frac{1}{n}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$ ne postoji $q<1$ t.d. je

$\frac{n}{n+1} \leq q$? ne možemo koristiti D'Al

¿ ZAŠTO?

TM | Cauchy Neka je $\sum a_n$ s nenog. čl.

a) Ako $\exists q<1$, td. $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ / th

b) Ako $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, red divergira

DOKAZ: kao kod D'Al u skripti ali lakši

TM | Cauchy - lim

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} <1 & \text{konverg.} \\ >1 & \text{diverg.} \\ =1 & \text{nema odluke} \end{cases}$$

Pr.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$, $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n}$ Cauchy

$\Rightarrow q = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1$ red konv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n$ $\quad q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n} = 1$ nema odluke po Cauchyju

→ ako nema odluke po Cauchyju, ne moramo provjeravati D'Al.

→ provjeravamo NUK

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{2n+2}\right)^{2n+2}\right]^{\frac{n}{2n+2}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \rightarrow \text{red divergira po NUKu}$$

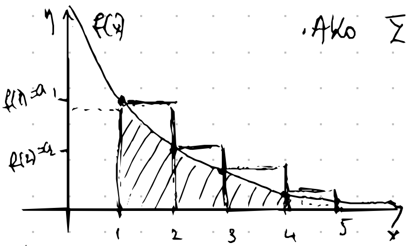
→ 5. poglavlje MAT1

čes to na ispitu

III Integralni kriterij

Neka je $\sum a_n$ red sa neneg. članovima te neka je $f(x)$ padajuća f-ja na $[N, +\infty\rangle$ td. $f(n) = a_n$.
Tada $\sum_n a_n$ i $\int_N^{+\infty} f(x)dx$ ili oba divergiraju ili oba konvergiraju.

DOKAZ:



• Ako $\sum a_n \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$ konv.

uzimamo veće pravokutnike

$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots =$ suma površina većih pravokutnika $=$ suma je konačna

1) $\Rightarrow$ Površina ispod grafa $y = f(x) \leq$ površine pravokutnika pa po poredbenom kim i ona je konačna $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)$ konvergira.

• Ako $\underbrace{\int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konv.}}$ $\Rightarrow \sum a_n$ konv

površina ispod grafa je konačna i veća od sume površina pravokutnika
$\longrightarrow$ po poredbenom, red konvergira

Pr.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1$ konvergira pa konvergira i red

$P = 1$, ali sumu ne znamo!

21-2019:1)

b) U ovisnosti o parametru $r \in \mathbb{R}$ ispitajte konvergenciju generaliziranog harmonijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \begin{cases} r > 1 \\ r \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^8} \dots = 0 \quad \text{konvergira}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{-1}} = n + \frac{1}{n^{-2}} = n^2 \dots = \infty \quad \text{divergira}$$

DOKAZ: $\boxed{\text{za } r > 1}$ npr = 2

integralni kriterij: ako $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergira $\Rightarrow \sum a_n$ konvergira

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r} dx = \frac{x^{-r+1}}{-r+1} \Big|_1^{\infty} = \infty^{-1} - \frac{1}{-r+1} = \emptyset \boxed{-\frac{1}{-r+1}} \quad \text{za } \forall\, r > 1 \text{ konvergira}$$

$\boxed{\text{za } r < 1}$ npr $r = 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r} dx = \frac{x^{-r+1}}{x^r} \Big|_1^{\infty} = \frac{\infty^1}{\infty^0} - \frac{1}{1} = \infty \quad \text{divergira}$$

$\boxed{\text{za } r = 1}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^1} dx = \ln|x| \Big|_1^{\infty} = \ln|\infty| - \ln|1| = \ln\left|\frac{\infty}{1}\right| \Rightarrow \text{divergira}$$