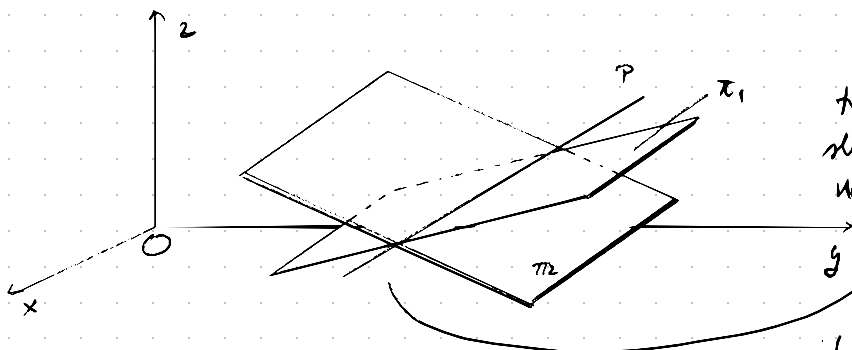
6.3. MEĐUSOBNI POLOŽAJ PRAVCA I RAVNINA

Pravac kao presjek dvije ravnina

$\pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

→ sve točke prostora leže i u prvoj i u drugoj ravnini



te točke u općem slučaju leže na jednom pravcu

presjeku ravnina π_1 i π_2

MOGUĆA SU 3 SLUČAJA

① sustav nema rješenja (nema presjeka)

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

⟹ njegovim jedn. određene dvije paralelne ravnine

② ravnine su identične

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \quad / \cdot 2 \\ 2x + 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

⟹ presjek je cijela ravnina (ta ista)

③ U ostalim slučajevima dvije se ravnine sijeku po pravcu

↳ samo rješenje (normalan slučaj)

Zad. : Odredimo jednadžbu pravca po kojem se sijeku ravnine:

$\pi_1 \cdots x+y-z+1=0$

$\pi_2 \cdots x+2y+z+2=0$

nisu ni paralelne ni identične

$x+y=z-1 \rightarrow x=z-1-y$

$x+2y=-z-2$

$z-1-y+2y=-z-2$

$y=-2z-1$

$x-2z\cancel{-1}=z\cancel{-1}$

$x=3z$ —— možemo odrediti parametarsku i kanonsku jednadžbu

PARAMETARSKA:

$x=3z$

$y=-2z-1$

x i y su izraženi preko z (istog parametra)

$\Rightarrow$

$x_1=0 \quad y_1=-1 \quad z_1=0$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=3\lambda \\ y&=-2\lambda-1 \\ z&=\lambda \end{aligned}}$$

$\overrightarrow{TT_1}=c\cdot\lambda$

$l=3 \quad m=-2 \quad (-1) \quad n=1$

$xi+yj+zk=x_1i+y_1j+z_1k+\lambda(li+mj+nk)$

$\boxed{c=3i-2j+k}$ $\boxed{T_1(0,-1,0)}$ (ostaci uz c)

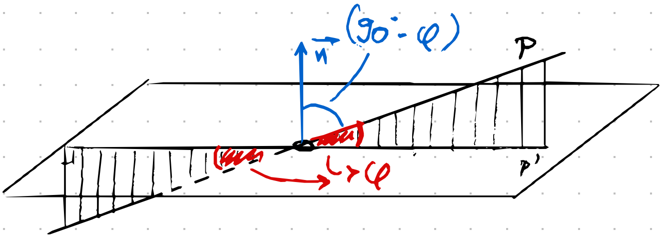
KANONSKA

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$\frac{x-0}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-0}{1} \longrightarrow \boxed{\frac{x}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1}}$$

Kut između pravca i ravnine

→ to je kut između pravca p i njegove ortogonalne projekcije na ravninu π



$$\sin\varphi = \cos(90° - \varphi) = \frac{|c \cdot n|}{|c||n|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Kao i kod odnosa dvije ravnina

pravac je paralelan s ravninom

$$c \cdot n = 0$$

$$Al + Bm + Cn = 0$$

pravac je okomit s ravninom

$$c = \lambda n$$

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

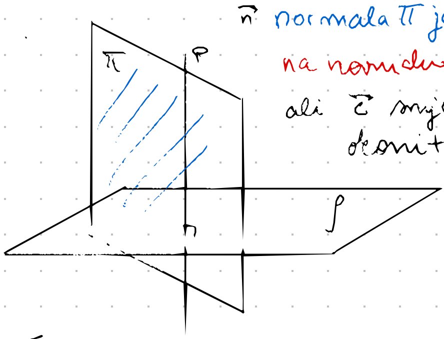
Zad. 17: Odredite jednadžbu ravnine π koja prolazi pravcem p a okomita je na ravninu:

$$\vec{c} = i + j + k$$

$$p \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow T(1,1,1)$$

$$\rho \ldots 2x + 3y + z + 1 = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{n} = 2i + 3j + k$$



$\vec{n}$ normala π je okomita na normalu ρ $(\vec{u})$ ali $\vec{c}$ smjera p je okomit na ρ isto

$$c \cdot m = 0$$

$$c \cdot u = 0$$

$$(i + j + k)(2i + 3j + k) = 0$$

$$\cancel{2i \cdot i} + 3i \cdot j + i \cdot k + 2j \cdot i + \cancel{3j \cdot j} + j \cdot k + 2k \cdot i + 3k \cdot j + \cancel{k \cdot k} = 0$$

$$3k + j - 2k + i - 2j - 3i = 0$$

$$-2i - j + k = 0 \Rightarrow \boxed{-2x - y + z = 0} \ldots \pi$$

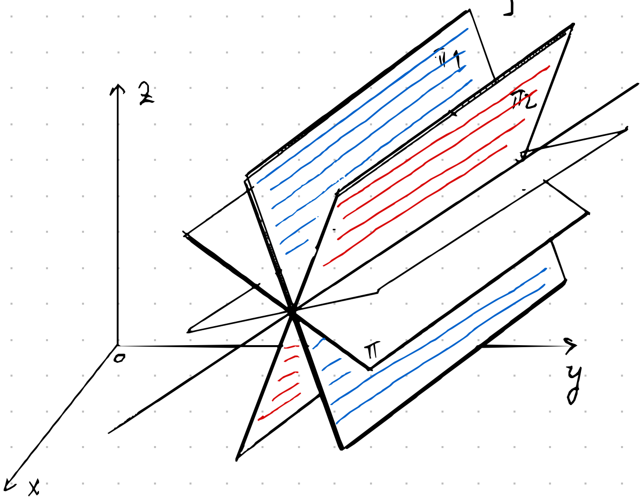
Pramen ravnina

- imamo dvije ravnine koje se sijeku (π_1 i π_2)

↳ njihove normale:

$$n_1 = A_1 i + B_1 j + C_1 k$$
$$n_2 = A_2 i + B_2 j + C_2 k$$

} njihove normale ne smiju biti kolinearne



P → kroz presječni pravac može se provući familija ravnina

⇓

Pramen ravnina

Određivanje neke ravnine iz pramena:

=> jednadžbe početnih dviju ravnina određuju pramen

$\pi_1 \dots A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$\pi_2 \dots A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

, $T(x, y, z)$ - bilo koja točka koja leži na presječnom pravcu

(* trebaju zadovoljavati obje jedn.)

$\rightarrow \mu(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$

raspišemo → $(\mu A_1 + \lambda A_2) x + (\mu B_1 + \lambda B_2) y + (\mu C_1 + \lambda C_2) z + (\mu D_1 + \lambda D_2) = 0$

vektor normale je oblika $\mu n_1 + \lambda n_2$ (linearna kombinacija)

$\mu = 0 \longrightarrow$ daje π_2 , $\lambda = 0 \longrightarrow$ daje π_1

Zad.) Odredi jednadžbu pramena ravnina koje prolaz pravcem $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$

vektor pravca ravnine : $\vec{c} = 2i + 3j + k$