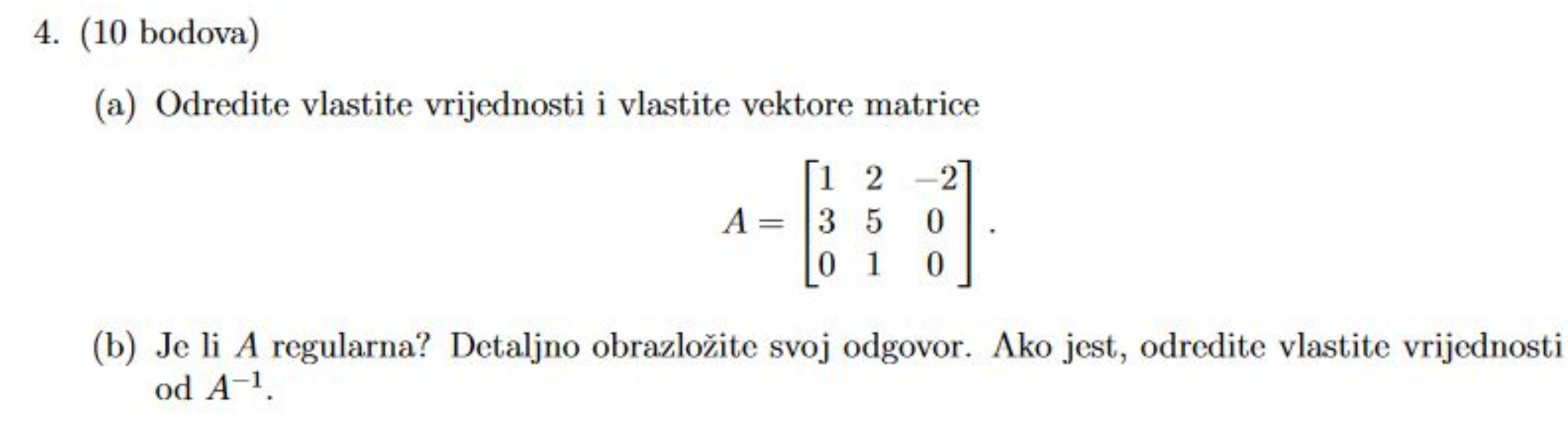
9. Vlastiti vektori i vlastite vrijednosti

zadaci sa ispita

ZI23



4. (10 bodova)

(a) Odredite vlastite vrijednosti i vlastite vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Je li A regularna? Detaljno obrazložite svoj odgovor. Ako jest, odredite vlastite vrijednosti od A^{-1}.

Zadatak 4.

RJEŠENJE **a)** Računamo karakteristični polinom matrice A:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ -3 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-5) - 6\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda(\lambda-5)-6) = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda-6)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-6).$$

Vlastite vrijednosti matrice A su nultočke karakterističnog polinoma:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_3 = 6.$$

Vlastiti vektor $\boldsymbol{v}_i$ pridružen vlastitoj vrijednosti λ_i je rješenje jednadžbe $(\lambda_i I - A)\boldsymbol{x} = 0$. Sustave rješavamo Gaussovom metodom:

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(-\frac{4}{3}, 1, 1\right)$$

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\boldsymbol{v}_2 = (2, -1, 1)$$

$$\lambda_3 I - A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\boldsymbol{v}_3 = (2, 6, 1).$$

b) Prema teoremu s predavanja, matrica je regularna ako i samo ako joj 0 nije vlastita vrijednost. Dakle, A je regularna. Kao što sljedeći račun pokazuje, $\boldsymbol{v}_i$ su vlastiti vektori od A^{-1}, za $i = 1, 2, 3$, sa vlastitim vrijednostima λ_i^{-1}:

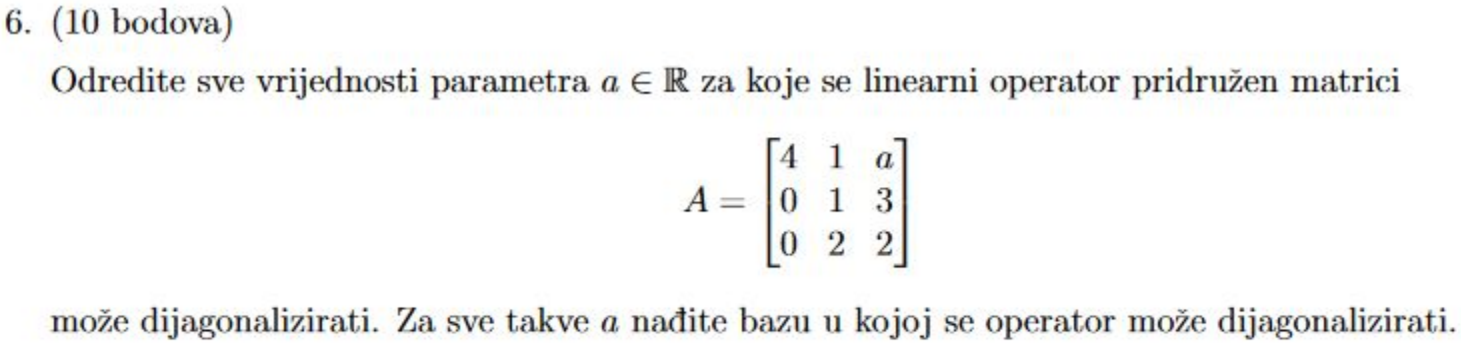
$$A^{-1}\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{\lambda_i}A^{-1}(\lambda_i \boldsymbol{v}_i) = \frac{1}{\lambda_i}A^{-1}A\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{\lambda_i}\boldsymbol{v}_i.$$

Dakle, vlastite vrijednosti od A^{-1} su

$$1, \quad -1, \quad \frac{1}{6}.$$

$\square$

LJIR23



6. (10 bodova)

Odredite sve vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ za koje se linearni operator pridružen matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati. Za sve takve a nađite bazu u kojoj se operator može dijagonalizirati.

Zadatak 6.

RJEŠENJE Računamo karakteristični polinom:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 & -a \\ 0 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2(\lambda + 1).$$

Dakle, dvije su svojstvene vrijednosti, $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = -1$. Kako je kratnost prve stvojstvene vrijednosti 2, dimenzija njenog svojstvenog potprostora $\ker(\lambda_1 - A)$ mora biti 2, dok dimenzija svojstvenog potprostora $\ker(\lambda_2 - A)$ mora biti 1. Prema teoremu o rangu i defektu, to vrijedi akko je $r(\lambda_1 - A) = 1$ i $r(\lambda_2 - A) = 2$. Sada radimo elementarne transformacije na tim matricama i tražimo a za koje je to zadovoljeno te usputno pronalazimo bazu svojstvenih vektora.

$$\lambda_1 - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rang ove matrice je 1 akko je $a = -1$. Dva linearno nezavisna rješenja jednadžbe $(\lambda_1 - A)v = 0$ su

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Još je potrebno provjeriti je li $r(\lambda_2 - A) = 2$ za taj a:

$$\lambda_2 - A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, rang matrice $\lambda_2 - A$ je doista 2 i jedno rješenje jednadžbe $(\lambda_2 - A)v = 0$ je

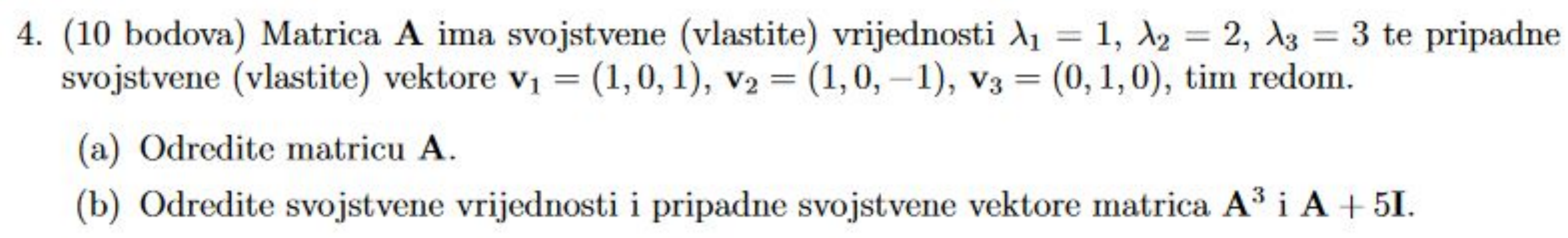
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sve skupa, operator se može dijagonalizirati samo za $a = -1$ te mu je baza svojstvenih vektora

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\square$

ZI22



4. (10 bodova) Matrica **A** ima svojstvene (vlastite) vrijednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ te pripadne svojstvene (vlastite) vektore $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)$, tim redom.

   (a) Odredite matricu **A**.

   (b) Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrica $\mathbf{A}^3$ i $\mathbf{A} + 5\mathbf{I}$.

④ (a) Matricu A možemo odmah zapisati u dijagonalnoj formi:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}_{T^{-1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} |\cdot 1 \\ + \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ |\cdot 2 \end{matrix}$$

$$\underbrace{}_{T}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \begin{matrix} + \\ |\cdot(-1) \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{matrix} \text{zamjene} \\ \text{redaka} \end{matrix}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{T^{-1}}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Ako je λ svojstvena vrijednost od A s pripadnim svojstvenim vektorom $\vec{v}$, po definiciji imamo $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Odavde slijedi:

$$A^3\vec{v} = A^2\underbrace{(A\vec{v})}_{\lambda\vec{v}} = \lambda A^2\vec{v} = \lambda A\underbrace{(A\vec{v})}_{\lambda\vec{v}} = \lambda^2\underbrace{A\vec{v}}_{\lambda\vec{v}} = \lambda^3\vec{v},$$

$$(A+5I)\vec{v} = A\vec{v} + 5\vec{v} = \lambda\vec{v} + 5\vec{v} = (\lambda+5)\vec{v},$$

tj. λ^3 je svojstvena vrijednost matrice A^3, a $\lambda+5$ svojstvena vrijednost matrice $A+5I$ (uz isti pripadni svojstveni vektor $\vec{v}$).

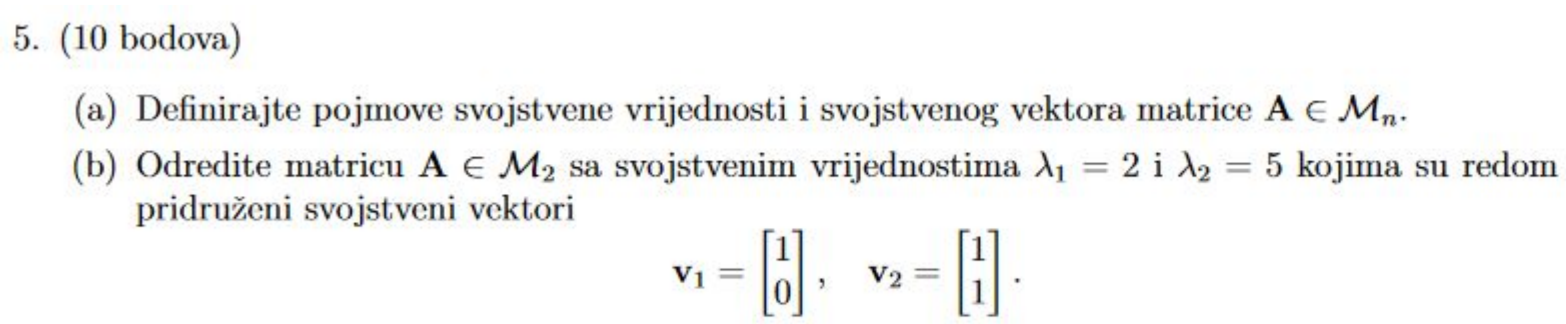
Zato prema podacima iz zadatka direktno slijedi:

1° $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = 27$ su svojstvene vrijednosti matrice A^3 uz pripadne svojstvene vektore $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,0,-1)$, $\vec{v}_3 = (0,1,0)$ redom,

2° $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = 8$ su svojstvene vrijednosti matrice $A+5I$ uz pripadne svojstvene vektore $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,0,-1)$, $\vec{v}_3 = (0,1,0)$ redom.

Budući da su A^3 i $A+5I$ kvadratne matrice trećeg reda, njihovi karakteristični polinomi su trećeg stupnja i mogu imati najviše tri različite realne nultočke - zato vidimo da te matrice ne mogu imati drugih svojstvenih vrijednosti (i pripadnih svojstvenih vektora) od već navedenih.

ZIR22



5. (10 bodova)

(a) Definirajte pojmove svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$.

(b) Odredite matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2$ sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 5$ kojima su redom pridruženi svojstveni vektori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Kažemo da je $\lambda \in \mathbb{R}$ SVOJSTVENA VRIJEDNOST matrice $A \in M_n$ ako postoji ne-nul vektor $\vec{v} \in V^n$ takav da vrijedi

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}.$$

Vektor $\vec{v}$ zovemo SVOJSTVENI VEKTOR pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

(c) Matricu A možemo odmah zapisati u dijagonalnoj formi

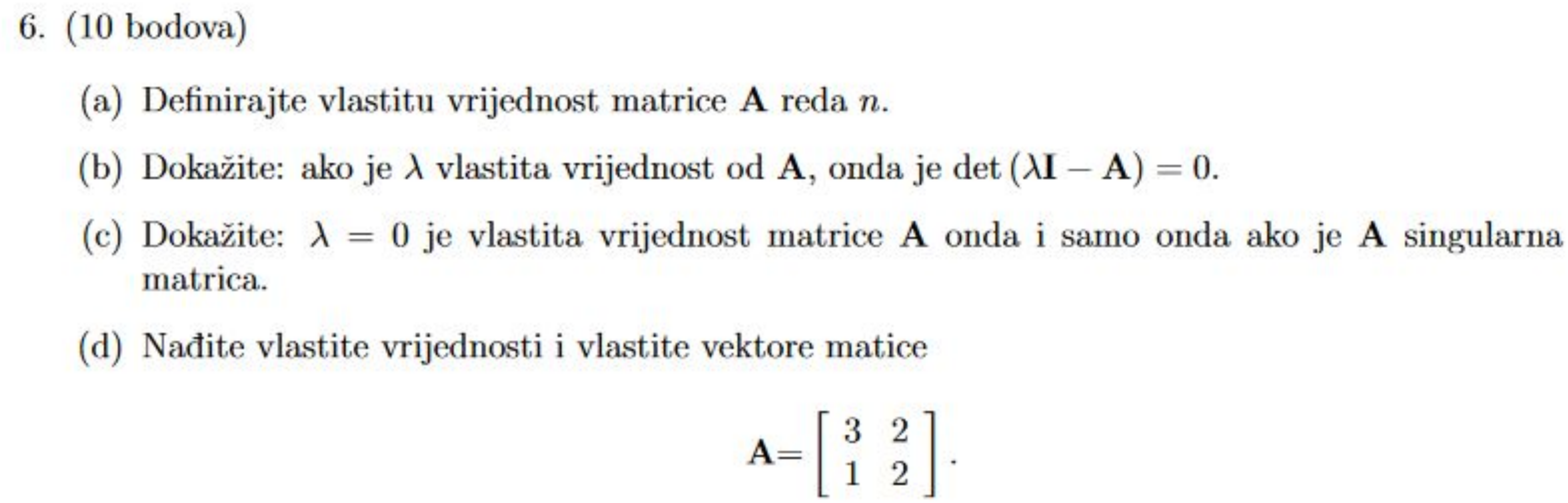
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

LJIR22



6. (10 bodova)

(a) Definirajte vlastitu vrijednost matrice **A** reda n.

(b) Dokažite: ako je λ vlastita vrijednost od **A**, onda je $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

(c) Dokažite: $\lambda = 0$ je vlastita vrijednost matrice **A** onda i samo onda ako je **A** singularna matrica.

(d) Nađite vlastite vrijednosti i vlastite vektore matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Kažemo da je $\lambda \in \mathbb{R}$ VLASTITA VRIJEDNOST matrice $A \in \mathcal{M}_n$ ako postoji ne-nul vektor $\vec{v} \in V^n$ takav da vrijedi

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

(b) Neka je λ vlastita vrijednost. Prema gornjoj definiciji, kvadratni homogeni sustav

$$(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

ima netrivijalno rješenje pa je matrica tog sustava singularna, tj.

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

(c) $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\lambda = 0$ vlastita vrijednost od A. Prema prethodnom podzadatku slijedi

$$\det(0 \cdot I - A) = (-1)^n \det A = 0,$$

tj. $\det A = 0$ i A je singularna matrica.

$\boxed{\Leftarrow}$ Obratno, neka je A singularna matrica. Tada kvadratni homogeni sustav $A\vec{x} = \vec{0}$ ima netrivijalno rješenje $\vec{x}_0$:

$$A\vec{x}_0 = \vec{0} \Rightarrow A\vec{x}_0 = 0 \cdot \vec{x}_0,$$

pa je $\lambda = 0$ po definiciji vlastita vrijednost od A.

(d) $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 4$

Odredimo svojstvene vektore:

1° $\lambda_1 = 1$

$$(I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \uparrow + \\ \vert \cdot 2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_2 = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0$$

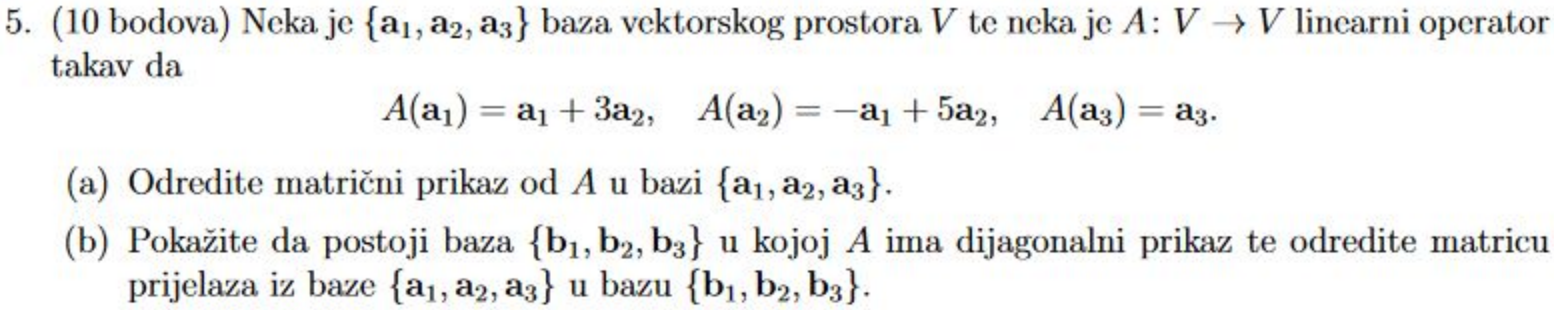
2° $\lambda_2 = 4$

$$(4I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \vert \cdot 1 \\ \downarrow + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0$$

JIR22



5. (10 bodova) Neka je $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ baza vektorskog prostora V te neka je $A\colon V \to V$ linearni operator takav da

$$A(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2, \quad A(\mathbf{a}_2) = -\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2, \quad A(\mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_3.$$

   (a) Odredite matrični prikaz od A u bazi $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

   (b) Pokažite da postoji baza $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ u kojoj A ima dijagonalni prikaz te odredite matricu prijelaza iz baze $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ u bazu $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Odredimo svojstvene vrijednosti te pripadne svojstvene vektore od A.

Karakteristični polinom od A je

$$\kappa_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ -3 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \leftarrow$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -3 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+8)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 4$

Određujemo svojstvene vektore:

1° $\lambda_1 = 1$

$$(I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{3}x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \quad \rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha \neq 0$$

Dakle, $\vec{b}_1 = \vec{a}_3$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$.

2° $\lambda_2=2$

$(2I-A)\vec{x}=\vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=-x_2 \\ \qquad\qquad x_2=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R} \\ \Rightarrow x_3=0 \end{array} \Rightarrow \vec{x}=\begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \alpha\neq 0$$

Dakle, $\vec{b}_2=-\vec{a}_1+\vec{a}_2$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2=2$.

3° $\lambda_3=4$

$(4I-A)\vec{x}=\vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow x_2=-3x_1 \\ \qquad\qquad x_1=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R} \\ \Rightarrow x_3=0 \end{array} \Rightarrow \vec{x}=\begin{bmatrix} \alpha \\ -3\alpha \\ 0 \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},\ \alpha\neq 0$$

Slijedi da je $\vec{b}_3=\vec{a}_1-3\vec{a}_2$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_3=4$.

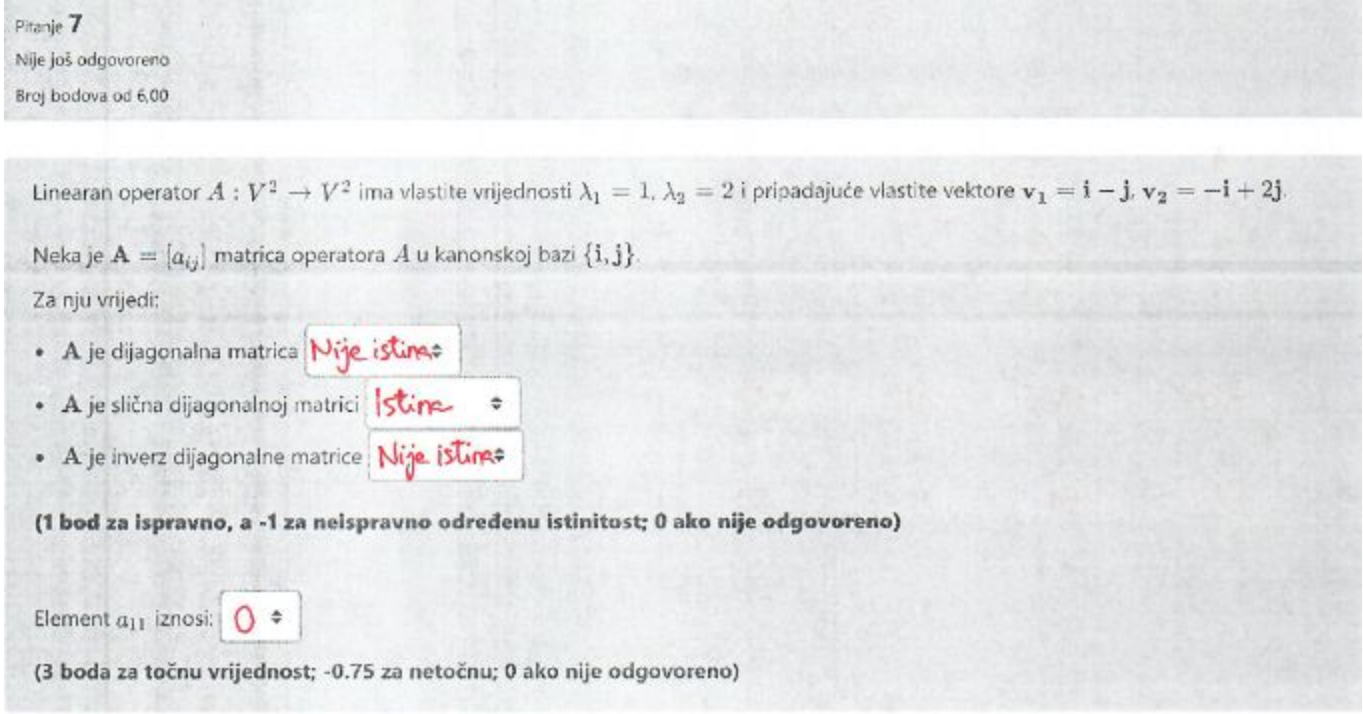
Vidimo da operator A ima dijagonalni prikaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

u bazi $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$ svojih svojstvenih vektora. Matrica prijelaza iz baze $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$ u bazu $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$ glasi

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ZI21



Pitanje **7**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 6,00

Linearan operator $A : V^2 \to V^2$ ima vlastite vrijednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i pripadajuće vlastite vektore $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Neka je $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matrica operatora A u kanonskoj bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Za nju vrijedi:

- $\mathbf{A}$ je dijagonalna matrica Nije istina
- $\mathbf{A}$ je slična dijagonalnoj matrici Istina
- $\mathbf{A}$ je inverz dijagonalne matrice Nije istina

(1 bod za ispravno, a -1 za neispravno određenu istinitost; 0 ako nije odgovoreno)

Element a_{11} iznosi: 0

(3 boda za točnu vrijednost; -0.75 za netočnu; 0 ako nije odgovoreno)

⑦ Uočimo da je matrični zapis od A u bazi $(f) = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ njegovih svojstvenih vektora

$$A(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jednako tako, možemo odrediti matricu prijelaza iz kanonske baze u bazu (f):

$$I_{V^2}(e,f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sada lako možemo odrediti matrični prikaz od A u kanonskoj bazi

$$A = A(e) = I_{V^2}(e,f)\,A(f)\,I_{V^2}(f,e)$$

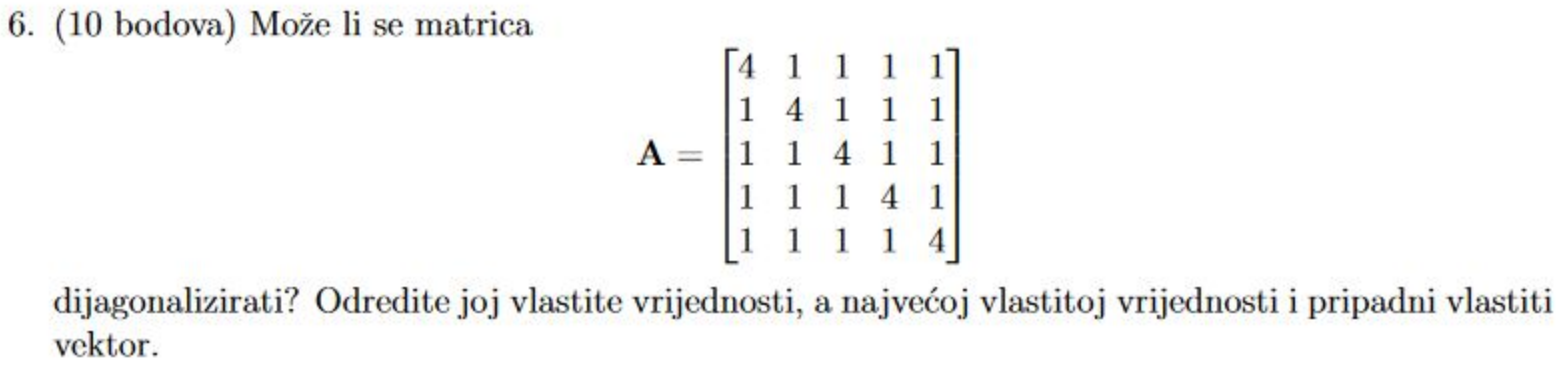
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, A nije dijagonalna matrica niti je inverz dijagonalne matrice (inverz dijagonalne matrice, ako postoji, je uvijek isto dijagonalna matrica), ali A je slična dijagonalnoj matrici.

Za traženi element imamo $a_{11} = 0$.

LJIR21



6. (10 bodova) Može li se matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

dijagonalizirati? Odredite joj vlastite vrijednosti, a najvećoj vlastitoj vrijednosti i pripadni vlastiti vektor.

⑥ Odredimo svojstvene vrijednosti od A:

$$\kappa_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ + \\ + \;|\cdot(-1) \\ + \;|\cdot(-1) \\ + \;|\cdot(-1) \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3-\lambda & \lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 3-\lambda & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 3-\lambda & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$+\;|\cdot 1 \quad +\;|\cdot 1 \quad +\;|\cdot 1 \quad +\;|\cdot 1$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-8 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-8)(\lambda-3)^4$$

Dakle, svojstvene vrijednosti od A su 8 i 3. Odredimo svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost 8:

- $(8I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-1) \;+ \\ |\cdot(-1) \;+ \\ |\cdot(-1) \;+ \\ |\cdot(-1) \;+ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot 1 \;+ \\ |\cdot 1 \;+ \\ |\cdot 1 \;+ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ + \mid \cdot 1 \\ + \mid \cdot 1 \\ + \mid \cdot 1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \\ \\ \end{array}$$

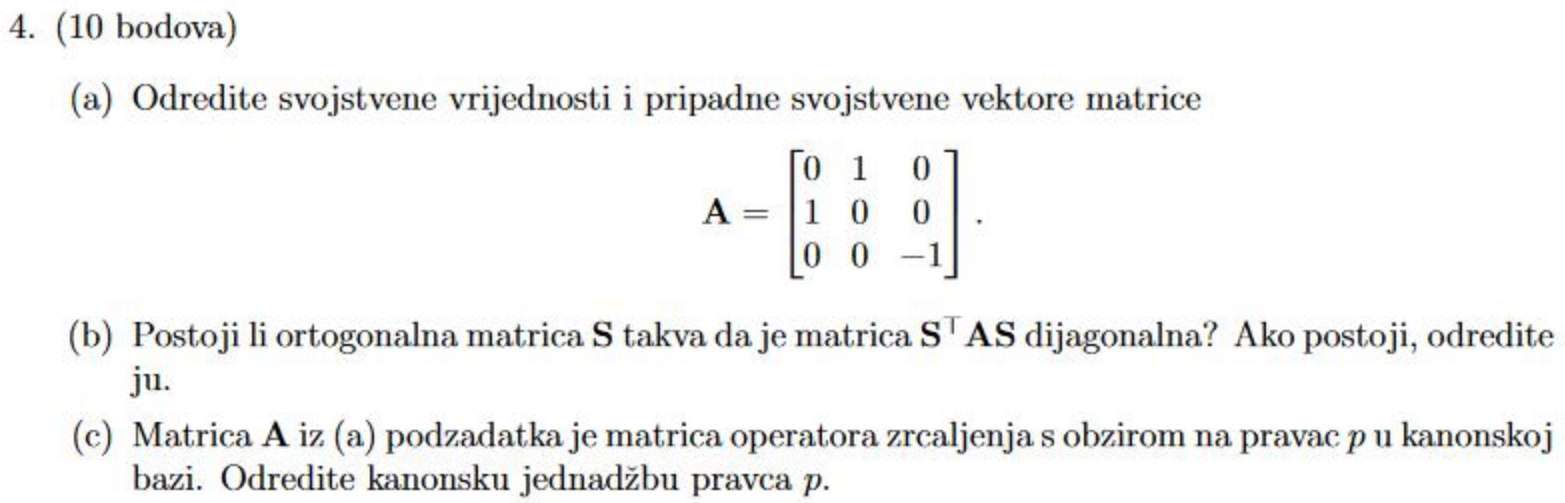
$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = x_5 \\ \Rightarrow x_2 = x_5 \\ \Rightarrow x_3 = x_5 \\ \Rightarrow x_4 = x_5 \\ \\ \end{array}$$

Dakle, svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 8 je

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_5 \\ x_5 \\ x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_5 \in \mathbb{R}.$$

Budući da je A simetrična matrica, ona se može dijagonalizirati (štoviše, postoji ortonormirana baza njenih svojstvenih vektora).

ZI20



4. (10 bodova)

(a) Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Postoji li ortogonalna matrica $\mathbf{S}$ takva da je matrica $\mathbf{S}^\top \mathbf{A} \mathbf{S}$ dijagonalna? Ako postoji, odredite ju.

(c) Matrica $\mathbf{A}$ iz (a) podzadatka je matrica operatora zrcaljenja s obzirom na pravac p u kanonskoj bazi. Odredite kanonsku jednadžbu pravca p.

④ (a) $\kappa_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\uparrow}{\lambda+1} \end{vmatrix}$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2-1)$$

$$= (\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$

Odredimo pripadne svojstvene vektore:

1° $\lambda_1 = -1$

$$(-I-A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Big\} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2° $\lambda_2 = 1$

$$(I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \Rightarrow x_3 = 0 \end{array}$$

$x_2 = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Budući da je matrica A simetrična, postoji ortonormirana baza u kojoj se ona može dijagonalizirati i to je upravo ortonormirana baza svojstvenih vektora od A. Zato je tražena matrica S oblika

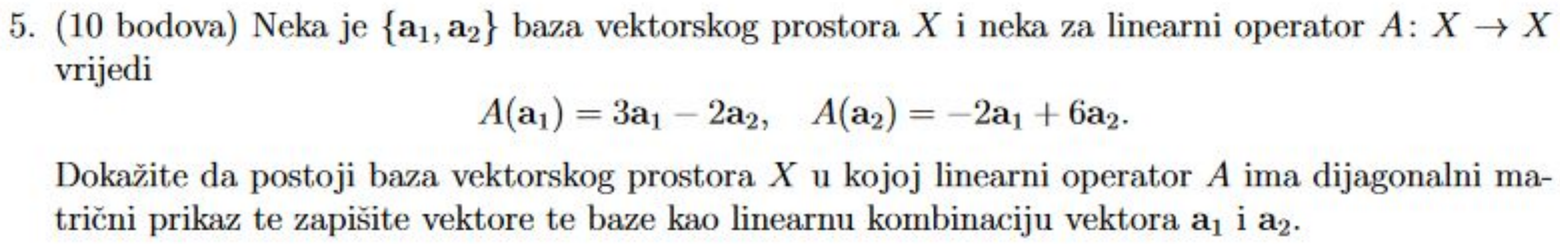
$$S = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Uočimo da prema (a) dijelu zadatka slijedi da je vektor $\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}$ vektor smjera traženog pravca p (to je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1, tj. zrcaljenje s obzirom na p fiksira sve vektore kolinearne s njim).

Budući da pravac p mora prolaziti kroz ishodište (u suprotnom zrcaljenje s obzirom na taj pravac ne bi bilo linearni operator), kanonska jednadžba od p glasi

$$p \ldots \ \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$$

ZIR20



5. (10 bodova) Neka je $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ baza vektorskog prostora X i neka za linearni operator $A\colon X \to X$ vrijedi

$$A(\mathbf{a}_1) = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2, \quad A(\mathbf{a}_2) = -2\mathbf{a}_1 + 6\mathbf{a}_2.$$

Dokažite da postoji baza vektorskog prostora X u kojoj linearni operator A ima dijagonalni matrični prikaz te zapišite vektore te baze kao linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$.

⑤ Matrični prikaz od A u bazi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Odredimo svojstvene vrijednosti dobivene matrice:

$$\kappa_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 2 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 9\lambda + 18 - 4 = (\lambda-2)(\lambda-7) \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 7$$

Pripadni svojstveni vektori:

1° $(2I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} |\cdot 2 \\ + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

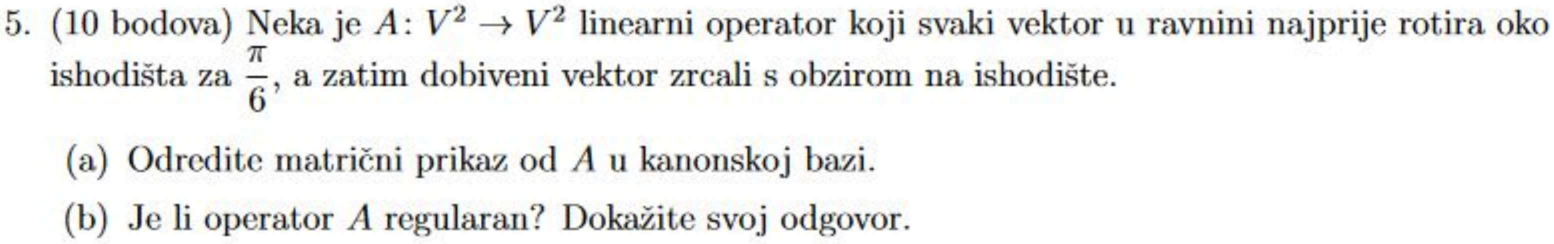
2° $(7I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} + \\ |\cdot(-2) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 = -2x_1$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Dakle, A se može dijagonalizirati u bazi $\{2\vec{a}_1 + \vec{a}_2,\ \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2\}$.

JIR201



5. (10 bodova) Neka je $A\colon V^2 \to V^2$ linearni operator koji svaki vektor u ravnini najprije rotira oko ishodišta za $\frac{\pi}{6}$, a zatim dobiveni vektor zrcali s obzirom na ishodište.

(a) Odredite matrični prikaz od A u kanonskoj bazi.

(b) Je li operator A regularan? Dokažite svoj odgovor.

5. (a) A je kompozicija dva operatora kojima lako možemo odrediti matrične zapise u kanonskoj bazi pa imamo

$$A(e) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matrica operatora} \\ \text{centralne simetrije} \\ \text{s obzirom na} \\ \text{ishodište}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matrica rotacije} \\ \text{oko ishodišta} \\ \text{za } \pi/6}} = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & -\cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

↳ geometrijski, A je operator rotacije oko ishodišta za $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

(b) A je regularan operator, što možemo pokazati na mnogo načina.

1° $\det(A(e)) = 1 \neq 0$ ⇒ $A(e)$ je regularna matrica

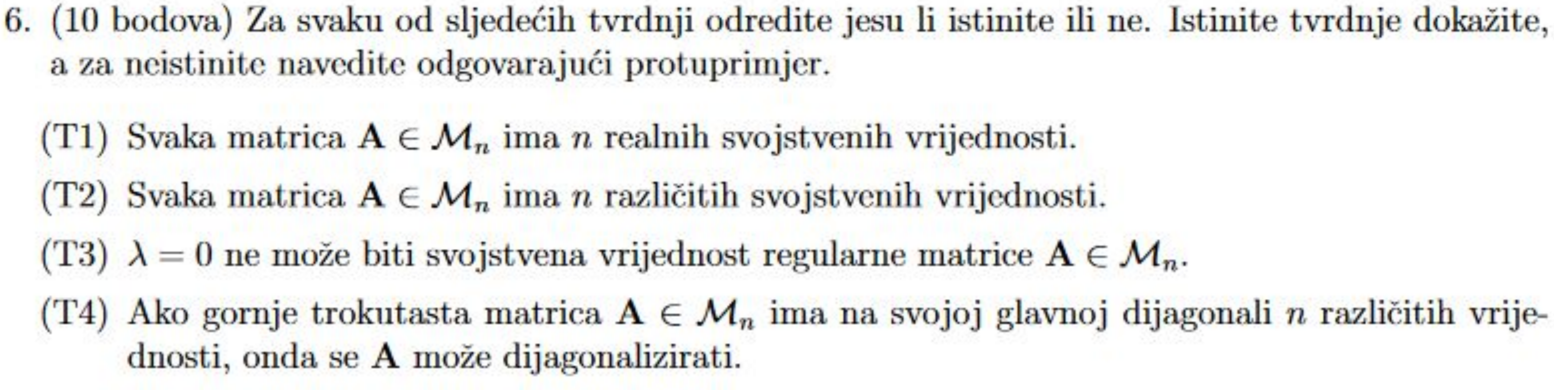
2° $r(A(e)) = 2$ ⇒ $A(e)$ je regularna matrica

3° A je rotacija oko ishodišta za $\frac{7\pi}{6}$, inverz joj je rotacija oko ishodišta za $-\frac{7\pi}{6}$, tj. $\frac{5\pi}{6}$

4° A je kompozicija dva regularna operatora

itd.

JIR201



6. (10 bodova) Za svaku od sljedećih tvrdnji odredite jesu li istinite ili ne. Istinite tvrdnje dokažite, a za neistinite navedite odgovarajući protuprimjer.

   (T1) Svaka matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ ima n realnih svojstvenih vrijednosti.

   (T2) Svaka matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti.

   (T3) $\lambda = 0$ ne može biti svojstvena vrijednost regularne matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$.

   (T4) Ako gornje trokutasta matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ ima na svojoj glavnoj dijagonali n različitih vrijednosti, onda se $\mathbf{A}$ može dijagonalizirati.

⑥ (T1) NETOČNO

Na primjer, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$. Imamo

$$\kappa_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2+1$$

$\Rightarrow$ A nema realnih svojstvenih vrijednosti

(T2) NETOČNO

Na primjer, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ ima samo jednu svojstvenu vrijednost

$$\kappa_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1.$$

(T3) TOČNO

Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ regularna matrica, onda vrijedi:

$$0 \neq \det A = (-1)^n \det(-A) = (-1)^n \det(0 \cdot I - A) = (-1)^n \kappa_A(0),$$

tj. 0 ne može biti svojstvena vrijednost od A jer nije nultočka njenog karakterističnog polinoma

(T4) TOČNO

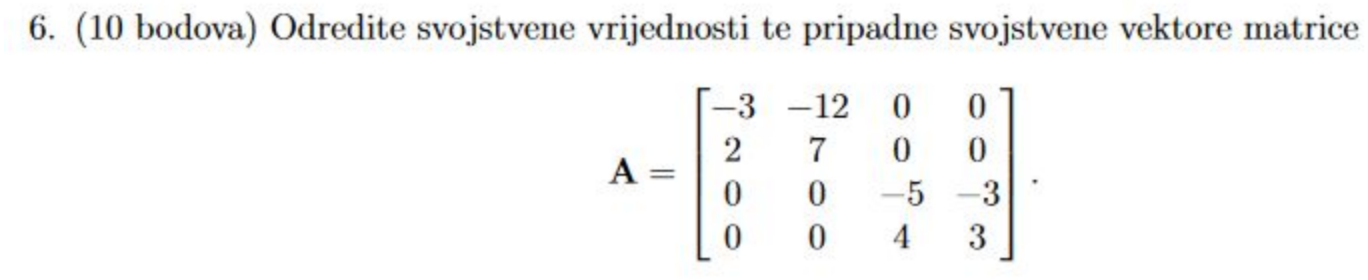
Uočimo najprije da su elementi glavne dijagonale od A upravo njene svojstvene vrijednosti - naime, za karakteristični polinom od A imamo

$$\kappa_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda-a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda-a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})(\lambda-a_{33}) \cdot \ldots \cdot (\lambda-a_{nn}).$$

Budući da su ti brojevi po pretpostavci zadatka različiti, pripadni svojstveni vektori su svi linearno nezavisni. Budući da je tih vektora ukupno n, oni čine bazu u kojoj se A može dijagonalizirati.

JIR202



6. (10 bodova) Odredite svojstvene vrijednosti te pripadne svojstvene vektore matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -12 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

⑥

$$k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 12 & 0 & \overset{\downarrow}{0} \\ -2 & \lambda-7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+5 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} \lambda+3 & 12 & \overset{\downarrow}{0} \\ -2 & \lambda-7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} + (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda+3 & 12 & \overset{\downarrow}{0} \\ -2 & \lambda-7 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix}$$

$$= 12 \begin{vmatrix} \lambda+3 & 12 \\ -2 & \lambda-7 \end{vmatrix} + (\lambda-3)(\lambda+5) \begin{vmatrix} \lambda+3 & 12 \\ -2 & \lambda-7 \end{vmatrix}$$

$$= \left[12 + (\lambda-3)(\lambda+5)\right] \cdot \begin{vmatrix} \lambda+3 & 12 \\ -2 & \lambda-7 \end{vmatrix}$$

$$= \left[12 + (\lambda-3)(\lambda+5)\right] \cdot \left[(\lambda+3)(\lambda-7) + 24\right]$$

$$= (\lambda^2 + 2\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (\lambda-1)^2(\lambda+3)(\lambda-3)$$

$\Rightarrow$ svojstvene vrijednosti od A su $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$

Tražimo pripadne svojstvene vektore:

1° $\lambda_1 = 1$

$$(I - A)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \big) \cdot 2 \\ \\ \big) \cdot \frac{2}{3} \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \Rightarrow x_1 = -3x_2 \\ \\ \Rightarrow x_4 = -2x_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad x_{2,3} \in \mathbb{R}$$

2° $\lambda_2 = -3$

$(-3I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_1 = -5x_2 = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 = -\frac{3}{2}x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

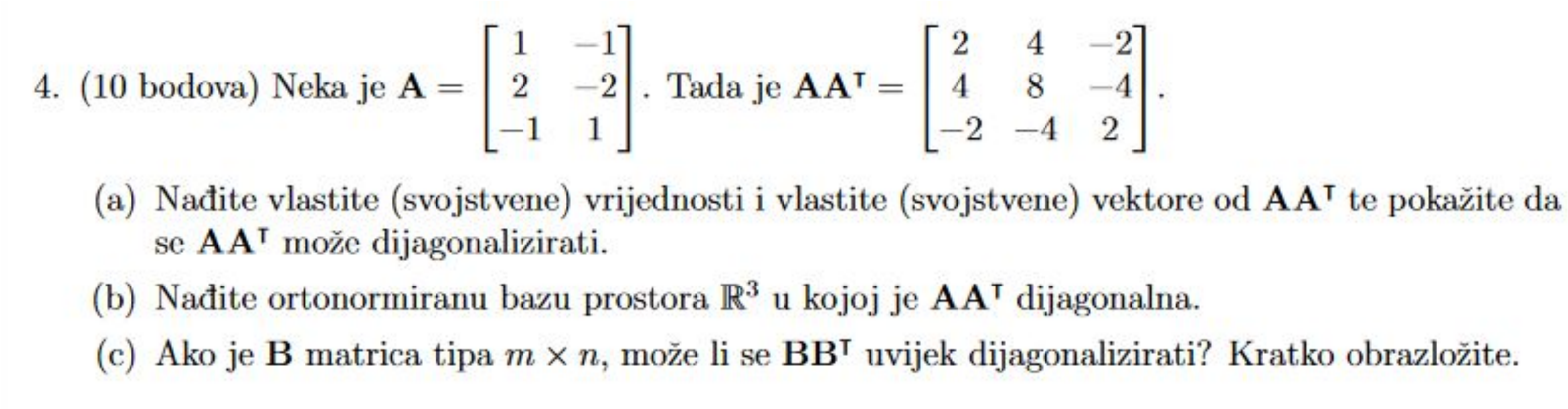
3° $\lambda_3 = 3$

$(3I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} x_1 = -2x_2 \\ \Rightarrow x_4 = -\frac{8}{3}x_3 = 0 \\ \Rightarrow x_3 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

ZI19



4. (10 bodova) Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Tada je $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Nađite vlastite (svojstvene) vrijednosti i vlastite (svojstvene) vektore od $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ te pokažite da se $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ može dijagonalizirati.

   (b) Nađite ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3$ u kojoj je $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ dijagonalna.

   (c) Ako je $\mathbf{B}$ matrica tipa $m \times n$, može li se $\mathbf{B}\mathbf{B}^\intercal$ uvijek dijagonalizirati? Kratko obrazložite.

④ a) Svojstvene vrijednosti : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pripadni vektori $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$

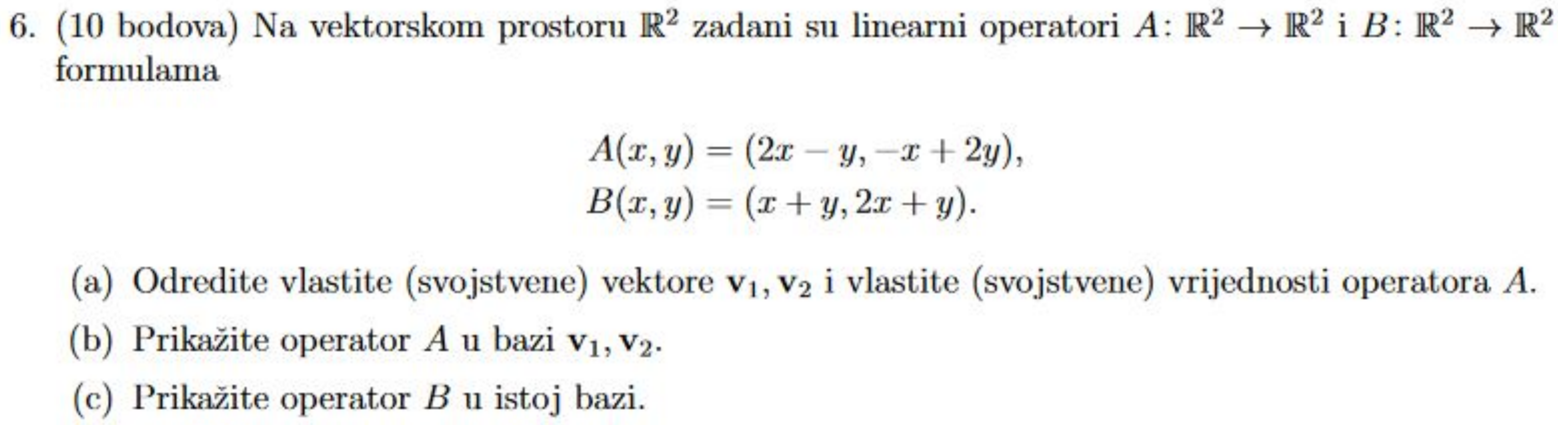
$\lambda_3 = 12$, pripadni vektor $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

AA^t se može dijagonalizirati

b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} \right\}$

c) $(BB^t)^t = BB^t$, a svaka simetrična matrica je slična dijagonalnoj

LJIR19



6. (10 bodova) Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ zadani su linearni operatori $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ formulama

$$A(x,y) = (2x - y, -x + 2y),$$
$$B(x,y) = (x + y, 2x + y).$$

(a) Odredite vlastite (svojstvene) vektore $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i vlastite (svojstvene) vrijednosti operatora A.

(b) Prikažite operator A u bazi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

(c) Prikažite operator B u istoj bazi.

NEMA RJESENJA U REPO