



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja



## **8. TEMA**

# **MJERENJE OTPORA, KAPACITETA I INDUKTIVITETA**

**Predmet "Mjerenja u elektrotehnici"**  
**Prof.dr.sc. Damir Ilić**  
**Zagreb, 2020.**

# Teme cjeline

---

- ❑ **Mjerenje otpora istosmjernom strujom**
- ❑ **Mosne metode**
- ❑ **Mjerni otpornici**
- ❑ **Mjerni kondenzatori**
- ❑ **Mjerni svitci**
- ❑ **Mjerenje induktiviteta**
- ❑ **Mjerenje kapaciteta**
- ❑ **Mjerenje impedancija RLC mostom**
- ❑ **Neuravnoteženi mostovi**

# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

---

## ▣ Područje metoda mjerenja otpora

- Red veličine mjerenih otpora: od  $1\ \mu\Omega$  do  $1\ \text{T}\Omega$ , tj. omjer tih vrijednosti je  $10^{18}$  (!)
- Mjerenje otpora elemenata
- Mjerenje otpora uzemljenja i izolacije
- Mjerenje otpornosti materijala
- Vrlo široki zahtjevi u pogledu točnosti

# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

## □ Izravno mjerenje digitalnim omometrom

- To smo dobrim dijelom obradili u temi br. 6, a kao primjer odabrali smo Keysight 3458A 6½ Digital Multimeter
- Ulazne priključnice za područje mjerenja otpora:
  - Input HI i Input LO – strujne priključnice kod 4-žičnog mjerenja otpora, ulazne priključnice kod 2-žičnog mjerenja otpora
  - Sense HI, Sense LO – naponske priključnice kod 4-žičnog mjerenja otpora
- Ispitna struja kroz mjereni otpor u ovisnosti o odabranom mjernom opsegu
  - problem zagrijavanja mjerenog otpora: ako je njegov otpor 1 kΩ, uz ispitnu struju 1 mA razvit će se djelatna snaga 1 mW

Mjerni opseg	Ispitna struja
100 Ω	1 mA
1 kΩ	1 mA
10 kΩ	100 μA
100 kΩ	10 μA
1 MΩ	5 μA
10 MΩ	500 nA
100 MΩ	500 nA    10 MΩ

# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

## ■ Funkcija Auto Zero

- koristi se samo kod 2-žičnog mjerenja otpora
- kad je ta funkcija omogućena (Auto Zero On), postupak određivanja mjerenog otpora sastoji se od dva koraka:
  - u prvom koraku mjeri se napon na mjenom otporu
  - u drugom koraku interno se kratko spaja taj ulazni dio i mjeri preostali napon pomaka (offset voltage)
  - konačan rezultat dobiva se oduzimanjem napona pomaka od napona izmjenog u prvom koraku i računa vrijednost mjerenog otpora
  - taj se postupak ponavlja kod svakog očitavanja mjerenog otpora
- kad ta funkcija nije omogućena (Auto Zero Off) napon pomaka izmjeri se samo jednom, na početku postavljanja na mjerno područje, kod promjene mjernog opsega ili vremena integracije, te se oduzima od svih slijednih mjerenja napona na mjenom otporu

## ■ Funkcija OffsetComp

- ova funkcija označava postupak koji se koristi za otklanjanje malih istosmjernih (DC) napona (ili termonapona) prisutnih u mjernom krugu, jer oni ne ovise o vrijednosti struje kroz krug
- tehnika uključuje određivanje razlike između izmjerenih vrijednosti otpora pri različitim vrijednostima ispitne struje: jednom uz strujni izvor postavljen na nominalnu vrijednost ispitne struje, a drugi put uz nižu vrijednost
- posljedica je približno dvostruko duže vrijeme potrebno za jedno očitavanje

# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

---

## □ Izravno mjerenje analognim omometrom

- Analogni instrumenti obrađeni su u temi br. 5
- Općenito rijetko se rabe jer su ih istisnuli digitalni omometri, osim onih ugrađenih za pogonska i procesna mjerenja
- Univerzalni instrument kao omometar
  - za mjerno područje otpora potreban je izvor napona (tipično je to ugrađena baterija)
  - ljestvica je nelinearna, s ničicom na desnom kraju
  - mjerni opsezi npr.  $500\ \Omega$  do  $5\ \text{M}\Omega$
- Kvocijentni instrument
  - otklon je razmjeran omjeru struja pa se može postići da jedna struja ovisi o poznatom otporu, a druga struja o mjerenom otporu
  - primjenjuju se različiti spojevi, čime se dobiva različiti omjer najvećeg i najmanjeg otpora koji se može mjeriti
  - napon napajanja ne utječe na točnost do nekih minimalnih vrijednosti
  - upotrebljavaju se za mjerenja veličina koje se mogu svesti na mjerenje otpora - tipično je to za neizravno mjerenje temperature pomoću otporničkih pretvornika

# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

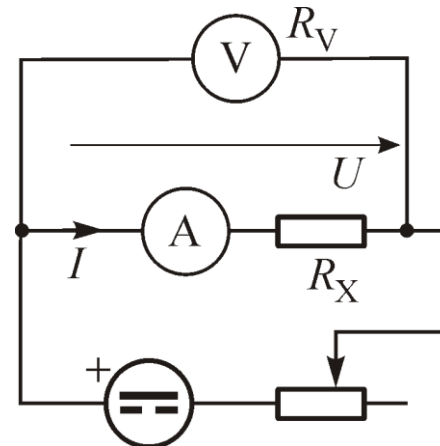
## □ ***U-I* metoda**

- Posredno mjerenje otpora preko mjerenja napona i struje, primjenjivo za otpore od  $1 \mu\Omega$  do  $1 \text{ M}\Omega$
- Primjena: otpornički elementi, otpori kabela i vodiča, otpori temperaturno ovisnih PTC i NTC otpornika, i dr.
- Dva spoja: strujni ili naponski spoj

## □ **Strujni spoj**

- Koristi se za mjerenje velikih otpora (mnogo većih od  $R_A$ )
- Pogreška nastaje zbog otpora ampermetra  $R_A$  pa slijedi:

$$R_X = \frac{U - I \cdot R_A}{I} = \frac{U}{I} - R_A$$

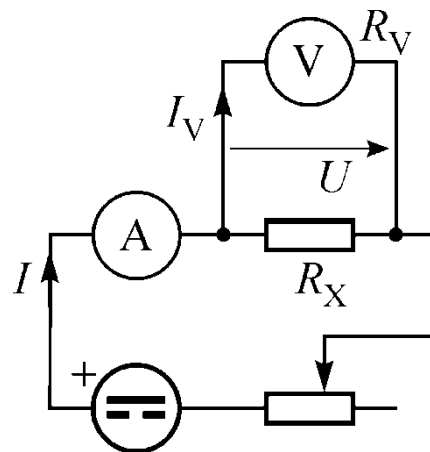


# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

## ■ Naponski spoj

- Koristi se za mjerenje malih otpora (mnogo manjih od  $R_V$ )
- $R_V$  je redovito točnije poznat i nepromjenjiv, pa je naponski spoj u prednosti nad strujnim i pri mjerenju otpora srednjih iznosa
- Pogreška nastaje zbog otpora voltmetra  $R_V$  pa slijedi:

$$R_X = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}}$$



- Kod analognih instrumenata, unutrašnji otpor se izračuna kao umnožak karakterističnog otpora  $R_K$  (iskazanog u  $k\Omega/V$ ) i mjernog opsega (mjernog dometa):  $R_V = R_K \cdot U_{MV}$
- Kod digitalni instrumenata, unutrašnji otpor je naveden u specifikacijama (tipično, ovisi o mjernom opsegu!)



# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

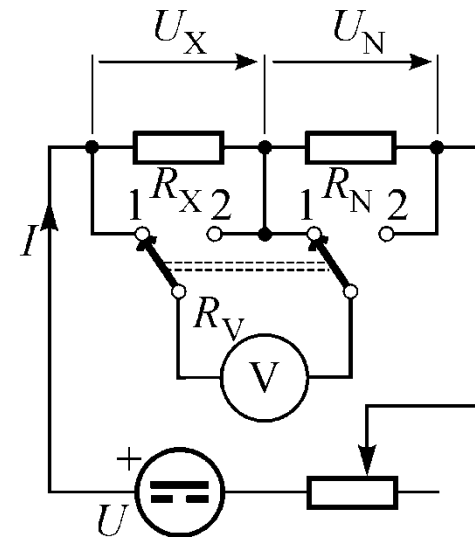
## Metoda usporedbe

- Usporedba s točno poznatim otporom  $R_N$  (etalon)
- Dva spoja: serijski i paralelni

## Serijski spoj

- Za mjerenje otpora mnogo manjih od  $R_V$
- Uvjet: nepromjenjivost struje kroz krug za vrijeme usporedbe

$$R_X = R_N \frac{U_X}{U_N} \cdot \frac{R_V}{R_V + R_N \left(1 - \frac{U_X}{U_N}\right)}$$

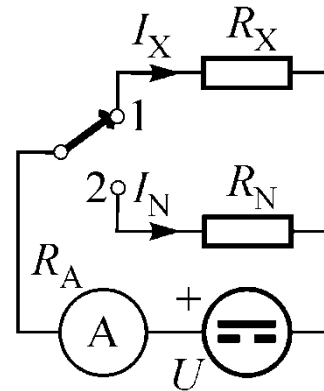


# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

## ▣ Paralelni spoj

- Za mjerenje otpora mnogo većih od  $R_A$
- Uvjet: nepromjenjivost napona izvora tijekom usporedbe

$$R_X = \frac{I_N}{I_X} (R_N + R_A) - R_A$$

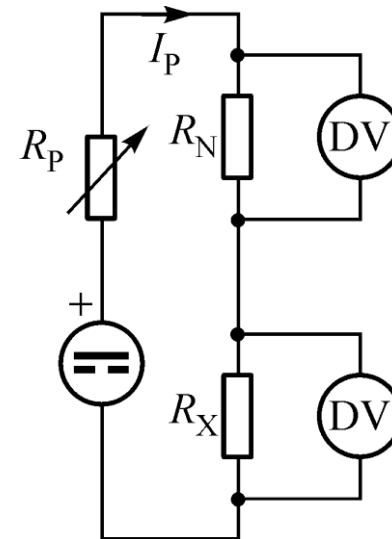


# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

## ■ Metoda s dva voltmetra

- Uspoređuju se padovi napona na otporima
- Primjenom dva voltmetra neutralizira se utjecaj termonapona (komutacijom struje i zamjenom mjesta voltmetara)
- Struja u mjernom krugu mora biti tolika da ne izazove zamjetno povišenje temperature otpornika, a time i promjenu njihova otpora
- Primjenjuje se za mjerenje otpora u vrhunskoj točnosti (relativne nesigurnosti reda  $10^{-6}$ )
- Pojednostavnjeni izraz:

$$R_X = R_N \frac{U_X}{U_N}$$



# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

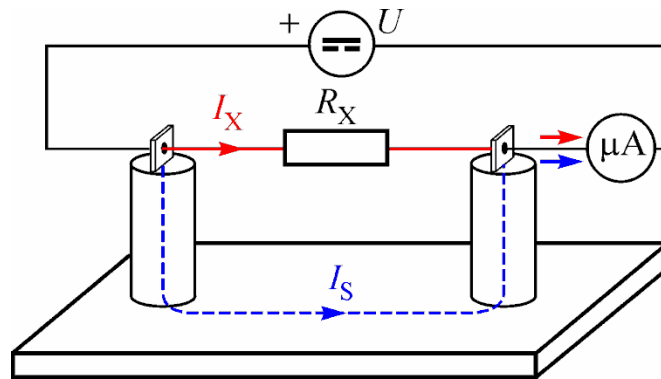
## □ Mjerenje (vrlo) velikih otpora

- Područje mjerenja otpora: od  $1\text{ M}\Omega$  do  $1\text{ T}\Omega$
- Odnosi se na
  - mjerenje otpora elemenata (otpornika)
  - mjerenje izolacijskih otpora
  - mjerenje površinske i obujmne (volumne) otpornosti izolacijskih materijala (plastike, prirodnih i umjetnih izolacijskih smola, i dr.)
- Mjerenje otpora elemenata laboratorijskim metodama
  - $U$ - $I$  metoda
  - metoda gubitka naboja
  - kod tih metoda traži se veća točnost mjerenja nego kod mjerenja izolacijskih otpora
  - najbolje reference velikih otpora - etaloni otpora
    - mogu se izmjeriti s relativnom mjernom nesigurnošću od  $20 \cdot 10^{-6}$  (ili 20 ppm; ppm = parts per million, milijuntinka) na razini  $1\text{ M}\Omega$ , te s nesigurnošću od  $100 \cdot 10^{-6}$  (ili 100 ppm) na razini  $1\text{ T}\Omega$
    - za takvo mjerenje koriste se druge mjerne metode – npr. modificirani Wheatstoneov most, komparator istosmjernih struja (DCC, Direct Current Comparator), ili pak posebno razvijeni mostovi

# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

## ■ Mjerenje velikih otpora $U$ - $I$ metodom

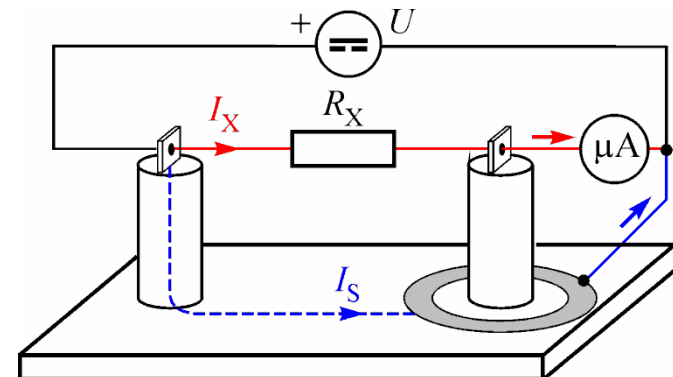
- problem: izolacijski otpor  $R_S$  podloge i stalka, koji djeluje paralelno mjerenom otporu  $R_X$
- prikaz djelovanja izolacijske struje pri mjerenju  $U$ - $I$  metodom



$$I_A = I_X + I_S$$

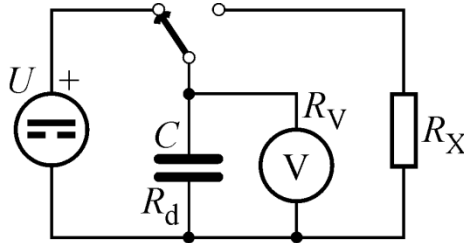
- rješenje: zaštitna elektroda zbog koje neželjena struja  $I_S$  više ne prolazi kroz mikroampermetar i ne utječe na rezultat mjerenja

$$I_A = I_X$$
$$R_X = \frac{U}{I_X}$$



# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

## □ Mjerenje velikih otpora metodom gubitka naboja



- jednom nabijeni kondenzator kapaciteta  $C$  i pripadnog izolacijskog otpora  $R_d$  (koji mu je spojen paralelno) prazni se preko mjerenog otpora  $R_x$ , a to izbijanje odvija se po eksponencijalnom zakonu:

$$U_C = Ue^{-t/\tau}; \tau = RC$$

- otpor  $R$  čini paralelna kombinacija mjerenog otpora  $R_x$ , otpora voltmetra  $R_V$  i izolacijskog otpora kondenzatora  $R_d$
- ako su u trenucima  $t_1$  i  $t_2$  izmjereni pripadni naponi na voltmetru  $U_1 = U(t_1)$  i  $U_2 = U(t_2)$ , slijedi da je otpor  $R$  jednak:

$$R = \frac{t_2 - t_1}{C \ln(U_1/U_2)}$$

# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

---

- s  $R_p$  možemo označiti paralelnu kombinaciju otpora  $R_V$  i  $R_d$ , tj.

$$R_p = \frac{R_V R_d}{R_V + R_d}$$

- tada je mjereni otpor jednak:

$$R_X = \frac{R R_p}{R_p - R}$$

- odavde je očito da točnost mjerenja otpora  $R_X$  ovom metodom ovisi o točnosti određivanja otpora  $R_V$  i  $R_d$ , te o točnosti mjerenja napona voltmetrom
- metoda je prikladna i za vrlo velike otpore, čak i veće od  $1 \text{ T}\Omega$

# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

---

## □ Mjerenje izolacijskih otpora

- Provodi se na svim električnim postrojenjima i na svojoj opremi (kućne instalacije, visokonaponska postrojenja, telefonske instalacije, motori, transformatori, i dr.)
- Za mjerenje izolacijskih otpora potrebno je mjeriti izolator podvrgnuti (relativno) visokom ispitnom naponu te mjeriti struju koja je time generirana
  - ispitni naponi su od više stotina volta do nekoliko kilovolta, ako se radi o niskonaponskoj opremi (koja se koristi npr. pri mrežnom naponu od 400 V) te o jednostavnim mjerilima izolacijskih otpora
  - za visokonaponsku opremu, koja se koristi u krugovima istosmjernih ili izmjeničnih napona do 400 kV, mjerne metode, uređaji i radni naponi bitno su drugačiji
- Tu se ne traži posebno visoka točnost, i zbog prirode samih izolacijskih otpora (koji su dosta promjenjivi), i zbog mjerenja koja su vrlo često na terenu, daleko od laboratorijskih uvjeta
- Kao mjerni instrumenti koriste se jednostavni, lagani i prenosivi uređaji s vlastitim izvorom radnog napona za mjerenje izolacijskog otpora izvan pogona



# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

- Izolacijska struja
  - određena obujmnim otporom
    - ionska: ovisi o broju iona i njihovoj pokretljivosti, koja raste s temperaturom; kako je to dominantna komponenta izolacijske struje određene obujmnim otporom, posljedica je negativni temperaturni koeficijent izolacijskog otpora koji je određen obujmnim otporom; povišenje napona smanjuje pokretljivost iona (ograničavaju ju elektrostatičke sile) pa otpornost raste (što vrijedi do nekih granica)
    - elektronska: zbog malog broja slobodnih elektrona redovito je manja od ionske
  - određena površinskim otporom
    - površinska: može višestruko nadmašiti obujmnu komponentu struje, osobito kod nekih materijala s izazitom prijemljivošću vlage (npr. staklo)
- Svaki je izolator dielektrik određenog kapaciteta pa se pri promjenama vanjskog napona (kojim se provode mjerenja) javlja kapacitivna struja – poželjno je da taj napon bude što stalniji kako bi kapacitivna struja bila što manja ( $i_c = C \cdot dU/dt$ ; za  $dU/dt = 0$  slijedi  $i_c = 0$ )
- U izolatoru koji je podvrgnut naponu kroz dulje vrijeme stvaraju se nakupine iona uslijed kojih dolazi do udarnih struja izjednačenja u materijalu

# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

---

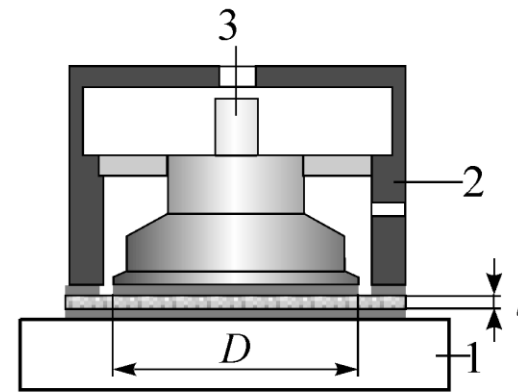
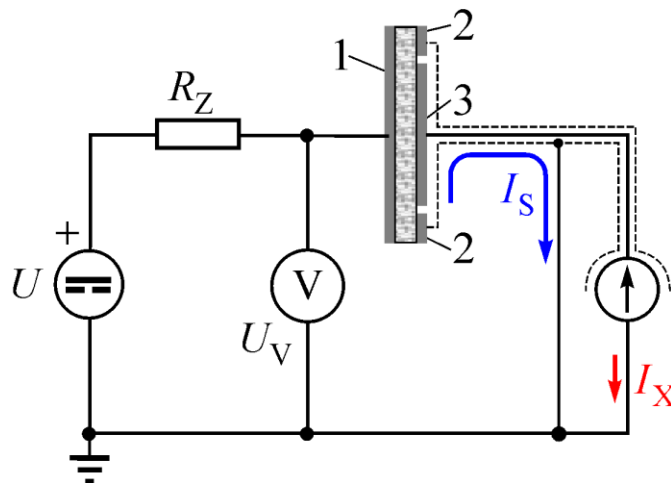
- Izolacijska struja nije linearno razmjerna naponu (kao što to vrijedi kod vodiča) već ovisi o:
  - iznosu i stalnosti napona
  - trajanju mjerenja
  - zagrijavanju
  - vlažnosti okolišnog zraka
  - čistoći površina
  - i drugim utjecajnim veličinama
- Ukratko, kod izolatora više ne vrijedi Ohmov zakon, tj. porast napona neće pratiti razmjernan porast struje
- Zbog svega navedenoga ponavljajuća mjerenja često daju dosta različite rezultate
- U konačnici, izolacijski otpor često se ne iskazuje kao točno izmjerena vrijednost, već se navodi vrijednost od koje je izolacijski otpor svakako veći (npr.  $>150 \text{ G}\Omega$ )

# Mjerenje otpora istosmjernom strujom

## ■ Mjerenje otpornosti izolacijskih materijala

- uzorak se ulaže između masivnih kružnih metalnih elektroda
- eliminacija površinskih struja  $I_S$  zaštitnom elektrodom
- zaštitni otpor  $R_Z$  djeluje u slučaju kratkog spoja elektroda ili kvara
- za prikaz na slici vrijedi:

$$R_X = \rho \frac{4l}{D^2\pi} = \frac{U_V}{I_X} \Rightarrow \rho = \frac{U_V D^2 \pi}{4l I_X}$$



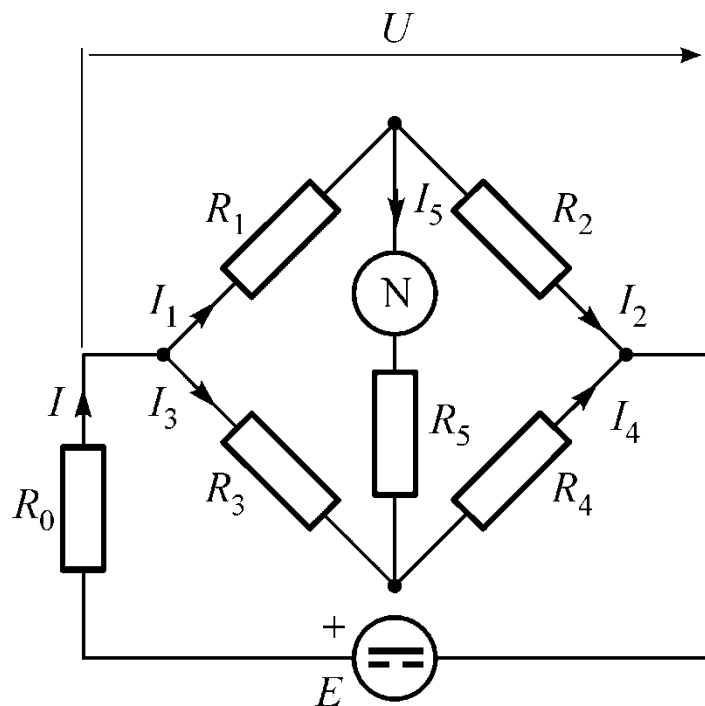
## □ Razlikujemo dva osnovna načela:

- **uravnoteženi mostovi**: dovođenje mosta u ravnotežu (kad kroz ništični instrument spojen u dijagonali mosta ne prolazi struja) omogućuje određivanje nepoznate veličine u jednoj grani mosta prema poznatim veličinama elemenata u drugim granama
  - posebno se primjenjuju za mjerenja impedancija (otpora, kapaciteta, induktiviteta)
- **neuravnoteženi mostovi**: odstupanje od ravnotežnog položaja je razmjerno mjerenoj veličini
  - posebno se primjenjuju kod mjerenja neelektričkih veličina (naprezanje, sila)
  - napon na dijagonali mosta je razmjernan mjerenoj veličini: vrlo pogodno za daljnju obradu

## □ Primjenjuju se i kod istosmjerne i kod izmjenične struje

## Wheatstoneov most za istosmjernu struju

- načelo uravnoteženog mosta: metoda za mjerenje otpora
- u jednoj dijagonali mosta nalazi se izvor napajanja, a u drugoj ništični instrument N
- ravnoteža ne ovisi o značajkama instrumenta, niti o naponu napajanja mosta, a postiže se uz  $I_5 = 0$ :



$$I_1 R_1 = I_3 R_3, \quad I_2 R_2 = I_4 R_4$$

$$I_1 = I_2, \quad I_3 = I_4$$

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

# Mosne metode

- za određivanje nepoznatog otpora potrebno je poznavati jedan otpor ( $R_2$  ili  $R_3$ ) te omjer drugih dvaju otpora ( $R_3/R_4$  ili  $R_2/R_4$ )
- promjena mjesta ništičnog detektora i izvora napajanja ne utječe na ravnotežu mosta
- utjecaj termonapona (karakteristična problem kod istosmjerne struje) može se poništiti komutacijom smjera struje: konačna vrijednost je aritmetička sredina rezultata uz oba smjera struje
- očito je da je ovdje potrebno zadovoljiti jedan uvjet ravnoteže

## ■ Osjetljivost mosta

- odnos promjene struje  $I_5$  i odgovarajuće promjene mjerenog otpora  $R_1$ :

$$S = dI_5 / dR_1$$

- najviše nas zanima osjetljivost u blizini ravnoteže,  $S_r$ , kada je  $R_1 = R_{1r} = R_2 R_3 / R_4$ :

$$S_r = (dI_5 / dR_1)_{R_1=R_{1r}}$$

- razlika otpora u blizi ravnoteže je  $\Delta R_1 = R_1 - R_{1r}$ , a pripadno relativno odstupanje mjerenog otpora je  $\delta R_1 = \Delta R_1 / R_{1r}$ , pa je  $\Delta I_5 = S_r \cdot \Delta R_1$
- konačno slijedi da je (za pojednostavnjeni slučaj  $R_0 = 0$ )

$$\delta R_1 = \frac{\Delta I_5}{U} \left[ R_{1r} + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \left( \frac{R_{1r}}{R_2} + 2 + \frac{R_2}{R_{1r}} \right) \right]$$

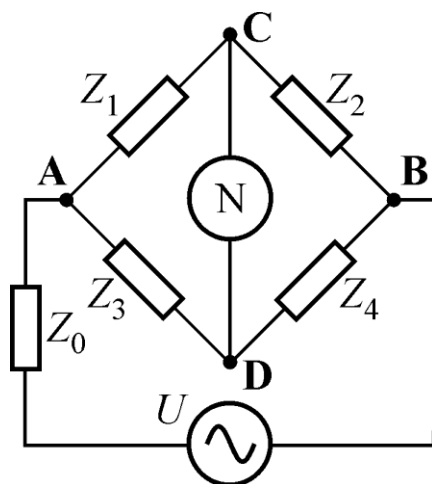
## □ Wheatstoneov most za izmjeničnu struju

- ako umjesto otpora  $R_1, \dots, R_4$  imamo impedancije  $\underline{Z}_1, \dots, \underline{Z}_4$ , dobit ćemo ravnotežu kada je zadovoljeno:

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$$

- odavde slijede dva uvjeta ravnoteže koje treba ispuniti (tj. za modul i fazu):

$$\begin{aligned} Z_1 Z_4 &= Z_2 Z_3 \\ \varphi_1 + \varphi_4 &= \varphi_2 + \varphi_3 \end{aligned}$$



- postupak uravnoteženja je iterativan (ugađanjem dvije veličine), a želi se postići neovisnost ugađanja tj. da su ugađanja amplitude i faze međusobno neovisna - važna je konvergencija mosta
- impedancije u pojedinim granama mogu biti različitog karaktera (otpor, induktivitet, kapacitet) pa o tome ovisi i (specifična) izvedba Wheatstoneova mosta za izmjeničnu struju (redovito posebnog naziva)

# Mjerni otpornici

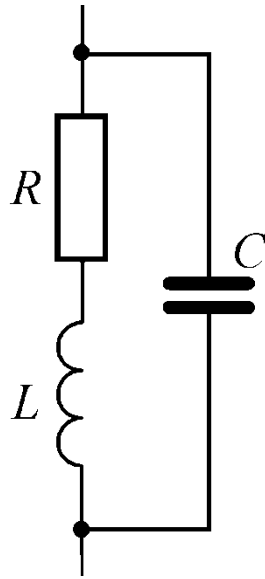
---

- **Mjerni otpornici su elementi koji utjelovljuju električki otpor s velikom točnošću i u najvećoj mogućoj mjeri potisnutim parazitskim utjecajima**
- **Relativna mjerna nesigurnost najboljih izvedbi je  $10^{-6}$**
  
- **Primjena:**
  - kao mjerni shunt za posredno mjerenje struje
  - u naponskim djelilima (za mjerenje viših napona)
  - u mjernim mostovima
  
- **Otpornik je definiran:**
  - iznosom otpora  $R$  i njegovom dopustivom promjenom (npr. tijekom 1 god.)
  - dopuštenom snagom ili dopuštenom strujom
  - temperaturnom karakteristikom



# Mjerni otpornici

## □ Nadomjesna shema otpornika



$$\underline{Z} = \frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\text{Re}(\underline{Z})} = \omega \left[ \frac{L}{R} (1 - \omega^2 LC) - RC \right]$$

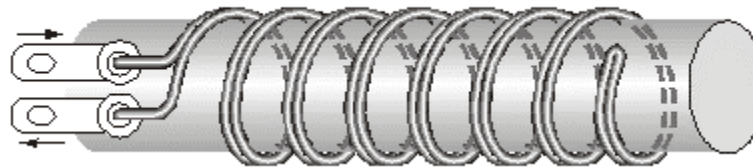
- **Pri izmjeničnoj struji postoji fazni pomak između napona na otporniku i struje kroz otpornik:  $\varphi = \omega\tau$**

- **Na niskim frekvencijama (< 20 kHz) vrijedi:**

$$\tau \approx \frac{L}{R} - RC$$

## □ Minimiziranje učinaka neželjenih $L$ i $C$

- manji induktivitet postiže se smanjenjem površine presjeka tijela otpornika (plosnate izvedbe) ili načinom namatanja (npr. bifilarni namot)



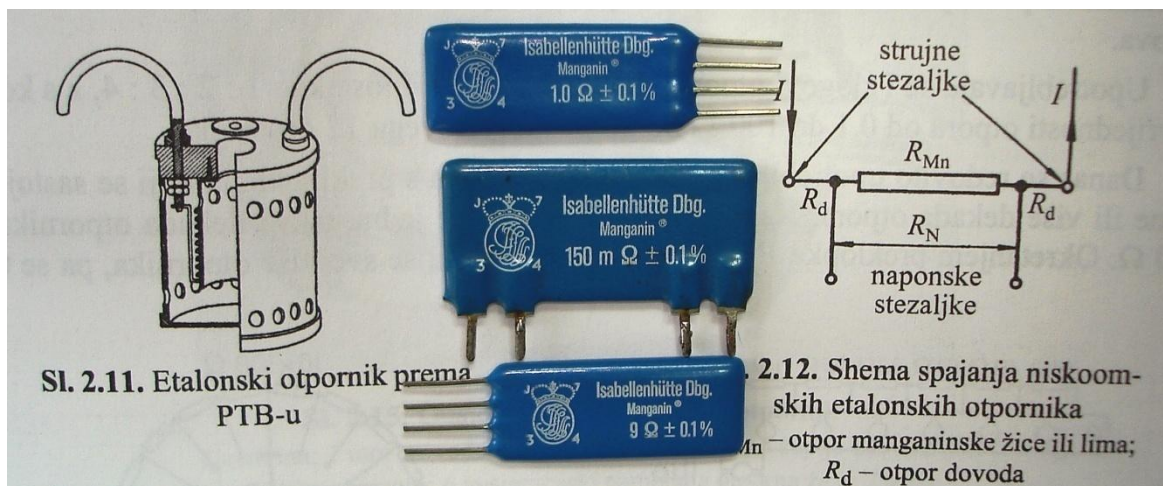
- kapacitet dolazi do izražaja kod visokoomskih otpornika, kada se rabe izvedbe s više sekcija (npr. Chaperonov namot)
- uz  $L/R = RC$ , vremenska stalnica bit će jednaka nuli (iako  $L$  i  $C$  postoje)
- dobri otpornici imaju malu vremensku stalnicu koja se izražava u nanosekundama (ns)

# Mjerni otpornici

---

- **Žičana izvedba, za veće snage (1  $\mu\Omega$  do 100 k $\Omega$ , do 10 W), traka ili žica od manganina, izaoma, konstantana, izabelina**
  - manganin: 84 % bakra, 12 % mangana i 4 % nikla; termonapon prema bakru  $<2 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ , otpornost 0,48  $\mu\Omega\cdot\text{m}$ , temperaturni koeficijent  $<10 (\mu\Omega/\Omega)/^\circ\text{C}$
  
- **Slojna izvedba, za manje snage (1  $\Omega$  do 100 M $\Omega$ , 25 mW do 1 W), sloj metala ili metalnog oksida naparen na izolacijsku podlogu (porculan, staklo, keramika)**
  - Vishay otpornici: odlična vremenska stalnost, vrlo točno ugađanje, temperaturni koeficijent  $<1 (\mu\Omega/\Omega)/^\circ\text{C}$

# Mjerni otpornici



## □ Temperaturna ovisnost:

- za temperaturni interval od 0 °C do 100 °C vrijedi nadomještanje s dva parametra

$$R_v = R_{\text{ref}} \left[ 1 + \alpha(v - v_{\text{ref}}) + \beta(v - v_{\text{ref}})^2 \right]$$

- u užem temperaturnom području može se nadomjestiti samo linearnom promjenom

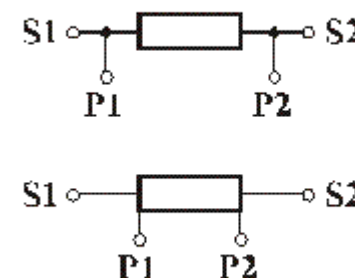
## □ Strujno opterećenje:

- prolaskom struje kroz otpornik razvija se Jouleova toplina  $P = I^2 R$
- poželjno je što manje jer utječe na poznavanje otpora

# Mjerni otpornici

## ■ Četiri stezaljke otpornika

- dvije strujne (S1 i S2) – za dovod struje (vanjske)
- dvije naponske (P1 i P2) – za "mjerenje" napona (unutrašnje, definiraju otpor)
- kod većih struja razlikuju se po obliku i veličini
- **Fundamentalno: bilo kakvo točnije mjerenje otpora treba biti četverožično!**

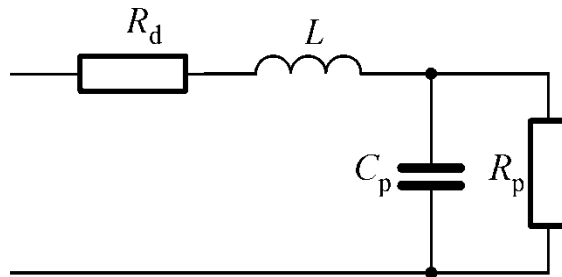


# Mjerni kondenzatori

## □ Od mjernih kondenzatora zahtijevamo:

- da njihov  $C$  bude točno poznat, vremenski stalan, neovisan o temperaturi, naponu i frekvenciji, te da bude što "čišći"
- vrlo veliki izolacijski otpor između elektroda (koji postoji zbog polarizacije i provodnih struja, a predstavljamo ga djelatnim otporom  $R_p$ )
- neznati otpor dovoda (predstavljamo ga sa  $R_d$ )
- neznatni vlastiti induktivitet  $L$

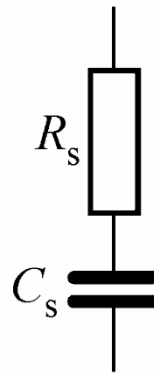
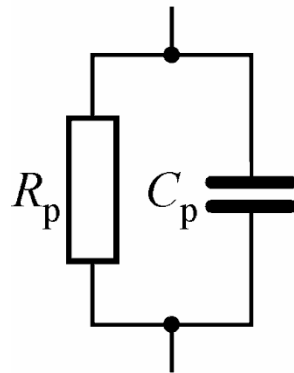
## □ Nadomjesna shema realnog kondenzatora (za VF)



Kod određene frekvencije (reda megaherca) nastupa serijska rezonancija, nakon koje kondenzator iskazuje induktivni karakter!

# Mjerni kondenzatori

- Često je za realni kondenzator (i niže frekvencije) dovoljno nadomjestiti gubitke otporima  $R_s$  ili  $R_p$ , kad rabimo **dvoelementnu nadomjesnu shemu**



$$C_s = C_p (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)$$

- Gubitke u kondenzatoru definiramo tangensom kuta gubitaka  $\operatorname{tg} \delta$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega R_p C_p} = \omega R_s C_s$$

Osim ovih veličina,  $\operatorname{tg} \delta$  ovisi i o temperaturi i o naponu na kondenzatoru!

$\operatorname{tg} \delta$ :  $10^{-5}$  (kvarc),  $10^{-4}$  (tinjac),  $10^{-3}$  (plastične mase)



# Mjerni kondenzatori

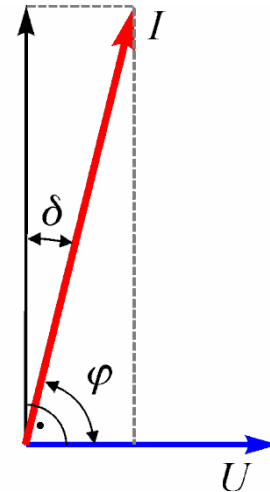
- Zbog navedenih parazitnih elemenata, fazni pomak između  $U$  i  $I$  nesavršenog kondenzatora je  $-(\pi/2 - \delta)$

- Struja kondenzatora

$$I \approx U\omega C, \sin \delta \approx \delta$$

- Gubitci u kondenzatoru

$$P = UI \cos \varphi = UI \sin \delta \approx U^2 \omega C \delta$$



- Tlačni kondenzatori

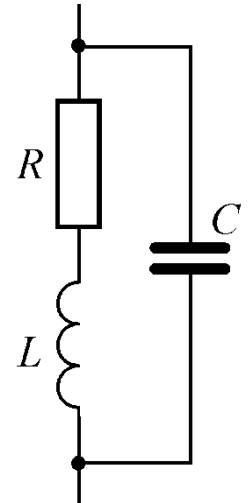
- za visokonaponska mjerenja, punjeni su komprimiranim plinom (dušik ili  $\text{SF}_6$ )
- visoka probojna čvrstoća (npr. 270 kV uz 1 cm razmaka i tlak od 15 atmosfera)

# Mjerni kondenzatori



# Mjerni svitci

- ❑ Namataju se na neferomagnetska tijela da bi se izbjegao utjecaj nelinearne ovisnosti permeabilnosti o struji koja protječe svitkom, te gubitci zbog histereze i vrtložnih struja
- ❑ Nadomjesna shema:
  - faktor dobrote:  $Q = \omega L/R$
  - na VF utjecaj parazitskog  $C$  (rezonancija) i ovisnost  $R$  o frekvenciji (skin-efekt)



- **Dvoelementna nadomjesna shema: realni svitak nadomještavamo serijskom kombinacijom efektivnog otpora  $R_e$  i induktiviteta  $L_e$**

$$Z = R_e + jL_e$$

$$R_e \approx R(1 + 2\omega^2 LC)$$

$$L_e \approx L(1 + \omega^2 LC)$$

- rezonancija nastupa na frekvenciji

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

# Mjerenje induktiviteta

---

## ▣ Metode mjerenja induktiviteta

- $\mathcal{U}$ - $I$  metoda
- Mosne metode
- Digitalni RLC mostovi

## ▣ Induktivitet kao mjerna veličina

- etaloni induktiviteta
- induktivitet zračnog svitka
- induktivitet namota stroja ili namota transformatora
- rasipni induktiviteti transformatora
- ...

## ▣ Raspon mjerljivih vrijednosti

- od nanohenria (nH) do kilohenria (kH) – i jedno i drugo su ekstremne vrijednosti

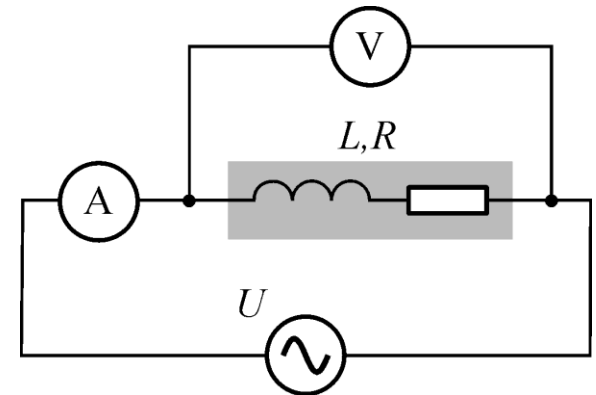
# Mjerenje induktiviteta

## □ $U$ - $I$ metoda

- to je posredna metoda mjerenja, a realni induktivitet nadomješta se dvoelementnom nadomjesnom shemom: serijskim spojem induktiviteta i djelatnog otpora
- nepoznati induktivitet određuje se na temelju izmjerene impedancije  $Z$  kad se mjerenje provodi izmjeničnom strujom, s pomoću napona  $U$  na njemu i struje  $I$  kroz njega (radi se o njihovim efektivnim vrijednostima)

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{U_{\text{ef}}}{I_{\text{ef}}}\right)^2 - R^2} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{U_{\text{ef}}}{I_{\text{ef}}}\right)^2 - \left(\frac{U_{\text{dc}}}{I_{\text{dc}}}\right)^2}$$



- osim impedancije  $Z$  potrebno je odrediti i djelatni otpor  $R$ , koji se mjeri istosmjernom strujom nekom od metoda (ili izravnog mjerenja, ili posrednog mjerenja ponovno  $U$ - $I$  metodom)
- $U$ - $I$  metoda primjenjiva je samo kod svitaka s neferomagnetskom jezgrom (odnosno tzv. zračnih svitaka)

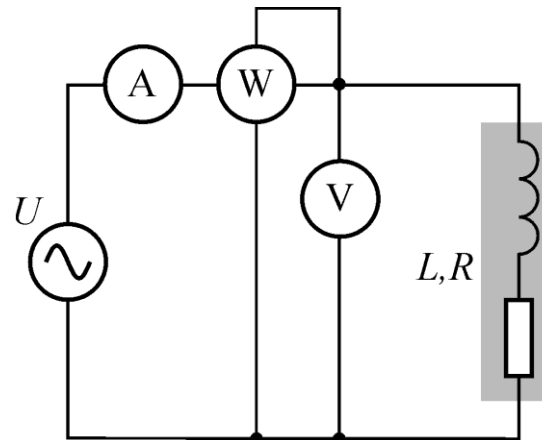
# Mjerenje induktiviteta

## ■ Mjerenje induktiviteta svitka s feromagnetskom jezgrom

- zbog gubitaka u feromagnetskoj jezgri dolazi prividno do povećanja djelatne komponente
- osim mjerenja napona i struje, potrebno je mjeriti i djelatnu snagu gubitaka kod izmjenične struje
- umnožak mjerenog napona  $U$  i struje  $I$  daje prividnu snagu  $S$ , dok se djelatna snaga  $P$  mjeri vatmetrom
- jalova snaga  $Q$  razmjerna je mjerenom induktivitetu  $L$
- radi bolje točnosti mjerenja potrebno je uzeti u obzir i korekcije zbog potroška instrumenata

$$UI = \sqrt{(\omega LI^2)^2 + P^2}$$

$$L = \frac{\sqrt{U^2 I^2 - P^2}}{\omega I^2}$$



# Mjerenje induktiviteta

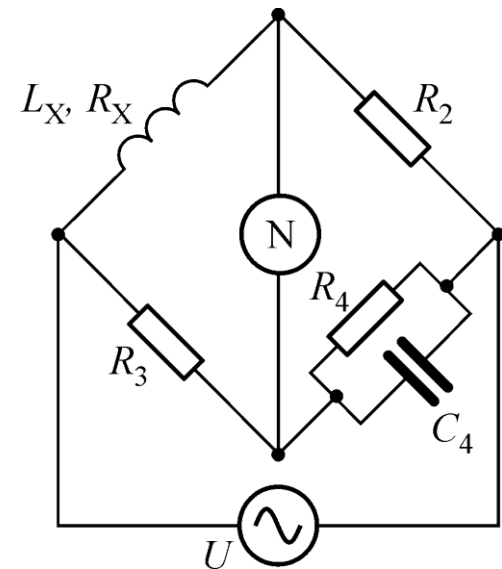
## ■ Maxwellov most

- kod izmjeničnih mostova potrebno je ugađati dvije veličine (odnosno postoje dvije jednačbe za uvjet ravnoteže)
- neovisno ugađanje ravnoteže postiže se ovdje s  $R_4$  i  $C_4$
- impedancije u granama mosta

$$\underline{Z}_1 = R_X + j\omega L_X \quad \underline{Z}_2 = R_2$$
$$\underline{Z}_3 = R_3 \quad \underline{Z}_4 = \frac{R_4}{1 + j\omega R_4 C_4}$$

- u ravnoteži vrijedi:

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$
$$L_X = R_2 R_3 C_4$$



- načelno, ravnoteža ne ovisi o frekvenciji niti o naponu napajanja
- osim ovog mosta postoji još i most s promjenjivim induktivitetom, Owenov most, i dr.



# Mjerenje kapaciteta

## Wienov most

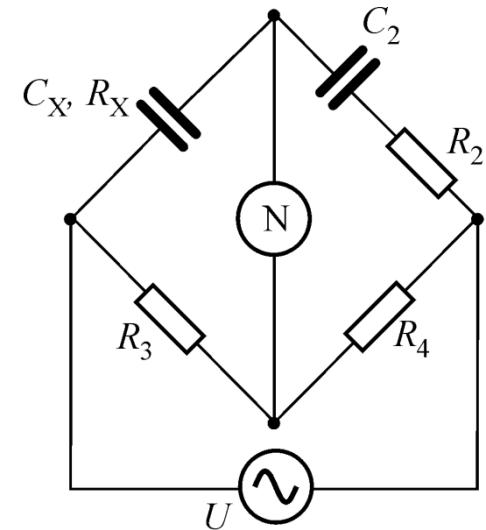
- ovdje je mjereni kondenzator nadomješten serijskim spojem kapaciteta  $C_X$  (kojeg želimo izmjeriti) i djelatnog otpora  $R_X$
- neovisno ugađanje postiže se s  $R_2$  i  $C_2$
- impedancije u granama mosta

$$\underline{Z_1} = R_X + \frac{1}{j\omega C_X} \quad \underline{Z_2} = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}$$
$$\underline{Z_3} = R_3 \quad \underline{Z_4} = R_4$$

- u ravnoteži vrijedi:

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$
$$C_X = C_2 \frac{R_4}{R_3}$$
$$\operatorname{tg} \delta = \omega R_X C_X = \omega R_2 C_2$$

- načelno, kut gubitaka  $\operatorname{tg} \delta$  mjerenih kondenzatora redovito je vrlo malen, pa se dobro ugađanje postiže i s promjenom  $R_2$  i  $R_3$ , ili  $R_2$  i  $R_4$



# Mjerenje kapaciteta

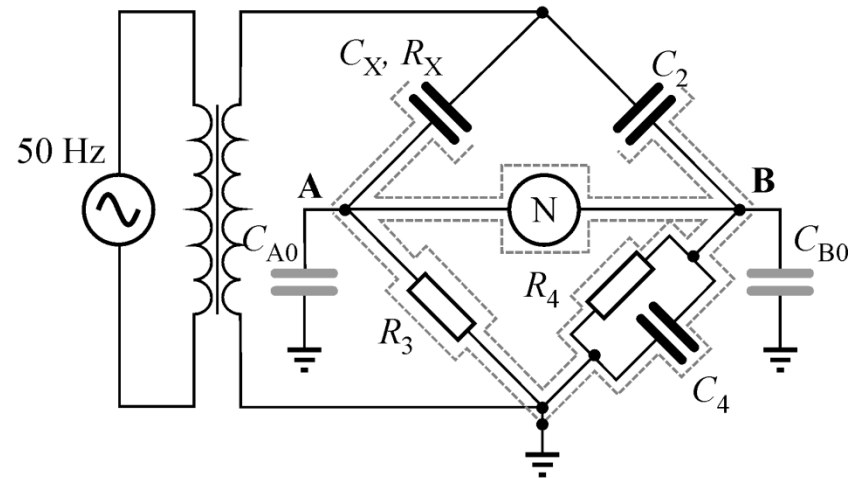
## □ Scheringov most

- ovdje je mjereni kondenzator nadomješten serijskim spojem kapaciteta  $C_X$  (kojeg želimo izmjeriti) i djelatnog otpora  $R_X$
- prvenstveno se rabi za mjerenje kuta gubitaka električne opreme i izolacijskih materijala, naročito pri visokim naponima i pri frekvenciji mreže od 50 Hz
- neovisno ugađanje postiže se s  $R_4$  i  $C_4$
- impedancije u granama mosta (uz zanemarenje parazitnih kapaciteta  $C_{A0}$  i  $C_{B0}$ )

$$\underline{Z_1} = R_X + \frac{1}{j\omega C_X} \quad \underline{Z_2} = \frac{1}{j\omega C_2}$$
$$\underline{Z_3} = R_3 \quad \underline{Z_4} = \frac{R_4}{1 + j\omega R_4 C_4}$$

- u ravnoteži vrijedi:

$$R_X = R_3 \frac{C_4}{C_2}$$
$$C_X = C_2 \frac{R_4}{R_3}$$
$$\operatorname{tg} \delta = \omega R_X C_X = \omega R_4 C_4$$



# Mjerenje kapaciteta

- kako je kut gubitaka  $\text{tg}\delta$  mjerenih kondenzatora vrlo malen, dobro ugađanje postiže i s promjenom  $R_3$  umjesto  $R_4$
- taj kut prvo polagano raste, a kad primijenjeni napon postigne određenu vrijednost počinje njegovo naglo povećanja zbog pojave ionizacije, kojoj izolacija ne smije biti dugo izložena
- mjerenjem naponske ovisnosti kuta gubitaka dobiva se mogućnost ocjene dimenzioniranja izolacije pa se Scheringov most rabi pri ispitivanju izolatora, provodnika, kondenzatora, kabela, strojeva, i dr.
- $C_2$  je (visokonaponski) referentni kondenzator zanemarivog kuta gubitaka
- prednost ovog mosta jest da se ugađanje provodi na elementima koji su na niskom naponu (npr.  $R_4$  i  $C_4$ ), dok je istodobno na mjenom kapacitetu  $C_x$  visoki napon
- kod oklapanja mosta (vidi shemu) pojavljuje se problem parazitnih kapaciteta  $C_{A0}$  i  $C_{B0}$ , odnosno kapaciteta točaka A i B prema uzemljenju – to relativno malo utječe na određivanje  $C_x$  i  $R_x$ , no nešto više na određivanje  $\text{tg}\delta$ , pa tada vrijedi:

$$\text{tg}\delta \approx \omega[R_4(C_4 + C_{B0}) - R_3C_{A0}]$$

# Mjerenje kapaciteta

## □ Glynov most

- ovo je transformatorski most, kod kojeg se uravnotežuju amperzavoji primarnog i sekundarnog namota kad je zadovoljen uvjet

$$\underline{I_1} N_1 = \underline{I_2'} N_1$$

- za prikazani slučaj, kad su u krug ubačeni  $R$  i  $C$  zbog određivanja kuta gubitaka, struje su sljedeće

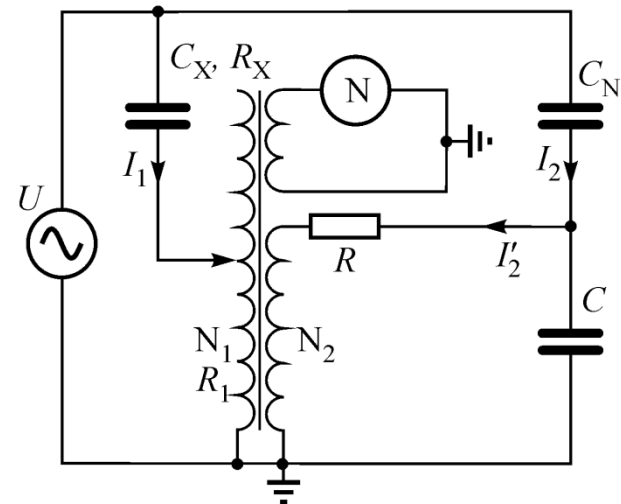
$$\underline{I_1} = \frac{\underline{U}}{\frac{1}{j\omega C_X} + R_X + R_1}$$

$$\underline{I_2'} = \frac{\underline{U}}{\frac{1}{j\omega C_N} + \frac{RC}{C_N} + R}$$

- u ravnoteži vrijedi:

$$C_X = C_N \frac{N_2}{N_1}$$

$$\text{tg}\delta \approx \omega \left[ (C_N + C)R - C_N R_1 \frac{N_2}{N_1} \right]$$



# Mjerenje impedancija RLC mostom

## □ Univerzalni RLC most

- načelo rada ovog mosta može biti sasvim jednostavno: mjerena impedancija  $\underline{Z}_X$  spaja se u seriju s referentnim otporom  $R_N$  te se mjere padovi napona  $\underline{U}_X$  i  $\underline{U}_N$  – tada vrijedi da je

$$\underline{Z}_X = R_N \frac{\underline{U}_X}{\underline{U}_N}$$

- omjer napona je kompleksan pa se  $\underline{Z}_X$ , odnosno pripadna realna i imaginarna komponenta, računaju s pomoću ugrađenog mikroprocesora i postavljenih parametara
- čitav niz ugodivih parametara
  - nadomjesna dvoelementna shema (paralelni ili serijski spoj)
  - frekvencija (npr. od 12 Hz do 100 kHz)
  - napon (npr. od 10 mV do 1,5 V)
  - prikaz mjerene impedancije (npr.  $G_X$  i  $R_X$ , ili  $G_X$  i  $\tan \delta$ )
  - ponavljanje mjerenja, otklanjanje smetnji i dr.
- široki raspon mjerivih vrijednosti: otpora (npr. od 0,01 mΩ do 100 MΩ), induktiviteta (npr. od 0,01 nH do 100 MH) i kapaciteta (od 0,01 pF do 100 F) – ove ekstremne vrijednosti odnosne se na mjerenja omjera prema zadanoj vrijednosti

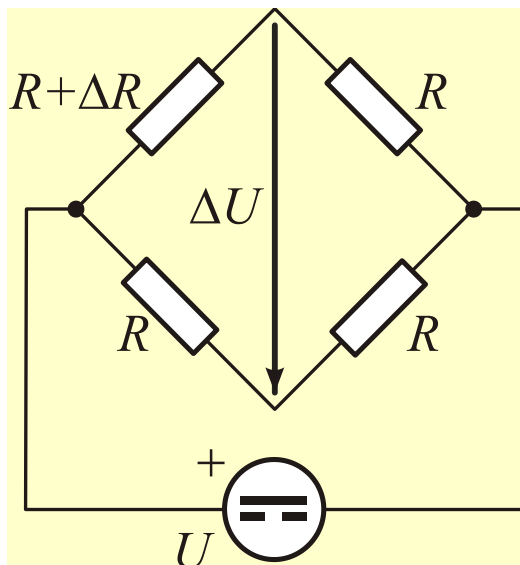
# Neuravnoteženi mostovi

## □ Neuravnoteženi Wheatstoneov most

- napon na dijagonali mosta je izlazna veličina:  $\Delta U/U = f(\Delta R/R)$
- $\Delta U = I_5 R_5$ ; vrlo čest slučaj:  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$
- razmotrit ćemo četiri moguće konfiguracije mosta

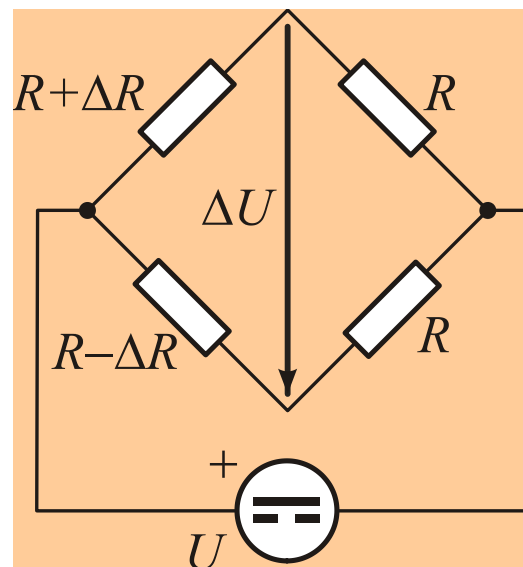
### ČETVRTINSKI MOST

- eng. *quarter bridge*
- $R_1 = R + \Delta R$



### POLOVIČNI MOST

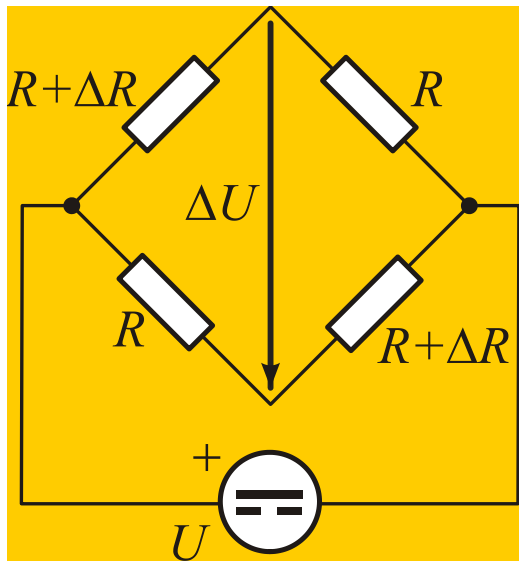
- eng. *half bridge*
- $R_1 = R + \Delta R, R_3 = R - \Delta R$



# Neuravnoteženi mostovi

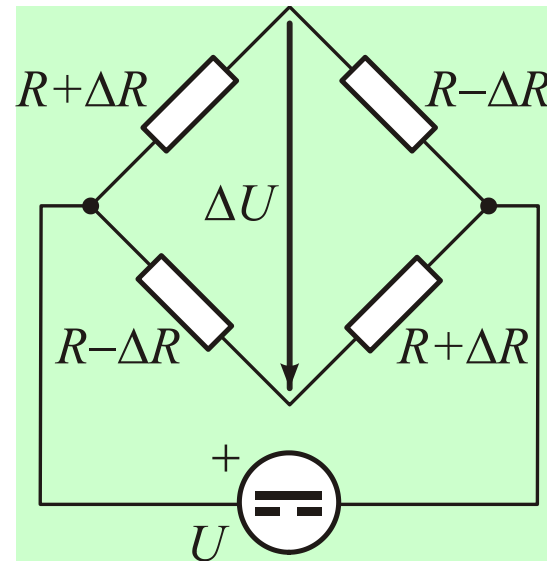
## DIJAGONALNI MOST

- *eng. diagonal bridge*
- $R_1 = R + \Delta R$ ,  $R_4 = R + \Delta R$



## PUNI MOST

- *eng. full bridge*
- $R_1 = R + \Delta R$ ,  $R_2 = R - \Delta R$ ,  
 $R_3 = R - \Delta R$ ,  $R_4 = R + \Delta R$

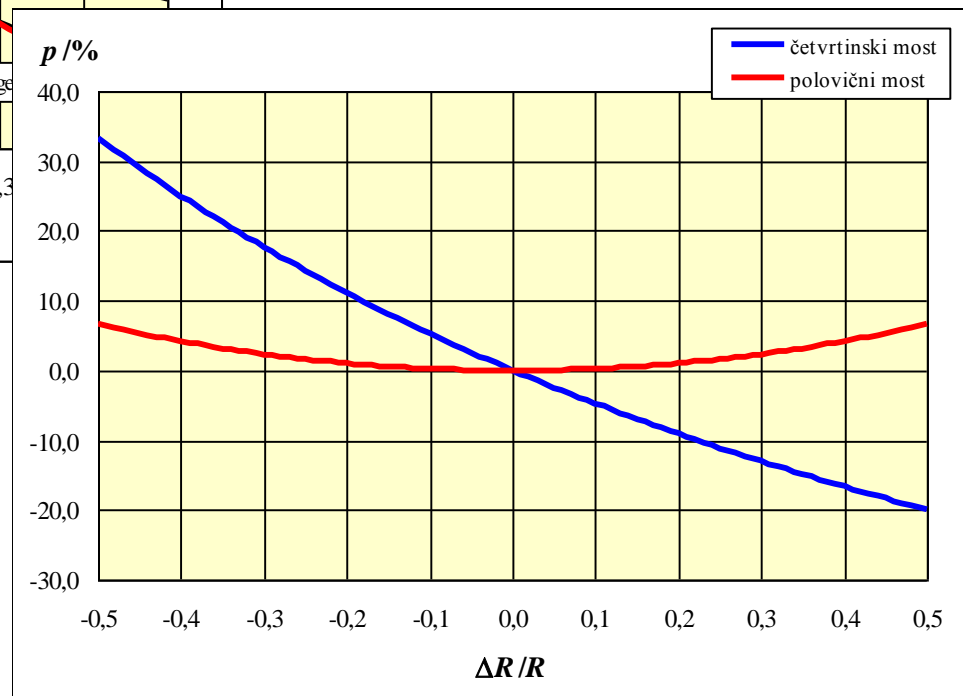
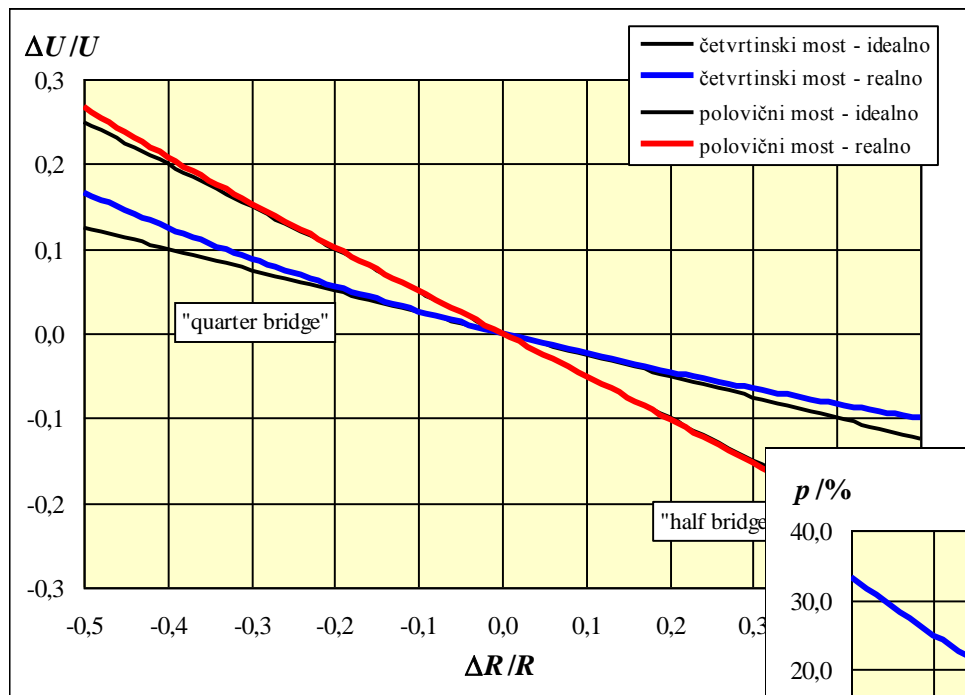


# Neuravnoteženi mostovi

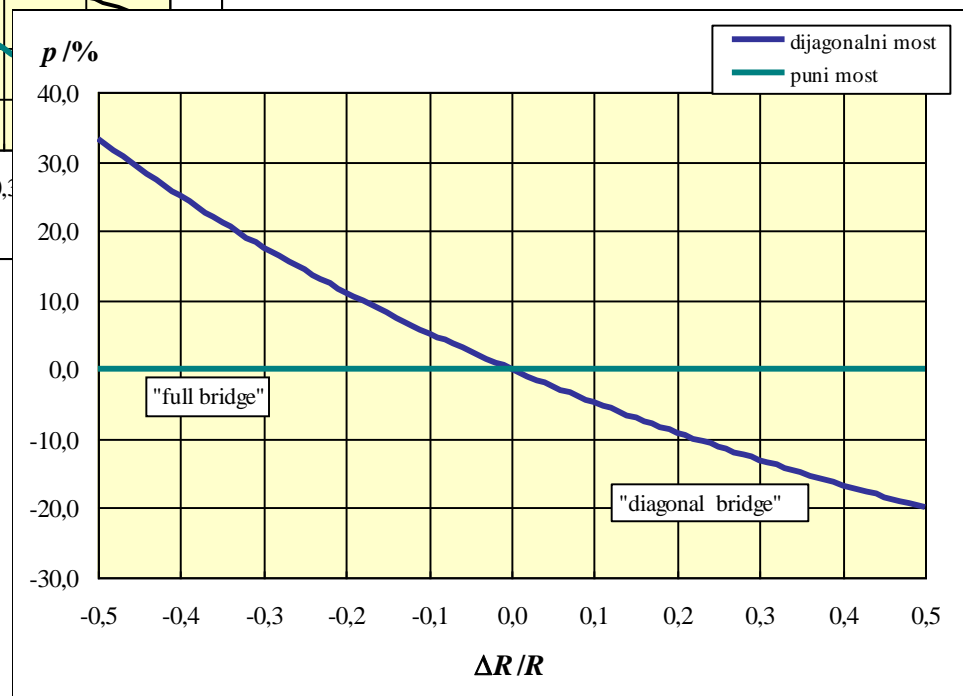
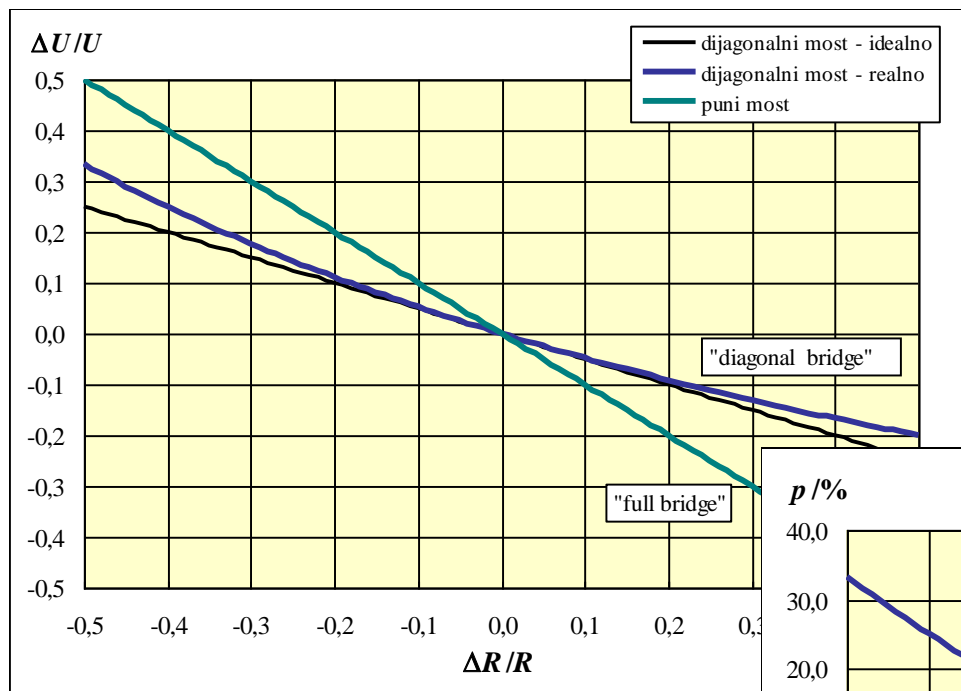
	Relativna promjena napona		
	idealno	stvarno	rel. pogreška
Četvrtinski	$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{1}{4} \frac{\frac{\Delta R}{R}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R}}$	$p_{\%} = \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R}} - 1 \right) \cdot 100\%$
Polovični	$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\Delta R}{R}}{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta R}{R} \right)^2}$	$p_{\%} = \frac{\frac{1}{4} \left( \frac{\Delta R}{R} \right)^2}{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta R}{R} \right)^2} \cdot 100\%$
Dijagonalni	$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\Delta R}{R}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R}}$	$p_{\%} = \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R}} - 1 \right) \cdot 100\%$
Puni	$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{\Delta R}{R}$	$p_{\%} = 0\%$



# Neuravnoteženi mostovi



# Neuravnoteženi mostovi



# Neuravnoteženi mostovi

**Točniji prikaz za relativnu promjenu  $\Delta R/R$  od -1 % do +1 %**

$\Delta R/R$	Četvrtinski		Polovični		Dijagonalni		Puni	
	$(\Delta U/U)_{st}$	$p/\%$	$(\Delta U/U)_{st}$	$p/\%$	$(\Delta U/U)_{st}$	$p/\%$	$(\Delta U/U)_{st}$	$p/\%$
-0,010	0,002513	0,503	0,005000	0,0025	0,005025	0,503	0,0100	0,0
-0,005	0,001253	0,251	0,002500	0,0006	0,002506	0,251	0,0050	0,0
-0,001	0,000250	0,050	0,000500	0,0000	0,000500	0,050	0,0010	0,0
0,001	-0,000250	-0,050	-0,000500	0,0000	-0,000500	-0,050	-0,0010	0,0
0,005	-0,001247	-0,249	-0,002500	0,0006	-0,002494	-0,249	-0,0050	0,0
0,010	-0,002488	-0,498	-0,005000	0,0025	-0,004975	-0,498	-0,0100	0,0

## □ Primjena:

- posebno kod mjerenja naprezanja s pomoću rasteznih traka (strain gauges), kad je promjena otpora u navedenom rasponu od  $\pm 1\%$
- napajanje može biti i istosmjernom i izmjeničnom strujom
- izlazna veličina je napon (a to je veličina koju možemo jednostavno i najtočnije mjeriti, te pretvoriti u digitalni zapis)

# Zaključak

---

- **Prikazane su različite metode mjerenja otpora istosmjernom strujom**
- **Prikazane su osnove mosnih metoda i primjene uravnoteženih mostova**
- **Prikazane su metode mjerenja induktiviteta i kapaciteta**
- **Prikazane su osnove mjerenja neuravnoteženim mostovima**

# 1. primjer

---

## Mjerenje otpora

Otpor  $R_x$  mjereno je  $U$ - $I$  metodom u spoju za mjerenje malih otpora. Napon je mjereno voltmetrom karakterističnog otpora  $2 \text{ k}\Omega/\text{V}$  na mjernom opsegu  $100 \text{ V}$ , a struja ampermetrom na mjernom opsegu  $1 \text{ A}$  unutrašnjeg otpora  $1 \text{ }\Omega$ . Koliki je njegov otpor ako je na voltmetru očitano  $57 \text{ V}$ , a na ampermetru  $0,85 \text{ A}$ ?

**Rješenje:  $R_x = 67,1 \text{ }\Omega$**

## 2. primjer

- **Naprezanje na objektu mjerimo neuravnoteženim mostom koji ima jedno otporničko osjetilo (uz to, otpori u svim granama su istih nazivnih vrijednosti od  $600\ \Omega$ ). Ako je stvarna relativna promjena napona određena s  $\frac{\Delta U}{U} = -\frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R} \left/ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R} \right) \right.$ , odredite:**

- odstupanje od linearosti (relativnu pogrešku) ako je mjereno naprezanje koje prouzročuje promjenu otpora za  $\Delta R = 3,6\ \Omega$
- uz pretpostavku da će najveća mjerena relativna promjena otpora biti 2 %, koliko najviše smiješiti griješiti digitalni voltmetar (koji mjeri napon na dijagonali) ako želimo da njegov utjecaj pritom bude manji od 1/5 pogreške zbog nelinearnosti

$$p_{\%} = \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R}} - 1 \right) \cdot 100\% = \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2} 0,006} - 1 \right) \cdot 100\% = -0,3\%$$

$$\left( \frac{\Delta R}{R} \right)_{\max} = 0,02 \Rightarrow (p_{\%})_{\max} = -0,99\%$$

$$(p_{\text{DV}\%})_{\max} = \frac{1}{5} |(p_{\%})_{\max}| = 0,198\%$$

### 3. primjer

- **Napon dijagonale neuravnoteženog mosta, kojeg spajamo na ulaz pojačala nazivnog pojačanja 60 dB, mjerimo na izlazu pojačala digitalnim voltmetrom na mjernom opsegu 10 V. Poznati su nam sljedeći podaci: točnost pojačanja pojačala  $\pm 0,8$  te točnost instrumenta definirana kao  $\pm(5 \cdot 10^{-4}$  of reading +  $8 \cdot 10^{-4}$  of range). Ako smo voltmetrom izmjerili napon 3,755 V izračunajte:**
- napon na dijagonali mosta
  - složenu standardnu nesigurnost  $u_c(y)$  tog napona

$$U_d = \frac{U_V}{A} = 3,755 \text{ mV}$$

$$u_{cr}(U_d) = \sqrt{u_r^2(U_V) + u_r^2(A)} = 1,587 \cdot 10^{-3}$$

$$u_r(U_V) = \frac{u(U_V)}{U_V} = \frac{a_U}{U_V \sqrt{3}} = 1,519 \cdot 10^{-3}$$

$$u_r(A) = \frac{u(A)}{A} = \frac{a_A}{A \sqrt{3}} = 4,619 \cdot 10^{-4}$$

$$u_c(U_d) = u_{cr}(U_d) \cdot U_d = 5,961 \mu\text{V}$$