4. Diferencijalne jednadžbe prvog reda — uvod

$xy' + x^2y^3 = 0$, $y(x) = ?$ $\qquad y''' + xy'' - x^2y = 0$

prvog reda $\qquad$ 3. reda

4.1. SEPARACIJA VARIJABLI

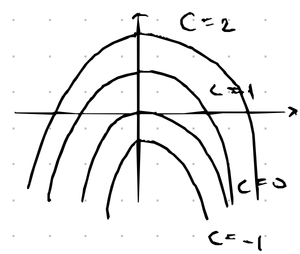
Općenito dif. jedn. prvog reda ima oblik $y' = f(x,y)$, $y(x) = ?$

Pr.) $y' = -x \;\; // \int dx$ $\qquad$ (direktno integriranje)

$$y = -\frac{x^2}{2} + C$$

$\Rightarrow$ opće rješenje, geom. je to familija krivulja

program crta:



- ako gledamo jedno konkretno rješenje (tj. jednu integralnu krivulju) $\Rightarrow$ PARTIKULARNO RJEŠENJE
  - ↳ dobijemo ga iz početnog uvjeta
    - FIZ - početni položaj, brzina, akceleracija...
    - npr. $y(0) = 1$ $\Rightarrow$ uvrstimo u opće rješenje i dobijemo

$1 = -0 + C \rightarrow C = 1$ $\qquad$ tj. partikularno $y = -\frac{x^2}{2} + 1$

Cauchyjev problem: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x) = y_0 \end{cases}$

Separacija varijabli: $y' = f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

↳ ako se može rastaviti na umnožak

Pr.) $y' = -\frac{\cancel{x}^2 y^3}{\cancel{x}}$ * ne možemo integrirati jer imamo y
↳ treba separirati

$$\frac{dy}{dx} = -xy^3 \quad /:y^3$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y^3 = -x \quad / \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y^3} = -x \cdot dx \quad / \int$$

$$\int \frac{dy}{y^3} = -\int x\,dx$$

$$-\frac{1}{2} \cdot y^{-2} = -\frac{1}{2}x^2 + c \quad / \cdot (-2)$$

$$\frac{1}{y^2} = x^2 + C$$ — ne moramo baš sad pisati $-2c$ jer to je i tako konstanta

$$y^2 = \frac{1}{x^2+C}$$

uz početni uvjet: $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{0+C} \Rightarrow c = 1$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$$

jer je uvjet $y(0)=1$ što je pozitivno $\Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$

→ $y^3 \neq 0$ (dijelili smo s y^3) → tj $y \neq 0$

zato moramo ekstra provjeriti:

$y = 0$: uvrstimo u početni :

$$xy' + x^2y^3 = 0 \longrightarrow y' = -xy^3$$

$$0 = 0 \checkmark$$

Znači, konačno rješenje je $\boxed{y^2 = \frac{1}{x^2+C} \quad \text{i} \quad y = 0}$

* $C \in \mathbb{R}$

Zad.: $xy' = 2y$

$x \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \cdot y \ / \cdot \frac{dx}{x \cdot y} \neq 0$

$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \ / \int$

$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = 2\ln|x| + C$ → c je konst i možemo ju napisati u kojem god obliku

Im f od ln je $\langle -\infty, +\infty \rangle$ i time ništa ne ograničavamo

$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|c|$

$\ln|y| = \ln|x^2 \cdot c| \ / e$ $\quad * \ C \in \mathbb{R}$

$|y| = |C \cdot x^2|$

$y = \pm C \cdot x^2 \implies \boxed{y = Cx^2}$

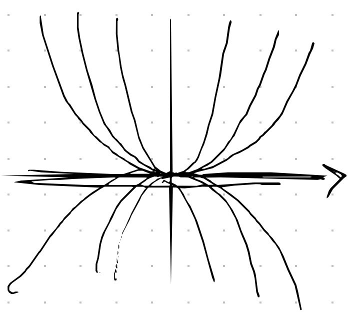
again, to je konstanta i to ne moramo pisati

posebni slučaj:

$y = 0 : \quad 0 = 0$ ✓

ali nema potrebe pisati jer je sadržano unutar općeg za $c = 0$ (možemo, ali ne moramo)

kada bi crtali:



i $y = 0$!

Zad.) $x^2y' + ch^2(\overbrace{y-2x+1}^{z}) = 2x^2$

najveća komplikacija

- supstitucija: $z = y - 2x + 1 \;/\frac{d}{dx}$

$$z' = y' - 2 \Longrightarrow y' = z' + 2$$

$$x^2(z^2+2) + ch^2(z) = 2x^2$$

$$x^2z^2 \cancel{+2x^2} + Ch^2(z) = \cancel{2x^2}$$

$$x^2\frac{dz}{dx} = -ch^2(z)$$

kad se separira

$$\int\frac{dz}{Ch^2(z)} = -\int\frac{dx}{x^2}$$

$$th(z) = \frac{1}{x} + C$$

$$th(y-2x+1) = \frac{1}{x} + c \;/ artgh$$

opće rj: $y - 2x + 1 = arth(\frac{1}{x} + c)$

$$\boxed{y = 2x - 1 + arth(1/x + c)}$$