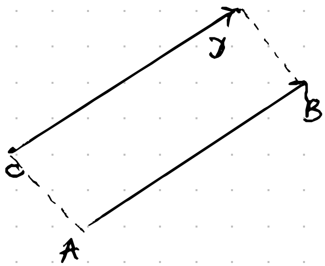
5.1. OPERACIJE S VEKTORIMA

Vektori
• veličine koje ne opisujemo samo brojem već i smjerom

5.1.1. $\boxed{\text{DEF}}$ Vektora



• Usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ za koju se zna početna točka A i završna točka B

• dvije dužine su ekvivalentne ako se jedna može dobit translacijom druge
↳ tj. ABDC je paralelogram
→ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Kako je opisan vektor?
Ako se zna:

nosač
• pravac na kojem se nalazi

orijentacija

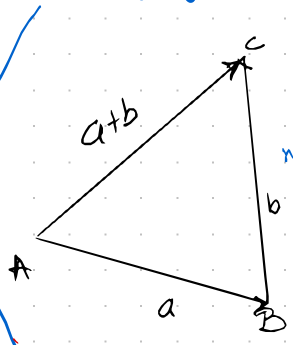
smjer objedinjuje oboje

duljina vektora
$|\overrightarrow{AB}|$ – udaljenost $d(A,B)$ točaka A i B

Nul vektor – vektor duljine 0
↳ $0 = \overrightarrow{AA}$ → nema smjer

Radij-vektor
• skup svih vektora = V
(2D) V^2 → vektori ravnine
(3D) • V^3 – vektori prostora

Zbrajanje vektora



Svojstva zbrajanja

asocijativnost 1) $(a+b)+c = a+(b+c)$

neutralni el. 2) $a+0=0+a=a$

suprotan a 3) $(\forall a\in V)(\exists a'\in V)\ a+a'=a'+a=0$

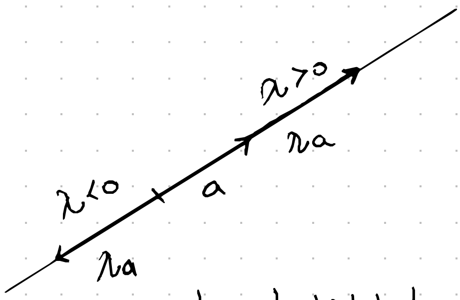
komutativn. 4) $a+b=b+a$

Oduzimanje vektora : operacija zbrajanja sa suprotnim

$a-b=a+(-b)$

Množenje vektora skalarom $(\cdot)$; $(\times)$

$\mathbb{R}\times V \longrightarrow V$; za realan broj λ vektor λa ima



$|\lambda a| = |\lambda|\cdot|a|$

: nosač identičan nosaču a (pravac na kojem se nalazi)

- Ako je $\lambda>0$ → istu orijentaciju
- ako je $a<0$ → suprotnu orijentaciju

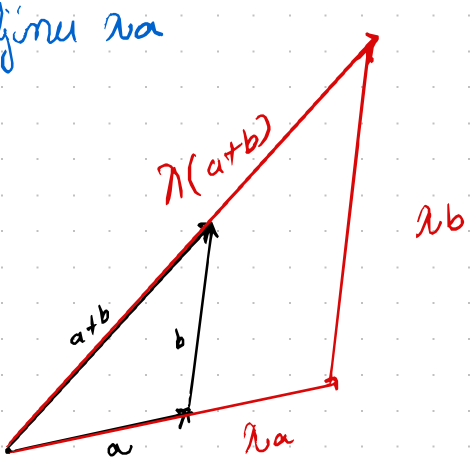
duljinu λa

Svojstva množenja

5) $\lambda(a+b) = \lambda a+\lambda b$

6) $(\lambda+\mu)a = \lambda a+\mu a$

7) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$



8) $1\cdot a = a$; $-1\cdot a = -a$

Jedinični vektor $a\neq 0$ $[\hat{a}]$ oznaka

↳ isti smjer kao a i duljina mu je 1

$$\hat{a} = \frac{1}{|a|}a = \frac{a}{|a|}$$

vektor a pomnožimo s recipročnom duljinom

VEKTORSKI PROSTOR = V^3

• svaki skup na kojem su definirane dvije op — zbrajanje vektora, množenje skalarom

⇓ zadovoljena svojstva 1 ~ 8

→ to je vektorski prostor

→ Linearna nezavisnost

Vektori $a_1, a_2 \dots a_3$ su linearno nezavisni ako:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = 0$$

→ nužno slijedi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ [da su skalari jednaki nuli]

=> drugim riječima njihova linearna kombinacija iščezava samo na trivijalan način

→ Dimenzija i baza prostora

dimenzija : najveći br. linearno nez. vektora u nekom V^3

↳ n

Baza : čini ju svaki skup $\{a_1, a_2, a_3 \dots a_n\}$ vektora tog prostora koji su lin. nez.

& koji razapinju čitav prostor

↳ imaju svojstvo da se vektor a može zapisati

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots x_n a_n$$

Broj n je dimenzija

Linearna kombinacija i prostor razapet vektorima

Linearna komb. (vektora $a_1 \dots a_k$) je vektor oblika: $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k$

($x_1 \dots x_k$ po volji odabrani skalari)

↳ bilo koji vektori iz V^n

skup svih takvih linearnih kombinacija

= PROSTOR RAZAPET VEKTORIMA $a_1, \dots a_k$

$$L(a_1, \dots, a_k) = \{X : X = x_1 a_1 + \dots + x_k a_k, \quad x_i \in \mathbb{R}\}$$

* $V^1 = L(a)$ $\quad V^2 = L(a_1, a_2)$ $\quad V^3 = L(a_1, a_2, a_3)$

↓

dvodimenzionalan prostor = max 2 vektora lin nezavisna

Primjer 1.) V^2 - dvodimenzionalni prostor

bilo koja 2 nekolinearna vektora

→ tada su vektori a_1 i a_2 lin. nezav.

∟ svaki treći vektor prostora V^2 može se izraziti kao linearna vektora a_1 i a_2

$$V^2 = L(a_1,a_2) = \{a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

: a_1 i a_2 čine bazu

: dimenzija je 2

ako vektor a pišemo preko linearne komb. vektora a_1 i a_2

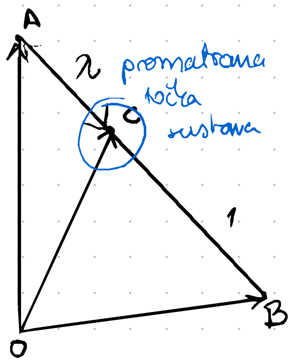
točno ∟→ vektor a smo rastavili u komponente po vektorima a_1 i a_2

Primjena i primjer)

Točka C dijeli dužinu AB u omjeru $\lambda:1$, $(\lambda>0)$

$$d(A,C):d(C,B)=\lambda:1$$

Prikaži vektor $\vec{OC}$ kao linearnu komb. vektora $\vec{OA}$ i $\vec{OB}$



$|AC|:|CB| = \lambda:1$

$|AC| = \lambda|CB| \rightarrow \vec{AC} = \lambda\vec{CB}$ isti nosač i smjer.

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \lambda\vec{CB}$$

$$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$$

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$$

radijvektor

$\vec{OT}$ → promatrana točka

O ↓ ishodište (nepomična)

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \lambda(\vec{OB} - \vec{OC})$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \lambda\vec{OB} - \lambda\vec{OC}$$

$$\vec{OC} + \lambda\vec{OC} = \vec{OA} + \lambda\vec{OB}$$

$$\vec{OC}(1+\lambda) = \vec{OA} + \lambda\vec{OB}$$

$$\vec{OC} = \frac{1\cdot\vec{OA}}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{OB}$$

$$t = \frac{1}{1+\lambda}$$

$$1 - \frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{1+\lambda-\lambda}{1+\lambda} \Rightarrow$$

radijvektor

$$\boxed{\vec{OT} = t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB}}$$

t je skalar

$t \in [0,1]$

* ako je $\vec{OT}$ polovište onda je $\boxed{\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})}$

Težište trokuta

Odaberemo li koeficijente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$, točka T bit će težište trokuta.

Za težište vrijedi: $\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$