

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA**

**A. Pavić - I. Felja**

**OSNOVE ELEKTROTEHNIKE**

**Primjeri i zadaci za vježbu**

**1. dio**

Zagreb 2013

## Predgovor

Iskustvo s ispitima pokazuje da studenti i kada razumiju zadatke na ispitu, tijekom trajanja ispita najčešće ne stignu obraditi i točno riješiti sve zadatke koje razumiju. Osnovni razlog tome jest nedostatak rutine u rješavanju, tj. nedovoljan broj samostalno riješenih zadataka.

Namjena ove zbirke je dati širi izbor zadataka, grupiranih po tjednima nastave (a unutar njih po temama nastavnog programa) koji će omogućiti samostalno pripremanje međuispita i završnog ispita, kao i kontinuirano samostalno vježbanje koje najdjelotvornije otkriva praznine i slabosti u razumijevanju nastavnog gradiva. Obradeni problemi, karakteristični za pojedine nastavne cjeline, predstavljeni su kao riješeni *primjeri* te kao *zadaci* za samostalno rješavanje. Nakon analize primjera te samostalnog rješavanja zadataka pojedine teme, studentima se preporučuje odgovoriti na pitanja za provjeru znanja, koja su u obliku test pitanja s ponuđenim odgovorima na kraju svake teme (oblik pitanja kao na ispitima). Za studente koji hoće više, mogu se naći i neki složeniji zadaci (označeni zvjezdicom).

Autori

## Sadržaj

Stranica

<b>I.</b>	<b>Osnove elektriciteta</b>	<b>I-1</b>
	Primjeri	I-3
	Zadaci	I-8
	Test pitanja	I-11
<b>II.1</b>	<b>Električna struja, otpor, snaga i energija</b>	<b>II-1</b>
	Primjeri	II-2
	Zadaci	II-3
<b>II.2</b>	<b>Osnovne veličine električnih krugova</b>	<b>II-6</b>
	Primjeri	II-7
	Zadaci	II-9
	Test pitanja	II-12
<b>III.1</b>	<b>Jednostavni krugovi istosmjerne struje - otpornički krugovi</b>	<b>III-1</b>
	Primjeri	III-2
	Zadaci	III-5
	Test pitanja	III-10
<b>III.2</b>	<b>Jednostavni krugovi istosmjerne struje - kondenzatorski krugovi</b>	<b>III-14</b>
	Primjeri	III-14
	Zadaci	III-15
	Test pitanja	III-17
<b>IV.</b>	<b>Složeni krugovi istosmjerne struje</b>	<b>IV-1</b>
	Primjeri	IV-2
	Zadaci	IV-5
	Test pitanja	IV-9
<b>V.</b>	<b>Osnove magnetizma</b>	<b>V-1</b>
	Primjeri	V-3
	Zadaci	V-8
	Test pitanja	V-12
<b>VI.1</b>	<b>Sinusoidno promjenjive električne veličine</b>	<b>VI-1</b>
	Primjeri	VI-2
	Zadaci	VI-6
	Test pitanja	VI-8
<b>VI.2</b>	<b>Načelo rješavanja krugova izmjenične struje</b>	<b>VI-10</b>
	Primjeri	VI-11
	Zadaci	VI-13
	Test pitanja	VI-15
<b>VII.1</b>	<b>RLC krugovi</b>	<b>VII-1</b>
	Primjeri	VII-2
	Zadaci	VII-5
	Test pitanja	VII-9
<b>VII.2</b>	<b>Frekvencijske ovisnosti</b>	<b>VII-12</b>
	Primjeri	VII-12
	Zadaci	VII-15
	Test pitanja	VII-18

gotovo sve van  
FE, 3 → ne

# I. OSNOVE ELEKTRICITETA

## OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

**Električni naboj**  $Q$  je svojstvo tijela kojim se objašnjava električne sile.  $[Q]=As=C$ , što se čita ovako: Jedinica za električni naboj  $Q$  je *ampersekunda* (As) ili (još nazvana) *kulon*<sup>1</sup> (C).

**Coulombov<sup>1</sup> zakon** opisuje električnu (el.) silu između dvaju točkastih naboja, ili silu između dviju ravnomjerno nabijenih kugli. Iznos sile  $F$  razmjernan je iznosima naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  a obrnuto je razmjernan kvadratu udaljenosti  $d$  između naboja (ili središta nabijenih kugli) kao i dielektričnosti  $\epsilon$  sredstva u kojem se naboji nalaze. Smjer ove sile je takav da se naboji suprotnih predznaka privlače, a naboji istih predznaka odbijaju.

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon d^2}$$

**Električna konstanta**  $\epsilon_0$  jedna je od temeljnih prirodnih konstanti i predstavlja *dielektričnost vakuuma*.

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

**Relativna dielektričnost**  $\epsilon_r$  jest svojstvo tvari (broj) koje pokazuje koliko puta je dielektričnost  $\epsilon$  neke tvari veća od dielektričnosti vakuuma (za zrak uzimamo da je  $\epsilon_r \approx 1$ ).

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

**Električno polje** je prostor djelovanja el. sile. Ako na naboj na nekom mjestu u prostoru djeluje el. sila, kažemo da na tom mjestu postoji el. polje. Električno polje predstavlja ukupno djelovanje mnoštva naboja koji se nalaze u tom prostoru.

**Jakost el. polja**  $E$  je svojstvo pojedine točke u el. polju, a definirana je kao omjer el. sile  $F$  kojom polje djeluje na naboj postavljen u tu točku i veličine tog naboja  $Q$ . Jakost polja je vektorska veličina a ima smjer kojim bi el. sila djelovala na pozitivni naboj. Poznavajući jakost polja  $E$  u nekoj točki, lako je izračunati ukupnu električnu silu  $F$  kojom mnoštvo okolnih naboja djeluje na naboj  $Q$  doveden u tu točku (što bi pomoću Coulombovog zakona bilo teško izvedivo).  $[E]=V/m$  (volt po metru).

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

**Radijalno el. polje** (polje točkastog naboja, ili nabijene kugle) takvog je oblika da se silnice polja šire u prostor radijalno, kao da izlaze iz jedne točke (tj. iz točkastog naboja. ili iz središta nabijene kugle). Jakost ovog polja  $E$  razmjerna je iznosu naboja  $Q$ , a obrnuto je razmjerna dielektričnosti  $\epsilon$  prostora (kroz koji se polje širi) i kvadratu udaljenosti  $d$  od točkastog naboja (ili od središta nabijene kugle).

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon d^2}$$

**Homogeno el. polje** (polje plošnog naboja s plošnom gustoćom naboja  $\sigma$ , ili ravnomjerno nabijene ploče) takvog je oblika da su silnice polja međusobno paralelne i jednako udaljene. Jakost ovog polja  $E$  razmjerna je plošnoj gustoći naboja  $\sigma$ , a obrnuto razmjerna dielektričnosti  $\epsilon$  prostora u kojem se polje širi. iznos jakosti homogenog polja između dviju paralelnih ploča nabijenih s nabojima istih iznosa, a suprotnih predznaka, biti će dvostruko veća od (ovdje danog) iznosa jakosti polja jedne ploče.

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

**Električni potencijal**  $\phi$  je svojstvo pojedine točke el. polja, a definiran je kao omjer el. potencijalne energije  $W$  koju neki naboj ima u toj točki i veličine tog naboja  $Q$ .  $[\phi]=V$  (volt<sup>2</sup>) tj. jedinica za električni potencijal je *volt*.

$$\phi = \frac{W}{Q}$$

**Potencijal u radijalnom polju** (polje točkastog naboja ili polje nabijene kugle) opada u smjeru polja prema navedenoj jednadžbi, tako da je iznos potencijala razmjernan iznosu naboja  $Q$ , a obrnuto razmjernan dielektričnosti prostora  $\epsilon$  i udaljenosti  $x$  od točkastog naboja (ili središta nabijene kugle).

$$\phi_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon x}$$

<sup>1</sup>Charles-Augustin de Coulomb (čit. *kulon*) (1736–1806)

<sup>2</sup>Alessandro Volta (1745–1827)

**Potencijal u homogenom polju** linearno opada u smjeru polja, prema navedenoj jednadžbi (jednadžba pravca) gdje je  $E$  jakost polja, dok je  $x$  udaljenost od referentne (polazne) točke, a  $\varphi_0$  je potencijal referentne (polazne) točke.

$$\varphi_x = -Ex + \varphi_0$$

**Električni napon  $U$**  jest razlika električnih potencijala. [ $U$ ]=V (volt). Napon  $U_{AB}$  definiran je kao razlika potencijala točke A i potencijala točke B, pa je  $U_{AB}$  pozitivan kada je  $\varphi_A > \varphi_B$ . Dok je potencijal svojstvo jedne točke, napon je svojstvo dviju točaka u el. polju, pa se obično označava s dva indeksa čiji redoslijed je važan za predznak ( $U_{AB} = -U_{BA}$ ). Napon nastaje razdvajanjem + i - naboja, među kojima se javlja razlika potencijala.

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

**Rad električnih sila** pri pomicanju naboja  $Q$  iz točke 1 u točku 2 definiran je danom jednadžbom. Jedinica za el. rad  $A$  (kao i za el. energiju  $W$ ) je **voltampersekunda** ( $[A]=[W]=VAs$ ). Rad  $A_{12}$  predstavlja razliku početne energije naboja  $W_1$  i konačne energije naboja  $W_2$ . Pomičući naboj, el. sila obavlja rad "trošeći" za to energiju naboja, koja se smanjuje. U tom slučaju je konačna energija naboja manja od početne, pa je predznak tog rada pozitivan. Obratno, ako je predznak rada negativan, to znači da se pri pomicanju energija naboja povećala, a to je moguće ako je neka vanjska sila djelovala protiv električne sile, pri čemu se neki drugi oblik energije pretvorio u el. energiju naboja.

$$A_{12} = W_1 - W_2 = Q \cdot U_{12}$$

**Napon između ploča** (paralelne ploče nabijene nabojima istih iznosa, a različitih predznaka) razmaknutih za  $d$ , među kojima je uspostavljeno homogeno polje jakosti  $E$ . Ako se između ploča uspostavi napon  $U$  (npr. priključenjem ploča na izvor napona) na pločama će se razdvojiti naboji  $+Q$  i  $-Q$ , koji će među sobom uspostaviti el. polje jakosti  $E$ .

$$U = E \cdot d$$

**Električni kapacitet  $C$**  je mjera sposobnosti tijela da pohrani razdvojeni električni naboj (kapacitivnost). Kapacitet  $C$  je definiran kao omjer iznosa razdvojenog naboja  $Q$  i iznosa pritom uspostavljenog napona  $U$ . [ $C$ ]=As/V=F (farad<sup>1</sup>).

$$C = \frac{Q}{U}$$

**Električni kondenzator** je naprava visoke kapacitivnosti, najčešće sastavljena od dvaju vodljivih dijelova (elektroda) međusobno odijeljenih izolatorom.

**Kapacitet pločastog kondenzatora** razmjern je površini ploča  $S$  i dielektričnosti izolatora među njima  $\varepsilon$ , a obrnuto je razmjern razmaku ploča  $d$ .

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

**Energija na kapacitetu  $W$**  određena je ovom jednadžbom. Koristeći izraz za definiciju kapaciteta, ova

energija se, osim pomoću naboja  $Q$  i napona  $U$  na kapacitetu, može izraziti i pomoću kapaciteta i naboja na njemu, ili pomoću kapaciteta i napona na njemu. [ $W$ ]=VAs.

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$$

⇒ Energija se na kapacitetu pohranjuje u obliku energije električnog polja stvorenog između na kapacitetu razdvojenih pozitivnih i negativnih naboja.

Kondenzator tako predstavlja spremnik energije. On se puni (nabija) priključenjem na izvor napona, koji na elektrodama kondenzatora razdvoji + i - naboje, dajući im pritom energiju, koju kondenzator zadržava i nakon odspajanja od izvora.

Ako se potom elektrode nabijenog kondenzatora međusobno vodljivo spoje, na elektrodama razdvojeni + i - naboji se kreću (kao el. struja) kroz vodljivi spoj te se međusobno neutraliziraju. Kažemo da se pritom kondenzator prazni ili izbija, vraćajući el. energiju dobivenu pri nabijanju.

*influcije!!*

*kap. energija*

<sup>1</sup> Michael Faraday (1791-1867)

## PRIMJERI I.

## I.-P1.

Dva pozitivna točkasta naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  nalaze se u zraku na međusobnoj udaljenosti  $d$ , daleko od drugih naboja. Odredite : a) iznos i smjer sile na svaki od naboja b) kolika će biti sila ako naboju  $Q_2$  primaknemo naboju  $Q_1$  na dvostruko manji razmak? c) iznos i smjer električnog polja koje naboju  $Q_1$  stvara u točki gdje se nalazi naboju  $Q_2$

Zadano je:  $Q_1=100$  nAs;  $Q_2=0,1$  nAs  $d=5$  mm ;  $\epsilon_r=1$  ;  $\epsilon_0=8.854 \cdot 10^{-12}$  As/Vm

## Rješenje:

Naboji su jednakog polariteta pa je sila odbojna. Iznos te sile izračunamo pomoću Coulombovog zakona. Vodimo računa da je sila vektorska veličina. Na svaki od naboja djeluje sila jednakog iznosa:

$$F = \frac{(Q_1 \cdot Q_2)}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot d^2} \quad F = 3.595 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Iz ove jednadžbe proizlazi slijedeće:

upola manji razmak  $\rightarrow$  četverostruko veća sila.

Silu na naboju  $Q_2$  možemo izračunati i koristeći zamisao (električnog) polja. Zamislimo da maknemo naboju  $Q_2$  te u prostoru ostavimo samo naboju  $Q_1$ . Taj naboju u okolnom prostoru stvara posebno energetska stanje koje se manifestira time da na drugi naboju ( $Q_2$ ) kada se nađe u tom prostoru, djeluje električna sila. Prostor djelovanja električne sile nazivamo električno polje. Pritom će na dvostruko veći naboju  $Q_2$  u istoj točki polja djelovati dvostruko veća sila (provjerite Coulombovim zakonom) tj. omjer sile i veličine naboja u pojedinoj točki polja je stalan i svojstvo je pojedine točke polja koje nazivamo *jakost električnog polja* i označavamo s  $E$ .

To omogućava da električnu silu razmatramo kao rezultat djelovanja polja, ne baveći se time koliko (i kako postavljenih) naboja uzrokuje polje. Za naš slučaj polja samo jednog točkastog naboja ( $Q_1$ ) jakost polja u točki gdje se nalazi (pomoćni) naboju  $Q_2$

$$E = \frac{F}{Q_2} \quad E = 3.595 \times 10^6 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^3 \text{ A}} \quad E = 3.595 \cdot 10^6 \cdot \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Jakost električnog polja izražava se jedinicom: V/m (volt po metru).  $1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C} = 1 (\text{kg m})/(\text{As}^3)$ .

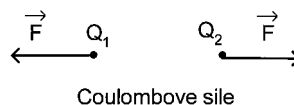
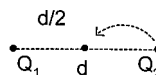
**Pažnja:** Jakost električnog polja je vektor jer se dobiva dijeljenjem vektora (sila) sa skalarom (naboju). Ako je naboju pozitivan smjer vektora polja jednak je smjeru sile, a za negativni naboju je suprotan. Stoga kažemo da je smjer vektora polja jednak smjeru sile na pozitivan naboju.

Naboju  $Q_2$  kojim smo se "poslužili" naziva se općenito probni naboju. Sila na naboju  $Q_2$  je sada:  $F = E \cdot Q_2$

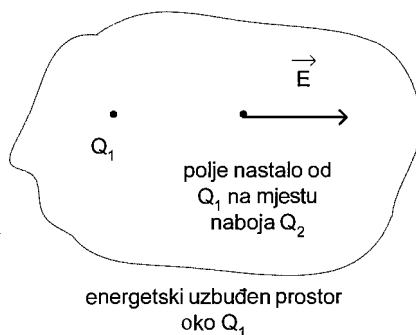
**Važno:** Znamo li jednadžbu za izračun jakosti električnog polja naboju  $Q_1$  u svim točkama prostora možemo jednostavno određivati iznos sile na bilo koji naboju postavljen u tim točkama. Jednadžbu za izračun jakosti polja našeg točkastog naboju  $Q_1$  možemo dobiti tako da u (prethodnu) jednadžbu za jakost polja  $E$  umjesto sile  $F$  uvrstimo izraz za Coulombovu silu. Tako dolazimo do opće jednadžbe za izračun jakosti polja  $E$  na udaljenosti  $r$  od točkastog naboju  $Q$  (u prostoru relativne dielektričnosti  $\epsilon_r$ ).

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

**Zaključak:** 1. Jakost ovog polja opada sa kvadratom udaljenosti; 2. Sve točke jednako udaljene od točkastog naboju (oplošja kugli istog radijusa) imaju isti iznos jakosti polja (ovo polje je radialno simetrično, pa ovakav oblik polja nazivamo *radijalno polje*.)



Coulombove sile



**I.-P2.**

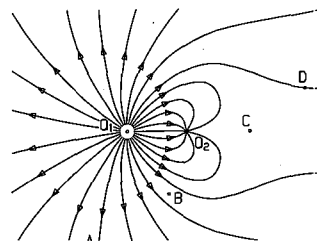
Na slici desno prikazane su silnice polja dvaju točkastih naboja

$Q_1$  i  $Q_2$ .

A. Što su silnice polja?

B. Kojih su predznaka naboji, i koji je odnos njihovih veličina?

**C** U kojoj od označenih točaka je polje najjače?

**Rješenje:**

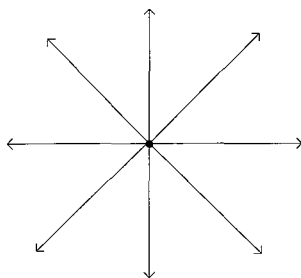
- A. Silnice elektrostatskog polja su linije koje “izviru” na pozitivnim, a “poniru” (završavaju) na negativnim nabojima. Njihova gustoća razmjerna je iznosu jakosti polja  $E$ . Prema obliku silnica razlikujemo homogeno i nehomogeno polje. Kod homogenog polja silnice su jednolike gustoće. Silnice su linije sile tj. tangenta na silnicu u nekoj točki pokazuje smjer sile na naboj koji bismo postavili u tu točku. U prikazanom slučaju polje je nehomogeno.
- B. Lijevi naboj je pozitivan jer iz njega silnice izlaze. Ujedno je taj naboj veći po iznosu od desnog, jer dio njegovih silnica odlazi (završava) negdje drugdje.
- C. Polje je najveće tamo gdje su silnice najgušće (točka B). Poseban slučaj su silnice usamljenog točkastog naboja. To su (za pozitivan naboj) radijalni pravci koji “završavaju” u beskonačnosti.

Pojam točkastog naboja važan je u stvaranju teorije (modela) električnog polja. U stvarnosti nosioci naboja imaju konačne dimenzije kao i masu (nabijene čestice). Pojedine nakupine naboja mogu se pritom predstaviti skupinama točkastih naboja.

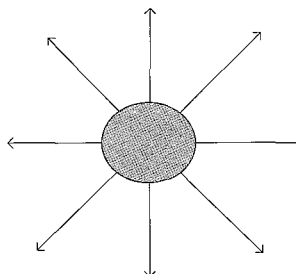
Silnice nabijene (usamljene) metalne kuglaste elektrode slične su silnicama točkastog naboja.

Počinju na površini kugle (za pozitivno nabijenu kuglu) i šire se radijalno na sve strane (radijalno polje). Pritom su okomite na površinu elektrode. Unutar metalne elektrode nema elektrostatskog polja niti silnica.

Polje je prostorni fenomen pa se tako i silnice nalaze u prostoru. Grafički prikaz polja silnicama u prostoru (3D) je prilično složen i (u crno-bijelom tisku) nepregledan, pa stoga ovdje silnice prikazujemo u dvije dimenzije (što predstavljaju sliku polja u presjeku s ravinom promatranja).



pozitivan točkasti  
naboj

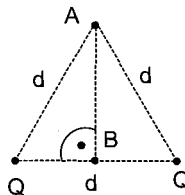


pozitivno nabijena  
metalna kugla

Naboj na usamljenoj kugli raspoređuje se jednoliko po površini (zašto?). Taj se naboj može predstaviti skupinom jednoliko raspoređenih točkastih naboja. Kod elektroda nepravilnog oblika više se naboja nakuplja na izbočnim dijelovima manjeg radijusa zakrivljenosti (npr. na šiljcima). Silnice su međutim i u tom slučaju, okomite na površinu elektrode, pa je stoga uz ta mjesta gustoća silnica najveća (a tim i jakost polja).

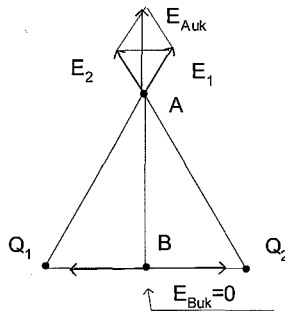
**I.-P3.**

Dva jednaka pozitivna točkasta naboja  $Q_1 = Q_2 = Q$  nalaze se u zraku na međusobnoj udaljenosti  $d$ , daleko od drugih naboja. Odredite : a) iznos i smjer električnog polja koje zadani naboji stvaraju u točkama A i B. Zadano je:  $Q=1 \text{ nAs}$ ;  $d=5 \text{ mm}$ ;  $\epsilon_r=1$ ;  $\epsilon_0=8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$

**Rješenje:**

U ovom slučaju električno polje u prostoru nastaje zajedničkim djelovanjem zadanih naboja. Svaki od naboja stvara u pojedinim točkama «svoj» vektor polja. Nakon određivanja tih vektora ukupno polje dobivamo njihovim zbrajanjem.

Jednostavno je npr. određivanje ukupnog vektora polja u točki B. Pojedinačni vektori polja imaju očigledno jednaki iznos, a suprotan smjer pa je ukupno polje jednako nuli. Nije tako jednostavno u točki A. Tamo imamo dva vektora koje stvarno treba zbrojiti po pravilima zbrajanja vektora. To možemo učiniti grafički, kako je prikazano slikom desno, ili računski.



Prije bilo kakvog računanja potrebna je skica u pravokutnom kordinantnom sustavu. . Pojedinačnim vektorima odredimo sastavnice (komponente) u smjeru osi x kao i u smjeru osi y. Zbog simetrije su u ovom slučaju komponente u smjeru osi x jednakog iznosa, a protivnog smjera pa se poništavaju. Preostaju komponente u smjeru osi y koje su jednakog iznosa. Rezultantno polje je zbroj tih komponenti.

Potrebno je dakako i poznavanje trigonometrijskih formula. Npr. komponenta polja  $E_1$  u smjeru osi y će biti:  $E_{1y} = E_1 \cdot \cos 30^\circ$ .

Polja  $E_1$  i  $E_2$  izračunavamo prema jednadžbi za polje točkastog naboja.

$$E_1 = \frac{(Q_1)}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot d^2} \quad E_1 = 3.595 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_{1y} = E_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad E_{1y} = 3.113 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_{2y} = E_{1y} \quad E_y = E_{2y} + E_{1y}$$

$$E_{1x} = E_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad E_{1x} = 1.797 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_{2x} = -E_{1x} \quad E_x = E_{1x} + E_{2x} \quad E_x = 0$$

$$E_{uk} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad E_{uk} = 6.226 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

U općenitom slučaju kada su naboji različita iznosa i polariteta proračun polja, iako se radi prema istom načelu, neće biti tako jednostavan. Još će biti složeniji proračun polja kada u prostoru postoji veći broj naboja.

Napomena:

U svakoj točki prostora gdje postoji elektrostatsko polje osim vektora polja imamo i skalarnu veličinu tzv. potencijal. Proračun potencijala i u slučaju većeg broja naboja jednostavniji je od proračuna polja. Naime potencijal je definiran kao potencijalna energija jediničnog naboja. Energija, a prema tome i potencijal su skalarni veličine. Biti će potrebno algebarski zbrojiti (sa predznakom) doprinose potencijalu svih naboja koji se nalaze u promatranom prostoru.

Jednadžba za proračun potencijala u polju točkastog naboja je:  $\varphi = Q/(4\pi\epsilon r)$

gdje je  $r$  udaljenost točke u kojoj želimo izračunati potencijal od naboja.

Točke jednakog potencijala čine tzv. ekvipotencijalnu plohu. (u dvodimenzionalnom prikazu to su ekvipotencijalne linije).

Osim silnicama, elektrostatsko polje možemo prikazati ekvipotencijalnim linijama.

Kod točkastog naboja ekvipotencijalne linije su koncentrične kružnice.

Važno je znati da su silnice i ekvipotencijalne linije međusobno okomite (čime biste to dokazali?).

Zainteresirani čitatelj neka izračuna potencijal u točkama A i B.

( $\varphi_A = 3595 \text{ V}$ ;  $\varphi_B = 7190 \text{ V}$ ).

Razlika potencijala naziva se napon. Napon između točaka A i B je:  $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$

#### I-P4.

Naboj  $Q$  u točki A električnog polja ima potencijalnu energiju  $W_A$ . Premjesti li se taj naboj u točku B polja u njoj će imati potencijalnu energiju  $W_B$ . Odredite: a) rad izvršen pri premještanju naboja b) napon  $U_{AB}$ .

Zadano je:  $Q = 50 \text{ nAs}$ ;  $W_A = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Js}$ ;  $W_B = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Js}$

#### Rješenje.

Rad na putu od A prema B je razlika potencijalnih energija. Potencijalna energija je veća u točki B. To znači da je utrošen vanjski rad za premještanje naboja. Pri tom su vanjskom silom savladane sile polja. Energija će se vratiti prilikom premještanja naboja iz točke B u točku A. Ovo premještanje izvršile bi sile polja (naboj bi se sam vratio u točku A), a rad bi bio pozitivan. Ako to napišemo "matematički" dobivamo:

$$A_{AB} = W_A - W_B \quad A_{AB} = -2 \times 10^{-5} \text{ J} \quad A_{BA} = W_B - W_A \quad A_{BA} = 2 \times 10^{-5} \text{ J}$$

Kod ovakvog računanja (redosljed) nam negativan predznak rezultata ukazuje da je rad utrošen. Potencijali u točkama A i B su:

$$\varphi_A = \frac{W_A}{Q} \quad \varphi_A = 400 \text{ V} \quad \varphi_B = \frac{W_B}{Q} \quad \varphi_B = 800 \text{ V}$$

Napon  $U$  je razlika potencijala:  $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = -400 \text{ V}$ .

Potencijal točke A je manji (negativniji) od potencijala točke B.

#### Zaključak:

Ako pozitivan naboj premješamo u točku polja višeg potencijala potrebno je utrošiti (vanjski) rad (unijeti energiju). Takav rad, matematički gledano, je negativan.



**I-P5.**

Električna sila pomakne naboj  $Q$  iz točke 1 s potencijalom  $\varphi_1 = -40\text{V}$  u točku 2 s potencijalom  $\varphi_2 = 0\text{V}$ . Ako pri tom električne sile izvrše rad  $\Delta W = 0,1\text{mWs}$ , odredite a) napon  $U_{12}$  i b) veličinu naboja  $Q$ .

**Rješenje:**

Rad izvrše električne sile. Naboj ide iz točke nižeg potencijala ( $-40\text{V}$ ) u točku višeg potencijala ( $0\text{V}$ ).  $\checkmark$   
To je moguće samo ako je naboj negativan, jer su onda sile privlačne.

$$\text{a) } U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad U_{12} = -40\text{V}$$

$$\text{b) veličina naboja je } Q = \frac{\Delta W}{U_{12}} \quad Q = -2,5 \times 10^{-6}\text{C}$$

(rad  $\Delta W$  je dobiven tj. pozitivan, a napon  $U_{12}$  negativan)

**I-P6.**

Pločasti kondenzator s pločama površine  $S$  razmaknutim za  $d$ , ispunjen je izolatorom dielektričnosti  $\epsilon_r$ , probojne čvrstoće  $E_p$ . Kondenzator je priključen na stalni napon  $U$ . Odredite:

- kapacitet kondenzatora
- naboj na elektrodama kondenzatora
- energiju pohranjenu u kondenzatoru
- maksimalni napon koji možemo priključiti na kondenzator.
- kolika je plošna gustoća naboja na elektrodama.

Zadano je:  $S = 0,5\text{ m}^2$ ;  $d = 1\text{ mm}$ ;  $\epsilon_r = 1$   $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\text{ As/Vm}$ ;  $E_p = 3\text{ kV/mm}$ ;  $U = 1\text{ kV}$

**Rješenje:**

$$C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d} \quad C = 4,427 \times 10^{-9}\text{F}$$

$$Q = C \cdot U \quad Q = 4,427 \times 10^{-6}\text{C}$$

$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot C} \quad W = 2,213 \times 10^{-3}\text{J}$$

$$E = \frac{U}{d} \quad E = 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$U_{\max} = E_p \cdot d \quad U_{\max} = 3 \times 10^3\text{V}$$

ako naboj  $\rightarrow$  gubi

Veći napon mogao bi prouzročiti proboj u izolatoru što bi se kod zračnog kondenzatora vidjelo kao iskra. U krutom dielektriku dolazi do trajnog uništenja tj. gubitka svojstva izolatora.

Takav kondenzator je neispravan tj. gubi svoj kapacitet.

e) naboj se u kondenzatoru rasporedi u tankom sloju na unutarnjim površinama ploča.

Plošna gustoća tog naboja je  $\sigma = Q/S = 8,854\text{ }\mu\text{As/m}^2$ .

## ZADACI I.

- ✓ I.-1. Iznosi dvaju točkastih naboja odnose se ovako:  $|Q_1/Q_2|=n$ . Naboji razmaknuti za  $d$  postavljeni su u zraku i privlače se silom  $F$ . Odredite a) iznos sile  $F$  b) predznak naboja  $Q_2$  ako je  $Q_1$  pozitivan c) silu kada se razmak smanji na  $d/2$

Zadano:  $Q_1=+30$  nC;  $n=10$ ,  $d=10$  cm,  $\epsilon_0=8.854 \cdot 10^{-12}$  As/Vm.

Rezultat: a)  $81 \mu\text{N}$  b) neg. c) poveća se na  $324 \mu\text{N}$

- I.-2. Kako se promijeni sila na naboj  $Q_2$  iz prethodnog zadatka (1-1) ako se na polovinu razmaka postavi treći naboj i to: a)  $Q_3=+Q_1$  b)  $Q_3=-Q_1$

Rezultat: a)  $405 \mu\text{N}$  b)  $243 \mu\text{N}$  (odbojna)

- I.-3. Dvije jednake metalne kuglice mase  $m$  i polumjera  $r$  naelektrizirane su jednakim količinama naboja  $Q$  i obješene su o tanke niti od izolatora duljine  $l$  (zanemarive mase). U ravnotežnom položaju (ravnoteža elektrostatske i gravitacijske sile) kuglice su razmaknute za  $d$ . a) Odredite  $Q$  b) razmak kuglica ako se naboj nejednoliko raspodjeli na kuglice tako da prva primi  $3/4$ , a druga  $1/4$  ukupnog naboja. Napomena: pojednostavnite jednačbe uzimajući u obzir da je:  $l \gg d$  i  $r \ll d$ .

Zadano:  $m=10^{-3}$  kg,  $l=1$  m,  $d=0,1$  m.

Rezultat: a)  $2.336 \cdot 10^{-8}$  As b)  $9,1$  cm

- I.-4. Dva točkasta naboja  $Q$  i  $3Q$  postavljena su u točke A i B na razmaku  $d$ . U koju točku na spojnici točaka A i B treba postaviti probni naboj pa da sila na taj naboj bude jednaka nuli. U rješenju navedite udaljenost tražene točke od naboja  $Q$ .

Rezultat:  $0.366 \cdot d$

- I.-5. Na silnici polja točkastog naboja odabrane su točke A, B i C tako da je točka B na sredini dužine AC. Uz zadane iznose polja u točkama A i C a) odredite polje u točki B. b) izračunajte iznos naboja ako je udaljenost točke C od naboja  $1$  cm.

Zadano:  $E_A=36$  V/m;  $E_C=9$  V/m.

Rezultat:  $16$  V/m;  $10^{-13}$  C (kulona)

- I.-6. Dva pozitivna točkasta naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  postavljena su na razmak  $d$ . Ako je jakost polja u točki T jednaka nuli odredite odnos naboja  $Q_2/Q_1$ . Koliki je potencijal u točki T?

Zadano:  $Q_1=1$  nAs,  $d=1$  cm

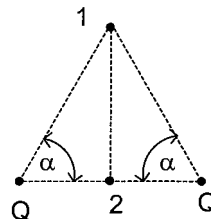
Rezultat:  $4$ ;  $8,1$  kV



- I.-7. Dva točkasta naboja jednakih iznosa postavljena su na razmak  $d$ . Odredite iznos jakosti polja u točki 1 te omjer jakosti električnog polja u točkama 2 i 1 ( $E_2/E_1$ ) ako su naboji a) istog b) različitog polariteta.

Zadano:  $|Q|=1$  nAs,  $d=5$  cm,  $\alpha=60^\circ$ .

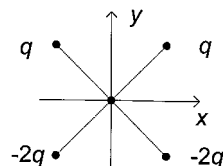
Rezultat: a)  $6.235$  kV/m, nula b)  $3.6$  kV/m,  $8$ .



- I.-8. Izračunajte razliku potencijala točaka 1 i 2 iz prethodnog zadatka ako se pri pomicanju probnog naboja  $q=1$  pAs iz točke 1 u točku 2 duž spojnice tih točaka utroši rad od  $360$  pWs. Da li su naboji: a) pozitivni b) negativni c) različitog polariteta?

Rezultat: a)  $U_{12}=-360$  V, naboji su pozitivni

- I.-9. Četiri točkasta naboja nalaze se u vrhovima kvadrata stranice  $a$ . Središte



kvadrata je u ishodištu  $xy$  koordinatnog sustava, prema slici. Odredite: a) smjer i iznos el. polja u ishodištu b) potencijal u ishodištu\*.

Zadano:  $a=10\text{ cm}$ ,  $q=1\text{ nAs}$

Rezultat: a) smjer  $-y$ ,  $7626\text{ V/m}$  b)  $-254\text{ V}$

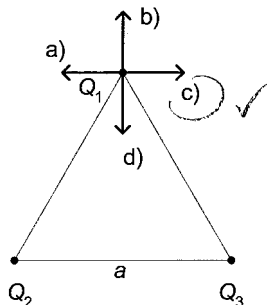
**I.-10.** Četiri točkasta naboja smještena su u vrhovima kvadrata stranice  $a$ . Naboji su istog iznosa i polariteta. Ako silu između dva naboja razmaknuta za  $a$  označimo sa  $F$  kolika će biti rezultantna sila na svaki od naboja?

Rezultat:  $1.91 F$

**I.-11.** Tri točkasta naboja smještena su u vrhove jednakostraničnog trokuta stranice  $a$ . U kojem od označenih smjerova djeluje rezultantna sila na naboj  $Q_1$ ? Kolika je ta sila?

Zadano:  $Q_1=Q_2=100\text{ nAs}$ ;  $Q_3=-100\text{ nAs}$ ;  $a=2\text{ cm}$ ;  $\epsilon_r=1$ .

Rezultat: smjer c),  $225\text{ mN}$ .



**I.-12.** Dva točkasta naboja smještena su u pravokutni koordinatni sustav i to:  $Q_1=1\text{ nAs}$  je u ishodištu, a  $Q_2=-1\text{ nAs}$  je na  $x$  osi udaljen  $1\text{ m}$  (u smjeru  $+x$  osi) od ishodišta. a) Odredite omjer jakosti električnog polja ( $E_A/E_B$ ) u točkama A( $0,5\text{m}; 0,5\text{m}$ ) i B( $0,5\text{m}; 0$ ). b) Koliki je potencijal u točkama A i B?

Rezultat: a)  $0.354$ ; b) nula

**I.-13.** Da bi se naboj od  $q$  prenio iz točke A u točku B električnog polja potrebno je obaviti (utrošiti) rad  $W$ . Kolika je razlika potencijala (napon) između tih točaka? Koja je točka na višem potencijalu?

Zadano:  $q = +1\mu\text{C}$   $W = 20\mu\text{J}$

Rezultat:  $20\text{ V}$ , na višem potencijalu je točka B.

**I.-14.** Naboj  $Q$  u točki A ima potencijalnu energiju  $W_{pA}$ . Premjesti li se naboj u točku B, u njoj će imati potencijalnu energiju  $W_{pB}$ . Odredite rad izvršen pri tom premještanju naboja. Zadano:  $Q=-2,5\cdot 10^{-7}\text{ As}$ ;  $W_{pA}=-10^{-4}\text{ Js}$ ;  $W_{pB}=-2\cdot 10^{-4}\text{ Js}$ .

Rezultat:  $0.1\text{ mWs}$

**I.-15.** Pločasti zračni kondenzator s dvjema pločama površine  $S$  i razmaka  $d$ , spojen je na izvor stalnog napona  $U$ . Odredite kapacitet ploča, te na njima razdvojeni naboj.

Zadano:  $U=1,7\text{ kV}$ ;  $S=200\text{ cm}^2$ ;  $d=1\text{ mm}$ .

Rezultat:  $177\text{ pF}$ ,  $300\text{ nAs}$

**I.-16.** Dvije paralelne i suprotno nabijene metalne ploče razmaknute su na razmak  $d$ . Ploče su nabijene nabojima  $Q$  suprotnog predznaka. Negativna ploča je uzemljena. Da bi se probni naboj  $+q$  prebacio sa negativne do pozitivne ploče potrebno je obaviti rad  $W$ . Koliki je napon između ploča (napon izvora)? Koliki je potencijal negativne ploče? Kolika je jakost električnog polja u prostoru između ploča? Nacrtajte graf promjene potencijala idući od negativne prema pozitivnoj ploči. Kako se promijeni graf potencijala ako ploče približimo na  $d/2$ .

Zadano:  $d = 4\text{ cm}$ ,  $q = 10\text{ nC}$ ,  $W = 20\mu\text{J}$ .

Rezultat:  $2000\text{V}$ ; potencijal je nula;  $50\text{ kV/m}$ .

- ✓ I.-17. Pločasti kondenzator površine ploča  $S$ , razmaknutih za  $d$ , ispunjen je izolatorom dielektričke čvrstoće  $E_p$ . Koliki je probojni napon kondenzatora? Koliki maksimalni naboj može primiti ovaj kondenzator te kolika je maksimalna energija koja se u njemu može pohraniti? Kolika je sila između ploča ako je kondenzator nabijen maksimalnim nabojem?

Zadano:  $S=100 \text{ cm}^2$ ;  $d=0,2 \text{ mm}$ ;  $E_p=60 \text{ kV/cm}$ ,  $\epsilon_r=3$ .

Rezultat: 1.2 kV, 1.6  $\mu\text{As}$ , 960  $\mu\text{J}$

- ? I.-18. Kolika je energija pohranjena u kondenzatoru te koliki je kapacitet ako je prilikom priključenja na napon  $U$  nabijen nabojem  $Q$ ? Koliki je pri rast energije ako se napon poveća na  $2U$ ?

Zadano:  $U=400 \text{ V}$ ;  $Q=60 \mu\text{As}$ .

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Rezultat: 12 mVAs, 0.15  $\mu\text{F}$ , 36 mJ.

- I.-19. Ploče zračnog pločastog kondenzatora razmaknute za  $d$  nabijene su nabojem  $Q$  i privlače se silom  $F$ . Koliki je kapacitet tog kondenzatora?

Zadano:  $d=1 \text{ mm}$ ;  $Q=200 \text{ nAs}$ ;  $F=200 \text{ mN}$ .

Rezultat: 100 pF

- I.-20\*Probojna čvrstoća zraka je 3 kV/mm. Sa kolikim maksimalnim nabojem možemo nabiti usamljenu metalnu kuglu polumjera  $R=10 \text{ cm}$  koja ima kapacitet  $C=11.1 \text{ pF}$ ? Koliki je potencijal (napon prema Zemlji) tako nabijene kugle? Napomena: « usamljena » je elektroda ako je dovoljno udaljena od okolnih predmeta npr. za ovu kuglu bi predmeti morali biti udaljeni barem 1 m.

Rezultat: 3.34  $\mu\text{As}$ , 300kV.

Uputa: Maksimalno polje je tik uz površinu kugle koje se računa pomoću formule:  $Q/4\pi\epsilon R^2$ .

Napomena: probojna čvrstoća zraka ovisi o raznim faktorima (npr. vlažnost). Obično je manja od navedene (3 kV/m) tako da je maksimalni potencijal manji od 300 kV. U prirodi je npr. oblak neka vrst nabijene « elektrode ». Kako se povećava naboj sakupljen u oblaku raste potencijal (napon prema Zemlji) i el. polje pa dolazi do munje (proboja).

## TEST PITANJA I.

1) Kako se promijeni sila između točkastih naboja ako se njihov razmak udvostruči?

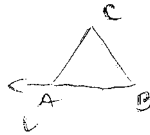
- A) smanji se dva puta
- B) ovisi o polaritetu naboja
- ☒ C) smanji se četiri puta
- D) ostane jednaka
- E) smanji se 1,41 puta

2) Četiri jednaka naboja nalaze se u vrhovima kvadrata stranice  $a$ . Ukupna sila na naboj u vrhu kvadrata ima smjer?

- ☒ A) dijagonale
- B) jednaka je nuli
- C) stranice
- D) neki drugi

3) Tri jednaka točkasta naboja nalaze se u vrhovima jednakostraničnog trokuta koji su označeni sa  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Sila na naboj u točki  $a$  je  $F$ . Kako se promijeni ta sila ako maknemo naboj iz vrha  $b$ ?

- ☒ A) smanji se na  $0,577F$
- B) poveća se dva puta
- C) ne promijeni se
- D) smanji se na  $0,866F$
- E) poveća se  $0,866$  puta



4) Sila između dva točkasta naboja jednakog iznosa  $Q$ , a različita predznaka je  $F$ . Kolika je sila na pozitivan naboj  $Q$  koji postavimo točno na polovicu razmaka?

- ☒ A)  $8F$
- B)  $4F$
- C)  $2F$
- D)  $F$
- E) nula



→ 5) Dva sama naboja  $Q$  i  $2Q$  nalaze se na razmaku  $d$ . Kakav je odnos sile na naboje?

- A) veća je sila na naboj  $Q$
- B) veća je sila na naboj  $2Q$
- ☒ C) jednaka je sila na oba naboja

→ 6) Sila između dva točkasta naboja će se dvaput povećati ako:

- A) udvostručimo iznose oba naboja
- B) udvostručimo razmak
- ☒ C) udvostručimo iznos jednog od naboja
- D) smanjimo razmak na pola
- E) smanjimo razmak na četvrtinu

7) Dva nabijene čestice postavljene su na razmak  $d$ , a zatim prepuštena djelovanju Coulombovih sila. Ako nakon toga brzina naboja raste naboji su:

- A) jednakog polariteta
- ☒ B) različitog polariteta
- C) nema dovoljno podataka

8) Sila između dva sićušna naboja na udaljenosti  $d$  u nekoj tekućini ista je kao sila između ta dva naboja u zraku kada su na udaljenosti  $2d$ . Kolika je relativna dielektrična konstanta te tekućine?

- A) 2
- ☒ B) 4
- C) 1,41
- D) 3
- E) 8

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{-1 \cdot 10^{-9}}$$

predmet!

→

9) Sila na točkasti naboju  $q = -1 \text{ nAs}$  u točki T iznosi  $0,01 \text{ mN}$ . Kolika je jakost polja u toj točki?

- A)  $100 \text{ V/m}$  B)  $1000 \text{ V/m}$  C)  $10 \text{ kV/m}$  D)  $-10 \text{ kV/m}$  E)  $-1 \text{ kV/m}$

pzi!

→

10) Jakost električnog polja na udaljenost  $d$  od točkastog naboja je  $E$ . Na kojoj je udaljenosti jakost polja  $E/2$ ?

- A)  $2d$  B)  $1,41 d$  C)  $4d$  D)  $0,7d$  E)  $0,5d$

11) U vrhovima kvadrata su naboji (redom)  $Q, Q, -Q, -Q$ . Ako je iznos polja u središtu koje stvara naboju  $Q$  jednak  $E$  tada je ukupno polje u središtu tog kvadrata:

- A)  $2,82E$  B)  $4E$  C) nula D)  $2E$  E)  $1,41E$

12) Potencijal na udaljenosti  $10 \text{ cm}$  od točkastog naboja iznosi  $100 \text{ V}$ . Koliki je potencijal na udaljenosti  $5 \text{ cm}$ ?

- A)  $50 \text{ V}$  B)  $25 \text{ V}$  C)  $141 \text{ V}$  D)  $200 \text{ V}$  E)  $400 \text{ V}$

13) Ako se prilikom gibanja elektrona u električnom polju njegova kinetička energija povećava, elektron se giba u smjeru:

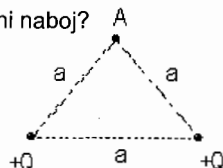
- A) porasta potencijala  
B) smanjivanja potencijala  
C) nepromijenjenog potencijala.

14) Negativni naboju  $q = -1 \text{ nAs}$  premješten je iz točke A u točku B polja uz utrošak rada od  $1 \text{ nJ}$ . Koja je tvrdnja ispravna?

- A) točka A je na nižem potencijalu od točke B  
B) točka A je na višem potencijalu od točke B  
C) ovisi o putu kojim je naboju premješten

15) Kako se promijeni jakost polja u točki A ako odstranimo desni naboju?

- A) poraste dva puta  
B) smanji se dva puta  
C) smanji se  $1,73$  puta  
D) ne mijenja se  
E) poraste  $1,73$  puta



16) Metalna usamljena elektroda nabijena je nabojem od  $1 \text{ nAs}$ , pri čemu je došla na potencijal od  $1000 \text{ V}$ . Koliki je kapacitet te elektrode?

- A)  $1 \text{ pF}$  B)  $1 \text{ nF}$  C)  $1 \mu\text{F}$  D)  $1 \text{ mF}$  E)  $1 \text{ F}$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{10^{-9}}{1000}$$

17) Koje od navedenih formula vrijede za pločasti kondenzator koji je priključen na napon  $U$ ?

- A)  $E = U/d$  B)  $E = Ud$  C)  $E = Q/\epsilon_0 S$  D)  $E = Q/\epsilon_0 Sd$  E)  $E = Q/Sd$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{C d} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S d}$$

18) Nabijenom kondenzatoru električne sile:

- A) nastoje povećati kapacitet  
B) nastoje smanjiti kapacitet  
C) nemaju nikakvog utjecaja na kapacitet

→

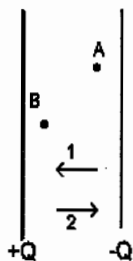
19) Pločasti kondenzator nabijen je i odspojen sa izvora. Koje su tvrdnje ispravne ako prostor između ploča ispunimo dielektrikom s  $\epsilon_r = 2$ :

- A) naboju ostane jednak  
B) kapacitet se poveća dva puta  
C) napon se poveća dva puta  
D) polje se poveća dva puta  
E) polje se smanji dva puta

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

20) Odredite smjer polja i polaritet napona  $U_{AB}$  u pločastom kondenzatoru na slici desno.

- A)  $U_{AB}$  je pozitivan; smjer polja 1  
 B)  $U_{AB}$  je pozitivan; smjer polja 2  
 C)  $U_{AB}$  je negativan; smjer polja 1  
 D)  $U_{AB}$  je negativan; smjer polja 2  
 E)  $U_{AB}$  je nula; smjer polja 1



21) Kondenzator je nabijen na napon  $U$  i ima energiju  $W$ . Kako se promijeni ta energija ako napon povećamo na  $2U$ ?

- A) poveća se dva puta;  
 B) poveća se četiri puta  
 C) poveća se 1,5 puta

*može slučajno*

22) Dva kondenzatora (1 i 2) jednakih kapaciteta, nabijena su tako da je na prvom napon  $U$ , a na drugom napon  $2U$ . Koji je odnos energija  $W$  pohranjenih u kondenzatorima?

- A)  $W_1 = W_2$ ;  
 B)  $W_1 = 2W_2$ ;  
 C)  $W_1 = 0,5W_2$ ;  
 D)  $W_1 = 4W_2$ ;  
 E)  $W_1 = 0,25W_2$ .

23) Sila između ploča kondenzatora priključenog na napon  $U$  je  $F$ . Kako se promijeni ta sila ako napon dvaput povećamo?

- A) ne promijeni se  
 B) poveća se dva puta  
 C) poveća se četiri puta  
 D) poveća se 1,41 puta

24) Pločasti kondenzator je nabijen i odspojen od izvora. Hoće li se i kako promijeniti energija elektrostatskog polja ako se razmak između ploča smanji?

- A) energija ostane jednaka;  
 B) energija se smanji;  
 C) energija se poveća.

25) U vrhovima kvadrata su naboji  $Q, Q, -Q, -Q$ . Potencijal u središtu tog kvadrata je:

- A) nula;  
 B) pozitivan;  
 C) negativan.

### Odgovori na test pitanja I.

1.C; 2.A; 3.A; 4.A; 5.C; 6.C; 7.B; 8.B; 9.C; 10.B; 11.A; 12.D; 13.A; 14.B; 15.C; 16.A;  
 17.AC; 18.A; 19.ABE; 20.D; 21.B; 22.E; 23.C; 24.B; 25.A;





## II.1. ELEKTRIČNA STRUJA I OTPOR TE SNAGA I ENERGIJA

### OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

**Električna struja** jest usmjereno gibanje (nosioca) el. naboja (sa smjerom kojim bi se gibali + naboji).

**Jakost struje**  $i$  definirana je kao brzina protoka naboja u vremenu. Općenito, kod nejednolikog strujanja naboja, jakost struje mijenja se s vremenom (pa se označava malim slovom  $i$ ) a u pojedinom trenutku jednaka je derivaciji naboja  $Q$  po vremenu  $t$ . [ $i$ ]=A (amper<sup>1</sup>). Jakost struje kod jednolikog strujanja naboja vremenski je stalna (pa se označava velikim slovom  $I$ ) te je u bilo kojem trenutku jednaka omjeru količine naboja  $Q$  (koja u vremenu  $t$  prođe kroz presjek vodiča) i vremena  $t$ .

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$I = \frac{Q}{t}$$

**Iznos gustoće struje**  $J$  u vodiču površine presjeka  $S$ , kroz koji teče struja (po presjeku konstantne) jakosti  $I$ , jednaka je omjeru jakosti struje  $I$  kroz vodič i površine presjeka vodiča  $S$ . [ $J$ ]=A/m<sup>2</sup>.

$$J = \frac{I}{S}$$

**Gustoća struje**  $J$  u tvari u kojoj se kreću pokretni nosioci naboja, može se izračunati kao umnožak broja  $N$  pokretnih nosioca naboja u jedinici obujma tvari, zatim naboja  $q$  pojedinog nosioca te srednje brzine gibanja pokretnih nosioca naboja  $v$ ,

$$\vec{J} = Nq\vec{v}$$

**Gustoća struje**  $J$  u materijalu provodnosti  $\kappa$  u kojem je uspostavljeno električno polje jakosti  $E$ , može se izračunati kao umnožak provodnosti materijala  $\kappa$  i jakosti električnog polja  $E$ ,

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$

**Provodnost**  $\kappa$  (ili specifična vodljivost) jest svojstvo tvari koje je mjera sposobnosti tvari da vodi električnu struju. [ $\kappa$ ]=A/(Vm).

**Otpornost**  $\rho$  (ili specifični otpor) jest svojstvo tvari koje je mjera opiranja tvari protoku električne struje. [ $\rho$ ]=Vm/A. Otpornost je recipročna vrijednost provodnosti tvari.

$$\rho = 1/\kappa$$

**Vodljivost**  $G$  je svojstvo tijela koje je mjera njegove sposobnosti da vodi el. struju. [ $G$ ]=A/V=S (simens<sup>2</sup>). Vodljivost ravnog vodiča duljine  $l$ , površine presjeka  $S$  i provodnosti materijala  $\kappa$ , računa se ovom jednadžbom.

$$G = \kappa \frac{S}{l}$$

**Električni otpor**  $R$  je svojstvo tijela koje je mjera njegova opiranja toku el. struje. [ $R$ ]=V/AV= $\Omega$  (om<sup>3</sup>). Otpor ravnog vodiča duljine  $l$ , površine presjeka  $S$  i otpornosti materijala  $\rho$ , računa se ovom jednadžbom. Otpor  $R$  je recipročna vrijednost vodljivosti  $G$  ( $R = 1/G$ ).

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

**Ohmov<sup>3</sup> zakon** opisuje odnos napona i struje na otporu  $R$ . On kaže da je omjer napona  $U$  i jakosti struje  $I$  na otporu  $R$  jednak iznosu otpora. Otpore iznos kojih je stalan (vrijedi Ohmov zakon) bez obzira na veličinu napona (i struje) nazivamo linearni, ili *omski* otpori.

$$R = \frac{U}{I}$$

**Jednadžba temperaturne ovisnosti otpora** (u linearnom području) gdje je  $R_{20}$  otpor na temperaturi 20°C  $R_t = R_{20}[1 + \alpha_{20}(t - 20)]$   $R_t$  je otpor na temperaturi  $t$  (u °C), a  $\alpha_{20}$  je temperaturni koeficijent otpora.

**Energija**  $W$  koja se na otporu  $R$  protjecanjem stalnom strujom  $I$  pretvori u toplinu tijekom vremena  $t$  (Jouleov<sup>4</sup> zakon). [ $W$ ]=J (džul<sup>4</sup>)=VAs (voltampersekunda)=Ws (vatsekunda<sup>5</sup>).

$$W = I^2 R \cdot t$$

**Snaga**  $P$  na otporu  $R$  jednaka je umnošku otpora  $R$  i kvadrata jakosti struje  $I$ . Ova snaga predstavlja brzinu kojom se električna energija na otporu pretvara u toplinu. [ $P$ ]=VA=W (vat<sup>5</sup>).

$$P = I^2 R$$

<sup>1</sup>Andre-Marie Ampere (čit. *amper*) (1775 – 1836)

<sup>2</sup>Werner von Siemens (čit. *simens*) (1816 – 1892)

<sup>3</sup>Georg Simon Ohm (čit. *om*) (1789 – 1854)

<sup>4</sup>James Prescott Joule (čit. *džul*) (1818 – 1889)

**PRIMJERI II.1**

**II.1-P1.** Kroz poprečni presjek vodiča tijekom 1 minute prostruji količina naboja od  $Q=30\text{ C}$ . Uzevši brzinu gibanja naboja stalnom, odredite jakost struje kroz vodič u tom vremenu. Kolika je gustoća struje ako je presjek vodiča  $0,2\text{ mm}^2$ ?

**Rješenje:** Jednoliko strujanje naboja znači da je struja stalna (istosmjerna, stalne jakosti).

$$Q = 30\text{ C} \quad t = 1 \cdot 60\text{ s} \quad I = \frac{Q}{t} \quad I = 0,5\text{ A}$$

U svakoj sekundi kroz poprečni presjek vodiča prolazi naboj  $0,5\text{ As}$ .

Naboji u vodiču (elektroni) gibaju se pod djelovanjem električnih sila, jer se u vodiču uspostavi električno polje. Radi se o gibanju ogromnog broja naboja. U stvarnosti su brzine i putanje pojedinih naboja vrlo različite. U mnoštvu putanja i brzina, statistički gledano, može se govoriti o nekoj srednjoj brzini elektrona (eng. drift) i o usmjerenom gibanju. Zanimljivo je da je ta srednja brzina naboja vrlo mala, ali se efekt sile (polje) širi velikom brzinom po vodiču tako da se gotovo "istovremeno" svi naboji (elektroni) počinju gibati (oni s početka i kraja voda). Još nešto je jako važno: lako se u metalu stvarno usmjereno gibaju elektroni, kao smjer struje se uzima onaj suprotni tj. kao da se giba pozitivan naboj. Gustoća struje je  $J=0,5/0,2=2,5\text{ A/mm}^2$ .

**II.1-P2.** Vodič iz prethodnog primjera dug je 10 metara i načinjen je od bakra. Odredite otpor vodiča i utrošenu energiju u vodiču. Koliki je napon (pad napona) između krajeva vodiča? Za otpornost bakra uzmite  $\rho=1,75 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}$ .

**Rješenje:**  $R=\rho \cdot l/S=1,75 \cdot 10^{-8} \cdot 10/0,2 \cdot 10^{-6}=0,875\ \Omega$

Napon između krajeva vodiča je  $\Delta U=0,875 \cdot 0,5=0,44\text{ V}$

Energija utrošena u vodiču je  $W=I^2 \cdot R \cdot t=0,5^2 \cdot 0,875 \cdot 60=13,125\text{ J}$

napomena: Prilikom prolaska struje dolazi do zagrijavanja vodiča. Prevelika struja dovela bi do prevelikog zagrijavanja. Zato je za svaki vodič i uvjete njegova korištenja propisana nazivna (dozvoljena) gustoća struje.

**II.1-P3.** Kroz otpornik priključen na napon od 120 V teče struja od 800 mA. Odredite otpor, vodljivost i snagu otpornika.

**Rješenje:** Primijenimo Ohmov zakon i dobivamo da je :

$$R = \frac{U}{I} \quad R = 150\ \Omega \quad G = \frac{1}{R} \quad G = 6.667 \times 10^{-3}\text{ S}$$

vodljivost možemo izračunati i direktno ovako:  $G = \frac{I}{U}$

snaga je:  $P=I^2 \cdot R = I^2/G = U^2/R = U^2 \cdot G = U \cdot I = 96\text{ W}$

**II.1-P4.** Otpor bakrenog namota pri  $20^\circ\text{C}$  iznosi  $30\ \Omega$ . Za koliko se taj otpor poveća pri temperaturi od  $80^\circ\text{C}$ ? Temperaturni koeficijent otpora za bakar je :  $\alpha = 0.0039\text{ }1^\circ\text{C}$

**Rješenje:** Otpor metalnih vodiča raste s temperaturom. Kao početna temperatura se uzima  $20^\circ\text{C}$ . Za temperature u uobičajenom području rada uređaja uzimamo da ta ovisnost linearna (na vrlo visokim i vrlo niskim temperaturama ovisnost nije linearna i iskazuje se kompliciranijim formulama kojima se ovdje ne bavimo).

Za rješavanja ovog zadatka koristimo jednostavnu formulu (jednažba pravca - nacrtajte ga):

$$R_g = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (g - 20)] \quad R_g = 37.02\ \Omega$$

Povećanje otpora je za  $7\ \Omega$

Napomena: Mjerenjem otpora možemo posredno odrediti temperaturu namota!

<sup>5</sup>James Watt (čit. vat) (1736 – 1819)

**II.1-P5.** Otpor bakrenog namota nekog transformatora od  $440\Omega$  pri  $20^\circ\text{C}$  u radu poraste na  $510\Omega$ . Kolika je radna temperatura?

Zadano:  $R_{20} = 440\Omega$   $R_g = 510\Omega$   $\alpha = 0.0039$

**Rješenje:** Preuredimo formulu iz prethodnog primjera tako da je nepoznanica temperatura  $\vartheta$ :

$$\vartheta = 20 + \frac{(R_g - R_{20})}{R_{20} \cdot \alpha} \quad \vartheta = 60.8^\circ\text{C}$$

**II.1-P6.** Ugljeni otpornik na  $20^\circ\text{C}$  ima otpor  $1000\Omega$ . Odredite njegov otpor na a)  $100^\circ\text{C}$  b)  $-30^\circ\text{C}$ .

Zadano  $R_{20} = 1000\Omega$   $\vartheta_1 = 100$   $\vartheta_2 = -30$   $^\circ\text{C}$   $\alpha = -0.0008$

**Rješenje:** Ugljen za razliku od metalnih vodiča ima *negativan temperaturni* koeficijent otpora tj. otpor mu pada sa porastom temperature. Formula za izračun je ista s tim da se  $\alpha$  uvrštava kao negativan broj.

a)  $R_{\vartheta_1} = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (\vartheta_1 - 20)]$   $R_{\vartheta_1} = 936\Omega$

b)  $R_{\vartheta_2} = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (\vartheta_2 - 20)]$   $R_{\vartheta_2} = 1.04 \times 10^3\Omega$

napomena: Osim ugljena postoje i neki drugi materijali koji pokazuju takvo svojstvo. Od njih se izrađuju tzv. NTC otpornici koji se koriste u elektroničkim (mjernim i regulacijskim) sklopovima....Posebnim postupcima legiranja dobiveni su temperaturno postojani materijali koji se onda koriste za izradu preciznih otpornika. Temperaturni koeficijent otpora takvih materijala je praktički jednak nuli (npr. manganin).

## ZADACI II.1.

✓ **II.1-1.** Ravni vodič duljine  $l$  priključen je na izvor stalnog napona  $U$ . Ako kroz poprečni presjek vodiča  $S$  u svakoj sekundi prostruji  $6,24 \cdot 10^{18}$  elektrona, odredite a) struju b) otpor vodiča c) specifičan otpor d) gustoću struje e) električno polje u vodiču.

Zadano:  $U=1,11\text{ V}$ ;  $l = 1\text{ m}$ ;  $S = 1\text{ mm}^2$ .

Rezultat: a)  $1\text{ A}$  b)  $1.1\Omega$  c)  $1.1 \cdot 10^{-6}\Omega\text{m}$  d)  $1\text{ A/mm}^2$  e)  $1.11\text{ V/m}$

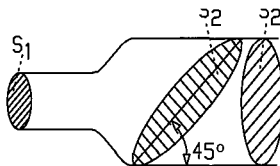
✓ **II.1-2** Odredite srednju brzinu gibanja elektrona u ravnom vodiču protjecanom strujom stalne gustoće  $J$ , uzevši da u jednom  $\text{cm}^3$  volumena vodiča ima  $N$  slobodnih elektrona.

Zadano:  $J=8\text{ A/mm}^2$ ;  $N=10^{22}$  elektrona/ $\text{cm}^3$ .

Rezultat:  $5\text{ mm/s}$

✓ **II.1-3.** U vodiču nejednakog presjeka prema slici gustoća struje kroz presjek  $S_2$  iznosi  $J_2$ . Odredite a) struju kroz presjek  $S_1$ . b) struju kroz presjek  $S_2$  c) gustoću struje kroz  $S_1$

Zadano:  $S_1=0,5\text{ mm}^2$ ;  $S_2=2\text{ mm}^2$ ;  $J_2=10^6\text{ A/m}^2$ .



Rezultat: a)  $2\text{ A}$  b)  $2\text{ A}$  c)  $4 \cdot 10^6\text{ A/m}^2$

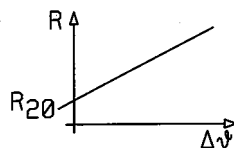
✓ **II.1-4.** Vodič specifičnog otpora  $\rho$  priključen na napon  $U$  razvija u svakoj sekundi toplinu  $W$ . Odredite a) otpor vodiča. b) struju c) duljinu vodiča ako je  $S=0.23\text{ mm}^2$

Zadano:  $U=220\text{ V}$ ;  $W=2000\text{ Ws}$ ;  $\rho=1,11\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ .

Rezultat: a)  $24.2\Omega$  b)  $9.1\text{ A}$  c)  $5\text{ m}$

- ✓ **II.1-5.** Otpor vodiča pri temperaturi  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  je  $R_{20}$ . Ako zagrijavanjem otpor linearno raste s temperaturom uz temperaturni koeficijent otpora  $\alpha$ , odredite otpor vodiča pri temperaturi  $\vartheta$ . Da li temperaturni koeficijent otpora ovisi o početnoj temperaturi?

Zadano:  $R_{20}=100\text{ }\Omega$ ;  $\alpha=0,004\text{ }1/^{\circ}\text{C}$ ;  $\vartheta=120\text{ }^{\circ}\text{C}$ .



Rezultat:  $140\text{ }\Omega$ , da

- ✓ **II.1-6.** Bakreni vodič presjeka  $S$  treba zamijeniti aluminijskim jednake duljine i otpora. Ako je poznat omjer otpornosti bakra i aluminija ( $\rho_{Cu}/\rho_{Al}$ ), odredite potrebni presjek aluminijskog vodiča. Koji vodič pri opisanoj zamjeni ima veću masu? Zadano:  $S_{Cu}=1,5\text{ mm}^2$ ;  $\rho_{Cu}/\rho_{Al}=0,63$  (podatak o specifičnoj masi potražite u tablici)

Rezultat:  $2,38\text{ mm}^2$ , bakreni

- ✓ **II.1-7.** Grijač otpora  $R$  priključen je na stalni napon  $U$ . Koliko se električne energije pretvori u toplinsku na grijaču u vremenu od pola sata? Za koliko posto se smanji ta energija ako je napon manji za 10%? Zadano:  $R=25\text{ }\Omega$ ;  $U=110\text{ V}$ .

Rezultat:  $871\text{ kJ}$ , smanji se za 19%.

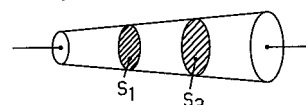
- ✓ **II.1-8.** S porastom temperature otpori dvaju otpornika rastu linearno od iste početne vrijednosti  $R$  (pri  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) do vrijednosti  $3R$  (prvi otpornik) odnosno  $2R$  (drugi otpornik) na nekoj temperaturi  $\vartheta$ . Koliki je omjer temperaturnih koeficijenata otpora  $\alpha_1/\alpha_2$ .

Rezultat: 2

- ✓ **II.1-9.** Za koliko se postotaka poveća otpor bakrenog namotaja stroja, ako mu se temperatura poveća za  $\Delta\vartheta$  uz zadani temperaturni koeficijent za bakar  $\alpha$ ? Zadano:  $\Delta\vartheta=40\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;  $\alpha=0,004\text{ }1/^{\circ}\text{C}$ .

Rezultat: 16%

- ✓ **II.1-10.** Vodič nejednolikog presjeka (krnji stožac) priključen je svojim krajevima na izvor električne energije konstantnog napona. U kakvom su odnosu  
a) gustoće struje kroz presjek  $S_1$  i  $S_2$ ?  
b) jakosti polja u točkama po presjeku  $S_1$  i  $S_2$ ?



Rezultat : a) veća je gustoća po presjeku  $S_1$  b) jače je polje po presjeku  $S_1$

- ✓ **II.1-11.** Od iste količine vodljivog materijala otpornosti  $\rho$  načinjena su dva cilindrična vodiča. Prvi vodič ima presjek  $S$ , a drugi dvostruko veći presjek  $2S$ . Koji je odnos otpora vodiča?

Rezultat:  $R_1=4R_2$

- ✓ **II.1-12.** Koliko naboja je prošlo kroz neki otpornik ako je prvih 5 sati jakost struje bila  $2\text{ A}$ , a slijedeća 2 sata  $1\text{ A}$ . Naboj izrazite u  $\text{As}$  (ampersekunda ili kulon) i  $\text{Ah}$  (ampersat).

Rezultat:  $12\text{ Ah}$ ;  $4,32 \times 10^4 \text{ As}$

- ✓ **II.1-13.** Žica ima promjer  $d$  i duljinu  $l$ . Mjerenjem je ustanovljen otpor žice  $R$ . (na temperaturi od  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) Kolika je specifična vodljivost (provodnost)  $\kappa$  materijala tog vodiča.

Zadano:  $d=0,4\text{ mm}$ ,  $l=33\text{ m}$ ,  $R=80\text{ }\Omega$

Rezultat:  $\kappa=3,28\text{ Sm/mm}^2$  napomena: ovaj podatak se odnosi na temperaturu od  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$

- ✓ **II.1-14.** Na okrugli komad izolatora (valjak) namotana je zavojnica sa bakrenom žicom promjera 0,4 mm. Zavojnica ima 1620 zavoja. Duljina jednog zavoja je 8,4 cm. Izračunajte omski otpor te zavojnice. Uzmite da je otpornost  $\rho = 1,75 \times 10^{-8} \Omega \text{m}$ .  
Rezultat:  $R = 18,96 \Omega$
- ✓ **II.1-15.** Koliko žice od konstantana presjeka  $0,07 \text{ mm}^2$  trebamo za izradu otpornika od  $2,5 \Omega$ ? (konstantan je materijal za izradu otpornika, koji ima specifičnu vodljivost  $2 \text{ Sm/mm}^2$ ).  
Rezultat:  $350 \text{ mm}$
- ✓ **II.1-16.** Prvi otpornik je načinjen od otporne žice okruglog presjeka koja ima promjer  $d$  i duljinu  $l$ . Drugi otpornik je napravljen od žice koja ima 20 % veći promjer i 20% manju duljinu. Koliki je otpor tog otpornika u odnosu na onaj prvi. Materijal je u oba slučaja isti.  
Rezultat:  $R_2 = 0,55 R_1$
- ✓ **II.1-17.** Na koju temperaturu treba zagrijati bakreni namot da bi se otpor namota povećao za 20% u odnosu na onaj pri  $20^\circ \text{C}$ , ako je temperaturni koeficijent za bakar  $0,0039 \text{ } 1/^\circ \text{C}$ ?  
Rezultat:  $71,3^\circ \text{C}$
- ✓ **II.1-18.** Za koliko se promijeni otpor otpornika koji je napravljen od a) konstantana b) volframa, ako se zagrije od  $20$  na  $120^\circ \text{C}$ ? Promjenu otpora izrazite u postotku.  
(temperaturni koeficijent otpora za konstantan je  $0,00005$ , a za volfram  $0,0046 \text{ } 1/^\circ \text{C}$ )  
Rezultat:  $0,4\%$ ;  $+41\%$  (otpornik od konstantana je praktički neovisan o temperaturi!)  
*0.5 46*
- ✓ **II.1-19.** Temperaturno promjenjivi otpornik (senzor) koristimo pri mjerenju temperature. U hladnom stanju ( $20^\circ \text{C}$ ) otpor tog otpornika je  $1000 \Omega$ . Pri povećanju temperature za  $80^\circ \text{C}$  otpor se smanjio na  $400 \Omega$ . Koliki je temperaturni koeficijent otpora? Kako nazivamo otpore koji imaju takvo svojstvo?  
Rezultat:  $-0,0075 \text{ } 1/^\circ \text{C}$ , NTC otpori.
- glatki*  
**II.1-20.** Namotaj aluminijske žice s temperaturnim koeficijentom  $\alpha_A = 0,0037 \text{ } ^\circ \text{C}^{-1}$  i namotaj mjedene žice s temperaturnim koeficijentom  $\alpha_M = 0,0015 \text{ } ^\circ \text{C}^{-1}$  imaju na sobnoj temperaturi ( $20^\circ \text{C}$ ) isti otpor,  $R_{AI} = R_{MI} = 2 \Omega$ . Na kojoj će temperaturi  $\vartheta$  otpor aluminijske žice biti za 30% veći od otpora mjedene žice. Koliki će pri toj temperaturi biti  $R_{AI}$  i  $R_{MI}$ ?  
Rezultat:  $\vartheta = 191,43^\circ \text{C}$ ;  $R_{AI} = 3,27 \Omega$   $R_{MI} = 2,514 \Omega$
- II.1-21.** Otpornik je priključen na napon od  $12 \text{ V}$  koji se postepeno (linearno) smanjuje na  $10 \text{ V}$  kroz vrijeme od 1 sat (npr. akumulator koji se prazni). Struja je u početku bila  $1,2 \text{ A}$ .  
a) Koliko je naboja prošlo kroz taj otpornik b) Koliko bi naboja prošlo da je napon cijelo vrijeme bio jednak onom početnom?  
Rezultat:  $1,1 \text{ Ah}$ ;  $1,2 \text{ Ah}$
- ✓ **II.1-22.** Napon na žarulji se postupno povećava i pri tom se mjeri struja. Dobiveni su rezultati prikazani tabelarno. Nacrtajte graf ovisnosti struje o naponu. Dobivate nelinearnu ovisnost struje o naponu, a) Odredite otpor žarulje pri naponu  $25$ ,  $100$  i  $220 \text{ V}$ . b) Zbog čega taj otpor nije konstantan? c) Koliki je omjer snage žarulje pri naponu od  $220$  i  $25 \text{ V}$

U, V	0	25	50	75	100	120	140	160	180	200	220
I, mA	0	41	73	96	112	123	133	143	152	159	168

Rezultat: a)  $610 \Omega$ ,  $892 \Omega$ ,  $1310 \Omega$ . b) zbog temperaturne ovisnosti volframa c) 37

## II.2. OSNOVNI ELEMENTI, SPOJEVI I ZAKONI ELEKTRIČNIH KRUGOVA

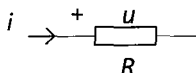
### OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

**Električni krug** je model stvarnog (fizičkog) strujnog kruga. Nema dimenzija i čine ga idealni elementi.

**Otpor  $R$**  je naziv koji dajemo (idealiziranom) elementu električnog kruga, koji ima svojstvo el otpora  $R$ , na kojemu su napon  $u(t)$  i struja  $i(t)$  u svakom trenutku povezani Ohmovim zakonom.

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

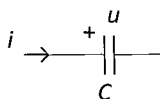
**Znak za otpor  $R$**  u električnom krugu. Prikazan je odnos referentnog smjera struje i polariteta napona na otporu  $R$ .



**Kapacitet  $C$**  je naziv koji dajemo (idealiziranom) elementu električnog kruga, koji ima samo svojstvo električnog kapaciteta  $C$ , na kojemu su napon  $u(t)$  i struja  $i(t)$  u svakom trenutku povezani ovom jednačom.

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

**Znak za kapacitet  $C$**  u električnom krugu. Prikazan je odnos referentnog smjera struje i polariteta napona na kapacitetu  $C$ .



**Statički otpor  $R_s$**  je svojstvo pojedine točke UI-karakteristike nekog elementa, koje je jednako omjeru napona  $U$  i struje  $I$  elementa u toj točki.

$$R_s = \frac{U}{I}$$

**Dinamički otpor  $r_d$**  je svojstvo pojedine točke UI-karakteristike nekog elementa, koje je jednako derivaciji napona  $U$  po struji  $I$  u toj točki.

$$r_d = \frac{dU}{dI}$$

**Snaga  $p(t)$**  na nekom elementu el. kruga u svakom vremenskom trenutku  $t$  jednaka je umnošku napona  $u(t)$  i struje  $i(t)$  na tom elementu u tom trenutku.  $[p(t)] = \text{VA}$  (voltamper). U krugu istosmjerne struje napon  $U$  i struja  $I$  na otporu su stalni pa je stalna i snaga  $P = U \cdot I$ .

**Energija  $W(t)$**  na nekom elementu strujnog kruga jednaka je integralu snage  $p(t)$  tijekom vremena  $t$ . Možemo li odrediti srednju vrijednost snage  $p_{sr} = P$  u nekom vremenskom intervalu  $\Delta t$ , promjenu energije  $\Delta W$  u tom intervalu lako je izračunati kao umnožak (srednje vrijednosti) snage  $P$  i trajanja vremenskog intervala  $\Delta t$  ( $\Delta W = P \Delta t$ ).

$$W(t) = \int_0^t p(t) dt$$

**Kirchhoffov<sup>6</sup> zakon za struje (KZS)** poznat i pod nazivom 1. Kirchhoffov zakon, kaže da je u svakoj točki el. kruga gdje dolazi do grananja struja, algebarski zbroj svih struja jednak nuli, pri čemu, ovisno o njihovom smjeru, strujama pridajemo različite predznake (npr. ako ulaznim strujama dajemo predznak +, tada izlaznim strujama dajemo predznak -). Iz toga proizlazi da je za svaku točku zbroj ulaznih struja jednak zbroju izlaznih.

$$\sum_{\text{alg}} I = 0$$

$$(\sum I_{\text{ul}} = \sum I_{\text{iz}})$$

<sup>6</sup>Gustav Robert Kirchhoff (čit. *kirchhof*) (1824 – 1887)

**Kirchhoffov<sup>1</sup> zakon za napone (KZN)** poznat i pod nazivom 2. Kirchhoffov zakon, kaže da je u svakoj petlji (zatvorenom putu po elementima) el. kruga algebarski zbroj svih napona jednak nuli. Pritom, naponima pridajemo različite predznake, ovisno da li (u odabranom smjeru obilaska petlje) rastu (predznak +) ili padaju (predznak -). Zanimljivo da je pritom, u svakoj takvoj petlji, **zbroj aktivnih napona (izvora) jednak zbroju pasivnih napona (na otporima)**.

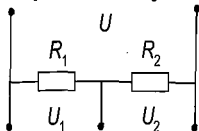
$$\sum_{\text{alg}} U = 0$$

$$(\sum U_{\text{akt}} = \sum U_{\text{pas}})$$

**Serijski spoj otpora** (spoj u kojemu kroz otpore teče ista struja) ima **ukupni otpor  $R_{\text{uk}}$**  jednak zbroju svih serijski spojenih otpora  $R_s$ .

$$R_{\text{uk}} = \sum R_s$$

**Otporničko djelilo napona** predstavlja serijski spoj otpora, na kojima se ukupni napon dijeli u omjeru veličina otpora:



$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

**Paralelni spoj otpora** (spoj u kojemu otpori imaju isti napon) ima **ukupnu vodljivost  $G_{\text{uk}}$**  jednaku zbroju vodljivosti  $G_p$  svih paralelno spojenih otpora.

$$G_{\text{uk}} = \sum G_p$$

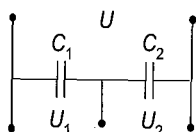
**Paralelni spoj kapaciteta** (spoj u kojemu svi kapaciteti imaju isti napon) ima **ukupni kapacitet  $C_{\text{uk}}$**  jednak zbroju svih kapaciteta  $C_p$  koji se nalaze u paralelnom spoju.

$$C_{\text{uk}} = \sum C_p$$

**Serijski spoj kapaciteta** (spoj u kojemu kapaciteti imaju isti naboj) ima **ukupni kapacitet  $C_{\text{uk}}$**  čija recipročna vrijednost je jednaka zbroju recipročnih vrijednosti svih serijski spojenih kapaciteta  $C_s$ .

$$\frac{1}{C_{\text{uk}}} = \sum \frac{1}{C_s}$$

**Kapacitivno djelilo napona** predstavlja serijski spoj kapaciteta, na kojima se ukupni napon dijeli obrnuto omjeru veličina kapaciteta:



$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$$

## PRIMJERI II.2

**II.2-P1** Serijski su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalnog napona  $U$ . Odredite:

- ukupan otpor spoja
- struju i napon svakog otpornika
- snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja.

Zadano:  $R_1=220 \, \Omega$ ;  $R_2=150 \, \Omega$ ;  $U=12 \, \text{V}$

**Rješenje:** a) ukupan otpor je  $R_{12}=R_1+R_2=220 \, \Omega+150 \, \Omega=370 \, \Omega$

napomena: ukupan otpor se naziva još: ekvivalentni ili nadomjesni otpor. Osim indeksa koji označavaju od kojih se otpornika sastoji, rabimo još i oznake  $R_{\text{uk}}$ ,  $R_{\text{ekv}}$  isl.

b) struja je jednaka kroz svaki otpor  $I=U/R_{12}=12/370=32,4 \, \text{mA}$

naponi na otpornicima su:  $U_1=I \cdot R_1=7,135 \, \text{V}$ ;  $U_2=I \cdot R_2=4,865 \, \text{V}$

suma tih napona mora biti jednaka naponu izvora (Kirchhoffov zakon za napone)!

c) snage su:  $P_1=I^2 \cdot R_1=0,23 \, \text{W}$ ;  $P_2=I^2 \cdot R_2=0,16 \, \text{W}$   $P_{12}=I^2 \cdot R_{12}=P_1+P_2=0,39 \, \text{W}$

Napomene: 1. struja koju daje izvor stalnog napona (naponski izvor) ovisi o ukupnom otporu koji priključimo na njegove stezaljke. 2. serijski spoj otpornika nazivamo: naponsko djelilo, jer se ukupan napon raspodijeli po otpornicima. Na manjem otporu pri tom je manji napon. Čitatelju prepuštamo da izvede praktične jednadžbe za djelilo napona:  $U_1 = U \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$  i  $U_2 = U \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$  koje ponekada znatno "ubrzavaju" proračun napona u serijskom spoju.

**II.2-P2** Serijski su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalne struje  $I$ . Odredite: a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja. Zadano:  $R_1 = 220 \, \Omega$ ;  $R_2 = 150 \, \Omega$ ;  $I = 50 \, \text{mA}$ .

**Rješenje:** a) ukupan otpor je  $R_{12} = R_1 + R_2 = 220 \, \Omega + 150 \, \Omega = 370 \, \Omega$   
 b) struja je jednaka kroz svaki otpor  $I = 50 \, \text{mA}$   
 naponi na otpornicima su:  $U_1 = I \cdot R_1 = 11 \, \text{V}$ ;  $U_2 = I \cdot R_2 = 7,5 \, \text{V}$   
 suma tih napona mora biti jednaka naponu izvora (Kirchhoffov zakon za napone)!  $U = 18,5 \, \text{V}$   
 c) snage su:  $P_1 = I^2 \cdot R_1 = 0,55 \, \text{W}$ ;  $P_2 = I^2 \cdot R_2 = 0,375 \, \text{W}$   $P_{12} = I^2 \cdot R_{12} = P_1 + P_2 = 0,925 \, \text{W}$

Napomena: napon na stezaljkama izvora stalne struje (strujni izvor) ovisi o ukupnom otporu koji priključimo na njegove stezaljke.

**II.2-P3** Paralelno su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalnog napona  $U$ . Odredite: a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja. Zadano:  $R_1 = 220 \, \Omega$ ;  $R_2 = 150 \, \Omega$ ;  $U = 12 \, \text{V}$

**Rješenje:** a) ukupan otpor je  $R_{12} = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 89,2 \, \Omega$   
 Napomena: ukupan otpor kod paralelnog spoja uvijek je manji od onog najmanjeg u tom spoju! Ako je paralelno spojeno više od dva otpornika, ukupan otpor možemo odrediti kao recipročnu vrijednost ukupne vodljivosti, koja se dobije zbrajanjem vodljivosti svih paralelnih otpornika.  
 b) struje kroz otpornike su  $I_1 = U/R_1 = 12/220 = 54,5 \, \text{mA}$ ;  $I_2 = U/R_2 = 12/150 = 80 \, \text{mA}$   
 (naponi na otpornicima su jednaki naponu izvora)  
 Ukupna struja je zbroj struja  $I = I_1 + I_2 = 134,5 \, \text{mA}$ , (Kirchhoffov zakon za struje)! Ta se struja može izračunati i ovako:  $I = U/R_{12} = 12/89,2 = 134,5 \, \text{mA}$   
 c) snage su:  $P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = 0,653 \, \text{W}$ ;  $P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = 0,96 \, \text{W}$   $P_{12} = P_1 + P_2 = 1,61 \, \text{W}$   
 ukupnu snagu možemo izračunati i ovako:  $P_{12} = U^2/R_{12} = I^2 \cdot R_{12} = 1,61 \, \text{W}$

Napomena: paralelni spoj otpornika nazivamo: **strujno djelilo** jer se ukupna struja raspodijeli po otpornicima. Kroz manji otpor pritom prolazi veća struja.

**II.2-P4** Paralelno su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalne struje  $I$ . Odredite: a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja. Zadano:  $R_1 = 220 \, \Omega$ ;  $R_2 = 150 \, \Omega$ ;  $I = 50 \, \text{mA}$

**Rješenje:** a) ukupan otpor je  $R_{12} = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 89,2 \, \Omega$   
 b) ukupna struja spoja je sada upravo struja izvora ( $50 \, \text{mA}$ ). Ta se struja dijeli u dva dijela. Preko ukupnog otpora spoja izračunamo napon  $U = I \cdot R_{12} = 0,05 \cdot 89,2 = 4,46 \, \text{V}$   
 Pojedine struje su  $I_1 = U/R_1 = 4,46/220 = 20,2 \, \text{mA}$ ;  $I_2 = U/R_2 = 4,46/150 = 29,8 \, \text{mA}$   
 Ako zbrojimo ove "pojedinačne" struje dobivamo ukupnu struju.

Čitatelju prepuštamo da izvede praktične jednadžbe (formule) za djelilo struje:  $I_1 = I \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$  i  $I_2 = I \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$  koje ponekada znatno "ubrzavaju" proračun struja u paralelnom spoju.  
 c) snage će biti:  $P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = 0,09 \, \text{W}$ ;  $P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = 0,133 \, \text{W}$ ;  $P_{12} = I_2 \cdot R_{12} = 0,223 \, \text{W}$



## ZADACI II.2

- ✓ **II.2-1.** Otpori  $R_1$  i  $R_2$  spojeni su serijski, pri čemu su na njima naponi  $U_1$  i  $U_2$ . Ako je poznat otpor  $R_2$  koliki je  $R_1$ ? Zadano je:  $U_1 = 14.4\text{ V}$     $U_2 = 9.6\text{ V}$     $R_2 = 100\Omega$

Rezultat:  $150\Omega$

- ✓ **II.2-2.** Koliki otpor treba spojiti u seriju sa žaruljom oznake  $12\text{ V}/0.5\text{ A}$  da bi u spoju na izvor napona  $U$  (većeg od nazivnog napona žarulje) žarulja normalno svijetlila? Kolika je nazivna snaga žarulje?

Zadano je :  $U_n=12\text{ V}$  (nazivni napon žarulje);  $U=24\text{ V}$ ;  $I_n=0.5\text{ A}$  (nazivna struja žarulje)

Rezultat:  $24\Omega$

- ✓ **II.2-3.** Koliki je ukupni otpor serijskog spoja otpora ako je odnos napona na njima  $1:2:3$ . Poznat je napon na prvom otporniku  $U_1=60\text{ V}$  i struja drugog otpornika  $I_2=0.5\text{ A}$ .

Rezultat  $720\Omega$

- ✓ **II.2-4.** Paralelno su spojeni otpori  $R_1$  i  $R_2$ . Poznata je (izmjerena je) struja  $I_1$  kroz otpor  $R_1$ . Treba izračunati napon izvora, struju kroz drugi otpor  $I_2$ , ukupnu struju  $I_{uk}$  te ukupni (nadmjesni) otpor spoja.

Zadano je :  $R_1=12\Omega$ ;  $R_2=6\Omega$ ;  $I_1=2\text{ A}$

Rezultat:  $24\text{ V}$ ,  $4\text{ A}$ ,  $6\text{ A}$ ,  $4\Omega$

- ✓ **II.2-5.** Struje kroz tri paralelno spojena otpora se odnose ovako  $I_1:I_2:I_3=2:3:6$ . Ako je poznat otpor  $R_2$  izračunajte  $R_1$ ,  $R_3$  i ukupni otpor spoja. Kolika je ukupna struja ako je spoj priključen na napon  $U$ . Zadano:  $R_2=33\Omega$     $U=99\text{ V}$

Rezultat:  $R_1=49.5\Omega$ ,  $R_3=16.5\Omega$ ,  $I_{uk}=11\text{ A}$ ,  $R_{uk}=9\Omega$

- ✓ **II.2-6.** U električnoj grijalici priključenoj na gradsku mrežu koriste se dva grijača jednakih otpora. Ovisno o stupnju grijanja, grijače spajamo u seriju ili u paralelu. Ako pri paralelnom spoju grijalica uzima struju  $I_p$  kolika je struja  $I_s$  kada grijače spojimo u seriju? Odredite odnos snaga  $P_{\text{paralelno}}/P_{\text{serijski}}$ . Zadano:  $I_p=8\text{ A}$

Rezultat:  $I_s = 2\text{ A}$ , odnos snaga je 4.

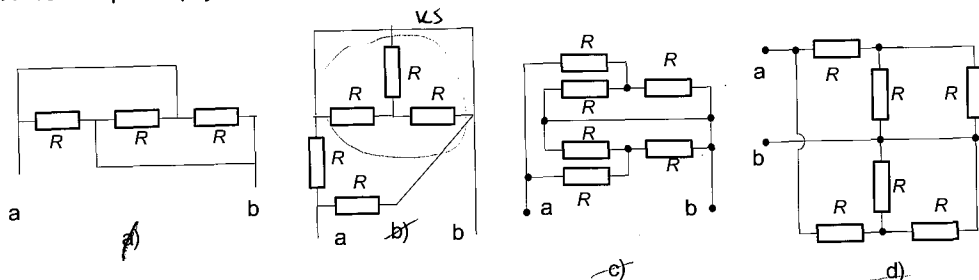
- ✓ **II.2-7.** Dva jednaka otpornika nazivnih snaga  $P_n$  i napona  $U_n$  spojeni su serijski i priključeni su na napon  $U=U_n$ . Kolika je ukupna snaga spoja? (nazivna snaga je ona za koju je otpornik projektiran, veća snaga može prozročiti pregaranje otpornika)

Rezultat:  $0.5P_n$

- ✓ **II.2-8.** U serijskom spoju snage otpornika  $R_1$  i  $R_2$  odnose se kao  $P_1:P_2=3:2$ . Kako će se odnositi snage ako otpornike spojimo paralelno?

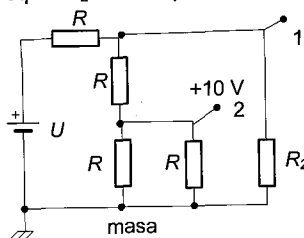
Rezultat:  $2/3$

- II.2.9.** Odredite ukupni otpor s točaka a i b u prikazanim spojevima ako je otpor  $R=10\ \Omega$ . Uputa: spojeve treba drugačije nacrtati tako da se vide serijski i paralelni spojevi.



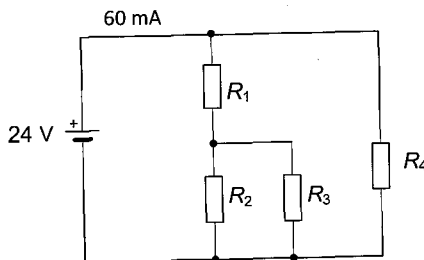
Rezultat: a) 3.33 oma b) 5 oma c) 7.5 oma d) 7.5 oma

- II.2.10.** Primjenom Kirchhoffovih zakona odredite potencijal točke 1 i napon izvora ako potencijal točke 2 iznosi 10 V. (potencijal je napon prema masi). Kako će se promijeniti potencijal točke 2 ako odspojimo otpor  $R_2$ ? Svi otpori imaju po 10  $\Omega$ .



Rezultat: potencijal točke 1 je +30 V, a napon izvora 80 V. Ako odspojimo  $R_2$  potencijal točke 2 je +16 V.

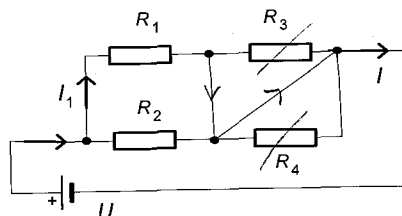
- II.2.11.** U prikazanom spoju struja izvora je 60 mA. Odredite koliki trebaju biti  $R_1$  i  $R_2$  da bi otpornik  $R_3$  dobio napon od 9 V uz snagu od 45 mW. Otpornik  $R_4$  uzima snagu od 480 mW.



- II.2.12.** Ako je poznata struja  $I_1$  i svi otpori odredite primjenom Kirchhoffovih zakona ukupnu struju  $I$  te napon izvora  $U$ . Zadano:  $R_1=6\ \Omega$ ;  $R_2=3\ \Omega$ ;  $R_3=8\ \Omega$ ;  $R_4=8\ \Omega$ ;  $I_1=1\ \text{A}$ .

Rezultat: 6 V, 3A

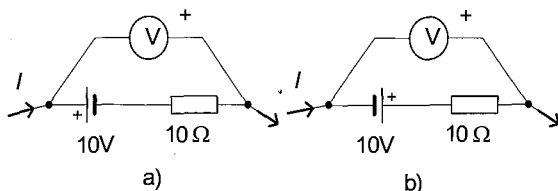
Uputa: treba primjetiti da su  $R_3$  i  $R_4$  kratko spojeni



**II.2-13.** Dva otpornika jednakog nazivnog napona  $U_n$ , a različitih nazivnih snaga  $P_{n1}=50\text{ W}$  i  $P_{n2}=100\text{ W}$  serijski su spojena na izvor nazivnog napona. Odredite ukupnu snagu spoja.

**Rezultat:** 33.33 W

**II.2-14.** Na slici a) i b) je prikazan dio strujnog kruga. Koristeći KZN odredite kolika je struja  $I$  ako idealni voltmetar pokazuje 20 V označenog polariteta? Riješite zadatak i za slučaj kada je polaritet napona voltmetra suprotan.



**Rezultat:** a)  $-3\text{ A}$  b)  $-1\text{ A}$  (negativan predznak znači struju u suprotnom smjeru), za suprotan polaritet: a)  $1\text{ A}$  b)  $3\text{ A}$

**II.2-15.** Struja kroz serijski spoj nelinearnog elementa i omskog (linearnog) otpornika ima stalan iznos od 2 A. Ovisnost struje i napona za otpornik je  $I=k_1 \cdot U$  ( $k_1=1\text{ A/V}$ ) dok je za nelinearni element ta ovisnost  $U=k_2 \cdot I^2$ . ( $k_2=1\text{ V/A}^2$ ) Koliki je ukupni napon na tom spoju elemenata? Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu UI-karakteristike opisanih elemenata.

**Rezultat:** 6 V

**II.2-16.** Paralelno su spojeni omski otpornik i nelinearni element iz zadatka II.2-15. Spoj je priključen na napon od 4 V. Kolika je ukupna struja spoja?

**Rezultat:** 6 A

✓ **II.2-17.** Nelinearni otpornik ima ovisnost struje o naponu  $I=k \cdot U^2$  ( $k=0.1\text{ mA/V}^2$ ). Nacrtajte graf ovisnosti struje za napone od 0 do 5 V. Na istom grafu nacrtajte ovisnost struje o naponu za (linearni) otpornik od 2 kΩ. Ako taj nelinearni element i otpornik od 2 kΩ spojimo paralelno na napon od 2,5 V odredite ukupnu struju i snagu spoja.

**Rezultat:** 1.875 mA, 4.68 mW

✓ **II.2-18.** Kako se mijenja otpor nelinearnog elementa sa porastom struje ako je ovisnost napona o struji zadana funkcijom  $U=f(I)=k \cdot I^{0.5}$  ( $k=1\text{ V/A}^{0.5}$ ) Ako u seriju sa ovim elementom spojimo otpornik od 1 Ω struja u krugu je 2 A. Koliki je napon na spoju?

**Rezultat:** otpor pada,  $U=3.41\text{ V}$

## TEST PITANJA II.

1) Ako kroz poprečni presjek nekog vodljivog medija prođe naboj od 2 As u vremenu od 10 s, jakost električne struje je :

- A) 1 A B) 2 A C) 0,2 A D) 0,02 A

2) Za pomicanje naboja od 1 mikroC od mjesta A do mjesta B u nekom vodiču električno polje izvrši rad od 2 mikroJ. Koliki je napon između točaka A i B?

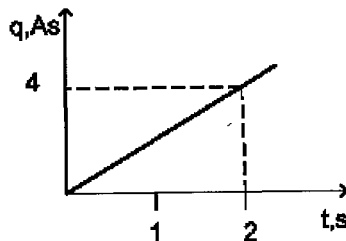
- A) 1 V B) 0,5 V C) 2 V D) nula

$$P = \frac{W}{Q}$$

3) Snimljena je vremenska ovisnost ukupnog naboja koja prolazi poprečnim presjekom nekog vodiča. Kolika je jakost struje u trenutku 1 ms?

- A) 1 A  
B) 1 mA  
C) 2 A  
D) 4 A  
E) 0,5 A

konst.



4) Grijača ploča štednjaka snage 1500 W uključena je 10 minuta. Koliko je električne energije primila ta ploča?

- A) 1,5 kWh B) 0,25 kWh C) 2,5 kWh D) 0,1 kWh

5) Koliko se energije utroši na otporniku od 5  $\Omega$  ako 1 sat kroz njega prolazi struja jakosti 5 A?

- A) 125 kWh B) 0,125 kWh C) 1,25 Wh D) 45000 Ws E) 18000 Ws

6) Snaga je:

- A) umnožak sile i puta  
B) brzina pretvorbe energije  
C) umnožak energije i vremena  
D) omjer rada i energije  
E) omjer rada i brzine

7) Razlika potencijala na priključnicama otpornika od 100 oma je u nekom trenutku 100 V. Kolika je u tom času brzina pretvorbe električne energije u toplinu?

- A) 100 J/s B) 1 J/s C) 10000 J/s D) 10 J/s

8) S porastom temperature otpori dvaju otpornika linearno rastu od iste početne vrijednosti  $R$  (kod 20 stupnjeva) do vrijednost  $4R$  (prvi otpornik) odnosno  $2R$  (drugi otpornik). Koji je odnos temp. koeficijenata otpora  $\alpha_1/\alpha_2$ ?

- A) 1 B) 3 C) 2 D) 4

9) Otpor nekog otpornika ima na 20 stupnjeva iznos 1  $\Omega$ , a na 21 stupanj 1,1  $\Omega$ . Koliki je temperaturni koeficijent otpora  $\alpha$ ?

- A) 1 B) 0,1 C) 0,01 D) 1,1

$$1,1 \Omega = 1 \Omega (1 + \alpha \cdot 1)$$

$$1,1 \Omega = 1 \Omega + \alpha \cdot 1 \Omega$$

$$0,1 \Omega = \alpha$$

$$2R = R(1 + \alpha \Delta T)$$

$$1 = 0.01 \Delta T$$

$$\Delta T = 100^\circ$$

$$100^\circ = x - 20^\circ$$

10) Otpornik ima na  $20^\circ$  otpor od  $1 \Omega$  i temperaturni koeficijent otpora  $\alpha = 0.01$ . Na kojoj temperaturi će se otpor podvostručiti?

- A) 100 stupnjeva B) 80 stupnja C) 120 stupnjeva D) 40 stupnjeva

11) Kroz neki otpornik  $R$  (trošilo) prolazi struja od  $1 \text{ A}$  kroz vrijeme od  $1$  minute. Utrošena energija je pri tom  $300 \text{ Ws}$ . Koliki je otpor  $R$ ?

- A)  $300 \Omega$  B) nema dovoljno podataka C)  $5 \Omega$  D)  $100 \Omega$  E)  $50 \Omega$

$$W = I^2 R t$$

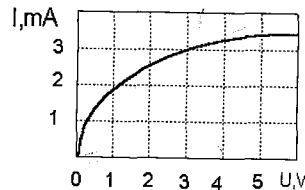
12) Nelinearni element ima U-I karakteristiku koja se aproksimira funkcijom  $I = kU^2$ . Kako se mijenja dinamički otpor sa porastom napona?

- A) raste B) pada C) ne mijenja se D) raste, a zatim pada E) pada, a zatim raste

$$R = \frac{dU}{dI}$$

13) Koliki je statički otpor nelinearnog elementa zadane karakteristike kod struje od  $3 \text{ mA}$ ?

- A)  $1 \text{ k}\Omega$   
B)  $3 \text{ k}\Omega$   
C)  $1 \Omega$   
D)  $2 \text{ k}\Omega$   
E)  $3 \Omega$



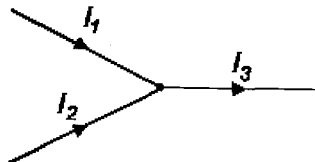
$$\frac{5}{0.002}$$

14) Koliki je (približno) dinamički otpor kod struje od  $3 \text{ mA}$  za nelinearni element iz predhodnog pitanja?

- A)  $1 \text{ k}\Omega$  B)  $3 \Omega$  C)  $3 \text{ k}\Omega$  D)  $1 \Omega$  E)  $6 \text{ k}\Omega$

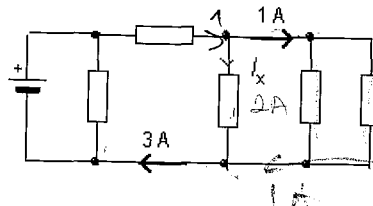
15) Kojom jednačinom je iskazan Kirchhoffov zakon za struje (1. Kirch. zakon)?

- A)  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$   
B)  $I_1 + I_2 = I_3$   
C)  $I_1 + I_2 - I_3 = 0$   
D)  $I_1 + I_3 = -I_2$



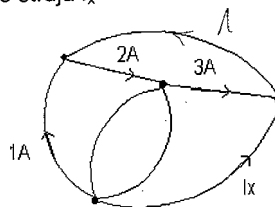
16) U prikazanom strujnom krugu poznate su označene struje. Vrijednosti otpornika nisu zadane. Odredite struju  $I_x$ .

- A)  $2 \text{ A}$   
B)  $1 \text{ A}$   
C)  $3 \text{ A}$   
D)  $4 \text{ A}$   
E) nema dovoljno podataka



17) Prikazana je topološka struktura el. mreže (grane i čvorovi). Označene struje su poznate. Elementi u granama nisu poznati. Kolika je struja  $I_x$ ?

- A) 2 A  
 B) -2 A  
 C) nula  
 D) 3 A  
 E) nema dovoljno podataka



18) S koliko neovisnih naponskih jednačbi Kirchhoffovih zakona se opisuje mreža koja ima 7 grana i 4 čvora?

- A) 3 B) 4 C) 7 D) 6 E) 5

19) Dva cilindrična vodiča napravljena su od istog materijala. Prvi ima otpor  $R$ , duljinu  $l$  i polumjer  $r$ , a drugi ima duljinu  $3 \cdot l$  i polumjer  $r/2$ . Koliki je otpor drugog vodiča?

- A) 3R B) 12R C) 6R D) 8R E) 4R

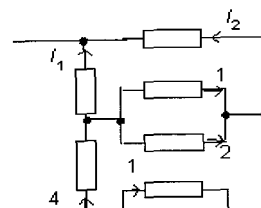
20) Koji su od navedenih izraza ispravni?

- A)  $I=U/R$  B)  $I=U \cdot R$  C)  $U=I/R$  D)  $G=1/R$  E)  $I=U \cdot G$

21) Prikazani spoj otpornika priključen je na napon  $U$ .

Ako su poznate označene struje, odredite struju  $I_2$

- A) 6 A  
 B) 3 A  
 C) 2 A  
 D) 1 A  
 E) nema dovoljno podataka

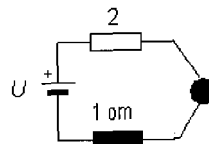


22) Serijski spojeni otpori  $R_1$  i  $R_2$  priključeni su na napon  $U$ . Napon na otporu  $R_1$  je:

- A)  $U \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$ ; B)  $U \cdot R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ ; C)  $U \cdot R_1 / R_1 R_2$ ; D)  $U \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$ ; E)  $U / (R_1 + R_2)$

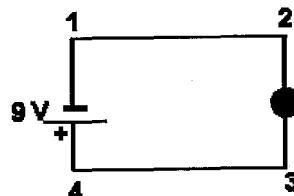
23) Ako otpornik od  $1 \Omega$  zamijenimo s  $4 \Omega$  dogodi se sljedeće:

- A) struja se poveća  
 B) žarulja slabije svijetli  
 C) struja se smanji  
 D) žarulja jače svijetli  
 E) napon izvora se smanji



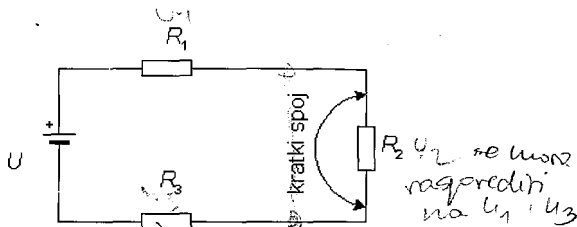
24) Koliki je napon (razlika potencijala) između pojedinih točaka. Označite točne odgovore:

- A)  $U_{12}=0$   
 B)  $U_{13}=-9 \text{ V}$   
 C)  $U_{42}=+9 \text{ V}$   
 D)  $U_{34}=0$   
 E)  $U_{32}=-9 \text{ V}$



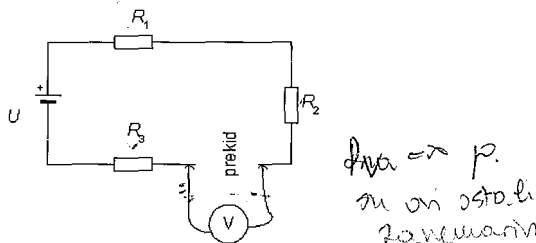
25) Serijski su spojena tri otpornika. Spoj je priključen na napon  $U$ . Na jednom otporniku došlo je do kratkog spoja između stezaljki. Kako se promijene naponi na preostala dva otpornika?

- A) smanje se  
 B) povećaju se  
 C) na većem se poveća, a na manjem smanji  
 D) na manjem se poveća, a na većem smanji  
 E) ne promijene se



26) U serijskom spoju otpornika došlo je do prekida vodiča. Koliki napon pokazuje voltmetar spojen na mjesto prekida ako je  $R_1=R_2=R_3$ ?

- A) nula  
 B)  $U$   
 C)  $U/2$   
 D)  $U/3$



27) Serijski je spojeno 20 jednakih žarulja predviđenih za nazivni napon od 1,5 V. Koliki napon treba priključiti na ovaj spoj da bi žarulje normalno svijetile?

- A) 1,5 V B) 20 V C) 30 V D) 60 V

28) Omjer snaga dva otpornika spojenih serijski i priključenih na naponski izvor  $U$  jednak je  $P_1/P_2=1/3$ . Koliki je omjer snaga ako ih priključimo paralelno na isti izvor?

- A) 1/6 B) 6 C) 3 D) 1/3 E) 1/9

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{U^2}{R_1}}{\frac{U^2}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1} = 3$$

29) Paralelno je spojeno  $n$  jednakih vodljivosti  $G$ . Koliki je ukupni (ekvivalentan) otpor ove kombinacije?

- A)  $n \cdot G$  B)  $G/n$  C)  $1/nG$  D)  $n/G$

$$R_{\text{uk}} = \frac{R^n}{n \cdot R} = nR^{n-1}$$

30) Serijski je spojeno  $n$  jednakih vodljivosti  $G$ . Koliki je ukupni (ekvivalentan) otpor ove kombinacije?

- A)  $n \cdot G$  B)  $G/n$  C)  $1/nG$  D)  $n/G$

$$nR \text{ bi bilo da su otpor}$$

$$R = \frac{1}{G} \Rightarrow \frac{n}{G}$$

### Odgovori na test pitanja II.

1.C; 2.C; 3.C; 4.B; 5.B; 6.B; 7.A; 8.B; 9.B; 10.C; 11.C; 12.B; 13.A; 14. C; 15.BC; 16.A; 17.B; 18.B; 19.B; 20.ADE; 21.A; 22.D; 23.BC; 24.ABCD; 25.B; 26.B; 27.C; 28. C; 29. C; 30) D;

### III. JEDNOSTAVNI KRUGOVI ISTOSMJERNE STRUJE

#### III.1. OTPORNIČKI KRUGOVI → sve

##### OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

**Jednadžba realnog izvora**, gdje je  $U_0$  napon praznog hoda izvora, dok je  $R_i$  unutarnji otpor izvora. Ovo je jednadžba padajućeg pravca, koji opisuje međusobnu ovisnost napona  $U$  i struje  $I$  na priključnicama izvora (UI-karakteristika realnog izvora).

$$U = U_0 - I R_i$$

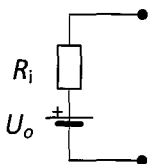
**Napon praznog hoda izvora**  $U_0$  jest parametar (unutarnji napon ili elektromotorna sila) izvora, koji se još označava i kao  $U_{ph}$  ili  $E$ , a predstavlja napon na priključnicama izvora u stanju praznog hoda (otvorene priključnice, kad je među njima otpor  $R = \infty$  i struja  $I = 0$ ).

**Unutarnji otpor izvora**  $R_i$  jest parametar (realnog) izvora koji je jednak omjeru napona praznog hoda  $U_0$  i struje kratkog spoja  $I_0$  izvora.

$$R_i = \frac{U_0}{I_0}$$

**Struja kratkog spoja izvora**  $I_0$  (ili  $I_{ks}$ ) jest parametar izvora koji predstavlja struju izvora u stanju kratkog spoja (stanje kada je između priključnica otpor  $R = 0$  i napon  $U = 0$ ).

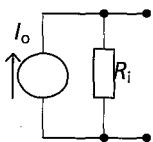
**Naponski model** realnog izvora predstavlja serijski spoj idealnog naponskog izvora (čiji napon je jednak naponu praznog hoda izvora)  $U_0$  i otpora (jednako unutarnjem otporu izvora)  $R_i$ .



**Stupanj iskorištenja**  $\eta$  (stupanj korisnog djelovanja) za **naponski model izvora** računa se ovom jednadžbom (gdje je  $R_t$  otpor trošila, a  $R_i$  unutarnji otpor izvora):

$$\eta = \frac{R_t}{R_t + R_i}$$

**Strujni model** realnog izvora predstavlja paralelni spoj idealnog strujnog izvora (čija je struja jednaka struji kratkog spoja izvora)  $I_0$  i otpora (jednako unutarnjem otporu izvora)  $R_i$ .



**Stupanj iskorištenja**  $\eta$  (stupanj korisnog djelovanja) za **strujni model izvora** računa se ovom jednadžbom (gdje je  $R_t$  otpor trošila, a  $R_i$  unutarnji otpor izvora):

$$\eta = \frac{R_t}{R_t + R_i}$$

**Uvjet prilagođenja** trošila na izvor radi dobivanja najveće snage. Najveća snaga na trošilu promjenjivog otpora, priključenom na realni izvor, dobiva se kada je otpor trošila  $R_t$  jednak unutarnjem otporu izvora  $R_i$  (pritom je stupanj iskorištenja  $\eta = 50\%$ ).

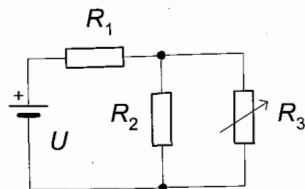
$$R_t = R_i$$



## PRIMJERI III.1

**III.1-P1.** Izračunajte struje kroz sve otpornike u prikazanom strujnom krugu.

Zadano:  $R_1=20\ \Omega$ ;  $R_2=60\ \Omega$ ;  $R_3=30\ \Omega$ ;  $U=40\ \text{V}$ .



**Rješenje:** Najprije odredimo ukupan otpor mješovitog spoja otpornika. Paralelni spoj  $R_2$  i  $R_3$  zamijenimo s jednim otpornikom koji ima iznos  $R_{23}=R_2 \cdot R_3 / (R_2 + R_3) = 20\ \Omega$ . Sada imamo pojednostavljenu shemu u kojoj su na izvor serijski spojena dva otpornika  $R_1$  i  $R_{23}$  koje zamijenimo sa jednim otpornikom  $R_{uk}=R_1+R_{23}=40\ \Omega$ . Ohmovim zakonom izračunamo ukupnu struju  $I_{uk}=U/R_{uk}=1\ \text{A}$ . To je ujedno struja kroz  $R_1$ . Ta se struja grana na paraleli  $R_2$  i  $R_3$ . Napon na paraleli je  $U_{12}=U-I_1 \cdot R_1=20\ \text{V}$ . Pojedine struje su  $I_2=U_{12}/R_2=20/60=1/3\ \text{A}$ ;  $I_3=U_{12}/R_3=2/3\ \text{A}$  (naravno provjerom trebamo ustanoviti da je  $I_1=I_2+I_3$ ).

Kod rješavanja ovog i sličnih zadataka korisno je nacrtati sve pojednostavljene sheme i na njima upisivati izračunate veličine (struje, napone, nadomjesne otpore, smjerove struja, polaritete napona).

Napomena: Ovdje se javlja problem označavanja nadomjesnih otpora, napona i struja. Polazište su oznake otpornika. Prikladno je nadomjesne otpore označavati indeksiranim oznakama u kojima se nalaze oznake otpora npr. nadomjesni otpor paralelnog spoja  $R_2$  i  $R_3$  označen je sa  $R_{23}$ . U tom smislu bi se  $R_{uk}$  ovdje mogao označiti kao  $R_{123}$ .

**III.1-P2.** Na koji iznos treba podesiti promjenjivi otpornik  $R_3$  u spoju iz prethodnog primjera da bi na otporu  $R_2$  napon bio  $U/5$ ?

Zadano:  $R_1=20\ \Omega$ ;  $R_2=60\ \Omega$ . Kako se mijenja struja kroz  $R_2$  prilikom smanjivanja otpora  $R_3$ ?

**Rješenje:** Napon na  $R_2$  je napon na paraleli  $R_{23}$ . Na izvor kao da su serijski spojena dva otpornika:  $R_1$  i  $R_{23}$ . Ako je na  $R_{23}$  napon  $U/5$  znači da je taj otpor 4 puta manji od  $R_1$  tj.  $5\ \Omega$ . Dakle, vrijedi jednakost  $R_{23}=R_2 \cdot R_3 / (R_2 + R_3) = 5$ . Iz "ovoga" izračunamo da  $R_3$  mora biti  $5,45\ \Omega$ .

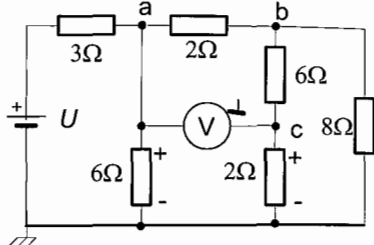
Promjenom nekog parametra strujnog kruga dolazi do promjene pojedinih fizikalnih veličina: struja, napona i snaga. Konkretno u ovom primjeru analiziramo posljedice koje nastupaju kada se  $R_3$  smanjuje.

Potrebno je napraviti niz zaključaka u kojima moraju biti poštovani Ohmov i Kirchhoffovi zakoni. Krenimo: Ako se  $R_3$  smanji tada se smanji iznos nadomjesnog otpora paralele. To povlači za sobom smanjenje ukupnog otpora. Znači da se poveća ukupna struja odnosno struja kroz  $R_1$ . To opet znači da se poveća napon na  $R_1$ . Veći napon na  $R_1$  (zbog Kirchhoffovog zakona za napone) znači smanjenje napona na paraleli pa prema tome i smanjenje napona na  $R_2$ . Manji napon na  $R_2$  znači i manju struju kroz taj otpornik.

Ponekada je prikladno funkcijsku povezanost pojedinih veličina strujnog kruga prikazati grafom. Za vježbu pokušajte nacrtati (skicirati) graf funkcije  $I_2=f(R_3)$ . Početna vrijednost  $R_3$  neka je nula (na mjestu otpornika  $R_3$  je kratkospojnik), a završna beskonačno (otpor  $R_3$  je odspojen). Oblik ovoga grafa može se precizno dobiti tako da se funkcija struje nacrti s pomoću računala.

Čitatelju prepuštamo da analizira i druge fizikalne veličine ovog strujnog kruga kao i promjene drugih parametara kruga.

III.1-P3. U prikazanom električnom krugu voltmetrom je izmjeren napon od +10V. Izračunajte ukupan otpor spoja otpornika kao i napon izvora  $U$ . Koliki je napon  $U_{ab}$ ?



**Rješenje:** U ovom primjeru je na naponski izvor priključen mješoviti spoj otpornika. Ukupan otpor određujemo postepeno uočavajući serijske i paralelne spojeve koje onda zamjenjujemo njihovim nadomjesnim otporima. Krenemo od serije 6 i 2 Ω za koju je ukupni otpor 8 Ω. Taj otpor je u paraleli sa (sasvim desno) otpornikom od 8 Ω. Ukupan otpor ove paralele je dakle 4 Ω. U seriju sa tim otporom je otpornik od 2 Ω što daje 6 Ω. Taj je pak u paraleli sa 6 Ω što daje 3 Ω. Preostaje serijski spoj 3+3, pa je ukupan otpor gledano sa stezaljki izvora 6 Ω. Sve smo računali "napamet" zbog jednostavnih zadanih podataka. Jasno da bi u općenitom slučaju račun bio složeniji. Dapače u takvom slučaju čitatelju se preporuča postepeno crtanje nadomjesnih shema sa upisivanjem izračunatih vrijednosti pojedinih nadomjesnih otpora. Time je prvi dio zadatka riješen. Za drugi dio tj. za proračun napona izvora treba malo razmisliti. U točki a ukupna struja se dijeli u dva dijela.

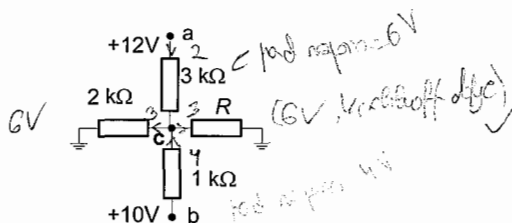
Zanimljivo je da su ta dva dijela struje jednaka, jer zapravo imamo zatamnjeni otpornik od 6 Ω paralelno sa onim nadomjesnim od 6 Ω. Struju kroz zatamnjeni otpornik od 6 Ω označimo sa  $I$ , a zatim se pitamo kolika je struja kroz zatamnjeni otpornik od 2 Ω. Ta je struja  $I/2$  jer se u čvoru  $b$  struja opet grana u dvije jednake struje. Označimo polaritet napona na zatamnjenim otpornicima. Tamo gdje struja ulazi postavimo oznaku + (ta stezaljka otpornika je na višem potencijalu).

Napon voltmetra je algebarska suma napona na zatamnjenim otpornicima. Polazimo od referentne stezaljke voltmetra:

$U_V = -U_2 + U_6 = -0,5 \cdot I \cdot 2 + I \cdot 6$  iz čega slijedi da je  $I = U_V/5 = 2A$ . Ukupna struja koja ulazi u čvor  $a$  je dakle 4 A pa je napon izvora  $U = 4 \cdot R_{uk} = 4A \cdot 6\Omega = 24V$

Napon  $U_{ab}$  je napon na otporniku od 2 Ω kroz koji prolazi struja od 2 A:  $U_{ab} = 4V$ . Treba primjetiti da će napon  $U_{ba}$  biti -4 V (promjena redoslijeda stezaljki mijenja polaritet napona)

III.1-P4. Izračunajte kod kojeg iznosa otpora  $R$  će potencijal točke  $c$  u spoju na slici desno biti jednak +6 V.



**Rješenje:** Ponekada na shemama (osobito u elektronici) koristimo posebnu oznaku za masu tj. za zajedničku točku strujnog kruga (eng. ground). Treba voditi računa da su sve «mase» galvanski (vodljivo) međusobno spojene. U ovom primjeru je dakle otpornik  $R$  spojen paralelno sa otpornikom od 2 kΩ. Na shemi su označeni potencijali pojedinih točaka prema masi. Npr. točka  $a$  je na +12 V što znači da bismo mogli ucrtati naponski izvor od 12 V između točke  $a$  i mase. Iz poznatih potencijala možemo odrediti napone na pojedinim otpornicima, a zatim i njihove struje.

Napon na otporniku od  $3\text{ k}\Omega$  je  $6\text{ V}$  (razlika potencijala točaka **a** i **c**). Pozitivna je gornja stezaljka tog otpornika pa struja teče "od gore prema dolje"  $I_3=2\text{ mA}$ . Na jednak način dobivamo struju kroz otpornik od  $1\text{ k}\Omega$ :  $I_1=4\text{ mA}$  (smjer prema čvoru **c**).

Struja kroz otpornik od  $2\text{ k}\Omega$  ima smjer "u lijevo" tj. teče od čvora **c** prema masi. Iznos te struje je  $6\text{ V}/2\text{ k}\Omega=3\text{ mA}$ . Sada treba primijeniti Kirchhoffov zakon za struje na čvor **c** i ustanoviti da kroz (zasada) nepoznati otpornik  $R$  prolazi struja od  $3\text{ mA}$  i to "u desno" tj. od čvora **c** prema masi.

Budući da je napon na otporniku  $R$ ,  $6\text{ V}$  tada iz Ohmovog zakona slijedi da je  $R=6/0.003=2000\Omega=2\text{ k}\Omega$ . Čitatelju preporučamo da prilikom rješavanja ovog i sličnih zadataka na shemi upisuje pojedine struje i napone (pazeći na smjer i polaritet).

**III.1-P5.** Istosmjerni izvor ima napon praznog hoda  $12\text{ V}$ . Ako na taj izvor priključimo otpornik (trošilo) od  $10\ \Omega$  napon na stezaljkama se smanji na  $10\text{ V}$ . koliki je unutarnji otpor tog izvora? Prikažite opisani izvor shematski a) naponskim b) strujnim modelom. Koliki je stupanj iskrištenja za slučaj napnskog, a koliki za slučaj strujnog modela izvora?

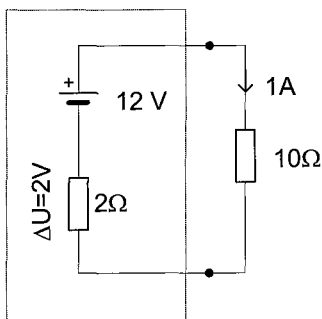
**Rješenje:** Struja kroz otpornik (trošilo) je  $I=10/10=1\text{ A}$ . Smanjenje napona za  $2\text{ V}$  možemo protumačiti "padom napona" unutar samog izvora. U seriji sa (idealnim) naponskim izvorom od  $12\text{ V}$  treba zamisliti serijski spojen unutarnji otpor izvora. Taj otpor lako izračunamo jer znamo pad napona na njemu ( $2\text{ V}$ ) i struju ( $1\text{ A}$ ). Dakle unutarnji otpor je:  $R_i=2\text{ V}/1\text{ A}=2\ \Omega$ .

Time je dobiven model (realnog) naponskog izvora. Možemo izračunati struju koju bi takav izvor davao ako mu stezaljke kratko spojimo. Ta struja je  $I_{ks}=12/2=6\text{ A}$ . Međutim kada na izvor spojimo otpornik od  $10\ \Omega$  struja će biti samo  $1\text{ A}$ . Znači da se dio struje "troši" u samom izvoru.

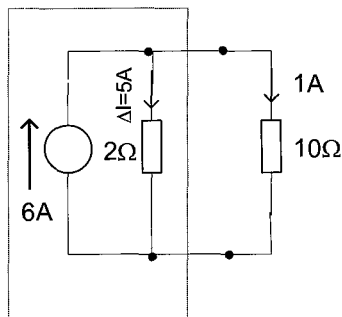
Možemo zamisliti kao da je paralelno (idealnom) strujnom izvoru od  $6\text{ A}$  spojen "unutarnji" otpornik kroz koji prolazi struja  $5\text{ A}$ . Kako je na stezaljkama izvora napon od  $10\text{ V}$  taj unutarnji otpornik ima iznos  $10/5=2\ \Omega$ . Zaključujemo da su u modelu naponskog i strujnog realnog izvora unutarnji otpori jednaki.

Za vanjski krug (trošilo) je sasvim svedjedno koji model izvora koristimo.

**Pažnja:** stupanj iskorištenja te struje i naponi na unutarnjem otporu ovise o modelu. Čitatelju prepuštamo izračun ovih veličina.



naponski  
model



strujni  
model

## ZADACI III.1

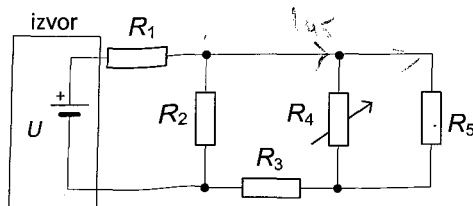
- VIII.1-1. Na nekom istosmjernom izvoru električne energije izvršena su dva mjerenja. Prvo mjerenje je bilo sa otporom trošila  $10\ \Omega$  kada je ustanovljena struja od  $1\text{ A}$ . Kod drugog mjerenja je otpor trošila promijenjen na  $2,5\ \Omega$ , a struja je bila  $2\text{ A}$ . Odredite (uz pretpostavku da je UI-karakteristika tog izvora pravac) koliki su a) struja kratkog spoja b) napon praznog hoda c) unutarnji otpor. Nacrtajte UI-karakteristiku izvora i njegovu shemu za naponski te strujni model izvora; d) Izračunajte snagu trošila ako je otpor trošila redom:  $2,5\ \Omega$ ;  $5\ \Omega$  i  $10\ \Omega$ .

Rezultat: a)  $3\text{ A}$  b)  $15\text{ V}$  c)  $5\ \Omega$  d)  $10\text{ W}$ ,  $11,25\text{ W}$  i opet  $10\text{ W}$

III.1-2 U spoju na slici smanjuje se otpor  $R_4$ . S tim u vezi navedene su sljedeće tvrdnje:

1.  $R_{uk}$  pada
2.  $I_1$  raste
3.  $I_2$  se ne mijenja;
4.  $I_3$  pada;
5.  $I_5$  raste;

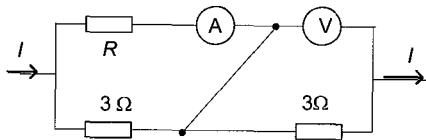
(indeksi struja i napona odnose se na otpore). Koje su tvrdnje točne?



Rezultat: 1. i 2. je točno. Uputa: kod ovakvih zadataka prikladno je koristiti oznake:  $\uparrow$  raste,  $\downarrow$  pada,  $-$  ne mijenja se. Treba krenuti od veličine koja je zadana kao promjenjiva:  $R_4 \downarrow$  (pada) posljedica je da  $R_{45} \downarrow$  pa onda  $R_{345} \downarrow$ ,  $R_{2345} \downarrow$ ,  $R_{uk} \downarrow$ ,  $I_1 \uparrow$ ,  $U_1 \uparrow$ ,  $U_2 \downarrow$  itd. Kod zaključivanja o promjeni pojedine struje ili napona treba voditi računa o KZS odnosno o KZN. Pitanje Na prikazani spoj otpornika umjesto naponskog izvora  $U$  priključimo strujni  $I$ . Koje su u tom slučaju tvrdnje ispravne ako se  $R_4$  smanjuje?odg. točno je 1.

III.1-3. Idealni instrumenti ( $R_a=0$ ,  $R_v=\text{beskonačno}$ ) pokazuju  $I = 2\text{ A}$ ,  $U = 18\text{ V}$ . Koliki su a) iznos otpora  $R$  b) struja  $I$  c) ukupna snaga spoja.

Rezultat:  $R = 6\ \Omega$ ,  $I = 6\text{ A}$ ,  $P = 180\text{ W}$

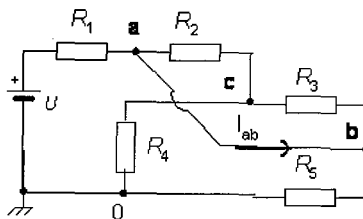


III.1-4. U prikazanom spoju izračunajte struje  $I_{R1}$  i  $I_{ab}$ .

Zadano je:  $R_1=R_2=R_3=R_5=4\ \Omega$ ,  $R_4=2\ \Omega$ ,  $U=10\text{ V}$ .

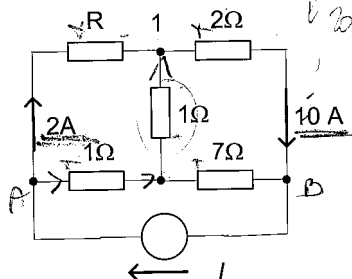
Rezultat:  $1,67\text{ A}$ ;  $1,25\text{ A}$

*1,81??*



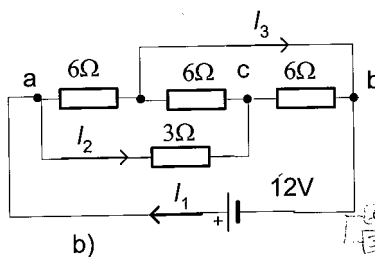
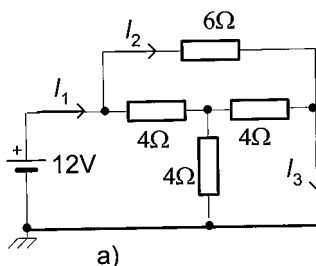
III.1-5. Uz poznate otpore i struje označene na slici desno, odredite otpor  $R$  i struju izvora  $I$  te napon na stezaljkama strujnog izvora. Uputa primijenite najprije KZS za čvor 1, zatim KZN za desnu konturu itd.

Rezultat:  $10\ \Omega$ ,  $14\text{ A}$ ,  $40\text{ V}$



III.1-6. U prikazanom spoju otpornika prema slici a) potencijal točke c u spoju na slici b) ako je referentna točka minus pol izvora?

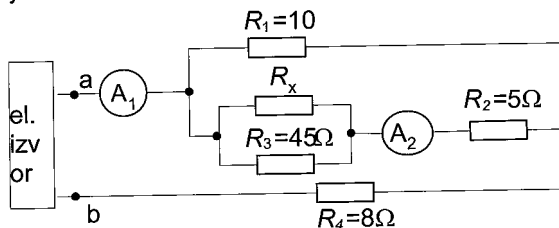
reano ok



Rezultat: a)  $I_2=2\text{ A}$ ,  $I_1=4\text{ A}$ ,  $I_3=3\text{ A}$ .

b)  $I_2=2\text{ A}$ ,  $I_1=4\text{ A}$ ,  $I_3=3\text{ A}$ . Potencijal točke c je  $+6\text{ V}$ .

III.1-7. U prikazanom mješovitom spoju otpornika izmjerene su struje  $I_1=3\text{ A}$  i  $I_2=1\text{ A}$ . Svi otpornici su poznati (zadani) osim onog koji je označen s  $R_x$ . Koliki je taj  $R_x$ ? Kakav bi se "idealni" izvor mogao nalaziti u kutiji sa oznakom el. izvor?

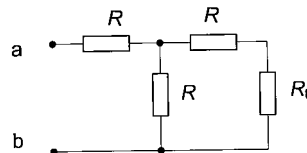


Rezultat:  $R_x=22,5\ \Omega$ . u kutiji se može nalaziti strujni izvor  $I=3\text{ A}$  ili naponski  $U=44\text{ V}$ .

III.1-8. U prikazanom spoju otpornika treba izračunati otpor  $R$  uz koji će ukupan otpor sa priključnica a i b biti jednak  $R_t$ .

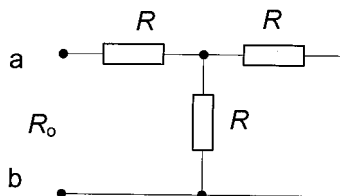
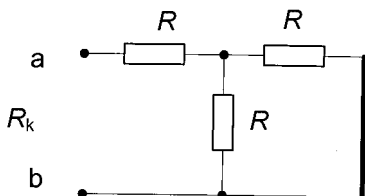
Zadano  $R_t = 100\ \Omega$

Rezultat:  $R=57,735\ \Omega$

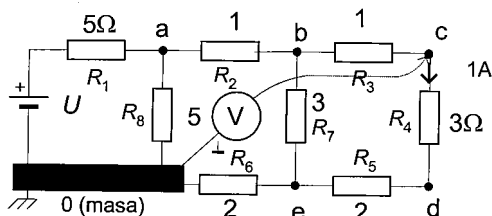


- ✓ III.1-9. Odredite otpor sa stezaljki a i b ako otpor  $R_i$  iz prethodnog zadatka ima iznos nula (kratki spoj, označite ga s  $R_k$ ) slika lijevo, odnosno beskonačno (prekid, označite ga s  $R_o$ ) slika desno. Izračunajte  $\sqrt{R_o R_k}$  i dobiveni rezultat usporedite sa prethodnim zadatkom!

Zadano  $R = 57.735 \Omega$  Rezultat:  $R_k = 86,6 \Omega$   $R_o = 115,47 \Omega$



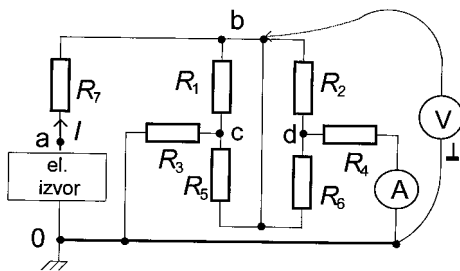
- III.1-10. U prikazanom mješovitom spoju otpornika poznata je označena struja i vrijednosti svih otpornika. Odredite napon izvora i potencijale (napone prema masi) točaka a, b, c, d i e (na slici je prikazan voltmetar kako mjeri potencijal točke c) Rezultate upišite na shemu spoja (označite polaritete napona i smjerove struja).



Rezultat:  $U = 45 \text{ V}$   $\varphi_a = +15 \text{ V}$ ,  $\varphi_b = +12 \text{ V}$ ,  $\varphi_c = +11 \text{ V}$ ,  $\varphi_d = +8 \text{ V}$ ,  $\varphi_e = +6 \text{ V}$ .

- III.1-11. U prikazanom spoju ampermetrom je izmjerena struja kroz  $R_4$ . Izračunajte ukupnu struju i napon izvora te potencijale označenih točaka. Potencijali su naponi prema masi koje bi pokazivao voltmetar (nacrtan je kako mjeri potencijal točke b. Kakav bi izvor mogao biti u kutiji (na kojoj piše el.izvor)?

Zadano:  $R_1 = 6 \Omega$   $R_2 = 10 \Omega$   $R_3 = 3 \Omega$   
 $R_4 = 10 \Omega$   $R_5 = 3 \Omega$   $R_6 = 10 \Omega$   $R_7 = 12 \Omega$   
 $I_{R_4} = 1 \text{ A}$



Rezultat:  $I = 4 \text{ A}$   $\varphi_a = 19 \text{ V}$   $\varphi_c = 9 \text{ V}$   $\varphi_d = 10 \text{ V}$ ;  $\varphi_b = 15 \text{ V}$  strujni od 4 A ili naponski od 19 V.

*vald?*  
**III.1-12** U prikazanom spoju naponskog djelila treba odrediti potencijale točaka **a** i **b** u tri slučaja 1. djelilo je neopterećeno (sklopke **S1** i **S2** su otvorene) 2. sklopka **S1** je zatvorena, a **S2** otvorena 3. sklopke **S1** i **S2** su zatvorene

Zadano  $R_{t1} = 10\text{k}\Omega$   $R_{t2} = 20\text{k}\Omega$

$U = 10\text{V}$  (1 k je skraćenica od 1 k $\Omega$ )

**Rezultat:**

1. neopterećeno djelilo

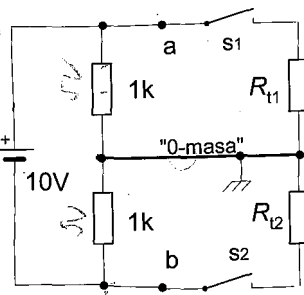
$$\varphi_a = 5\text{V} \quad \varphi_b = -5\text{V}$$

2. opterećen je gornji (pozitivni) dio djelila

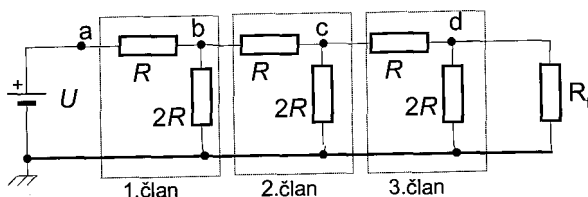
$$\varphi_a = 4.762\text{V} \quad \varphi_b = -5.238\text{V}$$

3. opterećen je gornji i donji dio djelila.

$$\varphi_a = 4.884\text{V} \quad \varphi_b = -5.116\text{V}$$



*DRS* **III.1-13** Na izvor napona  $U$  spojeno je trošilo  $R_t = 2R$  preko tri " $R-2R$ " člana kako je prikazano slikom. Treba izračunati a) ukupan otpor ovog mješovitog spoja otpornika sa strane izvora b) potencijale točke **a** ako je potencijal točke **d** 1V.

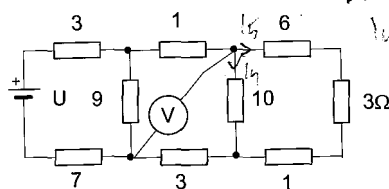


**Rezultat:** a) ukupan otpor  $2R$  bez obzira na broj članova " $R-2R$ " u nizu.

b) potencijal točke **a** je 8 V. To je ujedno napon izvora.

*D125* **III.1-14** Koliki je napon izvora ako voltmetar pokazuje 16 V?

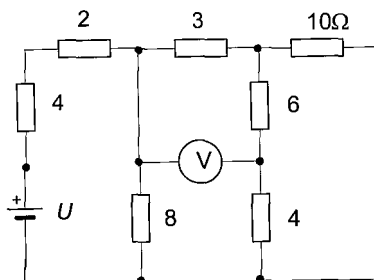
**Rezultat:** 58 V



*getirise razlike napona*

**III.1-15** Izračunajte snagu izvora kao i snage na pojedinim otpornicima ako voltmetar pokazuje  $U_v = 6\text{V}$ ? Koliko će pokazivati voltmetar ako umjesto naponskog izvora priključimo strujni od 4 A?

**Rezultat:** 40 W, 12 V



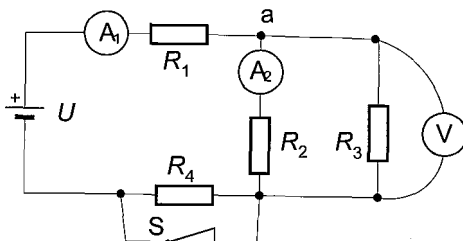
III.1-16. Izmjerene su struje  $I_1$ ,  $I_2$  te napon  $U_V$ . a) Kirchhoffovim zakonima (i naravno Ohmovim zakonom) odredite nepoznate otpore. b) izračunajte pokazivanja instrumenata nakon otvaranja sklopke S

Zadano je  $I_1 = 1\text{ A}$   $I_2 = 0.6\text{ A}$   $U_V = 6\text{ V}$   $U = 12\text{ V}$   $R_4 = 6\Omega$

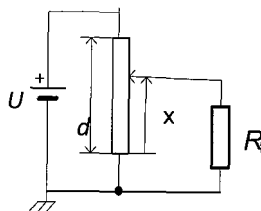
Rezultat:

a)  $R_3 = 15\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$ ,  $R_1 = 6\Omega$

b)  $I_{1n} = 0.667\text{ A}$   $I_{2n} = 0.4\text{ A}$   $U_{Vn} = 4\text{ V}$



III.1-17. Za podešavanje napona na trošilu  $R_t = 55\Omega$  koristi se prikazani spoj sa kliznim otpornikom. Duljina kliznog otpornika  $d = 30\text{ cm}$ , a ukupan otpor je  $55\Omega$ . U koji položaj treba postaviti kliznik ( $x = ?$ ) da bismo na trošilu dobili napon a)  $0.25U$  b)  $0.5U$  c)  $0.75U$ . Skicirajte graf funkcije  $U_t = f(x)$ .

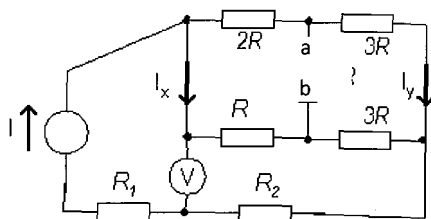


Rezultat: a) 9.1 cm b) 18,5 cm c) 25.4 cm

III.1-18. Serijski su spojena dva otpornika  $R_1 = 10\Omega$  i promjenjivi otpornik  $R_2$  (od nula do  $100\Omega$ ). Spoj je priključen na naponski izvor od  $12\text{ V}$  nazivne struje  $2\text{ A}$ . a) Kod kojeg iznosa  $R_2$  će snaga na  $R_2$  biti najveća moguća b) Kolika je ta snaga c) Kod kojih iznosa otpora  $R_2$  će snaga na  $R_2$  biti jednaka polovici maksimalne d) Kolika treba biti nazivna struja otpornika.

Rezultat: a) najveća snaga je kod  $R_2 = R_1 = 10\Omega$ , b)  $3.6\text{ W}$  c)  $1.7157\Omega$  i  $58.284\Omega$  d) nazivna struja treba biti veća od  $1,2\text{ A}$ .

III.1-19. U prikazanom spoju voltmetar pokazuje  $14\text{ V}$ . Izračunajte struje: a)  $I$ ,  $I_x$  te  $I_y$ . b) napon  $U_{ab}$ . Zadano je:  $R = 2\Omega$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ . Rezultat:  $I = 2\text{ A}$ ;  $I_x = 1\text{ A}$ ;  $I_y = 1\text{ A}$ ;  $0\text{ V}$

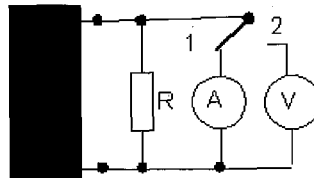




## TEST PITANJA III.1

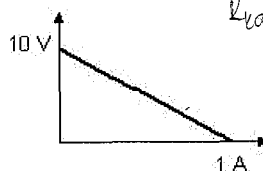
✓ 1) Otpor  $R=1\ \Omega$ . Ampermetar pokazuje 2 A, a voltmetar 1 V (kada prebacimo preklopku). Izvor (u kutiji) je:

- A) strujni 2 A  
 B) naponski 1 V  
 C) naponski 2 V  $R_i=1\ \Omega$   
 D) strujni 2 A  $R_i=2\ \Omega$   
 E) nema dovoljno podataka



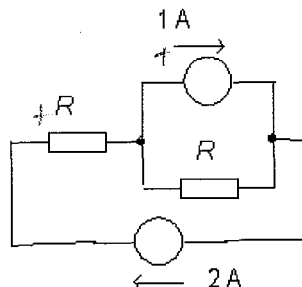
✓ 2) Izvor ima prikazanu karakteristiku. Ako na taj izvor priključimo otpornik  $R=10\ \Omega$  struja kroz taj otpor će biti:

- A) 0,5 A  
 B) 1 A  
 C) 2 A  
 D) nema dovoljno podataka



⇒ 3) Koliki je napon na stezaljkama izvora od 1 A? Otpor  $R=1\ \Omega$

- A) 1 V, + na lijevoj stezaljci  
 B) nula  
 C) 1 V, + na desnoj stezaljci  
 D) 2 V, + na lijevoj stezaljci  
 E) 2 V, + na desnoj stezaljci



4) Paralelno su spojena dva otpornika  $R_1=1$  i  $R_2=11\ \Omega$ . Struje  $I_1:I_2$  se odnose ovako:

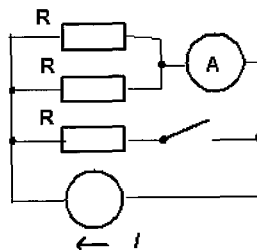
- A) 1:10 B) 11:1 C) 1:9 D) 1:11 E) 10:1

5) Paralelni spoj dva otpornika  $R_1$  i  $R_2$  priključen je na strujni izvor  $I$ . Kolika je struja kroz  $R_1$ ?

- A)  $I \cdot R_1/R$ ; B)  $I \cdot R_2/(R_1+R_2)$ ; C)  $I \cdot R_1/(R_1+R_2)$ ; D)  $I \cdot R_1 R_2/(R_1+R_2)$ ; E)  $I \cdot (R_1+R_2)/R_1$  ✓

6) Kako se promijeni struja ampermetra ako zatvorimo sklopku?

- A) smanji se  
 B) poveća se  
 C) ostane jednaka  
 D) ovisi o iznosu otpora



$$I_{R_1} = \frac{U}{R_1}$$

$$= \frac{I \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$= I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

7) Omjer otpora dvaju otpornika jednak je  $R_1:R_2=1:4$ . Kakav će biti omjer snaga  $P_1:P_2$  ako otpornike spojimo u paralelu i priključimo na izvor napona  $U$ ?

- A) 1:1 B) 1:4 C) 4:1 D) 2:1 E) 1:2

$$P_1:P_2 = \frac{U^2}{R_1} : \frac{U^2}{R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{4}{1} = 4:1$$

8) Pomoću koje od navedenih formula možemo izračunati ukupan otpor tri paralelno spojena otpornika:

- A) (1)  
B) (2)  
C) (3)  
D) niti jedna od navedenih

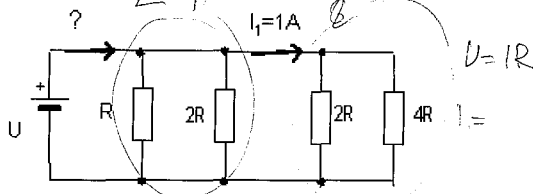
$$R_{uk} = \frac{(R_1 \cdot R_2 \cdot R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (1)$$

$$R_{uk} = \frac{(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2)$$

$$R_{uk} = \frac{(R_1 \cdot R_2 \cdot R_3)}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} \quad (3)$$

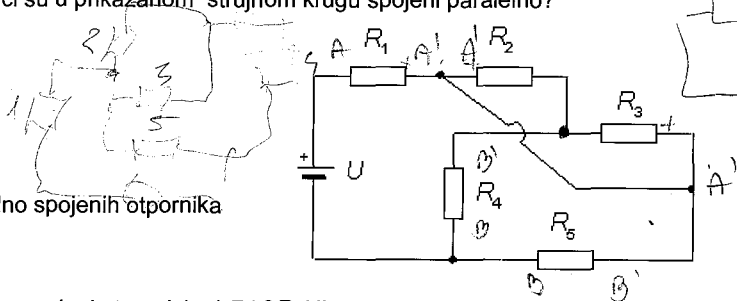
9) Odredite struju izvora ako je struja  $I_1 = 1$  A.

- A) 1,5 A  
B) 2 A  
C) 3 A  
D) 0,5 A  
E) nema dovoljno podataka



10) Koji otpornici su u prikazanom strujnom krugu spojeni paralelno?

- A)  $R_1$  i  $R_2$   
B)  $R_4$  i  $R_5$   
C)  $R_2$  i  $R_3$   
D)  $R_3$  i  $R_5$   
E) nema paralelno spojenih otpornika



11) Paralelno su spojeni otpornici od  $R$  i  $3R$ . Ukupan otpor je  $7,5 \Omega$ . Koliki je  $R$ ?

- A)  $R=10 \Omega$  B)  $R=7,5 \Omega$  C)  $R=2,5 \Omega$  D)  $R=5 \Omega$  E)  $R=15 \Omega$

$$\frac{R \cdot 3R}{R + 3R} = 7,5$$

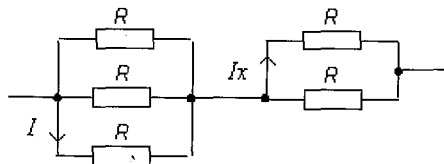
$$\frac{3R^2}{4R} = 7,5$$

$$\frac{3R}{4} = 7,5$$

$$R = 10$$

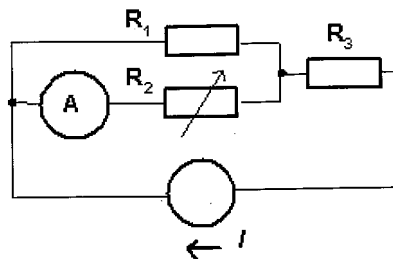
12) Kolika je struja  $I_x$  ako je struja  $I=1$  A?

- A) 0,5 A  
B) 1 A  
C) 1,5 A  
D) 2 A  
E) ovisi o iznosu otpora



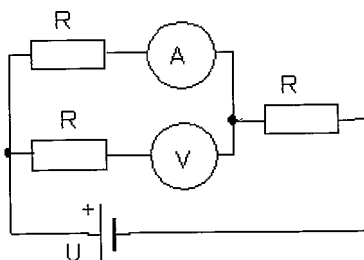
13) Otpor  $R_2$  se povećava. Da li se i kako mijenja pokazivanje ampermetra?

- ☒ A) smanjuje se  
☐ B) raste  
☐ C) ne mijenja se



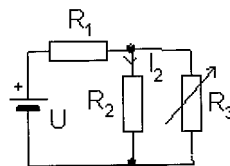
14) U prikazanom spoju voltmetar pokazuje 1 V, a ampermetar 1 A. Koliki je napon izvora?

- ☐ A) 1 V  
☒ B) 2 V  
☐ C) 1,5 V  
☐ D) 3 V  
☐ E) nema dovoljno podataka



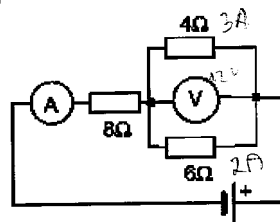
15) Što se dogodi sa strujom izvora i sa strujom kroz otpornik  $R_2$  ako se  $R_3$  smanjuje?

- ☒ A) ukupna struja se poveća  
☐ B)  $I_2$  se smanji  
☐ C)  $I_2$  ostaje ista  
☐ D) ukupna struja se smanji  
☐ E)  $I_2$  se poveća



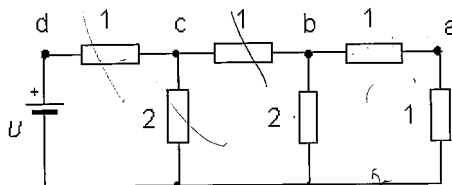
16) Voltmetar pokazuje 12 V. Koliko pokazuje ampermetar?

- ☐ A) 10 A  
☒ B) 5 A  
☐ C) 4 A  
☐ D) 16 A



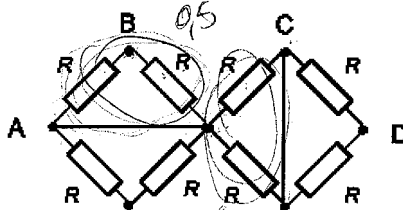
17) Potencijal točke a je +1 V. Koliki je potencijal točke d?

- ☒ A) 1 V  
☐ B) 2 V  
☐ C) 4 V  
☐ D) 8 V  
☐ E) 16 V



18) Koliki je otpor između točaka B i C ako je  $R=1\ \Omega$ ?

- A)  $1\ \Omega$   
 B)  $2\ \Omega$   
 C)  $3\ \Omega$   
 D)  $1,5\ \Omega$   
 E)  $2,5\ \Omega$



19) *Ja gledam?* Serijski su spojene dvije žarulje 100 i 25 W (jednako nazivnog napona U). Koja žarulja ima veći napon kada spoj priključimo na napon U?

- A) ona od 100 W  
 B) ona od 25 W  
 C) jednaki je napon na obje žarulje  
 D) nema dovoljno podataka

$$I^2 R_1 = 100 \quad I^2 R_2 = 25 \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{100}{25} = \frac{4}{1}$$

20) Strujni izvor  $I=1\text{ A}$  ima unutarnji otpor od  $1\ \Omega$ . Na taj izvor priključimo promjenjivi otpornik R (trošilo). Koliku je najveću snagu moguće postići na trošilu R?

- A) 0,5 W B) 0,25 W C) 1 W D) 2 W

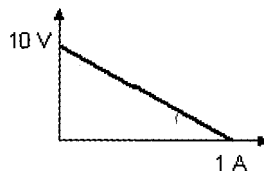
21) Dva jednaka otpornika spojena su jednom serijski (1), a zatim paralelno (2). Kakav je odnos snaga ako se spoj priključuje na isti strujni izvor?

- A)  $P_1=P_2$  B)  $P_1=4P_2$  C)  $P_1=2P_2$  D)  $P_1=0,5P_2$  E)  $P_1=0,25P_2$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I^2 R}{(\frac{I}{2})^2 R}$$

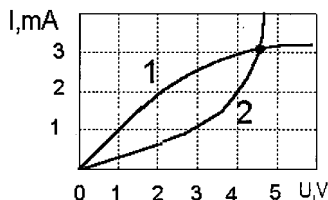
22) Na izvor koji ima prikazanu karakteristiku priključen je nelinearni element. Koliki je napon na nelinearnom elementu ako je struja 0,75 A?

- A) 2,5 V  
 B) 7,5 V  
 C) 5 V  
 D) ovisi o karak. n. elementa  
 E) 10 V



23) Dva nelinearna elementa spojena su serijski i priključena su na naponski izvor U. Kod kojeg napona U će naponi na nelinearnim elementima biti jednaki?

- A) 3 V  
 B) 4,5 V  
 C) 9 V  
 D) 3 V  
 E) 6 V



### Odgovori na test pitanja III.1

1.C; 2.A; 3.A; 4.B; 5.B; 6.A; 7.C; 8.C; 9.C; 10.C; 11.A; 12.C; 13.A; 14.B; 15.AB; 16.B; 17.D; 18.A; 19.B; 20.B; 21.B; 22.A; 23.C;

### III.2 KONDENZATORSKI KRUGOVI

#### OSNOVNI POJMOVI I JEDNADŽBE

**Odnos napona naboja i kapaciteta kondenzatora:**  $Q = C U$

**Energija nabijenog kondenzatora:**  $W = Q^2 / 2C$

**Ukupni kapacitet  $C_{uk}$  paralelnog spoja kondenzatora** jednak je zbroju svih kapaciteta  $C_p$  koji se nalaze u paralelnom spoju. Ukupan naboj jednak je zbroju naboja na pojedinim kapacitetima.  $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$

$$C_{uk} = \sum C_p$$

**Ukupni kapacitet  $C_{uk}$  serijskog spoja kondenzatora** određuje se tako da mu je recipročna vrijednost jednaka zbroju recipročnih vrijednosti svih serijski spojenih kapaciteta  $C_s$  (kondenzatori su spojeni serijski ako imaju isti naboj).

$$\frac{1}{C_{uk}} = \sum \frac{1}{C_s}$$

Serijski spoj dvaju (ili više) kondenzatora je *kapacitivno djelilo napona*. Tu je ukupni naboj jednak naboju svakog pojedinog kondenzatora:  $Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$   
 $U_1 = U \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$ , a  $U_2 = U \cdot C_1 / (C_1 + C_2)$ . Odnos napona je  $U_1 / U_2 = C_2 / C_1$

**Nazivni napon kondenzatora:** najveći dopušteni napon koji smijemo priključiti na kondenzator.

#### PRIMJERI III.2

**III.2-P1.** Imamo dva kondenzatora  $C_1 = 3,3 \mu F$   $C_2 = 4,7 \mu F$ . Prvi je predviđen za nazivni napon od 63 V, a drugi za 100V. Koliki najveći napon smijemo priključiti na: a) paralelno b) serijski spojene kondenzatore? Izračunajte naboje na kondenzatorima za oba slučaja.

**Rješenje:** Ako se napon na kondenzatoru poveća iznad nazivnog napona električno polje u kondenzatoru postaje preveliko i može doći do proboja u izolatoru odnosno do uništenja kondenzatora.

a) U paralelnom spoju napon će biti jednak na oba kondenzatora. Najveći napon koji smijemo priključiti na ovaj spoj je 63 V. Time je prvi kondenzator maksimalno opterećen, a drugi podopterećen. Naboji će biti:  $Q_1 = C_1 \cdot 63 = 207 \mu As$ ;  $Q_2 = C_2 \cdot 63 = 296 \mu As$ . Ukupan naboj na kondenzatorima je  $Q = Q_1 + Q_2 = 503 \mu As$

b) Kod serijskog spoja se napon izvora raspodijeli na kondenzatorima. Pri tom manji kondenzator dobiva veći napon. Prvi kondenzator dakle  $C_1$  će dobiti veći napon. Taj napon može biti najviše 63 V. Naboji na kondenzatorima su jednaki:  $C_1 \cdot 63 = C_2 \cdot U_2$

iz čega slijedi da je  $U_2 = 63 \cdot C_1 / C_2 = 44,23 V$ . Ukupan napon je dakle:  $U = U_1 + U_2 = 107,23 V$

Iznosi naboja na kondenzatorima su  $Q_1 = Q_2 = 207 \mu As$ . Taj naboj možemo izračunati i ovako: ukupan kapacitet je  $C_{uk} = C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2) = 1,93 \mu F$ , a zatim je  $Q = C_{uk} \cdot U = 1,93 \cdot 107,23 = 207 \mu As$ .

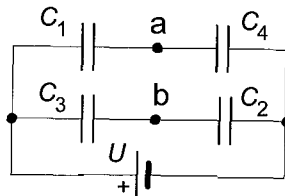
**III.2-P2.** Kondenzator  $C_1 = C$  nabijemo na napon  $U$ , a zatim ga odspojimo sa izvora. Na stezaljke kondenzatora spojimo prazan kondenzator  $C_2$  kapaciteta  $3C$ . Koliki će biti naboj na svakom od kondenzatora? Koliki je napon na kondenzatorima?

Zadano  $C = 10 nF$  i  $U = 100 V$

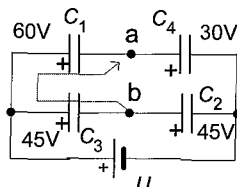
**Rješenje:** Priključivanjem na izvor od 100V, kondenzator  $C_1$  primi naboj  $Q = C_1 \cdot 100V = 1000 nAs$ . Nakon odspajanja izvora i spajanja kondenzatora  $C_2$  dio naboja sa kondenzatora  $C_1$  prelazi na  $C_2$ . Ukupan naboj sustava ostaje jednak početnom naboju koji je bio na  $C_1$ . Prijelaz naboja prestaje kada se naponi na kondenzatorima izjednače. Taj napon označimo kao  $U_k$ . To možemo matematički iskazati jednadžbama:  $U_k = Q_1 / C_1 = Q_2 / C_2$  i  $Q_1 + Q_2 = Q$ . Dobivamo da će napon na kondenzatorima biti:  $U_k = Q / (C_1 + C_2) = 25 V$ .

Preostali naboj na  $C_1$  je:  $25 \cdot C_1 = 250 nAs$  dok je  $C_2$  primio naboj:  $25 \cdot C_2 = 750 nAs$ .

**III.2-P3.** Izračunajte napon između točaka **a** i **b** u prikazanom spoju kondenzatora. Koliki je ukupan naboj kojim je izvor nabio ovaj spoj kondenzatora?  
 Zadano:  $C_1=30 \text{ nF}$   $C_3=C_2=C_4=60 \text{ nF}$   
 $U=90\text{V}$



**Rješenje:** Na izvor su paralelno spojene dva serijska spoja kondenzatora. Svaki od spojeva možemo zasebno rješavati tj. izračunati napone na kondenzatorima. Napon na  $C_1$  će biti:  $U_{C1}=U \cdot C_4 / (C_1+C_4)=60 \text{ V}$ , a na  $C_4$  je napon  $U_{C4}=U-U_{C1}=30 \text{ V}$ . Na serijskom spoju  $C_2$  i  $C_3$  dobivamo jednake napone, jer su kapaciteti tih kondenzatora jednaki.  $U_{C2}=U_{C3}=U/2=45\text{V}$ . Izračunati naponi su prikazani na slici:



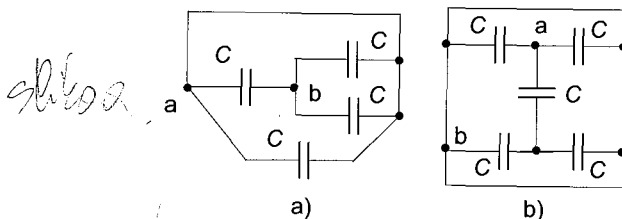
Za dobivanje napona  $U_{ab}$  treba krenuti od točke **b** i "pokupiti" napone (sa polaritetom) na putu prema točki **a**. Dobivamo:  $U_{ab}=+45\text{V}-60\text{V}=-15 \text{ V}$ . Točka **a** je negativna u odnosu na točku **b**. Ukupan kapacitet spoja je:  $C_{uk}=C_1 \cdot C_4 / (C_1+C_4) + C_2 \cdot C_3 / (C_2+C_3) = 50 \text{ nF}$ . Prilikom nabijanja spoj je primio naboj  $Q=U \cdot C_{uk}=4500 \text{ nAs}$ .

### ZADACI III.2

**III.2-1** Na naponski izvor  $U$  spojimo u seriji kondenzatore  $C_1$  i  $C_2$ . Koji je odnos kapaciteta kondenzatora  $C_2/C_1$  ako je odnos napona  $U/U_2$  a) 2 b) 9?

Rezultat: a) 1 b) 8

**III.2-2** Koliki je ukupni kapacitet sa stezaljki **a** i **b** u spoju prema slici a) i b) ?

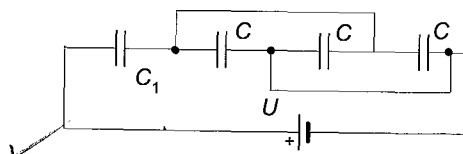


Rezultat: a) 3 C b) 8/3 C

**III.2-3** U prikazanom spoju kondenzatora izračunajte ukupan kapacitet i napon na kondenzatoru  $C_1$ .

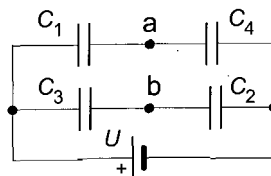
Zadano:  $C = 10 \text{ nF}$   $C_1 = 30 \text{ nF}$   $U = 10\text{V}$

Rezultat:  $C_{uk} = 15 \text{ nF}$ ,  $5 \text{ V}$ .



**III.2-4.** Izračunajte napon između točaka  $a$  i  $b$  u prikazanom spoju kondenzatora. Koliki bi bio taj napon ako  $C_1$  i  $C_4$  zamijene mjesta?

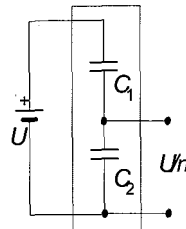
Zadano:  $C_1=C_3=30\text{ nF}$   $C_2=C_4=60\text{ nF}$   $U=90$



**III.2-5.** Neki izvor visokog napona ima napon  $U$ . Potrebno je proračunati kondenzatore kapacitivnog djelila napona kojim će se napon smanjiti  $n$  puta. Pritom ukupna energija koja će se pohraniti u djelilu treba biti  $W_{uk}$ .

Zadano:  $U=20\text{ kV}$ ,  $n=100$ ,  $W_{uk}=0.1\text{ J}$

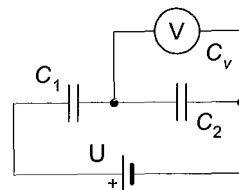
Rezultat:  $C_1=505,1\text{ pF}$   $C_2=50\text{ nF}$ .



**III.2-6.** Elektrostatskim voltmetrom mjerimo napon na kondenzatoru  $C_2$  u prikazanom spoju. Kolika je pogreška (apsolutna i relativna) izmjerenog napona ako voltmetar ima kapacitet  $C_v$ ?

Zadano:  $C_1=2,2\text{ nF}$   $C_2=330\text{ pF}$   $C_v=150\text{ pF}$   $U=100\text{ V}$

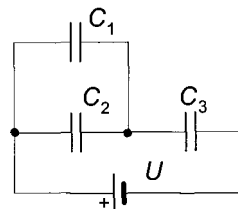
Rezultat:  $-4,867\text{V}$ ,  $-5,6\%$



**III.2-7.** U spoju prema slici poznate su veličine:  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $Q_{C1}$  i  $U_{C3}$ . Odredite a) kapacitet kondenzatora  $C_1$  b) napon izvora  $U$  c) ukupan kapacitet spoja

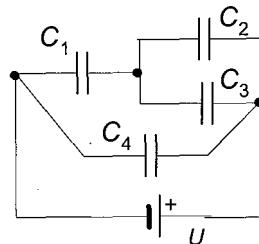
Zadano:  $C_2=5\mu\text{F}$ ,  $C_3=11\mu\text{F}$ ,  $Q_{C1}=100\mu\text{C}$ ,  $U_{C3}=20\text{V}$ .

Rezultat: a)  $U=44\text{V}$ , b)  $C_1=4,16\mu\text{F}$  c)  $C_{uk}=5\mu\text{F}$ .



**III.2-8.** Odredite naboj na  $C_4$  ako je zadano:  $Q_1=10\text{ nAs}$   $C_1=1\text{ nF}$   $C_2=2\text{ nF}$   $C_3=3\text{ nF}$   $C_4=4\text{ nF}$ .

Rezultat:  $48\text{ nAs}$



**III.2-9.** Serijski su spojeni kondenzator  $C_1$  i kondenzator promjenljivog kapaciteta  $C_2$ . Spoj je priključen na stalan napon  $U$ . Na koji iznos treba podesiti  $C_2$  da bi njegova energija bila najveća moguća (maksimalna)? Kolika je ta energija? Nacrtajte graf ovisnosti energije o  $C_2$  ako se  $C_2$  mijenja od  $2$  do  $20\text{ nF}$ .

Zadano:  $C_1=10\text{ nF}$ ,  $U=10\text{ V}$

Rezultat:  $C_2=10\text{ nF}$ ,  $125\text{ nJ}$

yutro

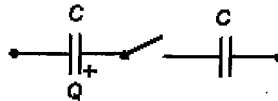
## TEST PITANJA III.2

1) Ako serijski spojimo kondenzatore od 5 i 6 nF ukupan kapacitet je:

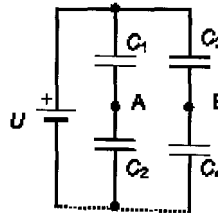
- A) veći od 6 nF  
 B) manji od 5 nF  
 C) jednak 5,5 nF  
 D) različit od 5,5 nF, ali između 5 i 6 nF

2) Na kondenzatoru kapaciteta  $C$  nalazi se naboj  $Q$ . Hoće li se i kako promijeniti taj naboj ako zatvorimo sklopku?

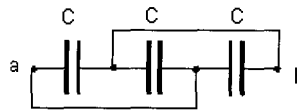
- A) smanji se  
 B) poveća se  
 C) ostane isti

3) Svi kondenzatori imaju isti kapacitet  $C$ . Koliki je napon  $U_{AB}$  ako je napon izvora 10 V?

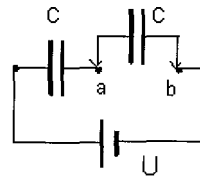
- A) -5 V  
 B) 5 V  
 C) nula  
 D) 10 V  
 E) -10 V

4) Koliki je kapacitet  $C_{ab}$ ?

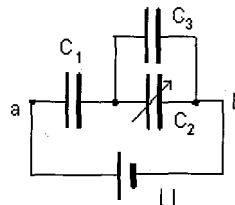
- A) 2 C  
 B) C/3  
 C) 3 C  
 D) C

5) Serijski su spojena dva jednaka kondenzatora. Nakon nabijanja odstranimo desni kondenzator. Koliki je sada napon  $U_{ab}$ ?

- A)  $U/2$   
 B) nula  
 C)  $U$   
 D)  $U/4$

6) Da li se i kako promijeni napon na  $C_1$  ako se poveća kapacitet  $C_2$ ?

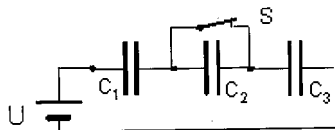
- A) ne promijeni se  
 B) poraste  
 C) smanji se





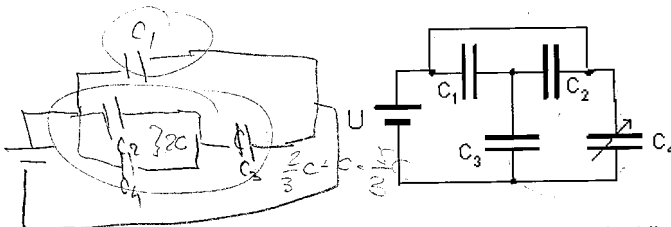
7) Tri kondenzatora jednakog kapaciteta priključena su na izvor  $U$ . Nakon nabijanja otvara se sklopka  $S$ . Da li se i kako promijeni napon na  $C_1$ ?

- A) ne promijeni se  
B) smanji se  
C) poraste



8) Svi kondenzatori imaju jednaki kapacitet  $C$ . Koliki je ekvivalentan kapacitet sa strane izvora?

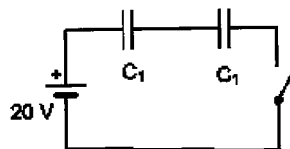
- A)  $1,66 C$   
B)  $1,5 C$   
C)  $2 C$   
D)  $3 C$   
E) nula



9) U prikazanom spoju  $C_1$  je puno veći od  $C_2$ . Nakon zatvaranja sklopke (nabijanja kondenzatora) vrijedi odnos:

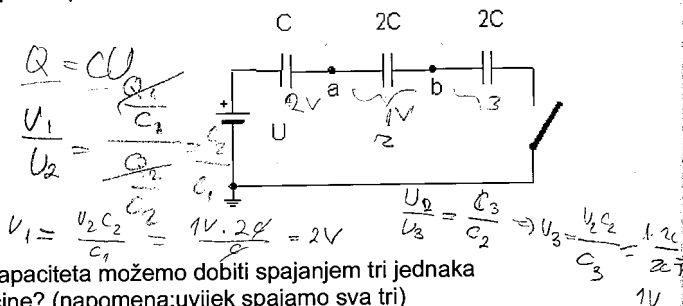
- A)  $Q_1 > Q_2$   
B)  $Q_1 = Q_2$   
C)  $U_1 > U_2$   
D)  $U_2 > U_1$   
E)  $U_1 = U_2$

$$Q = C \cdot U$$



10) Nakon zatvaranja sklopke napon  $U_{ab} = +1 V$ . Koliki je napon  $U$ ?

- A)  $3 V$   
B)  $4 V$   
C)  $6 V$   
D)  $2,5 V$



11) Koliko raznih iznosa kapaciteta možemo dobiti spajanjem tri jednaka kondenzatora na razne načine? (napomena: uvijek spajamo sva tri)

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 5

12) Serijski spojene kondenzatore  $C_1 = C$  i  $C_2 = 2C$  priključimo na naponski izvor  $U$ . U kojem su odnosu energije?

- A)  $W_1 = W_2$  B)  $W_1 = 2W_2$  C)  $W_2 = 2W_1$  D)  $W_1 = 4W_2$  E)  $W_2 = 4W_1$

13) Paralelno spojene kondenzatore  $C_1 = C$  i  $C_2 = 2C$  priključimo na naponski izvor  $U$ . U kojem su odnosu energije?

- A)  $W_1 = W_2$  B)  $W_1 = 2W_2$  C)  $W_2 = 2W_1$  D)  $W_1 = 4W_2$  E)  $W_2 = 4W_1$

14) Serijski spojene kondenzatore  $C_1 = C$  i  $C_2 = 2C$  priključimo na naponski izvor  $U$ . U kojem su odnosu naponi?

- A)  $U_1 = U_2$  B)  $U_1 = 2U_2$  C)  $U_2 = 2U_1$  D)  $U_1 = 4U_2$  E)  $U_2 = 4U_1$

$$Q_1 = C_1 U_1 = C_2 U_2$$

$$2U_1 = 2U_2 \quad \text{ok}$$

15) Tri kondenzatora C, 2C i 3C spojena u seriju priključena su na napon U. Ako je nakon nabijanja napon na 2C jednak 3 V koliki je napon U?

- A) 10 V B) 11 V C) 12 V D) 10.5 V

$$U_1 = 6 \quad U_2 = 3 \quad U_3 = 2$$

$$\checkmark \quad C \cdot U_1 = 2C \cdot U_2 = 3C \cdot U_3$$

16) Tri kondenzatora C, 2C i 3C spojena u paralelu priključena su na napon U. Ako je nakon nabijanja naboj na 2C jednak 1 As, a  $C = 1 \text{ F}$  koliki je napon U?

- A) 1 V B) 1.5 V C) 0.5 V D) 3 V E) 2 V

$$\frac{1}{2} = \frac{Q}{C_0} = \frac{Q}{2C_0} = \frac{Q}{3C_0}$$

$$Q_2 = 2 \quad Q_3 = 4 \quad Q = 6$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{6}{12} = 0.5$$

17) Tri kondenzatora C, 2C i 3C spojena u paralelu priključena su na napon U. Ako je nakon nabijanja naboj na 2C jednak 1 mAs koliki je ukupan naboj?

- A) 6 mAs B) 3 mAs C) 1 mAs D) 2 mAs E) 3.5 mAs

✓ ok

18) Dva kondenzatora  $C_1$  i  $C_2$  spojena su u seriju. Što se dogodi sa ukupnim (ekvivalentnim) kapacitetom tog spoja, ako se kapacitet  $C_2$  poveća?

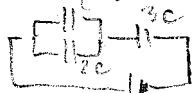
- A) ostane jednak B) smanji se C) poveća se D) ovisi o odnosu kapaciteta

19) Dva kondenzatora  $C_1$  i  $C_2$  spojena u seriju priključena su na napon U. Što se dogodi sa naponom na  $C_1$  ako se nakon nabijanja kapacitet  $C_2$  poveća?

- A) ostane jednak B) smanji se C) poveća se D) ovisi o odnosu kapaciteta

20) Dva kondenzatora C i 2C spojena su paralelno. U seriju im je spojen kondenzator 3C. Kombinacija je priključena na izvor od 4 V. Koliki je napon na 3C nakon nabijanja?

- A) 2 V B) 1 V C) 3 V D) 1.5 V



4V

$$C_{12} = \frac{3C}{2}$$

$$C_{12} = 3C$$

$$C_{12} = 6C$$

$$U_{3C} = \frac{6C}{12C} \cdot 4V = 2V$$

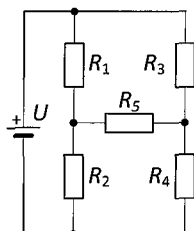
### Odgovori na test pitanja III.2

1.B; 2.C; 3.C; 4.C; 5.A; 6.B; 7.A; 8.A; 9.BD; 10.B; 11.A; 12. B; 13. C; 14. B; 15. B; 16. C; 17. B; 18. C; 19. C; 20. A;

## IV. SLOŽENI KRUGOVI ISTOSMJERNE STRUJE

### OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

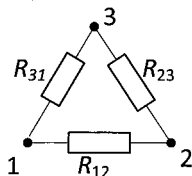
**Mosni spoj otpora** predstavlja paralelni spoj dvaju djelila napona (serijski spojevi otpora  $R_1$  i  $R_2$  te  $R_3$  i  $R_4$ ) između čijih srednjih točaka može biti spojen peti otpor  $R_5$  (prema slici). Kada paralelno spojena djelila dijele napon u istom omjeru, tada su srednje točke obaju djelila na istom potencijalu, pa na otporu  $R_5$  nema napona. U tom slučaju kažemo da je mosni spoj *u ravnoteži*, pri čemu kroz otpor  $R_5$  (dijagonala mosta) ne teče struja.



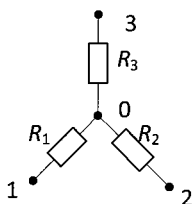
**Uvjet ravnoteže mosta** predstavlja onaj odnos otpora pri kojemu oba djelila u mosnom spoju dijele napon u istom omjeru, a to je kada je  $R_1/R_2 = R_3/R_4$ , iz čega proizlazi uvjet ravnoteže iskazan jednačbom, prema kojoj su jednaki umnošci otpora u nasuprotnim granama mosta.

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$$

**Spoj otpora u trokut ( $\Delta$ -spoj)** je spoj u kojemu su između tri točke, ovdje oznaka 1, 2 i 3, spojena tri otpora, ovdje oznaka  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ , i  $R_{31}$  (prema oznakama točaka među kojima su spojeni) tako da su u svakoj točki spojene priključnice dvaju otpora, prema slici. (Na točke 1, 2 i 3 dalje su obično spojeni ostali dijelovi el. kruga).



**Spoj otpora u zvijezdu (Y-spoj)** je spoj tri otpora između tri točke, u kome je po jedna priključnica svakog od njih spojena u jednu (četvrtu) zajedničku točku, tzv. *zvjezdisto* spoja (ovdje označeno s 0) dok su im slobodne priključnice spojene u točke 1, 2 i 3 (po kojima su i otpori ovdje označeni kao  $R_1$ ,  $R_2$ , i  $R_3$ ) a na koje su obično spojeni ostali dijelovi el. kruga.



**Pretvorba trokuta u zvijezdu** temelji se na istovrijednosti dvaju spojeva u odnosu na ostatak el. kruga. Spoj otpora  $R_1$ ,  $R_2$ , i  $R_3$  u zvijezdu istovrijedan je spoju otpora  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ , i  $R_{31}$  u trokut, ako među otporima vrijede ovi odnosi. Ovdje  $R_\Delta$  predstavlja pomoćnu veličinu, koja se dobije kao zbroj svih triju otpora spojenih u trokut ( $R_\Delta = R_{12} + R_{23} + R_{31}$ ).

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_\Delta} \quad R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_\Delta} \quad R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_\Delta}$$

**Pretvorba zvijezde u trokut** temelji se na istovrijednosti dvaju spojeva u odnosu na ostatak el. kruga. Spoj otpora  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ , i  $R_{31}$  u trokut istovrijedan je spoju otpora  $R_1$ ,  $R_2$ , i  $R_3$  u zvijezdu, ako među njima vrijede ovi odnosi.

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

**Električna mreža** je naziv kojim prvenstveno označavamo *el. krug s više izvora*. Mrežom se ponegdje naziva i složeni spoj el. elemenata (npr. *otpornička mreža*, ili *kondenzatorska mreža*).

**Grana** je dio el. kruga kroz koji teče ista struja.

**Čvor** je mjesto (točka) el. kruga gdje se sastaje *tri ili više grana*.

**Petlja** je bilo koji zatvoreni put po granama el. kruga (u kojemu se ni kroz jednu granu ne prolazi dvaput).

**Skup nezavisnih petlji** je skup svih petlji u el. krugu koje se međusobno razlikuju za barem jednu granu.

**Načelo superpozicije** u kaže da se ukupni učinak svih izvora na jednom elementu mreže može razmatrati kao algebarski zbroj pojedinačnih učinaka svakog od izvora u mreži (kad bi samo on bio radio, a svi ostali izvori bili neaktivni).

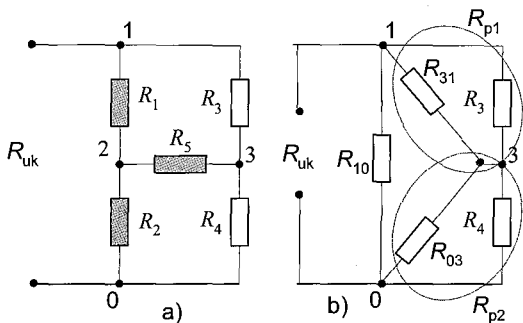
**Metoda superpozicije** je primjena načela superpozicije u analizi stanja na pojedinom elementu mreže. Radi se tako da se prvo odrede pojedinačni doprinosi svakog izvora (ostali izvori se "ugase" – naponski zamijene kratkim spojem, a strujni prekidom kruga) pa se potom svi pojedinačni doprinosi algebarski (vodeći računa o predznacima) zbroje.

#### PRIMJERI IV.

**IV.-P1.** Za prikazan spoj otpornika izračunajte ukupan otpor koristeći transformaciju označene (zatomnjene) zvijezde (slika a) u trokut (slika b).

Zadano  $R_1 = 4\Omega$   $R_2 = 1.6\Omega$

$R_3 = 6\Omega$   $R_4 = 12\Omega$   $R_5 = 4\Omega$



**Rješenje:** Prikazani spoj otpornika nazivamo: električni most (npr. Wheatstoneov most). Određivanja ukupnog otpora pomoću serija i paralela ovdje nije moguće. Potrebno je nešto novo. Pokazalo se da je moguće otpornike spojene u zvijezdu zamijeniti spojem u trokut i obrnuto (pretvorbe zvijezda-trokut). Takvom pretvorbom ovdje dobivamo spoj na slici b). U tom spoju imamo paralele i serije, pa otpor možemo izračunati uobičajenim postupkom. Osim jednadžbama danim u uvodu, pretvorba zvijezde u trokut može se izvesti i ovako: Najprije preko vodljivost izračunamo jednu pomoćnu veličinu - tzv. otpor zvijezde  $R_Z$  ovako:

$$G_Z = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \quad R_Z = \frac{1}{G_Z} \quad R_Z = 0.889 \Omega \quad (\text{tzv. otpor zvijezde})$$

pri označavanju otpora trokutnog spoja koristimo oznake čvorova (0, 1 i 2) pa vrijedi da je:

$$R_{10} = \frac{(R_1 \cdot R_2)}{R_Z} \quad R_{03} = \frac{(R_2 \cdot R_5)}{R_Z} \quad R_{31} = \frac{(R_1 \cdot R_5)}{R_Z} \quad R_{31} = 18 \Omega \quad R_{10} = 7.2 \Omega \quad R_{03} = 7.2 \Omega$$

Za nadomjesni spoj prema slici b) postupnim rješavanjem spojeva otpornika dobivamo da je

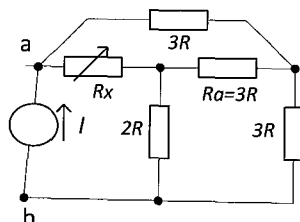
$$R_{p1} = \frac{(R_{31} \cdot R_3)}{R_{31} + R_3} = 4.5 \Omega \quad R_{p2} = \frac{(R_{03} \cdot R_4)}{R_{03} + R_4} = 4.5 \Omega \quad \text{te konačno} \quad R_{uk} = \frac{[R_{10} \cdot (R_{p1} + R_{p2})]}{R_{10} + R_{p1} + R_{p2}} = 4 \Omega$$

**Napomena:** Treba voditi računa da električni most može biti u posebnom stanju koje nazivamo ravnoteža mosta. To stanje bi u ovom primjeru nastupilo ako vrijedi:  $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$ . U stanju ravnoteže nema razlike potencijala između točaka 2 i 3 pa se otpornik  $R_5$  može odstraniti ili kratko spojiti. **Preporuka:** prije bilo kakvog računanja, kod mosnog spoja treba provjeriti da li je most u ravnoteži, jer su za slučaj ravnoteže proračuni jednostavniji. Formule za transformaciju trokuta u zvijezdu i obratno nalaze se u popisu formula.

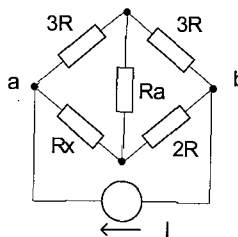
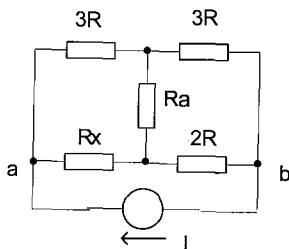
**IV.-P2.** Koliki treba biti iznos promjenjivog otpora da bi struja kroz  $R_a$  bila jednaka nuli?

Koliki je u tom slučaju napon između točaka a i b?

Zadano:  $R=3\ \Omega$   $I=1,5\text{ A}$



**Rješenje:** Spoj prikazan na slici je (prikriveni) mosni spoj što možemo «otkriti» ako elemente malo drugačije rasporedimo (pazeci da spojevi između njih ostanu sačuvani -slika dolje). Traženi otpor označimo sa  $R_x$ . Otpornik  $R_a$  je u dijagonali mosta. Da bi struja kroz  $R_a$  bila nula, most mora biti u ravnoteži. U ovom slučaju to znači da mora vrijediti:  $R_x \cdot 3R = 2R \cdot 3R$  odnosno  $R_x = 2R = 6\ \Omega$ . Ukupan otpor spoja između točaka a i b je (za slučaj ravnoteže)  $7,2\ \Omega$  pa je napon između a i b  $U_{ab} = I \cdot 7,2 = 10,8\text{ V}$



Ako umjesto strujnog izvora spojimo naponski od  $10,8\text{ V}$  ukupna struja će opet biti  $1,5\text{ A}$ . U mjernoj tehnici se umjesto otpornika  $R_a$  spaja instrument (indikator) koji će pokazati nulu kada je most uravnotežen.

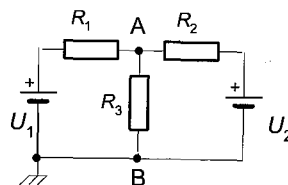
**IV.-P3.** Odredite struje u granama prikazane mreže

a) izravnom primjenom Kirchhoffovih zakona

b) superpozicijom

Zadano je:  $R_1=3\ \Omega$ ;  $R_2=3\ \Omega$ ;  $R_3=6\ \Omega$ ;

$U_1=24\text{ V}$ ;  $U_2=12\text{ V}$ .



**Rješenje:** a) Kod izravne primjene Kirchhoffovih zakona treba najprije označiti struje u granama (indeksi se mogu dati prema otpornicima, a smjer je proizvoljan). Nakon toga se stavi oznaka + na svakom otporniku tamo gdje struja ulazi. Slijedi odabir kontura sa smjerom obilaženja (obično se uzima u smjeru kazaljke na satu) i označavanje čvorova. Time su izvršene pripreme za pisanje jednadžbi Kirchhoffovih jednadžbi.

$$I_1 - I_3 + I_2 = 0$$

KZS za čvor A

$$U_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0$$

KZN za konturu 1

$$-U_2 + I_3 R_3 + I_2 R_2 = 0$$

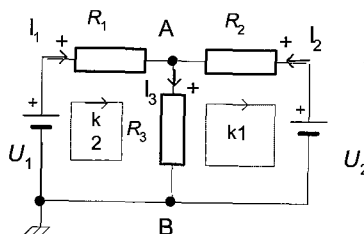
KZN za konturu 2

nepoznanice su struje  $I_1$   $I_2$   $I_3$

nakon provedenog postupka rješavanja sustava jednadžbi dobivamo:

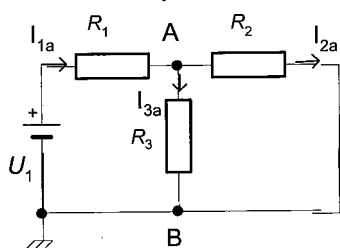
$$I_1 = 3,2\text{ A (prema čvoru A)}, I_2 = -0,8\text{ A}$$

$$I_3 = 2,4\text{ A (iz čvora A)}$$

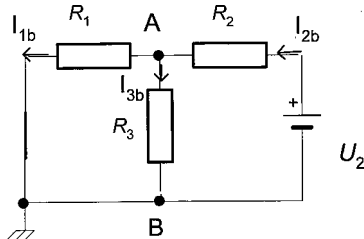


Negativan predznak rezultata indicira smjer struje suprotan od pretpostavljenog. Pretpostavljeni smjer struje (ucrtani smjer) je u tom smislu referentan tj. predznak struje se odnosi na taj smjer.

b) Kod superpozicije izračunavamo struje za svaki izvor posebno (tzv. parcijalne struje). Jedan izvor u mreži ostane aktivan, a sve preostale izvore "umrtvimo". Na mjesto naponskog izvora se pri tom stavlja kratkospojnik dok se na mjestu strujnog ostavlja prekid. U ovom primjeru dobivamo na taj način spojeve prema slici a) i b) koje rješavamo uobičajenim postupkom za mješovite spojeve otpornika.



a)



b)

Ukupne struje dobivamo algebarskim zbrajanjem tj. vodimo računa o predznacima (smjerovima) "parcijalnih" struja. Evo izračuna:

spoj prema slici a)

$$R_{uka} = R_1 + \frac{(R_2 \cdot R_3)}{R_2 + R_3} \quad R_{uka} = 5 \Omega$$

$$I_{1a} = \frac{U_1}{R_{uka}} \quad I_{1a} = 4.8 \text{ A}$$

$$I_{3a} = I_{1a} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} \quad I_{3a} = 1.6 \text{ A} \quad I_{2a} = I_{1a} - I_{3a} \quad I_{2a} = 3.2 \text{ A}$$

spoj prema slici b)

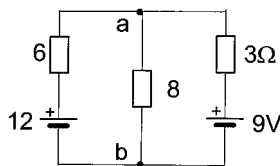
$$R_{ukb} = R_2 + \frac{(R_1 \cdot R_3)}{R_1 + R_3} \quad R_{ukb} = 5 \Omega$$

$$I_{2b} = \frac{U_2}{R_{ukb}} \quad I_{2b} = 2.4 \text{ A}$$

$$I_{3b} = I_{2b} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} \quad I_{3b} = 0.8 \text{ A} \quad I_{1b} = I_{2b} - I_{3b} \quad I_{1b} = 1.6 \text{ A}$$

Ukupna struja kroz  $R_1$  je  $I_1 = I_{1a} - I_{1b} = 3.2 \text{ A}$ . Pozitivan rezultat znači da ukupna struja teče u smjeru struje  $I_{1a}$  kojoj je u gornjoj jednačbi bio dan pozitivan predznak (referentni smjer).  
 kroz  $R_3$ :  $I_3 = I_{3a} + I_{3b} = 1.6 + 0.8 = 2.4 \text{ A}$  (u smjeru struje  $I_{3a}$ ).  
 kroz  $R_2$ :  $I_2 = I_{2a} - I_{2b} = 3.2 - 2.4 = 0.8 \text{ A}$  (u smjeru struje  $I_{2a}$ ).

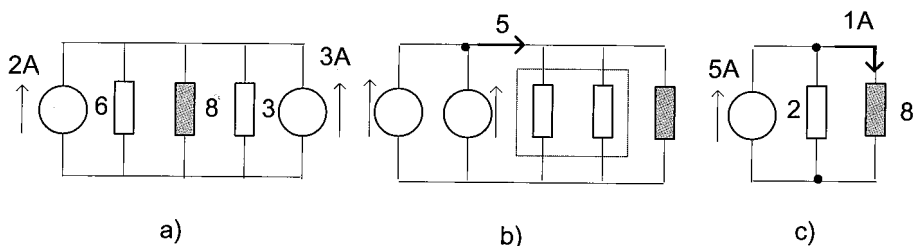
**IV.-P4.** U prikazanom spoju izračunajte struju kroz otpornik od  $8\ \Omega$ . Koristite pretvorbu naponskih izvora u strujne.



**Rješenje:** Otpornike od  $6\ \Omega$  i  $3\ \Omega$  možemo tretirati kao da su to unutarnji otpori izvora od 12 odnosno 15 V. Izvršimo li pretvorbu u strujne izvore dobivamo spoj prema slici a). U tom spoju premjestimo paralelno spojene elemente kako je prikazano na slici b). Strujne izvore u skladu sa Kirchhoffovim zakonom "stopimo" u jedan od 5 A kao i "unutarnje otpore" od  $6\ \Omega$  i  $3\ \Omega$  u  $2\ \Omega$  (paralela).

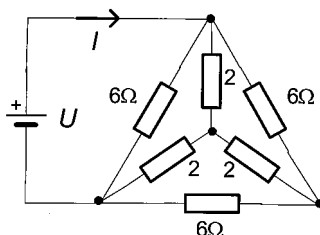
Dobivamo spoj prema slici c). To je djelilo struje u kojem potražimo struju kroz otpornik od  $8\ \Omega$ .  $I_8 = 5 \cdot 2 / (2 + 8) = 1\text{ A}$ .

Napon na otporniku od  $8\ \Omega$  je 8 V. To je ujedno napon između točaka a i b u "polaznoj" shemi.

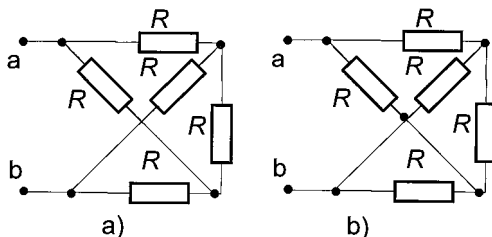


#### ZADACI IV.

**IV.-1.** U spoju prema slici odredite kolika je struja  $I$  ako je  $U=5\text{ V}$ ? Zadatak riješite na dva načina: a) zamjenom trokut-zvijezda i b) zamjenom zvijezda-trokut. Koji je način jednostavniji? **Rezultat:** 2,5 A



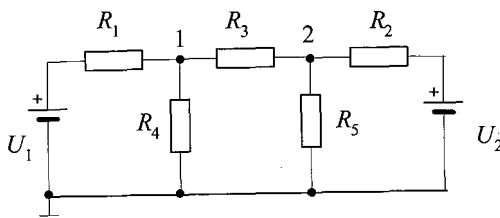
**IV.-2.** Izračunajte ukupan otpor sa stezaljki a i b spoja otpornika sa slike a) i b) ako je  $R=1\ \Omega$ . Pitanje: Da li je spoj prema slici a) električni most?



**Rezultat:** a)  $1\ \Omega$  b)  $0.6\ \Omega$  uputa: Spojewe drugačije nacrtati. Na slici a) trebate "otkriti" most, a na slici b) je jedan otpornik u "kratkom spoju".

**IV.-3.** Zadana je električna mreža prikazana slikom. Odredite struje kroz  $R_2$ ,  $R_3$  i  $R_5$  ako su poznati (izmjereni) naponi čvorova 1 i 2.

Zadano  $R_3 = 4\Omega$   $R_2 = 6\Omega$   $U_2 = 12V$   $\varphi_1 = 12V$   $\varphi_2 = 9.96V$



**Rezultat:**  $I_{R2}=0,34A$   $I_{R3}=0,51A$   $I_{R5}=0,85 A$

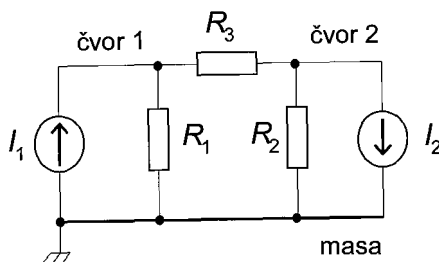
**IV.-4.** Izračunajte potencijale čvorova 1 i 2 u prikazanom spoju el. elemenata. Koristite a) superpoziciju. b) pretvorbu strujnog u naponski izvor. Koliki je napon  $U_{12}$  te kolika struja prolazi kroz  $R_3$ ?

Zadano  $R_1 = 2\Omega$   $R_2 = 6\Omega$   $R_3 = 12\Omega$

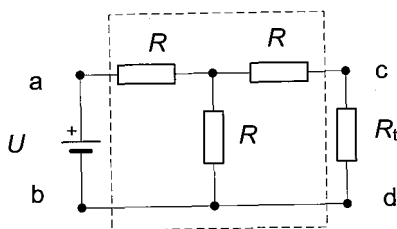
$I_1 = 4A$   $I_2 = 2A$

**Rezultat:**  $\varphi_1=6V$ , a  $\varphi_2=-6 V$

$I_3=1A$  (smjer od čvora 1)



**IV.-5.** Na stezaljke a i b priključen je (ulazni) napon  $U$ . Izračunajte (izlazni) napon na stezaljkama trošila odnosno napon između točaka c i d. Koji je odnos tih napona  $U_{cd}/U_{ab}=?$   
Zadano  $U = 12 V$ ,  $R_t=100 \Omega$ ,  $R=57.735 \Omega$ .

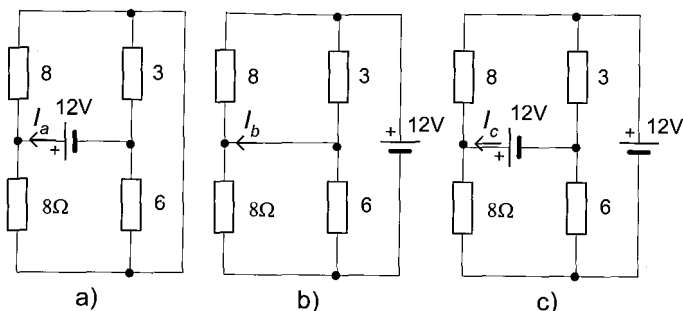


**Rezultat:** Odnos napona je 0.268 Samo 26,8 % ulaznog napona se pojavi na izlazu.



**IV.-6.** Izračunajte označenu struju u prikazanom spoju na slici a) i b). Kolika bi bila struja na tom istom mjestu u slučaju c) u kojem su na shemi uključena oba izvora.

Zadano :  $U=12\text{ V}$



Rezultat:  $I_a = 2\text{ A}$   $I_b = 0,333\text{ A}$   $I_c = 2,333\text{ A}$  (superpozicija)

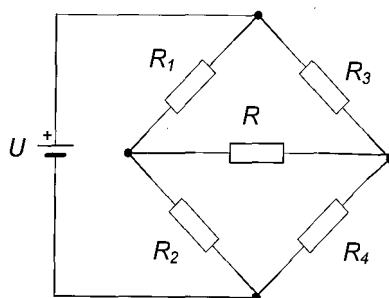
**IV.-7.** U prikazanom mosnom spoju izračunajte struju kroz otpornik koji je u dijagonali mosta. Kolika bi bila struja kroz dijagonalu mosta kada je taj otpor ( $R$ ) jednak nuli? Koliki treba biti  $R_1$  da bi struja kroz otpornik  $R$  bila jednaka nuli?

Zadano:  $U = 72\text{ V}$   $R = 5\Omega$   $R_1 = 6\Omega$

$R_2 = 3\Omega$   $R_3 = 12\Omega$   $R_4 = 4\Omega$

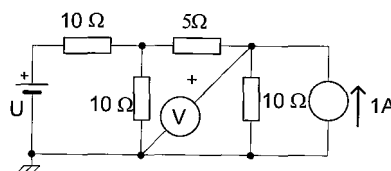
Rezultat:  $I_R = 0,6\text{ A}$ , odg.  $1,2\text{ A}$ ;  $R_1 = 9\Omega$

Uputa: Zadatak možete riješiti izravnom primjenom Kirchhoffovih zakona (teže) ili transformacijom trokut-zvijezda.



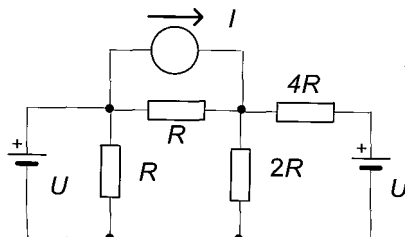
**IV.-8.** Koliki je napon izvora (slika lijevo) ako je  $U_V = 15\text{ V}$  označenog polariteta? Koliko će pokazivati voltmeter ako napon izvora smanjimo na polovinu prvotnog iznosa?

Rezultat:  $40\text{ V}$ ,  $10\text{ V}$

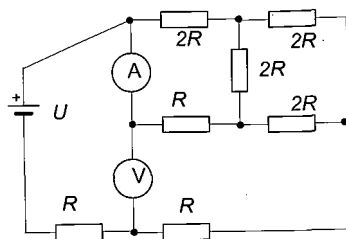


**IV.-9.** Odredite napon na otporniku  $2R$  u prikazanom spoju. Zadano je  $R=5\Omega$   $I=2\text{ A}$   $U=20\text{ V}$ . Koliki je taj napon ako se promijeni smjer struje strujnog izvora?

Rezultat:  $20\text{ V}$ ,  $8,57\text{ V}$



**IV.-10.** Koliku struju pokazuje (idealni) ampermetar ako voltmetar pokazuje  $U_V=7$  V? Zadano jer  $R=1\ \Omega$ .

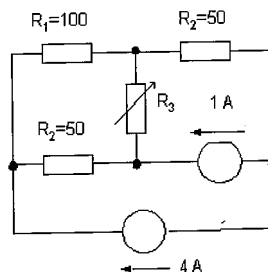


Rezultat: 1.6 A

**IV.-11.** Koliki treba biti otpor otpornika  $R_3$  da bi struje kroz  $R_1$  i  $R_2$  bile jednake?

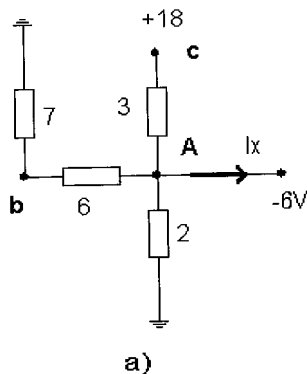
Rezultat:  $100/3\ \Omega$

Uputa: treba primjetiti da će struje kroz  $R_1$  i  $R_2$  biti po pola struje strujnog izvora od 4 A, tj. po 2 A, a nakon toga se primjenjuju Kirchhoffovi zakoni.



**IV.-12.** Na slici a) je prikazan spoj u kojem su poznati potencijali točaka A (-6V) i c (+18 V). Potrebno izračunati struju  $I_x$  te potencijal točke b.

Rezultat: -3,23 V; 11,46 A



a)

Uputa: spoj treba drugačije nacrtati. Nacrtaju se dvije usporedne linije. Donja je masa, a na gornjoj je točka A. Između tih linija (sabirница) "spoje se" elementi: otpornik od  $2\ \Omega$ , serijski spoj  $6$  i  $7\ \Omega$ , izvor od 6 V (minus na A) te serijski spoj izvora od 18 V i otpornika od  $3\ \Omega$  (minus na masi).

## TEST PITANJA IV.

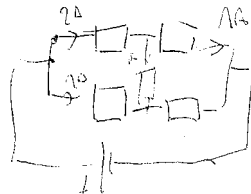
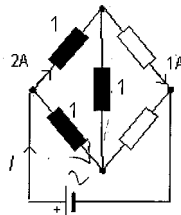
- 1) U prikazanom mostnom spoju poznati su označeni otpornici i struje. Kolika je struja izvora?

A) nema dovoljno podataka

B) 3 A

C) 4 A

D) 5 A



- 2) Koliki treba biti otpor  $R_x$  da bi struja kroz  $R_5$  bila jednaka nuli?

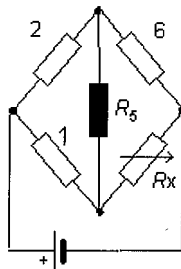
A) 0,5  $\Omega$

B) 1  $\Omega$

C) 2  $\Omega$

D) 3  $\Omega$

E) 6  $\Omega$



$$2 \cdot R_x = 1 \cdot 6$$

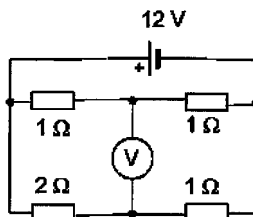
- 3) Koliki napon pokazuje voltmetar u prikazanom spoju?

A) 0 V

B) 2 V

C) 4 V

D) 6 V



- 4) Koliki je napon voltmetra ako kliznik pomaknemo u krajnji desni položaj?

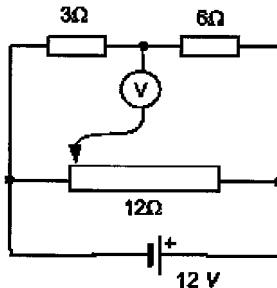
A) nula

B) 12 V

C) 8 V

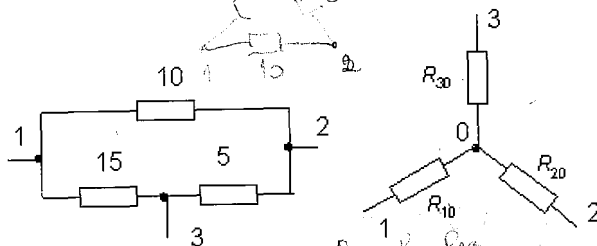
D) 4 V

E) 6 V



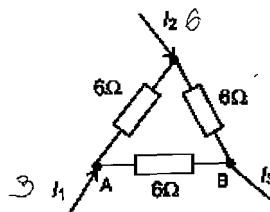
5) Otpornici su spojeni u konfiguraciji trokuta. Odredite otpor  $R_{10}$  u ekvivalentnom zvijezda spoju.

- A)  $R_{10}=5\ \Omega$   
 B)  $R_{10}=10\ \Omega$   
 C)  $R_{10}=15\ \Omega$   
 D)  $R_{10}=25\ \Omega$   
 E) niti jedan od navedenih



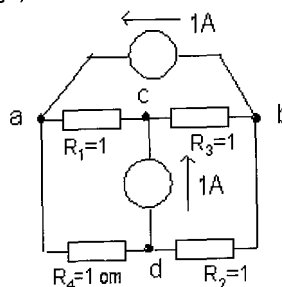
6) Za prikazani dio električne mreže zadano je :  $I_1=3\text{ A}$ ,  $I_2=6\text{ A}$ ,  $R=6\ \Omega$ . Koliki je napon između čvorova A i B?

- A) nema dovoljno podataka  
 B) 6 V  
 C) 12 V  
 D) 24 V  
 E) 18 V



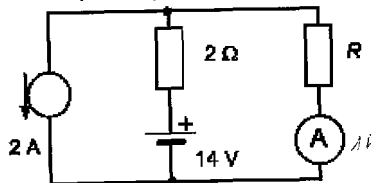
7) Kolike su struje  $I_{R1}$  i  $I_{R2}$ ? (koristiti superpoziciju)

- A)  $I1$  nula  
 B)  $I1=0,5\text{ A}$   
 C)  $I2=0,5\text{ A}$   
 D)  $I2$ =nula  
 E)  $I1=1\text{ A}$



8) Odredite vrijednost otpornika  $R$  ako ampermetar pokazuje 1 [A].

- A) 2  $\Omega$   
 B) 4  $\Omega$   
 C) 6  $\Omega$   
 D) 8  $\Omega$   
 E) 10  $\Omega$

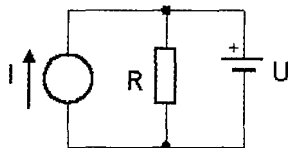


9) Kod koje metode se analiza el. kruga s više izvora obavlja tako da se aktivira jedan po jedan izvor?

- A) kod superpozicije  
 B) kod Kirchhoffovih zakona  
 C) kod pretvorbe spojeva u zvijezdu i trokut  
 D) kod pretvorbe modela izvora

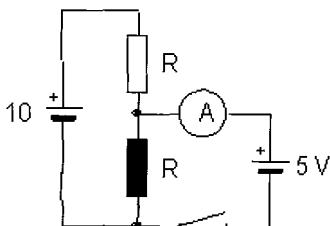
10) Zadano je  $I=1\text{ A}$ ,  $R=1\ \Omega$ ,  $U=1\text{ V}$ . Kolika je struja naponskog izvora?

- A) nula  
B) 1 A  
C) 2 A



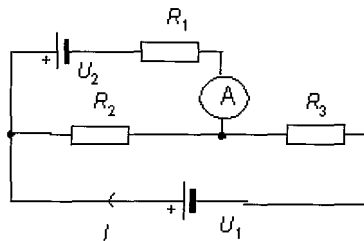
11) Hoće li se i kako promijeniti snaga na donjem (zatamnjenom) otporniku nakon zatvaranja sklopke?

- A) ne promijeni se  
B) smanji se dva puta  
C) poveća se dva puta  
D) poveća se 4 puta



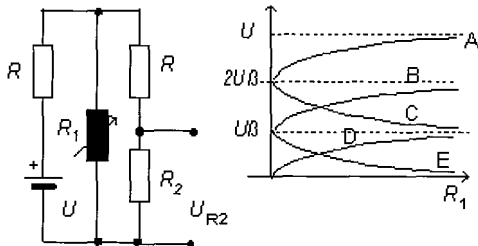
12) Što je od navedenoga točno ako je ampermetar u spoju na slici pokazuje 0 A?

- A) Napon na  $R_2$  je nula  
B)  $U_2 = I \cdot R_2$   
C)  $U_2 = I \cdot (R_1 + R_2)$   
D)  $U_1 = U_2$



13) Po kojoj od prikazanih krivulja se mijenja napon na otporu  $R_2=R$  u spoju na slici, ako otpor  $R_1$  raste od nule prema sve većim vrijednostima?

- A) A  
B) B  
C) C  
D) D  
E) E



### Odgovori na test pitanja IV.

1.D; 2.D; 3.B; 4.C; 5.A; 6.D; 7.AD; 8.D; 9.A; 10.A; 11.A; 12.B; 13.D;

## V. OSNOVE MAGNETIZMA

### OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

**Magnetska sila  $F$  na naboj** (koji se giba u magnetskom polju), gdje je  $q$  veličina naboja,  $v$  je brzina naboja, a  $B$  gustoća magnetskog toka (vektor magnetske indukcije) dok je  $\alpha$  kut između vektora  $v$  i  $B$ . Smjer sile određen je vanjskim (ex) produktom vektora  $v$  i  $B$ .

$$\vec{F} = q \cdot \left( \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$$

**Magnetska sila  $F$  na vodič** (protjecan strujom u magnetskom polju), gdje je  $I$  jakost struje,  $l$  je duljina ravnog (segmenta) vodiča, a  $B$  gustoća magnetskog toka, dok je  $\alpha$  kut između vektora  $I$  i  $B$ . Smjer sile određen je vanjskim (ex) produktom vektora  $I$  i  $B$  (duljinu  $l$  usmjeravamo pravcem vodiča u smjeru kojim kroz njega teče struja).

$$\vec{F} = I \cdot \left( \vec{l} \times \vec{B} \right)$$

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \alpha$$

**Iznos sile između dva paralelna vodiča** protjecana strujama  $I_1$  i  $I_2$ , koji se nalaze u zraku s osima na razmaku  $d$ , gdje je  $l$  duljina vodiča, dok je  $\mu_0$  magnetska konstanta.

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}$$

Sila je privlačna kada su struje istoga smjera, a odbojna kada su suprotnog smjera.

**Magnetska konstanta  $\mu_0$**  jedna je od temeljnih prirodnih konstanti. Ona predstavlja permeabilnost vakuumu.

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

**Relativna permeabilnost  $\mu_r$**  jest svojstvo tvari (broj) koje pokazuje koliko puta je permeabilnost  $\mu$  neke tvari veća od permeabilnosti vakuumu (za zrak uzimamo da je  $\mu_r \approx 1$ ).

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

**Iznos gustoće magnetskog toka  $B$**  na udaljenosti  $d$  od osi **ravnog vodiča** protjecanog strujom jakosti  $I$ , gdje je  $\mu_r$  relativna permeabilnost prostora oko vodiča.

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{I}{2\pi d}$$

$[B] = \text{Vs/m}^2 = \text{T (tesla)}^1$

**Inducirani napon u ravnom vodiču** duljine  $l$  koji se brzinom  $v$  giba u magnetskom polju gustoće toka  $B$ , gdje je  $\alpha$  kut između vektora  $v$  i  $B$ .

$$u_i = Blv \sin \alpha$$

**Inducirani napon u petlji** površine  $S$ , koja se vrti stalnom kutnom brzinom  $\omega$  u homogenom magnetskom polju gustoće toka  $B$  (generator izmjeničnog napona, gdje se  $U_m$  naziva *amplituda*, a  $\omega$  *kružna frekvencija* izmjeničnog napona).

$$u_i = \omega NBS \sin(\omega t)$$

$$= U_m \sin(\omega t)$$

**Magnetski tok  $\Phi$**  kroz površinu  $S$ , koja je postavljena u homogenom magnetskom polju tako da okomica na površinu  $S$  zatvara kut  $\alpha$  s pravcem vektora gustoće magnetskog toka  $B$ .

$$\vec{\Phi} = B \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

$[\Phi] = \text{Vs} = \text{Wb (veber)}^2$

**Ulančani tok  $\Psi$**  kroz tijelo koje  $N$  puta obuhvaća magnetski tok  $\Phi$ . Kod svitka (zavojnice)  $N$  je broj zavoja, a  $\Phi$  je magnetski tok obuhvaćen svakim od zavoja.

$$\Psi = N\Phi$$

$[\Psi] = [\Phi] = \text{Vs} = \text{Wb}$

<sup>1</sup> Nikola Tesla (1856-1943)

<sup>2</sup> Wilhelm Eduard Weber (1804-1891).

**Induktivitet  $L$**  (koeficijent samoindukcije) je mjera sposobnosti tijela da strujom obuhvati magnetski tok (induktivnost). Induktivitet  $L$  je definiran kao omjer ulančanog toka  $\Psi$  i jakosti struje  $I$  koja je taj tok stvorila. [ $L$ ]=Vs/A=H (henri<sup>3</sup>).

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}$$

Induktivitet je također i naziv koji dajemo (idealiziranom) elementu električnog kruga (kao što su i kapacitet  $C$  i otpor  $R$ ) kojemu dajemo samo svojstvo induktiviteta  $L$  (znak na slici).



**Zavojnica (svitak)** je naprava visoke induktivnosti, izvedena kao niz zavoja koji, protjecani strujom, obuhvaćaju tom strujom stvoreni magnetski tok. Za razliku od induktiviteta, koji je idealni element (el. kruga) svitak je *realni element* koji ima i neki otpor (a i kapacitet).

**Faradayev<sup>4</sup> zakon elektromagnetske indukcije** kaže: u petlji koja obuhvaća vremenski promjenjivi magnetski tok inducira se napon čiji iznos je jednak brzini promjene (derivaciji) toka u vremenu (u svitku s  $N$  zavoja inducirani napon je  $N$  puta veći od napona u jednom zavoju).

$$u_i = -N \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

Znak "-" u ovoj jednadžbi nema matematički nego fizikalni smisao (Lentzovo pravilo).

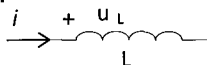
$$u_i = -L \frac{di}{dt}$$

Izrazi li se magnetski tok pomoću induktiviteta i jakosti struje, dobiva se da je iznos induciranih napona jednak umnošku induktiviteta  $L$  i brzine promjene struje u vremenu.

**Lentzovo<sup>5</sup> pravilo** opisuje značenje znaka "-" u jednadžbi Faradayeva zakona i služi za određivanje polariteta induciranih napona, a kaže da je *polaritet napona takav da se inducirani napon svojim djelovanjem (tj. strujom koju bi potjerao) suprotstavlja uzroku svog nastanka (promjeni magnetskog toka, odnosno promjeni jakosti struje)*.

**Veza struje i napona na induktivitetu** u el. krugu određena je ovom jednadžbom, koja vrijedi za referentni polaritet napona i smjer struje prikazane na slici..

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$



**Magnetska veza** je stanje dviju zavojnica (tijela) u kojem druga zavojnica obuhvaća dio magnetskog toka stvorenog u prvoj zavojnici (tijelu).

**Faktor magnetske veze  $k$**  opisuje magnetsku vezu dviju zavojnica i jednak je omjeru dijela magnetskog toka prve zavojnice  $\Phi_{12}$  koji prolazi kroz drugu zavojnicu i ukupnog magnetskog toka  $\Phi_1$  prve zavojnice. Može se izraziti kao broj (između 0 i 1) ili postotak.

$$k = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1}$$

**Međuiduktivitet  $M$**  (koeficijent međuidukcije) jest značajka magnetske veze dviju zavojnica (ili tijela) definiran kao omjer dijela magnetskog toka prve zavojnice  $\Phi_{12}$  ulančanog s  $N_2$  zavoja druge zavojnice i jakosti struje  $I_1$  prve zavojnice (koja je taj tok stvorila). [ $M$ ]=[ $L$ ]=H.

$$M = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

**Veza međuiduktiviteta  $M$ , induktiviteta  $L_1$  i  $L_2$  te faktora magnetske veze  $k$**  dviju zavojnica.

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

**Napon međuidukcije  $u_M$**  ima iznos jednak umnošku koeficijenta međuidukcije  $M$  i brzine promjene (derivacije) jakosti struje u vremenu. Polaritet napona međuidukcije određuje se primjenom Lentzovog pravila, za što treba znati smjerove toka i namotaja svitaka.

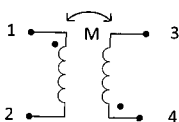
$$u_M = M \frac{di}{dt}$$

<sup>3</sup> Joseph Henry (1797–1878)

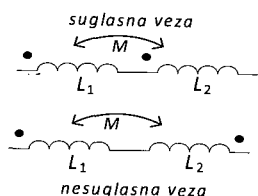
<sup>4</sup> Michael Faraday (1791–1867)

<sup>5</sup> Heinrich Friedrich Emil Lenz (čit. *lenc*) (1804–1865)

**Oznaka međuinduktivne veze** u el. krugu prikazuje se pomoću *točaka* postavljenih na po jednom od krajeva dvaju induktiviteta (prema slici). U el. krugu, gdje nisu vidljivi smjerovi tokova i namotaja, polaritet napona međuindukcije određujemo iz položaja točaka, ovako: *ako struja ulazi u prvi induktivitet na kraj označen točkom i raste, "+"* napona međuindukcije je na onom kraju drugog induktiviteta koji je označen točkom (i obrnuto).



**Ukupni induktivitet serijskog spoja** dvaju induktiviteta s međuinduktivnom vezom je za  $2M$  veći, ili manji, od zbroja dvaju induktiviteta, ovisno o tome jesu li napon samoindukcije i napon međuindukcije na pojedinom induktivitetu istog polariteta (suglasna veza) ili suprotnih polariteta (nesuglasna veza). Veza je suglasna kada struja u oba induktiviteta ulazi na isti način, s obzirom na kraj označen točkom, dok je u protivnom veza nesuglasna.



**Energija na induktivitetu  $W$**  određene je induktivitetom  $L$  i (konačnom vrijednošću) jakosti struje  $I$  kroz induktivitet. Temeljem veze između induktiviteta  $L$  (ulančanog) magnetskog toka  $\Psi$  i jakosti struje  $I$  ( $\Psi = LI$ ) energija (magnetskog polja) akumulirana na induktivitetu može se izraziti i pomoću toka i struje.

$$W = \frac{L \cdot I^2}{2}$$

$$W = \frac{\Psi \cdot I}{2}$$

#### PRIMJERI V.

**V.-P1.** Na ravni vodič (štap) duljine  $l_s = 20$  cm protječan strujom 5A, postavljen okomito na silnice magnetskog polja gustoće toka  $B$  (magnetska indukcija), djeluje magnetska sila iznosa 1N. Kolika je gustoća magnetskog toka?

Zadano:  $l_s = 0.2\text{ m}$   $I = 5\text{ A}$   $F = 1\text{ N}$

**Rješenje:** Ustanovljeno je da na vodič protječan strujom koji se nalazi u magnetskom polju djeluje sila. Sila je vektorska (usmjerena veličina). Iznos sile ovisi o položaju vodiča u magnetskom polju. Iz toga proizlazi da je i magnetsko polje vektorsko.. Ako je vodič

postavljen okomito na silnice sila se računa ovako  $F = I \cdot l_s \cdot B$  pa je onda:  $B = \frac{F}{I \cdot l_s}$

$$B = 1\text{ T}$$

U općenitom slučaju silu izračunavamo vektorskim produktom :

$F = I \cdot (l \times B)$  vektor  $I$  ima iznos jednak duljini vodiča i smjer struje.

napomena : ako je vodič postavljen u smjer silnica tada je sila jednaka nuli. Pojava magnetske sile na vodič koristi se u elektromotorima i elektromehaničkim mjernim instrumentima.

**V.-P2.** Kolika je magnetska sila na elektron koji se giba brzinom od 500 km/s, okomito na silnice magnetskog polja gustoće toka  $2\text{ T}$ ?

Zadano:  $B = 2\text{ T}$   $q = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$   $v = 500 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

**Rješenje:** Na naboj u gibanju djeluje magnetska sila (struja je usmjereno gibanje naboja). Jakost sile ovisi o smjeru naboja prema silnici. Ako se naboj giba okomito na silnice sila je najveća, a kada se giba u smjeru silnice sila je nula. Iznos sile ovdje izračunamo po formuli

$$F = q \cdot B \cdot v \quad F = 1.6 \times 10^{-13}\text{ N}$$



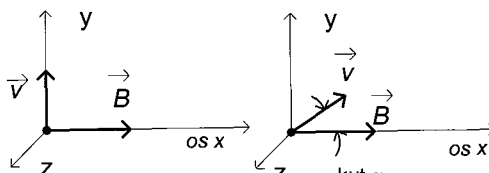
U općenitom slučaju silu izračunavamo vektorskim produktom:

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (q \text{ se uvrštava sa predznakom!}) \text{ pa je iznos sile } F = q \cdot B \cdot v \cdot \sin \alpha$$

Smjer sile određujemo npr. «pravilom desne» ruke za vektorski produkt. Pojava magnetske sile na naboje u gibanju koristi se kod katodne cijevi te u akceleratorima čestica.

**V.-P3.** Silnice homogenog magnetskog polja imaju smjer +x osi. Iznos gustoće magnetskog toka  $B=1\text{T}$ . U prostor je ubačena čestica mase  $m$  nabijena nabojem  $Q$  u smjeru: a) osi +y b) pod kutem  $\alpha=30^\circ$  prema osi +x (slika b). Kolika je magnetska sila na tu česticu i koji je smjer sile? U kojem bi smjeru trebalo ubaciti česticu pa da sila bude jednaka nuli? Kakva je putanja čestice koja se ubaci okomito na silnice polja?

Zadano:  $B=1\text{ T}$ ,  $v=10^5\text{ m/s}$ ,  $Q=1\text{ }\mu\text{C}$ ,  $\alpha=30^\circ$ .



slika a)

slika b)

**Rješenje:** a) 100 mN b) 50 mN; sila će biti nula ako je kut  $\alpha=0$  (formula za silu je  $F=Q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$ ). Smjer sile određujemo pravilom lijeve ruke ovako: ako prsti pokazuju smjer čestice, a vektor  $\mathbf{B}$  «udara u dlan» tada palac pokazuje smjer sile. U oba slučaja je to smjer -z osi samo je u slučaju b) sila manja! Putanja čestice je kružnica polumjera  $r = mv/QB$ . Silnice magnetskog polja su za razliku od silnica elektrostatskog polja zatvorene linije tj. nemaju početak niti kraj. U prostoru gdje je polje homogeno silnice su jednoliko raspoređene (ekvidistantne su).

**V.-P4.** Kolika je gustoća magnetskog toka na udaljenosti 50 cm od ravnog vodiča kroz koju prolazi struja od 125 A? Kolika je gustoća toka  $B$  na udaljenosti od 2 m?

Zadano  $I = 125\text{ A}$   $r_1 = 0.5\text{ m}$   $r_2 = 2\text{ m}$   $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$

**Rješenje:** Gustoća magnetskog toka ovisi o magnetskim svojstvima sredstva koje okružuje vodič. Ako je to zrak kao u ovom zadatku tada je:

$$B_1 = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \quad B_2 = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_2} \quad B_2 = 1.25 \times 10^{-5} \text{ T} \quad B_1 = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$$

napomena: Osim ovog, koje je nastalo zbog struje od 125 A, postoji i magnetsko polje Zemlje koje ima različite iznose na raznim mjestima, ali možemo kao približan podatak uzeti da je to oko  $50\text{ }\mu\text{T}$ . U stvarnosti bi ovom izračunatom polju trebalo **vektorski** (dakle vodeći računa i o smjeru) pridodati polje Zemlje.

**V.-P5.** Koliki je a) magnetski tok u zračnom kružnom svitku presjeka  $2\text{ cm}^2$ , srednjeg polumjera 3,5 cm sastavljenom od 1000 zavoja protjecanih strujom od 5 mA. b) ulančani tok iste zavojnice

Zadano  $N = 1000$   $S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$   $I = 5\text{ mA}$   $R_{Sr} = 3.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

**Rješenje:** Magnetsko polje za ovaj oblik namota (koji se naziva još: prstenasti ili torusni) je "zarobljeno" u prostoru jezgre. Najprije izračunamo srednju duljinu silnice:

$$l_{sr} = 2 \cdot \pi \cdot R_{sr} \quad l_{sr} = 0.22 \text{ m} \quad \text{Magnetski tok dobivamo ovako:}$$

$$\Phi = \frac{(I \cdot N)}{\left( \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_{sr}}{S} \right)} \quad \Phi = 5.714 \times 10^{-9} \text{ Wb}$$

**Napomena:** Magnetski krug kružnog svitka možemo usporediti sa strujnim krugom. Umnožak  $NI$  ima ulogu elektromotorne sile (napona) i naziva se magnetomotorna sila.  $MMS = I \cdot N$

$$R_m = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_{sr}}{S} \quad R_m = 8.75 \times 10^8 \frac{\text{s}^2 \text{A}^2}{\text{kg m}^2} \quad \Phi = \frac{MMS}{R_m} \quad \Phi = 5.714 \times 10^{-9} \text{ Wb}$$

b) Ulančani tok je ukupan tok kroz sve zavoje. Ako kroz svaki zavoj prolazi tok  $\Phi$  tada je je ulančani tok  $\Psi = N \cdot \Phi = 5.714 \times 10^{-6} \text{ Vs}$

Ulančani tok je važan pri proračunu induciranog napona. Uvodi se pojam ulančanog toka po jedinici struje koji se naziva induktivitet  $L = \Psi / I = 1.14 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/A}$

**Induktivitet je osnovno svojstvo zavojnice kao elementa strujnog kruga.**

**Napomena:** Gustoća magnetskog toka  $B$  mjeri se posebnim instrumentom koji se naziva: mjerilo magnetske indukcije (popularno: teslametar). Takvo mjerilo ima malu sondu (površine  $1\text{-}2\text{mm}^2$ ) koju treba postaviti na mjesto gdje želimo izmjeriti veličinu  $B$ . Treba voditi računa da je veličina  $B$  usmjerena (vektor) pa sondu treba postaviti tako da silnice padaju okomito na površinu sonde.

**V.-P6.** Odredite približno gustoću magnetskog toka u ravnom zračnom svitku duljine 10 cm s 360 zavoja žice protjecanih strujom od 100mA.

$$\text{Zadano } N = 360 \quad I = 0.1 \text{ A} \quad l_{sv} = 0.1 \text{ m} \quad \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{(\text{V} \cdot \text{s})}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

**Rješenje:** Polje ravnog svitka je nehomogeno. Unutar svitka postoji koncentracija silnica dok se izvan njega, rasipaju u okolni prostor. Slično je i magnetsko polje štapastog magneta. Važno je zapaziti da su silnice magnetskog polja *neprekinute zatvorene linije*. Postoje (komplicirane) jednadžbe kojima se može izračunati magnetsko polje u bilo kojoj točki prostora unutar i izvan ravnog svitka, ali se ovdje ograničavamo samo na približan proračun polja unutar svitka pomoću približne formule

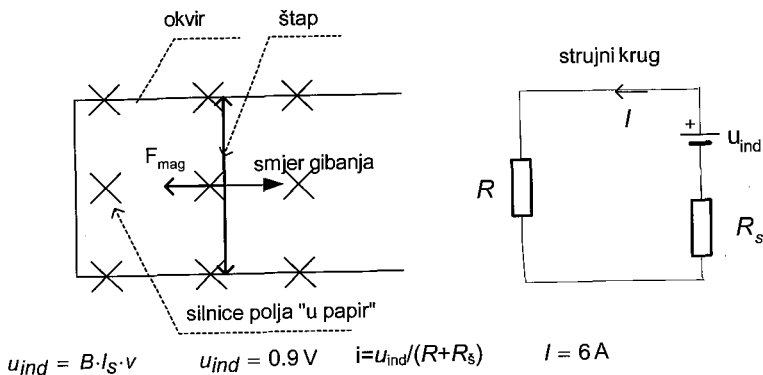
$$B = \mu_0 \frac{NI}{l_{sr}}$$

$$\text{kojom dobivamo } B = 4.524 \times 10^{-4} \text{ T}$$

**V.-P7.** Vodljivi štap duljine 10 cm klizi brzinom 9 m/s po vodljivom okviru u magnetskom polju gustoće toka 1T. Kolika je magnetska sila na štap?

$$\text{Zadano: } l_s = 0.1 \text{ m} \quad v = 9 \text{ m/s} \quad B = 1 \text{ T} \quad R_{okvira} = 0.1 \Omega \quad R_s = 0.05 \Omega$$

**Rješenje:** Ovo je primjer strujnog kruga u kojem je inducirani napon na krajevima štapa izvor napona, otpor štapa je unutarnji otpor izvora, a otpor okvira vanjski otpor  $R$ . Treba zapaziti da se vanjski otpor tj. otpor okvira povećava kako se štap pomiče. Najprije valja izračunati inducirani napon, a onda Ohmovim zakonom struju. Pritom pomaže ako sve skiciramo, kako je prikazano u nastavku:



Na štap protječan strujom koji se giba u magnetskom polju djeluje magnetska sila

$$F_{mag} = I \cdot l \cdot B \quad F_{mag} = 0.6 \text{ N}$$

Ovu magnetsku silu moramo savladavati prilikom pomicanja štapa. Time trošimo mehaničku energiju koja se pretvara u električnu, a ta se onda troši na zagrijavanje otpora. U ovom zadatku je prikazan jednostavni uređaj za proizvodnju el.energije (generator). Umjesto pravocrtnog gibanja pogodnom konstrukcijom se postiže isti efekt, ali pri kružnom gibanju štapa (rotacioni strojevi)

**V.-P8.** Svitak od 100 zavoja obuhvaća magnetski tok od 0,8 mVs . Ako se tijekom vremena od 4 ms tok linearno smanji na nulu koliki se napon pojavi (inducira) na stezaljkama svitka?

$$\text{Zadano: } N = 100 \quad \Phi = 0.8 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \quad t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

**Rješenje:** Faraday je ustanovio da se u zavoju žice prilikom promjene magnetskog toka pojavi (inducira) napon koji je ovisan o brzini promjene toka. Ako imamo veći broj zavoja (svitak) kroz koji prolazi promjenjivi tok tada je ukupan inducirani napon jednak sumi induciranih napona u pojedinim zavojima. U našem zadatku promjena toka je razlika početnog ( $\Phi$ ) i konačnog toka (0):

$$\Delta\Phi = \Phi - 0 \quad \Delta t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\text{inducirani napon u jednom zavoju je } u_1 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad u_1 = 0.2 \text{ V}$$

$$\text{Ukupan inducirani napon je: } u_{ind} = N \cdot u_1 \quad u_{ind} = 20 \text{ V}$$

Napomena: magnetski tok može nastati i zbog vlastite struje svitka. Tada se inducirani napon naziva *napon samoindukcije*. Ovdje, u ovom zadatku, tok je nastao u nekom drugom izvoru toka. To može biti magnet ili elektromagnet postavljen u blizinu svitka.

**V.-P9.** Svitak od 200 zavoja površine presjeka  $20 \text{ cm}^2$  rotira oko osi okomite na silnice homogenog magnetskog polja gustoće toka 1,2T. Koje je oblika napon induciran u svitku. Ako svitak u svakoj sekundi učini 5 okretaja odredite najveću vrijednost (amplitudu) induciranih napona.

$$\text{Zadano: } N = 200 \quad S = 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad B = 1.2 \text{ T}$$

**Rješenje:** Rotaciono gibanje svitka u magnetskom polju ima veliki praktički značaj za proizvodnju električne energije. Prilikom okretanja svitka magnetski tok se mijenja po sinusnom zakonu. Dobiva se vremenski promjenjivi sinusoidni napon koji popularno nazivamo *izmjenični napon* (eng. kratica: AC od *alternating current*). Taj napon u vremenu mijenja svoj iznos i polaritet pa uvodimo pojam trenutne vrijednosti.

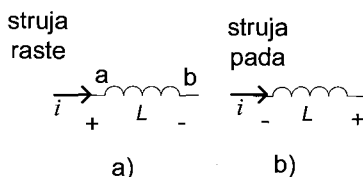
Grafički prikaz promjene trenutnih vrijednosti naziva se valni oblik. Dakle, naš napon ima **sinusoidni valni oblik**. Ovisno o broju okretaja koje svitak učini u jedinici vremena, mijenjaju se dvije značajke induciranog napona: **frekvencija i amplituda**. Pri jednom okretaju, svitak se zakrene za puni kut od  $2\pi$  radijana ( $360^\circ$ ) pri čemu nastane jedan „titraj“ sinusoide napona. Ako u jednoj sekundi svitak načini 5 okretaja znači da mu se u sekundi kut promijeni za  $10\pi$  radijana. Prema tome, brzina primjene kuta u vremenu, ili *kutna brzina*  $\omega$  je onda  $\omega = 10\pi$  radijana/s (ili, budući da je radijan bez dimenzija -  $s^{-1}$ ) pa je  $\omega = 10\pi s^{-1}$ . Kutna brzina naziva se još *kružna frekvencija*, a broj titraja u sekundi naziva se *frekvencija*  $f$ . Ovaj napon u jednoj sekundi načini 5 titraja (ponavlja se 5 puta) pa mu je frekvencija  $f = 5$  Hz (gdje je  $1 \text{ Hz} = 1 s^{-1}$ ). Općenito vrijedi je  $\omega = 2\pi f$

Maksimalna vrijednost, ili *amplituda* napona je :  $U_m = N \cdot \omega \cdot B \cdot S$   $U_m = 15.08 \text{ V}$

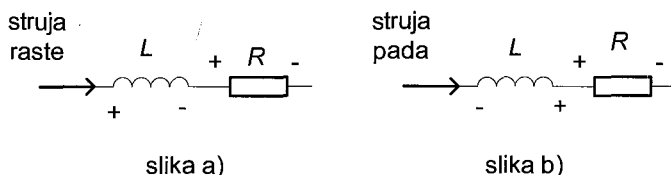
**V.-P10** Struja kroz svitak induktiviteta  $L = 100 \text{ mH}$ , počne (u trenutku  $t=0$ ) rasti stalnom brzinom od  $10 \text{ A/s}$ . Odredite napon samoindukcije na svitku u trenutku  $t=1 \text{ s}$ . Zadano:

$$\text{promjena} = 10 \frac{\text{A}}{\text{s}} \quad L = 100 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

**Rješenje:** Struja koja prolazi kroz svitak stvara *vlastiti tok* svitka. Ukupan tok je suma tokova kroz pojedine zavojice. Struja iste jakosti kroz različite svitke stvara (proizvodi) različite tokove. Odnos ukupnog toka i struje svojstven nekom svitku, naziva se induktivitet  $L$ . Induktivitet je važan parametar svitka. Pomoću induktiviteta jednostavan je proračun napona samoindukcije to je umnožak induktiviteta i brzine promjene struje (derivacije):  $u_L = L \cdot di/dt$ . Na grafu vremenske funkcije promjene struje derivacija ( $di/dt$ ) je proporcionalna nagibu tangente ( $\Delta i/\Delta t$ ). Ovu formulu treba povezati sa slikom. Struja ulazi u priključnicu a. Napon se odnosi na napon  $U_{ab}$  (b je referentna priključnica. Svitak u kojem se inducira napon od  $1 \text{ V}$  pri promjeni struje  $1 \text{ A/s}$  ima induktivitet  $1 \text{ H}$  (henry).



na slici a) je prikazan polaritet napona pri porastu struje (svitak se «protivi» porastu). Iznos napona je u ovom slučaju  $1 \text{ V}$ . Pri porastu struje njezina promjena ( $\Delta i/\Delta t$ ) je pozitivna napomena: žica od koje je napravljen svitak ima i omski otpor  $R_s$ . Prema tome na realnom svitku osim napona samoindukcije imamo i napon koji proizlazi iz Ohmovog zakona. Za napon «samoindukcije» važna je promjena struje, a za «omski» napon, trenutna vrijednost struje. Realni svitak se stoga shematski može prikazati kao serijski spoj *idealnog induktiviteta*  $L$  i otpora  $R$ . Ukupan napon na stezaljkama takvog (realnog) svitka je algebarska suma napona na dva serijski spojena elementa (važan je polaritet pojedine «komponente» napona)



Pitanje: Kolika se magnetska energija nakupi u svitku nakon 1 sekunde.  
Odgovor: nakon jedne sekunde struja ima iznos  $10 \text{ A}$  pa je energija

$$W = 0.5 \cdot L \cdot I^2 = 5 \text{ J}$$

**ZADACI V.**

**V.-1.** Ravni vodič duljine  $l$  nalazi se u homogenom magnetskom polju u kojem je gustoća toka (indukcija)  $B$ . Kut između vodiča i magnetskih silnica je  $\alpha$ , a struja kroz vodič  $I$ . Kolika je sila na taj vodič? Za koji kut  $\alpha$  će sila biti najveća, a za koji nula?

Zadano:  $B = 0.5 \text{ T}$ ,  $I = 20 \text{ A}$ ,  $l = 0.1 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

**Rezultat:**  $0.5 \text{ N}$ , sila je najveća kada je  $\alpha = 90^\circ$ , a najmanja za  $\alpha = 0$ .

**V.-2.** Odredite magnetsku silu koja djeluje po  $1 \text{ m}$  duljine između dvaju dugih paralelnih ravnih vodiča udaljenih međusobno  $1 \text{ m}$ , protjecanih strujama od  $2 \text{ A}$  suprotnog smjera. Da li se ti vodiči privlače ili se odbijaju? Kolika će biti ta sila ako se struja smanji na polovinu?

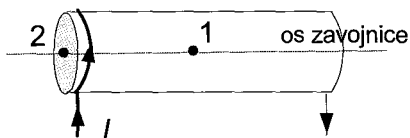
**Rezultat:**  $8 \times 10^{-7} \text{ N}$ . Odg. Odbijaju; smanji se na četvrtinu

**V.-3.** Magnetska sila između dvaju paralelnih vodiča duljine  $2 \text{ m}$  razmaknutih za  $1 \text{ cm}$  i protjecanih nepoznatom strujom  $I$  iznosi  $4 \text{ mN}$ . Kolika je ta struja?

Zadano:  $d = 0.01 \text{ m}$ ,  $l_v = 2 \text{ m}$ ,  $F = 4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$

**Rezultat:**  $I = 10 \text{ A}$

**V.-4.** Na okrugli drveni valjak gusto je namotano  $N$  zavoja bakrene lakom izolirane žice. Izračunajte gustoću magnetskog toka  $B$  u točki koja je: a) u sredini zavojnice (1) b) na krajevima zavojnice (2) c) odredite smjer polja (silnica) u točki 1. Napomena: Duljina valjka je  $l$  je puno veća od njegova polumjera  $r$ .



Zadano:  $l = 12 \text{ cm}$ ,  $N = 300$ ,  
 $r = 1 \text{ cm}$ ,  
 $I = 0.8 \text{ A}$ .

**Rezultat**  $B_1 = 2.5 \text{ mT}$ ; za «duge zavojnice» vrijedi da je polje na krajevima dvaput manje nego u sredini. Smjer određujemo pravilom desne ruke (ovdje u lijevo).

**V.-5.** Ravni vodič (štap) duljine  $20 \text{ cm}$  giba se brzinom  $15 \text{ m/s}$  okomito na silnice magnetskog polja gustoće toka  $1.2 \text{ T}$ . Koliki će se napon pojaviti (inducirati) na krajevima vodiča?

Zadano:  $B = 1.2 \text{ T}$ ,  $l_s = 0.2 \text{ m}$ ,  $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

**Rezultat:** Ako je zadovoljen uvjet međusobne okomitosti smjera gibanja štapa i magnetskih silnica inducirani napon na krajevima štapa je:

$$u_{\text{ind}} = B \cdot l_s \cdot v \quad u_{\text{ind}} = 3.6 \text{ V}$$

**V.-6.** Zrakoplov (Airbus A380) ima raspon krila  $80 \text{ m}$  i leti brzinom od  $900 \text{ km/h}$ . Položaj zrakoplova je takav da vertikalna komponenta zemljinog magnetskog polja na površinu krila iznosi  $20 \mu\text{T}$ . Koliki se napon inducira između krajeva krila? Da li bismo mjerenjem tog napona mogli odrediti brzinu zrakoplova?

**Rezultat:**  $0.4 \text{ V}$ ; Ne, jer taj napon ne možemo izmjeriti (u priključnim vodovima bi se također inducirao napon istog iznosa pa je napon u konturi: krilo-vodovi jednak nuli).

**V.-7.** Svitak induktiviteta  $L$  protjecan je strujom  $I$ . Koliki se napon inducira na krajevima svitka, ako se struja linearno smanji na nulu u vremenu  $\Delta t$ ? Koliko napona «otpada» na pojedini zavoj ako zavojnica ima  $N$  zavoja?

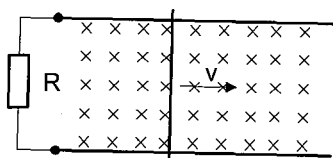
Zadano:  $L = 1 \text{ H}$ ,  $I = 1 \text{ A}$ ,  $\Delta t = 100 \text{ ms}$ ,  $N = 100$ .

Rezultat:  $10 \text{ V}$ ,  $0.1 \text{ V}$ .

**V.-8.** Krajeve svitka iz prethodnog primjera označimo s **a** i **b**. Struja ulazi u stezaljku označenu s **a**. Koji je polaritet induciranog napona kojemu ste izračunali iznos? Koliki bi bio napon  $u_{ab}$  ako bi se struja smanjila na nulu brzinom  $1000 \text{ A/s}$ ?

Rezultat: plus je na **b** (jer se struja smanjuje, kod porasta struje plus je na **a**),  $u_{ab} = -1000 \text{ V}$ .

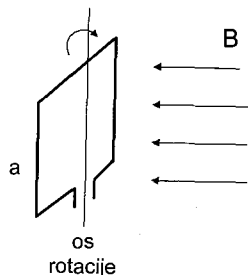
**V.-9.** U homogenom magnetskom polju koje ima smjer "u papir" nalazi se dva usporedna vodiča (tračnice) po kojima klizi ravni vodič (1) (vidi sliku). Polje ima gustoću silnica  $B$ . Razmak tračnica je  $l$ . Otpor tračnica je zanemarivo mali dok je otpor vodiča  $R_v$ . Na jednom kraju tračnica spojen je otpornik  $R$ . Vodič se giba stalnom brzinom  $v$  u označenom smjeru. Izračunajte a) inducirani napon b) energiju koja se utroši u otporniku  $R$  kroz vrijeme  $\Delta t$ .



Zadano:  $B = 0.3 \text{ T}$ ,  $R_v = 1 \Omega$ ,  $R = 2 \Omega$   
 $v = 10 \text{ m/s}$ ,  $l = 0.1 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ .

Rezultat:  $0.3 \text{ V}$ ,  $2 \text{ mJ}$ .

**V.-10.** Tanka kvadratna zavojnica stranice  $a = 0.1 \text{ m}$ , ima 500 zavoja i okreće se sa 1200 okretaja u minuti. Os rotacije okomita je na površinu Zemlje. Horizontalna komponenta Zemljinog magnetskog polja ima iznos od  $40 \mu\text{T}$ . Na krajevima zavojnice se inducira sinusni napon. Izračunajte a) frekvenciju induciranog napona b) amplitudu tog napona.



Rezultat:  $f = 20 \text{ Hz}$ ,  $U_m = 25 \text{ mV}$ .

**V.-11.** Zavojnica ima induktivitet  $L = 1 \text{ H}$  dok je otpor namotaja zanemarivo mali. Zavojnicu priključimo na izvor  $U = 10 \text{ V}$  preko otpornika  $R_1 = 2 \Omega$ . Izračunajte a) kolika je stalna struja zavojnice b) kolika se energija prikupi u magnetskom polju zavojnice prilikom uspostavljanja struje?

Rezultat:  $I = 5 \text{ A}$ ,  $W = L \cdot I^2 / 2 = 12.5 \text{ Js}$  (zavojnica je «skladište» energije)

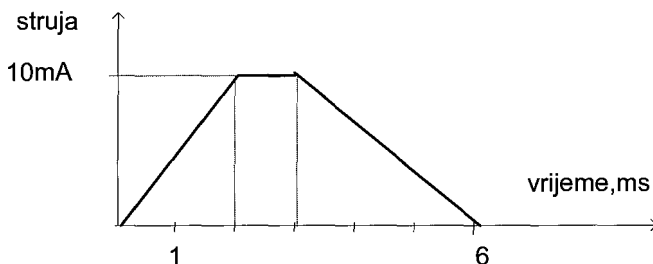
**V.-12.** Magnetski tok kroz neki zavoj (petlju) promijeni se u  $\Delta t = 1 \text{ s}$  za  $\Delta \Phi = 1 \text{ Vs}$ . Koliki naboj prođe kroz presjek vodiča od kojeg je napravljena petlja ako je otpor vodiča  $1 \Omega$ ?

Rezultat: inducirani napon je  $u = \Delta \Phi / \Delta t$ , a struja je  $i = \Delta \Phi / \Delta t / R$ . Naboj izračunamo ovako  $\Delta q = i \cdot \Delta t = \Delta \Phi / R = 1 \text{ As}$ .

**V.-13.** Svitak sa  $N$  zavoja postavljen je u blizinu magneta tako da kroz njegov poprečni presjek  $S$  prolazi magnetski tok gustoće  $B$ . Ako zavojnicu udaljimo od magneta tako da se tok linearno smanji na nulu kroz vrijeme  $\Delta t$  izračunajte iznos induciranog napona na krajevima te zavojnice. Da li bi se isti efekt dobio u slučaju ako bismo udaljavali magnet? Zadano:  $N = 20$ ,  $S = 4 \text{ cm}^2$ ,  $B = 1 \text{ mT}$ ,  $\Delta t = 2 \text{ ms}$ .

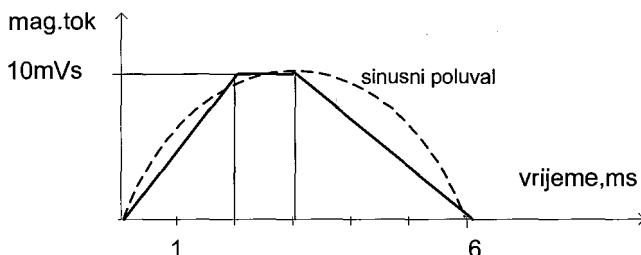
Rezultat:  $4 \text{ mV}$ , da.

**V.-14.** Struja kroz svitak  $L = 100 \text{ mH}$  mijenja se vremenski kako je prikazano slikom. Koliki je iznos induciranog napona u trenutku a)  $1 \text{ ms}$  b)  $5 \text{ ms}$ ? U kojem odnosu su polariteti tih napona? U kojem vremenskom intervalu je inducirani napon jednak nuli?



Rezultat: a)  $0,5 \text{ V}$  b)  $0,33 \text{ V}$ ; naponi su suprotnog polariteta; napon je nula u vremenskom intervalu od  $2 \text{ ms}$  do  $3 \text{ ms}$ .

**V.-15.** Magnetski tok  $\phi$  kroz svitak sa  $N = 1000$  zavoja mijenja se vremenski kako je prikazano slikom. Koliki je iznos induciranog napona u trenutku a)  $1,5 \text{ ms}$  b)  $4 \text{ ms}$ ? U kojem odnosu su polariteti tih napona? U kojem vremenskom intervalu je inducirani napon jednak nuli? Pretpostavljamo da je tok isti kroz svaki od zavoja. Kako bi odredili napon ako bi se tok mijenjao po funkciji sinusa (crtkano).



Rezultat: a)  $5 \text{ kV}$  b)  $3,33 \text{ kV}$ ; naponi su suprotnog polariteta; napon je nula u vremenskom intervalu od  $2 \text{ ms}$  do  $3 \text{ ms}$ . Kod sinusne promjene najveći napon je u  $t=0$  i  $t=6 \text{ ms}$  (različita su polariteta). U trenutku  $t=3 \text{ ms}$  napon bi bio nula.

Vremenska funkcija promjene napona bila bi kosinusna (derivacija sinusne funkcije toka).

**V.-16.** Dva svitka  $L_1 = 5 \text{ mH}$  i  $L_2 = 10 \text{ mH}$  spojena su u seriju. Faktor magnetske veze je  $k = 0,75$ . Magnetski tokovi samoindukcije i međusobne indukcije imaju jednaki smjer (potpomažu se). Struja koja prolazi kroz zavojnice linearno raste od iznosa  $1 \text{ A}$  brzinom  $10 \text{ A/s}$ . Izračunajte a) iznos međuinduktiviteta b) iznos napona na stezaljkama zavojnice  $L_1$  u trenutku  $t = 0,1 \text{ s}$ .

Rezultat:  $M = 5,3 \text{ mH}$ ,  $u = 0,103 \text{ V}$ .

**V.-17.** Dvije su zavojnice induktivno vezane tako da se promjenom jakosti struje u jednoj od nule do 10 A za vrijeme od 100 ms u drugoj inducira srednji napon od 30 V. Koliki je koeficijent međusobne indukcije ?

Rezultat: Napon međuidukcije je  $M \cdot di/dt$  pa je  $M = U_{ind} / \Delta i / \Delta t$ ,  $M = 0,3 \text{ H}$ .

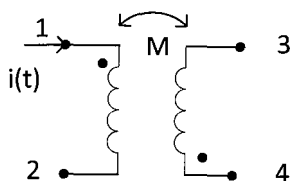
**V.-18.** Svitak ima  $L = 1 \text{ H}$  i otpor  $10 \Omega$ . U nekom trenutku priključimo ga na istosmjerni naponski izvor od 10 V. Kolika je struja u trenutku uključjenja? Kolika je konačna struja? Kolika se energija nakupi u svitku?

Rezultat: struja postepeno raste od nule do  $U/R = 1 \text{ A}$ . U trenutku uključjenja struja je nula, a na kraju je 1 A.

Na kraju tj. nakon uspostavljanja struje od 1 A u zavojnici je nagomilana (pohranjena) energija (magnetska) od  $L \cdot I^2 / 2 = 0,5 \text{ J}$ .

(Prisjetimo se: prilikom nabijanja kondenzatora na napon  $U$  u njemu se je nagomilala energija  $U^2 C / 2$ ).

**V.-19.** Struja  $i(t)$  mijenja se prema grafu prikazanom u zadatku V.1-14, Odredite inducirani napon međuidukcije  $u_{34}$  u trenutku a) 1 ms b) 5ms. Nacrtajte graf vremenske promjene napona  $u_{34}(t)$  i napona  $u_{43}(t)$ . Zadano je  $M = 100 \text{ mH}$ .



Rezultat

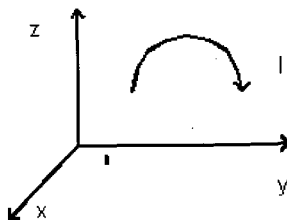
a)  $u_{34} = -0,5 \text{ V}$    b)  $u_{34} = +0,33 \text{ V}$   
 napon  $u_{34}$  je negativan od  $t=0$  do  $t=2 \text{ ms}$ , zatim je nula do trenutka 3 ms i končno od  $t=3 \text{ ms}$  do 6 ms je pozitivan (0,33 v)  
 napon  $u_{43}$  ima obrnuti polaritet



## TEST PITANJA V.

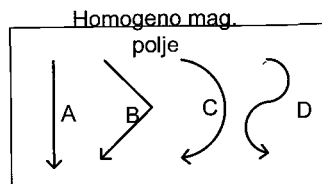
1) Homogeno magnetsko polje ima smjer osi x. Kakva sila djeluje na polukružni segment vodiča prikazan slikom?

- A) u smjeru osi z
- B) u smjeru osi y
- C) u smjeru osi x
- D) sila je nula
- E) sila nije nula ali ima neki drugi smjer



2) Četiri vodiča raznih oblika (prema slici) protjecana su jednakim strujama u homogenom magnetskom polju (okomitom na ravninu slike). Na koji vodič djeluje najveća sila?

- A) na vodič A
- B) B
- C) C
- D) D
- E) jednaka je sila na svaki od vodiča

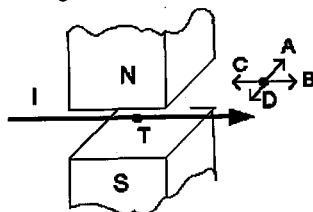


3) Kroz dva usporedna vodiča teku struje I u istom smjeru. Kakva je sila između vodiča?

- A) odbojna
- B) privlačna
- C) jednaka je nuli

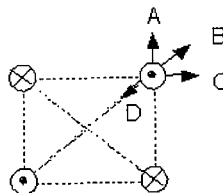
4) Koji smjer ima magnetska sila u točki T prikazanog vodiča?

- A) smjer A
- B) B
- C) C
- D) D



5) Dva paralelna vodiča protjecana su strujama jednakog iznosa i smjerova prikazanih na slici. Koji smjer ima rezultantna sila na označeni vodič?

- A) A
- B) B
- C) C
- D) D
- E) sila je nula

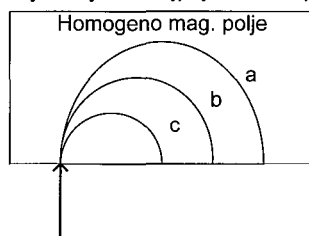


6) Ako nabijenu česticu ubacimo u magnetsko polje paralelno sa silnicama čestica se:

- A) usporava
- B) ubrzava
- C) nema dovoljno podataka da bi se utvrdilo
- D) nastavlja se kretati istom brzinom

7) Nabijene čestice istodobno ulaze istom brzinom u magnetsko polje, smjerom okomito na silnice polja, opisujući označene putanje. Koja će najprije izaći iz polja?

- A) čestica a  
B) čestica b  
C) čestica c  
D) izaći će istodobno



8) Magnetsko polje ravnog vodiča okruglog presjeka polumjera  $R$  tik uz površinu iznosi  $1 \mu\text{T}$ . Koliko je polje na udaljenosti  $2R$  od osi tog vodiča?

- A)  $0,25 \text{ mikroT}$  B)  $0,5 \text{ mikroT}$  C)  $0,125 \text{ mikroT}$  D)  $2 \text{ mikroT}$

9) Zadana su dva usporedna duga vodiča na razmaku  $d$ . Koliko je magnetsko polje na polovici njihovog razmaka ( $d/2$ ) ako struje teku u različitim smjerovima?

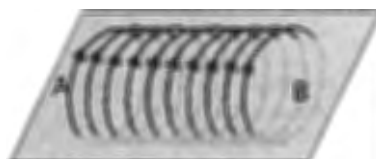
- A)  $\mu_0 I / \pi d$  B)  $2\mu_0 I / \pi d$  C)  $4\mu_0 I / \pi d$  D) nula E)  $\mu_0 I / 2\pi d$

10) Kroz okrugli zavoj prolazi struja  $I$ . Vektor magnetskog polja  $B$  (indukcija) u središtu zavoja je:

- A) nula B)  $I/2r$  C)  $\mu_0 I / 2\pi r$  D)  $I/4\pi r$  E)  $\mu_0 I / 2r$

11) Kroz zavojnicu prolazi struja u označenom smjeru. Koje su tvrdnje ispravne u vezi nastalog mag. polja:

- A) na kraju A je N-pol  
B) na kraju B je N-pol  
C) silnice unutar zavojnice imaju smjer B-A  
D) silnice izvan zavojnice ne postoje  
E) silnice izvan zavojnice imaju smjer B-A



12) U homogenom magnetskom polju  $B=1 \text{ T}$  nalazi se ploha površine  $1 \text{ cm}^2$ . Ako je kut između vektora  $B$  i vektora površine  $90$  stupnjeva tok kroz plohu je:

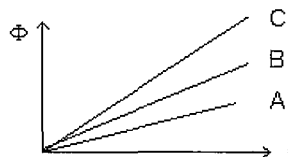
- A) nula B)  $10^{-4} \text{ Vs}$  C)  $10^{-2} \text{ Vs}$  D)  $-10^{-4} \text{ Vs}$  E)  $-10^{-2} \text{ Vs}$

13) Na torusnu (prstenastu) neferomagnetsku jezgru gusto je namotano  $N$  zavoja kroz koje prolazi struja  $I$ . Kako se promijeni magnetski tok, ako se struja poveća dva puta?

- A) smanji se dva puta B) ne promijeni se C) poraste 4 puta  
D) poraste 2 puta

14) Za tri torusa prikazane su ovisnosti ulančanog toka o struji. Koji torus ima najveći induktivitet?

- A) torus A  
B) B  
C) C  
D) nije moguće ustanoviti jer ovisi o dimenziji



15) Struja od  $5 \text{ A}$  stvara ukupan (ulančan) tok od  $10 \text{ Vs}$ . Koliki je induktivitet zavojnice?

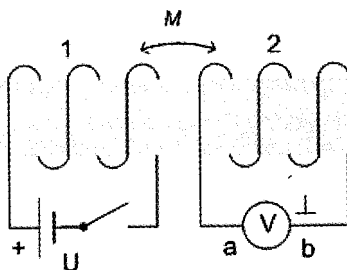
- A)  $2 \text{ H}$  B)  $0,5 \text{ H}$  C) ovisi o broju zavoja D)  $50 \text{ H}$

16) Zavojnica ima neferomagnetsku jezgru. Struja kroz zavojnicu je  $I$ . Kako se promijeni induktivitet i energija magnetskog polja ako struju povećamo na  $2I$ ? Koji su odgovori točni?

- A) induktivitet se ne mijenja
- B) energija poraste 2 puta
- C) energija poraste 4 puta
- D)  $L$  poraste 2 puta
- E) energija se ne mijenja

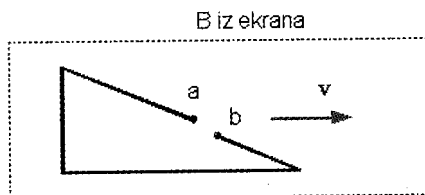
17) Koji je polaritet napona voltmetra  $U_{ab}$ ? prilikom zatvaranja sklopke?

- A) nema napona
- B) napon je pozitivan (+ na a)
- C) napon je negativan (- na a)



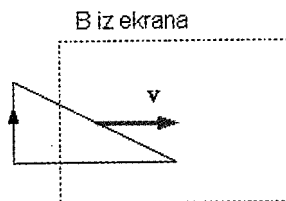
18) U homogenom magnetskom polju se giba petlja u obliku trokuta brzinom  $v$ . Hoće li se i kojeg polariteta inducirati napon?

- A) nema induciranog napona
- B) da plus je na a
- C) da plus je na b



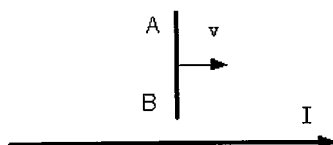
19) Petlja u obliku trokuta ulazi brzinom  $v$  u homogeno magnetsko polje. Koji smjer ima inducirana struja?

- A) ta struja je nula
- B) struja ima označeni smjer
- C) struja ima suprotan smjer od označenog



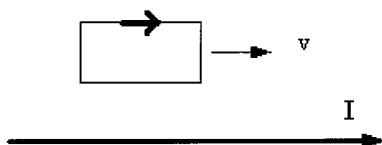
20) Paralelno sa dugim vodičem giba se metalni vodič (štap) konstantnom brzinom. Kakav je inducirani napon?

- A) taj napon je nula
- B) plus je na A
- C) plus je na B



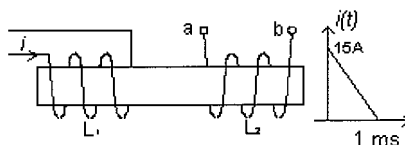
21) Paralelno sa dugim vodičem giba se brzinom  $v$  pravokutni zavoj žice. Kakva je inducirana struja u tom zavoju?

- A) ta struja je nula  
B) struja ima označen smjer  
C) struja ima suprotan smjer



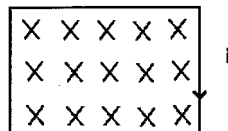
22) Koliki će biti napon  $u_{ab}$  u vremenskom intervalu  $0 \leq t \leq 1$  ms ako se struja  $i$  mijenja kako je zadano na slici, a koeficijent magnetske veze je  $k = 0,5$  uz  $L_1 = 4$  mH,  $L_2 = 1$  mH?

- A) 30 V  
B) -30 V  
C) 15 V  
D) -15 V  
E) nula



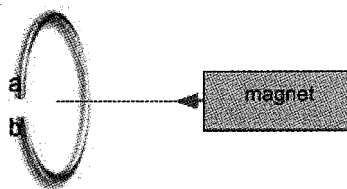
23) Okomito na površinu vodljivog zavoja prolaze silnice magnetskog polja. Smjer silnica je u zaslom. Ako se magnetski tok mijenja po zakonu  $\Phi(t) = -\Phi_m \cdot t + a$  Vs odredite kakva je inducirana struja po smjeru i iznosu.

- A) struja ima prikazani smjer  
B) struja je nula  
C) struja ima smjer obrnut od prikazanog  
D) struja je konstantna  
E) struja mijenja iznos



24) Metalnom zavoju (prstenu) približava se permanentni magnet. Koji je pol magneta bliže prstenu ako je + inducirano napona na priključnici a?

- A) sjeverni N  
B) južni S  
C) nema dovoljno podataka da bi se to utvrdilo



25.) Serijski su spojeni  $L_1 = 1$  H i  $L_2 = 1$  H. Između zavojnica postoji međuinaktivna suglasna veza  $k=1$ . Koliki je ekvivalentni induktivitet?

- A) 0 B) 2 H C) 1 H D) 4 H E) 3 H

### Odgovori na test pitanja V.

1.A; 2.E; 3.B; 4.A; 5.B; 6.D; 7.C; 8.B; 9.B; 10.E; 11.AC; 12.A; 13.D; 14.C; 15.A;  
16.AC; 17.B; 18.A; 19.B; 20.C; 21.A; 22.C; 23.AD; 24.A; 25.D

## VI.1. SINUSOIDNO PROMJENJIVE ELEKTRIČNE VELIČINE

### OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

**Sinusoidne veličine** su one čija vremenska promjena ima oblik sinusne funkcije (sinusoide). Sinusoidni je izmjenični napon (gradske mreže) koji *periodički* mijenjajući predznak titra oko nule prema općoj jednačbi

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha_0) \quad \text{gdje je:}$$

$U_m$  amplituda (maksimalna vrijednost),  $\omega$  kružna frekvencija (kutna brzina) i  $\alpha_0$  početni kut sinusne funkcije.

**Amplituda  $U_m$**  (maksimalna vrijednost) je najveće odstupanje sinusne funkcije od nule.

**Kružna frekvencija  $\omega$**  (ili kutna brzina) je brzina promjene kuta sinusne funkcije u vremenu. Mijenja li se kut stalnom brzinom, ona je jednaka omjeru promjene kuta tijekom jedne periode (a to je  $2\pi$ ) i trajanja periode  $T$ .  $[\omega] = \text{rad/s} = \text{s}^{-1}$ .

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

**Perioda  $T$**  je vrijeme nakon kojeg se ponavljaju sve vrijednosti sinusne funkcije (jedan titraj tijekom kojega se kut sinusne funkcije promjeni za  $2\pi$ ).

**Frekvencija  $f$**  jest broj perioda (titraja) sinusne funkcije u sekundi.  $[f] = \text{s}^{-1} = \text{Hz (herc}^1)$

$$f = \frac{1}{T}$$

**Početni kut  $\alpha_0$**  (fazni kut) je veličina koju ima kut sinusne funkcije u trenutku  $t=0$ . Početni kut određuje pomak nultočke sinusne funkcije od ishodišta. Sinusna funkcija s kutem  $\alpha_0=0$ , ima nultočku u ishodištu i naziva se *čista* sinusna funkcija.

**Efektivna vrijednost  $U$**  sinusoidnog izmjeničnog napona (ili struje) je ona vrijednost koju bi trebao imati istosmjerni napon (ili struja) da na istom otporu  $R$  stvara jednaku snagu  $P$ . Efektivna vrijednost sinusoidnog napona ili struje je  $\sqrt{2}$  puta manja od maksimalne vrijednosti.

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

**Pomak u fazi  $\varphi$**  između dviju sinusoidnih veličina (iste frekvencije) jednak je razlici njihovih početnih (faznih) kuteva. Npr., ako je (u jednačbi lijevo)  $\alpha_u$  početni kut napona te  $\alpha_i$  početni kut struje u nekom krugu,  $\varphi$  predstavlja fazni pomak struje prema naponu.

$$\varphi = \alpha_u - \alpha_i$$

**Značajke sinusne funkcije:**  $\sin(\pi/2)=1$   $\sin(3\pi/2)=-1$   $\sin(0+k\pi)=0$   $\sin(a+k2\pi)=\sin(a)$  ( $k \in \mathbb{N}$ );  
 $\sin(a+\pi/2)=\cos(a)$   $\sin(a)=\cos(a-\pi/2)$   $\sin(a-\pi/2)=-\cos(a)$   $\sin(a)=-\cos(a+\pi/2)$

**Zbroj (i razlika)** dviju sinusnih funkcija iste frekvencije je sinusna funkcija (iste frekvencije).

**Derivacija** sinusne funkcije daje sinusnu funkciju iste frekvencije.

$$\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cdot \cos(\omega t) = \omega \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

**Integral** sinusne funkcije daje sinusnu funkciju iste frekvencije.

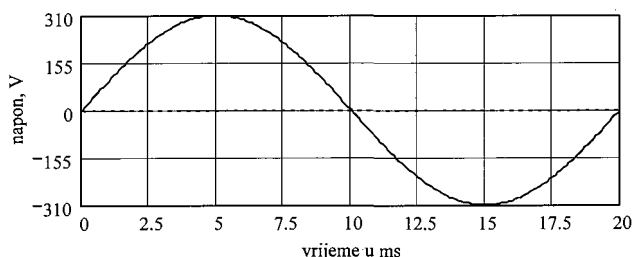
$$\int \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) = \frac{1}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

<sup>1</sup> Rudolf Heinrich Hertz (čit. *herc*) (1857-1894)

## PRIMJERI VI.1

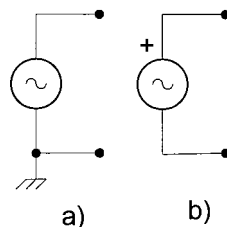
**VI.1-P1.** Koliki su: kružna frekvencija, frekvencija, perioda, amplituda, efektivna vrijednost i početni fazni kut izmjeničnog napona čija je vremenska promjena opisana izrazom:  $u(t)=310 \cdot \sin(314 \cdot t)$  V. Nacrtajte vremensku funkciju (graf) ovog napona za interval od  $t=0$  do  $t=0,02$  s.

**Rješenje:** Na slici je prikazan graf ove periodičke funkcije. Perioda  $T$  je 20 ms. To znači da cijela sinusoida u ovom slučaju traje 20 ms nakon čega se ponavlja.



Sinusna funkcija u jednoj periodi ima jedan pozitivan i jedan negativan maksimum. Iznos tog maksimuma naziva se *amplituda*. ( $U_m=310$  V) Efektivna vrijednost periodički promjenjivog napona je ona vrijednost stalnog napona na koji bi trebalo priključiti neki otpornik pa da se stvori isti učinak (toplina) kao kad je otpornik priključen na taj promjenjivi napon. Pokazuje se da za sinusni napon vrijedi:  $U=U_m/\sqrt{2}$ . U ovom slučaju je  $U=220$  V \*

Napon u određenom trenutku naziva se *trenutačna (momentalna) vrijednost*. U odnosu na referentnu točku ta vrijednost može biti pozitivna ili negativna. Na slici a) i b) prikazan je sinusni izvor napona. Donja stezaljka je referentna (slika a). U trenutku  $t=0,005$  s gornja stezaljka je pozitivna (+310V), a npr. u trenutku  $t=0,015$  s gornja priključnica će biti negativna (-310 V). Umjesto označavanja referentne priključnice koristimo oznaku + (slika b) koja zapravo znači da je ona druga priključnica referentna.



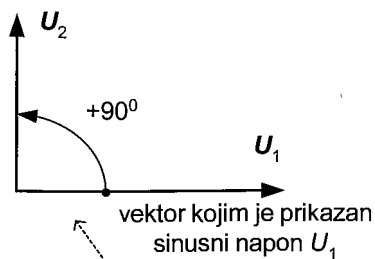
Trajanje jedne periode označavamo slovom  $T$ . U našem slučaju  $T=20$  ms. Broj perioda u jednoj sekundi naziva se frekvencija koju označavamo slovom  $f$ . Jedinica za frekvenciju je Herc (Hz). Dobivamo da je  $f=1/T=50$  Hz. Osim frekvencije  $f$  uveden je pojam kružne frekvencije. Sinusna funkcija je na neki način povezana sa kružnim gibanjem. Jedan okret u sekundi znači da je opisan puni kut od  $2\pi$  radijana. Kružna frekvencija bi bila  $2\pi$  rad/s ili jednostavnije  $s^{-1}$ . Dakle, da bi dobili kružnu frekvenciju moramo pomnožiti frekvenciju sa  $2\pi$ . U našem slučaju  $\omega=2\pi \cdot f=314$   $s^{-1}$ .

Zadana sinusoida ima u trenutku  $t=0$  **vrijednost nula i trend porasta**. Vodimo računa da je to samo jedan poseban oblik sinusoidne funkcije koji možemo nazvati "čista sinusoida". Neke sinusoidne funkcije imaju početni fazni kut. Početni fazni kut kao i fazni odnosi između pojedinih sinusoidnih funkcija lako se zapažaju, ako sinusoidne funkcije prikazemo vektorima ili kompleksnim brojevima.

\*Napomena: kod izračunavanja u izmjeničnim krugovima se efektivne vrijednosti označavaju bez indeksa ef, a za maksimalne vrijednosti se koristi indeks m.

Npr.  $I=3$  A znači da je efektivna vrijednost te sinusoidne struje 3 A, a  $I_m=4,23$  A znači da je amplituda te struje 4,23 A. Kod drugih valnih oblika se efektivna vrijednost struje označava ovako:  $I_{ef}$ .

**V.1-P2.** Odredite koji od napona  $U_1$  i  $U_2$  prikazanih vektorima prethodi u fazi onom drugom za  $90^\circ$ . Koliki je vremenski razmak između njihovih maksimuma, ako je frekvencija 50 Hz?



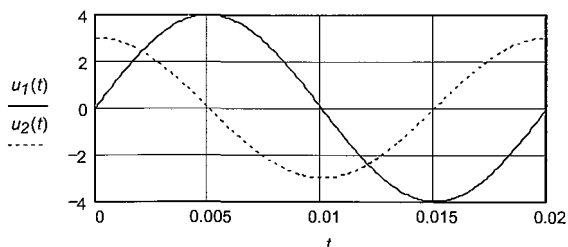
**Rješenje:** Sinusodne veličine (izmjenični napon i struju) možemo prikazivati vektorima. Time se znatno pojednostavljuje proračun struja i napona u strujnim krugovima izmjenične struje. Razvijene su tzv. simboličke metode u kojima se umjesto vremenskim funkcijama barata vektorima i vektorskim prikazima. Važan je pojam početnog faznog kuta sinusne veličine kao i međusobnog faznog kuta dviju sinusnih veličina. Uzimamo da vektor koji je nacrtan u smjeru pozitivne x-osi ima početni fazni kut nula. Pozitivne kutove mjerimo u smjeru obrnutom od kretanja kazaljke sata, a negativne u smjeru kretanja kazaljke sata. Kuteve izražavamo u radijanima ili u stupnjevima. Puni kut ima 360 stupnjeva odnosno  $2\pi$  radijana. Množenjem kuta u radijanima i polumjera dobivamo duljinu kružnog luka. Radijane pretvaramo u stupnjeve množenjem sa  $360/2\pi=57,3^\circ$ .

Napon  $U_1$  ima početni fazni kut nula, a napon  $U_2$  ima početni fazni kut  $90^\circ$  ili  $\pi/2$  radijana. Napon  $U_2$  fazno prethodi naponu  $U_1$  za  $90^\circ$ .

Pretpostavimo da su amplitude napona 4 odnosno 3 V i da je kružna frekvencija  $314 \text{ s}^{-1}$ . Vremenske funkcije ovih napona izgledaju ovako:

$$u_1(t) = 4 \cdot \sin(314 \cdot t) \quad u_2(t) = 3 \cdot \sin\left(314 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Strogo (matematički) uzevši početni fazni kut bi se trebao u vremensku funkciju sinusoide uvrštavati u radijanima (umnožak  $\omega \cdot t$  daje radijane). Ponekada, ako ne mislimo računati momentalne vrijednosti, taj kut napišemo u stupnjevima, jer lakše povezujemo tako napisan kut sa položajem vektora u ravнини. Npr. ako je kut 2,1 rad možemo napisati  $310 \cdot \sin(\omega t + 2,1)$  V ili  $310 \sin(\omega t + 120^\circ)$  V. U drugom slučaju kutomjerom lako pozicioniramo vektor tog napona.



Sinusoida napona  $u_1$  ima početni fazni kut nula i naziva se «čista sinusoida», dok je početni fazni kut sinusoida napona  $u_2$  jednak  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ). Ovu sinusoidnu funkciju nazivamo «čista» kosinusoida. Očito je da sinusoida napona  $u_2$  ranije ima maksimum i to za 5 ms odnosno za  $\pi/2$  što matematički možemo izračunati ovako (pretvaranje kuta u vrijeme)

$$\omega \cdot t = \frac{\pi}{2} \quad t = 0.5 \cdot \frac{\pi}{\omega} \quad t = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

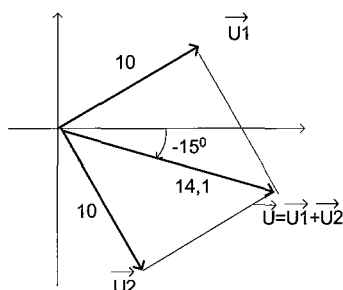
Koristeći funkciju *sinus* odnosno *kosinus* te početni fazni kut (pozitivan ili negativan) možemo isti sinusoidni napon izraziti na više načina!

**Pitanje:** kako bi napisali matematičku funkciju za vektor napona koji ima smjer  $-x$  osi.

**Odgovor:**  $-U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$  ili  $U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi)$  ili  $U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \pi/2)$  ili ..... (dopišite još neke mogućnosti).

**VI.1-P3.** Dva naponska sinusna izvora spojena su serijski. Odredite ukupan napon spoja  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$  pomoću vektorskog prikaza.

Zadano je:  $u_1(t) = 10 \sin(\omega t + \pi/6)$  V     $u_2(t) = 10 \sin(\omega t - \pi/3)$  V



**Rješenje:** nacrtamo u mjerilu vektore napona koje zbrojimo po pravilu zbrajanja vektora. Odredimo duljinu rezultante i početni fazni kut. Nakon toga napišemo vremensku funkciju napona:

$$u(t) = 14,1 \sin(\omega \cdot t - \pi/12)$$
 V

Prikazom napona pomoću vektora «zaobilazimo» komplicirana računanja pomoću trigonometrijskih formula (pogledati u matematičkom priručniku). Da bi se uvjerili u jednostavnost «vektorske» metode pokušajte zadane napone zbrojiti «matematičkim» postupkom.

**VI.1-P4.** Napone iz prethodnog zadatka prikazite u obliku kompleksnih brojeva (fazora) i zatim «fazorskom» metodom (u kompleksnom području izračunajte ukupan napon).

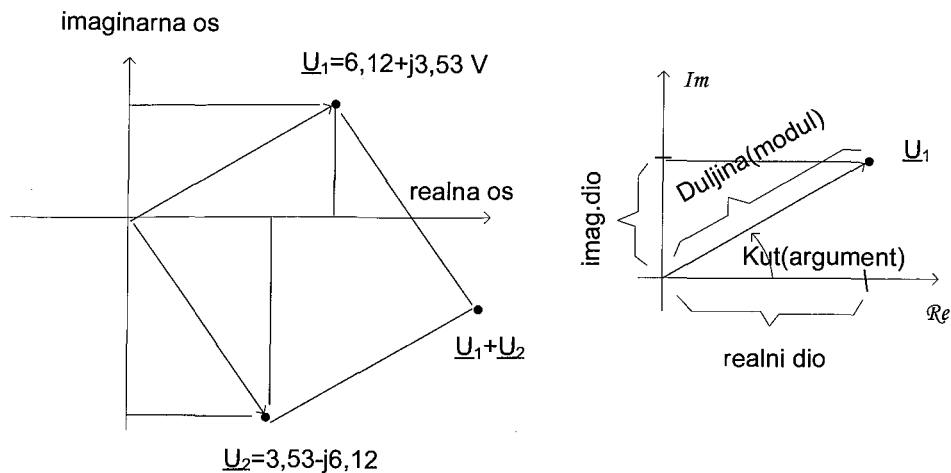
**Rješenje:** Ako smo prihvatili mogućnost prikaza sinusoidnih napona pomoću vektora neće biti osobit problem prikazati te vektore u kompleksnoj ravnini. Položaj vrha vektora u kompleksnoj ravnini je zapravo kompleksni broj koji ima realni i imaginarni dio. Time su na neki način povezani: sinusoida, vektor i kompleksni broj.

Prije prikazivanja kompleksnih brojeva koji «zamjenjuju» zadane napone treba kazati da se prikazuju efektivne, a ne maksimalne vrijednosti. Razlog tome je taj da su upravo efektivne vrijednosti one pomoću kojih izračunavamo snage i energije u našim izmjeničnim krugovima.

To znači da najprije izračunamo efektivne vrijednosti napona  $u_1$  i  $u_2$ , a zatim za njih odredimo realne i imaginarne dijelove kompleksnih brojeva koji ih «zamjenjuju».

Oba zadana napona imaju jednake maksimalne, pa time i efektivne vrijednosti iznosa 7,07 V.





Na slici gore desno predstavljene su dvije mogućnosti prikaza kompleksnog broja. Prva je tzv. *pravokutni oblik* u kojem je kompleksni broj zbroj realnog i imaginarnog dijela, a druga je tzv. *polarni oblik* u kojem se zadaje duljina (modul ili apsolutna vrijednost) te kut (argument) prema realnoj osi npr.  $\underline{U}_1 = 7,07/30^\circ$ , što čitamo: 7,07 pod kutem  $30^\circ$ . Za rješavanje zadataka treba ravnopravno baratati sa oba oblika. Isto tako čitatelj koji želi, u kompleksnom području, rješavati zadatke iz izmjeničnih krugova treba dobro poznavati sve računske operacije sa kompleksnim brojevima.

Kompleksni brojevi kojima prikazujemo struje i napone nazivaju se **fazori**.

$$\underline{U}_1 = 6,12 + j3,54 \text{ V} \quad \underline{U}_2 = 3,54 - j6,12 \text{ V} ; \quad \underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 9,66 - j2,59 \text{ V} = 10 \angle -15^\circ \text{ V}$$

Iz duljine izračunatog fazora ustanovimo da je efektivna vrijednost 10 V, a početni fazni kut  $-15^\circ$ . Efektivnu vrijednost pomnožimo sa 1,41, a kut pretvorimo u radijane. Nakon toga napišemo matematički izraz za sinusoidu napona:

$$u(t) = 14,1 \sin(\omega t - \pi/12) \text{ V}$$

Postupak dobivanja funkcije sinusoide iz kompleksnog broja je "vraćanje" u stvarnost, jer znamo da su u izmjeničnom strujnom krugu struje i naponi sinusoide, a ne kompleksni brojevi (ili vektori).

**Važno:** Fazor se odnosi na efektivnu vrijednost napona ili struje. To je kompleksni broj koji prema potrebi pišemo u algebarskom ili polarnom obliku. Za množenje i dijeljenje pogodniji je polarni oblik. Kompleksne brojeve označavamo tako da ih potcrtamo (*pažnja*, osim ovakvog, za fazore se često koristi označavanje s točkom iznad slova (npr.  $\dot{U}$ )).

*Napomena:* instrumenti za mjerenje napona i struja u izmjeničnim krugovima su napravljeni tako da mjere (pokazuju) efektivne vrijednosti. O tome više na laboratorijskim vježbama.

**ZADACI VI.1**

**VI.1-1.** Koliki su efektivna vrijednost i početni fazni kut te frekvencija i perioda napona čija je vremenska promjena opisana izrazom  $u(t)=155,5\sin(377\cdot t+\pi/6)$  V?

*Rezultat:*  $U=109,95$  V,  $\alpha_u=\pi/6$  rad =  $30^\circ$ , kružna frekvencija  $\omega=377$  s<sup>-1</sup>,  $f=60$  Hz  $T=16,6$  ms

**VI.1-2.** Izračunajte amplitudu struje  $i = I_m \sin(\omega t + \pi/4)$  A ako je u trenutku  $t=0$  trenutna vrijednost struje a) 1A b) 1,41 A. Prikažite zadanu struju vektorom.

*Rezultat:* 1,41 A: 2A

**VI.1-3.** Sinusna struja ima amplitude 1,41 A i početni fazni kut  $\alpha_i$ . Koliki je početni kut ako u trenutku  $t=0$  struja ima iznos 1 A sa trendom a) poraste b) smanjivanja?

*Rezultat:* a)  $\pi/4$  b)  $3\pi/4$ .

**VI.1-4.** U čvoru električnog kruga spojene su tri grane. Iz prve i druge u čvor ulaze struje  $i_1=1\cdot\sin\omega t$   $i_2=1\cdot\cos\omega t$  A. Kolika je struja treće grane koja izlazi iz čvora? Zadatak riješite 1) analitički i 2) pomoću vektorskog prikaza struja i 3) u kompleksnom području (pomoću fazora)

*Rezultat:*  $i_3=1,41\sin(\omega t+\pi/4)$  A

**VI.1-5.** Sinusna struja ima prvi negativni maksimum  $-5$ A u trenutku  $t=7\pi/8$  ms. Napišite izraz za vremensku promjenu struje ako je  $T=\pi$  ms.

*Rezultat:*  $i(t)=5 \cos(2000t-3\pi/4)$  ili  $i(t)=5\sin(2000t-\pi/4)$  A ili.....

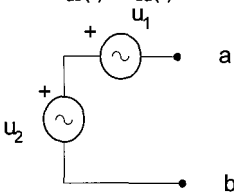
**VI.1-6.** Sinusni napon zadan je ovako:  $u(t)=10\sin(\omega t+\pi/4)$  V. Prikažite ovaj napon kao zbroj "čiste" sinusoide i kosinusoide.

*Rezultat:*  $u(t)=7.07\sin\omega t+7.07\cos\omega t$  V.

**VI.1-7.** Sinusna struja je zadana ovim izrazom  $i(t)=5\cdot\cos(10\cdot t-3\pi/4)$ . Napišite ovu struju kao sinusnu funkciju u obliku  $i(t)=I_m\sin(\omega\cdot t+\alpha_i)$ . Kolika je trenutna (momentalna) vrijednost struje u trenutku  $t=0$ ? Kolika je brzina promjene (derivacija) struje u trenutku  $t=0$ ?

*Rezultat:*  $5\cdot\sin(10\cdot t-\pi/4)$  A,  $-3,5$  A;  $35,25$  A/s

**VI.1-8.** Dva sinusna naponska izvora spojena su u seriju kako je prikazano na slici. Odredite napone  $u_{ab}(t)$  i  $u_{ba}(t)$ . Zadano je:  $u_1=5\cdot\sin(\omega t+\pi)$ ,  $u_2=5\cdot\sin(\omega t)$  V.



*Rezultat:*

$$u_{ab}=+u_2-u_1=10\sin\omega t\text{ V}$$

$$u_{ba}=-u_{ab}=+u_1-u_2=-10\sin\omega t=10(\sin\omega t+\pi)\text{ V}$$

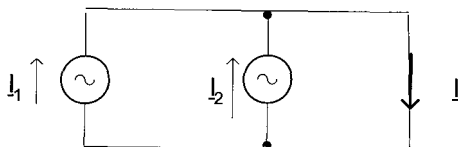
**VI.1-9.** Zadan je fazor struje  $\underline{I}=12+j12$  A. a) napišite fazor u polarnom obliku b) odredite realni i imaginarni dio ovog kompleksnog broja c) odredite modul (iznos) i argument (kut) ovog fazora. d) Napišite vremensku funkciju struje koja odgovara zadanom fazoru.

**Rezultat:** a)  $16,97 \angle 45^\circ$  A b) realni 12 imag. 12 A c)  $16,97^\circ$ ;  $45^\circ$   
d)  $i(t)=24 \sin(\omega t+\pi/4)$  A (modul treba pomnožiti sa 1,41!)

**VI.1-10.** Napon na nekom elementu strujnog kruga sa sinusnom pobudom, izračunat je u obliku fazora a)  $\underline{U}=173+j100$  V b)  $\underline{U}=173-j100$  V. Odredite trenutačnu (momentalnu) vrijednost napona u trenutku  $t=0$ .

**Rezultat:** a) +141 V b) -141 V (trenutačna vrijednost je projekcija na imaginarnu os pomnožena sa 1,41)

**VI.1-11.** Dva sinusna strujna izvora jednake frekvencije spojena prema slici. zadana su fazorima  $\underline{I}_1=5,2 \angle 37^\circ$  A;  $\underline{I}_2=6,6 \angle 108^\circ$  A. Odredite a) fazor struje  $\underline{I}$  b) vremensku funkciju te struje.



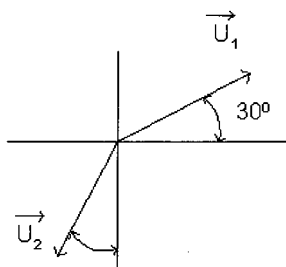
**Rezultat:** a)  $\underline{I}=9,64 \angle 77,3^\circ$  A b)  $13,6 \sin(\omega t+1,35 \text{ rad})$  A; zbog preglednosti često kut upisujemo u stupnjevima:  $13,6 \sin(\omega t+77,3^\circ)$  A

**TEST PITANJA VI.1**

- 1) Kolika je trenutna vrijednost sinusnog napona amplitude  $U_m=10$  V frekvencije 50 Hz, 1/300 sekunde nakon što je imao maksimum?  
A) 5 V B) 3,54 V C) nula D) -5 V E) -3,54 V
- 2) Koliko je vremena prošlo između pozitivnog i negativnog maksimuma kod sinusnog napona frekvencije 100 Hz?  
A) 2,5 ms B) 5 ms C) 7,5 ms D) 10 ms E) 20 ms
- 3) Kolike su perioda i kružna frekvencija sinusne struje koja ima frekvenciju 1 Hz?  
A)  $T=1$  s B)  $T=1$  ms C)  $\omega=2\pi$  rad/s D)  $\omega=3,14$  rad/s E)  $T=3,14$  s
- 4) Koji je polaritet trenutne vrijednosti sinusnog napona frekvencije 50 Hz, 15 ms nakon što je imao pozitivan maksimum?  
A) pozitivan B) negativan C) u tom času napon je nula
- 5) Koji je početni fazni kut napona frekvencije 50 Hz koji u trenutku  $t=0$  ima pozitivan iznos od  $0.866 \cdot U_m$  s trendom porasta?  
A)  $30^\circ$  B)  $45^\circ$  C)  $60^\circ$  D)  $53^\circ$
- 6) Kakav je fazni pomak između struje i napona čije su trenutne vrijednosti  $i(t)=I_m \sin \omega t$ ;  $u(t)=U_m \cos(\omega t + \pi/2)$ ?  
A) struja prethodi naponu za  $45^\circ$  B) struja prethodi naponu za  $90^\circ$   
C) struja i napon su u protufazi D) struja zaostaje iz napona za  $90^\circ$
- 7) Struja se mijenja po sinusnom zakonu  $i(t)=I_m \sin \omega t$ . Frekvencija je 50 Hz. Koliko milisekundi nakon  $t=0$  je trenutna vrijednost struje jednaka efektivnoj?  
A) 5 ms B) 2,5 ms C) 7,5 ms D) 1 ms E) 10 ms
- 8) Dva sinusna napona imaju istu amplitudu, ali različitu frekvenciju  $f$  ( $u_1$ ) i  $2f$  ( $u_2$ ). U kojem su odnosu njihove efektivne vrijednosti:  
A)  $U_1 = U_2$  B)  $U_1$  je manji od  $U_2$  C)  $U_1$  je veći od  $U_2$
- 9) Zadane su dvije sinusoidne struje koje imaju jednake amplitude (1 A) ali su fazno pomaknute za  $\pi/2$ . Kolika je amplituda zbroja tih struja?  
A) 1,41 A B) 1 A C) 0,707 A D) 2 A
- 10) Zadana su dva napona  $u_1=1 \sin \omega t$  i  $u_2=1 \cos \omega t$ . Koji od navedenih izraza predstavlja zbroj  $u_1+u_2$ ? (Oba napona su izraženi u istim jedinicama.)  
A)  $2\sin(\omega t + \pi/2)$  B)  $1,41\sin(\omega t + \pi/4)$  C)  $2,82\sin(\omega t - \pi/4)$  D)  $1\sin(\omega t + \pi/4)$
- 11) Dva sinusna napona imaju jednake amplitude (10 V), ali su fazno pomaknuta za 60 stupnjeva. Kolika je amplituda njihove razlike?  
A) 7,07 V B) 14,1 V C) nula D) 10 V E) 5 V
- 12) Napon je zadan izrazom  $u(t)=U_m \cdot \cos(\omega t)$ . Koji početni kut (prema +x osi) ima vektor kojim prikazujemo ovaj napon?  
A)  $+\pi/2$  B)  $-\pi/2$  C)  $+\pi/4$  D)  $-\pi/4$  E) nula

13) Dva sinusoidna napona prikazana su vektorima. Odredite točne odgovore glede njihovog faznog odnosa:

- A)  $U_1$  prethodi  $U_2$  za  $210^\circ$   
 B)  $U_2$  prethodi  $U_1$  za  $210^\circ$   
 C)  $U_1$  prethodi  $U_2$  za  $150^\circ$   
 D)  $U_2$  zaostaje  $U_1$  za  $210^\circ$   
 E)  $U_2$  zaostaje  $U_1$  za  $150^\circ$



14) Odredite X i Y komponente vektora koji prikazuje napon, a ima duljinu 10V i zatvara kut od  $120^\circ$  prema pozitivnoj x-osi.

- A) X komponenta je -5 V; B) X komponenta je +5V;  
 C) Y komponenta je 8,66V; D) Y komponenta je 5 V;  
 E) X komponenta je -8,66 V

15) Zadan je napon  $10\sin(\omega t - \pi/4)$ . Koji od navedenih izraza predstavlja fazor tog napona?

- A)  $10\angle 30^\circ$  B)  $14,1\angle -45^\circ$  C)  $7,07\angle -45^\circ$  D)  $7,07\angle 45^\circ$  E)  $10\angle -45^\circ$

16) Fazor struje je  $\underline{I} = 2 - j2$ . Kolika je amplituda te sinusne struje?

- A) 2 A B) 4 A C) 2,82 A D) 1,41 A

17) Struja je prikazana fazorom  $\underline{I} = -2 + 2j$ . Kolika je momentalna vrijednost te struje u trenutku  $t = \text{nula}$ ?

- A) 2 A B) 4 A C) 2,82 A D) nula E) 3 A

18) Ako kompleksni broj  $(1+j)$  podijelimo sa  $(1-j)$  dobivamo: ( $j$  je imaginarna jedinica)

- A) 1 B) -1 C)  $j$  D)  $-j$  E) 1,41

19) Zadan je fazor napona  $\underline{U} = -4 + j4$  V. Odredite vremensku funkciju koja odgovara tom fazoru:

- A)  $5,64 \sin(\omega t + 135^\circ)$  V; B)  $5,64 \sin(\omega t + 45^\circ)$  V; C)  $5,64 \sin(\omega t - 45^\circ)$  V;  
 D)  $8 \sin(\omega t + 135^\circ)$  V E)  $8 \sin(\omega t - 45^\circ)$  V.

20) Zadan je fazor napona u kompleksnom obliku  $\underline{U} = 10\angle 120^\circ$ . Odredite realni i imaginarni dio tog fazora.

- A) realni dio je 5 V; B) realni dio je -5 V; C) imaginarni dio je 8,66j V;  
 D) imaginarni dio je 8,66 V; E) imaginarni dio je -8,66 V.

### Odgovori na test pitanja VI.1

1.A; 2.B; 3.AC; 4.C; 5.C; 6.C; 7.B; 8.A; 9.A; 10.B; 11.D; 12.A; 13.BCE; 14.AC; 15.C;  
 16.B; 17.C; 18.C; 19.D; 20.BD;

## VI.2. NAČELA RJEŠAVANJA KRUGOVA IZMJENIČNE STRUJE

### OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

**Veza sinusoide  $u(t)$  i kompleksnog broja  $\underline{u}$  (rotirajući vektor)  $\underline{U}_m$  je mirujući vektor maks. vrijednosti).**

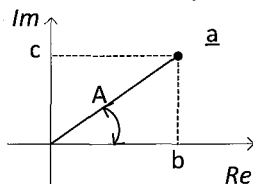
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha_u) = \text{Im}\{\underline{u}\} \quad \underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \alpha_u)} = U_m e^{j\alpha_u} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \underline{U}_m = U_m e^{j\alpha_u}$$

**Fazor  $\underline{U}$**  (mirujući vektor efektivne vrijednosti) je kompleksni broj koji je  $\sqrt{2}$  puta manji od mirujućeg vektora maksimalne vrijednosti  $\underline{U}_m$ . Iznos (modul) fazora  $\underline{U} = \frac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\alpha_u} = U e^{j\alpha_u}$  jednak je efektivnoj vrijednosti napona  $U$ , dok mu je kut (argument) jednak početnom kutu  $\alpha_u$ .

**Imaginarna jedinica  $j$**  označava *imaginarni broj* (koji predstavlja drugi korijen iz nekog negativnog realnog broja), a jednaka je drugom korijenu iz broja  $-1$ .

$$j = \sqrt{-1}$$

**Kompleksni broj** je broj složen od realnog i imaginarnog broja, a može se predstaviti točkom u *kompleksnoj ravnini* koja je određena pravokutnim koordinatnim sustavom na čijoj vodoravnoj osi su realni brojevi (realna os) dok su na uspravnoj osi imaginarni brojevi (imaginarna os). Kompleksne brojeve označavamo podcrtano, a na slici je prikaz kompleksnog broja  $\underline{a}$  u kompleksnoj ravnini.



**Algebarski (pravokutni) oblik** kompleksnog broja je prikaz kompleksnog broja ( $\underline{a}$ ) pomoću njegovog realnog dijela ( $b$ ) i imaginarnog dijela ( $c$ ) kao koordinata točke (kojom se broj predstavlja) u pravokutnom koordinatnom sustavu kompleksne ravnine.

$$\begin{aligned} \underline{a} &= b + jc = \\ &= \text{Re}\{\underline{a}\} + j \text{Im}\{\underline{a}\} \end{aligned}$$

**Eksponencijalni oblik** kompleksnog broja je prikaz kompleksnog broja ( $\underline{a}$ ) pomoću iznosa (modula) kompleksnog broja ( $A$ ) i kuta (argumenta) kompleksnog broja ( $\alpha$ ).

$$\underline{a} = A e^{j\alpha}$$

**Polarni oblik** kompleksnog broja je (najkraći) prikaz kompleksnog broja ( $\underline{a}$ ) pomoću polarnih koordinata točke kojom se broj predstavlja, a to su duljina spojnice točke s ishodištem, što je iznos (modul) kompleksnog broja ( $A$ ) i kuta koji ta spojnica čini s pozitivnim dijelom vodoravne osi, što je kut (argument) kompleksnog broja ( $\alpha$ ).

$$\underline{a} = A \angle \alpha$$

**Veze parametara** polarnog oblika ( $A$  i  $\alpha$ ) i pravokutnog oblika kompleksnog broja ( $\underline{a}$ ):

$$\text{Re}\{\underline{a}\} = A \cos \alpha \quad \text{Im}\{\underline{a}\} = A \sin \alpha \quad A = \sqrt{\text{Re}\{\underline{a}\}^2 + \text{Im}\{\underline{a}\}^2} \quad \alpha = \arctan \frac{\text{Im}\{\underline{a}\}}{\text{Re}\{\underline{a}\}}$$

**Zbrajanje** kompleksnih brojeva obavlja se (s brojevima u algebarskom obliku) tako da se posebno zbroje realni, a posebno imaginarni dijelovi, pa zbroj realnih dijelova pribrojnika daje realni dio zbroja, dok zbroj imaginarnih dijelova pribrojnika daje imaginarni dio zbroja.

$$\underline{a1} + \underline{a2} = [\text{Re}\{\underline{a1}\} + \text{Re}\{\underline{a2}\}] + j [\text{Im}\{\underline{a1}\} + \text{Im}\{\underline{a2}\}]$$

**Oduzimanje** kompleksnih brojeva obavlja se (s brojevima u algebarskom obliku) tako da se posebno oduzmu realni, a posebno imaginarni dijelovi, pa razlika realnih dijelova brojeva daje realni dio razlike, dok razlika imaginarnih dijelova brojeva daje imaginarni dio razlike.

$$\underline{a1} - \underline{a2} = [\text{Re}\{\underline{a1}\} - \text{Re}\{\underline{a2}\}] + j [\text{Im}\{\underline{a1}\} - \text{Im}\{\underline{a2}\}]$$

**Množenje** kompleksnih brojeva kao rezultat daje kompleksni broj, čiji iznos predstavlja umnožak iznosa brojeva, dok njegov kut predstavlja zbroj kuteva kompleksnih brojeva koji se množe.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (A \angle \alpha)(B \angle \beta) = (A \cdot B) \angle (\alpha + \beta)$$

**Dijeljenje** kompleksnih brojeva kao rezultat daje kompleksni broj, čiji iznos predstavlja omjer iznosa brojeva, dok njegov kut predstavlja razliku kuteva kompleksnih brojeva koji se množe.

$$\frac{\underline{a}}{\underline{b}} = \frac{A \angle \alpha}{B \angle \beta} = \frac{A}{B} \angle (\alpha - \beta)$$

**Deriviranje** kompleksnog broja (po kutu) obavlja se tako da se broj pomnoži s imaginarnom jedinicom (j) što kao rezultat daje smanjenje kuta kompleksnog broja za  $\pi/2$  (ili  $90^\circ$ ).

$$\frac{d(\underline{a})}{d\alpha} = j\underline{a} = A \angle (\alpha + \frac{\pi}{2})$$

**Integriranje** kompleksnog broja (po kutu) obavlja se tako da se broj podijeli s imaginarnom jedinicom (j) što kao rezultat daje povećanje kuta kompleksnog broja za  $\pi/2$  (ili  $90^\circ$ ).

$$\int \underline{a} d\alpha = \frac{1}{j} \underline{a} = A \angle (\alpha - \frac{\pi}{2})$$

**Impedancija  $\underline{Z}$**  je kompleksni broj koji predstavlja omjer kompleksnih izraza napona i struje nekog elementa (ili spoja). Iznos impedancije  $Z$  jednak je omjeru iznosa napona  $U$  i struje  $I$ , dok je kut impedancije  $\varphi$  jednak razlici (početnih) kuteva napona i struje.  $\varphi (= \alpha_u - \alpha_i)$  pokazuje fazni pomak između struje i napona na impedanciji.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} \angle (\alpha_u - \alpha_i) = Z \angle \varphi$$

**Admitancija  $\underline{Y}$**  je kompleksni broj koji predstavlja omjer kompleksnih izraza struje i napona nekog elementa (ili spoja). Iznos admitancije  $Y$  jednak je omjeru iznosa struje  $I$  i napona  $U$ , dok je kut admitancije  $\varphi_Y$  jednak razlici (početnih) kuteva struje i napona ( $\varphi_Y = \alpha_i - \alpha_u$ ). Admitancija je recipročna vrijednost impedancije.

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U} \angle (\alpha_i - \alpha_u) = Y \angle \varphi_Y$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad Y = \frac{1}{Z} \quad \varphi_Y = -\varphi$$

## PRIMJERI VI.2

**VI.2-P1.** Otpornik od  $10 \Omega$  priključimo najprije na istosmjerni izvor (akumulator) od 12 V, a zatim na sinusoidan izvor (transformator) koji ima maksimalnu vrijednost napona 17 V i frekvenciju od 50 Hz. Koliko se topline razvije na otporniku kroz vrijeme od 1 minute u slučaju a) i u slučaju b)?

**Rješenje:** U prvom slučaju kroz otpornik prolazi istosmjerna struja od 1,2 A.

Snaga je  $P \cdot R = 14,4 \text{ W}$ . Energija će biti  $14,4 \cdot 60 = 864 \text{ Js}$ .

Treba primjetiti da je snaga konstantna tj. pritjecanje energije u otpornik ima čitavo vrijeme jednaki intenzitet.

U drugom slučaju, kroz otpornik prolazi vremenski promjenjiva struja. Ta struja ima amplitudu  $I_m = U_m / R = 1,7 \text{ A}$ . Za izračunavanje snage i energije, međutim, mjerodavna je *efektivna vrijednost* struje koja će biti  $I = 1,7 / 1,41 = 1,2 \text{ A}$ . Prema tome je energija pretvorena u toplinu jednaka kao u slučaju a) tj. 864 J. Ipak postoji važna razlika. U ovom slučaju snaga nije vremenski konstantna tj. intenzitet pretvorbe energije se mijenja. Snaga koju smo izračunali je zapravo srednja vrijednost trenutne snage.

*Primjer:* pretpostavimo da je otpornik zapravo žarna nit žarulje. Kod priključka na izmjenični napon vrlo niske frekvencije (npr.  $16 \frac{2}{3} \text{ Hz}$ , kao što je bilo kod nekih željeznica) moglo bi se vidjeti kako svijetlo žarulje treperi. Treba još kazati da se to neće primjećivati kada je frekvencija napona dovoljno velika (npr. 50 Hz). Zašto? .

**VI.2-P2.** Svitak induktiviteta  $L$  priključen je na napon  $u(t)=311\sin(314\cdot t)$  V, pri čemu je izmjerena efektivna vrijednost struje 8,8 A. Koliki je induktivitet?

Zadano:  $U = 220$  V  $\omega = 314$  s<sup>-1</sup>  $I = 8.8$  A

**Rješenje:** Odnos napona i struje i ovdje ima karakter "neko" otpora. To nije omski nego induktivni otpor koji je ovisan o frekvenciji.

$$X_L = \frac{U}{I} \quad X_L = 25 \Omega \quad X_L = \omega \cdot L \quad L = \frac{X_L}{\omega} \quad L = 0.08 \text{ H}$$

Na temelju mjerenja struje i napona nekog nepoznatog elementa zatvorenog "u kutiji" ne bismo mogli ustanoviti karakter njegovog otpora. Tek kada ustanovimo da struja zaostaje za naponom za 90° stupnjeva znamo da se radi o induktivitetu.

Postoji i druga mogućnost, a ta je da "snimimo" ovisnost struje o frekvenciji, pa na temelju toga (mijenja li se otpor s frekvencijom i kako) zaključimo o kojem se elementu radi.

Otpor nekog dvopola (zatvorenog u „crnoj“ kutiji) koji određujemo na temelju mjerenja struje i napona nazivamo *prividni* otpor ili *impedancija*. U općem slučaju dvopol u kutiji može biti i kombinacija osnovnih elemenata ( $R$ ,  $L$  i  $C$ ) npr. serijski spoj otpornika i kondenzatora i sl. Glede odnosa napona i struje i u tom slučaju dobivamo neki prividni otpor, ali i fazni kut (pomak) između napona i struje, koji može biti bilo koji od -90 do +90°.

Općenito impedanciju karakteriziraju i iznos i kut.

**VI.2-P3.** Kondenzator koji ima kapacitet  $C$  je priključen na izmjenični napon koji ima amplitudu 311 V i frekvenciju 50 Hz. Odredite kapacitivan otpor. Kako on ovisi o frekvenciji? Kolika je efektivna vrijednost struje kondenzatora? U kojem je faznom odnosu struja prema naponu izvora? Zadano:  $C = 100 \cdot 10^{-6}$  F  $U_m = 311$  V  $f = 50$  Hz

**Rješenje:** Kapacitivni otpor ovisi o frekvenciji. Što je frekvencija veća taj otpor je manji.

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \quad X_C = 31.831 \Omega \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 311 \text{ V} / 1.41 = 220 \text{ V}$$

Struju računamo (kao kod "običnih" otpornika) tako da podijelimo napon s kapacitivnim

$$\text{otporom} \quad I = \frac{U}{X_C} \quad I = 6.909 \text{ A} \quad (\text{efektivna vrijednost})$$

Zamislmo da je kondenzator zatvoren u kutiji iz koje izlaze samo priključnice, tako da ne znamo što je unutra („crna kutija“). Ampermetrom izmjerimo struju, a voltmetrom napon. Odnos napona i struje ima značenje otpora, ali kako ćemo znati da li je to "običan" omski otpor ili je to kapacitivni, ili induktivni otpor? Da bismo to odredili bilo bi potrebno odrediti fazni pomak struje u odnosu na napon. Za tako nešto treba nam malo kompliciraniji instrumentarij (fazometar ili osciloskop). U ovom slučaju ustanovili bismo da *struja prethodi naponu za 90° odnosno za  $\pi/2$  radijana*.

Vremenska funkcija napona je:  $u(t) = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t)$  V

vremenska funkcija struje je:  $i(t) = I \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(314 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$  A



**ZADACI VI.2**

**VI.2-1** Otpor  $R$  priključen je na izmjenični napon čija je vremenska promjena  $u(t)=311\sin(314\cdot t)$  V. Kolika je amplituda, a kolika efektivna vrijednost struje kroz otpor? U kakvom su faznom odnosu napon na otporniku i struja  
 Zadano  $R = 100\Omega$ ,  $u(t) = 310 \cdot \sin(314 \cdot t)$  V

*Rezultat:* napon i struja su u fazi,  $I_m = 3,1$  A;  $I = 2.192$  A

**VI.2-2.** Svitak koji ima induktivitet  $L$  priključen je na izvor izmjeničnog napona stalne amplitude, a promjenjive frekvencije. Kako se promijeni efektivna vrijednost struje ako se frekvencija dvaput poveća?

*Rezultat:* Induktivni otpor raste s frekvencijom. Dva puta veća frekvencija znači dva puta veći otpor, a to povlači za sobom smanjenje struje dva puta. Matematički to izgleda ovako:

$$I(f) = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L} = \frac{U}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{1}{f}$$

Iznos struje ovisi obrnuto proporcionalno o frekvenciji.

**VI.2-3.** Svitak ima induktivitet  $0,1$  H i zanemariv (neznatan) otpor. Koliku će struju pokazati ampermetar ako svitak priključimo na izmjenični izvor napona  $220$  V i frekvencije  $50$  Hz? U kakvom su faznom odnosu napon i struja? Prikažite napon i struju vektorima. Uzmite da je napon izvora pod kutem nula (nalazi se u  $+x$  osi). Mjerilo odaberite sami, ali ga obavezno naznačite na slici. Napišite fazore (kompleksne brojeve) napona i struje s time da za početni fazni kut napona uzmete nula stupnjeva.

*Rezultat:*  $7$  A; struja fazno zaostaje iza napona za  $\pi/2$ , odnosno napon fazno prethodi struji za  $\pi/2$ . Fazori su:  $\underline{U} = 220 \angle 0^\circ$  V;  $\underline{I} = 7 \angle -90^\circ$  A. Induktivni otpor u kompleksnom području je  $\underline{U} / \underline{I} = j 31,4 \text{ A} = j \omega L$

**VI.2-4.** Struja i napon nekog dvopola su zadani ovako:  $u(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 0,5\pi)$  i  $i(t) = 1\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + 0,5\pi)$ . Ustanovite o kakvom se dvopolu radi (otporu, svitku ili kondenzatoru) te iznos parametra kojim ga opisujemo ako je  $\omega = 1000$  rad/s

*Rezultat:* dvopol je kondenzator koji ima kapacitivni otpor  $100 \Omega$ , a kapacitet mu je  $C = 10 \mu\text{F}$ . (struja prethodi naponu za  $\pi/2$ )

**VI.2-5.** Napišite struju i napon iz prethodnog primjera u obliku fazora, a zatim odredite prividni otpor u kompleksnom obliku (impedancija) te na temelju njega zaključite o kakvom se elementu radi.

*Rezultat:*  $\underline{U} = 100 \angle 90^\circ$  V  $\underline{I} = 1 \angle 180^\circ$  A  $\underline{Z} = \underline{U} / \underline{I} = (100 \angle 90^\circ) / (1 \angle 180^\circ) = 100 \angle -90^\circ \Omega$  (kapacitet). Napomena: prividni otpor nazivamo *impedancija* (oznaka je slovo  $Z$ ), ako se radi o elementu tipa  $C$  ili  $L$  oznaka je  $X_C$  odnosno  $X_L$  (reaktancija  $X$ ) U ovom slučaju je  $\underline{Z} = \underline{X}_C = -j 100 \Omega$ .

**VI.2-6.** Neki svitak ima neznatan omski otpor dok mu je induktivni  $X_L = 314 \Omega$ . a) Koliki je induktivitet  $L$  b) Kolika je struja u krugu ako je napon  $u = 220\sqrt{2} \cdot \sin(314t)$  V. Nacrtajte vektorski prikaz napona i struje. Napišite induktivni otpor u obliku pogodnom za primjenu fazorske metode.

*Rezultat:*  $L = X_L / \omega = 1$  H ;  $I = U / X_L = 220 / 314 = 0.7$  A (efektivno)  $i(t) = 1 \sin(314t - 0,5\pi)$  Struja zaostaje fazno iza napona za  $90^\circ$ ;  $\underline{X}_L = j 314 \Omega$

**VI.2-7.** Izračunajte struju kroz svitak iz prethodnog zadatka primjenom fazorske metode.

**Rezultat:**  $I = 220 \angle 0^\circ / j314 = -j 0,7 = 0,7 \angle -90^\circ \text{ A}$

Dobili smo fazor struje koji treba "prebaciti u realnost" i dobiti onu struju kao u prethodnom zadatku.

**Pitanje:** Što bi pokazivao ampermetar koji uključimo u strujni krug?

**Odgovor:** Ampermetar pokazuje efektivnu vrijednost tj. 0,7 A.

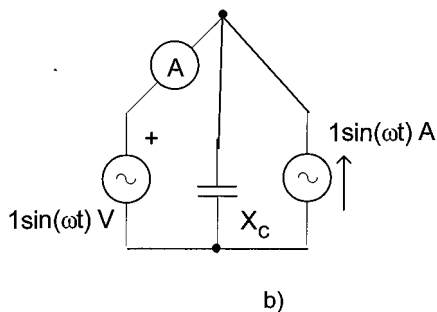
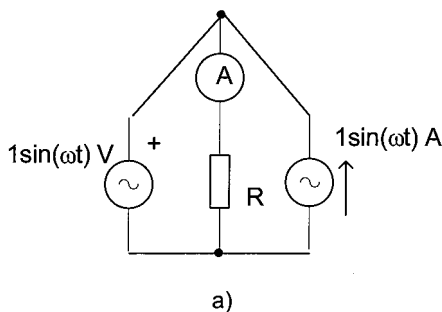
**Pažnja:** pogrešno je napisati da ampermetar pokazuje fazor (vektor) struje (kompleksni broj) ili još gore trenutnu vrijednost tj. sinusnu funkciju!! Isto vrijedi za pokazivanje volmetra!

**VI.2-8.** Struja kroz kondenzator  $C=10\mu\text{F}$  je  $1\angle 0^\circ \text{ A}$  Koliki je napon u trenutku  $t_1=5 \text{ ms}$  i u  $t_2=10 \text{ ms}$ . Frekvencija je 50 Hz. Kolika je energija kondenzatora u trenutku  $t=10 \text{ ms}$

**Rezultat:** 0V; 450V; 1 J

**VI.2-9.** Kolika je efektivna vrijednost struje kroz ampermetar u spojevima prema slici a) i b)?

**Zadano:**  $R=1\Omega$   $X_C=1\Omega$



**Rezultat:**  
a) 0,7 A  
b) 1 A

## TEST PITANJA VI.2.

- 1) Kroz kondenzator prolazi sinusoidna struja koja ima početni fazni kut nula. Napon na kondenzatoru ima početni fazni kut:  
A)  $\pi/4$  B)  $-\pi/4$  C)  $-\pi/2$  D)  $-\pi$  E) nula
- 2) Na sinusni napon priključena je (idealna) zavojnica . Koji je fazni odnos struje i tog napona u stacionarnom stanju  
A) struja fazno zaostaje za 90 stupnjeva  
B) struja fazno prethodi za 90 stupnjeva  
C) struja je u fazni sa naponom  
D) struja je u protufazi
- 3) Na sinusni napon priključen je otpornik. Koji je fazni odnos struje i tog napona u stacionarnom stanju  
A) struja fazno zaostaje za 90 stupnjeva  
B) struja fazno prethodi za 90 stupnjeva  
C) struja je u fazni sa naponom  
D) struja je u protufazi
- 4) Induktivni otpor s porastom frekvencije: \_\_\_\_\_ (upisati).
- 5) Kapacitivni otpor kod porasta frekvencije priključenog napona :  
A) raste B) pada C) ne mijenja se
- 6) Kapacitivni otpor i struja se kod porasta frekvencije priključenog napona ponašaju ovako:  
A) struja raste B) otpor pada C) otpor raste D) struja raste E) ne mijenjaju se
- 7) Induktivni otpor zavojnice na frekvenciju 2 kHz iznosi 600  $\Omega$ . Koliki je otpor na frekvenciji 500 Hz?  
A) 150  $\Omega$  B) 300  $\Omega$  C) 2400  $\Omega$  D) 600  $\Omega$
- 8) Deriviranje sinusne funkcije koja ima kružnu frekvenciju  $\omega$  u kompleksnom području se svodi na: (napomena:  $j$  je imaginarna jedinica)  
A) množenje sa  $-j$   
B) dijeljenje sa  $j\omega$   
C) množenje sa  $j\omega$   
D) množenje sa  $j$   
E) množenje sa  $\omega$
- 9) Na sinusni napon priključen je kondenzator. Koji je fazni odnos struje i tog napona?  
A) struja fazno zaostaje za 90 stupnjeva  
B) struja fazno prethodi za 90 stupnjeva  
C) struja je u fazni sa naponom  
D) struja je u protufazi

**10)** Na sinusni strujni izvor stalne amplitude, a promjenjive frekvencije priključen je kondenzator. Kako se mijenjaju efektivne vrijednosti napona i struje kondenzatora ako frekvencija raste?

- A) struja se ne mijenja
- B) napon pada
- C) napon raste
- D) struja pada
- E) napon se ne mijenja

**11)** Na naponski sinusni izvor stalne amplitude i promjenjive frekvencije spojen je induktivitet. Kako se mijenja fazni kut između napona i struje pri porastu frekvencije?

- A) ne mijenja se
- B) raste prema +90 stupnjeva
- C) raste prema -90 stupnjeva
- D) pada prema nuli

**12)** Zadan je induktivitet  $L=1$  H i kapacitet  $C=1$  F. Na kojoj kružnoj frekvenciji  $\omega$  su induktivni i kapacitivni otpori jednaki?

- A) 1 rad/s   B)  $\infty$    C) 10 rad/s   D) 100 rad/s

**13)** Zadani su otpornik  $R=1$   $\Omega$  i induktivitet  $L=1$  H. Na kojoj frekvenciji sinusnog izvora su otpori ovih elemenata jednaki?

- A) 0,16 Hz   B) 16 Hz   C) 1 Hz   D) 10 Hz   E) 0,32 Hz

**14)** Na sinusni naponski izvor promjenjive frekvencije priključen je neki element. Ustanovljeno je da struja kroz taj element raste pri porastu frekvencije. Taj element je:

- A) otpornik
- B) kondenzator
- C) zavojnica

---

#### Odgovori na test pitanja VI.2

**1.C; 2.A; 3.C; 4.raste; 5.B; 6.AB; 7.A; 8.C; 9.B; 10.AB; 11.A; 12.A; 13.A; 14.B;**

## VII.1. RLC KRUGOVI

## OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

**Impedancija otpora** (omjer fazora napona i struje na otporu) ima samo realni dio jednak otporu  $R$  (nazivamo ga i *omski otpor*).

$$\underline{Z}_R = R \angle 0^\circ = R$$

**Impedancija induktiviteta** (omjer fazora napona i struje na induktivitetu  $L$ ) je imaginarna  $\underline{Z}_L = \omega L \angle 90^\circ = j\omega L = jX_L = \underline{X}_L$  (*reaktancija  $X$* ) s kutem  $+90^\circ$  i iznosom koji je jednak  $\omega L$  (*induktivni otpor  $X_L$* ).

$$\underline{Z}_L = \omega L \angle 90^\circ = j\omega L = jX_L = \underline{X}_L$$

**Admitancija induktiviteta** (omjer fazora struje i napona na induktivitetu  $L$ ) je imaginarna  $\underline{Y}_L = \frac{1}{\omega L} \angle -90^\circ = -j\frac{1}{\omega L} = -jB_L = \underline{B}_L$  (*susceptancija  $B$* ) s kutem  $-90^\circ$  i iznosom koji je jednak  $1/(\omega L)$  (*induktivna vodljivost*).

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{\omega L} \angle -90^\circ = -j\frac{1}{\omega L} = -jB_L = \underline{B}_L$$

**Impedancija kapaciteta** (omjer fazora napona i struje na kapacitetu  $C$ ) je imaginarna  $\underline{Z}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C = \underline{X}_C$  (*reaktancija  $X$* ) s kutem  $-90^\circ$  i iznosom koji je jednak  $1/(\omega C)$  (*kapacitivni otpor  $X_C$* ).

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C = \underline{X}_C$$

**Admitancija kapaciteta** (omjer fazora struje i napona na kapacitetu  $C$ ) je imaginarna  $\underline{Y}_C = \omega C \angle 90^\circ = j\omega C = jB_C = \underline{B}_C$  (*susceptancija  $B$* ) s kutem  $+90^\circ$  i iznosom koji je jednak  $\omega C$  (*kapacitivna vodljivost  $B_C$* ).

$$\underline{Y}_C = \omega C \angle 90^\circ = j\omega C = jB_C = \underline{B}_C$$

**Impedancija serijskog RL-kruga:**  $\underline{Z} = R + j\omega L = Z \angle \varphi$   $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$   $\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$

**Impedancija serijskog RC-kruga:**  $\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} = Z \angle \varphi$   $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$   $\varphi = \arctan \frac{1}{R\omega C}$

**Admitancija paralelnog RC-kruga:**  $\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C = Y \angle \varphi_Y$   $Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$   $\varphi_Y = \arctan(R\omega C)$

**Admitancija paralelnog RL-kruga:**  $\underline{Y} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} = Y \angle \varphi_Y$   $Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$   $\varphi_Y = \arctan \frac{R}{\omega L}$

**Impedancija serijskog RLC-kruga:**  $\underline{Z} = R + \underline{X}_L + \underline{X}_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = Z \angle \varphi$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

**Admitancija paralelnog RLC-kruga:**  $\underline{Y} = G + \underline{B}_C + \underline{B}_L = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB = Y \angle \varphi_Y$

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad \varphi_Y = \arctan \frac{B}{G} = \arctan \left[ \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) R \right]$$

**Uvjet za rezonanciju** nekog kruga jest da je imaginarni dio impedancije (ili admitancije) kruga jednak 0.

$$\text{Im}\{\underline{Z}\} = 0 \quad \text{ili} \quad \text{Im}\{\underline{Y}\} = 0$$

**Rezonantna frekvencija  $\omega_0$**  (serijskog ili paralelnog) RLC-kruga računa se ovako:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

## PRIMJERI VII.1

**VII.1-P1.** Otpor  $R=75\ \Omega$  i induktivitet induktivnog otpora  $X_L=25\ \Omega$  spojeni su serijski i priključeni na izvor napona  $U=220\text{ V}$ . Odredite prividni otpor (impedanciju spoja) i napon na induktivitetu.

**Rješenje:**

$$R = 75\ \Omega$$

$$X_L = 25\ \Omega$$

$$U = 220\text{ V}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$Z = 79.057\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z}$$

$$I = 2.783\text{ A}$$

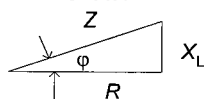
$$U_L = I \cdot X_L$$

$$U_L = 69.57\text{ V}$$

$$U_R = I \cdot R$$

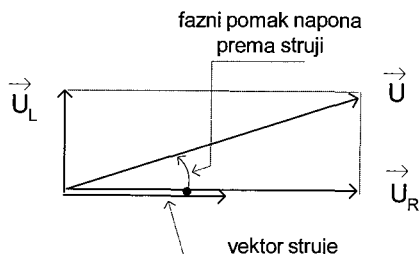
$$U_R = 208.71\text{ V}$$

Izračunali smo efektivne vrijednosti napona na induktivitetu i napon na otporu. Vidimo da suma tih efektivnih vrijednosti nije jednaka naponu izvora. Kirchhoffov zakon vrijedi za vektore kojima prikazujemo napone, a ne za efektivne vrijednosti napona. Otpore u ovom spoju možemo zorno prikazati pomoću pravokutnog trokuta. Prividni otpor je hipotenuza u tom trokutu.



Ova impedancija ima induktivni karakter. Kut  $\varphi$  je kut faznog pomaka napona u odnosu na struju. Induktivni fazni kut je pozitivan, a kapacitivan

Pretpostavimo li da je početni fazni kut struje nula, dobivamo ovakav vektorski prikaz:



Vektor struje nacrtamo u smjeru  $+x$  osi. Napon na otporniku je u fazi sa strujom pa je vektor tog napona također nacrtan u tom smjeru. Napon na induktiviteti prethodi za  $90^\circ$  struji. Ukupan napon dobiven je zbrajanjem vektora. Taj vektor (napon) fazno prethodi struji

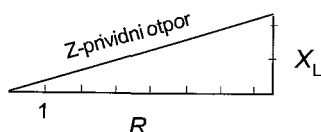
Vektori napona čine pravokutan trokut u kojem su stranice povezane Pitagorinim poučkom. Za određivanje odnosa stranice i kuteva koriste se i trigonometrijske jednačbe. Npr. kut faznog pomaka je:  $\arctg U_L/U_R$ . (napomena: tko se upušta u rješavanje izmjeničnih krugova neka ima pri ruci tzv. «trigonometrijske formule»). Ako vektorski prikaz crtamo u mjerilu moguće je tražene veličine dobiti iz crteža. Pri tom je dakako potreban kutomjer.

**VII.1-P2.** Otpor  $R$  i induktivitet  $L$  serijski su spojeni i priključeni su na izvor izmjeničnog napona  $U$  frekvencije  $f$ . Nacrtajte "trokut otpora". Odredite prividni otpor spoja, napon na  $L$  i napon na  $R$ . Zadatak riješite i fazorskom metodom.

$$\text{Zadano: } R = 75\ \Omega \quad L = 79.6 \cdot 10^{-3}\text{ H} \quad U = 220\text{ V} \quad f = 50\text{ Hz}$$

**Rješenje:** Najprije izračunamo induktivni otpor:  $X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$   $X_L = 25.007\ \Omega$

Trokut otpora nacrtan u mjerilu



$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$Z = 79.059\ \Omega$$

Struja u krugu bit će prema Ohmovom zakonu za izmjeničnu struju

$$I = \frac{U}{Z} \quad I = 2.783 \text{ A} \quad (\text{to je efektivna vrijednost struje})$$

Napon na induktivnom otpor je:  $U_L = I \cdot X_L \quad U_L = 69.588 \text{ V}$

a napon na radnom (omskom) otporu je  $U_R = I \cdot R \quad U_R = 208.704 \text{ V}$

Kod **fazorske metode** najprije odredimo induktivni otpor u kompleksnom području tako da običan induktivni otpor pomnožimo sa  $j$  (imaginarnu jedinicu u elektrotehnici označavamo s  $j$ , zašto?)  $X_L = j \cdot \omega L = j25 \text{ oma}$ , a nakon toga impedanciju serijskog RL spoja tako da zbrojimo radni i induktivni otpor  $Z = R + j\omega L = 75 + j25 \Omega$ . Treba primjetiti da je ovaj postupak formalno jednak kao zbrajanje dvaju otpora u istosmjernim krugovima.

Fazor struje je  $I = \frac{U}{Z} = \frac{220 \angle 0}{75 + j25}$ . Treba podijeliti dva kompleksna broja i dobiti:  $I = 2.65 - j0.88 \text{ A} = 2.78 \angle -18.4^\circ \text{ A}$ . Iz dobivenog fazora struje odmah vidimo kolika je efektivna vrijednost i fazni kut struje. Uočavamo veliku prednost "fazorske" metode, jer formalno postupamo jednako kao kod otporničkih mreža sa istosmjernom pobudom. Jedina je razlika što računamo sa kompleksnim brojevima. Rezultat treba uvijek "interpretirati" u realnom području. Za vježbu izračunajte napone na  $R$  i na  $L$ .

ovako:  $U_R = I \cdot R$ ,  $U_L = I \cdot X_L$ .

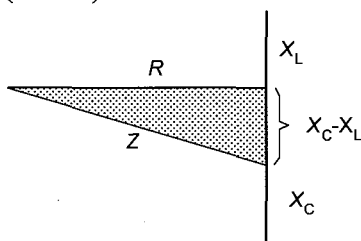
*Napomena:* Pažljivi čitatelj će primijetiti važnu činjenicu: suma efektivnih vrijednosti padova napona NIJE jednaka naponu izvora. Isto tako će zaključiti da Kirchhoffove zakone kod izmjeničnih krugova treba primjenjivati u vektorskom ili fazorskom obliku.

**VII.1-P3.** Na izvor izmjeničnog napona frekvencije 50 Hz preko ampermetra je priključen serijski spoj otpora  $R$ , induktiviteta  $L$  i kondenzatora  $C$ . Ako ampermetar pokazuje 4,5A, odredite napon izvora  $U$ . Koji je fazni kut (karakter) spoja? Koliki bi trebao biti kapacitet kondenzatora da u krugu nastupi rezonancija? Koliku struju bi pokazao ampermetar kad bismo kratko spojili ploče kondenzatora?

Zadano:  $R = 47 \Omega$   $X_C = 27 \Omega$   $X_L = 13.5 \Omega$   $I = 4.5 \text{ A}$   $f = 50 \text{ Hz}$

**Rješenje:** U ovom spoju prevladava kapacitivan otpor pa je cijeli krug kapacitivnog karaktera tj. struja prethodi naponu. Fazni kut je negativan. Na slici je prikazan način crtanja trokuta otpora. Radni otpor se nacrtava kao horizontalna dužina. Induktivni kao dužina okrenuta "prema gore", a kapacitivni "prema dolje". Nakon oduzimanja kapacitivnog i induktivnog otpora, dobivamo trokut koji ima okomitu katetu okrenutu prema dolje (kapacitivno)

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad Z = 48.9 \Omega \quad U = I \cdot Z \quad U = 220.052 \text{ V}$$



Ako bi kapacitivni otpor smanjili tako da postane jednak induktivnom tada bi njihova razlika bila nula pa bi umjesto trokuta preostao samo radni otpor. Tada nastupa tzv. rezonancija. U tom slučaju je ukupna struja u fazi s naponom izvora. To bi praktički mogli postići promjenjivim kondenzatorom kojemu bi povećavali kapacitet do iznosa:

$$X_C = X_L \quad C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot X_C} \quad C = 2.358 \times 10^{-4} \text{ F}$$

Kada kratko spojimo elektrode kondenzatora, kapacitet je nula i preostaje nam serijski  $RL$  krug u kojem je prividni otpor:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad Z = 48.9 \Omega \quad I = \frac{U}{Z} \quad I = 4.5 \text{ A}$$

Zanimljivo, struja je ostala jednaka. Naime, treba primijetiti da je u ovom zadatku  $X_L$  jednak  $X_C/2$  pa je imaginarni dio impedancije ( $X$ ) jednak u oba slučaja.

Zadatak riješite i fazorskom metodom. Ukupna impedancija spoja u kompleksnom području je  $\underline{Z} = R + j \cdot X_L - j \cdot X_C$ . Struja je  $\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z}$ .

**VII.1-P4.** Radni otpor  $R=15\Omega$  i svitak induktivnog otpora  $X_L=20\Omega$  spojeni su paralelno i priključeni su na izvor izmjeničnog napona. Ako snaga na otporniku 9,6 W odredite napon i struju izvora.

$$\text{Zadano: } R = 15\Omega \quad X_L = 20\Omega \quad P = 9.6 \text{ W}$$

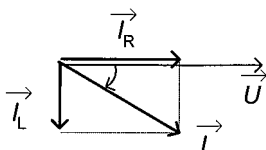
**Rješenje:** Napon na tom otporniku jednak je naponu izvora (paralelan spoj):

$$P = \frac{U^2}{R} \quad U = \sqrt{P \cdot R} \quad U = 12 \text{ V} \quad I_R = \frac{U}{R} \quad I_R = 0.8 \text{ A}$$

Taj napon vlada i na induktivitetu pa je induktivna struja:

$$I_L = \frac{U}{X_L} \quad I_L = 0.6 \text{ A}$$

Struje su fazno pomaknute za  $90^\circ$  pa je ukupna struja (pogledati vektorski prikaz):



$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} \quad I = 1 \text{ A}$$

**VII.1-P5.** Paralelno su spojene dvije impedancije  $\underline{Z}_1=2-j4$  i  $\underline{Z}_2=4+j2$ . Izračunajte ukupnu impedanciju spoja u kompleksnom području, a zatim njen iznos i kut. Nacrtajte trokut otpora.

**Rješenje:** Računamo sa formulama kao kod paralelnog spoja otpornika, ali je proračun složeniji zbog kompleksnih brojeva  $\underline{Z} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = 3-j1 \Omega$ , iznos impedancije je  $Z=3,162 \Omega$  a kut  $-18,4^\circ$  (kapacitivna impedancija)

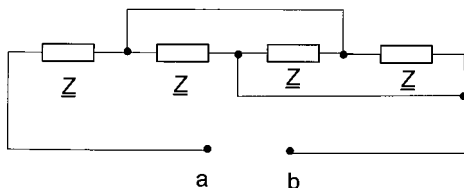
**VII.1-P6.** Spoj impedancija iz prethodnog primjera priključimo na a) strujni izvor  $I=2 \text{ A}$  b) naponski izvor od 6,325 V. Kolike su : ukupna struja te struje grana za ta dva slučaja?

**Rješenje:**

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= 2 \text{ A} \quad I_1 = I \cdot \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = 1+j1 \text{ A} \quad I_1 = 1,41 \text{ A}; \\ I_2 &= I \cdot \underline{Z}_1 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = 1-j1 \text{ A} \quad I_2 = 1,41 \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\text{b) } U = 6,325 \text{ V} \quad I = 2 \text{ A}; \quad I_1 = 1,41 \text{ A}; \quad I_2 = 1,41 \text{ A}$$

**VII.1-P7.** Četiri jednake impedancije  $\underline{Z}$  spojene su kako je prikazano slikom. Kolika je ekvivalentna impedancija  $\underline{Z}_{ab}$ . Zadano je a)  $\underline{Z}=6+j0 \Omega$  b)  $\underline{Z}=6+j6 \Omega$  c)  $\underline{Z}=0-j6 \Omega$



Rezultat:

- a)  $8+j0 \Omega$  (otpor)
- b)  $8+j8 \Omega$  (serija R i L)
- c)  $-j8 \Omega$  (kondenzator)



**Rješenje:** Kod "fazorske" metode složene spojeve formalno rješavamo jednako kao spojeve sa otpornicima (serija, paralela, most, trokut/zvijezda itd). Ovdje imamo nakon «redizajna» sheme:  $\underline{Z}$  u seriji sa paralelnim spojem tri jednake impedancije pa je  $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z} + \underline{Z}/3$ . Kompleksna impedancija je širi pojam koji uključuje i «običan» otpor kao što je u slučaju a) odnosno «čisti» kapacitet u slučaju c). **Pažnja:** za primjenu "fazorske" metode treba ponoviti osnovne **računske operacije s kompleksnim brojevima!**

**Pitanje 1.** Kolika je ukupna struja ako je spoj priključen na napon  $\underline{U} = 8 + j0 = 8/0^\circ$  V napomena: u stvarnosti je napon:  $11,28 \sin(\omega t)$  V.

Odgovor: a)  $1/0^\circ$  A; b)  $0,5 - j0,5 = 0,7/-45^\circ$  A c)  $j1 = 1/90^\circ$  A

efektivne vrijednosti struja su: 1; 0,7; 1 A, a maksimalne su 1,41 puta veće.

**Pitanje 2.** Umjesto naponskog izvora na spoj priključimo strujni, koji daje struju  $\underline{I} = 1/0^\circ$ . Koliki je napon na stezaljkama tog izvora u slučaju a), b) i c).

Odgovor:  $8/0^\circ$ , b)  $8 + j8$  V c)  $8/-90^\circ = -j8$  V. Efektivne vrijednosti napona (one koje bi pokazao voltmetar) su: 8 V; 11,28 V; 8 V.

### ZADACI VII.1

**VII.1-1.** Otpor  $R = 7,5 \Omega$  i svitak zanemariva omskog otpora spojeni su serijski i priključen na izvor napona  $U = 125$  V i  $f = 50$  Hz. Ako voltmetar (koji mjeri efektivnu vrijednost) spojen paralelno svitku pokazuje 100 V odredite induktivitet svitka i struju u krugu.

Zadano:  $R = 7,5 \Omega$   $U = 125$  V  $U_L = 100$  V  $f = 50$  Hz

Rezultat:  $L = 0,032$  H;  $I = 10$  A

**VII.1-2.** Otpor  $R = 100 \Omega$  i kapacitet  $C = 43 \mu\text{F}$  spojeni su serijski i priključeni su na napon  $U = 220$  V  $f = 50$  Hz. Odredite impedanciju spoja i napon na kapacitetu. Skicirajte vektorski prikaz.

Zadano:  $R = 100 \Omega$   $C = 43 \mu\text{F}$   $U = 220$  V  $f = 50$  Hz

Rezultat:  $Z = 124,4 \Omega$  (kapacitivno);  $U_C = 130,9$  V

**VII.1-3.** Da bi se žarulja nazivnog napona  $U_n$  i snage  $P_n$  mogla priključiti na izvor napona  $U$  frekvencije  $f$  njoj se serijski spoji kondenzator. Koliki treba biti kapacitet kondenzatora da bi žarulja normalno svijetlila (dobila nazivni napon)?

Zadano:  $U_n = 160$  V  $P_n = 40$  W  $U = 220$  V  $f = 50$  Hz

Rezultat:  $C = 5,27 \mu\text{F}$

Napomena: Na kondenzatoru ne troši se energija pa je snižavanje napona na taj način prikladnije, nego ono s otpornim djelilom napona. Nazivni napon kondenzatora mora biti veći od  $U_{Cm}$ .

**VII.1-4.** Serijski spojeni otpornik  $R = 5 \Omega$  i zavojnica  $L = 0,03$  H priključeni su na sinusoidan napon. Ako napon fazno prethodi struji za  $60^\circ$ , izračunajte frekvenciju.

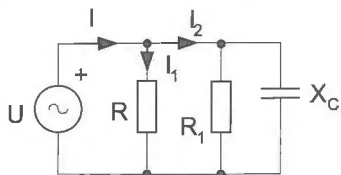
Rezultat: 46 Hz

**VII.1-5.** Serijski su spojeni  $R = 4 \Omega$   $X_L = 3 \Omega$  i  $X_C = 6 \Omega$ . Spoj je priključen na izmjenični napon  $\underline{U} = 100$  V (efektivno). Izračunajte kompleksnu impedanciju, struju i fazni pomak struje u odnosu na napon izvora.

Rezultat:  $\underline{Z} = 4 - j3 = 5/-36,9^\circ$   $\underline{I} = 20/36,9^\circ$  Struja ima efektivnu vrijednost 20 A i fazno prethodi naponu za  $36,9$  stupnjeva; spoj je kapacitivnog tipa.

**VII.1-6.** Paralelno su spojeni ovi elementi :  $R_1=1\ \Omega$   $R_2=2\ \Omega$   $X_L=1\ \Omega$   $X_{C1}=0,5\ \Omega$  i  $X_{C2}=1\ \Omega$ . Spoj je priključen na naponski izvor od 2 V. Kolika je ukupna struja? Nacrtajte vektorski (fazorski) prikaz struja.  
Rezultat:  $I=5\text{ A}$ . ✓

*ole*  
*guzin* **VII.1-7** Izračunajte napon izvora u spoju prema slici ako su izmjerene struje  $I=3\text{ A}$ ,  $I_1=2\text{ A}$ ,  $I_2=2\text{ A}$ . Otpornik  $R_1=4\ \Omega$ .



Rezultat: 1V

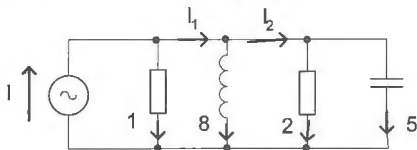
*mnice*  
*jez* **VII.1-8** Serijski su spojeni  $R=5\ \Omega$  induktivni otpor  $X_L=j8\ \Omega$  i nepoznata impedancija  $Z$ . Spoj je priključen na napon  $U=50/45^\circ\text{ V}$ . Izračunajte  $Z$  ako je fazor struje  $2,5/-15^\circ\text{ A}$ .

Rezultat:  $Z=5+j9,3\ \Omega$ 

**VII.1-9.** Serijski su spojeni otpor  $R$  induktivitet  $L=25\text{ mH}$  i kapacitet  $C=50\ \mu\text{F}$ . Spoj je priključen na napon 120 V (efektivno) kružne frekvencije 400 rad/s. Ustanovljeno je da struja prethodi naponu za  $63,4^\circ$ . Izračunajte  $R$ , napone na elementima spoja i struju u krugu. Koristite fazorsku metodu. Nacrtajte fazorski dijagram napona.

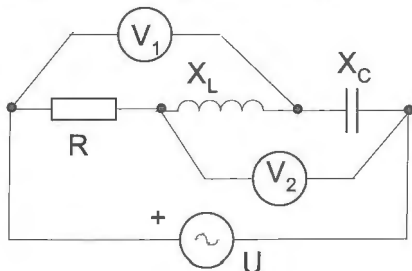
Rezultat:  $R=20\ \Omega$   $U_R=53,6\text{ V}$   $U_L=26,8\text{ V}$   $U_C=134\text{ V}$   $I=2,68\text{ A}$ 

✓ **VII.1-10.** Zadane su efektivne vrijednosti struja pojedinih paralelnih grana (u amperima). Kolike su efektivne struje:  $I, I_1, I_2$ ?



Rezultat:  
 $I=4,24\text{ A}$   
 $I_1=3,6\text{ A}$   
 $I_2=5,39\text{ A}$

*pari*  
*ali*  
*de!* **VII.1-11.** U prikazanom spoju izračunajte pokazivanja voltmetra  $V_1$  i  $V_2$ . Zadano je  $U=100\text{ V}$ ,  $R=20\ \Omega$ ,  $X_L=20\ \Omega$  i  $X_C=5\ \Omega$ . Nacrtajte fazorski (ili vektorski) dijagram.



Rezultat

 $U_1 = 113\text{ V}$  $U_2 = 60\text{ V}$ 

✓ **VII.1-12.** Na napon gradske mreže (220V/50Hz) priključen je serijski spoj otpora, zavojnice i kondenzatora. Izmjereno je :  $I=11\text{ A}$ ,  $U_L=660\text{ V}$   $U_C=500\text{ V}$ . Izračunajte koliki su parametri  $R$   $L$  i  $C$ . Kolika je amplituda napona na kondenzatoru? Koliki je fazni kut  $\varphi$ ?

Rezultat:  $R=13,7\ \Omega$   $L=0,191\text{ H}$   $C=70\ \mu\text{F}$   $U_{Cm}=705\text{ V}$   $\varphi=+46,7^\circ$  (ind.)

**VII.1-13.** Na izvor napona  $U$  i frekvencije  $\omega$ , paralelno su spojeni otpor  $R$ , kapacitet  $C$  i induktivitet  $L$ . Odredite struju izvora  $I$ .

Zadano:  $U=25\text{ V}$ ;  $\omega=100\text{ rad/s}$ ;  $R=12,5\ \Omega$ ;  $C=200\ \mu\text{F}$ ;  $L=100\text{ mH}$ .

*poz, paralel!*

**Rezultat:** fazor struje (uz početni fazni kut napona  $0^\circ$ ):  $I=2-j2\text{ A}$ ;  
efektivna vrijednost te struje:  $I=2,82\text{ A}$

**VII.1-14.** Na izvor izmjeničnog napona  $U$  serijski su spojeni kapacitet  $C$  i nepoznata impedancija  $Z$ . Uz struju  $I$ , iznosi napon na kapacitetu i impedanciji  $Z$  jednaki su iznosu napona izvora. Odredite iznos i kut impedancije  $Z$ .

Zadano:  $U_C=U_Z=U=100\text{ V}$ ;  $I=10\text{ A}$ .

**Rezultat:**  $Z=8,66+j5\ \Omega$   $Z=10\ \Omega$   $\varphi_Z=30^\circ$

**VII.1-15.** Serijski su spojeni kondenzator (kapaciteta  $C$ ) i svitak (otpora  $R$  i induktiviteta  $L$ ) i priključeni na izvor napona  $U$ . Ako je na kondenzatoru izmjeren napon  $U_C$ , a struja je u fazi s naponom izvora, odredite napon na svitku. Zadano:  $U=120\text{ V}$ ;  $U_C=160\text{ V}$ .

**Rezultat:**  $U_L=200\text{ V}$  (nacrtati vektorski prikaz)

**VII.1-16.** Svitak, priključen na napon  $U$  frekvencije  $f$ , zadan je serijskim spojem radnog otpora  $R$  i reaktivnog otpora  $X$ . Odredite parametre (radnu vodljivost  $G$  i reaktivnu vodljivost  $B$ ) nadomjesnog paralelnog spoja. Kolika je ukupna struja? Koliki su  $L_p$  i  $R_p$  u nadomjesnom paralelnom spoju? Zadano:  $U=110\text{ V}$ ;  $f=50\text{ Hz}$ ;  $R=10\ \Omega$ ;  $X=60\ \Omega$ ;

**Rezultat:**  $Z=10+j60$ ;  $Y=1/Z=0,0027-j0,016$ ;  $G=0,0027\text{ S}$   $B=-0,016\text{ S (ind.)}$   
 $I=1,808\text{ A}$ ;  $R_p=370\ \Omega$ ;  $L_p=0,196\text{ H}$

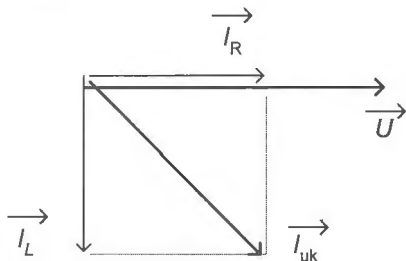
**VII.1-17.** Serijski su spojeni  $R=10\ \Omega$  i  $C=50\ \mu\text{F}$  te priključeni su na izvor promjenjive frekvencije. Izračunajte frekvenciju  $f$  na kojoj će struja prethoditi naponu za  $50^\circ$ .

**Rezultat:**  $f=267\text{ Hz}$



**VII.1-18.** Svitak  $L=0,015\text{ H}$  koji ima nezatni (zanemariv) otpor žice i otpornik  $R=620\ \Omega$  spojeni su paralelno i priključeni su na sinusni izvor napona  $U=10\text{ V}$  i promjenjive frekvencije  $f$ . Na koji iznos treba podesiti frekvenciju pa da struja kroz otpornik i svitak budu jednake. Kolike su te struje i kolika je ukupna struja? U kakvom su faznom odnosu napon izvora i ukupna struja? Nacrtajte vektorski prikaz. Vektor koji prikazuje napon izvora postavite u  $+x$  os.

**Rezultat:**  $f=6578\text{ Hz}$ ;  $I_L=I_C=16\text{ mA}$ ;  $I_{uk}=22,56\text{ mA}$ ; struja zaostaje za  $45^\circ$



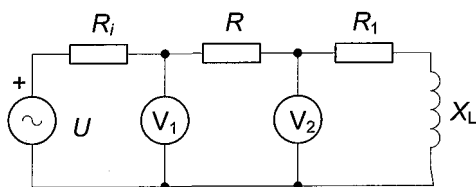
ukupna struja  
zaostaje za  $45^\circ$

**VII.1-19.** Serijski RLC-krug spojen je na izvor napona  $U$  frekvencije  $\omega$ . Ako struja prethodi naponu izvora za kut  $\varphi$ , odredite napone na elementima  $R$ ,  $L$  i  $C$ .

Zadano:  $U=12\text{ V}$ ;  $\omega=400\text{ r/s}$ ;  $L=25\text{ mH}$ ;  $C=50\text{ }\mu\text{F}$ ;  $\varphi=63,4^\circ$ .

Rezultat:  $U_R=5,4\text{ V}$ ;  $U_L=2,7\text{ V}$ ;  $U_C=13,4\text{ V}$

**VII.1-20.** U krugu prema slici odredite odnos pokazivanja voltmetara ( $U_1/U_2$ ). Koliki je napon koji mjeri voltmetar  $V_1$ ?  $U=10\text{ V}$ ,  $R_1=5\text{ }\Omega$ ,  $R=5\text{ }\Omega$ ,  $R_1=4\text{ }\Omega$ ,  $X_L=3\text{ }\Omega$



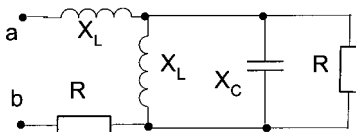
Rezultat:

$$U_1/U_2 = 1,897$$

$$U_1 = 6,626$$

**VII.1-21.** Odredite iznos i kut nadomjesne admitancije s točaka a i b prikazanog spoja.

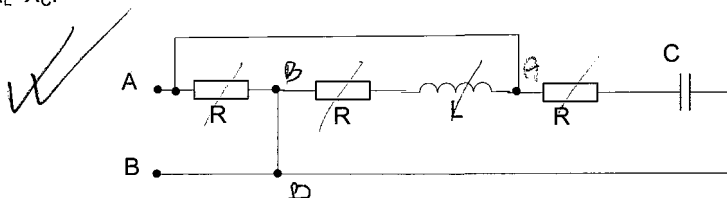
Zadano:  $R=X_L=X_C=50\text{ }\Omega$ .



Rezultat:

$$Y_{ab} = 9/-26,5^\circ\text{ mS}$$

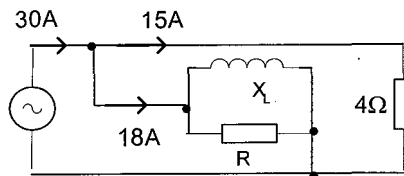
**VII.1-22.** Izračunajte impedanciju s priključnica A i B (ulazna impedancija ako je zadano  $2R=X_L=X_C$ ).



Rezultat:  $5R/7$

**VII.1-23.** U prikazanom spoju su poznate efektivne vrijednosti struja i otpor  $R_1$ . Izračunajte  $R$  i  $X_L$ .

Rezultat:  $R=5,13\text{ }\Omega$   $X_L=4,39\text{ }\Omega$

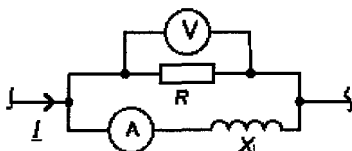


7.23. što se dešava  
kvadrati??

**TEST PITANJA VII.1.**

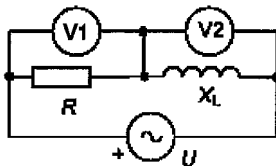
- 1) Koliki je prividni otpor serijskog spoja otpornika  $R=3\ \Omega$  i zavojnice s  $X_L=4\ \Omega$ ?  
 A)  $7\ \Omega$  B)  $5\ \Omega$  C)  $2\ \Omega$  D) nema dovoljno podataka E)  $1\ \Omega$
- 2) U serijskom R L spoju struja zaostaje iza napona za kut  $\pi/6$ . U kojem su odnosu  $R$  i  $X_L$ ?  
 A)  $R = X_L$  B)  $R$  je veći od  $X_L$   
 C)  $R$  je manji od  $X_L$  D) nema dovoljno podataka
- 3) Napon priključen na serijski spoj otpornika  $R=10\ \Omega$  i zavojnice  $X_L=10\ \Omega$  ima efektivnu vrijednost  $100\text{ V}$ . Koliki je napon na otporniku (efektivna vrijednost)  
 A)  $50\text{ V}$  B)  $100\text{ V}$  C)  $141\text{ V}$  D)  $70,7\text{ V}$
- 4) Ukupna struja ima efektivnu vrijednost  $1\text{ A}$ . Odredite pokazivanje instrumenata ako je  $R=X_L=10\ \Omega$ ?

- A)  $10\text{ V}$   
 B)  $7,07\text{ V}$   
 C)  $0,7\text{ A}$   
 D)  $1\text{ A}$   
 E)  $1,41\text{ A}$



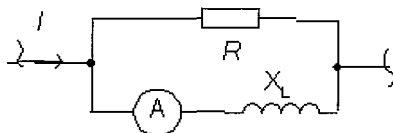
- 5) Napon izvora je  $100\text{ V}$ . Voltmetar 1 pokazuje  $86,6\text{ V}$ , a drugi voltmetar  $50\text{ V}$ . U kojem faznom odnosu je ukupna struja prema naponu izvora?

- A) struja je u fazi sa  $U$   
 B) struja predhodi za  $60^\circ$   
 C) struja predhodi za  $30^\circ$   
 D) struja zaostaje za  $60^\circ$   
 E) struja zaostaje za  $30^\circ$



- 6) U prikazanom spoju  $R=X_L=10\ \Omega$ . Ampermetar pokazuje  $1\text{ A}$ . Kolika je efektivna vrijednost ukupne struje?

- A)  $2\text{ A}$   
 B)  $1,41\text{ A}$   
 C)  $0,7\text{ A}$   
 D) nula

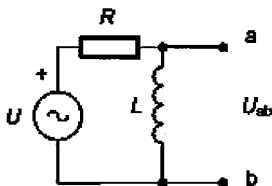


- 7) Serijski su spojeni  $R=6\ \Omega$  i zavojnica  $L=0,03\text{ H}$ . Ako struja fazno zaostaje iza napona za  $45^\circ$  izračunajte kružnu frekvenciju  $\omega$ .

- A)  $100\text{ rad/s}$  B)  $200\text{ rad/s}$  C)  $141\text{ rad/s}$  D)  $200\text{ Hz}$  E)  $100\text{ Hz}$

- 8) U kojem faznom odnosu su napon  $U_{ab}$  i napon izvora ako je  $R=X_L$ ?

- A) naponi su u fazi  
 B)  $U_{ab}$  predhodi za  $45^\circ$   
 C)  $U_{ab}$  zaostaje za  $45^\circ$   
 D) naponi su u protufazi  
 E)  $U_{ab}$  zaostaje za  $90^\circ$

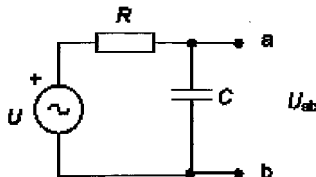


9) Paralelno su spojeni  $R=3\ \Omega$  i kondenzator sa  $X_C=3\ \Omega$ . Spoj je priključen na sinusni strujni izvor  $I=1\text{ A}$  (efektivno). Kolika je efektivna vrijednost struje kroz kondenzator?

- A) 0,5 A B) 0,707 A C) 2 A D) 1,41 A E) 1 A

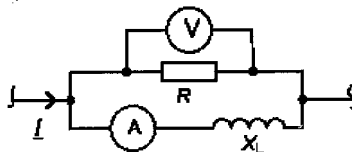
10) U kojem faznom odnosu su napon  $U_{ab}$  i napon izvora ako je  $R=1,73X_C$ ?

- A) naponi su u fazi  
B)  $U_{ab}$  predhodi za  $30^\circ$   
C)  $U_{ab}$  zaostaje za  $60^\circ$   
D)  $U_{ab}$  predhodi za  $60^\circ$   
E)  $U_{ab}$  predhodi za  $60^\circ$



11) Fazor struje  $I=1-j\text{ A}$ . Odredite pokazivanje instrumenata ako je  $R=X_L=10\ \Omega$ ?

- A) 10 V  
B) 14,1 V  
C) 20 V  
D) 1 A  
E) 1,41 A

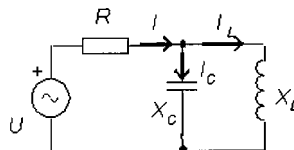


12) Impedancija  $Z=100/60^\circ$  priključena je na napon  $u(t)=100\sin(\omega t+\pi/3)$ . Struja kroz impedanciju u odnosu na napon:

- A) fazno zaostaje za  $60^\circ$ ; B) fazno predhodi za  $60^\circ$ ; C) fazno prethodi za  $120^\circ$   
D) u fazi je s naponom; E) fazno zaostaje za  $30^\circ$

13) U prikazanom spoju je  $R=X_C=X_L$ . Efektivne vrijednosti struja su:

- A)  $I=I_C=I_L \neq 0$   
B)  $I=0$   $I_C=I_L \neq 0$   
C)  $I=0$   $I_C$  je veće od  $I_L$   
D)  $I=I_C=I_L=0$

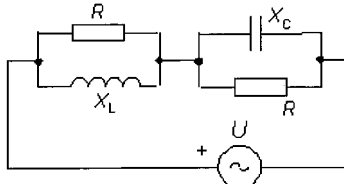


14) Odredite koji elementi u serijskom spoju imaju jednaku impedanciju kao paralelno spojeni elementi  $R=10\ \Omega$  i  $X_L=10\ \Omega$ .

- A)  $R=20\ \Omega$  i  $X_L=20\ \Omega$   
B)  $R=10\ \Omega$  i  $X_L=10\ \Omega$   
C)  $R=5\ \Omega$  i  $X_L=5\ \Omega$   
D)  $R=20\ \Omega$  i  $X_C=20\ \Omega$   
E)  $R=1\ \Omega$  i  $X_L=1\ \Omega$

15) Kolika je struja  $I_C$  ako je struja  $I_L=1\text{ A}$ ? ( $R=X_C=X_L$ )

- A) nema dovoljno podataka  
B) 1 A  
C) 0,7 A  
D) 1,41 A  
E) 2 A

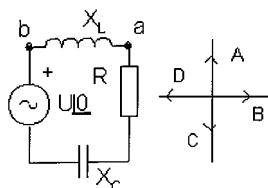


16) Serijski su spojeni otpornik, kondenzator i zavojnica za koje vrijedi:  $R=X_C=X_L$ . Odredite efektivnu vrijednost sinusnog napona na koji je spoj priključen, ako voltmetar pokazuje jednake napone na R, L i C i to 10 V?

- A) 30 V B) 14,1 V C) 10 V D) nula

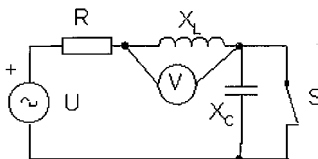
17) Koji od prikazanih vektora pokazuje napon  $U_{ab}$  ako je  $X_L > X_C$ , a napon izvora ima početni fazni kut nula?

- A) A  
B) B  
C) niti jedan  
D) C  
E) D



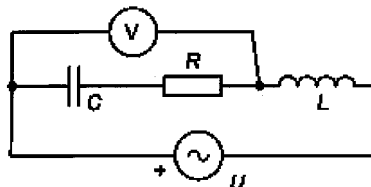
18) Kod zatvorene sklopke voltmetar pokazuje 10V. Koliko će pokazati kada sklopku otvorimo, ako je  $R=X_C=X_L$ ?

- A) 7,07 V  
B) 10 V  
C) 14,1 V  
D) 20 V  
E) 28,2 V



19) Koliko pokazuje voltmetar ako je  $R=X_L=X_C$ , a napon izvora je 100 V?

- A) nula  
B) 100 V  
C) 141 V  
D) 200 V  
E) 70,7 V



20) Paralelni RLC krug ima  $R=X_C=X_L$  i priključen je na naponski izvor. Kako se promijeni ukupna struja ako dođe do prekida u zavojnici?

- A) poveća se dva puta; B) poveća se 1,41 puta; C) ne promijeni se  
D) smanji se 1,41 puta E) smanji se dva puta.

### Odgovori na test pitanja VII.1.

1.B; 2.B; 3.D; 4.BC; 5.E; 6.B; 7.B; 8.B; 9.B; 10.C; 11.AD; 12.A; 13.B; 14.C; 15.B;  
16.C; 17.C; 18.C; 19.C; 20.B;

## VII.2. FREKVENCIJSKE OVISNOSTI

## OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

**Granične frekvencije** (donja granična frekvencija  $\omega_{g1}$  i gornja granična frekvencija  $\omega_{g2}$ ) su frekvencije na kojima se iznos impedancije RLC kruga promijeni  $\sqrt{2}$  puta u odnosu na iznos impedancije u rezonanciji (snaga se promijeni 2 puta).

**Širina frekvencijskog pojasa  $B$**  (titrajnog) RLC kruga jednaka je razlici gornje i donje granične frekvencije. Određuje propusnost (ili zapornost) RLC kruga.

$$B = \omega_{g2} - \omega_{g1}$$

**Karakteristična (valna) impedancija  $Z_0$**  (titrajnog) RLC-kruga:  $Z_0 = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$

**Faktor dobrote  $Q$**  (titrajnog) RLC kruga određuje se kao omjer otpora  $R$  i karakteristične impedancije  $Z_0$  za serijski RLC krug, ili kao omjer vodljivosti  $G$  i karakteristične admitancije  $Y_0$  za paralelni RLC krug (gdje je  $Y_0 = 1/Z_0$ ).

$$Q = \frac{R}{Z_0} \left( = \frac{G}{Y_0} \right)$$

## PRIMJERI VII.2

**VII.2-P1.** Serijski su spojeni  $R=20 \Omega$  i  $L=0,02 \text{ H}$ . Spoj je priključen na sinusni izvor napona  $U=10 \text{ V}$  promjenjive frekvencije. Napišite analitičke izraze za frekvencijski ovisne veličine kruga. Nacrtajte frekvencijsku ovisnost struje, impedancije i faznog kuta ako se frekvencija mijenja u intervalu od nula do 1000 Hz.

**Rješenje:** Ovisnost o frekvenciji u ovom slučaju proizlazi iz ovisnosti induktivnog otpora. Na niskim frekvencijama induktivni otpor je mali. Za  $f=0$  induktivni otpor je nula pa je impedancija jednaka otporu  $R$ .

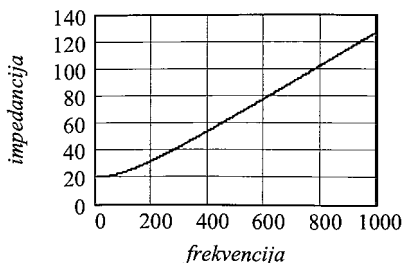
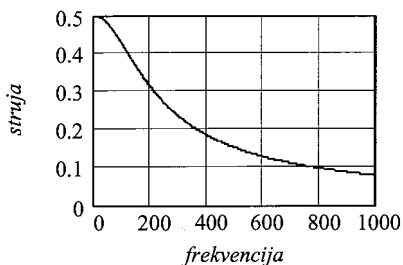
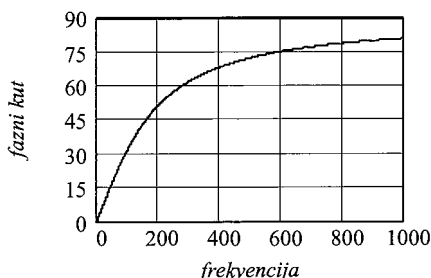
Povećanjem frekvencije raste induktivni otpor koji postaje dominantan nakon 400 Hz.

$$X_L(f) = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot f$$

$$Z(f) = \sqrt{R^2 + (2 \cdot \pi \cdot L \cdot f)^2}$$

$$I(f) = \frac{U}{Z(f)}$$

$$\varphi(f) = \arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)$$

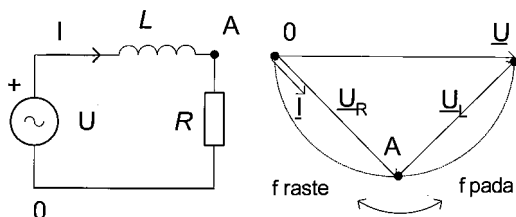




**VII.2-P2.** Izračunajte frekvenciju na kojoj fazni kut spoja iz prethodnog zadatka iznosi 45 stupnjeva. Kolika je struja na toj frekvenciji. Nacrtajte fazorski dijagram napona s time da fazor napona izvora postavite u realnu os. Kako će se pri promjeni frekvencije mijenjati taj dijagram?

**Rješenje:** Važna je frekvencija na kojoj je induktivni otpor jednak omskom, a fazni kut je  $45^\circ$ . Poseban je naziv za tu frekvenciju: *granična frekvencija*. Na graničnoj frekvenciji se struja u krugu smanji za  $\sqrt{2}$  puta. Pritom se snaga na otporniku smanji na polovinu. Zato se ponekada ta frekvencija naziva „frekvencija polovične snage“

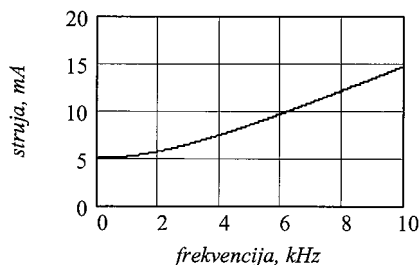
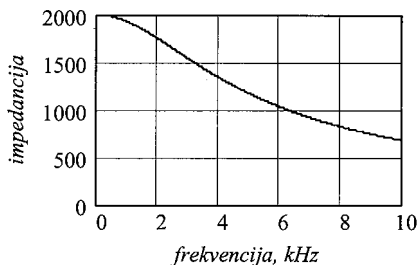
Treba dakle napisati jednakost  $R = 2\pi f L$  pa je  $f = R/2\pi L = 160 \text{ Hz}$   
 Impedancija će na toj frekvenciji biti  $Z = \sqrt{2} R$  pa je struja  $I = U/Z = 0,355 \text{ A}$



Crtanje dijagrama: Referentnu točku postavimo u ishodište. Fazor napona izvora postavimo u realnu os. Struja fazno zaostaje prema naponu izvora za  $45^\circ$  ( $\alpha_i = -45^\circ$ )

Napon na otporu u fazi je sa strujom. Napon na induktivitetu prethodi struji za  $90^\circ$ . Naponi na otporniku i induktivitetu su uvijek međusobno okomiti. Nadalje suma (vektorska) ta dva napona uvijek je jednaka naponu izvora. Zato se točka A može nalaziti samo na nacrtanoj **polukružnici**. Točka A nacrtana je za frekvenciju od 160 Hz na kojoj je fazni kut  $45^\circ$ . Međutim pri promjeni frekvencije točka A će „putovati“ po polukružnici. Na slici je označeno «kuda ide» točka A pri promjeni frekvencije. U skladu s tim mijenja se i dijagram tj. duljine i kutevi fazora napona na otporu i induktivitetu. Pitanje: gdje bi se našla točka A i koliki su naponi za  $f=0$ , a gdje za  $f=\infty$ ?

**VII.2-P3.** Paralelno su spojeni  $R=2 \text{ k}\Omega$  i kondenzator  $C=22 \text{ nF}$  i priključeni su na naponski izvor  $U=10 \text{ V}$  promjenjive frekvencije. Odredite analitičke funkcije ovisnosti impedancije i ukupne struje o frekvenciji te nacrtajte graf ovisnosti impedancije i struje o frekvenciji (za frekvencije do 10 kHz) Na kojoj frekvenciji će struje kroz R i C biti jednake



Na niskim frekvencijama kapacitivni otpor je ogroman pa je ukupna impedancija gotovo jednaka omskom otporu. Na visokim frekvencijama naprotiv kapacitivni otpor postaje sve manji imajući. Time se smanjuje impedancija, a struja počinje rasti. Ta struja je kapacitivna tj. fazni kut se približava  $-90^\circ$ . Struje su jednake na frekvenciji na kojoj su R i  $X_C$  jednaki.  $f=1/2\pi RC=3617 \text{ Hz}$  (napomena: na toj frekvenciji ja fazni kut  $-45^\circ$ )

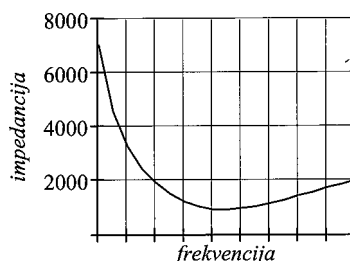
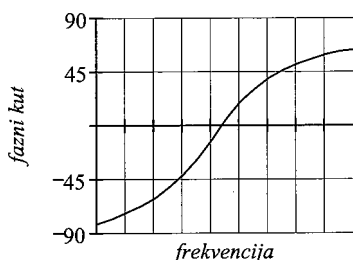
**VII.2-P4.** Serijski RLC krug je priključen na naponski izvor promjenjive frekvencije. Izračunajte a) frekvenciju na kojoj su induktivni i kapacitivni otpori jednaki (rezonancija). b) frekvencije na kojima je fazni kut  $-45$  odnosno  $+45$  stupnjeva (granične frekvencije) c) nacrtajte graf promjene impedancije i faznog kuta sa frekvencijom (za frekvencije od 1 do 10 kHz),

Zadano je:  $R=900 \text{ } \Omega$ ,  $C=22 \text{ nF}$ ,  $L=40 \text{ mH}$ ,

**Rješenje:** a)  $f_r=5365 \text{ Hz}$  b)  $f_1=3870 \text{ Hz}$   $f_2=7450 \text{ Hz}$

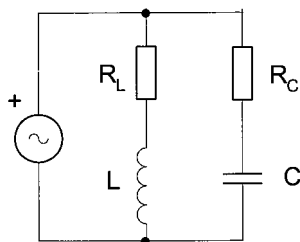
c) Funkcije promjene faznog kuta i impedancije su:

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \quad \varphi = \arctg \left[ \frac{\left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)}{R} \right]$$



Fazni kut je na rezonantnoj frekvenciji nula tj, krug se ponaša kao radni otpor. Vidimo da je na toj frekvenciji impedancija jednaka otporu  $R$ . Razlika graničnih frekvencija se ovdje naziva : *širina frekvencijskog pojasa*.

**VII.2-P5.** Za spoj prikazan slikom treba odrediti formulu za izračun rezonantne kružne frekvencije. Kolika je ta frekvencija ako je:  $L=1 \text{ mH}$ ,  $C=20 \text{ } \mu\text{F}$ ,  $R_L=6 \text{ } \Omega$   $R_C=4 \text{ } \Omega$



$$\omega r = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}} \quad \omega r = 4.54 \times 10^3$$

**Rješenje:** Do potrebne jednadžbe (formule) dolazimo tako da napišemo izraz za kompleksnu impedanciju. U dobivenom izrazu istražimo pod kojim uvjetom (za koju frekvenciju) će imaginarni dio biti jednak nuli. Dobivamo gore napisanu jednadžbu koja se sastoji od dva dijela. Prvi dio je «normalna» formula za paralelni krug kada su elementi  $L$  i  $C$  idealni tj. kada su otpori jednaki nuli. Drugi član mora svakako biti pozitivan, a to ovisi o odnosu elemenata spoja. Česti je slučaj kod praktičkih spojeva da je  $R_C=0$  dok  $R_L$  postoji (otpor namota zavojnice). U tom slučaju iz gornje formule treba samo izbaciti  $R_C$ .

**ZADACI VII.2**

**VII.2-1.** Koliki treba odabrati iznos otpora  $R$  da bi za serijski  $RL$  spoj granična frekvencija iznosila 1100 Hz? Zadano je  $L = 100 \text{ mH}$ .

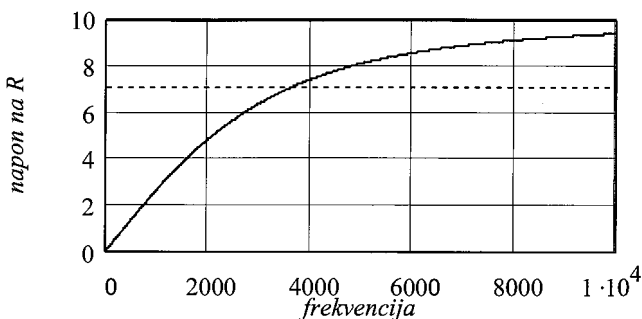
Rezultat:  $690 \Omega$

**VII.2-2.** Serijski su spojeni otpornik  $R = 2 \text{ k}\Omega$  i kondenzator  $C = 22 \text{ nF}$ . Spoj je priključen na naponski sinusni izvor  $U = 10 \text{ V}$  promjenjive frekvencije. Izračunajte na koji iznos treba podesiti frekvenciju da bi naponi na otporniku i kondenzatoru bili jednaki. Koliki su ti naponi? Nacrtajte graf frekvencijske ovisnosti struje, impedancije i faznog kuta ako se frekvencija mijenja u intervalu od nula do 10 kHz

Rezultat:  $f = 3620 \text{ Hz}$  ;  $7,07 \text{ V}$

**VII.2-3.** Napon na otporniku iz prethodnog zadatka mjerimo (idealnim) voltmetrom. Odredite analitički izraz za izračun tog napona na raznim frekvencijama. Nacrtajte graf napona  $U_R$  za frekvencije od nula do 10 kHz. Spoj je priključen na sinusni izvor stalnog napona  $U = 10 \text{ V}$  i promjenjive frekvencije.

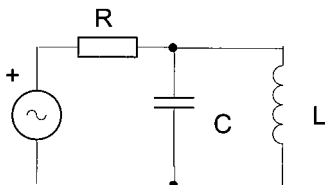
Rezultat:



**VII.2-4.** Elementi  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 40 \text{ mH}$  i  $C = 22 \text{ nF}$  spojeni su paralelno. Spoj je priključen na izvor napona  $U = 3,5 \text{ V}$  promjenjive frekvencije. Potrebno je odrediti rezonantnu kružnu frekvenciju i struju izvora na toj frekvenciji. Kolike su struje kroz  $L$  i  $C$  na rezonantnoj frekvenciji? U kojem su faznom odnosu te struje?

Rezultat:  $\omega_r = 33710 \text{ rad/s}$  ;  $I_r = 1,75 \text{ mA}$  ; struje kroz  $L$  i  $C$  su jednake  $2,6 \text{ mA}$  i u protufazi su.

**VII.2-5.** Elementi  $R$ ,  $L$  i  $C$  spojeni su kako je prikazano slikom. Naponski izvor ima promjenjivu frekvenciju. a) Odredite rezonantnu frekvenciju b) odredite napon na otporniku i na paraleli  $LC$  u rezonanciji c) nacrtajte frekvencijsku ovisnost struje i faznog kuta (za kružnu frekvenciju  $\omega$  od 100-1000 rad/s)



Zadano je:

$$U = 120 \text{ V}$$

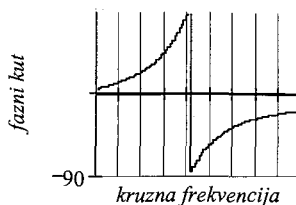
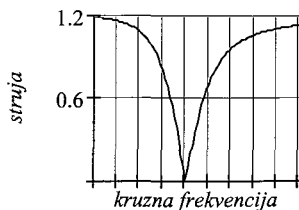
$$R = 100 \Omega$$

$$L = 0,1 \text{ H}$$

$$C = 40 \mu\text{F}$$

*kad je samo  
u rezonanciji,  
sve je napona na LC*

Rezultat:  $f_r = 80 \text{ Hz}$  ;  $U_R = 0$  ;  $U_{\text{paralele}} = 120 \text{ V}$



**VII.2-6.** U serijskom RLC krugu kondenzator je promjenjiv. Na koji iznos ga treba podesiti pa da krug dođe u rezonanciju na frekvenciji 1000 Hz. Zadano je  $R=5\ \Omega$   $L=20\text{ mH}$ .

Rezultat:  $C = 1,27\ \mu\text{F}$

**VII.2-7.** U serijskom RLC krugu poznate su trenutne (momentalne) vrijednosti napona izvora i struje. Ako je  $L=0,5\text{ H}$  izračunajte  $R$  i  $C$ .

Zadano je  $u(t)=70,7 \sin(500t+\pi/6)\text{ V}$ ;  $i(t)=2,83 \sin(500t+\pi/6)\text{ A}$ .

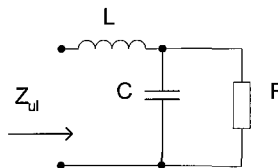
Rezultat:  $R=25\ \Omega$   $C = 8\ \mu\text{F}$

**VII.2-8.** Paralelno je spojena zavojnica koja ima induktivitet  $1\text{ mH}$  i otpor zavoja  $7\ \Omega$  sa kondenzatorom od  $20\ \mu\text{F}$ . Izračunajte rezonantnu frekvenciju tog spoja.

Rezultat:  $159\text{ Hz}$

**VII.2-9.** Za spoj prema slici ulazna impedancija kod frekvencije  $\omega=0$  (istosmjerno) iznosi  $5\ \Omega$ , dok je kod rezonantne frekvencije  $2,5\ \Omega$ . Izračunajte  $X_C$  na rezonantnoj frekvenciji.

Rezultat:  $5\ \Omega$

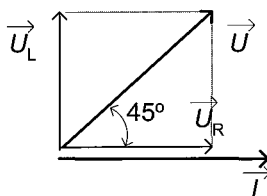
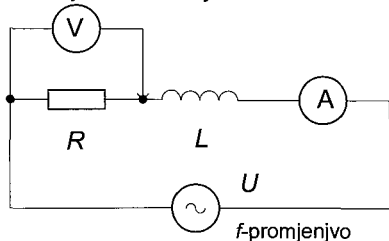


**VII.2-10.** Serijski su spojeni svitak  $L=0,015\text{ H}$  (neznatnog radnog otpora) i otpornik  $R=620\ \Omega$ . Spoj je priključen na laboratorijski izvor koji daje izmjenični napon  $U=10\text{ V}$  promjenjive frekvencije. Na koju vrijednost treba podesiti frekvenciju pa da voltmetar spojen na svitak i na otpornik pokažu jednaki iznos? Koji je to iznos pokazivanja? Koji je u tom slučaju fazni kut  $\varphi$  između napona i struje, a kolika je efektivna vrijednost struje? Nacrtajte shemu spoja i vektorski prikaz. Vektor struje postavite u smjer  $+x$  osi.

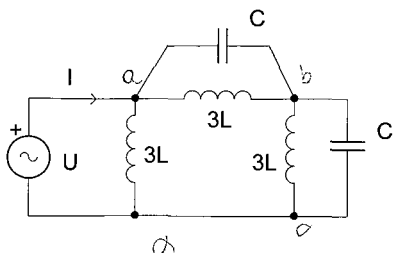
Rezultat: Neznatni otpor svitka možemo zanemariti. Moraju se izjednačiti radni otpor i induktivni otpor:  $R=X_L=2\pi f$ .

Iz toga dobivamo  $f=6578\text{ Hz}$ ,  $Z=\sqrt{2} R=876\ \Omega$ ;  $I=U/Z=11\text{ mA}$ .

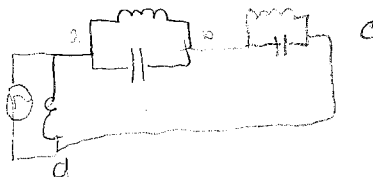
Shema je na slici dolje, kao i vektorski prikaz iz kojeg proizlazi:  $U_V=7,07\text{ V}$ ;  $\varphi=\pi/4\text{ rad}=45^\circ$ .



**VII.2-11.** Izračunajte kružnu frekvenciju kod koje će struja izvora postati jednaka nuli. Zadano je  $L=1,6 \text{ mH}$ ;  $C=100 \text{ }\mu\text{F}$ . Zadatak riješite pomoću vektorskog dijagrama.

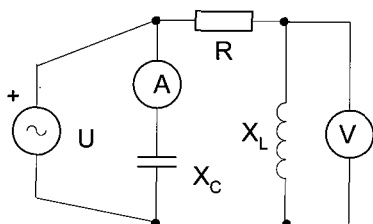


*Rezultat:*  $\omega=2500 \text{ s}^{-1}$



**VII.2-12.** U spoju na slici voltmetar mjeri napon  $U_V$ , a ampermetar struju  $I_A$ . Ako su struja i napon izvora u fazi, odredite induktivni otpor  $X_L$ .

ZADANO:  $U=10 \text{ V}$ ;  $U_V=6 \text{ V}$ ;  $I_A=1 \text{ A}$ ;



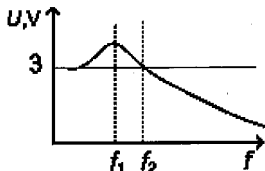
*Rezultat:*

$$X_L=3,6 \text{ }\Omega$$

## TEST PITANJA VII.2

1) Na grafu je prikazana promjena napona s frekvencijom na jednom elementu serijskog  $RLC$  kruga koji je priključen na napon  $U=3$  V. Koji je to element:

- A) kondenzator  
B) zavojnica  
C) otpornik



2) Zadan je serijski  $RLC$  krug u kojem su na rezonantnoj frekvenciji jednaki naponi na  $L$ ,  $C$  i  $R$ . Maksimum napona na kondenzatoru će biti na frekvenciji

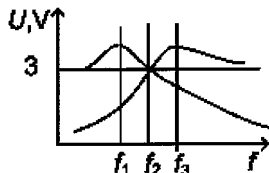
- A) manjoj od  $f_{\text{rez}}$  B) većoj od  $f_{\text{rez}}$  C) rezonantnoj

3) Koji je fazni kut odnos struje i napona izvora za serijski  $RLC$  krug na donjoj graničnoj frekvenciji?

- A) u fazi su; B) struja prethodi za  $45^\circ$ ; C) struja zaostaje za  $45^\circ$ ;  
D) u protufazi su; E) struja prethodi za  $90^\circ$ .

4) Prikazane su frekvencijske ovisnosti napona na  $L$  i  $C$  za serijski  $RLC$  krug priključen na napon od 3 V. Koliki je faktor dobrote tog kruga? (faktor dobrote je odnos napona na  $R$  i  $L$  odnosno na  $R$  i  $C$  na rezonantnoj frekvenciji)

- A) veći od 1  
B) manji od 1  
C) jedan



5) Zadan je serijski  $RLC$  krug koji je priključen na sinusni napon  $U$  promjenjive frekvencije. Na frekvenciji koja je puno veća od rezonantne, napon na  $L$  će:

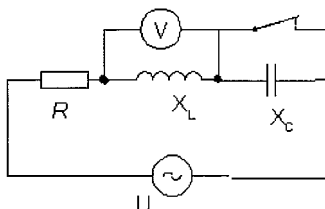
- A) postati jednak nuli; B) postati jednak naponu  $U$ ;  
C) biti jednak naponu  $1,41 U$ ; D) biti jednak  $U/3$ .

6) Odnos gornje granične ( $f_g$ ) donje granične ( $f_d$ ) i rezonantne frekvencije ( $f_r$ ) je:

- A)  $f_r = (f_g - f_d)/2$  B)  $f_r = f_d \cdot f_g$  C)  $f_r^2 = f_d \cdot f_g$  D)  $f_r = (f_d \cdot f_g)^2$

7) Kod zatvorene sklopke voltmetar pokazuje napon od 10 V. Koliko će pokazivati ako se sklopka otvori? Zadano je  $R = X_C = X_L$ .

- A) 7,07 V  
B) 10 V  
C) 14,1 V  
D) 20 V



8) Odredite ukupnu struju paralelnog spoja otpornika zavojnice i kondenzatora  $R=X_C=X_L$ , ako je struja kroz otpornik 1 A (efektivno)

- A) 1,41 A B) 3 A C) 1 A D) 2,82 A E) nula

9) Na frekvenciji višoj od rezonantne, fazni kut impedancije paralelnog RLC kruga je:

- A) pozitivan B) negativan C) nula

10) Paralelni RLC krug priključen je na sinusni strujni izvor  $I$ . Ako je krug u rezonanciji tada je struja kroz otpornik:

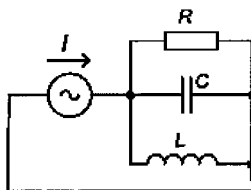
- A) jednaka nuli  
B) jednaka  $I$   
C)  $I \cdot (X_L + X_C)/R$   
D)  $I \cdot R/(X_C + X_L)$

11) Kut admitancije (kompleksna vodljivost) paralelnog RLC kruga je na frekvencijama nižim od rezonantne:

- A) pozitivan B) negativan C) nula  
D) nema dovoljno podataka

12) Kolika je struja  $I_C$  ako je  $X_C=X_L=R$ ?

- A) jednaka je  $I$   
B) nula  
C)  $I/3$   
D)  $0,707 I$   
E)  $1,41 I$

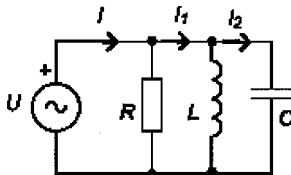


13) Kako se promijeni rezonantna frekvencija paralelnog RLC kruga ako se poveća kapacitet kondenzatora?

- A) poraste B) smanji se C) ne promijeni se

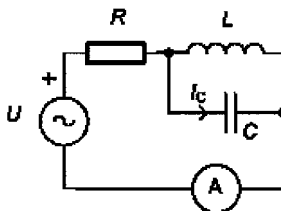
14) Paralelni RLC krug je u rezonanciji ( $R=X_C=X_L$ ). Odredite koji su odgovori glede struja ispravni?

- A)  $I = 0$   
B)  $I = I_2$   
C)  $I_2 = 0$   
D)  $I_1 = 0$   
E)  $I = I_1$



15) Ako je  $X_C=X_L$  (rezonancija) tada je struja  $I_C$ :

- A)  $U/X_C$   
B) nula  
C)  $U/R$   
D)  $U/(R+X_C)$

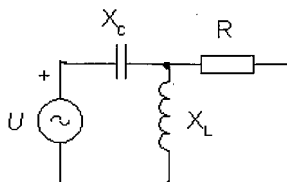


16) U seriju s otpornikom spojen je paralelni LC spoj. Kombinacija je priključena na naponski izvor  $U$ . Koliki je napon na kondenzatoru na rezonantnoj frekvenciji.

- A)  $U$  B) nula C)  $1,41 U$  D)  $0,707 U$  E)  $2U$

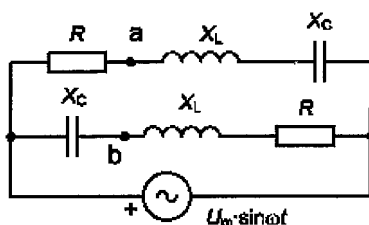
17) Koliki treba biti  $X_C$  da bi struja i napon izvora bili u fazi?  $R=X_L=10 \Omega$ .

- A)  $10 \Omega$   
 B)  $5 \Omega$   
 C)  $20 \Omega$   
 D)  $15 \Omega$   
 E) ne postoji takav  $X_C$



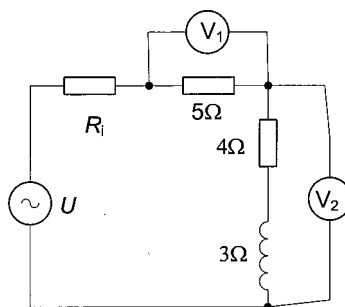
18) Odredite napon  $U_{ab}$  (efektivnu vrijednost) u prikazanom spoju, ako je:  $R=X_L=X_C$ ,  $U_m=10 V$ .

- A)  $10 V$   
 B)  $14 V$   
 C)  $20 V$



19) Odredite odnos pokazivanja voltmetara ( $U_1/U_2$ ) u prikazanom spoju

- A) 1  
 B) 1,41  
 C) 0,7  
 D) nema dovoljno podataka.



### Odgovori na test pitanja VII.2

1.A; 2.A; 3.B; 4.C; 5.B; 6.C; 7.C; 8.C; 9.B; 10.B; 11.B; 12.A; 13.B; 14.BD; 15.A;  
 16.A; 17.B; 18.A; 19. A