2.7. IMPLICITNO DERIVIRANJE

Matan 1: $\underbrace{x^2+y^2=4}_{F(x,y)} \;\Big/ \frac{d}{dx}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\qquad 2x + 2y\cdot y' = 0$

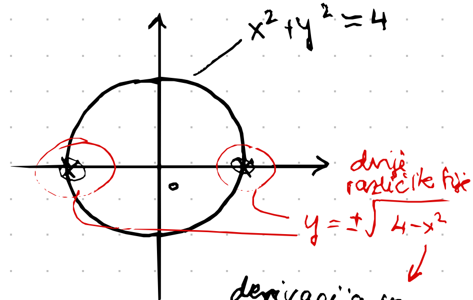
$y' = \frac{-2x}{2y} = -x$

$\frac{\partial f}{\partial y}$

$\hookrightarrow y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

vrijedi samo ako je $y \neq 0$ → parcijalna deriv. mora biti $\neq 0$

! paziti da ne primjenjujemo parcijalno ako nam se pomiješa!



derivacija u tim točkama ne postoji (y')

* postoje parc. deriv.

TM Neka je $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0. \Rightarrow$ jed. f-ja $y=y(x)$

ako je parc. deriv. $\neq 0$, tada postoji jedinstvena implicitno zadana f-ja

↳ zadovoljava $f(x,y)=0$, a njena deriv se računa po formuli

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Ako je krivulja $y=y(x)$ zadana implicitno s $f(x,y)=0$, onda je tangenta na tu krivulju u točki $T_0(x_0,y_0)$

$$y-y_0 = y'(x_0)(x-x_0)$$

$$y-y_0 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}(x-x_0) \Longrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}(y-y_0) = 0$$

$\boxed{TM}$ $f(x,y,z)=0$. Ako je $\frac{\partial f}{\partial z}(T_0)\neq 0$. Tada postoji jedinstvena implicitno zadana $z(x,y)$ u T_0, te $\frac{\partial z}{\partial x}(T_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(T_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(T_0)}$

Zad: $x^3y + xz + yz^3 = 2$, $T(1,0,2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2y+z+0}{x+3z^2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(T) = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^3+z^3}{x+3yz^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(T) = -9$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\left(6xy+\frac{\partial z}{\partial x}\right)(x+3yz^2) - (3yx^2+z)\left(1+6yz\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+3yz^2)^2} = 4$$

deriv. umnoška jer ima i z i y!

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\left(0+3z^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)(x+3yz^2) - (x^3+z^3)\left(0+3z^2+6yz\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(x+3yz^2)^2} = 216$$

$$\frac{\partial^2 z}{\underset{2.}{\partial x}\,\underset{1.}{\partial y}} = -\frac{\left(3x^2+3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)(x+3yz^2) - (x^3+z^3)\left(1+6yz\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+3yz^2)^2} = 30$$

Tangencijalna ravnina:

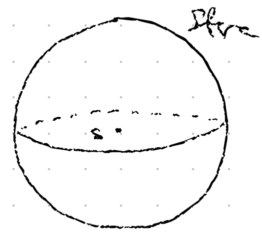
$$\frac{\partial f}{\partial x}(T_0)(x-x_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(T_0)(y-y_1) + \frac{\partial f}{\partial z}(T_0)(z-z_0) = 0$$

$\rightarrow x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$

$\boxed{M1\text{-}20\text{-}2}$ $x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$ $T(0,2,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z+2$$

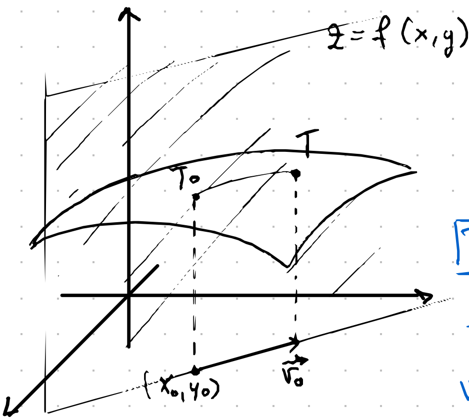
Sfera



$$0(x-0)+2(y-2)+2(z-0)=0$$

$2y+2z=4$ tang. ravnina

2.8. USMJERENA DERIVACIJA



$\frac{\partial f}{\partial x}$ - prirast f-je u smjeru x-osi

$\frac{\partial f}{\partial y}$ - prirast f-je u smjeru y-osi

$\boxed{\text{DEF}}$ Usmjerena derivacija funkcije $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ iz točke $\vec{x_0}$ u smjeru vektora $\vec{v}$ definira se kao

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\cdot\vec{v_0})-f(\vec{x_0})}{t}, \text{ gdje je } \vec{v_0}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

* derivacija ne smije ovisiti o duljini vektora u čijem smjeru f-ja ide.

PROPOZICIJA: Neka je f diferencijabilna u nekoj točki T_0. Tada

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0) = \underbrace{\nabla f(T_0)\cdot\vec{v_0}}_{\text{skalarni p.}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot v_{0i}$$

↳ komponente vektora

Izvod za $f(x,y)$: $\vec{v_0}=v_{01}\vec{i}+v_{02}\vec{j}$! graf je 3D, ali smjer je 2D!
derivacija govori gore ili dolje
* a smjer lijevo ili desno *

→ presječemo s ravninom kao kod parcijalnih
↳ parametriziramo pravac na kojem je $\vec{v_0}$

Koristimo TM o lančanom
↳ deriviranju

$p\ldots\ x=x_0+t\cdot v_{01}$
$y=y_0+t\cdot v_{02}$

Važno: $z=f(x,y)=f(x_0+t\cdot v_{01},\ y_0+t\cdot v_{02})$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}_{(H)}v_{01}+\frac{\partial z}{\partial y}_{(H)}v_{02}$$

* usmjerenu der. računamo u točki T_0

Uvrstimo: $t=0 \longrightarrow \frac{dz}{dt}(T_0)=\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0)=\nabla f(T_0)\cdot\vec{v_0}$

Napomena: 1. Usmjerena derivacija – Realan broj!

2. Za $z = f(x,y)$ $\vec{v}$ je 2D.

3. Postoji beskonačno usmjerenih deriv. u svakoj točki

ZAD $f(x,y) = x^2y + 2xy^3$ u $T(1,1)$ u smjeru $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$

$$\nabla f = (2xy + 2y^3, x^2 + 6xy^2), \quad \nabla f(T) = 4,7 = 4\vec{i} + 7\vec{j}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = (4,7) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-10}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{-2\sqrt{5}}} \quad \left(\begin{array}{l} <0 \\ \text{f-ja pada} \end{array}\right)$$

↳ nagib tangente u tom smjeru!

- BRZINA u smjeru x-osi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \nabla f \cdot \vec{i} = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(T) = 4 \to \text{rast u } x \text{ smjeru}$$

- BRZINA u smjeru neg. y-osi

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{j})} = -\nabla f \cdot \vec{j} = -\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial(-\vec{j})}(T) = -7$$

M1-23-3 $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{e^{xz} \cdot z + y + 0}{e^{xz} \cdot x + 0 - 1}$$

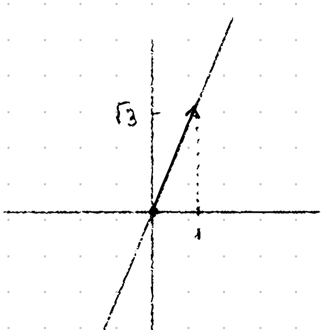
$$\vec{s} = (1, \sqrt{3})$$

$$\vec{s}_0 = \frac{(1, \sqrt{3})}{2}$$

$$\vec{s}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{0 + x}{e^{xz}x - 1}$$

$T(\underset{x}{0}, \underset{y}{1})$, $z = 1$ (dobijemo uvrštavanjem)



$y = \sqrt{3}x$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = (2,0)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\underline{1}}$$

Pitanja: 1. U kojem smjeru krenuti da imamo najveću brzinu?
(logična) (Da se f-ja najbrže mijenja)

2. Kolika najveća može biti brzina (promjena)?

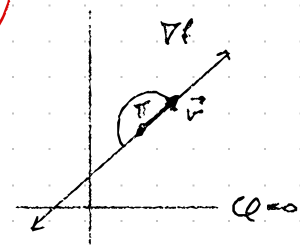
ODGOVOR NA OBA PITANJA: gradijent ∇f

Uočimo: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f \cdot \vec{v_0} = \|\nabla f\| \cdot \underbrace{\|\vec{v_0}\|}_{1} \cos\varphi = \|\nabla f\| \underbrace{\cos\varphi}_{[-1,1]}$

$\rightarrow$ odgovor na 2. $\Rightarrow$ duljina gradijenta

$$-\|\nabla f\| \leq \frac{\partial f}{\partial v} \leq \|\nabla f\|$$

za $\varphi = \pi$ za $\varphi = 0$



$\boxed{TM}$ a) $\nabla f(T_0) = \vec{0} \Rightarrow$ sve usmjerene derr. u T_0 su nule

↳ znači da stojimo $\Rightarrow$ stacionarna točka

b) $\nabla f(T_0) \neq \vec{0} \Rightarrow f$ najbrže raste u smjeru ∇f, a iznos max rasta je $\|\nabla f(T_0)\|$ (f najbrže pada u smjeru $-\nabla f$)

$\boxed{MI-22-3}$ $\nabla f = (\underbrace{3x^2 - 2xy^2 + y^2 + 10}_{\partial x}, \underbrace{-2xy^2 + 2xy}_{\partial y})$

$\nabla f(2,3) = (-5, -12)$ vektor u smjeru kojeg f-ja najbrže raste

ali traži se JEDINIČNO OD gradijenta

$\vec{v_1} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{-5, -12}{13} = \left(\frac{-5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$ } max rast

$\vec{v_2} = -\vec{v_1} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ } max pad

ne moramo računati $\frac{\partial f}{\partial v_1}$ jer već znamo po teoremu $\Rightarrow \|\nabla f\| = \underline{\underline{13}}$ (rast), -13 (pad)

c) $f(2,3) = 10 \longrightarrow x^3 + x^2y^2 + xy^2 + 10x = 10$

$C = 10$ tang... uvrstimo parcijalno u točki T_0 koje smo već izračunali u prošlom zad)

$$\ldots -5(x-2) - 12(x-3) = 0$$

$\boxed{\text{MI-21-3}}$ $f(x,y) = 3x^2y - 2xy + 5x - 3y$

$\nabla f = (6xy - 2y + 5,\ 3x^2 - 2x - 3)$

$\vec{v} = \overline{T_1T_2} = (3,-4)$, $\vec{v}_0 = \frac{(3,-4)}{5}$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = (15,5)\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) = \underline{\underline{5}}$ - promjena nadmorske visine u tom smjeru

↑ uvrštavamo točku u kojoj se nalazimo, ne u koju idemo!

c) Najbrže sići → najbrži pad ⇒ negativan (suprotan) predznak gradijenta

$\nabla f = (15,5) \longrightarrow \underline{\underline{-\nabla f = -(15,5)}}$

$iznos = -\|\nabla f\| = -5\sqrt{10}$

d) Ako se z ne mijenja, usmjerena deriv. je jednaka nuli (0)

$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 = \nabla f \cdot \vec{v}_0}$ - uvjet okomitosti dva vektora

• usmjerena deriv. je 0 u smjeru okomitom na gradijent

$\nabla f \perp \vec{v}_0$ ⇒ VRIJEDNOST SE NE MIJENJA U SMJERU OKOMITOM NA GRADIJENT

$\boxed{\text{TM}}$ Gradijent i f-ija su uvijek okomiti na nivo krivulju.

Neka je f dif. u T_0 i neka je $\nabla f \neq 0$. Tada je $\nabla f(T_0)$ okomit na nivo-plohu (krivulju) koja prolazi točkom T_0.

gradijent → normala na točku

→ okomit na tangentu nivo krivulje

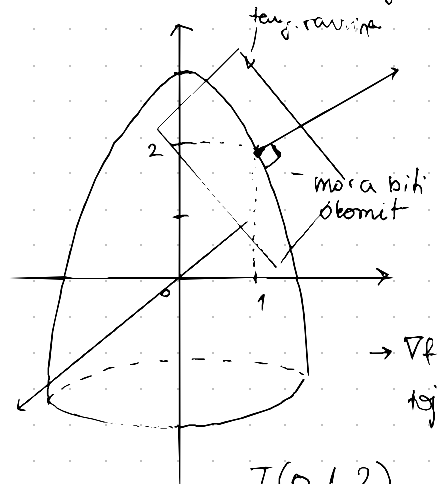
$\boxed{\text{JIR-21-2}}$ $u = 2x^2 + y^2 + z$

a) $T(0,1,2)$

└→ implicitno zadana f-ja

$2x^2 + y^2 + z = C$ ⟹ paraboloidi (eliptični)

$C = 3 \to z = 3 - 2x^2 - y^2$



b) $\nabla u = (4x, 2y, 1)$ → uvrstimo točku

$\nabla u(T) = (0, 2, 1) \to 0 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$

$\|\nabla u(T)\| = \sqrt{5}$

*gradijent od f-je 3 varijable je 3 d

→ ∇f je normala tangencijalne ravnine u toj nekoj točki!

$T(0,1,2)$, $\vec{n} = (\nabla u) = (0, 2, 1)$

⟶ $0(x-0) + 2(y-1) + 1(z-2) = 0$

*mogli smo i preko računanja tang. ravnine ako se nismo sjetili gradijenta kao normale