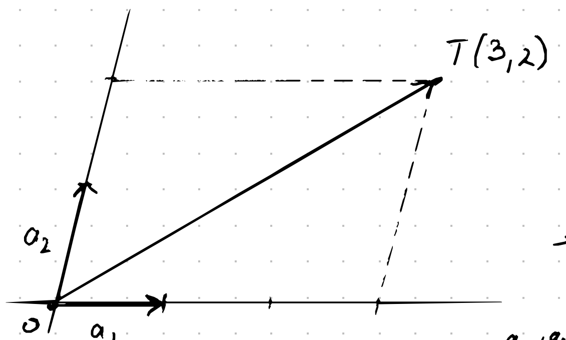
5.2. KOORDINATNI SUSTAVI I KANONSKA BAZA

Koordinatni sustav u ravnini *2D



* koord. sustav ne mora nužno biti pravokutan

– a_2 i a_1 definiraju koord. sus.

→ svaka dva lin. nezav. vektora određuju svoj koord sust.

↳ a_1, a_2 određuju jediničnu dužinu

$\boxed{\text{Trojka } (O; a_1, a_2) = \text{koordinatni sustav}}$

↳ koord. točke jednake su komponentama radij-vektora

$\vec{OT}$ rastavimo po bazi a_1 i a_2

$$\vec{OT} = x_1 a_1 + x_2 a_2$$

↳ položaj točke T opisan skalarima x_1 i x_2

Koordinatni sustav u prostoru *3D

*linearno nezavisne

→ analogno gornjem, svaka 3 nekoplanarna vektora a_1, a_2, a_3 određuju koordinatni sustav $(O; a_1, a_2, a_3)$

→ za određivanje koordinata T potrebno je $\vec{OT}$ rastaviti u linearnu kombinaciju vektora a_1, a_2 i a_3

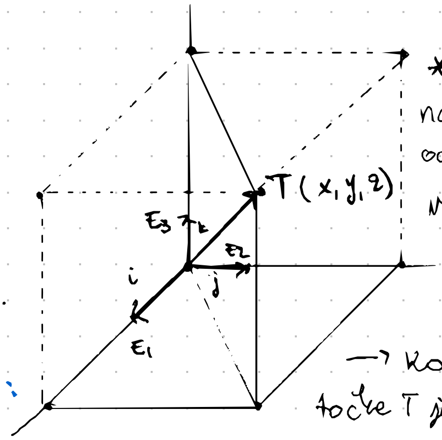
Kanonska baza

Ox - os apscisa

Oy - os ordinata

Oz - os aplikata

- zajednička točka O ovih osi je ishodište koord. sust.



* Točkama E_1, E_2 i E_3 na koord. osima odgovaraju jed. vektori i, j, k

Odgovarajući radij vektori:

$E_1 = (1,0,0) \longrightarrow i = \overrightarrow{OE_1}$

$E_2 = (0,1,0) \longrightarrow j = \overrightarrow{OE_2}$

$E_3 = (0,0,1) \longrightarrow k = \overrightarrow{OE_3}$

→ koordinate (x,y,z) točke T jednake su komponentama vektora $\overrightarrow{OT}$ u rastavu po bazi i, j, k

⇓

taj se rastav određuje okomitim projiciranjem na koord. osi

Po ovoj konstrukciji, kartezijev je sustav $(O; i,j,k)$ zapravo određen točkom O i trima vektorima i, j, k.

Trojku vektora (i,j,k) nazivamo <u>kanonska baza</u> prostora V^3.

Rastav vektora po bazi?

→ radijvektor bilokoje točke $T(x,y,z)$. Za njega očevidno vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = x i + y j + z k$$

ili npr;

zadan je vektor $\vec{a}$: $a = a_x i + a_y j + a_z k$

<u>Računanje koeficijenata a_x, a_y i a_z</u>

$A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$ — koordinate njegove početne i konačne točke

$\longrightarrow \vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

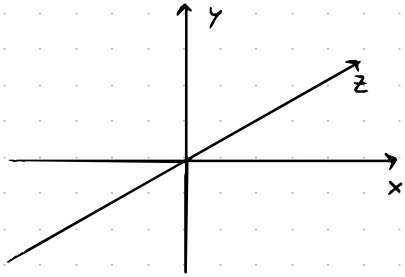
$$\vec{a} = (x_2 i + y_2 j + z_2 k) - (x_1 i + y_1 j + z_1 k)$$

$$\vec{a} = x_2 i + y_2 j + z_2 k - x_1 i - y_1 j - z_1 k$$

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{a_x} i + \underbrace{(y_2 - y_1)}_{a_y} j + \underbrace{(z_2 - z_1)}_{a_z} k}$$

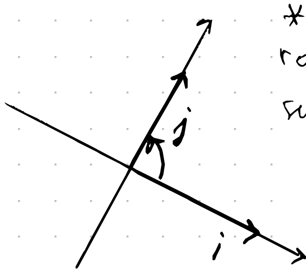
Orijentacija ravnine i prostora

- odaberemo vektor i na bilokoji od koordinatnih osi sa po redu odabranom orijentacijom.



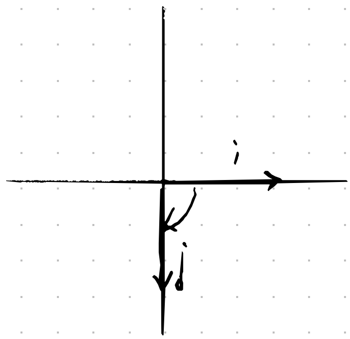
→ Ako vektor j odaberemo tako da se rotacijom vektora $\underline{i}$ za 90° u poz. (+) smjeru on prevodi u vektor j

sustav (O; i, j) je pozitivno orijentiran ili (desni) sustav



* pozitivna rotacija je suprotna onoj kod kazaljke na satu

→ Ako vektor i moramo rotirati za 90° u neg(−) smjeru da bi se poklopio s vektorom j, sustav (O; i, j) je negativno orijentiran – ili lijevi sustav



pravilo desne ruke

LIJEVI KOORD. SUST.

- vektor (i) – palac
- vektor (j) – srednjak

⇓

(k) kažiprst

DESNI KOORD. SUST

- vektor (i) – srednjak
- vektor (j) – palac

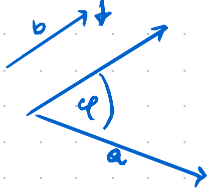
⇓

(k) kažiprst

5.3. Skalarni umnožak

Kut među vektorima

- manji (po aps. iznosu) od dvaju kutova koji ~~koji~~ zatvaraju zadana dva vektora $\ast$ (translatirana u zajednički početak $\ast$)



$\varphi = \sphericalangle(a, b)$

$\rightarrow$ kut može poprimiti vrijednost $0 \leq \varphi \leq \pi$

DEF Skalarni umnožak

Neka su a i b zadani vektori i $\varphi = \sphericalangle(a, b)$.

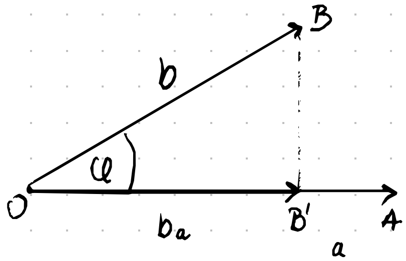
Skalarni umnožak (produkt) vektora a i b definira se na način $\boxed{a \cdot b := |a||b| \cos\varphi}$

- ako je jedan od vektora 0, po definiciji je njihov skalarni umnožak jednak 0

!ALI! to ne slijedi jer u tom slučaju kut nije definiran

$\hookrightarrow |a|^2 = a \cdot a$

Projekcija vektora na vektor



$\overrightarrow{OB'}$ - vektorska projekcija vektora b na vektor a

$\hookrightarrow b_a = |b| \cos\varphi \, \hat{a}$

$\rightarrow$ Za skalarni umnožak vektora i njegovog jediničnog vektora vrijedi

$a \cdot \hat{a} = |a| \longrightarrow a \cdot b = b_a \cdot a$

$a \cdot b = |a||b| \cos\varphi$

$a \cdot b = a \cdot \cancel{\hat{a}} \cdot \dfrac{b_a}{\cancel{\cos\varphi} \, \cancel{\hat{a}}} \cdot \cancel{\cos\varphi} \rightarrow \boxed{a \cdot b = a \cdot b_a}$

Skalarna projekcija vektora b na vektor a je $\underline{|b| \cos \varphi}$

↳ označavamo sa $\pi_a(b)$

$\Rightarrow$ skalarni produkt: $a \cdot b = |a| \, \pi_a(b) = \pi_b(a) \, |b|$

Svojstva skalarnog umnoška

pozitivnost $\quad a \cdot a \geq 0, \quad a \cdot a = 0 \iff a = 0$

homogenost $\quad \lambda (a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

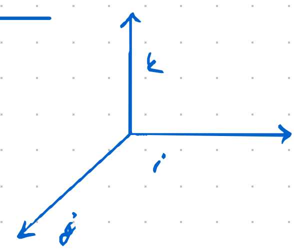
komutativnost $\quad a \cdot b = b \cdot a$

distributivnost $\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Skalarni umnožak u koordinatnom sustavu

i, j, k kanonska baza prostora V^3

└ međusobno vektori jedinične duljine



$i \cdot i = 1 \qquad j \cdot j = 1 \qquad k \cdot k = 1$

$i \cdot j = 0 \qquad j \cdot k = 0 \qquad i \cdot k = 0$

$\rightarrow$

	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

- svaki vektor se može prikazati na jednoznačan način preko vektora baze

$\Rightarrow \quad a = i a_x + j a_y + k \cdot a_z$

$b = b_x \cdot i + b_y \cdot j + b_z \cdot k$

$$a \cdot b = (a_x i + a_y j + a_z k)(b_x i + b_y j + b_z k)$$

$$= a_x i \cdot b_x i + \cancel{a_x i \cdot b_y j} + \cancel{a_x i \cdot b_z k} + \cancel{a_y j \cdot b_x i} + a_y j \cdot b_y j$$
$$+ \cancel{a_y j \cdot b_z k} + \cancel{a_z k \cdot b_x i} + \cancel{a_z k \cdot b_y j} + a_z k \cdot b_z k$$

sjeti se tablice množenja

	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

$$= a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_y j + a_z k \cdot b_z k$$

$$\boxed{= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Računanje skalarnog umnoška

to još možemo zapisati:

$$a \longmapsto \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad b \longmapsto \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$$a\,b = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{a^T \cdot b}$$

Duljina vektora

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Kut između vektora

$$\cos\varphi = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

$$= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$