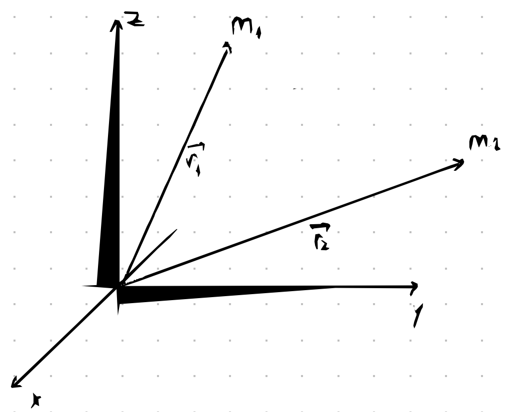
MEHANIKA SUSTAVA ČESTICA

(Sudari)

SUSTAV ČESTICA



* čestice: $m_1, m_2 \ldots$ (N .. broj č u sustavu)
  $\vec{r}_i, \vec{v}_i, \vec{a}_i, \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i, \ldots$
  $i = 1, 2, 3 \ldots N$
* masa sustava: $m = m_1 + m_2 + \cdots m_n = \sum_i m_i$
* kol. gibanja sustava $\vec{p}$
  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$
* kinetička en. sustava
  $K = \sum_i K_i \quad , \quad K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Gibanje i-te čestice u sustavu

Sila: $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

$\vec{F}_i^{(ext)}$ → vanjska sila na i-tu č.

Zbroj svih ostalih sila koje djeluju na i-tu č.

↳ sile međudjelovanja

*Treći Newtonov zakon $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$!

KOLIČINA GIBANJA SUSTAVA

$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \quad , \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \ldots = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)}$

Ako $\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = 0$, onda $\vec{p} = \overrightarrow{konst}$

DOKAZ:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right) = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{= 0}$$

znači ovo je 0

$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ → dobit ćemo sili F_i na F_j i F_j na F_i pa će se međusobno pokratiti ~~zadovoljajući~~ III. N.z. postoji $-F$ koja će poništit djelovanje F

SUDARI

– kratkotrajno međudjelovanje N=2 čestica na malim udaljenostima

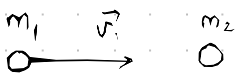
Primjer: sudar tijela mase $m_1 = m_2$,
$\vec{v}_1 \neq 0$ (projektil), $\vec{v}_2 = 0$ (meta)

uz očuvanje kin. en.

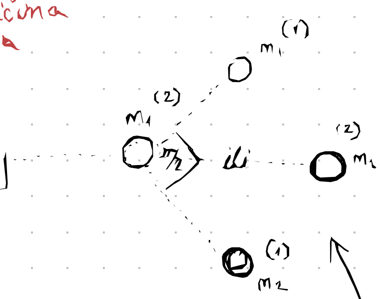
MOŽE I NE MORA SE OČUVATI

ali uvijek se očuva količina gibanja

prije:



nakon:



ZOKG

$$\vec{p} = \vec{p}\,'$$

$$\cancel{m_1}\vec{v}_1 = \cancel{m_1}\vec{v}_1{}' + \cancel{m_2}\vec{v}_2{}' \quad / : m_1 = m_2$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1{}' + \vec{v}_2{}'$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2v_1'v_2' + v_2'^2$$

ZOE

*nije uvijek slučaj ali navedli smo da se očuvala kin. en.

$$K = K'$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m_1}v_1^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m_1}v_1'^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m_2}v_2'^2$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

te su tvrdnje komp. jedino ako je

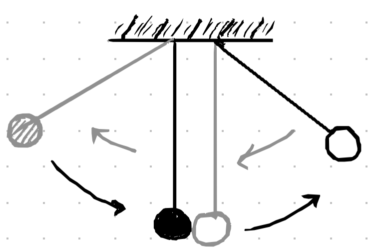
$$\boxed{v_1' \cdot v_2' = 0}$$

ili su te dva pravca brzina okomiti ($\pi/2$)

ili je v_1' nakon sudara $= 0$, a $v_2' \neq 0$, jer se nastavi gibati (biljar)

*(ovo vrijedi kad su mase jednake)

Sličan primjer:



Primjer: gubitak K u sudaru

prije: $\vec{v}_1$ m_1 m_2

poslije: $\vec{v}'$ m_1+m_2 ← nastaje združena masa

* sudari koji ne gube K
↳ savršeno elastični

max gubitak
↳ savršeno neelastični

ZOKG: $m_1\vec{v}_1 = (m_1+m_2)\vec{v}'$

Promjena K: $\Delta K = K' - K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2$

$$\Delta K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\cdot\left(\frac{m_1 v_1}{(m_1+m_2)^2}\right)^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2}{m_1+m_2} - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2} - 1\right) = \frac{1}{2}m_1 v_1^2\left(\frac{\cancel{m_1} - \cancel{m_1} - m_2}{m_1+m_2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta K = \underbrace{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}_{K}\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)$$

* može se i povećati K (dva paka se sudare, između je petarda i BUM!)

Primjer: Raketa $\vec{v}$ ❗ Tsiolskijeva ❗

t:

$t+\Delta t$: $\vec{v}+\vec{u}$

μ — masa izbačenog komadića dima

dim u odnosu na raketu

$\vec{v}+d\vec{v}$ — brzina koju je postigla izbacivanjem plina

$m - d\mu$ ↳ promijenjena masa za masu izbačenog dima

$(dm = -d\mu)$

ZOKG $d\vec{p} = d\mu\cdot\vec{u} + m\,d\vec{v} = 0$ (zanemarili smo $m\,d\mu$?)

$$(m-d\mu)(v+d\vec{v}) - m\vec{v}$$

$$= \cancel{m\vec{v}} + m\,d\vec{v} - \vec{v}\,d\mu - \boxed{\cancel{d\mu\,d\vec{v}}} - \cancel{m\vec{v}}$$

u d.f računu izbacujemo jer je d^2

↓ ne moramo uzeti sad u obzir jer smo to napisali kao $d\mu\cdot\vec{u}$

$= m\,d\vec{v}$ ostaje

x: $(-dm)u\,(-\hat{x}) + m\,d\vec{v}\,\hat{x} = 0$

$$dm\,u + m\,dv = 0$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u} \Big/ \int_{poč}^{kon}$$

početno: $m = m_0$ $v = 0$

konačno: m v

$$\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}\int_0^v dv' \rightarrow \ln\frac{m}{m_0} = \frac{-v}{u}$$

$$\boxed{v = -u\ln\frac{m}{m_0}}$$

brzina kojom izbacujemo plin

* raketa mase 3t izbaci 2t plina,

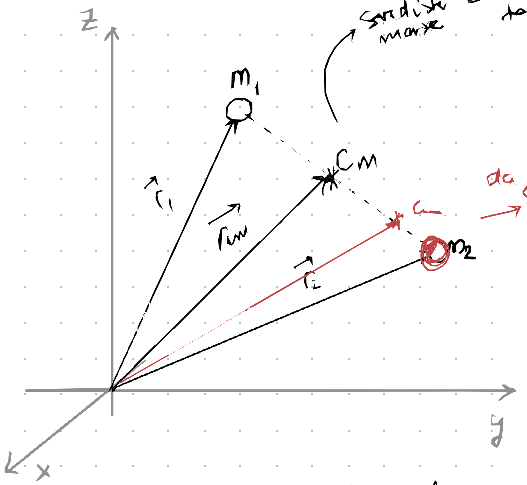
$v_{izbacivanja} = 100$

$$v = -100\cdot\ln\frac{3-2}{3} \approx 1.1\cdot 100$$

$v = 110\,m/s$ raketa postiže veću brzinu od one koju izbacuju mlaznice

SREDIŠTE MASE

središte mase - matematička točka!



da je $m_2 >>> m_1$, cm bi se primaklo bliže m_2

„Weighted sum"

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$v_{cm} = r'_{cm}(t) \longrightarrow v_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m_{ukup}} \sum m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

ukupna kol. gibanja

$$\Rightarrow v_{cm} = \frac{\vec{p}}{m}$$

$$v_{cm} = \frac{1}{m} \sum m_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{m} \sum_i \vec{p}_i$$

$\longrightarrow \vec{P} = m \cdot \vec{r}'_{cm} = \vec{p}_{cm}$ ukupna količina gibanja = količini gibanja središta mase

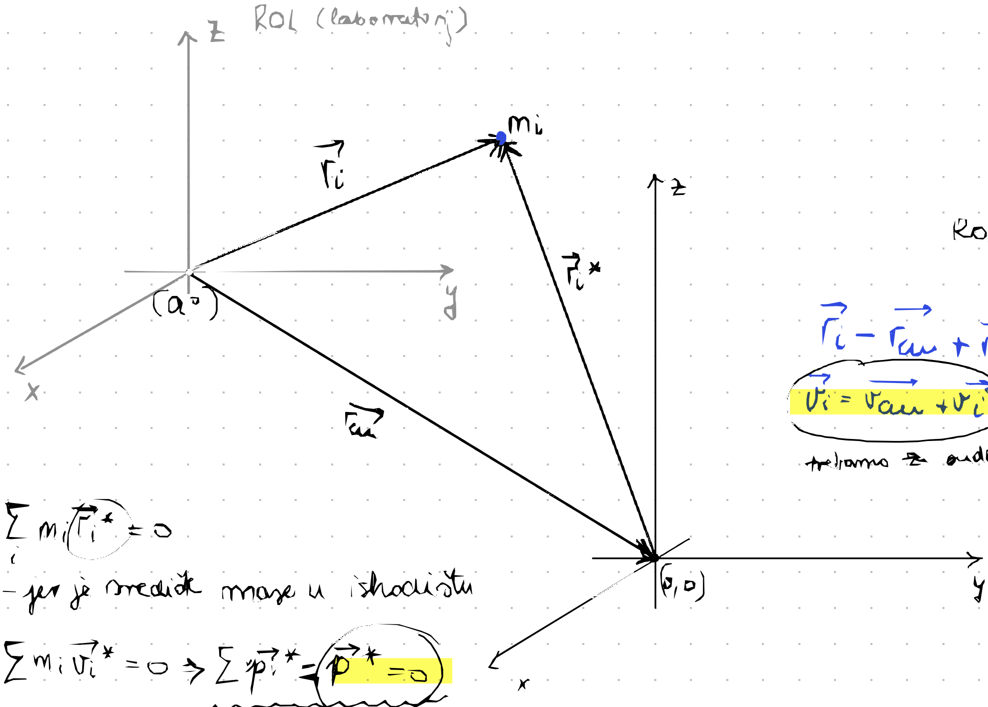
akc. centra mase

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)}}$$

masa čitavog sustava

zbroj sila ala (isključivo vanjskih) na sve čestice

Referentni okvir središta mase [ROSM]



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i^*$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i^*$$

trebamo za sudare

$\sum_i m_i \vec{r}_i^* = 0$

- jer je središte mase u ishodištu

$\sum m_i \vec{v}_i^* = 0 \Rightarrow \sum \vec{p}_i^* = \vec{P}^* = 0$

trebamo za sudare

$K = K_{cm} + K^* = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^{*2}$

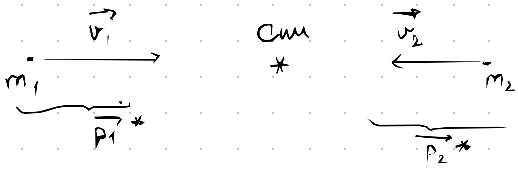
ako se giba samo centar mase $\rightarrow K^* = 0$

- kad se centar mase giba, na njega djeluju samo vanjske sile, ali ne i unutarnje

=> zbroj količina gibanja u ROSM je 0

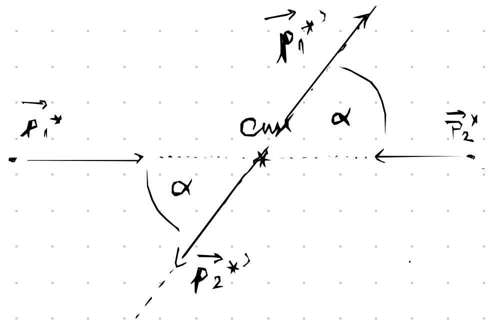
Sudar 2 čestica u ROSM ($\vec{v_i} = \vec{v_{cm}} + \vec{v_i}^*$, $\vec{p_1}^* + \vec{p_2}^* = 0$)

prije sudara: $\vec{p_1} = -\vec{p_2}$



poslije sudara: $\vec{p_1}^{*)} = -\vec{p_2}^{*)}$

* nakon sudara ne moraju ostati na istom pravcu (međusobno istom DA, ali u odnosu na prije NE)



* izlazni vektori ne moraju biti jednako dugi!

! ono što MORA vrijediti

↳ $\vec{p_1}^* = -\vec{p_2}^*$!

$\vec{p_1}^{)*} = -\vec{p_2}^{*}$

Koeficijent restitucije brzine = k

$$k = \frac{p_1^{*)}}{p_1^*} = \frac{p_2^{*)}}{p_2^*} \xrightarrow[\text{pokrate}]{\text{mase se}} k = \frac{v_1^{*)}}{v_1^*} = \frac{v_2^{*)}}{v_2^*}$$

#1 $k = 0$ ‖ Savršeno neelastičan sudar $k = 0$, $K^{*)} = 0$, $p_1^{*)} = p_2^{*)} = 0$

na kraju ∞ $v_1 = v_2 = 0$, zalijepile su se i ne miču se

· MAX gubitak K

#2 $0 < k < 1$ Neelastičan sudar $p_{1,2}^{*)} < \vec{p_{1,2}}$

· djelomičan gubitak K

#3 [redacted] Savršeno elastičan sudar $K^{*)} = K$, $p_{1,2}^{*)} = p_{1,2}^*$

· nema gubitka K

(#4 [redacted] „eksploziv") oslobodi se nova K

koeficijent restitucije u ROL

$$k = \frac{|\vec{v_2}' - \vec{v_1}'|}{|\vec{v_2} - \vec{v_1}|} = \frac{v_1^{*)}}{v_1^*} = \frac{v_2^{*)}}{v_2^*}$$

Slučaj sudara u 1D

ROSM: $\vec{v_i}^{*)} = -k\,\vec{v_i}^*$ $i = 1, 2$

ROL: $\vec{v_i}^* = \vec{v_i} - \vec{v_{cm}}$ $\xrightarrow{\text{poslije}}$ $\vec{v_i}' - \vec{v_{cm}} = -k(\vec{v_i} - \vec{v_{cm}})$

[redacted] $= -k(\vec{v_i} - \vec{v_{cm}})$

↳ brzina čestice nakon sudara u ROL