# 7.2 Fermi Diracova raspodjela

raspodjela brzina (količina gibanja, energija) u klasičnom modelu plina

↳ Maxwell - Boltzmanova raspodjela

- pretpostavili smo da možemo razlikovati atome/čestice
  ↳ svaka permutacija čestica bila je novo stanje

- u QM ne razlikujemo čestice: različita perm. čestica po en. stanjima ne znači novo stanje

Fermioni – polucjelobrojni spin → vrijedi Paulijev princip isključenja
- ograničava moguć broj čestica s istim kvantnim br.!

↳ Fermi-Diracova raspodjela

Bozoni – cjelobrojni spin → nema Paulijevog principa
- čestice se ne mogu razlikovati

↳ Bose – Einsteinova raspodjela

## Raspodjele po energijama

Bolzmannova raspodjela

$$W = N! \prod_i \frac{1}{N_i!} \rightarrow W = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$$

na koliko je načina moguće predati N čestica

br. makroskopskih stanja jako velik
↳ manja vjerojatnost

Bose – Einsteinova raspodjela

na koliko je načina moguće predati Ni identičnih čestica u gi kućica, samo broj je bitan!

$$W_i = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!}$$

$g_i$ – broj kućica

$N_i$ – br. $e^-$

→ nerazlikovanje čestica

Fermi – Diracova raspodjela

na koliko načina je moguće predati $n_i$ identičnih čestica u $N_i$ različitih kućica (nema ponavljanja)

$$W_i = \frac{N_i!}{n_i!\,(N_i - n_i)!}$$

Za F–D raspodjelu

$N_i$ – br. kućica

$n_i$ – br. $e^-$

↳ Ravnomjerna raspodjela, Paulijev princip
- do neke granične energije ($E_F$) jer svako en. stanje može primiti max 2 fermiona

# Fermi Diracova raspodjela

* koja raspodjela ima najveću vjerojatnost → maksimizira vj. raspodjele

- ukupan br načina na koji je moguće raspodijeliti odgovarajući broj identičnih čestica koje su fermioni

- promatramo pojedini energijski nivo $i$ s $N_i$ degeneriranih (nerazlučivih) en. stanja
  ↳ u takva stanja smještamo ukupan br čestica $N=\sum_i n_i$ — $n_i$ br čestica u pojedinom stanju $i$

* ukupan broj načina za raspodijeliti čestice: $W_i = \dfrac{N_i!}{n_i!\,(N_i-n_i)!}$

(gledamo za koju raspodjelu (koji $n_i$) će taj broj imati konačan max

$$W = \prod_i \frac{N_i!}{n_i!\,(N_i-n_i)!}$$

* uzeti u obzir uvjete na broj čestice i ukupnu en.

$$N=\sum_i n_i \qquad E=\sum_i n_i E_i$$

*MLM — Lagrangeovi multiplikatori

$$f(n_i) = \ln W + a\left(N-\sum n_i\right) + b\left(E-\sum n_i\varepsilon_i\right)$$ → tražimo max (ekstrem)

$$\delta f(n_i) = \ln \prod_i \frac{N_i!}{n_i!\,(N_i-n_i)!} + a(\,) + b(\,) = 0$$

Stirlingova formula: $N_i! \approx \left(\frac{N_i}{e}\right)^{N_i}$

$$= \ln \prod_i \frac{\left(\frac{N_i}{\cancel{e}}\right)^{N_i}}{\left(\frac{n_i}{\cancel{e}}\right)^{n_i}\left(\frac{N_i-n_i}{\cancel{e}}\right)^{N_i-n_i}} + a(\,) + b(\,)$$

$\prod \rightsquigarrow \sum$

$$f(n_i) \Rightarrow \sum_i \left[N_i \ln N_i - n_i \ln n_i - (N_i-n_i)\ln(N_i-n_i)\right] + a\left(E-\sum_i n_i\right) + b\left(E-\sum_i n_i\varepsilon_i\right)$$

$$\delta f(n_i) = 0 = \sum_i \left[0 - \delta n_i \ln n_i - \cancel{n_i}\cdot\frac{1}{\cancel{n_i}}\,\delta n_i - \delta n_i \ln(N_i-n_i) - (\cancel{N_i-n_i})\frac{-\delta n_i}{\cancel{N_i-n_i}}\right] - a\sum \delta n_i - b\sum \varepsilon_i\,\delta n_i$$

↳ $$\sum_i \delta n_i\left(-\ln n_i - \cancel{1} + \cancel{1} + \ln(N_i-n_i) - a - b\varepsilon_i\right) = 0$$

$$\ln\frac{N_i-n_i}{n_i} = a+b\varepsilon_i \;\Big/ e \;\rightarrow\; e^{a+b\varepsilon_i} = \frac{N_i-n_i}{n_i}$$

$$e^{a+b\varepsilon_i} + n_i = N_i \Rightarrow$$

funkcija raspodjele

$$\boxed{\frac{n_i}{N_i} = \frac{1}{e^{a+b\varepsilon_i}+1}}$$

opisuje broj $e^-$ u $N_i$ degeneriranih energ. razina energija $E_i$ ↳ $i$-to mikrostanje sustava

Kako odrediti konstante?  $n_i = \dfrac{N_i}{e^{a+bE_i}+1}$

- Za slučaj malih gustoća $(N_i >> n_i)$, nema izražaja PP – očekujemo da ova raspodjela prelazi u Boltzmannovu

$\rightarrow b = \dfrac{1}{kT}$

* za slučaj velikih

$f_{F-D} \simeq f_B$

KONSTANTA a? kakvo je očekivano ponašanje raspodjele pri $T \to 0K$?

$$\lim_{T\to 0K} \frac{1}{e^{a+\frac{E_i}{kT}}+1} = \begin{cases} 0, & a+E/kT>0 \\ 1, & a+E/kT<0 \end{cases}$$

– očekujemo step f-ju

$$\frac{n_i}{N_i} = \frac{1}{e^{a+bE_i}+1} = \frac{1}{e^{\underbrace{a+E/kT}}+1}$$

$a + \frac{E}{kT} < 0 \Rightarrow E < E_F \Rightarrow 1$

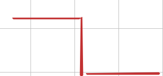
$\frac{E}{kT} < \frac{-E_F}{kT} \rightarrow \underline{a = -\frac{E_F}{kT}}$

Za niske temp

Fermi-Diracova raspodjela

veza s fermijevom energ pri $T=0K$

$$n = \frac{N}{V} = \int_0^{E_F} \overbrace{\frac{8\pi\sqrt{2m^3}}{h^3}\sqrt{E}\,dE}^{\Delta n_{E,E+dE}}$$



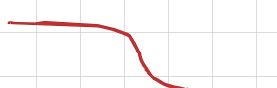
i prelazak na kontinuirani zapis $(T>0K)$

$$\frac{dn}{dE} \approx \frac{n_i}{N_i} = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT}+1}$$

$e^-$ imaju neku $E_k$, neće nužno sva i samo stanja do neke en. biti popunjena

slijedi da možemo pisati

$$\frac{N}{V} = \int_0^\infty \underbrace{\frac{8\pi\sqrt{2m^3}}{h^3}}_{S(E)}\sqrt{E}\,\frac{dE}{e^{(E-E_F)/kT}+1}$$



$f(E)$, F-D raspodjela

umnožak gustoće stanja

# F-D

Simetričnost oblika F-D raspodjele s obzirom na $E = E_F$

$$f(E_F + E') = 1 - f(E_F - E') \Rightarrow \frac{1}{e^{(E_F + E' - E_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{E'/kT} + 1} =$$

$$1 - \frac{1}{e^{(E_F - E' - E_F)/kT} + 1} = 1 - \frac{1}{e^{-E'/kT} + 1} = \frac{e^{-E'/kT}}{e^{-E'/kT} + 1} = \frac{1}{1 + e^{E'/kT}}$$