7. DJ VIŠEG REDA

7.1. Uvod i opće rješenje

- $F(y^n, y^{n-1}, \dots y', y, x) = 0$ DJ n-tog reda

∠ opće rješenje: $y = f(x, \underbrace{C_1, \dots C_n}_{})$ onoliko konstanti koliko i derivacija

Cauchyjev problem ima n početnih uvjeta:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

METODE:

① Direktna uzastopna derivacija

$y''' = x^2 + \sin x \longrightarrow$ integriramo 3 puta $\Rightarrow$ $y = \frac{x^5}{60} + \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x \cdot C_3$

② Snižavanje reda $y' = z$, $y'' = z'$

$y'' + y'^2 + 1 = 0 \longrightarrow y = \ln|\cos(-x + C_1)| + C_2$

onoliko konstanti koliki je stupanj deriv.

7.2 Linearna derivacija n-tog reda

$$y^{n} + \alpha_{n-1}(x) y^{n-1} + \dots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = f(x)$$

neprekinute f-je od x

LDJ n-tog reda zadovoljava uvjete Picardovog TM pa Cauchyjev problem uvijek ima jedinstveno rješenje.
- f je neprekinuta na D
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ je omeđena na D

$$\underbrace{\left[\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)\right]}_{L \text{ (linearni diferencijalni operator)}} y = f(x) \longrightarrow Ly = f(x)$$

$Ly = 0 \to$ HOMO.

$Ly = f(x) \to$ PART.

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

TM Svako rješenje jednadžbe $Ly = f$ se može zapisati $y = y_h + y_p$

Dokazić: Neka je y_0 bilo koje rješenje $\Rightarrow L(y_0 - y_p) = Ly - Ly_p = f - f = 0$

$y_h = 0 \longrightarrow \boxed{y_p + y_h = y_0}$

Funkcije su LIN. NEZ ako iz $\alpha_1 y_1(x) + \dots \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in I$ slijedi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Determinanta Wronskog $\rightarrow$
$$W(y_1 \dots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

TM Ako je $W(y_1 \dots y_n) \neq 0$ tada su $y_1 \dots y_n$ LIN. NEZ.

DOKAZ:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \;/\;' \\ &\alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y_n' = 0 \;/\; \dots \text{ deriviramo } (n-1) \text{ puta} \\ &\alpha_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{homogeni sustav od } n \text{ nepoznanica } \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

- Det sustava je Wronskijan $\longrightarrow$ det $\neq 0 \Rightarrow$ REGULARNA JE

$\Downarrow$

lin. sustav ima jedinstveno rješenje

$\Rightarrow$ homogeni sustav ima jedinstveno rješenje ako $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

! OBRAT NE VRIJEDI $\rightarrow$ ako je $W = 0 \longrightarrow$ nema odluke

TM Prostor rješenja homogene LDJ je n-dim. vekt. prostor od $C^n[a,b]$.

↳ Rješenje HLDJ je n-tog oblika: n-kombinacija nez funkcija

$$\Rightarrow \boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \dots + C_n y_n}$$

{ $y_1 \dots y_n$ su lin. nez. funkcije (baza ovog prostora)

TM $y_1 \dots y_n$ su rješenja HLDJ za koja vrijedi $W(y_1, \dots y_n)(x_0) = 0$.
Tada su $y_1 \dots y_n$ LIN. ZAVISNE.

→ ne pomiješati sa $W \neq 0$ TM jer tamo nije navedeno da su te fje rješenja!

DOKAZ: Kao prošli put: $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ / 'deriviramo (n-1) puta

$$\alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y_n' = 0$$

$$\alpha_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0$$

} Det W je $W(x_0) = 0$ za neki x_0.
⊂ ne trivijalno rješenje; tj $\alpha_i^* \neq 0$

→ definiramo funkciju kao linearnu kombinaciju navedenih rješenja:

$$y_*(x) = \alpha_1^* y_1 + \dots + \alpha_n^* y_n$$ → to je rješenje HLDJ, ali i $y = 0$ je rješenje

$$\Rightarrow y_* = 0 = \alpha_1^* y_1 + \dots + \alpha_n^* y_n$$

▸ Budući da LDJ zadovoljava Picardov TM vrijedi jedinstvenost rješenja Cauchyjevog problema

→ barem jedan α_i je $\neq 0$ → iz definicije o linearnoj nezavisnosti zaključujemo da je onda ovo

LINEARNO ZAVISNO

TM Rješenja $y_1 \dots y_n$ od HLDJ n-tog reda su linearno nezavisna akko je $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$.

DOKAZ:

1. ako $W \neq 0$ tada su funkcije nezavisne

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ → funkcije su lin. nez.

7.3. HLDJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{n} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

za razliku od LDJ ova je homogena pa je rješenje $=0$

rj. : $y_h = c_1 y + \dots + c_n y_n$

Svakoj HLDJ s KK pridružen je karakteristični polinom

$$L(e^{rx}) \Leftrightarrow P_n(r) = r^n e^{rx} + a_{n-1} \cdot r^{n-1} \cdot e^{rx} + \dots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$$

$L(e^{rx}) = 0 \longrightarrow 0 \neq e^{rx} \underbrace{(r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots a_1 \cdot r + a_0)}_{=0} = 0$

prikaz homogene jed*

* jedina DJ bez integriranja

- Različite i realne nultočke (1. slučaj)

$\Rightarrow$ tada su $e^{r_1 x}, \dots e^{r_n x}$ rješenja HLDJ s KK

∟ to su linearno nezavisne funkcije $\longrightarrow$ $\boxed{\text{opće rj: } y_h = c_1 e^{r_1 x} + \dots + c_n e^{r_n x}}$

- Višestruke realne nultočke (2. slučaj)

∟ ako je nultočka r_1 kratnosti k (npr r_1 se ponavlja k puta; $r_{1,2,3} = -2$ ↳ $k=3$)

onda je $C_1 e^{r_1 x}$ k puta nultočka od $P_n(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\text{opće rj. } y_h = C_1 \underbrace{e^{r_1 x}}_{x^0} + C_2 x \cdot e^{r_1 x} + \dots + C_k \cdot x^{(k-1)} e^{r_1 x}}$$

- Kompleksno rješenje od $Ly = 0$ (3. slučaj)

∟ $Re\,y$ i $Im\,y$ su realna rješenja te jednadžbe $\rightarrow L(Re\,y + i\,Im\,y) = L(\underbrace{Re\,y}_{=0}) + iL(\underbrace{Im\,y}_{=0}) = 0$

$\Rightarrow$ ako su $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ nultočke polinoma

$$\hookrightarrow e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\pm i\beta x} = e^{\alpha x}[\cos(\pm\beta x) + i\sin(\pm\beta x)]$$

$$\longrightarrow \boxed{\text{opće rj: } y_h = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x}$$

7.4. Nehomogene LDJ s KK

· Sada rješavamo $Ly = f(x) \longrightarrow \boxed{y = y_h + y_p}$ opće rješenje

y_h: rj. pripadne HLDJ s KK — y_p: rj. pripadne nehomogene

1. METODA VARIJACIJE KONSTANTI (MVK)

1. rješimo pripadnu HLDJ $Ly = 0 \longrightarrow y_h = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$
2. variramo konstante $C_i \rightarrow C_i(x) \implies$ opće rj: $y = C_1(x) y_1 + \dots + C_n(x) y_n$
3. treba odrediti $C_1(x), \dots, C_n(x) = ?$

↳ sustav s n nepoznanica (deriviramo $(n-1)$ puta)

Zbog derivacije umnoška: $y' = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x)}_{\text{mora biti } 0} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i(x)'$ jer deriviramo konst.

$$\implies \left.\begin{aligned} C_1'(x) y_1 + \dots + C_n'(x) y_n &= 0 \\ C_1'(x) y_1' + \dots + C_n'(x) y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} &= f(x) \end{aligned}\right\}$$

Nepoznanice su $C_1'(x) \dots C_n'(x)$

– sustav uvjeta

→ Determinanta ovog nehomogenog sustava je Wronskijan $(y_1, \dots y_n)$.
Budući da su y_1 do y_n rješenja HLDJ oni su linearno nezavisni pa je $W \neq 0$.

Det $\neq 0$ pa je matrica regularna i ima jedinstveno rješenje.

$\implies C_1(x) \dots C_n(x)$ su jednoznačno određene pa se $C_i(x)$ dobije integriranjem

2 Metoda oblika desne strane (MODS)

$Ly = f(x) \rightarrow$ ako je $f(x) = e^{x}\left[Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\right]$ tada:

Rj: $y = y_h + y_p \longrightarrow y_p = e^{\alpha x}\left[R_1(x)\cos(\beta x) + R_2(x)\sin(\beta x)\right]\cdot x^{k}$ kratnost

gdje su $R_1(x)$ i $R_2(x)$ polinomi stupnja $\max\{St(Q_1), St(Q_2)\}$, čije koeficijente dobijemo uvrštavanjem u početnu jednadžbu

Npr. : $y'' + y = x^2$

1) $r^2 + 1 = 0$

$r = \pm i$

$y_h = C_1\cos x + C_2\sin x$

2) $y_p = Ax^2 + Bx + C$ – mora biti istog stupnja kao i rješenje (sada x^2)

▸ moramo provjeriti je li lin. nez. sa y_h
– ne moramo množiti s x jer je $\alpha = 0$

$\Rightarrow y' = 2Ax + B$
$y'' = 2A$

uvrstimo u y_p

$\hookrightarrow 2A + Ax^2 + Bx + C = x^2$

$A = 1$ $\quad 2A + C = 0$

$B = 0$ $\quad C = -2$

$$\Rightarrow \boxed{y = \underbrace{C_1\cos x + C_2\sin x}_{y_h} + \overbrace{x^2 - 2}^{y_p}}$$

7.7. Rješavanje DJ pomoću redova

→ kada DJ ne možemo eksplicitno riješiti

Rj. jednadžbe je oblika: $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

· budući da smijemo derivirati redove, nađemo sve potrebne derivacije funkcije y te ih uvrstimo u DJ

$$F(x, y, y', \dots y^n) = 0$$

Primjer: $y'' + y = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

želimo izjednačiti redove da ih možemo zbrojiti

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

→ dodali smo 2 na n kod prvog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\underbrace{(n+2)(n+1) C_{n+2} + C_n}_{=0}] x^n = 0$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1) C_{n+2} + C_n = 0$$

$$\hookrightarrow C_{n+2} = \frac{-C_n}{(n+2)(n+1)}$$

rekurzivno dolazimo do C

$n \geq 0$

$n = 0 \longrightarrow C_2 = \frac{-C_0}{2 \cdot 1}$

Kao što vidimo, C_0 i C_1 ne možemo dobiti i nisu zadani

↳ te konstante iskoristimo za rješenje

$n = 1 \longrightarrow C_3 = \frac{-C_1}{2 \cdot 3}$

$n = 2 \longrightarrow C_4 = \frac{-C_2}{3 \cdot 4} = \frac{C_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$n = 3 \longrightarrow C_5 = \frac{-C_3}{4 \cdot 5} = \frac{C_1}{5!}$

$n = 4 \longrightarrow C_6 = \frac{-C_4}{5 \cdot 6} = \frac{-C_0}{6!}$

$n = 5 \longrightarrow C_7 = \dots \frac{-C_1}{7!}$

$n = 6 \longrightarrow C_8 = \frac{-C_6}{7 \cdot 8} = \frac{C_0}{8!}$

OPĆE RJ: $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_4 x^4 + \dots$$

$$= C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2!} x^2 - \frac{C_1 x^3}{3!} + \frac{C_0 x^4}{4!} + \frac{C_1 x^5}{5!} + \dots$$

$$y = C_0 \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\right)}_{\cos} + C_1 \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)}_{\sin}$$

$$\boxed{y = C_0 \cdot \cos x + C_1 \cdot \sin x}$$