4.8. LAGRANGEOVA I CLAIRAUTOVA DJ

Što ako je y' unutar neke funkcije? $\Rightarrow$ supstitucija $y' = p(x)$

Postupak:

1. supstitucija
2. derivacija po x $\left(\frac{d}{dx}\right)$

Lagrangeova DJ: $y = \varphi(y') + \psi(y')$ — općenit izgled, ali kao što vidimo y' je u obje fje

MI-14-6 * ima na rokovima, ali kontinuirano 2014

$$y = x(y')^2 - 2(y')^3$$

$$y = xp^2 - 2p^3 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

obično deriv po x — $(y)\frac{d}{dx} = y' = p$!

tu uvrštavam

$$p = p^2 + x2p\,p' - 6p^2 \cdot p'$$ → nova jednadžba po p, nadamo se jednostav.

$$p - p^2 = p'p(2x - 6p) \quad \Big/ : p$$

* ali i to je jedno rješenje

1. slučaj: $p = 0$ → $y = 0$ — DA, to je jedno rješenje

$$1 - p = p'(2x - 6p)$$

↳ možemo tražiti eulerov multiplikator

→ ili riješimo kao linearnu, $p' = \frac{1}{x'}$ ($y' \to x'$)

$$1 - p = \frac{1}{x'}(2x - 6p) \quad \Big/ \cdot \frac{x'}{1-p}$$

2. slučaj $p = 1$ → $y = x - 2$

$$x' = \frac{1}{1-p}(2x - 6p) \longrightarrow x' = \frac{2}{1-p}x - \frac{6p}{1-p}$$

$$x' - \frac{2}{1-p}x = \boxed{\frac{-6p}{1-p}}$$ LVJ $x(p)$

$$x = e^{-\int \frac{2}{p-1}dp}\left[\int \frac{6p}{p-1} e^{\int \frac{2}{p-1}dp} dp + C\right]$$

$$x = e^{-2\ln|p-1|}\left[\int \frac{6p}{p-1} e^{2\ln|p-1|} dp + C\right]$$

$$x = (p-1)^{-2}\left[\int \frac{6p}{\cancel{p-1}}(p-1)^{\cancel{2}} dp + C\right]$$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left[2p^3 - 3p^2 + C\right]$$

Konačno rješenje je $y(x)$ zadan parametarski

$$y = xp^2 - 2p^3$$

Clairautova DJ $\quad y = y' \cdot x + \varphi(y')$

(specijalni slučaj DJ)

ZAD $\quad y = xy' + \dfrac{1}{y'} \qquad y' = p$

$$y = xp + \frac{1}{p} \;\Big/ \frac{d}{dx}$$ ← tu uvrštavam

$$\cancel{p} = \cancel{p} + x \cdot p' + \frac{-1}{p^2} \cdot p'$$

$$0 = p' \cdot \left(x - \frac{1}{p^2} \right)$$

1) $p' = 0 \rightarrow p = c$

opće rješenje: $Cx + \dfrac{1}{C}$

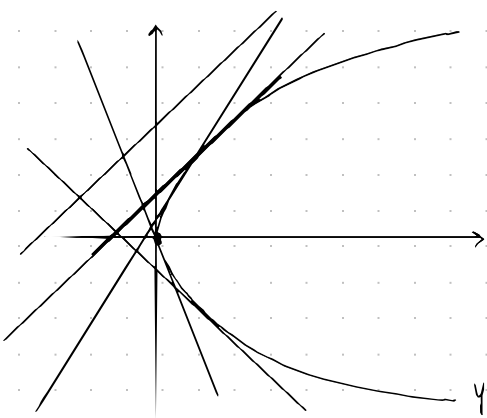
↳ familija pravaca ✗

2) $x = \dfrac{1}{p^2}$

$$p = \pm \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = \pm x \frac{1}{\sqrt{x}} \pm \sqrt{x} = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{x}$$

$$y = \pm 2\sqrt{x} \rightarrow y^2 = 4x$$



→ opća rješenja su UVIJEK tangente na drugo rješenje!

– u svakoj točki možemo povući tangentu koja je iz familije pravaca

⇒ SINGULARNO RJEŠENJE : $y^2 = 4x$
(u svakoj točki nije jedinstvena)

⇒ opće rješenje ⇒ singularno rješenje ✗ OVOJNICA familije
krivulja iz općeg

21-22-3 a) smo riješili prošli tjedan

b) Odrediti ovojnicu familije krivulja

* ovo je „unazad" $y + \ln C = Cx \,/\,'$

$$y' + 0 = c$$

$$\longrightarrow p = y' = C$$

UVRSTIMO:

$$y + \ln p = px \longrightarrow \cancel{y = y'x - \ln y'}$$

$$\Big\downarrow \; d/dx$$

$$\cancel{p} + \frac{1}{p}\cdot p' = p'x + \cancel{p}$$

$$\frac{1}{p}\cdot p' - p'x = 0$$

$$p'\left(\frac{1}{p} - x\right) = 0$$

1° $p' = 0 \rightarrow \boxed{p = C}$

2° uvrštavamo

$$x = \frac{1}{p} \rightarrow p = \frac{1}{x}$$

$$y + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}$$

$$\boxed{y = 1 + \ln x}$$

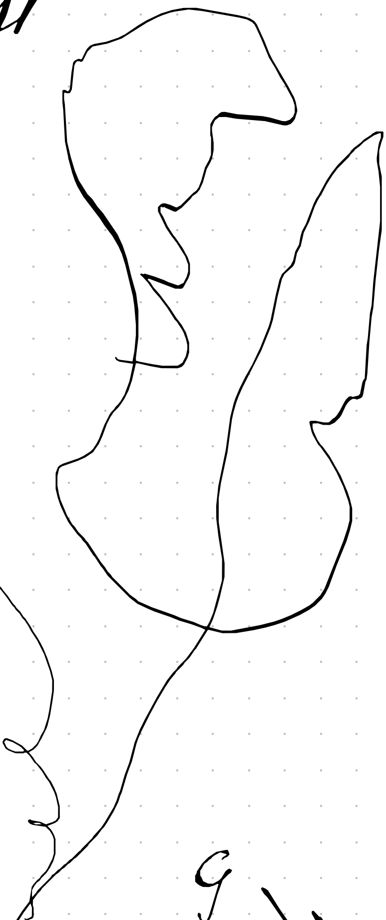
ovojnica

G G Gr

G

Gracia

Gracia



G

Ich

Gracie

lieben

von

G

Gr