3.6. LINEARNA NEZAVISNOST VEKTORA I RANG MATRICE

$\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $\left(\mathcal{M} \quad \mathbb{R}^n, V^n\right)$ $\quad i=1\dots k$

$\boxed{\text{DEF}}$ Neka su $a_1, a_2, \dots, a_k$ bilokoji vektori iz prostora V^n.
Linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_k$ je vektor oblika

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k.$$

pri čemu su $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ po volji odabrani skalari. Skup svih ovakvih linearnih kombinacija nazivamo prostorom razapetim vektorima $a_1, \dots a_k$ i označavamo s

$$L(a_1, \dots, a_k) = \{x : x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k, \ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Pr. 1) geometrijski pravac kroz ishodište $\longrightarrow$ prostor razapet s jednim vektorom $\Big\}$ $L(a_1) = \{v = \lambda a_1, \ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{bmatrix}\lambda\\ \lambda\end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$L = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \left\{\vec{x} \in V^2 : \vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 \ ; \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\lambda_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} : \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Pokažimo da za ovako odabrane $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ je $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = V^2$, odnosno da se svaki vektor iz V^2 može prikazati kao linearna kombinacija zadanih vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$.

→ Uzmemo bilo koji vektor $x \in V^2$

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \iff \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$ možemo zapisati u obliku linearn. sustava

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= x_1 \\ \lambda_1 + \underbrace{\lambda_2 \cdot 0}_{0} &= x_2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= x_1 \\ \lambda_1 &= x_2 \end{aligned} \hookrightarrow \lambda_2 = x_1 - \lambda_1$$

→ Dakle, za svaki x možemo pronaći odgovarajuće koeficijente λ_1 i λ_2 za koje će vrijediti.

Pokažimo da za ovako odabrane $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ je $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = V^2$,

* odnosno da svaki vektor iz V^2 se može prikazati kao linearna kombinacija zadanih vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$.

Uzmimo proizvoljni vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in V^2$ i gledamo

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_2 &= \lambda_1 \end{aligned}$$

dobili smo linearan sustav u varij. λ_1 i λ_2.

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_1 &= x_1 \\ \lambda_1 &= x_2 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ čije je rješenje:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x_2 \\ \lambda_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

NPR: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

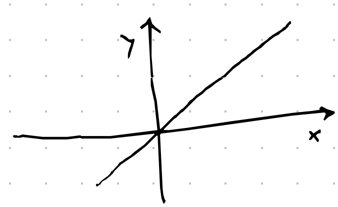
Dakle pokazali smo da za svaki $x \in V^2$ možemo naći λ_1 i λ_2 t.d.j. $\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$

Pr. 2) $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = V^2$

$$L(\vec{a}_1) = \{ \vec{x} \in V^2 ; \vec{x} = \lambda \vec{a}_1 , \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \}$$

grafički da sve vrijednosti poprime j/c

$y = x$ pravac



$\boxed{\text{DEF}}$ Linearna nezavisnost vektora $\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k$

Kažemo da su vektori $\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k$ linearno nezav. ako iz jednakosti $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$.
Slijedi da su svi skalari $\lambda_1 \dots \lambda_k$ moraju biti jednaki nuli tj. $\lambda_1 = \lambda_2 \dots = \lambda_k = 0$.

Vektori $\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k$ su linearno zavisni ako nisu linearno nezavisni (danu)

$\boxed{\text{DEF}}$ Eksplicitna def. Linearne zavisnosti

Kažemo da su vekt. $\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k$ linearno zavisni ako postoje skalari $\lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ od kojih barem jedan nije jednak nuli. td. j. vrijedi $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$

*NAP: Vektori su zavisni ako se jedan može prikazati kao linearna komb. ostalih.

Pr 2.) i)

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{0}$$

$\vec{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{e}_1, \vec{e}_2 \in V^2$ $\quad \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(jedinični vektori)

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

. Njihova linearna kombinacija iščezava samo na trivijalni način

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$$

Pr. 2.) ii)

$\vec{a_1} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ $\quad \vec{a_2} = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ očito $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$

Njihova linearna kombinacija

odnosno: $2\vec{a}_1 + (-1)\vec{a}_2 = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ su linearno zavisni

NAP: Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (različita od $\vec{0}$) linearno zavisna ako i samo ako postoji $\lambda \neq 0$ tako da je $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$

iii.) DZ Pokažite da su vektori $\vec{a_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ i $\vec{a_2} \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ linearno nezavisni.

Pr. 2.) iv)

$\vec{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \vec{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \ldots \vec{e_n} = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

jedinični koordinatni vektori su uvijek nezavisni

$\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

$\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \in V^n$ svaki $\vec{x} \in V^n$ se može prikazati u obliku $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_n\vec{e_n}$

linearna kombinacija vektora $\vec{e_1} \ldots \vec{e_n}$

Pr. 3.)

$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 3 & -2\\0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Uočite da rang mat. A odgovara broju linearno nez. (ne nul redaka)

$\rho(A) = 3$

rang matrice

$\vec{a_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\\3\\-2\end{bmatrix}, \vec{a_2} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\\2\\1\end{bmatrix} \quad \vec{a_3} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\2\\4\end{bmatrix}$

gledamo $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} = \vec{0}$

$\boxed{\text{DZ}}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ su lin. nez.

$\boxed{TM_{12}}$ Rang matrice jednak je broju linearno nez. redaka.

NAP: Svi ne nul redci reducirane forme matrice su linearno nezavisni

$\boxed{TM_{11}}$ Element. transform. ne mijenjaju broj linearno nezavisnih redaka matrica.

(Ekvivalentne mat. imaju isti rang)

$\boxed{TM\ 13}$ Broj linearno nez. redaka bilo koje matrice jednak je broju njezinih lin. nez. stupaca. (Rang po retcima jednak je rangu po stupcima). $\boxed{r(A) = r(A^T)}$

Zad. 1.) Pomoću ranga mat. ispitajte da li su vekt.

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Formiramo mat. čiji su stupci zadani vektorom te rač. rang.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

$$r(A) = \min\{4, 3\} = \underline{\underline{3}}$$

$\boxed{TM\ 12}$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ su lin. nez.

Zad. 2.) Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje su vekt.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{lin. nez.}$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & a-4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ :(-5) \\ :(-3) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(3-a) \\ a \neq 3 \end{matrix}$$

1. slučaj $a = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 < 3$$

broj zadanih vekt.

$\Rightarrow$ za $a = 3$ zadani vektori su lin. zavisni

2. slučaj $a \neq 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r(A) = 3 = 3$$

broj zadanih vektora