tjedan 2

2.1. Limesi

→ ε okolina u 2D je krug

· prije je bio interval ali tada je ε bila iz $\mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \to 0)$$

ako se nalazimo u okolini ...

$$(\forall x,y \in D_f)\left(0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon\right)$$

↳ središte kruga je x_0, y_0, a polumjer δ

da je 1 varijabla $\sqrt{(x-x_0)^2}$ i to je ono iz MAT 1

→ krug je najprirodnija okolina

za $f(x,y,z)$ → kugla

Pr.) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+y}{2x-y^2} = \frac{1+2}{2-4} = \frac{-3}{2}$

Postoji ∞ smjerova približavanja!

Limes postoji ako je isti po svim smjerovima!

Zad) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \cancel{L}$!!?

(x-os) kad odaberemo $y=0$ smjer prelazimo na fju 1 var. → $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{0}{2x^6+0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{2x^6} = \underline{\underline{0}}$

(y-os) $x=0$ → $\displaystyle \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = \underline{0}$

i dalje moramo provjerit ∞ smjerova

$y = x^3$ → $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^6}}{3\cancel{x^6}} = \underline{\frac{1}{3}}$

našli smo dva smjera u kojima su limesi različiti → NE POSTOJI

Polarne koordinate

→ bolje za određivanje više-var limesa

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad x^2+y^2=r^2$

ZAD: a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{2x^2+2y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{pol.}}{=} \lim\limits_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\text{pol}}{=} \lim \frac{3r\cos\varphi}{\underbrace{\sqrt{r^2}}_{=r}} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{3\cancel{r}\cos\varphi}{\cancel{r}} = 3\cos\varphi$

jer >0!

↳ LIM NE POSTOJI!
JER OVISI O φ → nije stalna vrijednost

MI 2022.

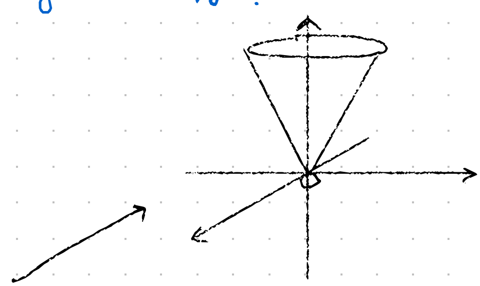
1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y}-1}{y} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$x=0 \quad \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^{2y}-1}{y} = 2$

$y=x \quad \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = 3$

$\boxed{\text{DEF}}$ Kažemo da je f neprekinuta ako je $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$

! Limes mora biti jednak vrijednosti fje !



LJIR 2022.

1) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ -1 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ → $\lim\limits_{x,y\to 0,0} \sqrt{2x^2+y^2} = 0$

$f(0,0) = -1$

↳ $-1 \neq 0$

! limes postoji, ali nije neprekinuta

M1 20

1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ a, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{3}}\cos^3\varphi + r^{\cancel{3}}\sin^3\varphi}{\cancel{r^2}}$$

cos i sin omeđene sa -1 i 1

$$= \lim_{r\to 0} r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 0 \cdot (\text{nešto ograničeno}) = 0$$

$f(0,0) = a = \lim \cdots = 0 \longrightarrow \boxed{a=0}$

M1 2021

1) def. neprekinutost $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ u točki $(x_0, y_0) \in D_f$.

Ispitajte neprekinutost fje f u točki $(0,0)$;

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{4x^4+3y^{4/3}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1/7 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

* ne polarne!

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{xy}{4x^4+3y^{4/3}} = ?$$

→ nije bilo postavljanje limesa za ovaj dio zadatka

$y=0 \quad \lim_{x\to 0} \dfrac{0}{4x^4} = 0 \neq \dfrac{1}{7}$ ima prekid

navlakuša: $y = x^3 \rightarrow \dfrac{\cancel{x^4}}{7\cancel{x^4}} = \dfrac{1}{7}$! ali to je samo u jednom smjeru !