3. PRIMJENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA

1. Integrali ovisni o parametru $\longrightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,a)\,dx$

$\boxed{\text{TM}}$ **Derivacija integrala ovisnog o parametru (Leibnizovo pravilo)**

$I(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$ – određeni integral ovisan o parametru α

neprekinute diferencijabilne funkcije

$\longrightarrow I'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$

$$I'(\alpha) = f[\psi(\alpha),\alpha]\cdot\psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha),\alpha]\cdot\varphi'(\alpha) + \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$$

- ako granice ne ovise o α:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$$

– vrijedi i u slučaju kad su jedna ili obje granice u ∞

- ako $f(x,\alpha)$ ne ovisi o α i kada je $\varphi(\alpha)=a$ neka konstanta, a $\psi(\alpha)=\alpha$, onda se formula iz TM svodi na:

iz MAT1

$$\frac{d}{d\alpha} = \int_a^\alpha f(x)\,dx = f(a) \longrightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$$

2. Taylor (za 2 varijable)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(T_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(T_0)(y-y_0)} + \ldots$$

– prvi diferencijal

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(T_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(T_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(T_0)(y-y_0)^2\right] + \ldots$$

$$+\ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0) + \ldots$$

+ Lagrangeov ostatak: $\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} \cdot f(T_c)$

točka na spojnici $T(x,y)$ i $T_0(x_0,y_0)$

$$\Rightarrow f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x+y)$$

3. Kvadratne forme

DEF Kvad. forma dviju varijabla je homogena, kvad funkcija dviju realnih varijabla $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ → $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$

$a,b,c \in \mathbb{R}$ i pridruženi su u simetričnu matricu => $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ MATRICA KVADRATNE FORME

▸ triju varijabla $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$

$Q(h,k,l) = ah^2 + bk^2 + cl^2 + 2dhk + 2ehl + 2fkl$

=> $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$ minore: a $\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix}$

DEF Definitnost kvad forme $Q(h_1, \dots h_n)$

* možemo nacrtati njihov graf

a) pozitivno definitna $Q(h,k) > 0$

b) negativno definitna $Q(h,k) < 0$

c) INDEFINITNA $Q(h,k)$ mijenja predznake (negdje >0, negdje <0)

TM Sylvesterov kriterij za kvad formu $Q(h,k) = ak^2 + 2bhk + ck^2$

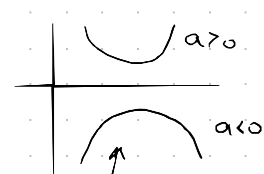
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

a) $\det A > 0$ + $a > 0$ → Q je poz def

b) $\det A > 0$ + $a < 0$ → Q je neg def

c) $\det A < 0$ → Q je indefinitna

* $\det A = 0$ => nema odluke



DOKAZ:

$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 \to k^2\left(a\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2b\left(\frac{h}{k}\right) + c\right)$

$t = \frac{h}{k} \to p(t) = at^2 + 2bt + c$ – da bi $p(t) > 0$, $a > 0$ i želimo da „lebdi"

a) $p(t) > 0$, $a > 0$ → $D < 0$ → $4b^2 - 4ac < 0 \;/:(-4)$

$ac - b^2 > 0$ → to je $\det A > 0$ ✓

b) $a < 0$

c) $D > 0$ → $\det A < 0$

4. Lokalni ekstremi

MIN - ako postoji okolina u kojoj je $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$, $(\forall x,y) \in K_\varepsilon$

MAX ako postoji okolina K_ε u kojoj $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$, $(\forall x,y) \in K_\varepsilon$

TM Fermatov teorem: NUŽAN UVJET za lok ekstreme

Ako je $f(x,y)$ diferencijabilna i ima ekstrem u T_0, onda $\nabla f(T_0) = \vec{0}$.

↳ tj. $\frac{\partial f}{\partial x} T_0 = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} T_0 = 0$

DOKAZ: Definiramo $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kao restrikciju funkcije na $y = y_0$

< fiksirali smo $y_0 \to f_1(x) = f(x, y_0)$

- po pretpostavci $f_1(x)$ ima lok. ekstrem u x_0 → FERMATOV TM za 1 var → $f'(x_0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d f_1}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

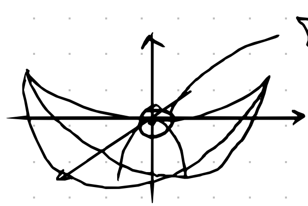
-II- analogno napravimo i za $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fiksiramo $x = x_0$

$$\frac{d f_2}{d f y}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

*NAP: implikacija ne vrijedi

- ako je $\nabla f = \vec{0}$ u T_0, to samo znači da je STAC TOČKA!

↳ sedlo



$\nabla f(T_0) = \vec{0}$ ali to nije ni max ni mi

$\Rightarrow$ NUŽAN UVJET za lok ekstrem u točki T_0 $\Rightarrow$ da je u točki T_0 STACIONARNA TOČKA

Drugi diferencijal f-je $f(x,y)$ je kvad forma:

Hesseova matrica

$$d^2 f = \underbrace{f''_{xx}}_{a}(dx)^2 + \underbrace{2f''_{xy}}_{b}(dx)(dy) + \underbrace{f''_{yy}}_{c}(dy)^2 \Rightarrow Hf = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

TM | DOVOLJAN UVJET – f je dvaput neprekinuto dif. & T_0 je stac točka $\nabla f(T_0) = \vec{0}$

a) ako je $d^2 f > 0 \longrightarrow \boxed{\min}$

b) ako je $d^2 f < 0 \longrightarrow \boxed{MAX}$

c) ako je $d^2 f \gtrless 0 \rightarrow$ indefinitno $\Rightarrow$ SEDLO

* ako je $d^2 f(T_0) = 0$ moramo dalje tražiti

DOKAZ: koristimo Taylora za oko T_0

· koristimo Taylora prvog stupnja jer je ostatak drugog stupnja

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(T_c)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(T_c)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(T_c)(\Delta y)^2\right]$$

budući da je točka na spojnici stacionarna: $f'_x = f'_y = 0$

$\rightarrow T_c$ je između $T_0(x_0,y_0)$ i $T(x,y)$

$$\Rightarrow f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(T_c)(\Delta x, \Delta y)$$

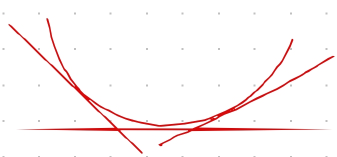
ako je $d^2 f > 0$ (desna strana je jednaka lijevoj) i prema tome

$$f(x,y) > f(x_0,y_0) \Rightarrow \text{lokalni minimum}$$

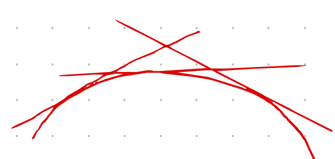
– izraz $\frac{1}{2!} d^2 f(T_c)$ je zapravo pogreška linearne aproksimacije

pogreška pozitivna

pogreška negativna



ploha (graf) je iznad tang ravnine



ploha je ispod tang ravnine

TM | DOVOLJAN UVJET pomoću Hesseove matrice

Neka je $T_0(x_0, y_0)$ stac točka funkcije $z = f(x,y)$, Hesseova mat u T_0 je:

$$Hf(T_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(T_0) & f''_{xy}(T_0) \\ f''_{xy}(T_0) & f''_{yy}(T_0) \end{bmatrix}$$

Tada:

a) $(f''_{xx})_0 > 0$, $\det Hf(T_0) > 0$ $\longrightarrow$ T_0 strogi lok min

b) $(f''_{xx})_0 < 0$, $\det Hf(T_0) > 0$ $\longrightarrow$ T_0 strogi lok max

c) $\det Hf < 0$ $\longrightarrow$ T_0 je <u>sedlasta točka</u>

POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE LOK EKSTREMA: (2 var)

I. traženje stac. točaka ∪ točaka nediferencijabilnosti ⇒ KRITIČNE TOČKE

II. ispitivanje svih stac točaka pomoću $d^2 f$ ili Hesseove mat

III. donošenje odluke o tipu lok. ekstrema za svaku stac. točku

slučaj 3 varijable $u = u(x,y,z) \longrightarrow$ kvad forma:

$$d^2u = u''_{xx}(dx)^2 + u''_{yy}(dy)^2 + u''_{zz}(dz) + 2u''_{xy}(dx)(dy) + 2u''_{xz}(dx)(dz) + 2u''_{yz}(dy)(dz)$$

$$\Rightarrow Hf = \begin{bmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{xy} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{xz} & u''_{yz} & u''_{zz} \end{bmatrix}$$

TM | Sylvester za 3 var

a	m	V	
+	+	+	min
−	+	−	MAX
	ostalo		sedlo

a - prvi član

m - mala minora

V - velika minora

5. Globalni ekstremi

- funkcija postiže neki min i max na intervalu $[a,b]$

KRITIČNE TOČKE:

↳ rubovi intervala

↳ stacionarne točke

↳ točke u kojima f nije diferencijabilna

} jedini kandidati za glob max i min u $[a,b]$

→ $\vec{x_0}$ je glob max ako $f(\vec{x_0}) \geq f(x), (\forall x \in D_f)$

glob min ako $f(\vec{x_0}) \leq f(x), (\forall x \in D_f)$

rubovi intervala su rubovi domene

DOKAZ: Ako $\vec{x_0}$ nije kritična točka:

$\vec{x_0}$ nije stacionarna   f je diferencijabilna u $\vec{x_0}$

ODREĐIVANJE GLOB EKSTREMA funkcije f na zatvorenom, omeđ skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

I. pronaći sve točke u kojima f nije dif.

II. pronaći sve stac točke funkcije f unutar D

III. pronaći točke glob ekst restrikcije fje f na rubu D (MLM)

IV. Evaluirati f u svim dobivenim točkama

▸ Afina funkcija

LIN. FUNKC. VIŠE VAR

vektor $\vec{a}, \vec{a} \neq 0$, $d \in \mathbb{R} \to f(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$

$\Rightarrow g(\vec{x}) = \vec{a}\vec{x} + \vec{b}$ = AFINA FJA VIŠE VAR

*graf afine funkcije u slučaju $n=2$ → ravnina

uoči: $\nabla f(\vec{x}) = \nabla g(\vec{x}) = \vec{a}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

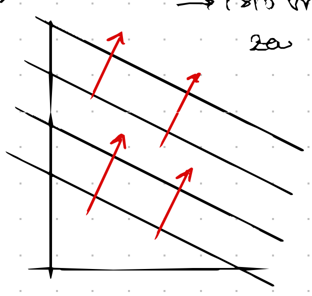
nivo krivulje $f(x,y) = a_1x + a_2y + d$

su paralelni pravci oblika

$a_1x + a_2y = c$

↳ ⊥ na $\nabla f(x,y) = (a_1, a_2)$

→ isto vrijedi i za nivo plohe



↳ Afina fja je svuda diferencijabilna i nema stac točaka jer $\nabla f = \vec{a} \neq \vec{0}$

6. Uvjetni ekstremi σ MLM

TM | NUŽAN UVJET za uvjetni ekstrem

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) + \underline{\lambda}\, \varphi(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$$

Lagrangeov Multiplikator $\underline{\lambda}$ $\quad L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda f(x)$

I. uvedemo $\lambda \to L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

II. $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ $\quad$ ali stac točke i dalje moraju zadovoljiti $\varphi(x, y) = 0$

III. Provjeriti definitnost d^2L

$$\Rightarrow d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + L''_{yy}(dy)^2 + L''_{\lambda\lambda}(d\lambda)^2$$

$$+ 2L''_{xy}(dx)(dy) + \underbrace{2L''_{x\lambda}(dx)(d\lambda) + 2L''_{y\lambda}(dy)(d\lambda)}_{2(L'_x(dx) + L'_y(dy))\,d\lambda}$$

$\hookrightarrow 2(\varphi'_x dx + \varphi'_y dy)\, d\lambda \longrightarrow = 0$

$$\Rightarrow d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + L''_{yy}(dy)^2 + L''_{\lambda\lambda}(d\lambda) + 2L''_{xy}(dx)(dy)$$