# MATRICE

- pravokutna tablica realnih brojeva

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \pi \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad D = [1, 2, 3)$

$2 \times 2 \qquad 2 \times 3 \qquad 3 \times 1 \qquad 1 \times 3$

Matrica A tipa $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

oznak $A \in M_{mn}$ ili $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- $m = n \rightarrow$ kvadratna matrica

$\hookrightarrow A \in M_n$ ili $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $(A)_{ij} = a_{ij}$ – $j$ = indeks stupca $(1 \cdots n)$

$i$ = indeks retka $(1 \cdots m)$

## Jednakost matrica

- A i B $\rightarrow$ ako imaju jednak br stupaca i redaka

$\rightarrow$ imaju jednake odgovarajuće elemente

$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall_{ij}$

## Zad. 1.)

$A = \begin{bmatrix} 1 & a-3 \\ 0 & 2b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a+1 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} a-3=b \\ 2b=a+1 \end{matrix}\right\} \quad 2(a-3)=a+1$$

$2a-6=a+1$

$\boxed{a=7} \quad \boxed{b=4}$

# Osnovni tipovi matrica

- **nul matrica:** $a_{ij} = 0, \ \forall_{ij}$
- **dijagonalna matrica** → podskup kvadratnih matrica
  ↳ svi elementi van glavne dijagonale jednaki nula
  $a_{ij} = 0 \ \forall_{ij} \ i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cancel{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nije

* elementi samo na dijagonali

- **jedinična matrica** → dijagonalna, svi el. na dijagonali su 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Oznaka: $I = (\delta_{ij})$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

↑ Kroneckov delta simbol

- **trokutaste tablice** – kvadratne, elem. ispod ili iznad dijagonale

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

* dijagonalne matrice su presjek gornje i donje trokutaste matrice

- **transponirana matrica matrice A** $A^T$

↳ matrici A zamijenimo retke i stupce

$$= (A^T)_{ij} = (A)_{ji} \quad \forall i,j$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

→ dijagonalne matrice se ne mijenjaju transponiranjem

- **simetrične matrice** $A \in M_n$ takva da vrijedi $A^T = A$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j \; j = 1 \cdots n \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- **antisimetrične matrice** $A^T = -A$

$a_{ij} = -a_{ji}$ (ima samo nule na dijagonali)

↳ ostalim elementima promijenimo predznak (uz preslikavanje)

## Vektor kao matrica

- vektor redak : $[1 \; 2 \; 1] \in \mathbb{R}^{1\times 3}$
- vektor stupac $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

# Operacije s matricama istog tipa

$M_{mn}$ skup svih matrica tipa $m \times n$
$(\mathbb{R}^{m \times n})$

· zbrajanje matrica $A, B \in M_{mn} \Rightarrow A+B \in M_{mn}$

*moraju biti istog tipa!

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, \quad \forall i,j$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

· množenje matrice skalarom $A \in M_{mn}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A \in M_{mn}$

$$\lambda (A)_{ij} = (\lambda A)_{ij}, \quad \forall i,j$$

$$3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

# Svojstva zbrajanja matrica i množenja matrice skalarom

- za proizvoljne matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_{mn}$ vrijedi:

Z1 $(A+B)+C = A+(B+C)$ asocijativnost

Z2 $A+B = B+A$ komutativnost

Z3 $A+0 = 0+A = A$ postojanje neutralnog elementa (0 je nul matrica)

Z4 za svaku matricu $A$ postoji njoj suprotna matrica $-A$ takva da je $A+(-A)=0$ postojanje suprotnog elementa

za proizvoljne matrice $A, B \in M_{mn}$ i za proizvoljne skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

M1 $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ distributivnost prema zbrajanju

M2 $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ –||– u $\mathbb{R}$

M3 $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$ usklađenost množenja

M4 $1 \cdot A = A$ netrivijalnost množenja

$\Longrightarrow$ svojstva Z1 – Z4 i M1 – M4 daju skupu $M_{mn}$ strukturu vektorskog prostora.