RANG I INVERZ MAT.

3.1.

* nećemo def. inverz ako matrica nije kvadratna

1. $A \in M_n$. Matrica $A' \in M_n$ za koju vrijedi $A'A = AA' = I$ naziva se inverzna matrica matrice A
$\rightarrow A^{-1}$

2. Mat. $A \in M_n$ je regularna (invertibilna) ako postoji A^{-1}. Ako nije regularna (nema inverz) onda je singularna (rijetkost).

Primjer 1.)

a)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A \cdot A' = I$$

$$A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nemoguće

– ne postoji A' koja bi zadovoljavala svojstvo

A nema inverz $\Longrightarrow$ SINGULARNA

d)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2a = 1$ $2b = 0$

$a = \frac{1}{2}$ $b = 0$

$3c = 0$ $d = \frac{1}{3}$

$c = 0$

$$\rightarrow A' \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$A' \cdot A = I$

$\boxed{\text{TEOREM}}$ Jedinstvenost inverza

Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ regularna mat. Tada postoji točno jedna mat A' takva da je $A'A = A' = I$.

DOKAZ:

Pretpostavimo suprotno; Neka postoje A' i A'' inverz mat zadane reg mat A.

$$AA' = A'A = I$$
$$AA'' = A''A = I$$

$A'A = I \ /A''$ množim s desna

$$A'(A \cdot A'') = A''$$
$$IA' = A'' \implies A' = A'' \ \lightning\lightning$$

$\boxed{\text{TEOREM}}$ Mat. $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

Kramerova formula: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

· gornja formula je zgodna za računanje inverzne mat tipa 2x2.

DOKAZ: $\boxed{\Rightarrow}$ neka je A reg. mat. Tada postoji jedinstven inverz A^{-1} t.d $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Primjenimo Binet-Cauchyev teorem

$$\det(AA^{-1}) = \det(I)$$
$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$
$$\implies \det(A) \neq 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $\det A \neq 0$. Pokazuje se da tada postoji A^{-1} i vrijedi $(A^{-1})_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\det A}$

$\boxed{\text{TEOREM 2}}$ Umnožak regularnih matrica

Ako su $\underline{\underline{A}}$ i $\underline{\underline{B}}$ regularne matrice istog reda, tada je i $\underline{\underline{AB}}$ regularna i vrijedi:

$$(AB)^{1} = B^{-1}A^{-1}$$

<u>Dokaz:</u>

Matrica $B^{-1}A^{-1}$ postoji po pretpostavci.

Direktna provjera:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\overbrace{BB^{-1}}^{I}A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1}$$

$$A \cdot I \cdot A' = A \cdot A' = \underline{\underline{I}}$$

Zato postoji inverz od AB i on je jednak $B^{-1}A^{-1}$.