

1. Otpor  $R_X$  voda mjereno je  $UI$  metodom u spoju za mjerenje malih otpora. Napon je mjereno digitalnim voltmetrom unutarnjeg otpora  $10\text{ M}\Omega$  na mjernom području  $100\text{ mV}$ , a struja digitalnim ampermetrom na mjernom području  $1\text{ A}$ . Koliki je njegov iznos ako pri struji od  $0,925\text{ A}$  voltmetar mjeri napon  $22,61\text{ mV}$ , a uz komutaciju struje napon  $-23,57\text{ mV}$ ?

Podatci:

Digitalni voltmetar:

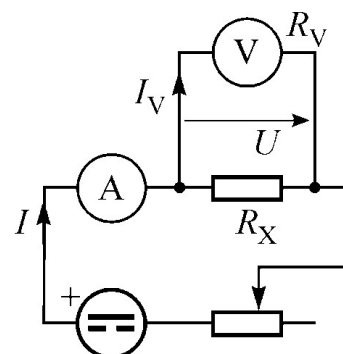
$M.O._V = 100\text{ mV}$ ,  $R_V = 10\text{ M}\Omega$

Analogni ampermetar:

$M.O._A = 1\text{ A}$

Mjerenje:

$I_A = 0,925\text{ A}$ ,  $U_{V+} = 22,61\text{ mV}$ ,  $U_{V-} = -23,57\text{ mV}$



Sl. 1 Mjerenje otpora  $UI$  metodom

Traži se:  $R_X$

**Rješenje:**

Pri mjerenju *vrlo malih otpora* (manjih od reda  $10^{-2}\text{ }\Omega$ ) valja koristiti osjetljiv instrument (nanovoltmetar) te obratiti pozornost na utjecaj *termonapona* ( $\rightarrow$  vidi *lab. vježbe*). Pri mjerenju pada napona  $U_V$ , termonapon  $\Delta U$  kao utjecajna veličina neovisna je o smjeru struje u mjernom krugu. Stoga je njezin utjecaj moguće ukloniti dodatnim mjerenjem uz obratni smjer struje, tj. *komutacijom struje* u mjernom krugu:

$$\text{prvo mjerenje (bez komutacije)} \rightarrow U_{V+} = I_A \cdot R_X + \Delta U$$

$$\text{drugo mjerenje (s komutacijom)} \rightarrow U_{V-} = -I_A \cdot R_X + \Delta U$$

Kako je u rezultatima oba mjerenja termonapon  $\Delta U$  zastupljen s jednakim predznakom, sljedećim će izračunom on biti eliminiran:

$$U_V = \frac{U_{V+} - U_{V-}}{2} = \frac{(I_A \cdot R_X + \Delta U) - (-I_A \cdot R_X + \Delta U)}{2} = I_A \cdot R_X$$

Mjerena veličina je otpor  $R_X$  te konačno izlazi:

$$R_X = \frac{U_{V+} - U_{V-}}{2 \cdot I_A} = \frac{22,61 - (-23,57)}{2 \cdot 0,925} = 24,96\text{ m}\Omega$$

2. Vrlo veliki otpor  $R_X$  nekog izolacijskog kruga mjeri se gubitkom naboja kondenzatora kapaciteta 100 nF, kojeg je tangens kuta gubitaka  $\operatorname{tg}\delta = 9,2 \cdot 10^{-6}$  prethodno izmjeren pri frekvenciji 40 Hz. Kondenzator početno nabijen na napon  $U_0 = 50$  V, izbija se ispitivanim izolacijskim otporom  $R_X$ , pri čemu se napon na njemu kontrolira digitalnim voltmetrom unutarnjeg otpora 10 G $\Omega$ . Ako vrijeme  $\Delta t$  njegovog izbijanja na napon upola manji od početnog iznosi 22 s, koliki je otpor izolacije ispitivanog kruga?

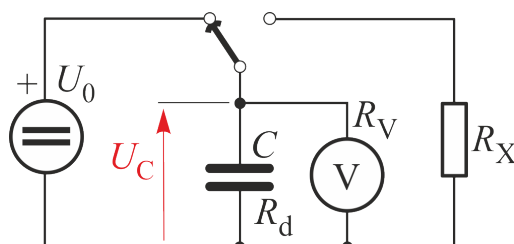
Podatci:

$C = 100$  nF,  $\operatorname{tg}\delta = 9,2 \cdot 10^{-6}$  (pri  $f = 40$  Hz)

$U_0 = 50$  V,  $U_C = U_0/2$

$R_V = 10$  G $\Omega$ ,  $\Delta t = 22$  s

Traži se:  $R_X$



Sl. 2a Mjerenje velikog otpora gubitkom naboja

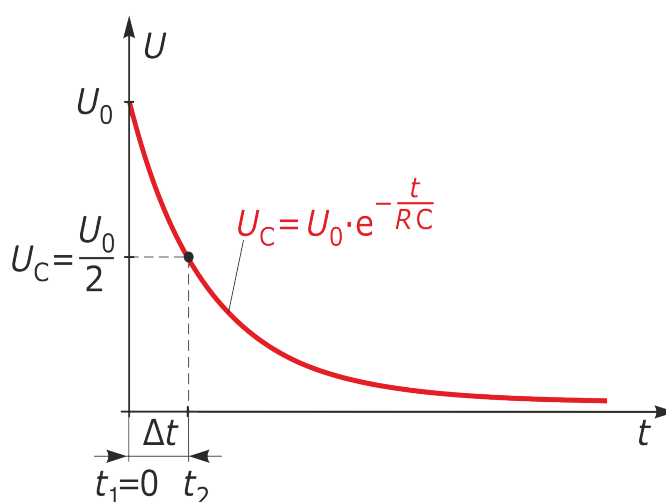
*Rješenje:*

Izbijanje kondenzatora teče po eksponencijalnom zakonu:

$$U_C = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Ukupni otpor mjernog kruga preko kojeg se kondenzator izbija iznosi:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Delta t}{C \cdot \ln\left(\frac{U_0}{U_C}\right)} = \\ &= \frac{22}{100 \cdot 10^{-9} \cdot \ln 2} = 317,39 \text{ M}\Omega \end{aligned}$$



Sl. 2b Krivulja izbijanja kondenzatora otporom  $R$

Početni naboj na kondenzatoru definiran je naponom  $U_0$  na njegovim pločama u trenutku  $t = 0$  te njegovim kapacitetom  $C$ . Preklapanjem sklopke u desnu poziciju se, osim ispitivanog otpora  $R_X$ , kondenzatoru paralelno priključuje još i otpor voltmetra  $R_V$ , a jedan dio naboja gubi se i kroz nesavršenu izolaciju samog kondenzatora koju je moguće prikazati još jednim velikim nadomjesnim otporom  $R_d$ . Prema tome, otpor  $R$  kojeg smo odredili gubitkom početnog naboja kondenzatora  $C$  sastoji se od paralelnog spoja tri otpora:

$$R = \frac{R_X \cdot R'}{R_X + R'}, \quad R' = \left( \frac{R_V \cdot R_d}{R_V + R_d} \right)$$

Otpor  $R_d$  izolacije proizlazi iz tangensa kuta gubitaka kondenzatora (paralelni nadomjesni spoj  $C$  i  $R_d$ ):

$$R_d = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot \operatorname{tg} \delta} = 4,32 \text{ G}\Omega ,$$

s pomoću kojeg sada možemo odrediti i otpor  $R'$  paralelnog spoja  $R_V$  i  $R_d$ :

$$R' = \frac{R_V \cdot R_d}{R_V + R_d} = \frac{10 \cdot 10^9 \cdot 4,32 \cdot 10^9}{10 \cdot 10^9 + 4,32 \cdot 10^9} = 3,017 \text{ G}\Omega$$

S pomoću poznatog ukupnog otpora  $R$  mjernog kruga (iz treće jednadžbe) proizlazi mjereni otpor  $R_X$ :

$$R_X = \frac{R \cdot R'}{R' - R} = \frac{317,39 \cdot 10^6 \cdot 3,017 \cdot 10^9}{3,017 \cdot 10^9 - 317,39 \cdot 10^6} = 354,7 \text{ M}\Omega$$

3. Značajke primarnog svitka naponskog transformatora ispituju se *UI* metodom pri istosmjernoj i izmjeničnoj struji, frekvencije 50 Hz. U prvom slučaju mjeren je djelatni otpor  $R_{Cu}$  žice kojom je namotan primar te je dobiveno  $245 \Omega$ . U drugom slučaju, pri izmjeničnoj struji od 65 mA, voltmetrom je izmjeren napon 100 V, a djelatna snaga izmjerena vatmetrom iznosila je 2,5 W. Koliki je induktivitet  $L$  primara i nadomjesni otpor  $R_{Fe}$  gubitaka u magnetskoj jezgri transformatora?

Podatci:

$$R_{Cu} = 245 \Omega$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

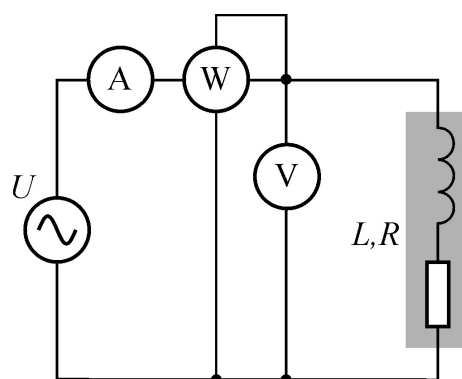
$$I_A = 65 \text{ mA}$$

$$U_V = 100 \text{ V}$$

$$P_W = 2,5 \text{ W}$$

Traži se:

$$L, R_{Fe} = ?$$



Sl. 3 Mjerenje impedancije *UI* metodom

### Rješenje:

Impedancija primarnog svitka ispitivanog transformatora odgovara omjeru primarnog napona i primarne struje transformatora. Ona se može predložiti vektorskom sumom imaginarne (posve induktivne) i djelatne komponente impedancije:

$$Z_L = \frac{U_V}{I_A} = \sqrt{(\omega L)^2 + R_L^2}$$

Pri tome imaginarna komponenta  $\omega L$  potječe od primarnog induktiviteta  $L^*$ , a djelatna  $R_L$  od otpora  $R_{Cu}$  žice svitka i gubitaka  $R_{Fe}$  u jezgri transformatora. Prema tome, za nadomjesni djelatni otpor  $R_L$  vrijedi:

$$R_L = \frac{P_W}{I_A^2} = 592 \Omega$$

Induktivitet primara je stoga:

$$L = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{Z_L^2 - R_L^2} = \frac{1}{\omega I_A} \cdot \sqrt{U_V^2 - \left(\frac{P_W}{I_A}\right)^2} = 4,52 \text{ H}$$

Nadomjesni otpor  $R_{Fe}$  gubitaka u jezgri je  $R_{Fe} = R_L - R_{Cu}$  te iznosi  $347 \Omega$ .

\*Napomena: induktivitet **svitka sa jezgrom** (transformatori, prigušnice) ovisan je o magnetskim uvjetima, odnosno, postignutoj indukciji  $B$  u jezgri. Mjerenjem pri nekom drugom naponu  $U_V$  se zbog nelinearne magnetske karakteristike materijala očekuje i drugačiji induktivitet transformatora.

4. Istosmjerni napon  $U$  mjeri se preciznim otporničkim djelilom 10:1 i voltmetrom ulaznog otpora  $R_V = 10 \text{ M}\Omega$  i ulaznog kapaciteta  $C_V = 150 \text{ pF}$ . Koliki je napon na trošilu Tr., ako napon izmjeren voltmetrom iznosi  $U_V = 157,2 \text{ V}$ , a otpor gornje grane djelila  $R_1 = 1,8 \text{ M}\Omega$ ? Koliki je kapacitet  $C_1$  potrebno prema shemi dodati otporu gornje grane djelila kako bi pri mjerenju izmjeničnih napona ono bilo kompenzirano?

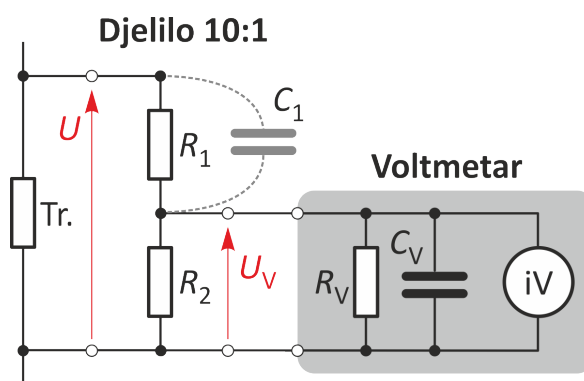
### Rješenje:

Budući da je zadan omjer dijeljenja otporničkog djelila  $k = 10:1$ , tada vrijedi:

$$k = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 10$$

Iz toga proizlazi da je otpor  $R_2$  donje grane djelila:

$$R_2 = \frac{R_1}{(k-1)} = \frac{1,8}{10-1} = 0,2 \text{ M}\Omega$$



Sl. 4 Mjerenje napona otporničkim djelilom

Idealnim voltmetrom s  $R_V = \infty$ , bio bi izmjeren napon na trošilu:

$$U = k \cdot U_V$$

U stvarnosti, priključenjem voltmetra konačnog ulaznog otpora, omjer dijeljenja  $k'$  raste te iznosi:

$$k' = \frac{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_V}{R_2 + R_V}}{\frac{R_2 \cdot R_V}{R_2 + R_V}} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_V) + R_2 \cdot R_V}{R_2 \cdot R_V} = \frac{1,8 \cdot 10,2 + 2}{2} = 10,18$$

Stoga je napon  $U'$  na trošilu ispravno odrediti kao:

$$U' = k' \cdot U_V = 10,18 \cdot 157,2 = \underline{1600,3 \text{ V}}$$

Kompenzacija djelila za izmjenični napon postiže se izjednačenjem vremenskih konstanti njegove donje i gornje grane:

$$\text{kompenzacija} \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 \rightarrow R_1 \cdot C_1 = \frac{R_2 \cdot R_V}{R_2 + R_V} \cdot C_V$$

Iz toga slijedi kompenzacijski kapacitet  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{R_2 \cdot R_V}{R_2 + R_V} \cdot \frac{C_V}{R_1} = \frac{0,2 \cdot 10}{0,2 + 10} \cdot \frac{150}{1,8} = \underline{16,3 \text{ pF}}$$

5. Nepoznati otpor  $R_X$  nekog otpornika mjeri se s pomoću voltmetra i ampermetra (tzv. *UI* metodom). Digitalnim voltmetrom vrlo velikog unutarnjeg otpora s mjernim opsegom 20 V i granicama pogrešaka  $\pm (0,1 \% \text{ od očitavanja} + 0,05 \% \text{ od mjernog opsega})$  mjereno je napon  $U_X$  na otporniku, a analognim ampermetrom s mjernim opsegom 1,2 A i klasom točnosti 0,5 struja  $I_X$  kroz otpornik.

Nakon 10 mjerenja, aritmetičke srednje vrijednosti napona i struje iznosile su  $U_X = 15 \text{ V}$  i  $I_X = 0,4 \text{ A}$ , dok su standardna odstupanja pojedinačnog mjerenja bila  $s_U = 0,02 \text{ V}$  i  $s_I = 0,01 \text{ A}$ . Potrebno je iskazati mjerni rezultat.

*Podatci:*

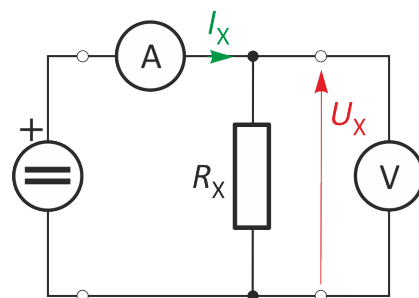
Digitalni voltmetar:  $MO_V = 20 \text{ V}$ , vrlo velik  $R_V$ ,  
 $G_V = \pm (0,1 \% \text{ od očitavanja} + 0,05 \% \text{ od } MO_V)$

Analogni ampermetar:  $MO_A = 1,2 \text{ A}$ , kl. 0,5

Mjerenje:  $U_X = 15 \text{ V}$ ,  $s_U = 0,02 \text{ V}$ ,  $n = 10$  mjerenja  
 $I_X = 0,4 \text{ A}$ ,  $s_I = 0,01 \text{ A}$ ,  $n = 10$  mjerenja

*Traži se:*

$R_X$ ,  $u(R_X)$



Sl. 5 Mjerenje otpora *UI* metodom

*Rješenje:*

Promatrana funkcija je djelatni otpor  $R_X$  izmjeren posrednom, *UI* metodom:

$$f = R_X = \frac{U_X}{I_X} = \frac{15}{0,4} = 37,5 \Omega$$

Mjerna nesigurnost izmjerenog napona i struje odgovara standardnoj nesigurnosti  $u_A$

$$u_A(U_X) = \frac{s_U}{\sqrt{n}} \quad u_A(I_X) = \frac{s_I}{\sqrt{n}},$$

dobivene statističkom analizom rezultata uzastopnih mjerenja te standardne nesigurnosti  $u_B$

$$u_B(U_X) = \frac{a_U}{\sqrt{3}} \quad u_B(I_X) = \frac{a_I}{\sqrt{3}},$$

koja načelno odgovara sustavnim pogreškama instrumenata. Interval  $a_U$  za digitalni instrument odgovara granicama pogrešaka  $G_V$ , dok se interval  $a_I$  za analogni instrument određuje s pomoću indeksa klase točnosti:

$$a_U = G_V, \quad a_I = \frac{kl.}{100} \cdot MO_A$$

Općenito, kombinirana standardna nesigurnost  $u$  pojedine mjerne veličine (u našem slučaju napona i struje) proizlazi iz geometrijskog zbroja  $u_A$  i  $u_B$ :

$$u(U_x) = \sqrt{\left(\frac{s_U}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{a_U}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,02}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{0,1}{100} \cdot 15 + \frac{0,05}{100} \cdot 20}{\sqrt{3}}\right)^2} = 15,8 \text{ mV}$$

$$u(I_x) = \sqrt{\left(\frac{s_I}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{a_I}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,01}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{0,5}{100} \cdot 1,2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 4,7 \text{ mA}$$

Budući da je u ovom primjeru nepoznati otpor  $R_x$  neizravno mjerena veličina, slijedi izračun složene nesigurnosti:

$$u_c(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^M \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot u(X_i) \right)^2},$$

u kojem se nesigurnosti  $u(X_i)$  pojedine mjerene veličine  $X_i$  pridjeljuje utjecajna „težina“, odgovarajuća osjetljivosti  $\partial f / \partial X_i$  matematičke funkcije  $f$  na veličinu  $X_i$ . Za naš primjer stoga vrijedi:

$$u_c(R_x) = \sqrt{\left( \frac{\partial R_x}{\partial U_x} \cdot u(U_x) \right)^2 + \left( \frac{\partial R_x}{\partial I_x} \cdot u(I_x) \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{1}{I_x} \cdot u(U_x) \right)^2 + \left( \frac{-U_x}{I_x^2} \cdot u(I_x) \right)^2}$$

Uvrštenjem vrijednosti za pojedinu veličinu, dobije se sljedeći rezultat:

$$u_c(R_x) = \sqrt{\left( \frac{1}{0,4} \cdot 15,8 \cdot 10^{-3} \right)^2 + \left( \frac{-15}{0,4^2} \cdot 4,7 \cdot 10^{-3} \right)^2} = 0,44 \text{ } \Omega$$

Ukoliko nesigurnost želimo iskazati u relativnom obliku, tada pišemo:

$$u_c(R_x)_{\%} = \frac{u(R_x)}{R_x} \cdot 100 = 1,17 \%$$

Mjerni rezultat konačno zapisujemo kao:

$$R_x = \underline{37,5 \text{ } \Omega} \text{ uz } u_c(R_x) = 0,44 \text{ } \Omega$$

$$R_x = \underline{37,5 \text{ } \Omega} \text{ uz } u_c(R_x) = 1,17 \%$$

6. Digitalni voltmetar V1 s odzivom na elektrolitičku srednju vrijednost i voltmetar V2 s odzivom na efektivnu vrijednost (oznake TRMS) priključeni su na izvor izobličenog (nesinusnog) izmjeničnog napona. Koliki je faktor oblika  $\xi$  tog napona, ako je voltmetrom V1 izmjereno 6,52 V, a voltmetrom V2 6,16 V?

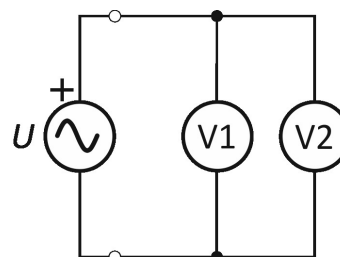
Podatci:

Digitalni voltmetar V1:  $U_{V1} = 6,52 \text{ V}$

Digitalni voltmetar V2:  $U_{V2} = 6,16 \text{ V}$

Traži se:

faktor oblika  $\xi$  mjerenog napona



Sl. 6 Mjerenje faktora oblika izmjeničnog napona s pomoću dva voltmetra

*Rješenje:*

Digitalni multimetri (bez oznake TRMS) s odzivom (!) na elektrolitičku srednju vrijednost umjereni su u efektivnim vrijednostima samo za sinusnu veličinu. Stoga oni pokazuju elektrolitičku srednju vrijednost umnoženu omjerom  $\xi_0 = (U_{ef}/U_{se})_{\sin}$  koji za sinusni valni oblik iznosi 1,111. Prema tome, napon izmjeren voltmetrom V1 jest:

$$U_{V1} = U_{se} \cdot \xi_0$$

te, s obzirom na izobličenje, taj rezultat sadrži pogrješku. Međutim, s pomoću očitavanja  $U_{V1}$  može se računski odrediti prava elektrolitička srednja vrijednost:

$$U_{se} = \frac{U_{V1}}{\xi_0}$$

Kod voltmetra V2, kojeg je odziv na efektivnu vrijednost, mjerni rezultat jest prava efektivna vrijednost:

$$U_{V2} = U_{ef}$$

Stoga faktor oblika mjerenog napona možemo odrediti s pomoću očitavanja oba voltmetra kao:

$$\xi = \frac{U_{ef}}{U_{se}} = \frac{U_{V2}}{U_{V1}} \cdot \xi_0 = \frac{6,16}{6,52} \cdot 1,111 = \underline{1,05}$$

*Napomena:* ispravan zapis efektivne vrijednosti za bilo koju električku veličinu ne sadrži indeks *ef*. Iznimno je ovdje, radi bolje uočljivosti, efektivna vrijednost napona označena sa  $U_{ef}$ .



7. Napon  $U(t) = 25,6 \cdot \sin(314t) + 4,3 \cdot \sqrt{2} + 11,2 \cdot \cos(314t)$  V mjereno je digitalnim multimetrom s odzivom na efektivnu vrijednost, s pomoću funkcije  $AC+DC$  na izmjeničnom području. Zatim je mjerenje ponovljeno istim multimetrom na istosmjernom području. Kolika je apsolutna razlika između rezultata dobivenih u oba mjerenja, zanemarujući pogrešku instrumenta?

Podatci:

Instrument na izmjeničnom području:  $U_{V(AC+DC)}$

Instrument na istosmjernom području:  $U_{VDC}$

Traži se:

$$\Delta U = U_{V(AC+DC)} - U_{VDC}$$

**Rješenje:**

Pokazivanje voltmetra s odzivom na efektivnu vrijednost i funkcijom  $AC+DC$  na izmjeničnom području odgovarat će geometrijskoj sumi parcijalnih efektivnih vrijednosti mjerenog napona:

$$U_{V(AC+DC)} = \sqrt{U_{ef1}^2 + U_{ef2}^2 + U_{ef3}^2}$$

Kako su izmjenične komponente napona općenito zadane oblikom  $U = U_m \cdot \sin(\omega t)$ , efektivne vrijednosti proizlaze iz tjemernih vrijednosti, koristeći poznati tjemerni faktor  $\sigma_0 = \sqrt{2}$  za sinusni valni oblik:

$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sigma_0} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Uračunavši i efektivnu vrijednost istosmjerne komponente, napon  $U_{V(AC+DC)}$  iznosi:

$$U_{V(AC+DC)} = \sqrt{\left(\frac{U_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + U_{DC}^2 + \left(\frac{U_{m2}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{25,6}{\sqrt{2}}\right)^2 + (4,3 \cdot \sqrt{2})^2 + \left(\frac{11,2}{\sqrt{2}}\right)^2} = 20,67 \text{ V}$$

Na istosmjernom području (DC) voltmetar će mjeriti samo pravu srednju vrijednost napona, odgovarajuću istosmjernoj komponenti:

$$U_{VDC} = 4,3 \cdot \sqrt{2} = 6,08 \text{ V}$$

Stoga je apsolutna razlika rezultata dobivenih mjerenjima na oba mjerna područja:

$$\Delta U = U_{V(AC+DC)} - U_{VDC} = 20,67 - 6,08 = \underline{14,59 \text{ V}}$$

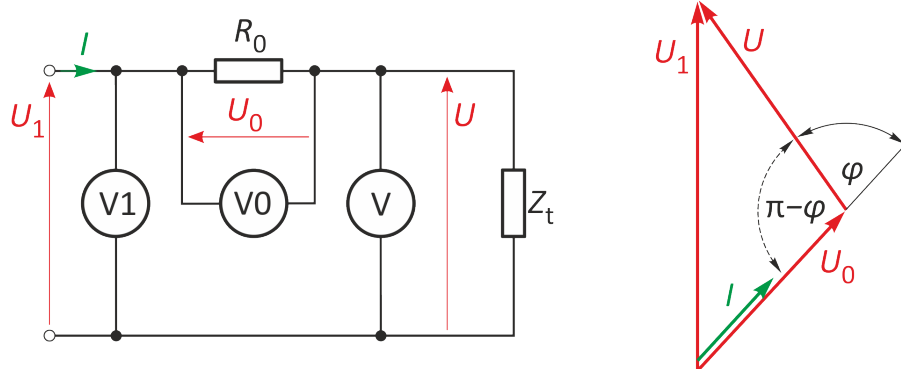
8. Kolika je induktivna komponenta impedancije trošila  $Z_t$  ako je metodom tri voltmetra pri frekvenciji  $f = 50$  Hz na njemu izmjerena snaga  $P = 95,6$  W? Napon na otporniku  $R_0 = 4 \Omega$  iznosio je  $U_0 = 3,7$  V, a ukupni napon  $U_1 = 180,6$  V.

Podatci:  $f = 50$  Hz,  $P = 95,6$  W,  $R_0 = 4 \Omega$ ,  $U_0 = 3,7$  V,  $U_1 = 180,6$  V

Traži se:  $L_t = ?$

### Uvod:

U seriju s teretom na kojem se mjeri snaga spaja se poznati djelatni otpor  $R_0$  i s pomoću tri voltmetra mjeri: napon  $U$  na teretu, napon  $U_0$  na otporu  $R_0$  i ukupni napon  $U_1$  na serijskoj kombinaciji impedancije tereta  $Z_t$  i otpora  $R_0$ .



Sl. 8 Mjerenje snage tereta u jednofaznom sustavu metodom tri voltmetra

Napon  $U_0$  na otporu  $R_0$  je u fazi sa strujom  $I$  tereta, dok napon  $U$  na trošilu ima prema toj struji fazni pomak  $\varphi$ . Prema kosinusnom poučku slijedi:

$$U_1^2 = U_0^2 + U^2 - 2U_0U \cos(180^\circ - \varphi), \quad \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$$

Kako je  $U_0 = I \cdot R_0$  i  $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ , dobije se nakon uvrštenja izraz za snagu na teretu:

$$P = \frac{U_1^2 - U_0^2 - U^2}{2R_0}$$

### Rješenje:

Iz izraza za snagu  $P$  može se izračunati napon  $U$  na teretu:

$$U = \sqrt{U_1^2 - U_0^2 - 2PR_0} = 178,43 \text{ V}$$

Faktor snage  $\cos \varphi$  iznosi:

$$\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{P}{U \cdot \frac{U_0}{R_0}} = 0,579$$

Induktivitet  $L_t$  trošila može se odrediti s pomoću jalove snage  $Q$ , struje  $I$  kroz trošilo i njezine frekvencije  $f$ :

$$L_t = \frac{Q}{\omega \cdot I^2} = \frac{U \cdot I \sin \varphi}{\omega \cdot I^2} = \frac{U \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\omega \cdot I} = \frac{U \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{2\pi \cdot f \cdot \frac{U_0}{R_0}} = 0,501 \text{ H}$$

9. Paralelnim spojem dvaju ampermetara jednakih unutarnjih otpora, mjernih opsega 6 A i 10 A, izmjerena je struja 12 A. Iskažite mjerni rezultat, ako su razredi točnosti (indeksi klase) oba ampermetra 1.

Podatci: Ampermetar 1:  $MO_1 = 6 \text{ A}$ , kl. 1,  $R_{A1}$   
 Ampermetar 2:  $MO_2 = 10 \text{ A}$ , kl. 1,  $R_{A2} = R_{A1}$

Traži se:  $I$ ,  $u(I)$

### Rješenje:

Kako je ovdje struja  $I_x$  neizravno mjerena veličina, do mjerne nesigurnosti dolazimo s pomoću općeg izraza:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^M \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \right)^2},$$

U ovom zadatku funkcija  $F$  jest struja  $I = I_1 + I_2$  te vrijedi:

$$u(I) = \sqrt{\left( \frac{\partial I}{\partial I_1} \cdot u(I_1) \right)^2 + \left( \frac{\partial I}{\partial I_2} \cdot u(I_2) \right)^2},$$

Parcijalne derivacije su  $\partial I / \partial I_1 = 1$  i  $\partial I / \partial I_2 = 1$ . Podatci o granicama pogrešaka za instrumente predstavljaju veličine sa jednolikom (pravokutnom) vjerojatnosnom razdiobom, te se za parcijalne nesigurnosti  $u_B$  uzima:

$$u_B(I_1) = \frac{a_1}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad u_B(I_2) = \frac{a_2}{\sqrt{3}}.$$

Intervali  $a_1$  i  $a_2$  računaju se s pomoću indeksa klase točnosti, koje za analogne instrumente odgovaraju granicama pogrešaka:

$$a_1 = \frac{kl.}{100} \cdot MO_1 = \frac{1}{100} \cdot 6 = 0,06 \text{ A} \quad a_2 = \frac{kl.}{100} \cdot MO_2 = \frac{1}{100} \cdot 10 = 0,1 \text{ A}$$

Stoga nesigurnost izmjerene struje iznosi:

$$u(I) = \sqrt{u_B(I_1)^2 + u_B(I_2)^2} = \sqrt{\left( \frac{a_1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( \frac{a_2}{\sqrt{3}} \right)^2} = 0,067 \text{ A}$$

Ovako dobiven rezultat za mjernu nesigurnost valja pridijeliti rezultatu za izmjerenu struju, te iskazati konačan rezultat mjerenja:

$$I = \underline{12,000 \text{ A}} \quad \text{uz} \quad u_c(I) = 0,067 \text{ A}$$

10. Teret otpora  $R$  priključen na istosmjerni izvor, razvija djelatnu snagu  $P$ , koju mjerimo posrednom metodom. Struja tereta mjerena je ampermetrom mjernog opsega 6 A i razreda točnosti 1,5, dok je napon tereta mjeran voltmetrom s  $3\frac{1}{2}$  znamenke i granicama pogriješaka  $\pm (0,8 \% \text{ od očitavanja} + 5 \text{ znamenki})$  na mjernom opsegu 200 V. Unutarnji otpor voltmetra je vrlo velik.

Nakon 10 mjerenja, aritmetičke srednje vrijednosti napona i struje iznosile su  $U = 187 \text{ V}$  i  $I = 5,4 \text{ A}$ , dok su eksperimentalna standardna odstupanja pojedinačnog mjerenja bila  $s_U = 1,6 \text{ V}$  i  $s_I = 0,21 \text{ A}$ . Potrebno je iskazati mjerni rezultat.

Podatci:

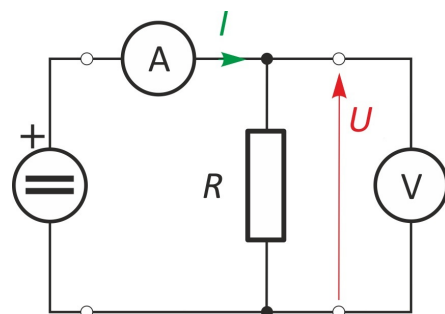
Voltmetar:  $MO_V = 200 \text{ V}$ , vrlo velik  $R_V$ ,  
 $G_V = \pm (0,8 \% \text{ od očitavanja} + 5 \text{ zn.})$

Analogni ampermetar:  $MO_A = 6 \text{ A}$ , kl. 1,5

Mjerenje:  $U = 187 \text{ V}$ ,  $s_U = 1,6 \text{ V}$ ,  $n = 10$  mjerenja  
 $I = 5,4 \text{ A}$ ,  $s_I = 0,21 \text{ A}$ ,  $n = 10$  mjerenja

Traži se:

$P$ ,  $u(P)$



Sl. 10 Mjerenje djelatne snage  $P$

**Rješenje:**

Promatrana funkcija je djelatna snaga  $P$  izmjerena posredno:

$$f = P = U \cdot I = 187 \cdot 5,4 = 1009,8 \text{ W}$$

Mjerna nesigurnost izmjerenog napona i struje proizlazi iz standardne nesigurnosti  $u_A$

$$u_A(U) = \frac{s_U}{\sqrt{n}} \quad u_A(I) = \frac{s_I}{\sqrt{n}},$$

dobivene statističkom analizom rezultata uzastopnih mjerenja te standardne nesigurnosti  $u_B$

$$u_B(U) = \frac{a_U}{\sqrt{3}} \quad u_B(I) = \frac{a_I}{\sqrt{3}},$$

koja načelno odgovara sustavnim pogriješkama instrumenata. Interval  $a_U$  za digitalni instrument odgovara granicama pogriješaka  $G_V$ , dok se interval  $a_I$  za analogni instrument određuje s pomoću indeksa klase točnosti:

$$a_U = G_V, \quad a_I = \frac{kl.}{100} \cdot MO_A$$

Općenito, kombinirana standardna nesigurnost  $u$  pojedine mjerne veličine (u našem slučaju napona i struje) proizlazi iz geometrijskog zbroja  $u_A$  i  $u_B$ :

$$u(U) = \sqrt{\left(\frac{s_U}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{a_U}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1,6}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{0,8}{100} \cdot 187 + 0,5}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1,26 \text{ V}$$

$$u(I) = \sqrt{\left(\frac{s_I}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{a_I}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,21}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1,5}{100} \cdot 6}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0,084 \text{ A}$$

Budući da je u ovom primjeru snaga  $P$  neizravno mjerena veličina, slijedi izračun složene nesigurnosti:

$$u_c(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^M \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot u(X_i) \right)^2},$$

u kojem se nesigurnosti  $u(X_i)$  pojedine mjerene veličine  $X_i$  pridjeljuje utjecajna „težina“, odgovarajuća osjetljivosti  $\partial f / \partial X_i$  matematičke funkcije  $f$  na veličinu  $X_i$ . Za naš primjer stoga vrijedi:

$$u_c(P) = \sqrt{\left( \frac{\partial P}{\partial U} \cdot u(U) \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial I} \cdot u(I) \right)^2} = \sqrt{(I \cdot u(U))^2 + (U \cdot u(I))^2}$$

Uvrštenjem vrijednosti za pojedinu veličinu, dobije se sljedeći rezultat:

$$u_c(P) = \sqrt{(5,4 \cdot 1,26)^2 + (187 \cdot 0,084)^2} = 17,12 \text{ W}$$

Ukoliko nesigurnost želimo iskazati u relativnom obliku, tada pišemo:

$$u_c(P)_{\%} = \frac{u_c(P)}{P} \cdot 100 = 1,7 \%$$

Mjerni rezultat konačno zapisujemo kao:

$$P = 1009,8 \text{ W} \quad \text{uz} \quad u_c(P) = 17,12 \text{ W}$$

ili

$$P = 1009,8 \text{ W} \quad \text{uz} \quad u_c(P) = 1,7 \%$$

11. Otpor prvog otpornika od  $22 \Omega$  izmjeren je s nesigurnošću 0,5 %, dok je otpor drugog otpornika od  $56 \Omega$  izmjeren s nesigurnošću 1 %. Spojimo li ih paralelno, kolika će biti nesigurnost tako dobivenog otpora?

Podatci: prvi otpornik:  $R_1 = 22 \Omega$ ,  $u_{R1} = 0,5 \%$   
 drugi otpornik:  $R_2 = 56 \Omega$ ,  $u_{R2} = 1 \%$

Traži se:  $u_R$  paralelnog spoja

### Rješenje:

Mjerna nesigurnost funkcije  $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  neizravno mjerenih veličina računa se prema izrazu:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot u_i \right)^2}$$

Za pojedini otpor, nesigurnost u apsolutnom iznosu iznosi:

$$u_{R_1} = \frac{u_{R_1\%}}{100} \cdot R_1 = \frac{0,5}{100} \cdot 22 = 0,11 \Omega \quad u_{R_2} = \frac{u_{R_2\%}}{100} \cdot R_2 = \frac{1}{100} \cdot 56 = 0,56 \Omega$$

Očekivani otpor paralelne kombinacije otpornika jest:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{22 \cdot 56}{22 + 56} = 15,8 \Omega$$

Nesigurnost takve paralelne kombinacije otpornika izlazi iz početnog izraza:

$$u_R = \sqrt{\left( \frac{\partial R}{\partial R_1} \cdot u_{R_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial R}{\partial R_2} \cdot u_{R_2} \right)^2} = \sqrt{\left( \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \cdot u_{R_1} \right)^2 + \left( \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 \cdot u_{R_2} \right)^2}$$

Uvrštenjem vrijednosti za pojedine veličine, dobije se  $u_R = 0,072 \Omega$ . Relativna nesigurnost paralelne kombinacije otpora  $R_1$  i  $R_2$  je stoga:

$$u_{R\%} = \frac{u_R}{R} = \frac{0,072}{15,8} = 4,56 \cdot 10^{-3} \approx 0,46 \%$$