4. Linearni sustavi

zadaci sa ispita

MI 2018 3

3. (10 bodova) Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da linearni sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & + & z & = & -1 \\ \alpha x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}$$

(a) nema niti jedno rješenje,

(b) ima točno jedno rješenje,

(c) ima beskonačno mnogo rješenja.

Pronađite sva rješenja u slučajevima kada sustav ima rješenja.

③
$$\begin{cases} \alpha x + y + z = -1 \\ \alpha x + \alpha y + z = 1 \\ x + \alpha y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & -1 \\ \alpha & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-\alpha^2 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \\ 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha^2 & -1-\alpha \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha(1-\alpha) & (1-\alpha)(1+\alpha) & 1-\alpha \\ 0 & (1-\alpha)(1+\alpha) & (1-\alpha)(1+\alpha) & -(1+\alpha) \end{array}\right]$$

- $1-\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ sustav nema rješenja

- $\boxed{\alpha = 0}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$ jedinstveno rješenje $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $1+\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ beskonačno mnogo rješenja

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- $\boxed{\alpha \neq -1, 0, 1}$ drugi redak dijelimo s $(1-\alpha)$, a treći s $(1+\alpha)$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 1+\alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & -1 \end{array}\right] /:\alpha-1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-\alpha} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{1-\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-\alpha} \end{array}\right]$$

jedinstveno rješenje oblika

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\alpha} \\ \frac{-2}{1-\alpha} \\ \frac{1}{1-\alpha} \end{bmatrix}$$

MI 2018 4

4. (10 bodova) Nađite najveći mogući broj linearno nezavisnih vektora među vektorima

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4)

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

najveći mogući broj linearno nezavisnih vektora?

Vektore možemo položiti u stupce matrice, tada će najveći broj linearno nezavisnih vektora biti jednak rangu te matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rang}(A) = 3$

Najviše su 3 linearno nezavisna vektora.

MI 2019 4

4. (10 bodova)

(a) Riješite sustav

$$\begin{cases} 2x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4 = 3 \\ 4x_1+ & 6x_2+ & 3x_3+ & 4x_4 = 5 \\ 6x_1+ & 9x_2+ & 5x_3+ & 6x_4 = 7 \\ 8x_1+ & 12x_2+ & 7x_3+ & 8x_4 = 9 \end{cases}.$$

(b) Odredite opće rješenje pripadnog homogenog linearnog sustava.

(c) Odredite bilo koja dva različita partikularna rješenja x_p, x_p' nehomogenog sustava iz (a) dijela zadatka.

4. (a) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 12 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases} \qquad x_2 = \alpha,\ x_4 = \beta,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 - \frac{3}{2}\alpha - \beta$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{3}{2}\alpha - \beta \\ \alpha \\ -1 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(b) $$x_h = \alpha \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(c) Na primjer, za $(\alpha, \beta) = (0,0)$ i $(\alpha, \beta) = (2,0)$ dobivamo

$$x_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_p' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

LJIR 2019 2

2. (10 bodova) Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ b \end{bmatrix},$$

gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Riješite sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ za $a = 2$ i $b = -2$. Zapišite rješenje u vektorskom obliku.

(b) Za koje vrijednosti parametara a i b sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima

i. jedinstveno rješenje,

ii. beskonačno mnogo rješenja,

iii. niti jedno rješenje?

2. (a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 1 \\ + \\ \cdot(-1) \, + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \\ \end{array}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = -6 + 7x_2 \\ \Rightarrow x_3 = 2 - 3x_2 \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -6+7t \\ t \\ 2-3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2a & -1 & 4 \\ 1 & -1 & a & b \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot 1 \\ + \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & b+2 \end{array}\right]$

Razlikujemo slučajeve:

1° $a = 2$

Imamo

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right]$ → za $b \neq -2$ sustav nema rješenja, dok za $b = -2$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja prema (a) podzadatku

2° $a \neq 2$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & b+2 \end{array}\right] \; | : (a-2) \neq 0$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b+2}{a-2} \end{array}\right] \begin{matrix} + \\ \cdot(-2) \\ + \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{-2a-2b-8}{b-2} \\ 0 & 2a-1 & 0 & \frac{2a-b-6}{b-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b+2}{a-2} \end{array}\right]$

Ponovno razlikujemo slučajeve:

2.1° Za $2a-1=0$, tj. $a=\frac{1}{2}$ imamo

- ako je $2a-b-6=0$, tj. $b=2a-6=-5$, onda sustav ima beskonačno mnogo rješenja:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = x_2 - \frac{1}{7} \\ \\ \Rightarrow x_3 = 2 \end{array} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- ako je $2a-b-6 \neq 0$, tj. $b \neq -5$, sustav nema rješenja

2.2° Za $2a-1 \neq 0$, tj. $a \neq \frac{1}{2}$ vidimo da je rang matrice sustava 3 (tj. ta matrica je regularna) pa sustav ima jedinstveno rješenje.

Dakle, zadani sustav:

1) ima jedinstveno rješenje za $a \neq 2$ i $a \neq \frac{1}{2}$, $b \in \mathbb{R}$,

2) ima beskonačno mnogo rješenja za $a=2$, $b=-2$ te $a=\frac{1}{2}$, $b=-5$

3) nema rješenja za $a=2$, $b \neq -2$ te $a=\frac{1}{2}$, $b \neq -5$

ZIR 2019 2

2. (10 bodova) Zadane su matrice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_4$ za čije rangove vrijedi $r(\mathbf{A}) = 4$, $r(\mathbf{B}) = 3$. Koje od sljedećih tvrdnji mogu vrijediti za takve matrice?

   Za one koje mogu vrijediti nađite odgovarajuće primjere matrica **A** i **B**, a za one koje ne mogu vrijediti dajte odgovarajući dokaz.

   (T1) Matrica **AB** može imati rang 4.

   (T2) Matrica $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ može imati rang 4.

   (T3) Homogen linearni sustav $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ može imati jedinstveno rješenje.

   (T4) Homogen linearni sustav $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ može imati jedinstveno rješenje.

2. (T1) Ne može vrijediti.

Budući da je $r(B)<4$, B je singularna matrica pa $\det B = 0$.

Po Binet-Cauchyjevom teoremu,

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$$

pa je i AB singularna matrica, tj. $r(AB)<4$.

(T2) Može vrijediti.

Na primjer,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A+B) = 4$$

(T3) Može vrijediti (štoviše, uvijek vrijedi)

$r(A)=4$ pa je A regularna matrica i sustav $A\vec{x} = \vec{0}$ uvijek ima jedinstveno (trivijalno) rješenje

$$A^{-1}\cdot \Big| \quad A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

(T4) Ne može vrijediti

Dimenzija prostora rješenja sustava $B\vec{x} = \vec{0}$ jednaka je $4 - r(B) = 1$ te taj sustav uvijek ima beskonačno mnogo rješenja.

MI 2020 4

4. (10 bodova) Riješite zadani sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{cases} \phantom{x_1 - {}} 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + 10x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -4 \end{cases}$$

4. Promatrajmo proširenu matricu sustava:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & : & 2 \\ -3 & 10 & -6 & -7 & : & -4 \end{bmatrix} \sim [\textit{dodamo 2. redak tećem 3 puta}] \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & : & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & : & 2 \end{bmatrix} \sim [\textit{dodamo 3. redak drugom 3 puta}] \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 1 & 0 & 22 & 29 & : & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & : & 2 \end{bmatrix} \sim [\textit{oduzmemo 3. redak od prvog 2 puta}] \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 & -12 & : & -3 \\ 1 & 0 & 22 & 29 & : & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & : & 2 \end{bmatrix} \sim [\textit{podijelimo 1. redak s -3}] \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & : & 1 \\ 1 & 0 & 22 & 29 & : & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & : & 2 \end{bmatrix} \sim [\textit{oduzmemo 1. redak od trećeg 2 puta}] \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & : & 1 \\ 1 & 0 & 22 & 29 & : & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \sim [\textit{oduzmemo 1. redak od drugog 7 puta}] \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & : & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \sim [\textit{oduzmemo 2. redak od prvog 3 puta}] \sim$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 & : & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \sim [\textit{oduzmemo 2. redak od prvog 3 puta}] \sim$$

Primijetimo da je rang (lijvog dijela) matrice jednak 3 pa znamo da skup rješenja ovisi o jednom parametru α. Zadnji redak nam daje $x_2 = 0$ te uzmimo $x_4 = \alpha$. Sada iz prvog retka imamo $-3x_1 + x_4 = -2 \Rightarrow x_1 = \frac{x_4+2}{3} = \frac{\alpha+2}{3}$. Konačno, drugi redak nam daje $x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - x_1 - x_4 = 1 - \frac{\alpha+2}{3} - \alpha = \frac{1}{3} - \alpha\frac{4}{3}$.
Sada vidimo da su sva rješenja oblika

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad : \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

JIR 2020 3

3. (10 bodova) Odredite $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x + 5y - 3z &= 1 \\ -3x - 16y + \beta z &= 2\gamma \\ 2x + 12y + 8z &= 2 \end{aligned}$$

(a) ima jedinstveno rješenje,

(b) ima beskonačno mnogo rješenja,

(c) nema rješenja.

3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 1 \\ -3 & -16 & \beta & 2\gamma \\ 2 & 12 & 8 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & \beta-9 & 2\gamma+3 \\ 0 & 2 & 14 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ :2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & \beta-9 & 2\gamma+3 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right] \cdot 1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 2\gamma+3 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 2\gamma+3 \end{array}\right]$$

Razlikujemo slučajeve:

1° $\beta-2=0 \Leftrightarrow \beta=2$

Iz treće jednadžbe tada slijedi $0\cdot z = 2\gamma+3$ pa zadani sustav:

1.1° nema rješenja u slučaju $2\gamma+3 \neq 0$, tj. $\gamma \neq -\frac{3}{2}$,

2.1° ima beskonačno mnogo rješenja u slučaju $\gamma = -\frac{3}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot(-5) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -38 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x = 1+38z \\ \Rightarrow y = -7z \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+38t \\ -7t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 38 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$2^\circ \ \beta \neq 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 2\gamma+3 \end{array}\right] \Big| :(\beta-2)\neq 0 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2\gamma+3}{\beta-2} \end{array}\right] \begin{array}{l} +\ \big|\cdot 3 \\ +\ \big|\cdot(-7) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & \frac{\beta+6\gamma+7}{\beta-2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{14\gamma+21}{\beta-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2\gamma+3}{\beta-2} \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \big|\cdot(-5) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\beta+91\gamma+112}{\beta-2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{14\gamma+21}{\beta-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2\gamma+3}{\beta-2} \end{array}\right]$$

Sustav u ovom slučaju ima jedinstveno rješenje za sve $\gamma \in \mathbb{R}$ koje glasi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta+91\gamma+112}{\beta-2} \\ -\frac{14\gamma+21}{\beta-2} \\ \frac{2\gamma+3}{\beta-2} \end{bmatrix}$$

MI 2021 4

4. (10 bodova) Neka je matrica sustava

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3
\end{aligned}
$$

najvećeg mogućeg ranga te neka su

$$
\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

dva rješenja tog sustava. Kako glasi opće rješenje tog sustava?

4) Imamo $Ax' = b$, A je ranga 3.

$$Ax'' = b$$

vektor $z = x' - x''$ zadovoljava homogenu jednadžbu

$$Az = Ax' - Ax'' = b - b = 0$$

dimenzija prostora rješenja je $4 - 3 = 1$

Stoga je svako homogeno rješenje oblika $x_h = t \cdot z$, $t \in \mathbb{R}$.

Opće rješenje sustava $Ax = b$ je oblika

neko partikularno, npr. x' ili x''

$$x = x_p + x_h$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

LJIR 2021 2

2. (10 bodova) Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda 5 te neka je opće rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dano s

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Odredite opće rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

(b) Odredite rang matrice $\mathbf{A}$.

(c) Odredite reducirani oblik matrice $\mathbf{A}$.

2. (10 bodova) Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda 5 te neka je opće rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dano s

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Odredite opće rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

(b) Odredite rang matrice $\mathbf{A}$.

(c) Odredite reducirani oblik matrice $\mathbf{A}$.

(a)

$$\vec{x} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=:\vec{a}_1} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:\vec{a}_2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(b) Zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ vidimo da je dimenzija prostora rješenja homogenog sustava $A\vec{x} = \vec{0}$ jednaka 2, a budući da je broj nepoznanica 5, slijedi

$$r(A) = 5 - 2 = 3.$$

(c) Iz općeg rješenja pripadnog homogenog sustava slijedi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ -\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 + x_5 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad\quad - x_4 - x_5 = 0 \\ \quad x_2 \quad\; + x_4 \qquad\; = 0 \\ \qquad x_3 - 2x_4 \qquad = 0 \end{cases},$$

pa reducirani oblik matrice A glasi

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

JIR 2021 2

2. (10 bodova) Zadan je sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x + \ \ y - \qquad\qquad\quad z = 1 \\ x + 2y + (4a-1)z = 3 \\ \quad\ \ ay + \qquad\qquad\quad z = 1 \end{cases},$$

pri čemu je $a \in \mathbb{R}$. Za koje vrijednosti parametra a zadani sustav:

(a) ima jedinstveno rješenje,

(b) ima beskonačno mnogo rješenja,

(c) nema rješenja?

U podzadatku (b) nađite ta rješenja i zapišite ih u vektorskom obliku.

2. (10 bodova) Zadan je sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + (4a-1)z = 3\,, \\ ay + z = 1 \end{cases}$$

pri čemu je $a \in \mathbb{R}$. Za koje vrijednosti parametra a zadani sustav:

(a) ima jedinstveno rješenje,

(b) ima beskonačno mnogo rješenja,

(c) nema rješenja?

U podzadatku (b) nađite ta rješenja i zapišite ih u vektorskom obliku.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4a-1 & 3 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \big| \cdot(-1) \\ + \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \big| \cdot(-a) \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 2 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 & 1-2a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 2 \\ 0 & 0 & (1-2a)(1+2a) & 1-2a \end{array}\right]$$

Razlikujemo slučajeve:

1° $(1-2a)(1+2a) \neq 0 \iff a \neq \pm \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 2 \\ 0 & 0 & (1-2a)(1+2a) & 1-2a \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \big| : (1-2a)(1+2a) \neq 0 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+2a} \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ + \\ \big| \cdot 1 \quad \big| \cdot(-4a) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{2+2a}{1+2a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{1+2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+2a} \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \big| \cdot(-1) \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2a}{1+2a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{1+2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+2a} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ sustav ima jedinstveno rješenje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a}{1+2a} \\ \frac{2}{1+2a} \\ \frac{1}{1+2a} \end{bmatrix}$$

2° $a = \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \leftarrow \\ 1\cdot(-1) \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \Rightarrow x = -1+3z \\ \Rightarrow y = 2-2z \\ \end{matrix}$$

stavljanjem $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dobivamo beskonačno mnogo rješenja oblika

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+3\lambda \\ 2-2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3° $a = -\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

iz ovog retka vidimo da sustav u ovom slučaju nema rješenja

ZIR 2021 3

3. (10 bodova)

   (a) Neka su $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ linearno nezavisni vektori u prostoru V^3. Dokažite da su skalari α, β i γ u prikazu vektora $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} \in V^3$ jedinstveni.

   (b) Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ su vektori

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{k} \quad \text{i} \quad \mathbf{c} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

   linearno nezavisni?

   (c) Prikažite vektor $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$, za $\lambda = 1$.

(a) Pretpostavimo da postoje skalari $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ takvi da

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c},$$

$$\vec{v} = \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b} + \gamma_2 \vec{c}.$$

Oduzimanjem ovih jednakosti dobivamo

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 - \beta_2)\vec{b} + (\gamma_1 - \gamma_2)\vec{c} = \vec{0},$$

odakle zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ slijedi

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \gamma_1 - \gamma_2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

(b) Matrica čiji su stupci vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ mora imati rang jednak 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1\cdot(-\lambda) \\ + \\ 1\cdot 3 \ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2\lambda-5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ 1\cdot 1 \end{matrix}$$

$$+\ 1\cdot(-5)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2\lambda-5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2\lambda-5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda-5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ rang je jednak 2 za $\lambda = \frac{5}{2}$, a 3 za $\lambda \neq \frac{5}{2}$ pa su zadani vektori linearno nezavisni za sve $\lambda \neq \frac{5}{2}$

(c) $\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 \\ \alpha + \gamma = -2 \\ -3\alpha + \beta - \gamma = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ + \\ |\cdot 3 \ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & -1 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ |\cdot 1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & 12 \end{array}\right] |:(-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & -5 & -1 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ |\cdot 2 \\ |\cdot 5 \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right] |\cdot(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{3} \\ \Rightarrow \beta = -\frac{7}{3} \\ \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{5}{3}\vec{a} - \frac{7}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$$

MI 2022 4

4. (10 bodova) U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sljedeći sustav:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 3 \end{cases} .$$

RJEŠENJE Sustav rješavamo Gaussovom metodom: radimo elementarne transformacije na retcima proširene matrice sistema.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & \lambda & 3\\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 3\\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & \lambda & 3\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3-3\lambda\end{array}\right].$$

Za $\lambda = 1$, gornja matrica glasi

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Rang gornje matrice je 1, pa je dimenzija prostora rješenja u ovom slučaju $d = 4 - 1 = 3$. Imamo tri slobodna parametra, i rješenja sustava u slučaju $\lambda = 1$ glasi

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-\alpha-\beta-\gamma\\ \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Pretpostavimo u nastavku da je $\lambda \neq 1$. Sada možemo podijeliti drugi i treći red s $\lambda - 1$ i četvrti red s $1 - \lambda$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & \lambda & 3\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3-3\lambda\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & \lambda & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1+\lambda & 3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 2+\lambda & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3+\lambda & 3\end{array}\right].$$

U zadnjem koraku smo drugi i treći redak pomnožili s -1 i dodali prvom i četvrtom retku. Sada vidimo da za $\lambda = -3$ zadnja jednadžba glasi $0 = 3$, pa u ovom slučaju sustav nema rješenja.

Sada pretpostavljamo da je $\lambda \neq 1, -3$. Prvo dijelimo zadnji redak s $3 + \lambda$. Zatim, dodajemo zadnji redak drugom i trećem retku. Naposljetku, množimo zadnji redak s $-2 - \lambda$ i dodajemo ga prvom.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 2+\lambda & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3+\lambda & 3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 2+\lambda & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/(\lambda+3)\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 3/(\lambda+3)\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/(\lambda+3)\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/(\lambda+3)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/(\lambda+3)\end{array}\right].$$

Dakle, za $\lambda \neq 1, -3$ imamo jedinstveno rješenje

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/(\lambda+3)\\ 3/(\lambda+3)\\ 3/(\lambda+3)\end{bmatrix}.$$

JIR 2022 2

2. (10 bodova)

(a) Definirajte linearnu nezavisnost skupa vektora $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$.

(b) Mogu li tri vektora iz $\mathbb{R}^2$ biti linearno nezavisna? Detaljno obrazložite i potkrijepite svoje tvrdnje rezultatima s predavanja.

(c) Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Koja je maksimalna vrijednost koju $r(A)$ može poprimiti? Potkrijepite svoj odgovor rezultatima s predavanja.

(d) Jesu li vektori

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (3, 8, -1), \quad v_3 = (-1, 0, -5)$$

iz $\mathbb{R}^3$ linearno nezavisni? Obrazložite računom.

Zadatak 2.

RJEŠENJE **a)** Kažemo da su vektori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linearno nezavisni ako za sve $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

b) Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionalan, odnosno ima bazu od n elemenata. Baza je maksimalan linearno nezavisan skup. Dakle, tri vektora u $\mathbb{R}^2$ ne mogu biti linearno nezavisna, jer je maksimalan linearno nezavisan podskup od $\mathbb{R}^2$ nužno dvočlan.

c) Rang matrice je broj njenih linearno nezavisnih redaka, što je jednako broju linearno nezavisnih stupaca. Matrica $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ ima m redaka i n stupaca, na što možemo gledati kao na m vektora iz $\mathbb{R}^n$. Kako je n maksimalan mogući broj linearno nezavisnih vektora u $\mathbb{R}^n$ (dimenzija mu je n), sigurno je $r(A) \leq n$. Naravno, broj linearno nezavisnih vektora koje možemo odabrati iz m-članog skupa je manji ili jednak m. Dakle, za proizvoljnu matricu $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ je

$$r(A) \leq \min(m, n).$$

d) Dani vektori su linearno nezavisni akko je matrica čiji su retci ti vektori punog ranga. Računamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rang matrice je 2, pa vektori nisu linearno nezavisni. $\square$

DIR 20222 3

3. (10 bodova)

U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, riješite sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{cases} x + 2y + \lambda z = -1 \\ -2x \qquad\quad + \; z = 2 \\ x + 2y - \; z = -1 \end{cases}$$

RJEŠENJE Zapišimo sustav u obliku

$$A_\lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

gdje je

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Odmah primjećujemo da je za $\lambda = -1$ matrica A_{-1} ranga 2, jer su prvi i treći redak jednaki. Doista,

$$\det A_\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4(\lambda + 1),$$

što nam govori da je matrica A_λ regularna za $\lambda \neq 1$. Za takve λ, postoji jedinstveno rješenje, koje sada određujemo. Fiksirajmo neki $\lambda \neq 1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & 1+2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1+\lambda & 0 \end{array}\right]$$

Dakle, jedinstveno rješenje sustava je

$$(x, y, z) = (-1, 0, 0).$$

Neka je sada $\lambda = -1$. Proširena matrica sistema sada glasi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pa vidimo da postoji beskonačno mnogo rješenja. Kako je $r(A_{\lambda=-1}) = 2$, dimenzija prostora rješenja je $d = 3 - 2 = 1$. Imamo

$$z = 4y \quad \text{i} \quad x = -1 - 2y + z = 2y - 1.$$

Dakle, za $\lambda = -1$, rješenje je dano s

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t - 1 \\ t \\ 4t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

LJIR 2023 2

2. (10 bodova)

Za koje su vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ vektori

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \lambda \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \lambda \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni?

Zadatak 2.

<u>RJEŠENJE</u> Promotrimo matricu

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{bmatrix},$$

čije stupce sačinjavaju dani vektori. Ti vektori su linearno nezavisni ako i samo ako je A punog ranga. Dakle, treba naći sve $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje je $r(A) = 3$. Radimo elementarne transformacije na retcima:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -(1+2\lambda) & 1+2\lambda \\ 0 & 1+2\lambda & 1-4\lambda^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -(1+2\lambda) & 1+2\lambda \\ 0 & 0 & 2+2\lambda-4\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Dakle, $r(A) = 3$ ako i samo ako je $1 + 2\lambda \neq 0$ i $2 + 2\lambda - 4\lambda^2 \neq 0$, što vrijedi ako i samo ako $\lambda \neq 1, -1/2$. □

LJIR 2022 3

3. (10 bodova) Nakon dvije godine poslovanja, brzo rastući startup *Determinanta.com* ima tri ranga zaposlenika. Zaposlenici najvišeg ranga dobili su 10000 dionica od startupa, zaposlenici srednjeg ranga dobili su 5000 dionica, dok su zaposlenici nižeg ranga dobili 2500 dionica. Zbog ostvarene rekordne zarade isplaćena je dobit, po 20000€ zaposlenicima višeg i srednjeg ranga i 10000€ zaposlenicima nižeg ranga. Osnovna godišnja plaća za zaposlenike višeg ranga iznosi 60000€, za srednji rang 40000€ te za zaposlenike nižeg ranga 25000€. Izdano je ukupno 300000 dionica, isplaćena je dobit od 1000 000€, a trošak ukupne osnovne plaće je 2500 000€. Koliko zaposlenika ima *Determinanta.com*?

Zadatak 3.

RJEŠENJE Neka je

$$
\begin{aligned}
x &= \text{broj zaposlenika višeg ranga,}\\
y &= \text{broj zaposlenika srednjeg ranga,}\\
z &= \text{broj zaposlenika nižeg ranga.}
\end{aligned}
$$

Postavit ćemo tri jednadžbe. Prva jednadžba je ukupan broj podijeljenih dionica, druga je ukupna isplaćena dobit, a treća je ukupna osnovna plaća isplaćena zaposlenicima:

$$
\begin{aligned}
10000x + 5000y + 2500z &= 300\,000\\
20000x + 20000y + 10000z &= 1000\,000\\
60000x + 40000y + 25000z &= 2500\,000
\end{aligned}
$$

Pišemo proširenu matricu sustava i riješavamo problem Gaussovom metodom. Prije toga dijelimo prvu jednadžbu s 500, drugu s 10000 i treću s 5000.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 5 & 600\\ 2 & 2 & 1 & 100\\ 12 & 8 & 5 & 500 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -10 & -5 & -400\\ 2 & 2 & 1 & 100\\ 0 & -4 & -1 & -100 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -10 & -5 & -400\\ 2 & 2 & 1 & 100\\ 0 & -4 & -1 & -100 \end{array}\right] \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & 0 & 100\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & -1 & -100 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 10\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 100 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 10\\ 1 & 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right]
$$

Dakle, $x = 10$, $y = 10$ i $z = 60$, pa je ukupan broj zaposlenika u startupu 80. $\square$