4.1. RAVNINSKE I PROSTORNE KRIVULJE

→ $\mathbb{R}^n$ je vektorski prostor čiji su elementi uređene n-torke realnih brojeva

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \|x\|=\sqrt{(x,x)} \qquad d(x,y)=\|x-y\|$$

euklidski skalarni produkt — euklidska norma — euklidska metrika

$\vec{x}=(x_1,x_2,\dots x_n)$ $\quad$ $\vec{y}=(y_1,y_2\dots y_n)$ } euklidski prostor E^n

→ odaberemo točku u prostoru E^n → $O(0,0,\cdots 0)$

$V^n=\{\vec{OT} : T\in E^n\}$ (OT je pravac takav da je T bilokoja točka vekt. pr. E^n)

⇒ V^n je također vekt. prostor čiji bazu čine vektori $(\vec{e}_1,\dots \vec{e}_n)$

$\vec{e}_i=\vec{OE_i}$ $\quad$ $E_i=(0,0\cdots,1,0,\dots 0)$

i-ta koordinata jednaka 1

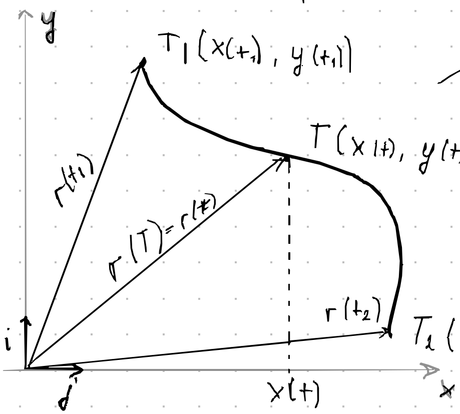
$x_i\in R$, $i=1\dots n$

X - neki, bilokoji, vektor iz V^n proizveden ⇒ $\vec{X}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+\dots+x_n\vec{e_n}$

* mi se bavimo 2D i 3D prostorima samo

4.1.1. Parametrizacija krivulje

· krivulja $\Gamma \xrightarrow[\text{zapis.}]{\text{param.}} x = x(t) \quad y = y(t) \quad t_1 < t < t_2$



$R^{2} \to$ radi se o 2D prostoru

$T(x(t), y(t)) \to T \in R^2$

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

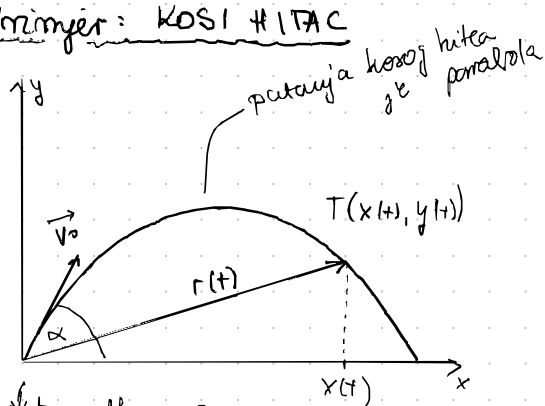
radijvektor točke T koja leži na krivulji Γ

Kada se radi o vekt. prostoru $R^3 \to \Gamma \dots x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$
$t_1 < t < t_2$

→ odnosno svaka točka krivulje Γ određena je svojim radijvektorom $\Rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ vektor $\vec{r}(t)$ predstavlja vektorsku funkciju $\vec{r}: [t_1, t_2] \to R^3$

Primjer: KOSI HITAC



} možemo prikazati u parametarskom obliku u ovisnosti o vrem. parametru t u obliku $t \longmapsto (x(t), y(t))$

↳ $x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$

$y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad t \geq 0$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha t \\ v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t \end{pmatrix}$$

u trenutku $t = 0$,
tijelo je izbačeno iz ishodišta pod kutem α

Primjer 1.2

a) jednadžba pravca kroz točku $T_1(x_1, y_1, z_1)$ zadanog vektora smjera $\vec{s} = s_1\vec{i} + s_2\vec{j} + s_3\vec{k}$

$$\frac{x-x_1}{s_1} = \frac{y-y_1}{s_2} = \frac{z-z_1}{s_3} \xrightarrow{param.} \begin{cases} x(t) = x_1 + t\cdot s_1 \\ y(t) = y_1 + t\cdot s_2 \\ z(t) = z_1 + t\cdot s_3 \end{cases}$$

→ u vektorskom obliku $\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t\cdot\vec{s}$

b) parametarska jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = R^2$, $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$

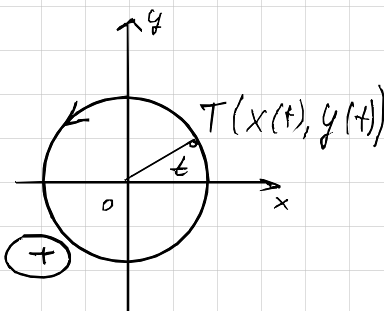
$\vec{r}(t) = (R\cos t)\vec{i} + (R\sin t)\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$

↳ $x(t) = R\cos t$

$y(t) = R\sin t$

$t \in [0, 2\pi]$

↳ suprotno od sata (+)



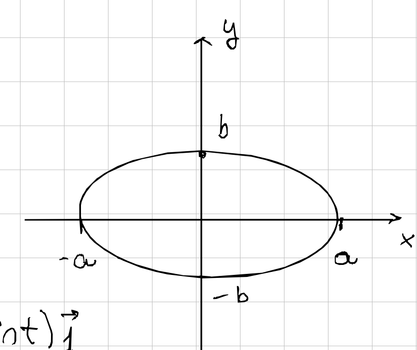
* ako ide u smjeru kazaljke na satu → $(2\pi \to 0)$ $(-)$

c) parametrizacija elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ili → $\tilde{x} = \frac{x}{a} = \cos t$

$\tilde{y} = \frac{y}{a} = \sin t$

$, t \in [0, 2\pi]$



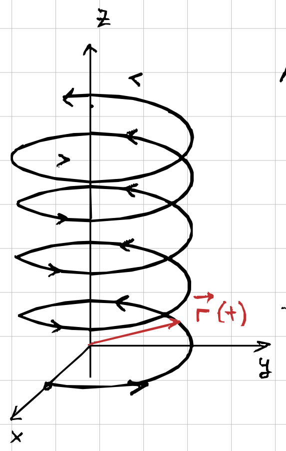
⇒ vektorski zapis: $\vec{r}(t) = (a\cos t)\vec{i} + (b\sin t)\vec{j}$

+ smjer (poz (+), neg (−)) opisani kao kod kružnice

II. način parametrizacije:

$x(t) = a\cos(2\pi\cdot t)$ $\quad y(t) = b\sin(2\pi\cdot t)$, $t \in [0, 1]$

Primjer 1.3) Djelovanje homogenog mag. polja usmjerenog u smjeru z osi



↑ smjer mag. polja

$x(t) = R\cos(\omega t)$

$y(t) = R\sin(\omega t)$

$z(t) = c\cdot t \qquad t \geq 0$

konstante

→ gibanje se sastoji od rotacije i translacije

pripadni radijvektor $\vec{r} = (R\cos\omega t,\ R\sin\omega t,\ ct)$

Primjer 1.4: Napisati jednu parametrizaciju krivulje koja je zadana kao presječnica ploha

$\pi_1 \ldots\ x - 2y = 3 \qquad \pi_2 \ldots\ z^2 - y = 1 \longrightarrow y = z^2 - 1$

1) izaberemo jednu varijablu kao parametar → $z = t$ (izbjegnemo korjenovanje)

$x - 2(z^2 - 1) = 3 \Rightarrow x - 2z^2 + 2 = 3$

$\Rightarrow \boxed{x - 2t^2 = 1 \qquad y = t^2 - 1 \qquad z = t}$

Primjer 1.5) Parametrizirati krivulju zadanu kao presjek ploha

$\pi_1 \ldots\ x^2 + 4y^2 = 4\ , \quad \pi_2 \ldots\ y + z = 1 \qquad$ za $x \geq 0$

$x^2 + 4(1-z)^2 = 4 \qquad \hookrightarrow y = 1 - z$

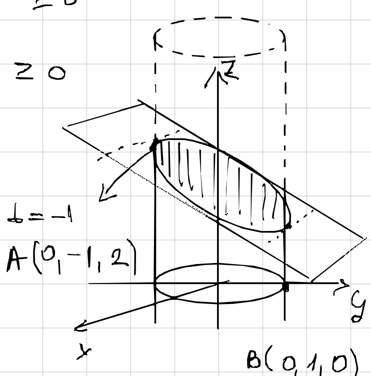
$x^2 + \cancel{4}(1 - 2z + z^2) \cancel{= 4} \quad \rightarrow x = \pm\sqrt{4 - 4y^2} = \pm 2\sqrt{1 - y^2}$

$x^2 - 8z + 4z^2 = 0 \qquad$ ali $x \geq 0 \rightarrow \boxed{x = 2\sqrt{1 - y^2}}\ , \ y = t$

$\boxed{z = 1 - t}$

$$\boxed{\begin{cases} x = 2\sqrt{1 - t^2} \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}} \quad t \in [-1, 1] \quad \text{jer} \quad 2\sqrt{1 - t^2} \geq 0$$

$1 - t^2 \geq 0$



$x^2 + 4y^2 = 4 \rightarrow$ eliptični valjak duž z osi

$y + z = 1 \longrightarrow$ ploha koja odsijeca valjak

* obradiće kružne i eliptične plohe preko kružnih koord

Primjer 1.6) Parametrizirajte krivulju koja je zadana kao presjek paraboloida $z = x^2+y^2$ i ravnine $2x+z=0$.

$x^2+y^2-2x \rightarrow x^2+2x+1-1+y^2=0$

$(x+1)^2+y^2=\underbrace{1}_{r^2}$ → pomaknuta kružnica je presjek

$(x+1)=\cos t$

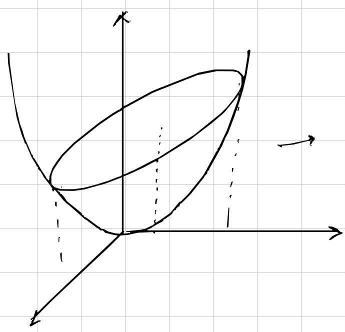
$t \in [0, 2\pi]$ $\qquad z=-2(\cos t-1)$

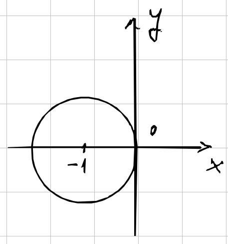
$y=\sin t$

$x(t) = \cos(t)-1$

$y(t) = \sin(t)$ $\quad , t \in [0, 2\pi]$

$z(t) = 2-2\cos(t)$





4.1.2. Vektor smjera tangente na krivulji

- tangencijalni vektor na parametarski zadanu krivulju

DEF Limes vektorske funkcije

$\vec{r}: I \to \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$ za vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ za kojeg vrijedi: $\lim\limits_{t \to t_0} \|\vec{r}(t) - \vec{a}\| = 0$

Limes vekt. fije je $\vec{r}(t)$ kada $t \to t_0$ i pišemo $\boxed{\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{r}(t)) = \vec{a}}$

Propozicija: računanje:

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ i $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

tada vrijedi: $\vec{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) \longrightarrow a_1 = \lim\limits_{t \to t_0} x(t)$ $\quad a_3 = \lim\limits_{t \to t_0} z(t)$

$a_2 = \lim\limits_{t \to t_0} y(t)$

DOKAZ: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \iff \lim\limits_{t \to t_0} \|\vec{r}(t) - \vec{a}\| = 0$

$$\iff \lim_{t \to t_0} \sqrt{(x(t)-a_1)^2 + (y(t)-a_2)^2 + (z(t)-a_3)^2} = 0$$

$$\iff a_1 = \lim_{t \to t_0} x(t) \qquad a_2 = \lim_{t \to t_0} y(t) \qquad a_3 = \lim_{t \to t_0} z(t)$$

DEF Neprekinutost vektorske funkcije

vekt. funkcija $\vec{r}(t)$ neprekinuta je u točki t_0 AKO: $\boxed{\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)}$

Propozicija: $\vec{r}(t)$ neprekinuta akko je svaka njena koord. fija $x(t), y(t)$ i $z(t)$ neprekinute u t_0

DEF Derivacija vektorske funkcije po parametru

$\vec{r}(t)$ derivabilna u t_0 ako postoji limes $\boxed{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}}$

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t)$ $\to$ derivacija vekt. fije

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} \quad \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}\right]\vec{i} + \cdots j \cdots z$$

$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$

geom. interpretacija: $\vec{r}\,'(t_0)$ je vektor smjera tangente na krivulju $\vec{r}(t)$

Primjer 1.11) Krivulja po kojoj se gibaju e^- u homogenom mag. polju usmjerenom prema poz dijelu osi z je zavojnica određena parametarskim jed

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ ct \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

· pripadni vektor brzine $\left(\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix}$

· pripadni vekt. akc. $\left(\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, pripadna sila je okomita na os z, odnosno na e^- koji se gibaju u hom. mag. polju

· Jednadžba tangente na krivulju

Γ u vekt obliku $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

· vekt smjera tangente: $\vec{s}(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$

parametarska jednadžba pravca (tangente) kroz $T_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} x(u) = x(t_0) + u\,x'(t_0) \\ y(u) = y(t_0) + u\,y'(t_0) \\ z(u) = z(t_0) + u \cdot z'(t_0) \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}$$

odnosno vekt f-ja $\vec{t}(u) = \vec{r}(t_0) + u \cdot \vec{r}\,'(t_0)$ je zapis tražene tang u vekt obliku

Primjer 12.) Odrediti vekt smjera tang na krivulju zadanu s

$$\vec{r}(t) = \frac{\cos(\pi t)}{t}\vec{i} + \frac{\sin(\pi t^2)}{\pi}\vec{j} + t^3\vec{k} \qquad t = 1, \quad \measuredangle\, \vec{s}, \vec{x} \;?$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left(\frac{-t \cdot \pi\sin(\pi t) - \cos(\pi t)}{t^2},\ 2\cos(\pi t^2),\ 3t^2\right)$$

$$\vec{s}(1) = \Big(-\pi\underbrace{\cancel{\sin(\pi}}_{0} - \underbrace{\cos\pi}_{-1}),\ 2\underbrace{\cos\pi}_{-1},\ 3\Big) = \underline{(1, -2, 3)}$$

$$\cos\measuredangle(\vec{s}, \vec{i}) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{i}}{|\vec{s}||\vec{i}|} = \frac{(1,-2,3)(1,0,0)}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Strujnice vektorskog polja

$$\underbrace{\vec{v}(x,y,z)} = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$$

strujnica vekt polja je krivulja Γ čiji je tang vektor u svakoj njenoj točki kolinearan s vektorom $\vec{v}(x,y,z)$

- neka je strujnica zadanog vekt polja određena parametrizacijom

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

$\vec{t}$ – vekt smjera tangente, $\vec{t} = \lambda v$, za neki $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\vec{t} = \vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = \lambda v$$

$$\longrightarrow \frac{dx}{dt} = \lambda v_1 \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda v_2 \qquad \frac{dz}{dt} = \lambda v_3$$

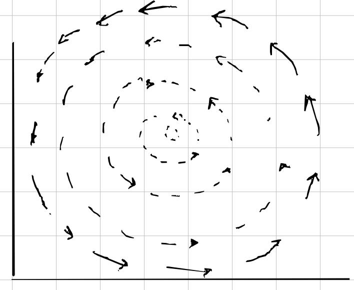
$$\Longrightarrow \frac{dx}{v_1} = \frac{dy}{v_2} = \frac{dz}{v_3}$$

Primjer: $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ je zadano polje brzina nekog fluida
Odredi strujnice

$$\frac{dx}{v_1} = \frac{dy}{v_2} \Rightarrow \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \longrightarrow x\,dx = -y\,dy$$

$\Longrightarrow$ direktno slijedi $x^2 + y^2 = C$,

$\hookrightarrow$ zadano vekt polje



vekt polje v i njegove strujnice