7. DJ VIŠEG REDA

7.1. Uvod i opće rješenje

▶ $F(y^n, y^{n-1}, \dots y', y, x) = 0$ DJ n-tog reda

∠ opće rješenje: $y = f(x, \underbrace{C_1, \dots C_n}_{})$ onoliko konstanti koliko i derivacija

Cauchyjev problem ima n početnih uvjeta:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

METODE:

1. Direktna uzastopna derivacija

$y''' = x^2 + \sin x \longrightarrow$ integriramo 3 puta $\Rightarrow y = \frac{x^5}{60} + \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x \cdot C_3$

2. Snižavanje reda $y' = z$, $y'' = z'$

$y'' + y'^2 + 1 = 0 \longrightarrow y = \ln|\cos(-x + C_1)| + C_2$

onoliko konstanti koliki je stupanj deriv.

7.2 Linearna derivacija n-tog reda

$$y^{n} + \alpha_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \dots + a_1(x)\cdot y' + a_0(x)\cdot y = f(x)$$

neprekinute f-je od x

LDJ n-tog reda zadovoljava uvjete Picardovog TM pa Cauchyjev problem uvijek ima jedinstveno rješenje.
- f je neprekinuta na D
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ je omeđena na D

$$\underbrace{\left[\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)\right]}_{L}\, y = f(x) \longrightarrow Ly = f(x)$$

L (linearno diferencijalni operator)

$Ly = 0 \to$ HOMO.

$Ly = f(x) \to$ PART.

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

TM Svako rješenje jednadžbe $Ly = f$ se može zapisati $y = y_h + y_p$

Dokazić: Neka je y_0 bilo koje rješenje $\Rightarrow L(y_0 - y_p) = Ly - Ly_p = f - f = 0$

$y_h = 0 \longrightarrow \boxed{y_p + y_h = y_0}$

Funkcije su LIN. NEZ ako iz $\alpha_1 y_1(x) + \dots \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in I$ slijedi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Determinanta Wronskog $\to W(y_1, \dots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

TM Ako je $W(y_1 \dots y_n) \neq 0$ tada su $y_1 \dots y_n$ LIN. NEZ.

DOKAZ:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \;/\;' \\ &\alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y_n' = 0 \;/ \dots \text{ deriviramo } (n-1) \text{ puta} \\ &\alpha_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{aligned}\right\}$$

homogeni sustav od n nepoznanica $\alpha_1 \dots \alpha_n$

* Det sustava je Wronskijan $\longrightarrow$ det $\neq 0 \Rightarrow$ REGULARNA JE

$\Downarrow$

lin. sustav ima jedinstveno rješenje

$\Rightarrow$ homogeni sustav ima jedinstveno rješenje ako $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

! OBRAT NE VRIJEDI $\to$ ako je $W = 0 \longrightarrow$ nema odluke

TM | Prostor rješenja homogene LDJ je n-dim. vekt. prostor od $C^n[a,b]$.

↳ Rješenje HLDJ je n-tog oblika: n-kombinacija nez funkcija

$$\Rightarrow \boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \dots + C_n y_n}$$ $\Big\{$ $y_1 \dots y_n$ su lin. nez. funkcije (baza ovog prostora)

TM | $y_1 \dots y_n$ su rješenja HLDJ za koja vrijedi $W(y_1, \dots y_n)(x_0) = 0$. Tada su $y_1 \dots y_n$ LIN. ZAVISNE.

→ ne pomiješati sa $W \neq 0$ TM jer tamo nije navedeno da su te f-je rješenja!

DOKAZ: Kao prošli put: $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ / 'deriviramo $(n-1)$ puta

$$\alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y_n' = 0$$
$$\alpha_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0$$

$\Big\}$ Det W je $W(x_0) = 0$ za neki x_0.
⊂ netrivijalno rješenje; tj $\alpha_i^* \neq 0$

→ definiramo funkciju kao linearnu kombinaciju navedenih rješenja:

$y_*(x) = \alpha_1^* y_1 + \dots + \alpha_n^* y_n$ → to je rješenje HLDJ, ali i $y = 0$ je rješenje

$\Rightarrow y_* = 0 = \alpha_1^* y_1 + \dots + \alpha_n^* y_n$

▸ Budući da LDJ zadovoljava Picardov TM vrijedi jedinstvenost rješenja Cauchyjevog problema

→ barem jedan α_i je $\neq 0$ → iz definicije o linearnoj nezavisnosti zaključujemo da je onda ovo LINEARNO ZAVISNO

TM | Rješenja $y_1 \dots y_n$ od HLDJ n-tog reda su linearno nezavisna akko je $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$.

DOKAZ:

1. ako $W \neq 0$ tada su funkcije nezavisne

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ → funkcije su lin. nez.

7.3. HLDJ s konstantnim koeficijentima

$$y^{n} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

za razliku od LDJ ova je homogena pa je rješenje $=0$

rj.: $y_h = c_1 y + \dots + c_n y_n$

Svakoj HLDJ s KK pridružen je karakteristični polinom

$$L(e^{rx}) \Leftrightarrow P_n(r) = r^n e^{rx} + a_{n-1} \cdot r^{n-1} \cdot e^{rx} + \dots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$$

$L(e^{rx}) = 0$ $\longrightarrow$ $0 \neq e^{rx} \underbrace{(r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots a_1 \cdot r + a_0)}_{=0} = 0$

prikaz homogene jed.*

* jedina DJ bez integriranja

Različite i realne nultočke (1. slučaj)

$\Rightarrow$ tada su $e^{r_1 x}, \dots e^{r_n x}$ rješenja HLDJ s KK

to su linearno nezavisne funkcije $\Rightarrow$ $\boxed{\text{opće rj: } y_h = c_1 e^{r_1 x} + \dots + c_n e^{r_n x}}$

Višestruke realne nultočke (2. slučaj)

ako je nultočka r_1 kratnosti k (npr r_1 se ponavlja k puta; $r_{1,2,3} = -2$ $\to k=3$)

onda je $c_1 e^{r_1 x}$ k puta nultočka od $P_n(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\text{opće rj. } y_h = c_1 \underset{x^0}{e^{r_1 x}} + c_2 x \cdot e^{r_1 x} + \dots + c_k \cdot x^{(k-1)} e^{r_1 x}}$$

Kompleksno rješenje od $Ly = 0$ (3. slučaj)

Rey i Jmy su realna rješenja te jednadžbe $\to L(Rey + i\,Jmy) = L\underbrace{(Rey)}_{=0} + i L \underbrace{(Jmy)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow$ ako su $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ nultočke polinoma

$$\to e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\pm i\beta x} = e^{\alpha x}[\cos(\pm\beta x) + i \sin(\pm \beta x)]$$

$$\to \boxed{\text{opće rj: } y_h = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x}$$

7.4. Nehomogene LDJ s KK

· Sada rješavamo $Ly = f(x) \longrightarrow \boxed{y = y_h + y_p}$ opće rješenje

rj. pripadne HLDJ s KK   rj. pripadne nehomogene

1. METODA VARIJACIJE KONSTANTI (MVK)

1. riješimo pripadnu HLDJ $Ly = 0 \longrightarrow y_h = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$
2. variramo konstante $C_i \rightarrow C_i(x) \Longrightarrow$ opće rj: $y = C_1(x) y_1 + \dots + C_n(x) y_n$
3. treba odrediti $C_1(x), \dots, C_n(x) = ?$

↪ sustav s n nepoznanica (deriviramo $(n-1)$ puta)

Zbog derivacije umnoška: $y' = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x)}_{\text{mora biti } 0} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i(x)'$ jer deriviramo konst.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1'(x) y_1 + \dots + C_n'(x) y_n &= 0 \\ C_1'(x) y_1' + \dots + C_n'(x) y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} &= f(x) \end{aligned}\right\}$$

Nepoznanice su $C_1'(x) \dots C_n'(x)$

– sustav uvjeta

→ Determinanta ovog nehomogenog sustava je Wronskijan $(y_1, \dots y_n)$.
Budući da su y_1 do y_n rješenja HLDJ oni su linearno nezavisni pa je $W \neq 0$.

Det $\neq 0$ pa je matrica regularna i ima jedinstveno rješenje.

$\Rightarrow C_1(x) \dots C_n(x)$ su jednoznačno određene pa se $C_i(x)$ dobije integriranjem

2 Metoda oblika desne strane (MODS)

$Ly = f(x) \to$ ako je $f(x) = e^{x}\left[Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\right]$ tada:

kratnost

Rj: $y = y_h + y_p \longrightarrow$ $y_p = e^{\alpha x}\left[R_1(x)\cos(\beta x) + R_2(x)\sin(\beta x)\right]\cdot x^{k}$

gdje su $R_1(x)$ i $R_2(x)$ polinomi stupnja $\max\{St(Q_1), St(Q_2)\}$, čije koeficijente dobijemo uvrštavanjem u početnu jednadžbu

Npr. : $y'' + y = x^2$

1) $r^2 + 1 = 0$

$r = \pm i$

$y_h = C_1\cos x + C_2 \sin x$

2) $y_p = Ax^2 + Bx + C$ – mora biti istog stupnja kao i rješenje (sada x^2)

- moramo provjeriti je li lin. nez. sa y_h
  - ne moramo množiti s x jer je $\alpha = 0$

$\Rightarrow y' = 2Ax + B$
$y'' = 2A$

uvrstimo u y_p

$\hookrightarrow 2A + Ax^2 + Bx + C = x^2$

$A = 1$ $\quad 2A + C = 0$

$B = 0$ $\quad C = -2$

$$\Rightarrow \boxed{y = \underbrace{C_1\cos x + C_2\sin x}_{y_h} + \overbrace{x^2 - 2}^{y_p}}$$