6.1.3. REDOVI S REALNIM ČLANOVIMA

Apsolutno konvergentni redovi

Red je apsolutno konvergentan ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentan.

Red je uvjetno konvergentan ako je konvergentan, ali ne i apsolutno konv.

TM | Apsolutno konvergentan red

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, onda konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

DOKAZ: Definiramo dva niza b_n i c_n izrazima:

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{ako je } a_n < 0 \end{cases}, \quad c_n = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a_n > 0 \\ -a_n & \text{ako je } a_n \leq \end{cases}$$

lako se vidi da je $b_n \leq |a_n|$ i $c_n \leq |a_n|$, po poredbenom kriteriju ako konvergira veći $\sum |a_n|$ tada konvergira i $\sum b_n$ i $\sum c_n$ stoga konvergira i $\sum b_n - \sum c_n = \sum a_n$.

PAZI! OBRAT NE VRIJEDI

→ Ako $\sum a_n$ konvergira, ne znamo za $\sum |a_n|$

→ Ako $\sum |a_n|$ divergira, ne znamo za $\sum a_n$

Primjer:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}, \text{ gledamo apsolutno } \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(n^2+n+1)|}{n^2+n+1}}_{\text{konvergira}} \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{konvergira}}$$

KONVERGIRA

Ako konvergira veći, po poredbenom kriteriju konvergira i manji, a po TM o apsolutnoj konv., konvergira i početni.

DEF **Alternirani red** je red oblika $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ gdje je niz s nenegativnim članovima.

TM **Leibniz kriterij za alternirani red**

Ako alternirani red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ zadovoljava NUK ($\lim_{n\to\infty} a_n=0$) i postoji $N\in\mathbb{N}$ takav da vrijedi $a_{n+1}\le a_n$ za $n\ge N$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\dots$$

vrijedi 1) $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

2) niz a_n je padajuć

$\to$ tada red konvergira

DOKAZ: Promatramo parnu parcijalnu sumu

$$S_{2n}=\underbrace{(a_1-a_2)}_{\text{poz}}+\underbrace{(a_3-a_4)}_{\text{poz.}}+\dots+\underbrace{(a_{2n-1}-a_{2n})}_{\text{poz.}}$$

S_{2n} je rastući niz jer uvijek dodajemo nešto pozitivno, tj. on je monoton pa treba još dokazati i omeđenost.

$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)\dots$ iz čega vidimo da je a_1 gornja međa

$\hookrightarrow$ niz S_{2n} konvergira k nekom realnom broju

Po matan 1 znamo da konvergira tj. postoji $\lim_{n\to\infty} S_{2n}=S$

Za neparnu parcijalnu sumu:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1}) = S+\overbrace{\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}}^{0} = S$$

$\Rightarrow$ RED KONVERGIRA

Primjer: alternirani harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow$

1) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

2) $\frac{1}{n} \to \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \to$ padajući

} prema Leibnizu niz konvergira!

Napomena:

kada dobijemo $(-1)^n \Longrightarrow$ IDI NA LEIBNIZA!