3. Primjene diferencijalnog racuna funkcija vise varijabli

MI19

4. **(9 bodova)**

   (a) **(2b)** Dokažite Sylvesterov teorem za pozitivno definitnu kvadratnu formu u dvije varijable.

   (b) **(7b)** Nađite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^2y + 2xy^2 + \frac{1}{2}xy.$$

(4.) (a) Neka je $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$.

TVRDNJA: Ako je $a>0$ i $ac-b^2>0$, onda je kvadratna forma $Q(h,k)$ pozitivno definitna.

DOKAZ: Treba vidjeti da je $Q(h,k)>0$, za $(h,k) \neq (0,0)$.

- Ako je $k=0$, onda $Q(h,k) = ah^2 > 0$ jer $a>0$ i $h \neq 0$ u ovom slučaju.
- Neka je sada $k \neq 0$.

$$Q(h,k) = \underbrace{k^2}_{>0} \cdot \left(a \cdot \left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2b\frac{h}{k} + c \right)$$

Uz supstituciju $t := \frac{h}{k}$ imamo: $f(t) = at^2 + 2bt + c$

Diskriminanta ove kvadratne funkcije je $4b^2 - 4ac = 4(b^2-ac) < 0$ jer je po pretp. $ac-b^2>0$. Jer je $a>0$ radi se o kvadratnoj funkciji čija slika je podskup $(0,+\infty)$. $\square$

(b) Potražimo prvo stacionarne točke:

$$\nabla f(x,y) = \left[\, 2xy + 2y^2 + \frac{1}{2}y \qquad x^2 + 4xy + \frac{1}{2}x \,\right] = \left[\, 0 \quad 0 \,\right]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y \cdot \left(2x + 2y + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ x \cdot \left(x + 4y + \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

1° $x = 0 \ \& \ y = 0$

$\boxed{T_1(0,0)}$

2° $x = 0 \ \& \ y \neq 0$

$y \cdot \left(2y + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad / : y$

$y = -\frac{1}{4}$

$\boxed{T_2\left(0, -\frac{1}{4}\right)}$

3° $x \neq 0 \ \& \ y = 0$

$x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad / : x$

$x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{T_3\left(-\frac{1}{2}, 0\right)}$

4° $x \neq 0 \ \& \ y \neq 0$

$$\begin{cases} 2x + 2y + \frac{1}{2} = 0 \\ x + 4y + \frac{1}{2} = 0 \quad / \cdot (-2) \end{cases}$$

$2y + \frac{1}{2} - 8y - 1 = 0$

$-6y = \frac{1}{2} \quad / : (-6)$

$y = -\frac{1}{12}$

$x - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 0$

$x = -\frac{1}{6}$

$\boxed{T_4\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)}$

Izračunajmo druge derivacije:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 4y + \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x$$

$$\Rightarrow D^2 f = \begin{bmatrix} 2y & 2x + 4y + \frac{1}{2} \\ 2x + 4y + \frac{1}{2} & 4x \end{bmatrix}$$

$\det\left(D^2 f(T_1)\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -1/4 < 0$ sedlasta točka

$\det\left(D^2 f(T_2)\right) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -1/4 < 0$ sedlasta točka

$\det\left(D^2 f(T_3)\right) = \begin{vmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & -2 \end{vmatrix} = -1/4 < 0$ sedlasta točka

$\det\left(D^2 f(T_4)\right) = \begin{vmatrix} \overset{<0}{-\frac{1}{6}} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} > 0 \Rightarrow$ točka maksimuma

MIZI20

3. **(9 bodova)**

   (a) **(1b)** Definirajte negativno definitnu kvadratnu formu dvije varijable.

   (b) **(2b)** Dokažite Sylvesterov kriterij za negativno definitnu kvadratnu formu dvije varijable.

   (c) **(6b)** Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

3. a) Definicija iz skripte.

b) Dokaz iz skripte.

c) Nužan uvjet za lokalni ekstrem je

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pa potražimo prvo takve točke.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12 = 0 \qquad (2)$$

Zbrajanjem (1) i (2) dobivamo

$3(x+y)^2 - 27 = 0$, odnosno $x+y = \pm 3$.

Uvrštavanjem $x = -y \pm 3$ u (2) i rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo četiri kandidata:

$\boxed{\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x = -1 \\ y = -2 \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x = -2 \\ y = -1 \end{matrix}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}$$

$$H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} 6 > 0 \\ 6 \cdot 6 - 12^2 < 0 \end{matrix}\right\} \text{indefinitna forma}$$

$$H_f(2,1) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} 12 > 0 \\ 12 \cdot 12 - 6^2 > 0 \end{matrix}\right\} \text{pozitivno definitna forma}$$

$$H_f(-1,-2) = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} 6 < 0 \\ (-6)(-6) - 12^2 < 0 \end{matrix}\right\} \text{indefinitna forma}$$

$$H_f(-2,-1) = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} * \quad \left.\begin{matrix} -12 < 0 \\ (-12)(-12) - (-6)^2 > 0 \end{matrix}\right\} \text{negativno definitna forma}$$

$\Rightarrow (2,1)$ je lokalni minimum, a

$(-2,-1)$ je lokalni maksimum

MI21

3. **(10 bodova)**

(a) **(3b)** Definirajte usmjerenu derivaciju funkcije dviju varijabli $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0)$ te pokažite da vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0) = \nabla f(T_0) \cdot \vec{v}_0, \quad \text{gdje je } \vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

(b) **(3b)** Planinar šeće planinom koja je oblika plohe

$$f(x, y) = 3x^2y - 2xy + 5x - 3y,$$

gdje je $z = f(x, y)$ nadmorska visina. Ako se planinar nakon odmora u točki $T_1(2, 1, z_1)$ uputi u smjeru prema točki $T_2(5, -3, z_2)$, kojom brzinom mu se mijenja nadmorska visina?

(c) **(2b)** U kojem smjeru planinar treba krenuti iz točke T_1 ako želi najbrže sići s planine? Koliko iznosi brzina promjene visine u tom smjeru?

(d) **(2b)** U kojem se smjeru planinar treba kretati iz točke T_1 ako želi ostati na istoj nadmorskoj visini? Obrazložite svoj odgovor.

3. (a) USMJERENA DERIVACIJA funkcije f u točki $T_0 \in \mathbb{R}^2$ u smjeru vektora $\vec{v} \in V^2$ je broj

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(T_0 + h\vec{v}_0) - f(T_0)}{h},$$

gdje je $\vec{v}_0 = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{v}$.

Definirajmo funkciju

$$g(h) := f(T_0 + h\vec{v}_0).$$

Tada iz definicije usmjerene derivacije slijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0).$$

S druge strane, uz $T_0 = (x_0, y_0)$ i $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$ te stavljanjem

$$x(h) := x_0 + h v_{0x}, \quad y(h) := y_0 + h v_{0y},$$

vidimo da je

$$g(h) = f(x(h), y(h))$$

pa $g'(0)$ možemo računati i koristeći lančano pravilo:

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0)) \cdot \frac{dx}{dh}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) \cdot \frac{dy}{dh}(0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(T_0)\, v_{0x} + \frac{\partial f}{\partial y}(T_0)\, v_{0y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0) = \nabla f(T_0) \cdot \vec{v}_0$$

(b) Uočimo da treba izračunati usmjerenu derivaciju funkcije f u točki T_1 u smjeru vektora $\overrightarrow{T_1T_2}$. Imamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy - 2y + 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(T_1) = 15,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(T_1) = 5,$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{T_1T_2} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_0 = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_1) = \nabla f(T_1) \cdot \vec{v}_0 = 15 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 5$$

(c) Treba odrediti smjer u kojem f najbrže pada iz točke T_1. To je u smjeru

$$-\nabla f(T_1) = -15\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$$

te usmjerena derivacija u tom smjeru iznosi

$$-\|\nabla f(T_1)\| = -\sqrt{15^2+5^2} = -5\sqrt{10}.$$

(d) Tražimo smjer u kojem je usmjerena derivacija od f u T_1 jednaka nuli.

Iz

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_1) = \nabla f(T_1)\cdot \vec{v}_0 = 0$$

vidimo da je $\vec{v} \perp \nabla f(T_1)$ pa je traženi smjer

$$\vec{v} = 5\vec{\imath} - 15\vec{\jmath}.$$

MI21

4. **(9 bodova)**

   (a) **(6b)** Koristeći metodu Lagrangeovog multiplikatora, nađite uvjetne ekstreme funkcije $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 2$.

   (b) **(3b)** Odredite globalne esktreme funkcije $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$ na skupu određenom nejednadžbom $x^2 + y^2 \leq 2$.

4. (a) Lagrangeova funkcija:

$$L(x,y,\lambda) = e^{x^2+xy+y^2} + \lambda(x^2+y^2-2)$$

Tražimo njene stacionarne točke:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = e^{x^2+xy+y^2}\cdot(2x+y) + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = e^{x^2+xy+y^2}\cdot(x+2y) + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x^2+y^2-2 = 0 \end{cases}$$

Zbrajanjem prvih dviju jednadžbi slijedi

$$e^{x^2+xy+y^2}\cdot 3(x+y) + 2\lambda(x+y) = 0$$

$$\Rightarrow (x+y)\left(3e^{x^2+xy+y^2} + 2\lambda\right) = 0,$$

odakle dobivamo dva slučaja:

$1^\circ \quad x+y=0 \Rightarrow x=-y$

Uvrštavanjem u treću jednadžbu slijedi

$$y^2+y^2-2=0$$

$$y^2=1$$

$y_1=1$ $\qquad$ $y_2=-1$

$x_1=-1$ $\qquad$ $x_2=1$

$e^{2-1}\cdot(-2+1)-2\lambda=0$ $\qquad$ $e^{2-1}\cdot(2-1)+2\lambda=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{2}e$ $\qquad$ $\Rightarrow \lambda_2=-\frac{1}{2}e$

$\Rightarrow$ stacionarne točke su $T_1\left(-1,1,-\frac{1}{2}e\right)$ i $T_2\left(1,-1,-\frac{1}{2}e\right)$

$2^\circ \quad 3e^{x^2+xy+y^2}+2\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda=-3e^{x^2+xy+y^2}$

Uvrštavanjem u npr. prvu jednadžbu dobivamo

$$e^{x^2+xy+y^2}\cdot(2x+y)-3e^{x^2+xy+y^2}x=0 \quad \Big/ : e^{x^2+xy+y^2}>0$$

$$\Rightarrow -x+y=0 \Rightarrow x=y$$

Sada iz treće jednadžbe slijedi

$$y^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$y^2 = 1$$

$y_3 = 1$	$y_4 = -1$
$x_3 = 1$	$x_4 = -1$
$e^{2+1} \cdot (2+1) + 2\lambda = 0$	$e^{2+1} \cdot (-2-1) - 2\lambda = 0$
$\lambda_3 = -\frac{3}{2} e^3$	$\lambda_4 = -\frac{3}{2} e^3$

$\Rightarrow$ stacionarne točke su $T_3\left(1, 1, -\frac{3}{2}e^3\right)$ i $T_4\left(-1, -1, -\frac{3}{2}e^3\right)$

Ispitujemo karakter dobivenih točaka:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda) = e^{x^2+xy+y^2}(2x+y)^2 + e^{x^2+xy+y^2} \cdot 2 + 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda) = e^{x^2+xy+y^2}(x+2y)^2 + e^{x^2+xy+y^2} \cdot 2 + 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) = e^{x^2+xy+y^2}(2x+y)(x+2y) + e^{x^2+xy+y^2}$$

$$\Rightarrow d^2L(T) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(T)(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(T)\,dx\,dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(T)(dy)^2$$

Diferencijal uvjeta: $x^2+y^2=2 \quad /d \quad \Rightarrow \quad 2x\,dx+2y\,dy=0 \Rightarrow x\,dx+y\,dy=0$

U stacionarnim točkama imamo:

$$d^2L(T_{1,2})=\left(e^{2-1}\cdot 1^2+e^{2-1}\cdot 2-e\right)(dx)^2+2\left(e^{2-1}\cdot(-1)+e^{2-1}\right)dx\,dy$$

$$+\left(e^{2-1}\cdot 1^2+e^{2-1}\cdot 2-e\right)(dy)^2$$

$$=2e(dx)^2+2e(dy)^2>0 \quad \text{za } (dx,dy)\neq(0,0)$$

$\Rightarrow T_{1,2}$ uvjetni lokalni minimumi

$f(T_1)=f(T_2)=e$

$$d^2L(T_{3,4})=\left(e^{2+1}\cdot 3^2+e^{2+1}\cdot 2-3e^3\right)(dx)^2+2\left(e^{2+1}\cdot 3^2+e^{2+1}\right)dx\,dy$$

$$+\left(e^{2+1}\cdot 3^2+e^{2+1}\cdot 2-3e^3\right)(dy)^2$$

$$=8e^3(dx)^2+20e^3\,dx\,dy+8e^3(dy)^2=$$

$\left[\begin{array}{l}\text{iz diferencijala uvjeta} \\ dx+dy=0 \Rightarrow dy=-dx\end{array}\right]$

$$=16e^3(dx)^2-20e^3(dx)^2$$

$$=-4e^3(dx)^2<0 \quad \text{za } (dx,dy)\neq(0,0)$$

$\Rightarrow T_{3,4}$ uvjetni lokalni maksimumi

$f(T_3)=f(T_4)=e^3$

(b) Budući da je funkcija f neprekidna, a skup $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 2\}$ omeđen i zatvoren, ona na tom skupu mora postizati minimum i maksimum.

Kandidati za točke ekstrema su tzv. kritične točke:

1) točke ekstrema od f na rubu skupa, tj. na kružnici $x^2+y^2=2$

Iz (a) podzadatka znamo da su to točke $T_{1,2,3,4}$.

2) stacionarne točke od f unutar skupa (ako postoje)

Računamo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2+xy+y^2}(2x+y)=0 & \Big| : e^{x^2+xy+y^2}>0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2+xy+y^2}(x+2y)=0 & \Big| : e^{x^2+xy+y^2}>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

$T_5(0,0)$ je jedina stacionarna točka od f i nalazi se unutar skupa

Budući da je $f(T_5)=e^0=1$, $f(T_{1,2})=e$ i $f(T_{3,4})=e^3$, slijedi da f u $(0,0)$ postiže globalni minimum, dok u $(1,1)$ i $(-1,-1)$ postiže globalni maksimum na zadanom skupu.

MI22

4. **(8 bodova)**

   (a) **(1b)** Iskažite nužan uvjet za uvjetni lokalni ekstrem funkcije $f(x, y, z)$ uz uvjet $\varphi(x, y, z) = 0$.

   (b) **(7b)** Koristeći metodu Lagrangeovih multiplikatora, nađite točku na plohi $z = x^2 + y^2$ koja je najbliža točki $T(1, 1, 0)$.

Zadatak 4.

<u>RJEŠENJE</u> **(a)** TEOREM 3.6.1: Neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}^3$ te neka je $f : U \to \mathbb{R}$ zadana neprekinuto diferencijabilna funkcija. Neka je S skup svih točaka $(x, y, z) \in U$ takvih da je $\varphi(x, y, z) = 0$. Ako je u točki (x_0, y_0, z_0) uvjetni lokalni ekstrem funkcije f na skupu S, tada postoji realan broj λ takav da je

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla\varphi(x_0, y_0, z_0) = \vec{\mathbf{0}}.$$

(b) Udaljenost neke točke prostora (x, y, z) od točke $T(1, 1, 0)$ je dana idučim izrazom:

$$d\big((x, y, z), (1, 1, 0)\big) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}.$$

Minimizirajući tu funkciju po (x, y, z) možemo naći traženo rješenje zadatka, no budući da je preslikavanje $x \mapsto \sqrt{x}$ strogorastuća funkcija, ekvivalentno nam je minimizirati izraz pod korjenom, odnosno ovu funkciju:

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2,$$

a to je računski puno jednostavnije. Dakle, minimiziramo vrijednosti dane funkcije $f(x, y, z)$ i to po plohi $\varphi(x, y, z) = 0$, gdje je

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z.$$

U ovom slučaju, Lagrangeova funkcija nam je dana kao

$$L(x, y, z, \lambda) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z).$$

Za početak moramo pronaći stacionarne točke Lagrangeove funkcije, odnosno rješavamo idući sustav:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}
&\iff \begin{cases} 2(x-1) + 2x\lambda = 0 \\ 2(y-1) + 2y\lambda = 0 \\ 2z - \lambda = 0 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x(\lambda+1) = 2 \\ 2y(\lambda+1) = 2 \\ z = \frac{\lambda}{2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 1/(\lambda+1) \\ y = 1/(\lambda+1) \\ z = \frac{\lambda}{2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x, y, z) = \left(\frac{1}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{2}\right) \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x, y, z) = \left(\frac{1}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{2}\right) \\ \frac{\lambda}{2} = \frac{2}{(\lambda+1)^2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x, y, z) = \left(\frac{1}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{2}\right) \\ \lambda(\lambda+1)^2 = 4 \end{cases} .
\end{aligned} \tag{5}$$

Drugu jednadžbu ovog sustava ćemo sada posebno riješiti pa ćemo se kasnije vratiti raspisu sustava. Naime, odmah možemo primijetiti da vrijednost $\lambda = 1$ zadovoljava jednkost $\lambda(\lambda+1)^2 = 4$. Sada raspisivanjem te jednakosti dobivamo ekivalentnu jednadžbu $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$. Budući da znamo da je $\lambda = 1$ nultočka tog polinoma, zaključujemo da ga možemo faktorizirati tako da ga podijelimo s $\lambda - 1$ i time dobivamo jednadžbu $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 4) = 0$. Kako je diskriminanta drugog polinoma negativna, zaključujemo da je jedino rješenje te jednadžbe upravo $\lambda = 1$ - sada konačno nastavljamo s traženjem stacionarne točke:

$$
\begin{aligned}
(5) &\iff \begin{cases} (x,y,z) = \left(\frac{1}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{2}\right) \\ \lambda = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \lambda = 1 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Dakle $P = (x, y, z, \lambda) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ je stacionarna točka Lagrangeove funkcije L. Idući nam je cilj izračunati drugi diferencija Lagrangeove funkcije - u tu svrhu računamo druge parcijalne dervacije Lagrangeove funkcije:

$$
\begin{aligned}
L_{xx}(x,y,z,\lambda) &= 2 + 2\lambda, \\
L_{yy}(x,y,z,\lambda) &= 2 + 2\lambda, \\
L_{zz}(x,y,z,\lambda) &= 2, \\
L_{xy}(x,y,z,\lambda) &= 0, \\
L_{yz}(x,y,z,\lambda) &= 0, \\
L_{xz}(x,y,z,\lambda) &= 0.
\end{aligned}
$$

Sada možemo izračunati drugi diferencijal Lagrangeove funkcije L u točki $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$:

$$
\begin{aligned}
d^2L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) &= L_{xx}(P)dx^2 + L_{yy}(P)dy^2 + L_{zz}(P)dz^2 \\
&\quad + 2\big(L_{xy}(P)dxdy + L_{yz}(P)dydz + L_{xz}(P)dxdz\big) \\
&= 4dx^2 + 4dy^2 + 2dz^2.
\end{aligned}
$$

Iduće, diferencirajmo uvjet $\varphi = 0$ otkuda dobivamo da je

$$
2x\,dx + 2y\,dy - dz = 0,
$$

odnosno slijedi $dz = 2x\,dx + 2y\,dy$. Sada uvrštavanjem tog izraza u $d^2L(P)$ dobivamo:

$$
\begin{aligned}
d^2L(P) &= 4dx^2 + 4dy^2 + 2\left(2 \cdot \frac{1}{2}\,dx + 2 \cdot \frac{1}{2}\,dy\right)^2 \\
&= 4dx^2 + 4dy^2 + 2(dx + dy)^2,
\end{aligned}
$$

a ovdje nam je jasno da je $d^2L(P)$ strogo veći od nula za sve $(dx, dy) \neq (0, 0)$. Prema tome, točka $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ je najbliža točka plohe $z = x^2 + y^2$ točki $T(1, 1, 0)$. $\square$

MI23

4. **(9 bodova)**

   (a) **(2b)** Neka je funkcija više varijabli f diferencijabilna u okolini točke T_0. Dana je tvrdnja: Ako je $\nabla f(T_0) = \vec{0}$, tada je T_0 točka lokalnog ekstrema od f. Dokažite tvrdnju ukoliko je istinita ili obrazložite protuprimjerom ako je lažna.

   (b) **(7b)** Nađite lokalne ekstreme funkcije

$$u(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^2 + 3x^2y + 3xy^2 - 3x - 6y - 4z.$$

Zadatak 4.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** Tvrdnja nije istinita. Promotrimo na primjer funkciju $f(x,y) = x^2 - y^2$. Tada je $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$ pa je $\nabla f(0,0) = (0,0)$, a skicom grafa funkcije $f(x,y)$ se vidi da u točki $(0,0)$ funkcija ima sedlastu točku.

b) Najprije računamo stacionarne točke,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2 + 3x^2 + 6xy - 6 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 4 = 0.$$

Oduzmemo li prvu jednadžbu od druge, dobivamo $y^2 = 1$, a treća jednadžba nam daje $z = 2$. Dakle, $y = \pm 1$. S jedne strane, uvrstimo li $y = 1$ u prvu jednadžbu dobivamo $x(x+2) = 0$ odnosno točke

$$A(0,1,2), \quad B(-2,1,2).$$

Uvrstimo li $y = -1$ u prvu jednadžbu dobivamo $x(x-2) = 0$ odnosno točke

$$C(0,-1,2), \quad D(2,-1,2).$$

Sada računamo druge derivacije,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x + 12y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x + 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

Hesseova matrica ima oblik

$$H_u(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x+6y & 6x+6y & 0 \\ 6x+6y & 6x+12y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} x+y & x+y & 0 \\ x+y & x+2y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

U nastavku ispitujemo Hesseovu matricu u stacionarnim točkama A, B, C i D te primjenjujemo TEOREM 3.4.6. Za točku A imamo

$$H_u(0,1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pa glavne minore redom imaju vrijednosti 6, 36 i 72 pa je točka A točka strogog lokalnog minimuma funkcije u. Za točku B imamo

$$H_u(-2,1,2) = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pa glavne minore redom imaju vrijednosti -6, -36 i -72 pa je točka B sedlasta točka funkcije u. Za točku C imamo

$$H_u(0,-1,2) = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pa glavne minore redom imaju vrijednosti -6, 36 i 72 pa je točka C sedlasta točka funkcije u. Za točku B imamo

$$H_u(2,-1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pa glavne minore redom imaju vrijednosti 6, -36 i -72 pa je točka D sedlasta točka funkcije u. $\square$

MI 19

3. **(8 bodova)** Funkcija $z = z(x, y)$ implicitno je zadana izrazom

$$2x + 3y + \sin(4x + 5y) + z^2 + \sin z = 0.$$

(a) **(3b)** Odredite tangencijalnu ravninu na plohu $z(x, y)$ u točki $A(0, 0, 0)$.

(b) **(5b)** Odredite drugi diferencijal funkcije $z(x, y)$ u točki $A(0, 0, 0)$.

(3.) Tražimo tangencijalnu ravninu na plohu $z(x,y)$ u točki $A(0,0,0)$.

(a) Jednadžba tangencijalne ravnine u $A(0,0,0)$ glasi:

$$z-0=\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)\cdot(x-0)+\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)\cdot(y-0)$$

Definiramo: $F(x,y,z)=2x+3y+\sin(4x+5y)+z^2+\sin z$

Jer je $F(x,y,z(x,y))=0$, vrijede formule: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(2+4\cos(4x+5y))}{2z+\cos z} \quad \& \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(3+5\cos(4x+5y))}{2z+\cos z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=-6, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-8$$

$\Rightarrow$ tangencijalna ravnina je $z=-6x-8y$.

(b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2+4\cos(4x+5y)}{2z+\cos z}\right)=\frac{-16\sin(4x+5y)\cdot(2z+\cos z)-(2+4\cos(4x+5y))(2-\sin z)\frac{\partial z}{\partial x}}{(2z+\cos z)^2}=$$

pa je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0)=-72$,

Slično se izračuna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0)=-96$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0)=-128$ pa je

$$d^2f=-72(dx)^2-192\,dx\,dy-128(dy)^2.$$

MI22

2. **(9 bodova)**

(a) **(4b)** Odredite točke na plohi $z = \dfrac{x^2}{y^3}$ u kojima je tangencijalna ravnina okomita na tangentu krivulje $\vec{\mathbf{r}}(t) = (4 - t^2)\,\vec{\mathbf{i}} + e^{t^3-1}\,\vec{\mathbf{j}} + (t+3)\,\vec{\mathbf{k}}$ u točki $T(3, 1, 4)$.

(b) **(3b)** Koristeći prvi diferencijal, odredite približnu vrijednost izraza $\dfrac{1.01^2}{0.98^3}$.

(c) **(2b)** Odredite Taylorov polinom drugog stupnja funkcije $z = \dfrac{x^2}{y^3}$ oko točke $(1, 1)$.

Zadatak 2.

<u>RJEŠENJE</u> **(a)** Označimo s S plohu zadanu jednadžbom $z = \frac{x^2}{y^3}$ - tangencijalna ravnina plohe S u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ je okomita na neki vektor $\vec{\mathbf{v}}$ ako i samo ako je vektor normale u toj točki, $\vec{\mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0)$, kolinearan s vektorom $\vec{\mathbf{v}}$. Po PROPOZICIJI 3 iz POGLAVLJA 2 (stranica 26) znamo da je vektor normale $\vec{\mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0)$ na tangnecijalnu ravninu u točki $T(x_0, y_0, z_0)$ plohe $z = f(x, y)$ dan kao vektor

$$\vec{\mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0) = \Big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\Big).$$

U našem slučaju imamo da je $f(x, y) = \frac{x^2}{y^3}$ pa je normala u nekoj točki $T(x_0, y_0, z_0)$ plohe S dana s

$$\vec{\mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2x_0}{y_0^3}, -\frac{3x_0^2}{y_0^4}, -1\right).$$

Još je potrebno odrediti vektor $\vec{\mathbf{v}}$ iz zadatka. Naime, tangenta krivulje $\vec{\mathbf{r}}$ u točki $(3, 1, 4)$ ima vektor smjera $\vec{\mathbf{r}}'(t_0)$, gdje je t_0 parametar za koji se postiže $\vec{\mathbf{r}}(t_0) = (3, 1, 4)$ - (tangencijalna) ravnina je okomita na pravac ako i samo ako je okomita na njegov vektor smjera. Odredimo prvo parametar t_0 u kojem krivulja $\vec{\mathbf{r}}$ prolazi kroz točku $(3, 1, 4)$:

$$\vec{\mathbf{r}}(t_0) = (3, 1, 4) \iff \Big(4 - t_0^2, e^{t_0^3 - 1}, t_0 + 3\Big) = (3, 1, 4) \iff t_0 = 1.$$

Sada je traženi vektor smjera dan kao $\vec{\mathbf{r}}'(t_0) = (-2t_0, 3t_0^2 e^{t_0^3-1}, 1)$ odnosno uvrštavanjem $t_0 = 1$ dobivamo $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}}'(1) = (-2, 3, 1)$. Konačno, kao što smo najavili i na početku rješenja, potrebno je provjeriti kada je vektor normale $\vec{\mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0)$ kolinearan s dobivenim vektorom $\vec{\mathbf{v}} = (-2, 3, 1)$ - raspisujemo:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0) \parallel \vec{\mathbf{v}} &\iff \vec{\mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0) = \lambda \vec{\mathbf{v}}, \text{ za neki } \lambda \in \mathbb{R} \\
&\iff \left(\frac{2x_0}{y_0^3}, -\frac{3x_0^2}{y_0^4}, -1\right) = \lambda(-2, 3, 1), \text{ za neki } \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Odavde vidimo da nam λ mora biti jednako -1 te da dobivamo dvije jednakosti koje dalje raspisujemo:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2\dfrac{x_0}{y_0^3} = 2 \\ -3\dfrac{x_0^2}{y_0^4} = -3 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_0 = y_0^3 & , \ y_0 \neq 0 \\ x_0^2 = y_0^4 & , \ y_0 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = y_0^3 & , \ y_0 \neq 0 \\ y_0^6 = y_0^4 & , \ y_0 \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_0 = y_0^3 & , \ y_0 \neq 0 \\ y_0^4(y_0^2 - 1) = 0 & , \ y_0 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = y_0^3 & , \ y_0 \neq 0 \\ y_0 = 1 \text{ ili } y_0 = -1 \end{cases} \\
&\iff (x_0, y_0) = (1, 1) \text{ ili } (x_0, y_0) = (-1, -1),
\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj ekvivalenciji samo uvrstili x_0 iz prve jednakosti u drugu jednakost. Zaključujemo da je normala $\vec{\mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0)$ kolinearna s vektorom $\vec{\mathbf{v}}$ ako i samo ako je (x_0, y_0) jednako $(1, 1)$ ili $(-1, -1)$ - u prvom slučaju je $z_0 = \frac{x_0^2}{y_0^3} = 1$, dok je u drugom slučaju $z_0 = \frac{x_0^2}{y_0^3} = -1$. Dakle, tražene točke plohe S su $(1, 1, 1)$ i $(-1, -1, -1)$.

(b) Prvo zapišimo traženi izraz u pogodnom funkcijskom obliku - u ovom slučaju to je najbolje napraviti na ovaj način:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y^3},$$

otkuda vidimo da je naš traženi izraz sada jednak upravo $f(1.01, 0.98)$. Odaberimo približnu točku

$$(x_0, y_0) = (1, 1)$$

te izračunajmo njenu udaljenost od tražene točke $(x, y) = (1.01, 0.98)$:

$$(\Delta x, \Delta y) = (x, y) - (x_0, y_0) = (0.01, -0.02).$$

Sada izračunajmo približnu vrijednost traženog izraza pomoću prvog diferencijala:

$$\begin{aligned}
\frac{1.01^2}{0.98^3} &= f(1.01, 0.98) \\
&\approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \\
&= f(1, 1) + f_x(1, 1) \cdot 0.01 + f_y(1, 1) \cdot (-0.02) \\
&= \frac{1^2}{1^3} + 2\frac{1}{1^3} \cdot 0.01 + (-3)\frac{1^2}{1^4} \cdot (-0.02) \\
&= 1 + 2 \cdot 0.01 + (-3) \cdot (-0.02) \\
&= 1.08,
\end{aligned}$$

gdje smo u četvrtom retku koristili da je $f_x(x, y) = 2\frac{x}{y^3}$ te da je $f_y(x, y) = -3\frac{x^2}{y^4}$.

(c) Kako bismo raspisali Taylorov polinom drugog stupnja funkcije $z = \frac{x^2}{y^3}$ oko točke $(1, 1)$ potrebno je izračunati sve parcijalne dervacije prvog i drugog reda. Za parcijalne derivacije prvog reda smo u (b) dijelu zadatka vidjeli da je

$$z_x(x, y) = 2\frac{x}{y^3} \quad \text{i} \quad z_y(x, y) = -3\frac{x^2}{y^4},$$

dok za parcijalne derivacije drugog imamo:

$$z_{xx}(x, y) = \frac{2}{y^3} \quad , \quad z_{xy}(x, y) = -6\frac{x}{y^4} \quad , \quad z_{yy}(x, y) = 12\frac{x^2}{y^5}.$$

Budući da razvijamo Taylorov polinom oko točke $(1, 1)$, potrebno je ove parcijalne derivacije izvrijedniti u toj točki:

$$\begin{gathered}
z(1, 1) = 1 \quad , \quad z_x(1, 1) = 2 \quad , \quad z_y(1, 1) = -3, \\
z_{xx}(1, 1) = 2 \quad , \quad z_{xy}(1, 1) = -6 \quad , \quad z_{yy}(1, 1) = 12.
\end{gathered}$$

Sada smo konačno u poziciji raspisati traženi Taylorov polinom drugog stupnja:

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) = z&(1, 1) \\
&+ z_x(1, 1)(x - 1) + z_y(1, 1)(y - 1) \\
&+ \frac{1}{2}\left[z_{xx}(1, 1)(x - 1)^2 + 2z_{xy}(1, 1)(x - 1)(y - 1) + z_{yy}(1, 1)(y - 1)^2\right] \\
= 1 &+ 2(x - 1) - 3(y - 1) \\
&+ \frac{1}{2}\left[2(x - 1)^2 - 12(x - 1)(y - 1) + 12(y - 1)^2\right] \\
= 1 &+ 2(x - 1) - 3(y - 1) + (x - 1)^2 - 6(x - 1)(y - 1) + 6(y - 1)^2.
\end{aligned}$$

□

JIR23

1. (**10 bodova**)

   (a) (**4b**) Koristeći prvi diferencijal, približno izračunajte vrijednost izraza

   $$\frac{0.9^{1.2}}{1.2^{0.9}}.$$

   (b) (**3b**) Odredite Taylorov polinom trećeg stupnja $T_3(x, y)$ u okolini točke $(0, 0)$ te pripadni Lagrangeov ostatak $R_3(x, y)$ za funkciju $f(x, y) = (1 - x^2)(y - 2)$.

   (c) (**3b**) Ako je

   $$I(\alpha) = \int_{-\alpha^2}^{3\alpha} \frac{e^{\alpha x}}{x}\, dx,$$

   odredite $\dfrac{dI}{d\alpha}(1)$.

1. (a) $f(x,y) = x^y \cdot y^{-x}$, $f(1,1) = 1$, $\Delta x = -0.1$, $\Delta y = 0.2$

$$\frac{0.9^{1.2}}{1.2^{0.9}} = f(1+\Delta x, 1+\Delta y) \approx f(1,1) + f_x'(1,1)\cdot\Delta x + f_y'(1,1)\cdot\Delta y$$

$$f_x'(x,y) = y\cdot x^{y-1}\cdot y^{-x} - x^y\cdot y^{-x}\cdot\ln y \Rightarrow f_x'(1,1) = 1$$

$$f_y'(x,y) = x^y\cdot\ln x\cdot y^{-x} - x^y\cdot x\cdot y^{-x-1} \Rightarrow f_y'(1,1) = -1$$

$$\frac{0.9^{1.2}}{1.2^{0.9}} \approx 1 + 1\cdot\Delta x - 1\cdot\Delta y = 1 - 0.1 - 0.2 = 0.7$$

(b) $f(x,y) = (1-x^2)(y-2) = -2 + y + 2x^2 - x^2y = T_3(x,y) \Rightarrow R_3(x,y) = 0$
(jer je zadana funkcija polinom 3. stupnja)

(c)

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{e^{3\alpha^2}}{\alpha}\cdot 3 + \frac{e^{-\alpha^3}}{\alpha^2}\cdot(-2\alpha) + \int_{-\alpha^2}^{3\alpha} e^{\alpha x}dx = \frac{3e^{3\alpha^2} - 2e^{-\alpha^3}}{\alpha} + \left.\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right|_{-\alpha^2}^{3\alpha}$$

$$= \frac{4e^{3\alpha^2} - 3e^{-\alpha^3}}{\alpha} \quad\Rightarrow\quad \frac{dI}{d\alpha}(1) = 4e^3 - 3e^{-1}$$

JIR23

2. (**10 bodova**)

(a) (**4b**) Neka je f funkcija dvije varijable klase C^2. Provjerite istinitost sljedećih tvrdnji. Istinite tvrdnje dokažite, a neistinite opovrgnite protuprimjerom:
T1: Ako f ima lokalni ekstrem u točki T, tada je $\nabla f(T) = \vec{0}$.
T2: Ako je $\nabla f(T) = \vec{0}$ i $d^2 f(T) > 0$, tada je T točka lokalnog minimuma.

(b) (**6b**) Koristeći metodu Lagrangeovog multiplikatora, odredite uvjetne ekstreme funkcije $f(x, y) = \ln(x + y)$ uz uvjet $x^2 + 2y^2 = 4$.

2. (a) T1: Istinita, Teorem 3.4.1 u skripti + dokaz.
T2: Istinita, Teorem 3.4.2 u skripti + dokaz.

(b)

$$L(x,y,\lambda) = \ln(x+y) + \lambda(x^2+2y^2-4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{1}{x+y} + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{1}{x+y} + 4\lambda y = 0$$

$$2\lambda x - 4\lambda y = 0$$

$$2\lambda(x-2y) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ je nemoguće pa $x - 2y = 0 \;\Rightarrow\; x = 2y$

$$4y^2 + 2y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Kako vrijedi $x + y > 0$ dolazimo do stacionarne točke: $T_1(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$.

$$\frac{1}{\frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}} + \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}$$

$$L''_{xx} = -\frac{1}{(x+y)^2} + 2\lambda \Rightarrow L''_{xx}(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}) = -\frac{5}{12}$$

$$L''_{xy} = -\frac{1}{(x+y)^2} \Rightarrow L''_{xy}(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}) = -\frac{1}{6}$$

$$L''_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2} + 4\lambda \Rightarrow L''_{yy}(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}) = -\frac{2}{3}$$

$$2xdx + 4ydy = 0$$

$$\frac{4\sqrt{6}}{3}dx + \frac{4\sqrt{6}}{3}dy = 0$$

$$dx + dy = 0$$

$$dx = -dy$$

$$d^2L = -\frac{5}{12}(dx)^2 - \frac{1}{3}dxdy - \frac{2}{3}(dy)^2 = -\frac{5}{12}(dx)^2 - \frac{1}{3}(dx)^2 - \frac{2}{3}(dx)^2 < 0$$

što znači da je točka T_1 točka strogog lokalnog minimuma.

LJIR23

2. (**10 bodova**)

   (a) (**3b**) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + xy - y^2 - 3x + 3y$.

   (b) **(1b)** Navedite gdje se sve mogu postići globalni ekstremi neprekinute funkcije $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na omeđenom i zatvorenom skupu D.

   (c) (**6b**) Odredite globalne ekstreme funkcije iz (a) na trokutu omeđenog osima x i y te pravcem $x + y = 3$.

Zadatak 2.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** Tražimo stacionarne točke, koji su jedini kandidati za lokalne ekstreme funkcije f. To su (x, y) za koje vrijedi

$$\nabla f(x,y) = (2x + y - 3,\ x - 2y + 3) = (0,0) \iff x = \frac{3}{5},\ y = \frac{9}{5}.$$

Dakle, jedina stacionarna točka je $T = (3/5, 9/5)$. Hesseova matrica funkcije f u točki T je

$$H_f(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

čija determinanta iznosi -5, pa je T sedlasta točka, prema Sylvesterovom kriteriju.

b) Teorem 3.5.3: Globalni ekstremi se mogu postići u kritičnim točkama funkcije f (stacionarne točke i točke u kojima f nije diferencijabilna) te na rubu skupa D.

c) Kako f nema lokalnih ekstrema unutar trokuta, globalni ekstremi na danom trokutu se nužno postižu na rubu. Definirajmo funkcije

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f(t,0) = t^2 - 3t, && t \in [0,3], \\ f_2(t) &= f(0,t) = -t^2 + 3t, && t \in [0,3], \\ f_3(t) &= f(t, 3-t) = -t^2 + 3t, && t \in [0,3]. \end{aligned}$$

To su restrikcije od f na rubove trokuta. Funkcija f može postignuti minimum ili maksimum unutar stranice trokuta, u čijem slučaju će x ili y komponenta te točke biti stacionarna točka neke od gornjih funkcija, no može ih postignuti i na jednom od tri vrha. Funkcije f_1, f_2 i f_3 sve imaju stacionarnu točku $t = 3/2$. Dakle, kandidati za globalne ekstreme su

$$\begin{aligned} \text{Na stranicama: } & T_1(3/2, 0),\ T_2(0, 3/2),\ T_3(3/2, 3/2). \\ \text{Vrhovi: } & T_4(0,0),\ T_5(3,0),\ T_6(0,3). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem svih kandidata u funkciju f dobivamo da je T_1 globalni minimum, gdje f poprima vrijednost $-9/4$, dok su T_2 i T_3 globalni maksimumi, gdje funkcije poprima vrijednost $9/4$. □

JIR22

3. (**7 bodova**)

   (a) (**2b**) Neka je $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ kvadratna forma dvije varijable. Dokažite ili protuprimjerom opovrgnite sljedeću tvrdnju:

   $$\text{Ako je } ac < 0, \text{ tada je } Q(h,k) \text{ indefinitna forma.}$$

   (b) (**5b**) Odredite lokalne ekstreme funkcije

   $$f(x,y) = 3x^2 + 6y^2 + \frac{16}{(x-2y)^2}.$$

3. (a) Tvrdnja vrijedi. Koristimo dokaz Teorema 3.3.1 pod c).

(b) Računamo $D_f = \{(x,y) : x \neq 2y\}$, $f'_x = 6x - 2\frac{16}{(x-2y)^3}$, $f'_y = 12y + 4\frac{16}{(x-2y)^3}$. Obzirom da je f diferencijabilna na cijeloj domeni (otvoren skup), stacionarne točke su jedini kandidati za lokalne ekstreme:

$$6x - 2\frac{16}{(x-2y)^3} = 0/\cdot 2$$

$$12y + 4\frac{16}{(x-2y)^3} = 0$$

Sumiranjem slijedi $12x + 12y = 0$, tj. $x = -y$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobije se $6x - 2\frac{16}{(3x)^3}$ odnosno $81x^4 - 16 = 0$. Sada je $x = \pm\frac{2}{3}$, $y = \mp\frac{2}{3}$, pa su stacionarne točke $T_1(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ i $T_2(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Računamo $f''_{xx} = 6 + 6\frac{16}{(x-2y)^4}$, $f''_{yy} = 12 + 24\frac{16}{(x-2y)^4}$, $f''_{xy} = -12\frac{16}{(x-2y)^4}$. Hesseova matrica glasi

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H_f(T_1) = H_f(T_2) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 36 \end{pmatrix}.$$

Obzirom da su obje minore strogo veće od 0, zaključujemo da su točke T_1 i T_2 lokalni minimumi.

LJIR22

3. (**8 bodova**)

   (a) (**6b**) Koristeći metodu Lagrangeovog multiplikatora, odredite uvjetne ekstreme funkcije $f(x,y) = 2x - 4y$ uz uvjet $x^2 + 2y^2 = 4$.

   (b) (**2b**) Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x,y) = 2x - 4y$ na skupu $x^2 + 2y^2 \leqslant 4$.

3. (a)

$$L(x, y, \lambda) = 2x - 4y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 4)$$

Nužni uvjet za ekstreme:

$$\begin{aligned} L_x &= 2 - 2\lambda x = 0 \\ L_y &= -4 + 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe slijedi $x = -\frac{1}{\lambda}$, $y = \frac{1}{\lambda}$, što uvrštavanjem u uvjet dobivamo $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Stacionarne točke su $T_1(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ i $T_2(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$. Računamo diferencijal uvjeta:

$$\begin{aligned} d(x^2 + 2y^2 - 4) &= 0 \\ 2xdx + 4ydy &= 0 \\ dy &= -\frac{x}{2y}dx \end{aligned}$$

I uvrštavamo ga u drugi diferencijal:

$$\begin{aligned} L_{xx} &= 2\lambda \\ L_{xy} &= 0 \\ L_{yy} &= 4\lambda \\ d^L &= 2\lambda(dx)^2 + 4\lambda(dy)^2 \\ d^L &= 2\lambda\left((dx)^2 + 2\left(\frac{x^2}{4y^2}\right)(dx)^2\right) \\ d^2L &= 2\lambda\left(1 + \frac{x^2}{2y^2}\right)(dx)^2 \end{aligned}$$

Za $\lambda_1 > 0$ vrijedi $d^2L(T_1) > 0$ pa je T_1 lokalni minimum.
Za $\lambda_2 < 0$ vrijedi $d^2L(T_2) < 0$ pa je T_2 lokalni maksimum.

(b) Da bi točka bila globalni ekstrem na skupu, mora biti ili lokalni ekstrem na unutrašnjosti skupa ili se nalaziti na rubu skupa. Funkcija je linearna pa je $\nabla f \neq \vec{0}$, odnosno funkcija nema lokalnih ekstrema, a ekstreme na rubu smo pronašli u (a) dijelu zadatka. Dakle, globalni minimum iznosi $-4\sqrt{3}$ i postiže se u točki T_1, a globalni maksimum je $4\sqrt{3}$ i postiže se u T_2.

LJIR21

3. (**7 bodova**) Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$u(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}.$$

3. Prvo tražimo stacionarne točke

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = \frac{4x^2 - y^2}{4x^2} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = \frac{y^3 - 2xz^2}{2xy^2} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = \frac{2z^3 - 2y}{yz^2} = 0$$

Iz ovoga dobivamo

$$4x^2 - y^2 = 0$$
$$y^3 - 2xz^2 = 0$$
$$z^3 - y = 0$$

Iz treće jednadžbe imamo $y = z^3$ pa to uvrstimo u preostale dvije:

$$4x^2 - z^6 = 0$$
$$z^9 - 2xz^2 = 0$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x = \frac{z^7}{2}$ pa uvrštavanjem u prvu imamo

$$z^{14} - z^6 = 0$$
$$z^6(z^8 - 1) = 0$$

Realna rješenja su $z = 0$, $z = 1$ i $z = -1$. Stacionarne točke su zato $(0,0,0)$, $(\frac{1}{2},1,1)$ i $(-\frac{1}{2},-1,-1)$. Funkcija u očito nije definirana u $(0,0,0)$, pa promatrajmo samo točke $(\frac{1}{2},1,1)$ i $(-\frac{1}{2},-1,-1)$.
Kako je funkcija neparna, dovoljno je promotriti ekstremalnost točke $(\frac{1}{2},1,1)$, ukoliko je ona minimum, točka $(-\frac{1}{2},-1,-1)$ je maksimum i obrnuto. Isto tako, ako jedna nije lokalni ekstrem, nije niti druga.
Promotrimo Hesseovu matricu, druge derivacije su

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^3 + 4xz^2}{2xy^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2z^3 + 4y}{yz^3}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{2x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{2z}{y^2}$$

Hessian u točki $(\frac{1}{2},1,1)$ je

$$H_u\left(\frac{1}{2},1,1\right) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Minore ove matrice su

$$u_{xx}(T_0) = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

Sve minore su veće od 0, pa je $(\frac{1}{2},1,1)$ lokalni minimum, a zbog neparnosti je $(-\frac{1}{2},-1,-1)$ lokalni maksimum (ili se to provjeri pomoću minora).

JIR21

3. (**8 bodova**) Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno jednadžbom
$$x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z = 8.$$

Zad 3.

$$x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0 \quad , z = z(x,y)$$

Parcijalno deriviramo po x i po y

• po x : $3x^2 - 0 - 3 + 0 + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2z+1) = 3 - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3(1-x^2)}{1+2z}$$

• po y: $0 - 2y - 0 + 4 + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2z+1) = 2y - 4 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(y-2)}{1+2z}$$

iz $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ dobijemo $x = \pm 1$, a iz $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ dobijemo $y = 2$

U jednadžbi se javlja z^2 što znači da imamo dvije plohe $z = z(x,y)$

Uvrstimo li $(1,2)$ u plohu dobijemo $z^2 + z - 6 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} z_1 = 2 \\ z_2 = -3 \end{matrix}$,

a uvrstimo li $(-1,2)$ u plohu dobijemo $z^2 + z - 2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} z_3 = 1 \\ z_4 = -2 \end{matrix}$

Za Hesseovu matricu trebamo još i druge derivacije

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3(1-x^2)}{1+2z}\right) = 3\cdot\frac{-2x(1+2z)-(1-x^2)\cdot 2\,\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+2z)^2} = \frac{-6x(1+2z)}{(1+2z)^2}$$

$$= \frac{-6x}{1+2z}$$ jer u točkama našeg interesa vrijedi $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\,\frac{y-2}{1+2z}\right) = 2\,\frac{1+2z-(y-2)\cdot 2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+2z)^2} = \frac{2}{1+2z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\,\frac{y-2}{1+2z}\right) = 2(y-2)\cdot\frac{-1}{(1+2z)^2}\cdot 2\,\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{-6x}{1+2z} & 0 \\ 0 & \frac{2}{1+2z} \end{bmatrix}$$

- u točki $(1,2)$ za z_1, $H_{z_1}(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{-6}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

  $\Delta_1 < 0$ & $\Delta_2 < 0 \Rightarrow$ SEDLO

  u točki $(1,2)$ za z_2, $H_{z_2}(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{-6}{-5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{-5} \end{bmatrix}$

  $\Delta_1 > 0$ & $\Delta_2 < 0 \Rightarrow$ SEDLO

- u točki $(-1,2)$ za z_3, $H_{z_3}(-1,2) = \begin{bmatrix} \frac{6}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

  $\Delta_1 > 0$ & $\Delta_2 > 0 \Rightarrow$ LOKALNI MINIMUM

  u točki $(-1,2)$ za z_4, $H_{z_4}(-1,2) = \begin{bmatrix} \frac{6}{-3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{-3} \end{bmatrix}$

  $\Delta_1 < 0$ & $\Delta_2 > 0 \Rightarrow$ LOKALNI MAKSIMUM

LJIR20

2. (**7 bodova**)

   (a) (**3b**) Odredite prvi diferencijal funkcije $f(x, y) = e^{x^2} + \ln \frac{1}{xy}$ u točki $T(1, 1)$ te pomoću dobivenog diferencijala aproksimirajte vrijednost $f(1.02, 0.9)$.

   (b) (**4b**) Odredite Taylorov polinom drugog stupnja funkcije $f(x, y) = e^{x^2} + \ln \frac{1}{xy}$ oko točke $T(1, 1)$ te pomoću dobivenog polinoma aproksimirajte vrijednost $f(1.02, 0.9)$.

2. (a) $f(x,y) = e^{x^2} + \ln\frac{1}{xy} = e^{x^2} - \ln(xy)$ $\qquad T(1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2} - \frac{1}{xy}\cdot y = 2xe^{x^2} - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2e-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 - \frac{1}{xy}\cdot x = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1$$

$$\Rightarrow df(T) = (2e-1)dx - dy$$

$$f(1.02, 0.9) = f(1+0.02, 1-0.1)$$

$$\approx f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot 0.02 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot(-0.1) = e + (2e-1)\cdot 0.02 + 0.1$$

$$= 1.04e + 0.08$$

(b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{x^2} + 2x\cdot 2xe^{x^2} + \frac{1}{x^2} = (2+4x^2)e^{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6e+1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1) = 0$$

$$T_2(x,y) = f(1,1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)\right)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(x-1)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(y-1)^2\right)$$
$$= e + (2e-1)(x-1) - (y-1) + \frac{1}{2}(6e+1)(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2$$

$$f(1.02, 0.9) \approx T_2(1.02, 0.9)$$
$$= e + (2e-1)\cdot 0.02 + 0.1 + \frac{1}{2}(6e+1)\cdot(0.02)^2 + \frac{1}{2}\cdot(-0.1)^2$$
$$= 1.052e + 0.0852$$

LJIR20

3. (**8 bodova**) Metodom Lagrangeovih multiplikatora nađite uvjetne ekstreme funkcije $f(x,y,z) = xy + y^3 - z^2$ uz uvjete $y - z = 1$ i $y - x = 5$.

3. $f(x,y,z) = xy + y^3 - z^2$ $y - z = 1, \quad y - x = 5$

Lagrangeova funkcija:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = xy + y^3 - z^2 + \lambda(y - z - 1) + \mu(y - x - 5)$$

$$\begin{cases} L'_x = y - \mu = 0 & \Rightarrow \mu = y \\ L'_y = x + 3y^2 + \lambda + \mu = 0 & \\ L'_z = -2z - \lambda = 0 & \Rightarrow \lambda = -2z = -2y + 2 \\ L'_\lambda = y - z - 1 = 0 & \Rightarrow z = y - 1 \\ L'_\mu = y - x - 5 = 0 & \Rightarrow x = y - 5 \end{cases}$$

Uvrstimo sve u drugu jednadžbu:

$$\cancel{y} - 5 + 3y^2 \cancel{-2y} + 2 \cancel{+y} = 0$$

$$\Rightarrow 3y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 = 1$$

$y_1 = 1, \; x_1 = -4, \; z_1 = 0, \; \lambda_1 = 0, \; \mu_1 = 1$

$y_2 = -1, \; x_2 = -6, \; z_2 = -2, \; \lambda_2 = 4, \; \mu_2 = -1$

Drugi diferencijal Lagrangeove funkcije:

$L''_{xx} = 0, \; L''_{yy} = 6y, \; L''_{zz} = -2, \; L''_{xy} = L''_{yx} = 1, \; L''_{yz} = L''_{zy} = 0, \; L''_{zx} = L''_{xz} = 0$

$$\Rightarrow d^2L(x,y,z) = 6y\,(dy)^2 - 2\,(dz)^2 + 2dx\,dy$$

Diferencijali uvjeta:

$$\left.\begin{aligned} y - z = 1 \quad /d \quad &\Rightarrow dy = dz \\ y - x = 5 \quad /d \quad &\Rightarrow dy = dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow dx = dy = dz \Rightarrow d^2L(x,y,z) = 6y\,(dy)^2$$

Imamo

$d^2L(-4,1,0) = 6(dy)^2 > 0$ za $(dx,dy,dz) \neq (0,0,0)$

$\Rightarrow (-4,1,0)$ lokalni uvjetni minimum

$d^2L(-6,-1,-2) = -6\,(dy)^2 < 0$ za $(dx,dy,dz) \neq (0,0,0)$

$\Rightarrow (-6,-1,-2)$ lokalni uvjetni maksimum

JIR201

3. **(8 bodova)**

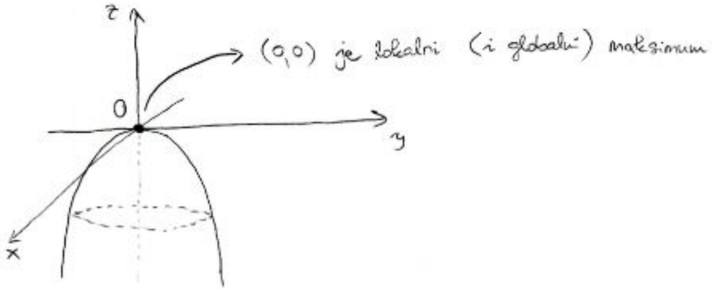
(a) **(2b)** Navedite primjer funkcije dvije varijable s lokalnim maksimumom u $T(0,0)$ te primjer funkcije dvije varijable s lokalnim minimumom u $T(1,1)$.

(b) **(6b)** Odredite lokalne ekstreme funkcije:

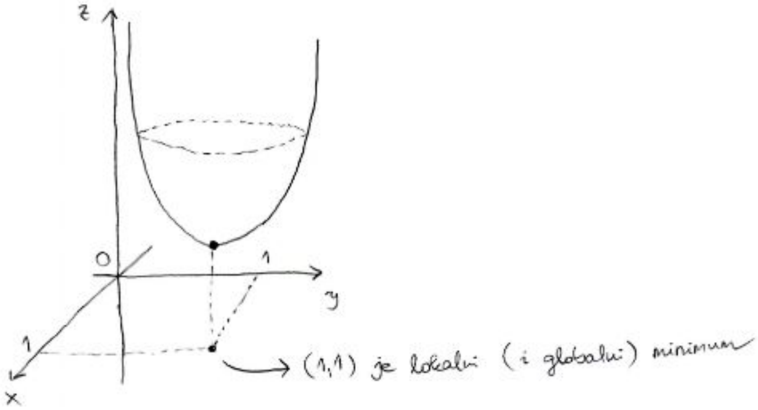
$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 y^2) - x^2 - y^2 + xy.$$

(3) (a) Na primjer,

$$f(x,y) = -x^2 - y^2$$



$$g(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$$



③ (b) $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2) + \frac{1}{2}\ln(y^2) - x^2 - y^2 + xy$

$$f'_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x - 2x + y = 0$$

$$\frac{1}{x} - 2x + y = 0 \quad \Big| \cdot x$$

$$\boxed{1 - 2x^2 + yx = 0}$$

$$f'_y = \frac{1}{2}\;\frac{1}{y^2}\cdot 2y - 2y + x = 0$$

$$\frac{1}{y} - 2y + x = 0 \quad \Big| \cdot y$$

$$\boxed{1 - 2y^2 + xy = 0}$$

$\ominus \Rightarrow -2x^2 + 2y^2 = 0$

$x^2 = y^2$

$x = y$

$1 - 2x^2 + x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$$\boxed{\begin{matrix} T_1\ (1,1) \\ T_2\ (-1,-1) \end{matrix}}$$

$x = -y$

$1 - 2x^2 - x^2 = 0$

$-3x^2 = -1$

$x^2 = \frac{1}{3}$

$$\boxed{\begin{matrix} T_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ T_4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{matrix}}$$

$$f''_{xx} = -\frac{1}{x^2} - 2$$

$$f''_{yy} = -\frac{1}{y^2} - 2$$

$$f''_{xy} = 1$$

$$H_f(T_{1,2}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 > 0$$

$f''_{xx}(T_{1,2}) = -3 < 0$ } LOKALNI MAKSIMUMI

$$H_f(T_{3,4}) = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 25 - 1 = 24 > 0$$

$; f''_{xx}(T_{3,4}) = -5 < 0$ } LOKALNI MAKSIMUMI

JIR202

3. **(9 bodova)**

   (a) **(2b)** Iskažite nužan uvjet koji mora zadovoljavati točka T da bi bila točka uvjetnog lokalnog ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$.

   (b) **(7b)** Metodom Lagrangeovih multiplikatora nađite uvjetne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ uz uvjet $4x^2 + 4xy + y^2 = 1$.

3. a) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ T.D

$$\nabla(f(T) + \lambda \varphi(T)) = \vec{0}$$

b) LAGRANGEOVA FUNKCIJA

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 + \lambda(4x^2 + 4xy + y^2 - 1)$$

$L'_x = 0 \qquad 2x + y + 8\lambda x + 4\lambda y = 0$

$L'_y = 0 \qquad x + 2y + 4\lambda x + 2\lambda y = 0 \; \Big\} \cdot (-2) \; +$

$\varphi = 0 \qquad 4x^2 + 4xy + y^2 = 1$

$$2x + y + 8\lambda x + 4\lambda y - 2(x + 2y + 4x\lambda + 2\lambda y) = 0$$

$$-3y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$4x^2 = 1 \qquad 2x + 8\lambda x = 0 \qquad$ uz $x \neq 0$

$x = \pm \frac{1}{2} \qquad \lambda = -\frac{1}{4}$

STACIONARNE TOČKE

$T_1\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}\right)$

$T_2\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}\right)$

$L''_{xx} = 2 + 8\lambda$

$L''_{xy} = 1 + 4\lambda$

$L''_{yy} = 2 + 2\lambda$

DIFERENCIJAL UVJETA

$(8x + 4y)\,dx + (4x + 2y)\,dy = 0$

$dy = -\frac{8x + 4y}{4x + 2y}\,dx$

$dy = -2\,dx$

3. b) $d^2L = (2+8\lambda)(dx)^2 + 2(1+4\lambda)\,dx\,dy + (2+2\lambda)(dy)^2$

$d^2L = (2+8\lambda)(dx)^2 - 4(1+4\lambda)(dx)^2 + 4(2+2\lambda)(dx)^2$

$d^2L = [2+8\lambda-4-16\lambda+8+8\lambda](dx)^2$

$d^2L = 6(dx)^2 > 0$ ZA $(dx, dy) \neq (0, 0)$

T_1 I T_2 SU LOKALNI UVJETNI MINIMUMI

JIR19

3. (**10 bodova**)

(a) **(2b)** Ako je T_0 točka lokalnog maksimuma funkcije $z = f(x, y)$, dokažite da je tada T_0 stacionarna točka od f, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(T_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(T_0) = 0$.

(b) **(2b)** Ako je T_0 stacionarna točka funkcije f i ako je $d^2 f(T_0)$ negativno definitna kvadratna forma, dokažite da je tada T_0 lokalni maksimum od f.

(c) **(6b)** Odredite točke lokalnog maksimuma funkcija $z = z(x, y)$ zadanih implicitno s

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

(3.) (a) Neka je $T_0(x_0,y_0)$ točka lokalnog maksimuma diferencijabilne funkcije $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Tada funkcije

$$g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_1(x) = f(x,y_0), \quad g_2(y) = f(x_0,y),$$

imaju lokalne maksimume u točkama x_0, y_0 redom pa mora vrijediti:

$$0 = g_1'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),$$

$$0 = g_2'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),$$

tj. T_0 je stacionarna točka od f.

(b) Funkciju f možemo razviti u Taylorov polinom oko točke T_0:

$$f(x,y) = f(T_0) + \Big[\underbrace{f_x'(T_0)}_{=0}(x-x_0) + \underbrace{f_y'(T_0)}_{=0}(y-y_0)\Big]$$

$$+ \frac{1}{2!}\Big[f_{xx}''(T_c)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}''(T_c)(x-x_0)(y-y_0)$$

$$+ f_{yy}''(T_c)(y-y_0)^2\Big]$$

$$= f(T_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(T_c),$$

gdje je T_c neka točka na spojnici točaka (x,y) i T_0.

Za točke (x,y) u dovoljno maloj okolini točke T_0 vrijedit će $d^2 f(x,y) < 0$ pa posebno i $d^2 f(T_c) < 0$ (zbog $d^2 f(T_0) < 0$ i neprekidnosti drugog diferencijala).

Zato za sve takve točke imamo

$$f(x,y) = f(T_0) + \underbrace{\frac{1}{2!}d^2 f(T_c)}_{<0} < f(T_0),$$

odakle po definiciji slijedi da je T_0 lokalni maksimum od f.

(c) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0 \quad \Big/ \partial_x$

$$\Rightarrow 2x+2zz_x-2-6z_x=0$$

$$\Rightarrow (z-3)z_x = 1-x$$

$$\Rightarrow z_x = \frac{1-x}{z-3}=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0 \quad \Big/ \partial_y$$

$$\Rightarrow 2y+2zz_y+4-6z_y=0$$

$$\Rightarrow (z-3)z_y=-2-y$$

$$\Rightarrow z_y=\frac{-2-y}{z-3}=0 \Rightarrow \boxed{y=-2}$$

U dobivenoj stacionarnoj točki računamo vrijednost funkcije z:

$$1^2+(-2)^2+z^2-2-8-6z-11=0$$

$$z^2-6z-16=0$$

$$(z+2)(z-8)=0$$

$$\Rightarrow z_1=-2\ ,\ z_2=8$$

(dvije funkcije $z=z(x,y)$ određene zadanom implicitnom jednadžbom koje imaju stacionarnu točku $(1,-2)$)

U dobivenoj stacionarnoj točki računamo druge parcijalne derivacije:

(zanimaju nas 2. parcijalne derivacije u stacionarnim točkama)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-x}{z-3}\right)=\frac{-1\cdot(z-3)-(1-x)\cdot \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{z_x}}{(z-3)^2}$$

$$=-\frac{1}{z-3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2-y}{z-3}\right)=\frac{-1\cdot(z-3)-(-2-y)\cdot \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{z_y}}{(z-3)^2}=-\frac{1}{z-3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2-y}{z-3}\right) = -\frac{-2-y}{(z-3)^2} \cdot \overset{0}{\overset{\shortparallel}{z_x}} = 0$$

Zato za Hesseovu matricu od z imamo

$$H_z(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{z-3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z-3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_{z_1}(1,-2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \Delta_1 = \frac{1}{5} > 0 \\ \Delta_2 = \frac{1}{25} > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow H_{z_1}(1,-2) > 0$$

$\Rightarrow (1,-2)$ je lokalni minimum funkcije z_1

$$\Rightarrow H_{z_2}(1,-2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \Delta_1 = -\frac{1}{5} < 0 \\ \Delta_2 = \frac{1}{25} > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow H_{z_2}(1,-2) < 0$$

$\Rightarrow (1,-2)$ je lokalni maksimum funkcije z_2

2\. način

Preuredimo zadanu implicitnu jednadžbu:

$$(x^2-2x) + (y^2+4y) + (z^2-6z) = 11$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$$

Dobili smo jednadžbu sfere sa središtem $(1,-2,3)$ radijusa 5.

Odavde slijedi da se maksimalna vrijednost z iznosi $z_{max} = 3+5 = 8$

(i to je maksimum funkcije $z = 3 + \sqrt{25-(x-1)^2-(y+2)^2}$).

Slično, minimalna vrijednost od z iznosi $z_{min} = 3-5 = -2$

(i to je minimum funkcije $z = 3 - \sqrt{25-(x-1)^2-(y+2)^2}$).

LJIR19

2. (**8 bodova**) Zadana je funkcija $f(x, y) = x^2 e^y$.

(a) (**3b**) Nađite usmjerenu derivaciju ove funkcije iz točke $P(2, 0)$ u smjeru vektora $\overrightarrow{PQ}$, gdje je $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) (**2b**) Odredite vrijednost usmjerene derivacije u smjeru najbržeg rasta ove funkcije iz točke $P(2, 0)$.

(c) (**3b**) Napišite 2. Taylorov polinom $T_2(x, y)$ ove funkcije u okolini točke (x_0, y_0). Koristeći $T_2(x, y)$ izračunajte približnu vrijednost izraza $(2.1)^2 \cdot e^{-0.1}$.

(2.) $f(x,y) = x^2 \cdot e^y$

(a) Tražimo usmjerenu derivaciju funkcije f iz točke $P(2,0)$ u smjeru vektora $\overrightarrow{PQ}$, gdje je $Q(\frac{1}{2},2)$.

Usmjerenu derivaciju računamo po formuli: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{v}_0$ gdje je $\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$,

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (\frac{1}{2},2) - (2,0)$

$\vec{v} = (-\frac{3}{2}, 2)$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xe^y, x^2 e^y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = (2xe^y, x^2e^y) \cdot \frac{(-\frac{3}{2}, 2)}{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,0) = (4,4) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{12}{5} + \frac{16}{5} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

(b) Jer je $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \frac{v}{\|v\|} = \|\nabla f(\vec{x})\| \cdot \underbrace{\frac{\|v\|}{\|v\|}}_{=1} \cdot \underbrace{\cos(\measuredangle\, \nabla f(\vec{x}), v)}_{\in [-1,1]} \in [-\|\nabla f(\vec{x})\|, \|\nabla f(\vec{x})\|]$,

vidimo da je vrijednost usmjerene derivacije u smjeru najbržeg rasta jednaka

$\|\nabla f(2,0)\| = \|(4,4)\| = \sqrt{4^2+4^2} = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$.

(c)

$$f(x_0,y_0) = x_0^2 \cdot e^{y_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 e^{y_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = x_0^2 \cdot e^{y_0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = 2x_0 e^{y_0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 2e^{y_0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = x_0^2 e^{y_0}$$

$$\Rightarrow T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) =$$

$$= x_0^2 \cdot e^{y_0} + 2x_0 e^{y_0}(x-x_0) + x_0^2 \cdot e^{y_0}(y-y_0) +$$

$$\frac{1}{2}\left(2e^{y_0}(x-x_0)^2 + 4x_0 e^{y_0}(x-x_0)(y-y_0) + x_0^2 e^{y_0}(y-y_0)^2\right)$$

Približnu vrijednost izraza $(2.1)^2 \cdot e^{-0.1}$ pomoću $T_2(x,y)$ računamo kao

$$T_2(2.1,-0.1) = 4 + \cancel{4\cdot 0.1 + 4\cdot(-0.1)} +$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\left(\cancel{2}\cdot 0.1^2 + \cancel{2}\cdot 4\cdot 0.1\cdot(-0.1) + {}^{2}\cancel{4}\cdot 0.1^2\right) =$$

$$= \underline{3.99}$$

$(x_0,y_0) = (2,0)$

LJIR19

3. (**7 bodova**)

(a) (**1b**) Definirajte Hesseovu matricu funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ u točki $T_0(x_0, y_0)$.

(b) (**1b**) Iskažite dovoljan uvjet da bi stacionarna točka $T_0(x_0, y_0)$ bila lokalni minimum funkcije f koristeći Hesseovu matricu.

(c) (**5b**) Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$.

3.

(a) Hesseova matrica funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ u točki $T_0(x_0,y_0)$: $H_f(T_0)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(T_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(T_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(T_0)\end{bmatrix}$.

(b) Dovoljni uvjeti da bi stacionarna točka $T_0(x_0,y_0)$ bila lokalni minimum :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T_0)>0 \quad \text{i} \quad \det H_f(T_0)>0.$$

(c) $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{2}{xy}$

$\nabla f(x,y)=0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=2x-\frac{2}{yx^2}=0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y-\frac{2}{xy^2}=0 \quad \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} x^3y=1 \\ xy^3=1 \Rightarrow x=\frac{1}{y^3}\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y^8}=1 \Rightarrow \underline{y=\pm 1}$$

$\Rightarrow T_1(1,1)$ i $T_2(-1,-1)$ su stacionarne točke.

$$H_f=\begin{bmatrix} 2+\frac{4}{yx^3} & \frac{2}{x^2y^2} \\ \frac{2}{x^2y^2} & 2+\frac{4}{xy^3}\end{bmatrix}, \quad H_f(1,1)=\begin{bmatrix} 6>0 & 2 \\ 2 & 6\end{bmatrix}, \quad H_f(-1,-1)=\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

$\det H_f(1,1)=\det H_f(-1,-1)=32>0$

$\Rightarrow T_1$ i T_2 su točke lokalnog minimuma.