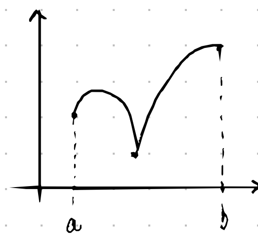
3.5. GLOBALNI EKSTREMI

Matan 1: $f(x)$ na $[a,b]$ $\Rightarrow$



kandidati: stac. točke gdje funkcija dif

$\boxed{TM}$ Nepr. f-ja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na omeđenom i zatvorenom skupu D uvijek ima min i max. Točke u kojima se glob. ekst. poprimaju su kritične točke u f. ($\to$ stac. točke $\underbrace{\text{gdje . gdje f nije dif.}}_{\text{unutar D}}$ ili rub od D).

Zad: Glob. ext. $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2$ na skupu $x^2 + y^2 \leq 9$.

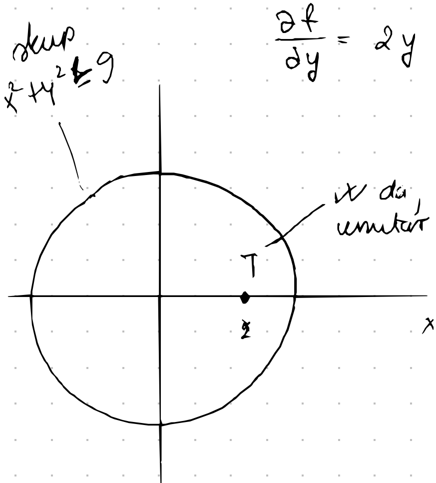
kandidati:

1. stac. točka: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0$

* parc. deriv. trebaju biti 0 da bi prva deriv. bila 0.

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$

$(2x-4,\ 2y) = (0,0)$ $\hookrightarrow$ $x = 2 \quad y = 0$ $\Big\}$ $T(2,0)$



2. drugih kritičnih točaka nema

3. rub: 1. način $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

2. način $x = 3\cos t,$ $y = 3\sin t$ *polarne

$f(t) = 9\sin^2 t - 12\cos t + 9\cos^2 t$

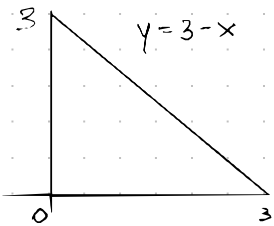
$f(t) = 9 - 12\cos t \to t = 0 \to f(t) = -3$

$\searrow t = \pi \to f(t) = 21$

Jebo, ne vidim na ploču

LW|R-23-2

c) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2 - 3x + 3y$



1 stac točka: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - 2y + 3 = 0 \end{array}\right\} T\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$

2. z analize rubaje matem 1

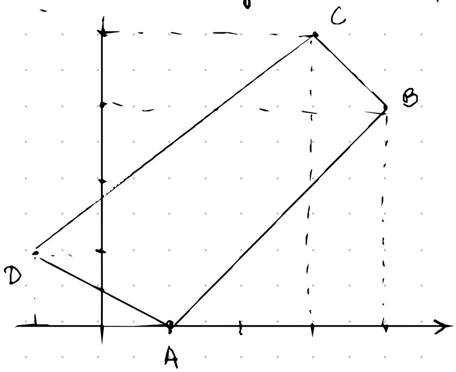
a: $x=0,\ y=t \rightarrow f(t) = -t^2 + 3t \rightarrow t \in (0,3)$

$t \in (0,3],\ f'(t) = -2t + 3 = 0 \hookrightarrow t = \frac{3}{2}$

$T_3(0,0) \quad T_4(0,3) \quad T_2 = 0, \frac{3}{2})$

b: $y=0 \quad x=t \qquad f(t) = t^2 - 3t \rightarrow t \in [0,3)$

Zad.) $f(x,y) = 3 - x - 2y$ na segmentu $A(1,0)$, $B(4,3)$, $C(3,4)$, $D(-1,1)$



1. stac. $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2 \neq 0$

nema stac točaka

2. rubovi $\quad AB:$ $y \Rightarrow$ pravac $\Big| \; x = t$

$f(t) = 3 - t - 2t$

ništa ne vidim

KOROLAR: Afina funkcija $f(\vec{x}) = \vec{a}\vec{x} + \vec{b}$ na omeđenom i zatvorenom skupu D poprima glob. min i MAX na rubu od D (jer je $\nabla f = \vec{a} \neq \vec{0}$).

Dodatno ako je rub

3.6. UVJETNI EKSTREMI

· tražimo općenito ekstreme na skupu S koji je zadan uvjetom $\varphi(\vec{x}) = 0$.

DEF $\vec{a} \in S$ zovemo uvjetni lok. ekstrem od f na S ako postoji okolina $K_\varepsilon(\vec{a})$ t.d. je $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in K_\varepsilon(\vec{a}) \cap S$

Analogno za lok. max.

TM (nužan uvjet za uvjetni ekstrem)

Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoreni skup te neka je $f: U \to \mathbb{R}$ nepr. dif. te neka je S zadana uvjetom $f(\vec{x})=0$ (pretp. $\nabla f \neq 0$) Ako je točka $\vec{a}$ uvjetni lok. extr. od f na S, tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ t.d. je

$$\boxed{\nabla f(\vec{a}) + \lambda \nabla f(\vec{a}) = \vec{0}}$$

Dokaz u nekom drugom obliku $\nabla f = -\lambda \cdot \nabla f$

λ nazivamo Lagrangeov multiplikator, te definiramo fju

$$\boxed{L(\vec{x},\lambda) = f(\vec{x}) + \lambda f(x)}$$