7.1. UVOD I OPĆE RJEŠENJE

$F(y^n, y^{n-1}, \dots y'', y', y, x) = 0$ DJ n-tog reda

- opće rj. $y = f(x, C_1, \dots C_n))$ onoliko konstanti koliki je red derivacije

Cauchyjev problem ima n početnih uvjeta:

$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \dots y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$

▶ Direktno uzastopno deriviranje

$$y''' = x^2 + \sin x \quad / \int$$

$$y'' = \frac{x^3}{3} - \cos x + C_1 \quad / \int$$

$$y' = \frac{x^4}{12} - \sin x + C_1 x + C_2 \quad / \int$$

$$y = \frac{x^5}{60} + \cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

- 3 konstante!

▶ Snižavanje reda $\boxed{y' = z}$ $y'' = z'$

* $y' = z(x)$ podrazumijeva se

Zad) $y'' + y'^2 + 1 = 0$

$z' + z^2 + 1 = 0$

uvodimo supstituciju dok ne dođemo do prvog reda:

separacija

$$\frac{dz}{dx} = -(1+z^2) \quad / \cdot \frac{dx}{1+z^2 \neq 0} \quad \rightarrow \int \frac{dz}{1+z^2} = -\int dx$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} z = -x + C_1$$

$$\operatorname{arctg} y' = -x + C_1 \quad / \operatorname{tg}$$

$$y' = \operatorname{tg}(-x + C_1) \quad / \int dx \longrightarrow y = \ln|\cos(-x + C_1)| + C_2$$

7.2. LINEARNA DERIVACIJA N-TOG REDA

oblik: $y^n + a_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) \cdot y = f(x)$

→ neprekinute funkcije od x

• Ako je $f(x) \Rightarrow 0$ homogena LDJ

Funkcije $a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x)$ su neprekinute.

LDJ n-tog reda zadovoljava uvjete Picardovog TM, pa Cauchyev problem uvjek ima jedinstveno rješenje

Primjeti:

$$\underbrace{\left[\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x) \right]}_{L} y = f(x) \quad \rightarrow \quad \boxed{Ly = f} \quad \text{operatorski zapis LDJ}$$

dif linearni operator

DEF

DEF L djeluje na $C^{(n)}$ = vekt. prostor n-puta neprekinutih dif. funkcija

• y_h je rješenje od $Ly = 0$ → homogeno rješenje

• y_p je rješenje od $Ly = f$ → partikularno rješenje

TM Svako rješenje jednadžbe $Ly = f$ se može zapisati u obliku

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

DOKAZIĆ: Neka je y_0 bilo koje rješenje.

Tada $L(y_0 - y_p) = Ly - y_p = f - f = 0$

tj. $y_0 = y_h + y_p$

$\boxed{\text{DEF}}$ Funkcije $y_1(x), \dots, y_1(x)$ su LIN. NEZAVISNE ako iz

$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$, za $\forall x \in I$ slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n = 0$

Zad) Ispitajte linearnu nezavisnost

b) $y_1 = 1 \quad y_2 = 2x - 1 \quad y_3 = x^2 + x + 3$ — linearno nezavisni jer su različitih stupnjeva

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 (2x - 1) + \alpha_3 (x^2 + x + 3) = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 + x(2\alpha_2 + \alpha_3) + x^2 \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\underline{\alpha_3 = 0}$$

$\rightarrow$ $2\alpha_2 + 0 = 0$, $\underline{\alpha_2 = 0}$ $\rightarrow$ $\alpha_1 + 0 + 0 = 0$, $\underline{\alpha_1 = 0}$

linearno nezavisne

b) $y_1 = 2 \quad y_2 = 3x \quad y_3 = x - 4 \rightarrow$ zavisne jer $y_3 = \frac{1}{3} y_2 - 2y_1$

Zadatak 21-20-8) Riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 3x + e^{2x} \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1 \end{cases}$$

$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$ za sve $r_1 \neq r_2$

$$\alpha_1 e^{r_1 x} + \alpha_2 e^{r_2 x} = 0 \;\Big|\; : e^{4x} \neq 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(r_2 - r_1)x} = 0 \;\Big|\; '$$

$\boxed{\alpha_1 = 0}$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\alpha_2} \underbrace{(r_2 - r_1)}_{\neq 0} \underbrace{e^{(r_2 - r_1)x}}_{\neq 0} = 0$$

Linearno nezavisni

DEF Determinanta Wronskog (Wronskijan)

definira se:

$$W(y_1, \dots y_1) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad n\text{-tog reda}$$

TM Ako je $W(y_1, \dots y_n) \neq 0$, tada su $y_1, \dots y_n$ lin nezavisna.

DOKAZ: $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \; /'$

$\alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y_n' = 0$ / deriviramo (n-1) puta

$\alpha_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0$

→ Dobili smo hom. sustav po nepoznanicama $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

- Det. sustava je Wronskijan.

Det je različita od nule → matrica je REGULARNA

⇓

- Linearni sustav ima jedinstveno rj.

⇒ homogeni sustav ima jedinstveno rj. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \dots \alpha_n = 0$

! ali OBRAT NE VRIJEDI,

↳ ako je Wronskijan $= 0$ → nema odluke, ne možemo ništa zaključiti

Zad. 21-2022-5) a) Pokažite da $\cos 2x$, $\sin 2x$, e^{2x} lin. nez.

dovoljno je uzeti neki x da bude $W \neq 0$

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x & e^{2x} \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x & 2e^{2x} \\ -4\cos 2x & -4\sin 2x & 4e^{2x} \end{vmatrix} \underset{x=0}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \rightarrow \text{Rj. su lin. nezavisne.}$$

Zadatak Z1-2021-6.)

a) Jesu li fje $y_1=\sin^2 x$ i $y_2=\sin 2x$ lin nezavisne?

$$W=\begin{vmatrix}\sin^2 x & \sin 2x \\ \underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x} & 2\cos 2x\end{vmatrix} \to W(x=0)=\begin{vmatrix}0 & 0 \\ 0 & 2\end{vmatrix}=\underline{\underline{0}}$$

ne znamo

$$W\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\begin{vmatrix}1 & 0 \\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

fje su lin nez.

• tražimo rješenje od $Ly=0$

TM Prostor rješenja homogene LDJ je n-dim. vekt. potprostor od $C^n[a,b]$.

→ To znači da je rješenje od HLDJ n-tog oblika: n kombinacija lin. nez. fja

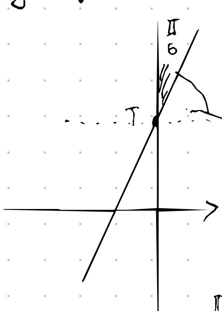
$$\Rightarrow \boxed{y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n}$$ gdje su $y_1,\dots,y_n$ lin. nez. funkcije (baza ovog potprostora)

$C_i\in\mathbb{R}$

↳ to su one konst. koje određujemo

ZADATAK: JIR-2020-1) HLDJ $Ly=0$ 2reda $(W\neq 0)$, $T(0,1)$ $\alpha=\frac{\pi}{6}$

fje: $y_1(x)=e^x+x+1$ $\quad y_2=e^{-x}+x+2$ $\Rightarrow$ opće rj. je oblika: $y_h=C_1(e^x+x+1)+C_2(e^{-x}+x+2)$



$\operatorname{tg}\alpha=k=y'$ ali to je kut sa x osi!

$\frac{\pi}{3}$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=k$

$1=C_1\cdot 2+C_2(-1)$

$C_2=\sqrt{3}-1$

$y'=C_1(e^x+1)+C_2(-e^{-x}+1)$

$\sqrt{3}=C_1\cdot 2+\cancel{0}\to C_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{\Rightarrow y_h=\frac{\sqrt{3}}{2}(e^x+x+1)+(\sqrt{3}-1)(e^{-x}+x+2)}$$

!

TM Neka su $y_1, \dots, y_n$ rješenja HLDJ za koje vrijedi $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$. Tada su $y_1 \dots y_n$ lin. zavisne.

→ ako su funkcije rješenja od HLDJ, vrijedi obrat TM o Wronskijanu!
↳ u onom prije zad nije pisalo da su to rješenja pa ovo NIJE bilo primjenjivo!

DOKAZ:

Gledamo isti sustav kao i prije $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ / deriv. n-1 put

$$\alpha_1 y_1' + \dots \alpha_n y_n' = 0$$

$$\alpha_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_1^{(n-1)} = 0$$

Det. mat. sustava je Wronskijan koji je za neki x_0: $W(x_0) = 0$
⟹ dakle imamo neka netrivijalna rješenja, tj. barem jedan $\alpha_i^* \neq 0$

- Pogledajmo sada koja je lin. kom. rješenja ovog lin sustava $y^* = \alpha_1^* y_1 + \dots + \alpha_n^* y_n$. Ta funkcija je rješenje HLDJ, ali znamo da je i $y = 0$ također rj.

Po Picardovom TM rješenje od LDJ je jedinstveno pa je $\alpha_1^* y_1 + \dots + \alpha_n^* y_n = 0$.

⟹ $y_1 \dots y_n$ su linearno zavisne

TM Rješenja $y_1, \dots, y_n$ od HLDJ n-tog reda su linearno nezavisna akko je $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$.

DOKAZ: prethodna dva TM