2. Determinante

zadaci sa ispita

MI 2018 2

2. (10 bodova) Dokažite sljedeća svojstva determinante.

   (a) Ako matrica $\mathbf{A}$ ima dva jednaka retka, onda je $\det \mathbf{A} = 0$.

   (b) Rastave li se svi elementi nekog retka matrice na zbroj dvaju elemenata, onda je determinanta jednaka zbroju dviju odgovarajućih determinanti.

   (c) Ako nekom retku matrice dodamo neki drugi redak pomnožen skalarom, vrijednost determinante neće se promijeniti.

② a) Indukcija: • za $n=2$, $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$

• pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve determinante reda n.

• Neka je A reda $n+1$ s dva jednaka retka (i-ti, j-ti). Razvijamo determinantu po bilo kojem od preostalih redaka, npr. k-tom ($k \neq i$, $k \neq j$)

$$\det A = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{k+\ell} a_{k\ell} M_{k\ell}$$ gdje je $M_{k\ell}$ determinanta matrice reda n čija su dva retka jednaka, a ona je po pretpostavci 0 pa je $\det A = 0$. QED

b) Treba pokazati da vrijedi $\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' \\ a_2 \\ \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' \\ a_2 \\ \\ a_n \end{vmatrix}$,

odnosno svaki element prvog retka prikazan je u obliku sume dvaju elemenata

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}' + a_{1j}'') A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}' A_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}'' A_{1j} = \det A' + \det A''$$ QED

c) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se tvrdnja odnosi na prvi i drugi redak matrice:

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_1 + a_2 \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_1 \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 \\ a_1 \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{vmatrix}$$

QED

prethodna tvrdnja

LJIR 2018 2

2. (10 bodova) Dokažite sljedeća svojstva determinante.

   (a) Ako matrica $\mathbf{A}$ ima dva jednaka retka, onda je $\det \mathbf{A} = 0$.

   (b) Rastave li se svi elementi nekog retka matrice na zbroj dvaju elemenata, onda je determinanta jednaka zbroju dviju odgovarajućih determinanti.

   (c) Ako nekom retku matrice dodamo neki drugi redak pomnožen skalarom, vrijednost determinante neće se promijeniti.

2. (a) Dokazujemo indukcijom po redu matrice n.

- $n=2$. $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$
- Pretp. da tvrdnja vrijedi za sve matrice reda n.
- Neka je $A \in M_{n+1}$, sa dva jednaka retka (i-ti i j-ti).

  Razvijamo determinantu po k-tom retku, $k \neq i,j$

  $\det A = \sum_{l=1}^{n+1} (-1)^{k+l} a_{kl} M_{kl}$. M_{kl} je determinanta matrice reda n čija su 2 retka jednaka, a ona je po pretpostavci jednaka 0.

(b) Dokazujemo da vrijedi

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}}_{\det A} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_1' \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}}_{\det A'} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_1'' \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}}_{\det A''}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}' + a_{1j}'') M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}' M_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}'' M_{1j} = \det A' + \det A''$$

(c) BSOMP 1. i 2. redak matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_1 + a_2 \\ \vdots \end{vmatrix} \overset{(b)}{=} \begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_1 \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 \\ a_1 \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{vmatrix} \overset{(a)}{=} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{vmatrix}$$

LJIR 2019 1

1. (a) Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

(b) Za koje a je determinanta n-tog reda

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

jednaka 0?

1. (a)

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \mid\cdot(-1) \\ + \\ + \mid\cdot(-1) \\ + \mid\cdot(-1) \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \\ + \mid\cdot 1 \quad + \mid\cdot 1 \quad + \mid\cdot 1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0\cdot(-4)^3 = 0$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \mid\cdot(-1) \\ + \\ + \mid\cdot(-1) \\ \\ + \mid\cdot(-1) \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-a & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} \\ + \mid\cdot 1 \quad + \mid\cdot 1 \quad + \mid\cdot 1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a+(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = \big(a+(n-1)\big)(a-1)^{n-1}$$

Dakle, determinanta je jednaka 0 za $a = -n+1$ i $a = 1$.

MI 2020 2

2. (10 bodova) Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Iskažite Binet-Cauchyjev teorem.

(b) Koliko iznosi determinanta matrice $\mathbf{A}$?

(c) Neka je $\mathbf{B} = \mathbf{A}^8$. Koliko iznosi determinanta matrice $\mathbf{B}$?

(d) Neka je $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top$. Koliko iznosi determinanta matrice $\mathbf{C}$?

2. (a) Neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$. Tada je $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

(b) Razvojem determinante matrice $\mathbf{A}$ po prvom stupcu dobivamo

$$\det \mathbf{A} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2(2 \cdot (-1) - 0 \cdot (-3)) = 4$$

(c) Uzastopnom primjenom Binet-Cauchyjevog teorema dobivamo

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}^8 = \det \mathbf{A}^4 \mathbf{A}^4 = (\det \mathbf{A}^4)^2 = (\det \mathbf{A}^2 \mathbf{A}^2)^2 =$$

$$= ((\det \mathbf{A}^2)^2)^2 = (\det \mathbf{A}^2)^4 = ((\det \mathbf{A})^2)^4 = (\det \mathbf{A})^8 = 4^8$$

(d)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = [\textit{2. redak dodamo 1. 4 puta i 3. 2 puta}] =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 17 & 10 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 11 & 4 \end{vmatrix} = [\textit{razvoj po 1. stupcu}] = -1 \cdot \begin{vmatrix} 17 & 10 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = 42$$

JIR 2020 1

1. (10 bodova)

(a) Dokažite da je determinanta donje trokutaste matrice jednaka umnošku elemenata na njenoj glavnoj dijagonali.

(b) Neka su zadane dvije regularne matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Njihove determinante označimo sa $a = \det \mathbf{A}$ i $b = \det \mathbf{B}$.

(i) Koliko je $\dfrac{\det(-\mathbf{A})}{b}$?

(ii) Koliko je $\dfrac{\det(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{ab}$?

1\. (a) Knjižica 2, Determinante, teorem 2 (iskaz i dokaz).

(b) Računamo

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{od } j\text{-tog stupca oduzmemo } (j+1)\text{-vi,} \\ j = 1,2,3,4 \end{array}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1\cdot(-1) \\ + \\ +\ 1\cdot(-1) \\ +\ 1\cdot(-1) \\ +\ 1\cdot(-1) \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1\cdot\tfrac{4}{5}\ +,\quad 1\cdot\tfrac{3}{5}\ +,\quad 1\cdot\tfrac{2}{5}\ +,\quad 1\cdot\tfrac{1}{5}\ + \qquad\qquad +\ 1\cdot\tfrac{1}{3},\quad +\ 1\cdot\tfrac{1}{3},\quad +\ 1\cdot\tfrac{1}{3},\quad +\ 1\cdot\tfrac{1}{3}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{1875}$$

$$b = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = a = \boxed{1\,875}$$

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 10 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l}\text{prvi i posljednji redak} \\ \text{se podudaraju}\end{array}\right] = \boxed{0}$$

Dakle,

$$\frac{\det(-A)}{b} = \frac{(-1)^5 \cdot a}{b} = -\frac{a}{b} = \boxed{-1},$$

$$\frac{\det(A+B)}{ab} = \frac{0}{ab} = \boxed{0}.$$

MI 2021 2

2. (10 bodova)

(a) Izračunajte determinantu matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & a^2 & b & a^2b \\ 1 & a^3 & b & a^3b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(b) Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{4,4}$ za koju vrijedi $\mathbf{A}^2 = 3\mathbf{I}$. Koje su moguće vrijednosti determinante od $\mathbf{A}$?

(c) Napišite i izvedite izraz za determinantu matrice $\mathbf{A}^{-1}$ preko determinante matrice $\mathbf{A}$, pri čemu je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}$ regularna matrica.

2°)

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & a^2 & b & a^2b \\ 1 & a^3 & b & a^3b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & a \\ 1 & a^2 & b & a^2 \\ 1 & a^3 & b & a^3 \end{vmatrix}$$

$$= b \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & b & a^2 \\ 1 & 0 & b & a^3 \end{vmatrix} = 0$$

b) $A^2 = 3I \quad / \det$

$3^4 = 3^n = \det(3I) = \det(A^2) = (\det(A))^2$

$\Rightarrow \quad \det A = \pm\sqrt{3^4} = \pm 9$

c) $I = AA^{-1} \quad / \det$

$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) \overset{\text{Binet Cauchy}}{=} \det(A)\det(A^{-1})$

$\Rightarrow \det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$

MI 2022 2

2. (10 bodova) Koristeći Binet-Cauchyjev teorem, dokažite da vrijedi:

   (a) $\det\left(A^k B^k\right) = \det\left((AB)^k\right)$, za sve $A, B \in \mathcal{M}_n$ i sve $k \in \mathbb{N}$.

   (b) $\det\left((AB)^{-1}\right) = \det\left(A^{-1}B^{-1}\right)$, za sve regularne $A, B \in \mathcal{M}_n$.

   (c) $\det\left(B^{-1}AB + \lambda I\right) = \det(A + \lambda I)$, za sve $A \in \mathcal{M}_n$, sve regularne $B \in \mathcal{M}_n$ i za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.

   S $\mathcal{M}_n$ označavamo skup svih realnih kvadratnih matrica n-tog reda.

Zadatak 2.

<u>RJEŠENJE</u> **(a)** Prvo ćemo primjeniti Binet-Cauchyjev teorem na umnožak $2k$ matrica:

$$\det\left(A^k B^k\right) = (\det(A))^k (\det(B))^k = (\det(A)\det(B))^k.$$

Sada jednom primjenom B-C teorema na matrice A i B i potom primjenom teorema na umnožak k matrica, dobivamo

$$(\det(A)\det(B))^k = (\det(AB))^k = \det\left((AB)^k\right).$$

(b) Kako je $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, imamo

$$\det\left((AB)^{-1}\right) = \det\left(B^{-1}\right)\det\left(A^{-1}\right) = \det\left(A^{-1}\right)\det\left(B^{-1}\right) = \det\left(A^{-1}B^{-1}\right).$$

Primjenili smo B-C teorem u prvoj i posljednjoj jednakosti.
(c) Za $A, B \in \mathcal{M}_n$, gdje je B regularna, i za $\lambda \in \mathbb{R}$, imamo

$$\begin{aligned} B^{-1}AB + \lambda I &= B^{-1}AB + \lambda B^{-1}B = B^{-1}AB + B^{-1}(\lambda B) \\ &= B^{-1}(AB + \lambda B) = B^{-1}((A + \lambda I)B) \\ &= B^{-1}(A + \lambda I)B. \end{aligned}$$

Sada primjenom B-C teorema imamo

$$\det\left(B^{-1}AB - \lambda I\right) = \det\left(B^{-1}\right)\det(A + \lambda I)\det(B).$$

Konačno, budući da je $\det\left(B^{-1}\right) = (\det(B))^{-1}$ (što je, ponovno, posljedica B-C teorema), slijedi tvrdnja zadatka. $\square$

JIR 2023 1

1. (10 bodova)

   Za kvadratnu matricu A kažemo da je ortogonalna ako je $A^T A = AA^T = I$.

   (a) Odredite sve ortogonalne matrice oblika

   $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \alpha \\ \beta & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

   (b) Pokažite da je svaka ortogonalna matrica regularna.

   (c) Izračunajte $\det(A^4)$, ako je A ortogonalna matrica.

   (d) Dokažite: ako su A i B ortogonalne matrice istog reda, tada je i AB ortogonalna matrica.

Zadatak 1.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** Iz zahtjeva ortogonalnosti, proizvoljna matrica danog oblika treba zadovoljavati

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \alpha\\ \beta & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \beta\\ \alpha & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\alpha^2 & \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta) & \frac{1}{4}+\beta^2\end{bmatrix} = I \implies \begin{matrix}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=0\\ \frac{1}{4}+\beta^2=\frac{1}{4}+\alpha^2=1\end{matrix} \implies \begin{matrix}\alpha=-\beta\\ \alpha^2=\beta^2=\frac{3}{4}\end{matrix}$$

Dakle, postoje točno dvije ortogonalne matrice zadanog oblika:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

b) Kako je $A^TA = AA^T = I$, po definiciji odmah slijedi da je A regularna te da je $A^{-1} = A^T$.

c) Primjenjujući Binet-Cauchyjev teorem i činjenicu da je determinanta transponirane matrice jednaka determinanti početne matrice, dobivamo

$$1 = \det(I) = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)^2,$$

pa je, ponovno uz pomoć Binet-Cauchyjevog teorema,

$$\det(A^4) = \det(A)^4 = 1^2 = 1.$$

d)

$$(AB)^TAB = B^TA^TAB = B^TIB = I, \qquad AB(AB)^T = ABB^TA^T = AIA^T = I.$$

$\square$

DIR 2022 1

1. (10 bodova)

   Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je antisimetrična ako vrijedi $A^T = -A$.

   (a) Dokažite da antisimetrična matrica mora imati nule na dijagonali.

   (b) Izračunajte determinantu antisimetrične matrice neparnog reda.

   (c) Dokažite da je produkt dvije antisimetrične matirce simetričan ako i samo ako one komutiraju.

Zadatak 1.

<u>RJEŠENJE</u> **a)** Uvjet $A^T = -A$ daje uvjet na koordinate matrice:

$$a_{ji} = -a_{ij} \implies a_{ii} = -a_{ii} \implies a_{ii} = 0, \quad \text{za sve } i.$$

b) Koristimo sljedeće svojstvo determinante: $\det(\lambda T) = \lambda^n \det(T)$, za sve $T \in \mathcal{M}_n$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$. Dakle,

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) \implies \det(A) = -\det(A),$$

za sve $A \in \mathcal{M}_n$ antisimetrične, gdje je n neparan. Za takve matrice je, stoga, $\det(A) = 0$.

c) Neka su A i B antisimetrične matrice. Računamo:

$$(AB)^T = B^T A^T = (-B)(-A) = BA.$$

Dakle, ako je AB simetrična, $(AB)^T = AB = BA$, pa A i B komutiraju. I obratno, ako A i B komutiraju, ista jednakost povlači da je AB simetrična matrica. □