

7. DJ VIŠEG REDA

7.1. Uvod i opće rješenje

▷ $F(y^n, y^{n-1}, \dots, y', y, x) = 0$ DJ n -tog reda

↳ opće rješenje: $y = f(x, \underline{c_1}, \dots, \underline{c_n})$, onoliko konstanti koliko i derivacija

Cauchyjev problem ima n početnih uvjeta:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

METODE

① Direktna uzastopna derivacija

$$y''' = x^2 + \sin x \rightarrow \text{integriramo 3 puta} \Rightarrow y = \frac{x^5}{60} + \cos x + \underline{c_1} \frac{x^2}{2} + \underline{c_2} x + \underline{c_3}$$

② Snizavanje reda $y' = z$, $y'' = z'$

$$y'' + y'^2 + 1 = 0 \rightarrow y = \ln |\cos(-x + \underline{c_1})| + \underline{c_2}$$

onoliko konstanti
koliko je stupanj deriv.

7.2 Linearna derivacija n-tog reda

$$y'' + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = f(x)$$

neprekidne. Rje od x

LDJ n-tog reda zadovoljava uvijek Picardovog TM pa Cauchyjev problem

uvijek ima jedinstveno rješenje

- f je neprekidna na D
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ je omeđena na D

$$\left[\frac{d^n}{dx^n} + \alpha_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + \alpha_1(x) \frac{d}{dx} + \alpha_0(x) \right] y = f(x)$$

L (linearno diferencijalni operator)

$$Ly = f(x)$$

$Ly = 0 \rightarrow$ HOMO.

$Ly = f(x) \rightarrow$ PART.

$$y = y_h + y_p$$

TM Svako rješenje jednačice $Ly = f$ se može zapisati $y = y_h + y_p$

Dokazić: Neka je y_0 bilo koje rješenje $\Rightarrow L(y_0 - y_p) = Ly_0 - Ly_p = f - f = 0$

$$y_h = 0 \rightarrow y_p + y_h = y_0$$

Funkcije su LIN. NEZ ako iz $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in I$ slijedi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Determinanta Wronskog

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

TM Ako je $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ tada su

y_1, \dots, y_n LIN. NEZ.

DOKAZ: $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ /

$\alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y_n' = 0$ / ... deriviramo (n-1) puta

$$\alpha_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0$$

homogeni sustav od n nepoznanica $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

Det sustava je Wronskijem $\rightarrow \det \neq 0 \Rightarrow$ REGULARNA JE

lim. sustav ima jedinstveno rješenje

\Rightarrow homogeni sustav ima jedinstveno rješenje ako $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

! OBRAT NE VRIJEDI \rightarrow ako je $W = 0 \rightarrow$ nema odluke

TH Prostor rješenja homogene LDJ je n -dim. vekt. prostor od $C^n[a,b]$.

↳ Rješenje HLDJ je n -tog oblika: n -kombinacija nez. funkcija

$$\Rightarrow \boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1, \dots, y_n \text{ su lin. nez. funkcije} \\ \text{(baza ovog prostora)} \end{array} \right.$$

TH y_1, \dots, y_n su rješenja HLDJ za koja vrijedi $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$.

Tada su y_1, \dots, y_n LIN. ZAVISNE.

→ ne pomiješati sa $W \neq 0$ TH jer tamo nije navedeno da su te fije rješenja!

DOKAZ: Kao prošli put: $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ / 'deriviramo $(n-1)$ puta

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y_n' = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dakle } W \text{ je } W(x_0) = 0 \text{ za neki } x_0. \\ \hookrightarrow \text{ne formiraju rješenja; tj. } \alpha_i \neq 0 \end{array}$$

→ definiramo funkciju kao linearnu kombinaciju navedenih rješenja:

$$y_*(x) = \alpha_1^* y_1 + \dots + \alpha_n^* y_n \rightarrow \text{to je rješenje HLDJ, ali i } y = 0 \text{ je rješenje}$$

$$\Rightarrow y_* = 0 = \alpha_1^* y_1 + \dots + \alpha_n^* y_n$$

➤ Budući da LDJ zadovoljava Picardov TH vrijedi jedinstvenost rješenja Cauchyjevog problema

→ Barrem jedan α_i je $\neq 0$ → iz definicije o linearnoj nezavisnosti zaključujemo da je onda ovo

LINEARNO ZAVISNO

TH Rješenja y_1, \dots, y_n od HLDJ n -tog reda

su linearno nezavisna akko je $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$.

DOKAZ:

1. ako $W \neq 0$ tada su funkcije nezavisne

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \rightarrow \text{funkcije su lin. nez.}$$

7.3. HLDJ s konstantnim koeficijentima

$$y^n + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{nj: } y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

↳ za razliku od LDJ ova je homogena
pa je rješenje = 0

Svakoj HLDJ skk pridružen je karakteristični polinom

$$L(e^{rx}) \Leftrightarrow P(r) = r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$$

$$\checkmark L(c_1 x) = 0 \longrightarrow 0 \neq e^{rx} (r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0) = 0$$

mikoz homogene jedn

* jedina DJ bez integriranja

Različite i realne nultocke (1. slučaj)

\Rightarrow tada su $e^{r_1 x}, \dots, e^{r_n x}$ rješenja HLDJ s KK

↳ to su linearno nezavisne funkcije \Rightarrow opće g: $y_h = c_1 e^{r_1 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$

Višestruke realne nultocke (2. slučaj)

↳ ako je nultocka r , kratnosti k (npr. r se ponavlja k puta; $r_{1,2,3} = -2$)
onda je $C_1 e^{rx}$ k puta nultocka od $P_n(r)$ $\rightarrow k=3$

$$\Rightarrow \text{opće g: } y_h = \underbrace{C_1}_{x^0} e^{r_1 x} + \underbrace{C_2 x}_{x^1} e^{r_1 x} + \dots + \underbrace{C_k x^{(k-1)}}_{x^{k-1}} e^{r_1 x}$$

Kompleksna rješenja od $L_y = 0$ (3. slučaj)

↳ $\text{Re } y$ i $\text{Im } y$ su realna rješenja te jednakizbe $\rightarrow L(\text{Re } y + i \text{Im } y) = L(\underbrace{\text{Re } y}_{=0}) + i L(\underbrace{\text{Im } y}_{=0}) = 0$

\Rightarrow ako su $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ nultocke polinoma

$$\rightarrow e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\pm i\beta x} = e^{\alpha x} [\cos(\pm \beta x) + i \sin(\pm \beta x)]$$

$$\rightarrow \text{opće g: } y_h = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

7.4. Nhomogene LDJ s KK

• Sada rješavamo $Ly = f(x) \rightarrow y = y_h + y_p$ opće rješenje
↓
y: pripadne HLDJ s KK y: pripadne nehomogene

1. METODA VARIJACIJE KONSTANTI (MVK)

1. rješimo pripadnu HLDJ $Ly = 0 \rightarrow y_h = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$
2. variramo konstante $C_i \rightarrow C_i'(x) \Rightarrow$ opće y: $y = C_1(x) y_1 + \dots + C_n(x) y_n$
3. treba odrediti $C_1(x), \dots, C_n(x) = ?$

\hookrightarrow sustav s 2 nepoznanica (deriviramo (n-1) puta)

Zbog derivacije umnoška: $y' = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i(x)}_{\text{mora biti 0 jer deriviramo konst.}} + \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i'(x)$

$$\Rightarrow C_1'(x) y_1 + \dots + C_n'(x) y_n = 0$$

$$C_1'(x) y_1' + \dots + C_n'(x) y_n' = 0$$

$$C_1'(x) y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Nepoznanice su $C_1'(x) \dots C_n'(x)$

- sustav uzgjeta

\rightarrow Determinanta ovog nehomogenog sustava je Wronskijan (y_1, \dots, y_n) .

Budući da su y_1 do y_n rješenja HLDJ oni su linearno nezavisni pa je $W \neq 0$.

Dakle $\neq 0$ pa je matrica regularna i ima jedinstveno rješenje.

$\Rightarrow C_1(x) \dots C_n(x)$ su jednodužno određene pa se $C_i(x)$ dalje integriraju

2) Metoda oblika desne strane (MODS)

$Ly = f(x) \rightarrow$ ako je $f(x) = e^x [Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)]$ tada:

Rj: $y = y_h + y_p \longrightarrow y_p = e^{\alpha x} [R_1(x)\cos(\beta x) + R_2(x)\sin(\beta x)] \cdot x^k$ k: kralnost

gdje su $R_1(x)$ i $R_2(x)$ polinomi stupnja $\max\{st(Q_1), st(Q_2)\}$, čije koeficijente dobijemo uvrštavanjem u početnu jednačinu

Npr.: $y'' + y = x^2$

1) $r^2 + 1 = 0$

$r = \pm i$

$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2) $y_p = Ax^2 + Bx + C$ - mora biti istog stupnja kao i rješavajuće (tada x^2)

► možemo provjeriti je li lin. nez. sa y_h
- ne možemo množiti s x jer je $d=0$

$\Rightarrow y' = 2Ax + B$
 $y'' = 2A$

uvrstimo u y_p

$\hookrightarrow 2A + Ax^2 + Bx + C = x^2$

$A = 1$ $2A + C = 0$

$B = 0$ $C = -2$

$\Rightarrow y = \underbrace{C_1 \cos x + C_2 \sin x}_{y_h} + \underbrace{x^2 - 2}_{y_p}$

7.7. Rješavanje DJ pomoću redova

→ kada DJ ne možemo eksplicitno riješiti

RJ. jednačine je oblika: $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

• Budući da smijemo derivirati redove, možemo sve potrebne derivacije funkcije y te ih uvrstimo u DJ

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$$

Primjer: $y'' + y = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

želimmo izjednačiti redove da ih možemo zbrojiti

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

→ dodali smo 2 na n kod prvog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{[(n+2)(n+1) C_{n+2} + C_n]}_{=0} x^n = 0$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1) C_{n+2} + C_n = 0$$

$$\hookrightarrow C_{n+2} = \frac{-C_n}{(n+2)(n+1)} \quad \text{rekurzivno dolazimo do } C$$

$n \geq 0$

$$n=0 \rightarrow C_2 = \frac{-C_0}{2 \cdot 1}$$

kao što vidimo, C_0 i C_1 ne možemo dobiti i nisu zadani

↳ te konstante iskoristimo za rješenje

$$n=1 \rightarrow C_3 = \frac{-C_1}{2 \cdot 3}$$

$$n=2 \rightarrow C_4 = \frac{-C_2}{3 \cdot 4} = \frac{C_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$n=3 \rightarrow C_5 = \frac{-C_3}{4 \cdot 5} = \frac{C_1}{5!}$$

$$n=4 \rightarrow C_6 = \frac{-C_4}{5 \cdot 6} = \frac{-C_0}{6!}$$

$$n=5 \rightarrow C_7 = \dots \frac{-C_1}{7!}$$

$$n=6 \rightarrow C_8 = \frac{-C_6}{7 \cdot 8} = \frac{C_0}{8!}$$

$$\text{OPĆE RJ: } y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_4 x^4 + \dots$$

$$= C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2!} x^2 - \frac{C_1 x^3}{3!} + \frac{C_0 x^4}{4!} + \frac{C_1 x^5}{5!} + \dots$$

$$y = C_0 \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos} + C_1 \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin}$$

$$y = C_0 \cdot \cos x + C_1 \cdot \sin x$$