

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA**

A. Pavić - I. Felja

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Primjeri i zadaci za vježbu

2. dio

Zagreb, 2014.

Predgovor

Iskustvo s ispitima pokazuje da studenti i kada razumiju zadatke na ispitu, tijekom trajanja ispita najčešće ne stignu obraditi i točno riješiti sve zadatke koje razumiju. Osnovni razlog tome jest nedostatak rutine u rješavanju, tj. nedovoljan broj samostalno riješenih zadataka.

Namjena ove zbirke je dati širi izbor zadataka, grupiranih po tjednima nastave (a unutar njih po temama nastavnog programa) koji će omogućiti samostalno pripremanje međuispita i završnog ispita, kao i kontinuirano samostalno vježbanje, koje najdjelotvornije otkriva praznine i slabosti u razumijevanju nastavnog gradiva. Obradeni problemi, karakteristični za pojedine nastavne cjeline, predstavljani su kao riješeni *primjeri* te kao *zadaci* za samostalno rješavanje. Nakon analize danih postupaka rješavanja primjera te samostalnog rješavanja zadataka pojedine teme, studentima se preporučuje odgovarati na pitanja za provjeru znanja, koja su dana u obliku test pitanja s ponuđenim odgovorima na kraju svake teme (oblik pitanja kao na ispitima). Za studente koji hoće više, mogu se naći i neki složeniji zadaci (označeni zvjezdicom).

Autori

Sadržaj

Stranica

VIII. Snaga u krugovima izmjenične struje	VIII-1
Primjeri	VIII-1
Zadaci	VIII-7
Test pitanja	VIII-10
IX.1 Topografski i mjesni dijagram	IX-1
Primjeri	IX-1
Zadaci	IX-6
IX.2 Osnovne veličine električnih krugova	IX-8
Primjeri	IX-9
Zadaci	IX-13
Test pitanja	IX-15
X. Postupci rješavanja električnih mreža	X-1
Primjeri	X-2
Zadaci	X-9
Test pitanja	X-16
XI. Polifazni sustavi	XI-1
Primjeri	XI-2
Zadaci	XI-11
Test pitanja	XI-15
XII.1 Prijelazne pojave	XII-1
Primjeri	XII-2
Zadaci	XII-5
Test pitanja	XII-7
XII.2 Nesinusoidne električne periodičke veličine	XII-9
Primjeri	XII-10
Zadaci	XII-12
Test pitanja	XII-13
XIII. Harmonički složeni valni oblici	XIII-1
Primjeri	XIII-2
Zadaci	XIII-6
Test pitanja	XIII-9

VIII. SNAGA U KRUGOVIMA IZMJENIČNE STRUJE

OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

Trenutna snaga $p(t)$ predstavlja vremensku funkciju snage, a jednaka je umnošku trenutnih vrijednosti napona $u(t)$ i struje $i(t)$ na nekom elementu ili spoju.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Trenutna snaga na spoju s naponom $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha_u)$ i strujom $i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha_i)$ ($\alpha_u - \alpha_i = \varphi$) može se izraziti kao zbroj jedne stalne i jedne sinusoidno promjenjive komponente (dvostruke frekvencije).

Prividna snaga S jednaka je umnošku efektivnih vrijednosti napona i struje (elementa ili spoja) a može se izračunati kao snaga na prividnom otporu Z , kroz koji teče struja I , odnosno na kojem je napon U . Jedinica je **voltamper (VA)**.

$$S = U \cdot I = I^2 Z = \frac{U^2}{Z}$$

Radna snaga P predstavlja srednju brzinu kojom se el. energija nepovratno troši (srednja vrijednost trenutne snage) a jednaka je umnošku efektivnih vrijednosti napona i struje te **faktora snage**. Radna snaga je snaga na omskom otporu R . Iskazuje se jedinicom **vat (W)**.

$$P = UI \cos \varphi = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

Faktor snage ($\cos \varphi$) predstavlja omjer radne i prividne snage:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

Jalova snaga Q (reaktivna snaga) je snaga na reaktivnom otporu X (induktivni i kapacitivni otpori). *Predznaci* jalove induktivne snage (+) i jalove kapacitivne snage (-) su *suprotni* (kad induktivitet daje energiju kapacitet prima i obratno). Iskazuje se jedinicom **voltamper reaktivni (VAR)**.

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 X = \frac{U^2}{X}$$

Ukupna induktivna snaga Q_{Luk} u nekom el. krugu jednaka je zbroju jalovih snaga na svim induktivnim otporima X_L .

$$Q_{Luk} = \sum Q_L$$

Ukupna kapacitivna snaga Q_{Cuk} u nekom el. krugu jednaka je zbroju jalovih snaga na svim kapacitivnim otporima X_C .

$$Q_{Cuk} = \sum Q_C$$

Ukupna jalova snaga Q_{uk} u nekom krugu jednaka je razlici iznosa ukupne jalove induktivne snage Q_{Luk} i ukupne jalove kapacitivne snage Q_{Cuk} kruga.

$$Q_{uk} = Q_{Luk} - Q_{Cuk}$$

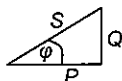
Ukupna radna snaga P_{uk} u nekom krugu jednaka je zbroju svih radnih snaga u tom krugu, tj zbroju snaga na svim omskim otporima R (radni otpori).

$$P_{uk} = \sum P_R$$

Ukupna prividna snaga S_{uk} računa se iz ukupne radne snage P_{uk} i ukupne jalove snage Q_{uk} s kojima je povezana (Pitagorinim poučkom) u pravokutnom **trokutu snage**.

$$S_{uk} = \sqrt{P_{uk}^2 + Q_{uk}^2}$$

Trokut snage je pravokutni trokut u kojemu katete čine radna snaga P i jalova snaga Q , dok hipotenuzu čini prividna snaga S . Pritom je kut između katete P i hipotenuze S jednak kutu impedancije spoja φ . Trokut snage je sličan trokutu impedancije (induktivna snaga crta se prema gore).



Izračun snage pomoću fazora: Umnožak fazora napona \underline{U} i konjug. kompleksnog izraza struje \underline{I}^* daje kompleksni broj čiji je iznos (modul) jednak prividnoj snazi S , realni dio je jednak radnoj snazi P , a imaginarni dio jalovoj snazi Q .

$$\operatorname{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\} = P \quad \operatorname{Im}\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\} = Q$$

$$|\underline{U} \cdot \underline{I}^*| = S$$

Kompensacija jalove snage je postupak povećanja faktora snage (smanjenje kuta impedancije φ na željenu vrijednost φ') gdje se, paralelnim spajanjem (na napon trošila U , frekvencije ω) kompenzacijskog kapaciteta C , dodaje kapacitivna snaga Q_C i smanjuje ukupna (induktivna) jalova snaga.

$$Q_C = P(\tan \varphi - \tan \varphi')$$

$$C = \frac{Q_C}{\omega U^2}$$

Uvjet prilagođenja impedancije \underline{Z} na izvor unutarnje impedancije $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$ radi dobivanja **najveće snage P** (kad impedancija \underline{Z} ima promjenjiv realni i imaginarni dio).

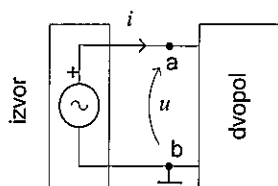
$$\underline{Z} = \underline{Z}_i^* = R_i - jX_i$$

Uvjet prilagođenja otpora R na izvor unutarnje impedancije $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$ radi dobivanja najveće snage P .

$$R = \sqrt{R_i^2 + X_i^2}$$

PRIMJERI VIII.

VIII-P1. Poznati su napon i struja nekog dvopola. Odredite analitički izraz za trenutnu snagu. Nacrtajte graf trenutne snage. Koja je srednja vrijednost funkcije kojom je prikazana trenutna snaga. Ustanovite i ostale značajke te funkcije.



$$u(t) = u_{ab}(t) = 5 \cdot \sin(314t) \text{ V}$$

$$i(t) = 1 \cdot \sin(\omega t + \pi/3) \text{ A}$$

Struja referentno ulazi u točku a
dok je za napon referentna točka b

Rješenje: Općenito je trenutna snaga umnožak struje i napona. Razmatramo dvopol prikazan slikom na kojoj su označeni referentni smjer struje i napon između priključnica a i b.

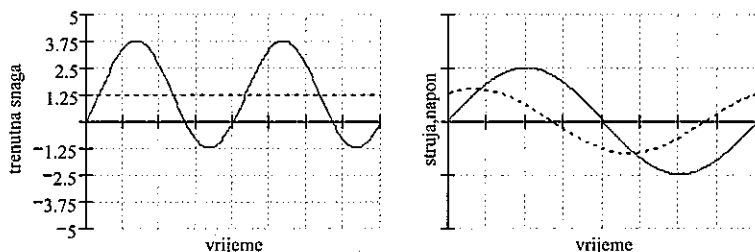
Struja fazno prethodi naponu za 60° . To znači da je dvopol kapacitivnog karaktera npr. u najjednostavnijem slučaju serijski spoj otpornika i kondenzatora.

Treba "zaviriti" u matematički priručnik i ustanoviti da se umnožak dviju sinusnih funkcija, tj., u ovom slučaju $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ može prikazati ovako:

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi) \text{ gdje je: } \varphi = \alpha_u - \alpha_i = -\pi/3, \text{ a } U \text{ i } I \text{ su efektivne vrijednosti}$$

Dobiveni izraz se sastoji od dva dijela. Prvi dio $U \cdot I \cdot \cos \varphi = 1,25 \text{ VA}$ predstavlja istosmjernu komponentu (srednju vrijednost) funkcije snage, dok je drugi dio harmonijska funkcija dvostruke frekvencije u odnosu na frekvenciju napona i struje.

Amplituda te sinusne funkcije je $U \cdot I = 2,5 \text{ VA}$. Grafički prikaz (graf) vremenske funkcije snage te napona i struje izgleda ovako:



Nultočke na grafu trenutne snage su u trenucima u kojima je napon jednak nuli, kao i u onima u kojima je struja jednaka nuli, pa krivulja trenutne snage ima dvostruko više nultočki od sinusoide napona ili struje, što znači da ima dvostruko veću frekvenciju.

Trenutna snaga je «podignuta» sinusoida dvostruke frekvencije.

Na krivulji trenutne snage vidimo da se izmjenjuju intervali u kojima je snaga pozitivna (iznad vremenske osi) s intervalima kada je negativna. Budući da površina ispod krivulje snage predstavlja energiju, to znači da se zapravo izmjenjuju intervali u kojima dvopol prima energiju s intervalima u kojima energiju daje (tj. vraća natrag u krug). Objašnjenje ove pojave jest da ovaj dvopol, uz otpornik, sadrži i kondenzator.

Kondenzator, kao što je poznato, prilikom nabijanja sakuplja energiju, a kod izbijanja je vraća u krug (slično se ponaša i zavojnica, pa ove se ovi elementi (L i C) nazivaju i *reaktivni elementi*). Otpornik, međutim, jest element koji može samo primati električnu energiju (koja se na njemu pretvara u drugi oblik).

Kombinacijom djelovanja otpornika i kondenzatora nastala je gore opisana krivulja trenutne snage.

Ovisno o sastavu dvopola graf trenutne snage $p(t)$ poprima različite oblike glede srednje vrijednosti. U tom smislu posebno su zanimljiva dva slučaja: 1. dvopol je reaktivan (C ili L); i 2. dvopol je otpornik. U prvom slučaju srednja vrijednost snage je nula (graf trenutne snage je sinusoida dvostruke frekvencije) dok u drugom slučaju snaga nema negativnih vrijednosti jer otpornik ne može vraćati energiju, pa je amplituda sinusoide snage ujedno jednaka njenoj srednjoj vrijednosti $U I \cos \varphi$ (skicirajte grafove snage za ova dva slučaja).

VIII-P2. Za dvopol iz prethodnog zadatka, koji se sastoji od serijski spojenog otpornika i kondenzatora, odredite radnu, reaktivnu i prividnu snagu te iznose radnog otpora R i kapacitivnog otpora X . Zadano je: $U=3,5 \text{ V}$ $I=0,7 \text{ A}$ $\varphi=-60^\circ$.

Rješenje: Proračun snage vezan uz uobičajene metode za rješavanje strujnih krugova (el. mreža) tj. nakon izračuna napona i struje pristupa se proračunu snage. Pritom su snovne relacije:

$$P=I^2 R, \quad Q=I^2 X, \quad S=I^2 Z. \quad \text{Pomnožimo li izraz } Z^2=R^2+X^2 \text{ s } I^2 \text{ dobivamo relaciju } S^2=P^2+Q^2$$

koja predstavlja vezu P , Q i S , a može se predočiti pravokutnim trokutom (tzv. *trokut snage*).

P (radna snaga) predstavlja snagu na radnim otporima, a jednaka je srednjoj vrijednosti trenutačne snage) dok Q (reaktivna, ili *jalova* snaga) predstavlja snagu na reaktivnim elementima (C i L).

U ovom zadatku dobivamo da je: $S=U \cdot I=2,5 \text{ VA}$, $P=U \cdot I \cdot \cos \varphi=1,25 \text{ W}$ iz $P=I^2 R$ dobivamo

$$R=2,5 \Omega.$$

Jalova (reaktivna) snaga je $Q=U \cdot I \cdot \sin \varphi = -2,16 \text{ VAR}$. Jedinice za električnu snagu općenito su voltamperi (VA) no iz praktičnih razloga različite vidove snage (prividna, radna i reaktivna) izražavamo jedinicama raznih naziva i to: za prividnu *voltamper* (VA), za radnu *vat* (W) te za jalovu (reaktivnu) snagu *voltamper reaktivni* (VAR).

Ovdje je važno napomenuti da induktivna i kapacitivna reaktivna snaga imaju različite predznake (pri čemu induktivnoj dajemo pozitivan, a kapacitivnoj negativan predznak). Stoga, ako se navodi samo iznos reaktivne snage treba napisati da li je induktivna ili kapacitivna, tj. $Q=2,16 \text{ VAR (kap.)}$. Iz jednadžbe $Q=I^2 X_C$ odredimo kapacitivni otpor

$$X_C=4,33 \Omega.$$

Napomena: Snagu dvopola možemo izračunati i matematičkim "trikom" pomoću fazora napona i struje, tako da fazor napona pomnožimo s *konjugirano kompleksnim brojem* fazora struje. Time se kao zbroj kuteva ovih brojeva dobiva razlika kuteva ($\alpha_u - \alpha_i$) a to je kut impedancije dvopola φ . Realni dio ovog umnoška tako daje $U I \cos \varphi$ što je jednako radnoj snazi P , dok imaginarni dio daje $U I \sin \varphi$, što je jednako jalovoj snazi dvopola Q . U ovom slučaju to izgleda ovako: $U=3,5 \angle 0^\circ \text{ V}$ $I^*=0,7 \angle -60^\circ \text{ A}$ $S=2,5 \angle -60^\circ = 1,25 - 2,16j \text{ VA}$. Imaginarni dio ovim umnoškom dobivenog kompleksnog broje je negativan (predznak jalove snage) što pokazuje da je jalova (reaktivna) snaga ovdje kapacitivna.

VIII-P3. Maksimalna trenutna snaga trošila iznosi 300 VA, a minimalna -100 VA. Kolike su radna, jalova (reaktivna) i prividna snaga? Koliki je faktor snage? Da li je faktor snage induktivan ili kapacitivan?

Rješenje: Trenutna snaga je u općem slučaju "podignuta sinusoida" dvostruke frekvencije. (pogledati graf iz prvog primjera). Srednja vrijednost ove funkcije je radna snaga ($UI \cos \varphi$). Na temelju zadanih podataka treba napraviti "konstrukciju" takve funkcije.

Najprije ustanovimo da trenutna snaga ima "od vrha do vrha" 400 VA. Polovina je 200 VA i to je amplituda te sinusne funkcije, tj. prividna snaga S .

Ako od maksimalne vrijednosti oduzmemo amplitudu, dobijemo 100 VA, a to je zapravo srednja vrijednost funkcije, tj. radna snaga P . Dakle $S=200$ VA; $P=100$ W.

Reaktivnu (jalovu) snagu računamo koristeći trokut snage, iz kojeg je $Q=\sqrt{S^2-P^2}=173$ VAR.

Faktor snage je odnos radne i prividne snage $\cos \varphi = P/S = 0,5$. Za određivanje vrste (tipa) faktora snage nema dovoljno podataka tj. ne možemo ustanoviti da li je faktor snage induktivan ili kapacitivan.

VIII-P4. Kroz serijski spojene elementa: $R=10 \Omega$, $X_L=5 \Omega$ i $X_C=15 \Omega$ prolazi struja od 1 A. Izračunajte snage na pojedinim elementima i ukupnu snagu spoja. Odredite fazni kut impedancije. Kolika je efektivna vrijednost napona na priključnicama spoja.

Rješenje: Snage na elementima su $P=I^2R=10$ W, $Q_L=I^2X_L=5$ VAR, $Q_C=-I^2X_C=-15$ VAR

Ukupna snaga spoja je: $Q_{uk}=Q_L-Q_C=-10$ VAR, $P_{uk}=10$ W. $S_{uk}=\sqrt{P_{uk}^2+Q_{uk}^2}=14,1$ VA,

Fazni kut je -45° tj. spoj je kapacitivan. Struja fazno prethodi naponu za 45° odnosno $\pi/4$ rad. Napon priključen na spoj je $U=I \cdot Z=14,1$ V.

Pitanje Kako će se promijeniti struja i snage ako napon dvaput povećamo (na 28,2 V)?

Odgovor: struja se poveća dvaput, a snage četiri puta.

VIII-P5. Razmotrite ravnotežu snaga u spoju iz prethodnog primjera. Što znači predznak radne, a što jalove snage?

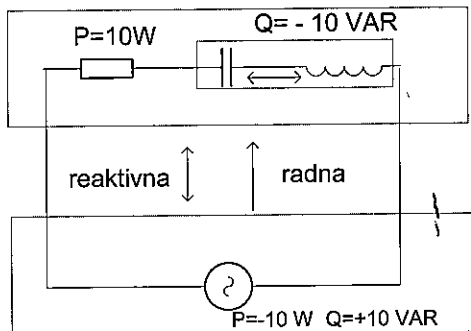
Rješenje: U strujnom krugu more postojati ravnoteža (balans) snage, odnosno energije. To znači da količina električne energije koja se prima (pozitivna snaga) mora biti jednaka količini energije koja se daje (negativna snaga) što znači da *zbroj snaga mora biti jednak nuli*. Prisjetimo se, predznak snage pokazuje da li element (spoj) prima ili daje energiju.

Radna snaga, koja je jednaka srednjoj vrijednosti trenutne snage, predstavlja amplitudu vremenske funkcije ukupne snage na radnim otporima kruga. Ravnotežu je tu lako objasniti: otpori troše energiju koju daje izvor, pa (jer energija ne može nestati) te energije moraju biti istog iznosa, a tako i snage moraju biti istog iznosa a suprotnih predznaka. Radna snaga određuje energiju koja se bespovratno troši, pa njen predznak određuje *smjer toka energije*.

Reaktivna (jalova) snaga predstavlja amplitudu snage koja se vremenski (sinusoidno) mijenja na reaktivnim elementima (L i C). Predznak ove snage se vremenski naizmjenično mijenja, što znači da ti elementi naizmjenično energiju primaju, pa potom vraćaju natrag u krug. Pritom su snage na induktivitetu i kapacitetu u svakom času suprotnih predznaka, što znači da u trenutku kada jedan prima energiju, drugi daje i obratno. Dogovorno dajemo induktivnoj snazi pozitivan, a kapacitivnoj negativan predznak (razmatramo krug u času kad induktivitet prima energiju). Predznak jalove snage tako govori je li ona induktivna ili kapacitivna.

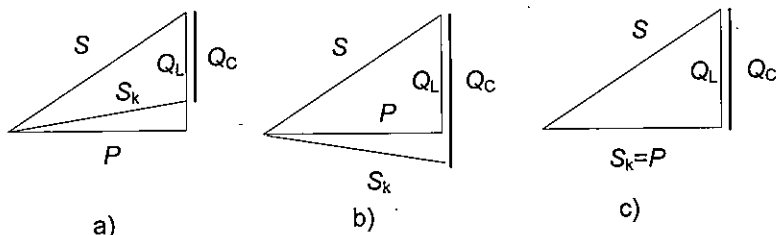
Reaktivna snaga određuje energiju koja nije korisna, nego titra između reaktivnih elemenata i izvora, pa otud dolazi i naziv *jalova* energija (snaga). Dio jalove energije pritom titra između induktiviteta i kapaciteta, dok *razlika njihovih snaga* određuje energiju koja titra između izvora i reaktivnih elemenata, a iznos te razlike jednak je ukupnoj jalovoj snazi spoja (ili izvora).

U nekom spojevima se može postići da se reaktivna energija u cjelosti razmjenjuje unutar spoja (zbroy reaktivnih snaga je nula), pa nema toka reaktivne energije prema izvoru. U ovdje razmatranom spoju to bi se dogodilo da je $X_C = 5 \Omega$. Uzimajući u obzir ovaj «energetski» aspekt ponašanja strujnog kruga postaje jasniji pojam rezonancije. Ako je spoj u rezonanciji reaktivna se energija zapravo u cjelosti razmjenjuje između reaktivnih elemenata unutar spoja ($\sum Q_L = \sum Q_C$).



VIII-P6. Trošilo impedancije Z , priključeno je na izvor napona U frekvencije f . Odredite način spajanja i iznos kapaciteta kondenzatora s pomoću kojega ćemo faktor snage trošila povećati na 0,95 (ind). Koliki bi trebao kapacitet za potpunu kompenzaciju reaktivne snage? Zadano: $\underline{U}=120V$; $f=50Hz$; $\underline{Z}=20+j30\Omega$.

Rješenje: Suprotni karakter induktivne i kapacitivne reaktivne (jalove) snage omogućava tzv. kompenzaciju reaktivne snage. Ovaj postupak ima veliki značaj u elektroenergetici. Dodavanjem trošilu odgovarajućeg reaktivnog elementa, možemo postići da se razmjena reaktivne energije u cjelosti ili djelomično odigrava na strani trošila, a ne između trošila i izvora. To smanjuje strujno opterećenje vodova odnosno gubitke. Popularno se postupak naziva: *poboljšanje faktora snage trošila*. Obično su trošila induktivnog karaktera pa se poboljšanje faktora snage sastoji u **paralelnom spajanju kondenzatora** odgovarajućeg kapaciteta. Za izračunavanje tog kapaciteta odlično nam može poslužiti skica trokuta snaga.



Na slici a i b) prikazana je djelomična kompenzacija reaktivne snage dok je na slici c) prikazana potpuna kompenzacija u kojoj su induktivna snaga trošila i kapacitivna reaktivna snaga kondenzatora jednake. Prividna snaga postaje jednaka radnoj. To je "idealni" slučaj koji je u praksi teško postići.

U slučaju a) preostaje neka manja induktivna snaga. Fazni kut se smanji, a faktor snage (kosinus tog kuta) se poveća. Prividna snage se smanji (na iznos S_K) pa se smanji i struja.

U slučaju b) postiže se poboljšanje faktora snage, ali je taj faktor sada kapacitivan. Ovakva "nadkompenzacija" ne se primjenjuje u praksi, jer su za nju potrebni kondenzatori većeg kapaciteta nego u slučaju a).

U našem primjeru imamo induktivno trošilo. Najprije odredimo kolika su radna i jalova (reaktivna) snaga trošila. Izračunamo da je: $Z=36 \Omega$, $I=3,33 \text{ A}$, $P=221,5 \text{ W}$ i $Q_L=332,3 \text{ VAR}$. Fazni kut je $\arctg(Q_L/P)=56,3^\circ$. Faktor snage trošila je dakle $\cos\varphi=0,55$ (ind). To je jako mali faktor snage* i treba ga svakako poboljšati i to na zadani iznos (0,95). Paralelno treba spojiti kondenzator. Novi kut u trokutu snaga treba biti $\arccos(0,95)=18,2^\circ$. U novom trokutu snage radna snaga je i dalje $221,5 \text{ W}$ kut je $18,2^\circ$ pa je "preostala" reaktivna snaga $Q=P \cdot \tg 18,2^\circ = 72,8 \text{ VAR}$. Kondenzator dakle mora "preuzeti" razliku $Q_C=Q_L-Q=259,5 \text{ VAR}$. Napon na kondenzatoru je 120 V pa je zbog $Q_C=U^2/X_C$ iznos potrebnog kapaciteta: $C=Q_C/(\omega U^2)=57 \mu\text{F}$.

Kod potpune kompenzacije kondenzator mora preuzeti ("progutati") čitavu reaktivnu snagu trošila tj. $Q_C=Q_L=332,3 \text{ VAR}$. Kapacitet mu je $C=Q_L/(\omega U^2)=73,5 \mu\text{F}$. Sa ovakvim kapacitetom postiže se cjelokupna razmjena jalove energije između induktiviteta u trošilu i paralelno spojenog kondenzatora. Spojnim vodom "struji" samo radna energija od izvora prema trošilu.

Ako čitatelja zanima koliki treba biti kapacitet s kojim će se postići faktor snage 0,95 ali kapacitivno, može to izračunati temeljem slike b) ovako:

$Q_C=Q_L+Q=405,1 \text{ VAR}$ pa je $C=89,6 \mu\text{F}$.

*Napomena: Isporučitelj električne energije u slučaju premalog faktora snage negdje naplaćuje i jalovu energiju, za što postoje posebna brojila. Obična brojila registriraju samo radnu energiju.

VIII-P7. Na izvor sinusoidnog napona U i unutrašnje impedancije Z_i (R_i i X_i) priključeno je trošilo kojemu se može mijenjati radni i reaktivni dio u granicama od $R_{ip}=0$ do R_{ik} (konačna vrijednost otpora) i isto tako X_i od X_{ip} do X_{ik} . Odredite: a) uz koju impedanciju će na trošilu biti najveća snaga; b) kolika je ta snaga.

Zadano: $U=100 \text{ V}$; $R_i=10 \Omega$; $X_i=5 \Omega$ (kap); $R_{ik}=20 \Omega$; $X_{ip}=20 \Omega$ (kap); $X_{ik}=20 \Omega$ (ind).

Rješenje: Maksimalnu snagu na trošilu postizemo prilagođenjem trošila na izvor. Potrebno je napisati izraz za snagu kao funkciju od R_t i X_t , a zatim matematički analizirati taj izraz tj. Istražiti koliki trebaju biti X_t i R_t da bi funkcija imala maksimum. Pokazuje se da će to biti ako je $R_t=R_i$ i istovremeno $X_t=-X_i$ (to znači da su X_i i X_t istog iznosa ali suprotnog karaktera). Naime ako su X_i i X_t jednakog iznosa a suprotnog karaktera prilikom izračunavanja impedancije dolazi do njihova poništavanja (serijska rezonancija). U krugu ostaju samo R_i i R_t pa se uvjet za maksimum snage svodi na onaj koji smo imali kod istosmjernih krugova. Dakle trošilo treba odabrati tako da radni dio trošila ima $R=10 \Omega$, a reaktivni: 5Ω (ind). U kompleksnom obliku to je: $Z_t=10+j5 \Omega$. Uz ovakvo trošilo napon na radnom dijelu iznosi $U/2$ pa je radna snaga: $P=50^2/10=250 \text{ W}$.

Napomena: Ako se može mijenjati samo otpor radnog dijela trošila tada je uvjet za maksimalnu snagu $R_t=\sqrt{X_i^2+R_i^2}$. Reaktivni dio impedancije trošila (ako postoje) dodaje se pritom unutarnjoj impedanciji izvora.

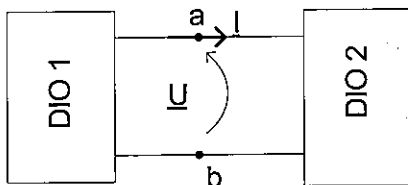
ZADACI VIII

VIII-1. Električna mreža izmjenične struje podijeljena je u dva dijela označena kao dio (1) i dio (2), kako je prikazano na slici. Napon i struja zadani su efektivnim vrijednostima i početnim kutovima. Referentni smjer struje i referentni polaritet napona prikazani su na slici. Napišite struju i napon u kompleksnom obliku, a zatim izračunajte snage \underline{S}_1 i \underline{S}_2 u kompleksnom obliku. Na temelju predznaka snaga odredite smjer toka energije, tj. koji dio mreže daje energiju. Zadano: $U=220\text{ V}$; $I=10\text{ A}$; $\alpha_u=0$; $\alpha_i=45^\circ$.

Rezultat:

za dio (1) $S_1 = -1566 + j1566\text{ VA}$

za dio (2) $S_2 = 1566 - j1566\text{ VA}$



S obzirom na negativan predznak realnog dijela izračunate snage, dio (1) daje, a dio (2) troši (prima) energiju.

VIII-2. Trenutačna snaga $p(t)$ na trošilu doseže najveću vrijednost p_{\max} , a najnižu vrijednost p_{\min} . Odredite jalovu te faktor snage trošila.

Zadano: $p_{\max}=1600\text{ VA}$; $p_{\min}=400\text{ VA}$.

Rezultat: $Q=800\text{ VAR}$ faktor snage je 0,6

VIII-3. Na nekom elektromotoru (trošilu) nalazimo podatke $U_n=220\text{ V}$; $f=50\text{ Hz}$; $I_n=4,5\text{ A}$, $\cos\varphi=0,866$ (indeks "n" znači nazivni). Odredite iznos kapaciteta potrebnog za poboljšanje faktora snage na 0,95 (ind) kada je motor pod punim opterećenjem.

Rezultat: $14\text{ }\mu\text{F}$

VIII-4. Na izvor su paralelno priključena tri trošila zadana slijedećim podacima: 1. $S_1=250\text{ VA}$; $\cos\varphi_1=0,5(\text{ind})$; 2. $P_2=180\text{ W}$; $\cos\varphi_2=0,8(\text{kap})$; 3. $S_3=300\text{ VA}$; $Q_3=100\text{ VAR}(\text{ind})$. Odredite ukupnu prividnu, jalovu (reaktivnu) i radnu snagu. Nacrtajte trokut snage. Koji element treba u ovom slučaju spojiti paralelno trošilima da struja i napon izvora budu u fazi?

Rezultat: $P=588\text{ W}$ $Q=188\text{ VAR}(\text{ind})$ $S=614\text{ VA}$ ukupna reaktivna snaga je induktivna. Da bi struja i napon "došli" u fazu potrebno je paralelno spojiti kondenzator koji će "preuzeti" 188 VAR . Za proračun kapaciteta potreban je iznos napona i frekvencije izvora: $C=Q/\omega U^2$

VIII-5. Faktor snage ($\cos\varphi$) otpornika i kondenzatora spojenih paralelno iznosi 0,5. Koliki je faktor snage ako ih spojimo serijski?

Rezultat: $0,5\sqrt{3}$

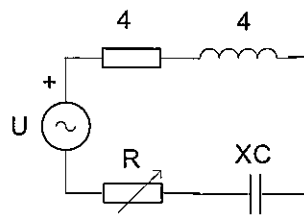
VIII-6. Trošilo sastavljeno od serijskog spoja kapacitivnog otpora X_C i radnog otpora R priključeno je na izvor napona U i unutrašnje impedancije Z_i . Ako se otpor R trošila mijenja u granicama od R_1 do R_2 , pri kojem otporu R će na trošilu biti najveća snaga. Kolika je ta snaga?

Zadano: $U=110\text{ V}$; $Z_i=4\sqrt{2}\angle 45^\circ\text{ }\Omega$; $X_C=-j10\text{ }\Omega$; $R_1=40\text{ }\Omega$; $R_2=80\text{ }\Omega$.

Rezultat: $40\text{ }\Omega$; 245 W

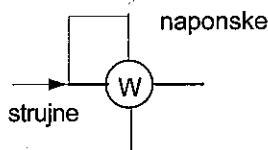
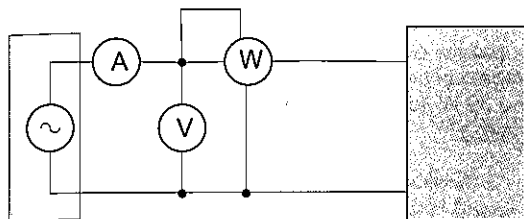
VIII-7. Ako je kapacitivni otpor na slici jednak $1\ \Omega$, koliki mora biti otpor R da bi radna snaga na njemu bila najveća moguća? Kolika je ta snaga ako je $U=9,48\text{ V}$?

Rezultat: $R=5\ \Omega$ $P=5\text{ W}$



VIII-8. U zatamnjenoj kutiji je serijski spoj otpora R i induktiviteta L . Na temelju rezultata mjerenja napona, struje i snage, odredite R i L . Koliki je fazni kut impedancije?

Zadano: $P=30\text{ W}$ $U=220\text{ V}$ $I=300\text{ mA}$ $f=50\text{ Hz}$



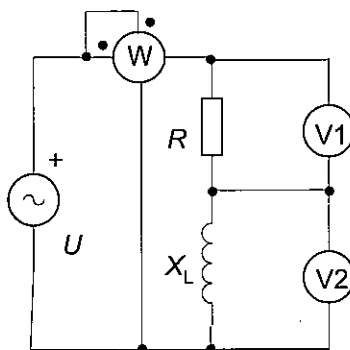
Uputa: Da bi riješili ovaj problem treba znati da je: *pokazivanje vatmetra* $= U \cdot I \cdot \cos \varphi$ tj. u vatmetru se «automatski» množe navedene veličine. Zato vatmetar ima strujne i naponske priključnice (jedna je zajednička). Strujna grana mora imati što manji, a naponska što veći otpor (kod idealnog vatmetra to je nula odnosno beskonačno).

Rezultat: $R=333\ \Omega$, $L=2,07\text{ H}$; $\varphi=+63^\circ$

VIII-9. Ako su poznata pokazivanja instrumenata, odredite otpor R i napon U u spoju na slici. Koliki je faktor snage?

Zadano: $U_{V1}=30\text{ V}$; $U_{V2}=50\text{ V}$; $P_W=30\text{ W}$

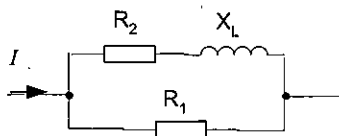
Rezultat. $30\ \Omega$; 58 V ; $0,514$



VIII-10. Izračunajte struju I , ako je ukupna radna snaga u krugu na slici jednaka P_{uk} ?

Zadano: $R_1=10\ \Omega$; $R_2=3\ \Omega$; $X_L=4\ \Omega$; $P_{uk}=1100\text{ W}$.

Rezultat $19,24\text{ A}$



VIII-11. Serijski su spojeni otpor $R=5\ \Omega$ i impedancija $Z=3+j4\ \Omega$. Ako je jalova snaga spoja 100 VAr kolika je radna snaga spoja?

Rezultat: 200 W

VIII-12. Serijski su spojeni $R=5\ \Omega$ i induktivitet $X_L=15\ \Omega$. Napon na otporniku je 31,6 V. Kolika je snaga izražena u kompleksnom obliku?

Rezultat: $200+j600\ \text{VA}$

VIII-13. Paralelno su spojene dvije impedancije $Z_1=2-j4$ i $Z_2=4+j2$. Radna snaga na Z_2 je 20 W. Izračunajte ukupnu radnu jalovu i prividnu snagu.

Rezultat 31,6 VA, 30W, 10VAr (kap) Uputa: pažljivi čitatelj će primjetiti da su struje u granama jednakog iznosa, (a nakon toga trebalo bi sve ići zaključivanjem:... ako je na 4 oma 20 W tada je na 2 oma 10 W pa je to ukupno 30 W itd. Treba naravno uzeti u obzir da je kapacitivna reaktivna (jalova) snaga negativna..)

VIII-14. Izvor (transformator) ima nazivnu snagu 25 kVA. Na izvor je priključeno trošilo 12 kW sa faktorom snage 0,6. Odredite a) postotak opterećenja izvora b) Koliku dodatnu radnu snagu može dati izvor do punog opterećenja? Zadatak riješite pomoću trokuta snage.

Rezultat: a) 80 % b) 7,2 kW

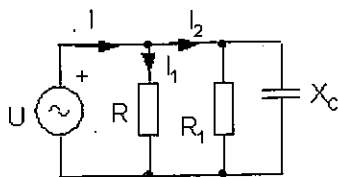
VIII-15. Paralelno spojeni $R=10\ \Omega$ i impedancija $Z=8/-30^\circ$ priključeni su na strujni izvor $I=5\ \text{A}$. Izračunajte ukupnu radnu i jalovu (reaktivnu) snagu. Kolike su snage na pojedinim elementima spoja?

Rezultat: $P=110\ \text{W}$; $Q=33\ \text{VAr}$ (kap.); $P_R=52,8\ \text{W}$

VIII-16. Paralelno su spojene dvije impedancije $Z_1=2+3j$ i $Z_2=3+j6$. Ukupna radna snaga spoja je 1500 W. Izračunajte jalovu snagu i faktor snage.

Rezultat: $Q=2480\ \text{VAr}$ $\cos\varphi=0,518$ (ind.)

VIII-17. Izračunajte reaktivnu snagu u spoju prema slici ako su izmjerene struje $I=3\ \text{A}$, $I_1=2\ \text{A}$, $I_2=2\ \text{A}$. Otpornik $R_1=4\ \Omega$. (X_C nije zadan)



Rezultat: 1,99 VAr Uputa: prije izračunavanja nacrtajte vektorski dijagram...)

TEST PITANJA VIII

1) Na otporniku od $600\ \Omega$ mjerimo efektivnu vrijednost napona i dobivamo $0,775\text{ V}$. Kolika je snaga na tom otporniku?

- A) 1 mW
- B) $0,775\text{ mW}$
- C) 1 W
- D) $7,75\text{ W}$

2) Faktor snage je odnos:

- A) radne i jalove snage
- B) prividne i jalove snage
- C) prividne i radne snage
- D) radne i prividne snage

3) Trenutna snaga sinusoidnog izvora frekvencije f na koji je priključen kondenzator je:

- A) sinusoidna funkcija frekvencije $2f$
- B) sinusoidna funkcija frekvencije f
- C) konstanta različita od nule
- D) nula

4) Kako se mijenja ukupna struja paralelnog RC spoja ako se frekvencija naponskog izvora povećava?

- A) raste
- B) pada
- C) ne ovisi o frekvenciji

5) Faktor snage nekog induktivnog trošila manji je od 1. Kako se taj faktor može povećati, a da radna snaga ostane jednaka?

- A) paralelnim spajanjem kondenzatora
- B) paralelnim spajanjem zavojnice
- C) nikako (nemoguće)
- D) serijskom spajanjem kondenzatora

6) Što se događa sa iznosom radne snage naponskog izvora, stalne amplitude napona i promjenjive frekvencije, na koji je priključen serijski RL krug ako frekvencija raste?

- A) raste
- B) pada
- C) ne mijenja se

7) Za koliko posto se smanji snaga grijača ako se napon smanji za 5%?

- A) za 5 %
- B) za 9 %
- C) za 21 %
- D) ne promijeni se

8) Što se dogodi s iznosom radne snage strujnog sinusnog izvora na koji je priključen paralelni RC spoj ako se frekvencija izvora smanji?

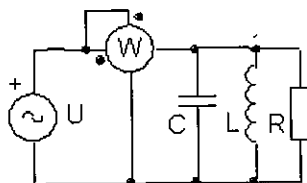
- A) poraste
- B) smanji se
- C) ne promijeni se

9) Trenutna snaga nekog trošila ima pozitivan maksimum +300 VA, a negativan -100 VA. Kolika je prividna snaga?

- A) 400 VA
- B) 300 VA
- C) 200 VA
- D) 100 VA
- E) nula

10) Prikazani spoj je u rezonanciji. Vatmetar pokazuje neku snagu P . Hoće li se i kako promijeniti pokazivanje vatmetra ako se poveća frekvencija izvora?

- A) ne promijeni se
- B) smanji se
- C) poveća se
- D) nema dovoljno podataka



11) Induktivno trošilo priključeno je na napon U . Kako se promijeni reaktivna (jalova) snaga ako se napon izvora poveća za 10 %?

- A) ne promijeni se
- B) poraste za 10 %
- C) poraste za 21 %
- D) smanji se za 10 %
- E) poraste za 5 %

12) Paralelno su spojene dvije impedancije: $Z_1=3+j4$ i $Z_2=0-j5$. Snaga na otporniku od 3Ω je 45 W. Kolika je ukupna jalova snaga?

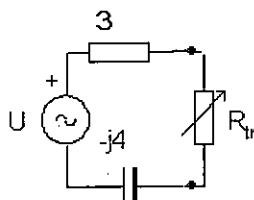
- A) 15 VAR ind.
- B) 15 VAR kap.
- C) 5 VAR ind.
- D) 5 VAR kap.
- E) nula

13) Koliki otpor (trošilo) treba priključiti na sinusodni izvor koji ima parametre U , $R_i=1 \Omega$, $X_i=1 \Omega$ (induktivno) da bi snaga na njemu bila najveća moguća?

- A) 2Ω ,
- B) 1Ω ,
- C) $1,41 \Omega$,
- D) $0,707 \Omega$

14) Što se događa sa snagom trošila ako se otpor trošila u prikazanom spoju povećava od $2 \text{ } \Omega$ do $8 \text{ } \Omega$? (Vrijednosti otpora na slici su u omima).

- A) stalno raste
B) stalno pada
C) pada pa raste
D) raste pa pada

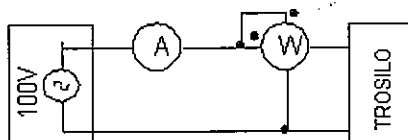


15) Koliki otpor treba priključiti na izvor s parametrima U i $Z_1 = R_1 + jX_1$ da bi snaga na njemu bila maksimalna?

- A) $R = |Z_1|$
B) $R = |X_1|$
C) $R = R_1$

16) Ampermetar pokazuje 1 A , a vatmetar 80 W . Kolika je vršna vrijednost trenutne snage?

- A) 180 VA
B) 100 VA
C) 80 VA
D) 60 VA



Odgovori na test pitanja VIII

1.A; 2.D; 3.A; 4.A; 5.A; 6.B; 7.B; 8.A; 9.C; 10.A; 11.C; 12.B; 13.C; 14.D;
15.A; 16.A;

IX.1. TOPOGRAFSKI I MJESNI DIJAGRAM

OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

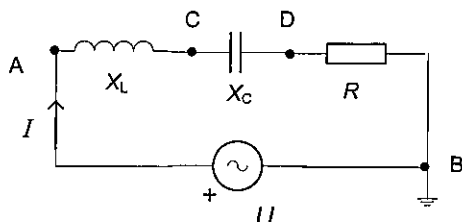
Topografski dijagram je prikaz potencijala pojedinih točaka el. kruga u kompleksnoj ravnini. Ishodište je pritom referentna točka gdje dolazi točka nultog potencijala (uzemljenje).

Mjesni dijagram (ili *lokus* dijagram) predstavlja mjesta svih točaka u kompleksnoj ravnini koje zauzimaju vrijednosti neke veličine (npr. potencijal, impedancija i dr.) pri promjeni jednog od parametara (npr. frekvencije) el. kruga.

PRIMJERI IX.1.

IX.1-P1. U spoju prema slici izračunajte potencijale točaka A, C i D te nacrtajte topografski dijagram. Odredite napone \underline{U}_{DB} , \underline{U}_{CD} i \underline{U}_{AC}

Zadano je : $R=20\ \Omega$; $X_L=20\ \Omega$; $X_C=40\ \Omega$; $U=20\text{ V}$ (početni fazni kut napona izvora je nula).



Rješenje:

Najprije ćemo izračunati ukupnu impedanciju, a zatim struju. Točka B je uzemljena (referentna točka) pa je njezin potencijal jednak nuli ($\varphi_B=0$).

Prvo izražavamo impedancije pojedinih elemenata: $R=20\ \Omega$; $X_L=j20\ \Omega$; $X_C=-j40\ \Omega$ te fazor napona izvora $\underline{U}=20\angle 0^\circ\text{ V}$.

Ukupna impedancija kruga je $\underline{Z}=R+X_L+X_C=20+j20-j40=20-j20\ \Omega=20\sqrt{2}\angle -45^\circ\ \Omega$

Fazor struje je : $\underline{I}=\underline{U}/\underline{Z}=0.707\angle 45^\circ\text{ A}=0.5+0.5j\text{ A}$.

Iz fazora struje vidi se da je efektivna vrijednost struje $I=0.707\text{ A}$, pa je $I_m(=\sqrt{2}I)=1\text{ A}$, dok je fazni kut struje $45^\circ (\pi/4\text{ rad})$. Iz toga se dobiva vremenska funkcija struje: $i(t)=1\sin(\omega t+\pi/4)\text{ A}$.

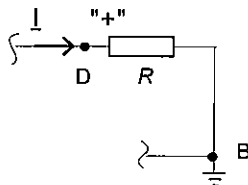
Slijedi izračun potencijala u kompleksnom području (dobivamo fazore potencijala).

$$\underline{\varphi}_D = \underline{I} \cdot R \qquad \underline{\varphi}_D = 10 + 10j\text{ V}$$

$$\underline{\varphi}_C = \underline{\varphi}_D + \underline{I} \cdot X_C \qquad \underline{\varphi}_C = 30 - 10j\text{ V}$$

$$\underline{\varphi}_A = \underline{\varphi}_C + \underline{I} \cdot X_L \qquad \underline{\varphi}_A = 20\text{ V}$$

Napomena: Kod proračuna potencijala i napona oznaku "+" stavljamo na onu priključnicu elementa u koju struja ulazi.



Napone računamo kao razlike potencijala:

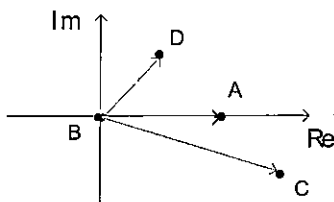
$$\underline{U}_{DB} = \varphi_D - \varphi_B \quad \underline{U}_{DB} = 10 + 10j \text{ V}$$

$$\underline{U}_{CD} = \varphi_C - \varphi_D \quad \underline{U}_{CD} = 20 - 20j \text{ V}$$

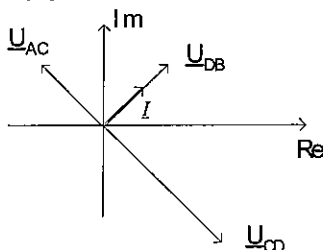
$$\underline{U}_{AC} = \varphi_A - \varphi_C \quad \underline{U}_{AC} = -10 + 10j \text{ V}$$

Pažnja: promjenom redoslijeda indeksa napona mijenja se predznak.
Npr. $\underline{U}_{DC} = -20 + 20j \text{ V}$ $\underline{U}_{CA} = 10 - 10j \text{ V}$

Na slici je prikazan topografski dijagram s ucrtanim vektorima napona \underline{U}_{AB} , \underline{U}_{CB} i \underline{U}_{DB} .



Ponekad se miješaju pojmovi topografskog dijagrama i vektorskog dijagrama. Da bi se vidjela razlika, na sljedećoj slici je prikazan vektorski dijagram ovoga spoja, u kojemu su prikazani vektori struje i napona pojedinih elemenata.



Napon na otporu je u fazi sa strujom, dok napon na induktivitetu prema struji fazno prethodi, a napon na kondenzatoru fazno zaostaje za 90° .

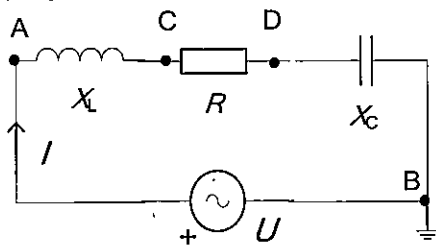
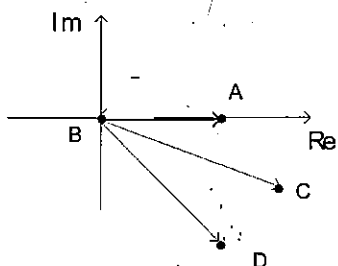
IX.1.P2. Nacrtajte topografski dijagram za spoj iz prethodnog zadatka ako otpornik i kondenzator zamijene svoja mjesta.

Rješenje: Za proračun ukupne impedancije i struje nije važan redoslijed elemenata u serijskom spoju. Na isti način kao u prethodnom primjeru dobivamo:

$$\underline{\varphi}_D = I \cdot X_C \quad \underline{\varphi}_D = 20 - 20j \text{ V}$$

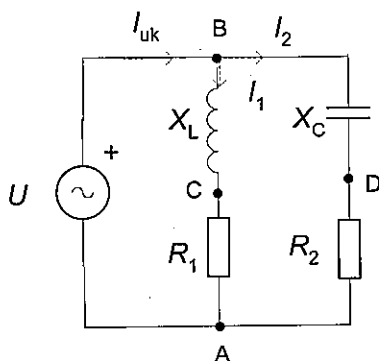
$$\underline{\varphi}_C = \underline{\varphi}_D + I \cdot R \quad \underline{\varphi}_C = 30 - 10j \text{ V}$$

$$\underline{\varphi}_A = \underline{\varphi}_C + I \cdot X_L \quad \underline{\varphi}_A = 20 \text{ V}$$



Zaključak: promijenili se samo potencijal točke D.

IX.1-P3. U spoju prema slici zadano je $R_1=R_2=X_C=X_L=24\ \Omega$, $U=24\text{V}$. Odredite ukupnu struju. Pomoću vektora napona nacrtajte topografski dijagram, za slučaj da je početni kut napona izvora jednak nuli te da je točka A uzemljena. Odredite mjesta (mjesni dijagram) na kojima će se nalaziti točka D prilikom promjene otpora R_2 ili kapacitivnog otpora X_C .

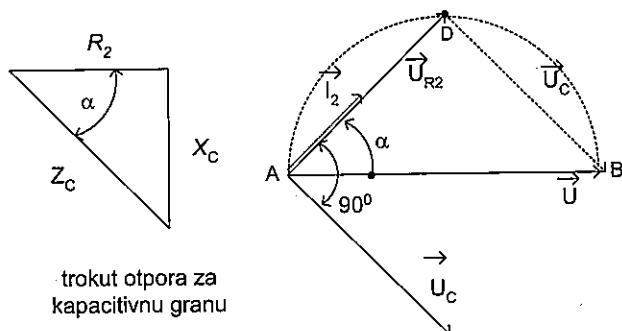


Rješenje: Ovdje ćemo pokazati rješenje pomoću vektorskog dijagrama. U tu svrhu treba nacrtati vektore struja i napona pojedinih elemenata. Na naponski izvor paralelno su spojena dva serijska spoja osnovnih elemenata. Za svaki serijski spoj računamo prividni otpor i struju.

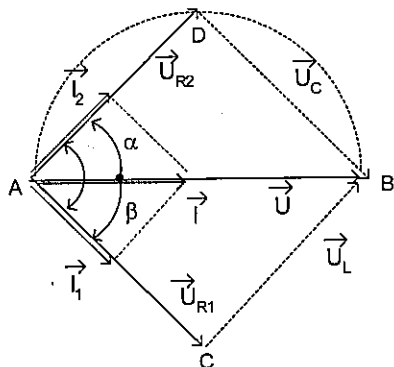
$$Z_C = \sqrt{R_1^2 + X_C^2} \quad Z_C = 33.941\ \Omega \quad I_1 = \frac{U}{Z_C} \quad I_1 = 0.707\text{ A}$$

$$Z_L = \sqrt{R_2^2 + X_L^2} \quad Z_L = 33.941\ \Omega \quad I_2 = \frac{U}{Z_L} \quad I_2 = 0.707\text{ A}$$

Svaka od ovih struja ima svoj fazni pomak prema naponu kao i međusobni fazni pomak. Fazni pomak struje prema naponu izvora u serijskom spoju možemo odrediti iz trokuta otpora. Na slijedećoj slici je prikazan postupak za kapacitivnu granu (serijski spoj R_2 i X_C). Struja prethodi naponu za kut $\alpha=45^\circ$ (koji smo odredili iz trokuta otpora). U vektorskom dijagramu zbroj vektora napona U_{R_2} i U_C mora biti jednak naponu izvora. Uočite da će bez obzira na iznose R_2 i X_C točka D nalaziti na crtkano označenoj polukružnici (zašto?).



Jednako postupamo i kod induktivne grane te dobivamo kompletan vektorski dijagram spoja



Iz vektorskog dijagrama (lijevo) određujemo vektor ukupne struje, kao zbroj vektora struja I_1 i I_2 koji su međusobno pomaknuti za 90° . Budući da su te struje jednakih iznosa, vektor ukupne struje je iznosa $\sqrt{2} \cdot 0,707 = 1\text{ A}$ (dijagonala kvadrata!) a u fazi je s naponom izvora, pa mu je kut jednak nuli.

Postavimo li točku A u ishodište kompleksne ravnine, nizanjem vektora napona (redom kako su elementi spojeni) dobivamo potencijale pojedinih točaka (topografski dijagram) kako je prikazano na vektorskom dijagramu lijevo.

Ovaj zadatak se mogao riješiti i bez skica trokuta otpora i vektorskog dijagrama, analitičkim postupkom, tj. računom pomoću kompleksnih izraza impedancija i napona, kako slijedi:

Najprije odredimo kompleksne izraze induktivnog i kapacitivnog otpora te napona izvora:

$$\underline{X}_C = -j\underline{X}_C \quad \underline{X}_L = j\underline{X}_L \quad \underline{U} = 24 + j0 \text{ V (fazor napona)}$$

zatim izračunamo impedancije serijskih spojeva:

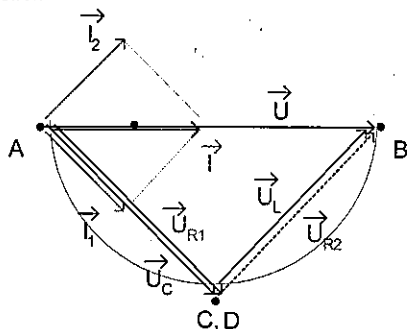
$$\underline{Z}_{RC} = 24 - j24 \quad \underline{Z}_{RL} = 24 + j24 \quad , \quad \text{a nakon toga i ukupnu impedanciju:}$$

$$\underline{Z}_{uk} = \underline{Z}_{RC} \cdot \underline{Z}_{RL} / (\underline{Z}_{RC} + \underline{Z}_{RL}) = 24 + j0 \quad \Omega \quad (\text{kako to da je ova impedancija realna, tj. ima kut nula?})$$

Fazor struje je $\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z}_{uk} = 1 + j0 \text{ A}$. (u fazi sa naponom) Iznos (modul) fazora struje je efektivna vrijednost struje, u ovom slučaju to je 1 A, a maksimalna vrijednost struje je 1,41 puta veća. Za vježbu još izračunajte potencijale točaka B, C i D te nacrtajte topografski dijagram.

IX.1-P4. Nacrtajte vektorski prikaz struja i napona te topografski dijagram za spoj iz prethodnog zadatka ako otpornik R_2 i kondenzator zamijene mjestima. Utječe li to na ukupnu struju? Koliki bi u tom slučaju bio napon U_{CD} ?

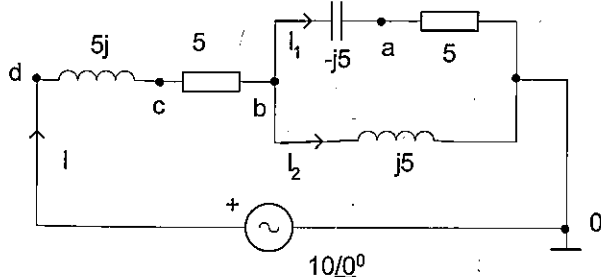
Rješenje: Zamjena položaja spomenutih elemenata nema utjecaja na veličine impedancija, pa stoga nema utjecaja niti na ukupnu struju. Položaj elemenata utječe, međutim, na redoslijed "nizanja" vektora napona pri crtanju topografskog dijagrama, pa time i na topografski dijagram, koji u ovom slučaju izgleda kako je prikazano na donjoj slici.



Ovdje vidimo da je došlo do promjene položaja točke D. Naime vektor napona na kondenzatoru ima hvatište u točki A dok mu je vrh u točki D. Taj napon fazno zaostaje 90° za strujom I_2 , tako da točka D ovdje pada u točku C (na istom je potencijalu) pa je napon između točaka C i D jednak nuli (prije zamjene položaja otpornika i kondenzatora bio je jednak naponu izvora).

Pitanje: Po kojoj će se krivulji pomicati točke C i D (mjesni dijagram) pri promjeni vrijednosti pojedinih parametara kruga?

IX.1-P5. U prikazanom spoju treba odrediti struje te potencijale točaka a b c (prema referentnoj točki 0). Rezultate treba izraziti u obliku fazora te nacrtati topografski dijagram.



Rješenje: Izračunamo impedancije struje i napone.

$$R_1 = 5 \quad X_{L1} = 5j \quad X_{L2} = 5j \quad R_2 = 5 \quad X_C = -5j$$

$$Z_1 = 5 + 5j \quad Z_2 = 5 - 5j \quad Z_3 = 5j \quad U = 10 + 0j$$

$$Z_{uk} = Z_1 + \frac{(Z_2 \cdot Z_3)}{Z_2 + Z_3} \quad Z_{uk} = 10 + 10j \quad I = \frac{U}{Z_{uk}} \quad I = 0.5 - 0.5j$$

$$I_1 = I \cdot \frac{(X_{L2})}{X_{L2} + Z_2} \quad I_1 = 0.5 + 0.5j \quad I_2 = I - I_1 \quad I_2 = -j$$

Sada možemo izračunavati potencijale (napone).

$$\varphi_a = I_1 \cdot R_2 \quad \varphi_a = 2.5 + 2.5j$$

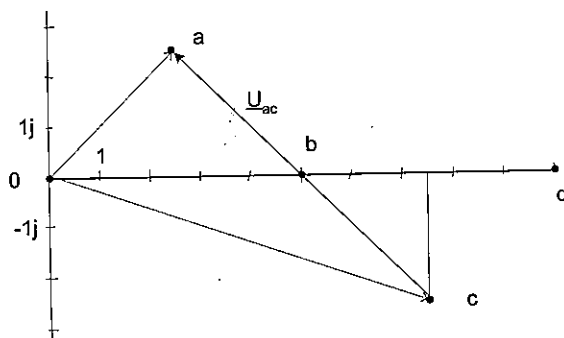
$$\varphi_b = I_2 \cdot X_{L2} \quad \text{ili} \quad \varphi_b = \varphi_a + I_1 \cdot X_C \quad \varphi_b = 5$$

$$\varphi_c = \varphi_b + I \cdot R_1 \quad \varphi_c = 7.5 - 2.5j$$

$$\varphi_d = \varphi_c + I \cdot X_{L1} \quad \varphi_d = 10$$

Topografski dijagram:

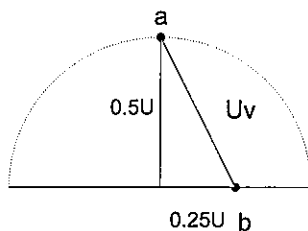
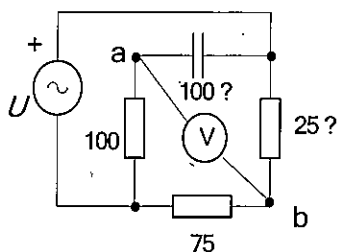
U kompleksnu ravninu ucrtavamo sve izračunate fazore potencijala φ (tj. napona prema referentnoj točki 0) što daje dijagram na donjoj slici:



Iz topografskog dijagrama mogu se "očitati" ostali naponi koji su od interesa. Tako npr. napon $\underline{U}_{ac} = -5 + j5$ V (efektivno je to 7 V).

Pažnja: Kod označavanja napona uzimamo da je drugi indeks referentna točka (u ovom slučaju c). Strelicu vektora koji povezuje te dvije točke treba usmjeriti u točku koju označava prvi indeks (u ovom slučaju a).

IX.1-P6. Napon između točaka a i b iznosi 27,9 V. Kolika je struja izvora?



Rješenje: treba skicirati topografski dijagram u kojem se vidi položaj točaka a i b. Iz označenog trokuta odredi se napon izvora, a zatim struja izvora.

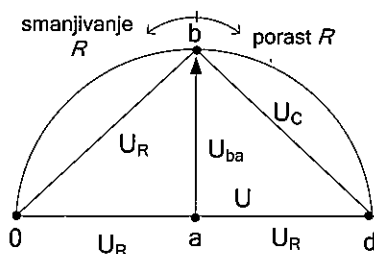
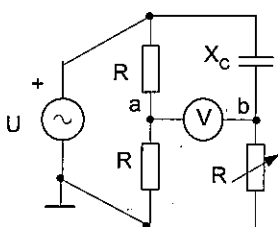
$$U_v = \sqrt{(0.5U)^2 + (0.25U)^2} \quad U_v = 27.9$$

$$U = \sqrt{\frac{U_v^2}{(0.5^2 + 0.25^2)}} \quad U = 49.909$$

$$I = \left| \frac{U}{100} + \frac{U}{(100 - 100j)} \right| \quad I = 0.789$$

ZADACI IX.1

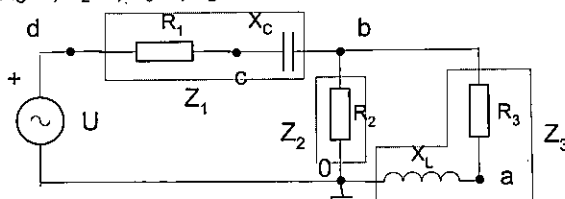
IX.1-1. Odredite pokazivanje voltmetra u spoju na slici. Zadano: $R=X_C$; $U=80$ V; Kako se mijenja pokazivanje voltmetra ako se otpor R smanjuje. Zadatak riješite crtanjem topografskog dijagrama.



Rezultat: Na slici desno je nacrtan odgovarajući topografski dijagram.

Točka a se nalazi na polovici napona izvora (jer su lijevi otpori R u seriji jednaki). Točka b se nalazi na polukružnici (jer vektorska suma napona na desnom otporu i napona na C mora biti jednaka naponu izvora). Ucrtan je vektor napona U_{ab} , a taj napon (efektivnu vrijednost) pokazuje voltmetar. Dakle to je $U/2=40$ V. Promjenom otpora R mijenja se položaj točke b (točka a se ne miče) i to po polukružnici. Budući da točka b zauzima razna mjesta na toj polukružnici koristi se termin: *mjesni dijagram*. Razmotrite promjene topografskog dijagrama za: a) otpori u seriji nisu jednaki npr. donji je manji. b) kondenzator i promjenjivi otpornik zamijene mjesta.

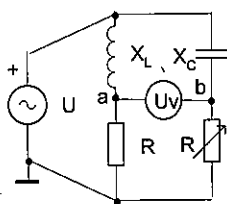
IX.1-2. Zadan je spoj elemenata kako je prikazano slikom. Odredite impedancije Z_1 , Z_2 , Z_3 u kompleksnom obliku, a zatim "fazorskom" metodom izračunajte efektivnu vrijednost struja i nacrtajte topografski dijagram. Odredite napon na $R_1 = U_{dc}$. Napon izvora je 8 V. Zadano je: $R_1=5$; $X_C=1$, $R_2=5$, $R_3=5$, $X_L=5 \Omega$



Rezultat: $Z_1=5-j1 \Omega$; $Z_2=5+j0 \Omega$; $Z_3=5+j5 \Omega$; $I_1=1 \text{ A}$; $I_2=0,632 \text{ A}$; $I_3=0,447 \text{ A}$; $U_1=5 \text{ V}$;

IX.1-3. Umjesto na naponski izvor, spoj iz prethodnog primjera priključimo na strujni, koji daje (sinusnu) struju od 2 A (efektivno). Nacrtajte topografski dijagram i odredite napon na strujnom izvoru i napon na R_1 . **Rezultat:** 16 V; 10 V

IX.1-4. Ako voltmetar u spoju na slici pokazuje napon U_V , odredite napon izvora U . Zadano: $U_V=24 \text{ V}$; $X_L=X_C=R$.



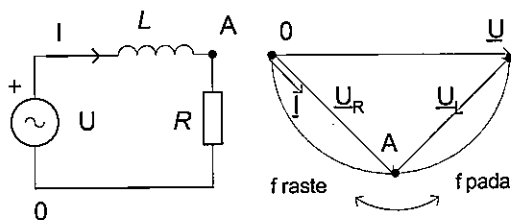
Rezultat: $U=24 \text{ V}$

Uputa: nacrtajte topografski dijagram.

Objasnite pomicanje točke b prilikom povećavanja označenog otpora R . Koja mjesta zauzima pri tom točka b. Označite mjesto točke b za $R=0$ i za $R=\infty$

IX.1-5. Nacrtajte topografski dijagram napona s time da napon izvora postavite u realnu os. Zaključite kako će se pri promjeni frekvencije pomicati točka A. Na kojoj frekvenciji napon U_{A0} zaostaje iza napona U za 45° ? $R=1 \text{ k}\Omega$, $L=1 \text{ H}$

Rezultat: treba napisati jednakost $R=2\pi fL$ $f=R/2\pi L=160 \text{ Hz}$



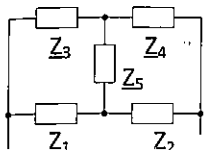
Struja je uvijek u fazi s naponom na otporniku. Točka A nacrtana je za frekvenciju od 160 Hz na kojoj je fazni kut 45° . Vektori (fazori) napona na otporniku i induktivitetu su uvijek međusobno okomiti. Nadalje suma (vektorska) ta dva napona uvijek je jednaka naponu izvora. Zato se točka A može nalaziti samo na nacrtanoj polukružnici. Na slici je označeno kuda se pomiče točka A pri promjeni frekvencije.

Pitanje: gdje bi se našla točka A za $f=0$, a gdje za $f=\infty$?

IX.2. SLOŽENI KRUGOVI IZMJENIČNE STRUJE

OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

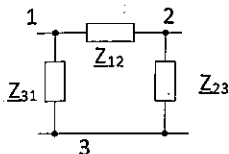
Mosni spoj impedancija je paralelni spoj dvaju djelila napona (serijski spojevi impedancija Z_1 i Z_2 te Z_3 i Z_4) između čijih srednjih točaka može biti spojena peta impedancija Z_5 (prema slici). Kada paralelno spojena djelila dijele napon u istom omjeru, tada su srednje točke obaju djelila na istom potencijalu, pa na Z_5 nema napona. U tom slučaju kažemo da je mosni spoj u *ravnoteži*, pri čemu kroz Z_5 (dijagonala mosta) ne teče struja.



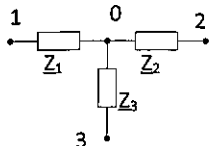
Uvjet ravnoteže mosta predstavlja onaj odnos impedancija pri kojemu oba djelila u spoju dijele napon u istom omjeru, a to je kada je $Z_1/Z_2 = Z_3/Z_4$, iz čega proizlazi uvjet ravnoteže mosta, a to je da su umnoški impedancija u nasuprotnim granama mosta međusobno jednaki.

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

Spoj impedancija u trokut (Δ -spoj) je spoj u kojemu su između tri točke, ovdje oznaka 1, 2 i 3, spojene tri impedancije, ovdje oznaka Z_{12} , Z_{23} , i Z_{31} (prema oznakama točaka među kojima su spojeni) tako da su u svakoj točki spojene priključnice dvaju impedancija. (Na točke 1, 2 i 3 dalje su obično spojeni ostali dijelovi el. kruga).



Spoj impedancija u zvijezdu (Y-spoj) je spoj tri impedancije između tri točke, u kome je po jedna priključnica svake od njih spojena u jednu (četvrtu) zajedničku točku, tzv. *zvjezdisto* spoja (označeno s 0) dok su im slobodne priključnice spojene u točke 1, 2 i 3 (po kojima su i impedancije ovdje označene kao Z_1 , Z_2 , i Z_3) a na koje su obično spojeni ostali dijelovi el. kruga.



Pretvorba trokuta u zvijezdu temelji se na istovrijednosti dvaju spojeva u odnosu na ostatak el. kruga. Spoj impedancija Z_1 , Z_2 , i Z_3 u zvijezdu istovrijedan je spoju impedancija Z_{12} , Z_{23} , i Z_{31} u trokut, ako među impedancijama vrijede ovi odnosi. Z_Δ je tu pomoćna veličina, koja predstavlja zbroj svih triju impedancija spojenih u trokut ($Z_\Delta = Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}$).

$$Z_1 = \frac{Z_{12} Z_{31}}{Z_\Delta} \quad Z_2 = \frac{Z_{23} Z_{12}}{Z_\Delta} \quad Z_3 = \frac{Z_{31} Z_{23}}{Z_\Delta}$$

Pretvorba zvijezde u trokut temelji se na istovrijednosti dvaju spojeva u odnosu na ostatak el. kruga. Spoj impedancija Z_{12} , Z_{23} , i Z_{31} u trokut istovrijedan je spoju impedancija Z_1 , Z_2 , i Z_3 u zvijezdu, ako među njima vrijede ovi odnosi.

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \quad Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1} \quad Z_{31} = Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3 Z_1}{Z_2}$$

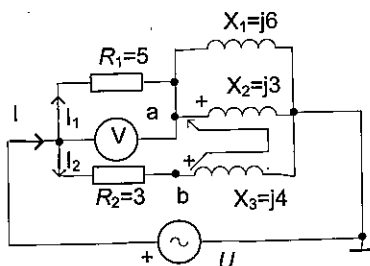
Jednadžbe Kirchhoffovih zakona postavljaju se se ovdje istim postupkom kao kod mreža istosmjerne struje, s tom razlikom da se *umjesto otpora i vodljivosti* ovdje koriste *impedancije i admitancije*, a *umjesto iznosa struja i napona* rabe se njihovi *kompleksni izrazi (fazori)*.

$$\sum I = 0 \quad \sum U = 0$$

Metoda superpozicije u mrežama izmjenične struje primjenjuje se istim postupkom kao kod mreža istosmjerne struje, s tom razlikom da se, *umjesto s otporima i vodljivostima*, ovdje računa s *impedancijama i admitancijama*, a *umjesto iznosa struja i napona* rabe se njihovi *kompleksni izrazi (fazori)*.

PRIMJERI IX-2

IX.2-P1. Voltmetar u spoju na slici pokazuje 45 V. Izračunajte efektivne vrijednosti napona izvora U , ukupne struje I te napona između točaka a i b .



Rješenje: Na temelju pokazivanja voltmetra izračunamo struju $I_1 = 45/5 = 9$ A. Proizvoljno uzimamo da je početni fazni kut te struja nula tj. fazor struje $I_1 = 9 \angle 0^\circ$ A (fazor napona na R_1 s tim u vezi ima također početni fazni kut nula). Ta struja prolazi i kroz paralelni spoj X_1 i X_2 . $X_{12} = j2 \Omega$. Napon na toj paraleli je: $U_{12} = I_1 \cdot X_{12} = j18$ V. Sada izračunamo fazor napona izvora kao zbroj fazora napona na R_1 i fazora napona U_{12} (KZN). Dakle: $U = 45 + j18$ V odnosno $U = 48,67 \angle 21,8^\circ$ V. Efektivna vrijednost napona izvora je $U = 48,67$ V

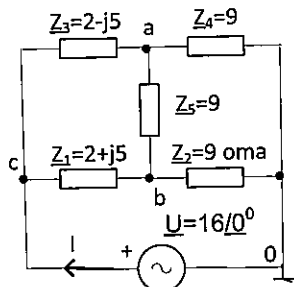
Fazor struje $I_2 = U / (R_2 + X_3) = (45 + j18) / (3 + j4) = 8,28 - j5$ A
Iz Kirchhoffovog zakona za struje dobivamo da je fazor ukupne struje
 $I = I_1 + I_2 = 17,28 - j5,04$ A. Efektivna vrijednost te struje je 18 A.

Za izračun napona U_{ab} treba odabrati neki put od točke b prema točki a . Ovdje je odabran put koji prolazi kroz elemente X_3 i X_2 . Na pojedinom elementu treba postaviti pomoćnu oznaku + na onom kraju u koji ulazi struja.

$U_{ab} = -I_2 X_3 + U_{12} = -20,16 - j15,12$ V (primjetimo da je napon na X_2 isti kao napon na paraleli X_1, X_2). Efektivna vrijednost napona U_{ab} je 25,2 V, (to je napon koji bi pokazivao voltmetar kada bismo ga u stvarnom spoju priključili između tih točaka).

Napomena: Za izračun napona U_{ab} možemo odabrati neki drugi put. Pokušajte izračunati taj napon npr. putem kroz R_2 i R_1 ili putem X_3 -izvor- R_1 . Važno je da krenemo od referentne točke u ovom slučaju b . Ako bismo krenuli od točke a dobili bismo napon U_{ba} koji je $-U_{ab}$. Efektivna vrijednost napona U_{ab} i U_{ba} je dakako jednaka.

IX.2-P2. U prikazanom spoju treba izračunati a) ukupnu struju b) fazni pomak te struje u odnosu na napon izvora c) napon U_{ab} (efektivnu vrijednost). Koji element treba spojiti umjesto impedancije Z_3 da bi napon U_{ab} bio nula. Kolika je u to slučaju ukupna struja?



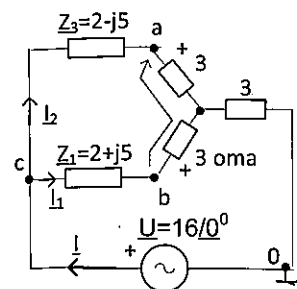
Rješenje

Zadatak bismo mogli riješiti izravnom primjenom jednažbi Kirchhoffovih zakona, jili jednostavnije korištenjem transformacije trokut – zvijezda.

Uočimo trokut impedancija Z_4, Z_5 i Z_2 . To su radne impedancije dakle otpori od po 9 oma.

Primjenom formula za pretvorbu dobivamo zvijezdu koju čine otpori od po tri oma. (formule pogledajte u uvodu)

Navedenom transformacijom dobivamo spoj na slici dolje:



Ovdje smo dobili mješoviti spoj u kojem primjenom formula za serijske odnosno paralelne spojeve impedancija izračunamo ukupnu impedanciju i ukupnu struju, a zatim struje kroz pojedine grane.

Napon U_{ab} izračunamo kao u prethodnom primjeru idući od točke b prema a po odabranom putu prema slici lijevo. Za "novi" spoj lako odredimo ukupnu impedanciju (najprije za paralelu, a zatim u seriju otpornik od 3 Ω).

$$Z_{\text{paralela}} = 5 \Omega, \quad Z_{\text{uk}} = 8 \Omega, \quad I = U/Z_{\text{uk}} = 2 \text{ A (u fazi sa naponom)} \quad U_p = I \cdot Z_{\text{paralela}} = 10 \text{ V}$$

$$\text{Struje grana su: } I_1 = U_p / (Z_1 + 3) = 1 - j \text{ A}, \quad I_2 = 1 + j \text{ A (provjera: } I_1 + I_2 = 2 \text{ A)}$$

$$U_{ab} = -I_1 \cdot 3 + I_2 \cdot 3 = 6j \text{ V, odnosno 6 V efektivno}$$

Zadani spoj je zapravo neuravnoteženi električni most. Da bi most bio u ravnoteži tj. da bi napon U_{ab} bio nula treba vrijediti općeniti uvjet za ravnotežu $Z_1 \cdot Z_4 = Z_2 \cdot Z_3$ iz kojeg slijedi da Z_3 mora biti $Z_3 = Z_1 Z_4 / Z_2 = 2 + 5j$. U tom slučaju bi ukupna impedancija bila

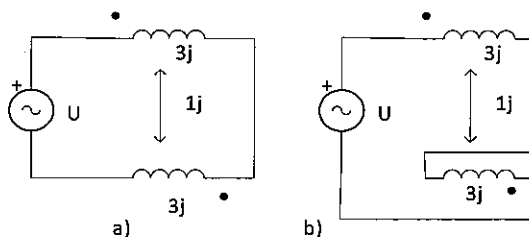
$$Z_{\text{uk}} = (Z_1 + Z_2) \cdot (Z_3 + Z_4) / (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4) = 5.5 + 2.5j \Omega$$

(impedancija Z_5 može se u slučaju ravnoteže odspojiti ili kratko spojiti).

$$\text{Ukupna struja bila bi } I = U/Z_{\text{uk}} = 2.41 - 1.1j \text{ A} \quad \text{Efektivna vrijednost te struje je } I = 2.65 \text{ A}$$

Pitanje: Može li se ravnoteža mosta postići promjenom impedancije Z_4 ?

IX.2-P3. U prikazanom spoju odredite struju a) za slučaj suglasne i b) nesuglasne međuinduktivne veze. $U = 8 \text{ V}$.



Rješenje

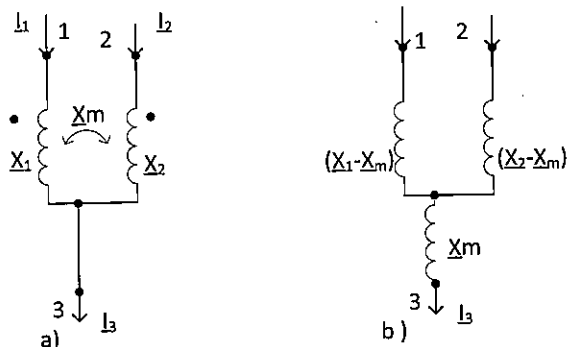
U slučaju suglasne veze (slika a) ukupni induktivni otpor je

$$X = X_1 + X_2 + 2 \cdot X_m = 3j + 3j + 2j = 8j \Omega \text{ pa je struja } I = U/X = 1 \text{ A}$$

Ako zamijenimo priključnice na jednoj od zavojnica, dobivamo tzv. *nesuglasnu vezu* (slika b). Sada je ukupni induktivni otpor $X = X_1 + X_2 - 2 \cdot X_m = 3j + 3j - 2j = 4j \Omega$, pa je struja $I = U/X = 2 \text{ A}$.

IX.2-P4. Na slici a) prikazan je izdvojen dio el.mreže koji se sastoji od dvije međuinduktivno spregnute zavojnice omeđen točkama 1, 2 i 3. Taj isti dio mreže može se zamijeniti zavojnicama bez međuinduktivno spregnutih zavojnica prema slici b). Pokažite da su u oba slučaja naponi U_{13} , U_{23} i U_{12} jednaki.

Zadano je $\underline{I}_1 = 1$ $\underline{I}_2 = 1 + j$ $\underline{X}_1 = 10j$ $\underline{X}_2 = 5j$ $\underline{X}_m = 2j$



Rješenje:

Za oba spoja vrijedi da je $I_3 = I_1 + I_2$ (KZS)

Za spoj prema slici a) dobivamo:

$$\underline{U}_{13} = \underline{I}_1 \cdot \underline{X}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{X}_m \quad \underline{U}_{13} = -2 + 12j$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_2 \cdot \underline{X}_2 + \underline{I}_1 \cdot \underline{X}_m \quad \underline{U}_{23} = -5 + 7j$$

$$\underline{U}_{12} = -\underline{I}_2 \cdot \underline{X}_2 - \underline{I}_1 \cdot \underline{X}_m + \underline{I}_1 \cdot \underline{X}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{X}_m \quad \underline{U}_{12} = 3 + 5j$$

Dok te iste napone u nadomjesnom spoju prema sl. b) izračunamo ovako:

$$\underline{U}_{13} = \underline{I}_1 \cdot (\underline{X}_1 - \underline{X}_m) + \underline{I}_3 \cdot \underline{X}_m \quad \underline{U}_{13} = -2 + 12j$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_2 \cdot (\underline{X}_2 - \underline{X}_m) + \underline{I}_3 \cdot \underline{X}_m \quad \underline{U}_{23} = -5 + 7j$$

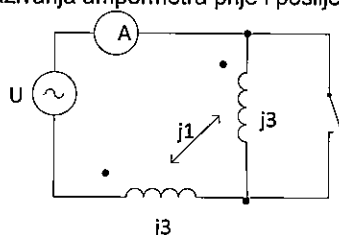
$$\underline{U}_{12} = -\underline{I}_2 \cdot (\underline{X}_2 - \underline{X}_m) + \underline{I}_1 \cdot (\underline{X}_1 - \underline{X}_m) \quad \underline{U}_{12} = 3 + 5j$$

Vidimo da su naponi jednaki što znači da spoj a) možemo zamijeniti sa spojem b) što u većini slučajeva olakšava analizu mreže.

Kada u spoju prema slici a) na jednoj od zavojnica zamijenimo položaj točkice koja označava početak namotaja (u smislu podudaranja smjera mag.toka) elementi u ekvivalentnom spoju imaju vrijednost $(X_1 + X_m)$, $(X_2 + X_m)$ i $-X_m$

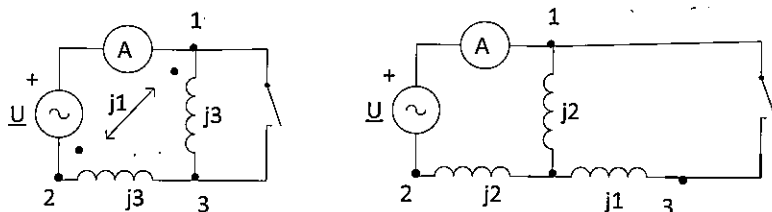
Na točke 1, 2 i 3 spojeni su ostali elementi mreže.

IX.2-P4. Odredite odnos pokazivanja ampermetra prije i poslije zatvaranja sklopke.



Rješenje:

U ovom zadatku (kao i u mnogim drugim u kojima je ovakav spoj zavojnica) treba (najbolje je) primijeniti nadomjesnu shemu bez međuiduktivne veze. Najprije uočimo i označimo točke 1, 2 i 3. Dobivate situaciju prikazanu shemom:



Dio spoja omeđen točkama 1, 2 i 3 je promijenjen. Vidimo da nema međuiduktivne veze nego su u novonastalom spoju "obične" zavojnice. Sada nije problem vidjeti da se uz otvorenu sklopku dobiva fazor struje kao $\underline{U}/j4$ (a iznos $U/4$) dok se uz zatvorenu sklopku dobiva fazor struje kao $\underline{U}/(j2 + (j1 \parallel j2))$ što daje iznos struje $3U/8$. Traženi odnos predstavlja odnos iznosa struja, koji je jednak $2/3$.

Važna napomena: Općenito za primjenu nadomjesnog spoja najprije treba pogledati položaj točkica (početak namotaja). Ako se na jednoj od zavojnica promijeni taj položaj (zavojnica se suprotno spoji) dobiva se drugačija nadomjesna shema. (ovdje: $j4, j4, -j1$).

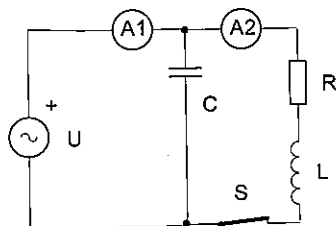
Osim primjene opisane transformacije pri rješavanju ovakvog spoja s međuiduktivnom vezom, uvijek postoji i uobičajena (no računski zahtjevnija) mogućnost rješavanja ovakvog spoja primjenom Kirchhoffovih jednadžbi.

U tom slučaju, prije zatvaranja sklopke imamo krug sa jednom konturom u kojoj je struja (struja ampermetra) $\underline{U}/(j3 + j3 - 2 \cdot j1) = \underline{U}/j4$. (naravno ampermetar pokazuje $U/4$ A).

Nakon zatvaranja sklopke dobivamo krug sa dvije konture. Potrebno je označiti struje (I_1, I_2, I_3) i napisati jednadžbe Kirchhoffovih zakona te iz njih odrediti struju I_1 .

ZADACI IX.2

IX.2-1. Ampermetri A_1 i A_2 u krugu na slici pokazuju jednake iznose I_A . Ako je pokazivanje ampermetra A_1 jednako i pri otvorenoj sklopki, odredite induktivitet L i otpor R .
Zadano: $U=110$ V; $f=60$ Hz; $I_A=0,5$ A.

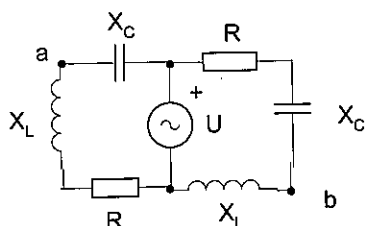


Rezultat:

$$L = 0,29 \text{ H}$$

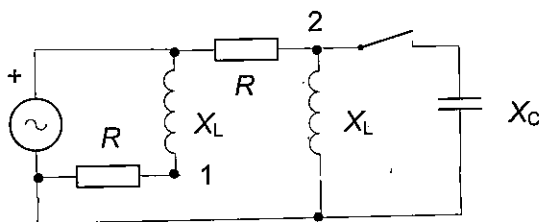
$$R = 190 \text{ oma}$$

IX.2-2. Koliki je napon U_{ab} ako je $U=10$ V, $R=X_L=X_C=10 \Omega$?

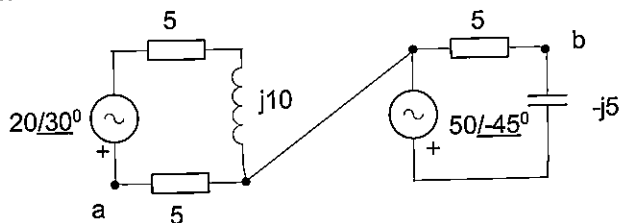


Rezultat: 10 V

IX.2-3. U spoju prema slici napon U_{12} kod otvorene sklopke iznosi $100/0^\circ$. Koliki je taj napon kada se sklopka zatvori ako je $R=X_L=X_C$? Nacrtajte topografski dijagram.

Rezultat: $70,7/-45^\circ$

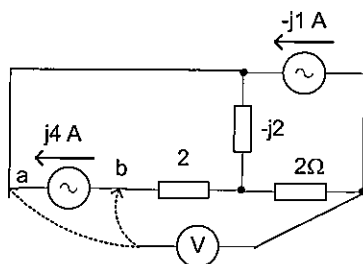
IX.2-4. Koliki će napon pokazati (idealni) voltmetar priključen na točke a i b u prikazanom spoju elemenata?



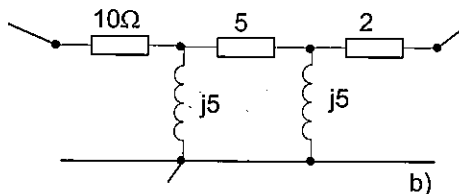
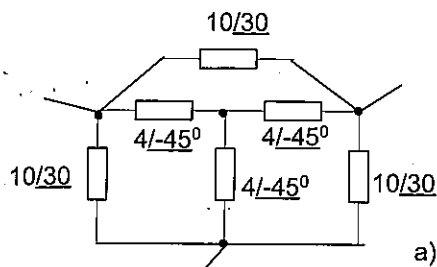
Rezultat: 28,52 V.

IX.2-5. Koliki napon mjeri voltmetar (efektivna vrijednost) u spoju prema slici desno ako je spojen na točku a odnosno na točku b?

Rezultat: $2\sqrt{10}$; 10 V

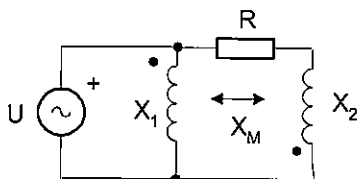


IX.2-6. Zamijenite prikazani spoj impedancija s jednim spojem impedancija u zvijezdu (Y spoj) za spoj na slici a) i spoj na slici b).



Rezultat a) $\underline{Z}=2,29/-3,5$ (simetrična zvijezda) b) $(12+j1)$; $(-1+j2)$; $(4+j1)$

IX.2-7 Izračunajte snagu na otporniku $R=25\ \Omega$ u spoju prema slici. Zadano je : $X_1=X_2=25\ \Omega$, $X_M=20\ \Omega$, $U=25\ \text{V}$.

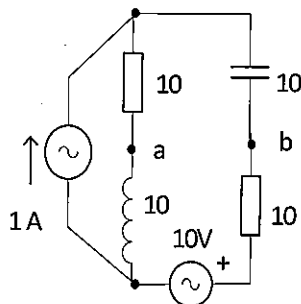


Rezultat 71 W

IX.2-8. Primjenom superpozicije izračunajte napon između točaka a i b u mreži na slici desno?

Rezultat: 7,07 V

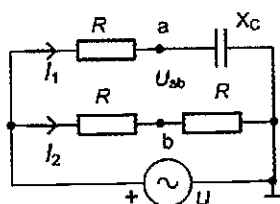
Uputa Treba promatrati djelovanje svakog izvora posebno. Za strujni izvor treba na mjestu naponskog postaviti kratki spoj. Za naponski treba na mjestu strujnog postaviti prekid.



TEST PITANJA IX.

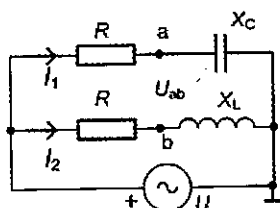
1) Koji je odnos struja $I_1 : I_2$ ako je $R = X_C = X_L$?

- A) 4
B) 2
C) 0,707
D) 1,41
E) 1



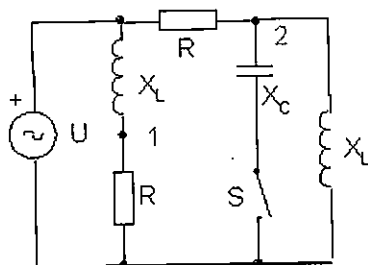
2) U prikazanom spoju je $R = X_C = X_L$. U kojem su odnosu su struje I_1 i I_2 (efektivne vrijednosti) $I_1 : I_2 = ?$

- A) 1,41
B) 1
C) 2
D) 0,707



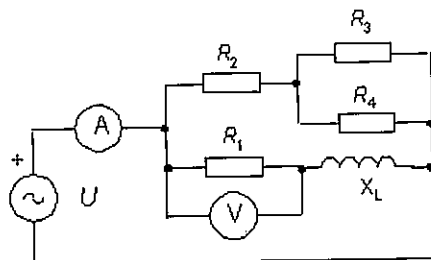
3) U spoju prema slici napon između točaka 1 i 2 kod otvorene sklopke iznosi $U_{12} = 100 \angle 0^\circ$. Koliki je taj napon kada se sklopka zatvori, ako je $R = X_C = X_L$.

- A) $70,7 \angle 45^\circ$ V
B) $70,7 \angle -45^\circ$ V
C) $70,7 \angle -90^\circ$ V
D) $100 \angle -45^\circ$ V
E) $100 \angle -90^\circ$ V



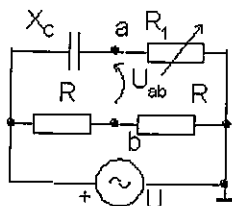
4) Voltmetar pokazuje napon $U_v = 3$ V. Ako je poznato: $R_1 = 3 \Omega$, $X_L = 3 \Omega$ koliki je napon izvora?

- A) 3 V
B) 6 V
C) $3\sqrt{2}$ V
D) $6\sqrt{2}$ V
E) nema dovoljno podataka



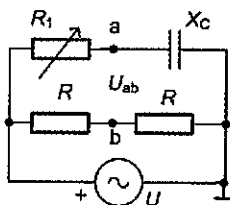
5) U kojem odnosu su efektivne vrijednosti napona U i U_{ab} , ako je $R=X_C$ $U/U_{ab}=?$

- A) 1
- B) 1,41
- C) 2
- D) 0,5
- E) ovisi o R_1



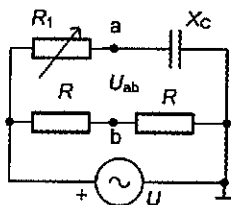
6) Kako se mijenja efektivna vrijednost napona U_{ab} ako R_1 raste od nula prema R ?

- A) raste
- B) ne mijenja se
- C) smanjuje se
- D) nema dovoljno podataka



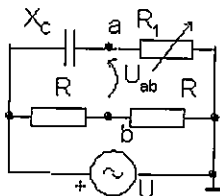
7) Koji je fazni kut napona U_{ab} u odnosu na U ako je $R_1=X_C$? (pozitivan kut znači prethođenje)

- A) -45°
- B) 90°
- C) nula (u fazi)
- D) 45°
- E) -90°



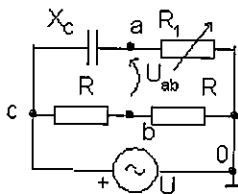
8) Kako se promijeni napon U_{ab} ako se otpor R_1 smanji od $R=X_C$ na nulu?

- A) smanji se na nulu
- B) poveća se na U
- C) ne promijeni se
- D) smanji se od U na $U/2$



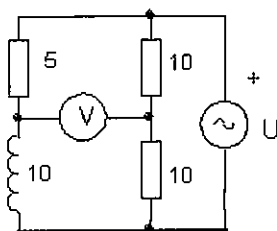
9) Koliki je fazni kut napona U_{ab} u odnosu na napon izvora U ako dođe do prekida u otporu R_1 (R_1 postane beskonačan)?

- A) U_{ab} predhodi za 90°
- B) U_{ab} zaostaje za 90°
- C) U_{ab} je u fazi sa U
- D) U_{ab} je u protufazi sa U



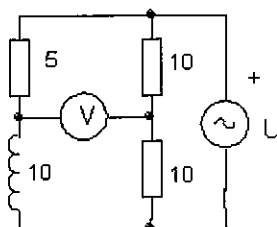
10) Napon izvora je 20 V (efektivno). Koliki napon ćemo izmjeriti voltmetrom?

- A) 20 V
- B) 10 V
- C) 0
- D) 14,1 V
- E) 7,07 V



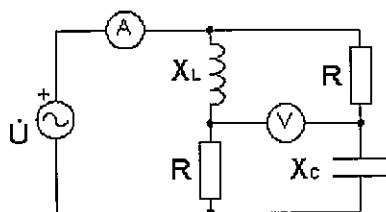
11) Voltmetar pokazuje 10 V. Koliki je napon izvora (efektivno)?

- A) 14,1 V
- B) 10 V
- C) 20 V
- D) 5 V



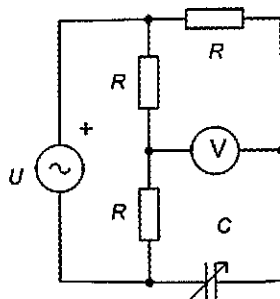
12) Odredite struju kroz ampermetar te napon na voltmetru u spoju prema slici ako je $R = X_L = X_C = 2 \Omega$ i $\underline{U} = 100 \angle 0^\circ$ V.

- A) 0 A
- B) 50 A
- C) 0 V
- D) 50 V
- E) 100 V



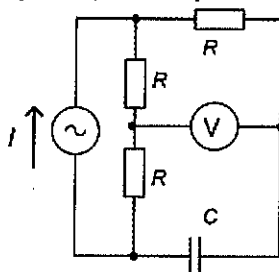
13) Prilikom povećavanja kapaciteta pokazivanje voltmetra:

- A) raste
- B) pada
- C) ne mijenja se
- D) najprije raste, a zatim pada
- E) najprije pada, a zatim raste



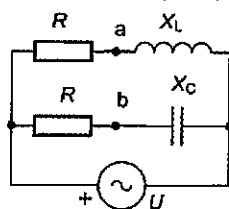
14) Na vrlo velikoj frekvenciji kada je X_C puno manji od R pokazivanje voltmetra je

- A) $I \cdot R/3$
- B) $I \cdot R/6$
- C) $I \cdot R$
- D) $2I \cdot R/3$
- E) nula



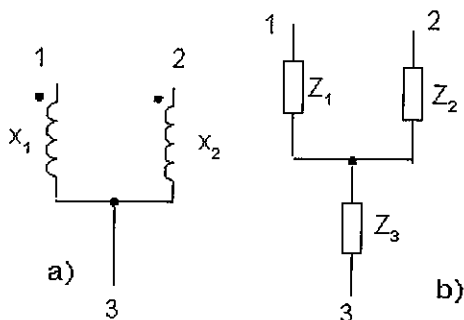
15) U prikazanom krugu je $R=X_L=X_C$. Ako je napon $U=100$ V koliki je napon U_{ab} ?

- A) 0
- B) 100 V
- C) 50 V
- D) 200 V
- E) 25 V



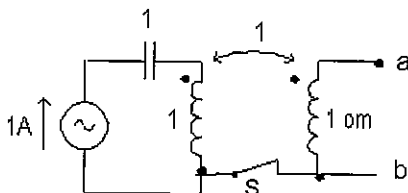
16) Za spoj prema slici a) postoji nadomjesni spoj prema slici b) bez međuinuktivno povezanih elemenata. Koliki su Z_1 , Z_2 i Z_3 u nadomjesnom spoju? Odaberite točne odgovore

- A) $Z_1=X_1-X_M$
- B) $Z_1=X_1+X_M$
- C) $Z_2=X_2+X_M$
- D) $Z_3=X_M$
- E) $Z_3=-X_M$



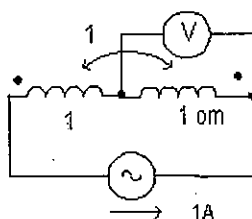
17) Hoće li se i kako promijeniti napon U_{ab} ako otvorimo sklopku S u spoju na slici?

- A) napon se ne mijenja
- B) poraste
- C) smanji se



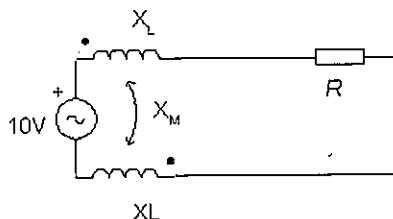
18) Odredite pokazivanje voltmetra.

- A) nula
- B) 1 V
- C) 2 V
- D) 0,7 V
- E) 2 V



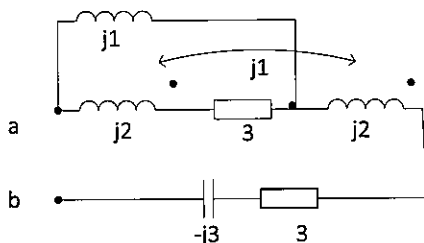
19) Kolika je struja u prikazanom spoju ako je: $R=10\ \Omega$ $X_L=X_M=2,5\ \Omega$?

- A) 1 A
- B) 0,7 A
- C) 2 A
- D) 1,41 A
- E) 0,5 A



20) Kolika je impedancija Z_{ab} ?

- A) $3\ \Omega$
- B) $3+j3\ \Omega$
- C) $6+j3\ \Omega$
- D) $3+j6\ \Omega$
- E) nula



Odgovori na test pitanja IX.

1.D; 2.B; 3.B; 4.C; 5.C; 6.B; 7.E; 8.C; 9.C; 10.B; 11.C; 12.BC; 13.C; 14.A; 15.B;
16.AD, 17.A, 18.A ; 19. B; 20.A

X. POSTUPCI RJEŠAVANJA ELEKTRIČNIH MREŽA

OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

Theveninov teorem kaže da se aktivna linearna el. mreža s dviju točaka može nadomjestiti naponskim modelom realnog izvora. On se naziva Theveninov izvor, a njegovi parametri su *Theveninov napon* \underline{U}_T i *Theveninova impedancija* \underline{Z}_T (ili otpor R_T u krugovima istosmjerne struje).

Theveninov napon \underline{U}_T jednak je *naponu praznog hoda* između točaka s kojih se mreža nadomješta po Theveninu.

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{p.h.}$$

Theveninova impedancija \underline{Z}_T (ili otpor R_T , kod istosmjerne struje) *jednaka je impedanciji (otporu) mreže između točaka s kojih se mreža nadomješta po Theveninu*. Određuje se tako da se izvori zamijene svojim unutarnjim otporima, tj. naponski izvori se zamijene kratkim spojem, a strujni izvori prekidom kruga.

Nortonov teorem kaže da se aktivna linearna el. mreža, razmatrana s dviju točaka, može nadomjestiti strujnim modelom realnog izvora. Taj izvor naziva se Nortonov izvor a parametri su mu *Nortonova struja* \underline{I}_N i *Nortonova impedancija* \underline{Z}_N (ili otpor R_N u krugovima istosmjerne struje).

Nortonova struja \underline{I}_N jednaka je *struji kratkog spoja* između točaka s kojih se mreža nadomješta po Nortonu.

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{k.s.}$$

Nortonova impedancija \underline{Z}_N (ili otpor R_N , kod istosmjerne struje) *jednaka je impedanciji (otporu) mreže između točaka s kojih se mreža nadomješta, pa je jednaka Theveninovo impedanciji (otporu) i jednako se određuje*.

$$\underline{Z}_N = \underline{Z}_T \quad (R_N = R_T)$$

Odnos Theveninova napona i Nortonove struje: Oba teorema predstavljaju el. mrežu s dviju točaka kao realni izvor s naponom praznog hoda (\underline{U}_T) i strujom kratkog spoja (\underline{I}_N) te (kao njihov omjer) unutarnju impedanciju (otpor) $\underline{Z}_T = \underline{Z}_N$ ($R_T = R_N$) pa je njihov odnos određen odnosom parametara naponskog i strujnog modela istog izvora.

$$\underline{U}_T = \underline{I}_N \cdot \underline{Z}_N \quad \underline{I}_N = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T}$$

Metoda napona čvorova je postupak rješavanja mreža kojim se postavlja sustav jednadžbi ovoga oblika u kojima su nepoznanice potencijali čvorova i gdje je:

$$\varphi_i \sum Y_i - \varphi_{i,1} \sum Y_{i,1} - \dots - \varphi_{i,n} \sum Y_{i,n} = \sum_{k.s.} I_{k.s.}$$

- φ_i - potencijal i -tog čvora za koji se piše jednadžba;
- Y_i - admitancije grana spojenih na i -ti čvor (kod istosmjerne struje su vodljivosti G);
- $\varphi_{i,1} \dots \varphi_{i,n}$ - potencijali susjednih čvorova ($i, 1$ do i, n) s kojima i -ti čvor ima zajedničku granu;
- $Y_{i,1} \dots Y_{i,n}$ - admitancije zajedničkih grana i -tog čvora i svakog od susjednih čvorova $i, 1$ do i, n ;
- $I_{k.s.}$ - struje kratkog spoja izvora u granama spojenim u i -ti čvor (zbrajaju se algebarski tako da struje koje idu u čvor imaju +, a one koje idu iz čvora - predznak).

Postupak obuhvaća slijedeće korake:

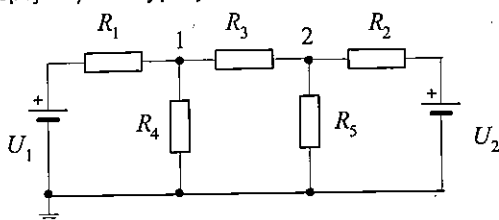
1. Označe se svi čvorovi te odabere čvor referentnog potencijala ($\varphi=0$);
2. Za svaki od preostalih čvorova napiše se ovakva jednadžba;
3. Riješi se sustav (od č-1) jednadžbi i dobiju potencijali svih čvorova;
4. Iz razlike potencijala čvorova (napona) na krajevima pojedine grane te admitancije (otpora) grane, može se izračunati struja svake grane.

Millmanov teorem kaže da je u mreži s dva čvora (A i B) napon između tih dvaju čvorova jednak omjeru zbroja struja kratkog spoja $\underline{I}_{k.s.}$ svih izvora u granama i zbroja admitancija \underline{Y} (ili vodljivosti G) svih grana. Struje kratkog spoja su struje koje bi tekle kroz pojedine grane kad bi čvorove na krajevima grana kratko spojili, a algebarski zbroj ovdje znači da strujama koje bi pritom imale smjer u čvor A dajemo "+", a strujama koje bi imale smjer iz čvora A dajemo predznak "-".

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\sum_{k.s.} I_{k.s.}}{\sum Y}$$

PRIMJERI X.

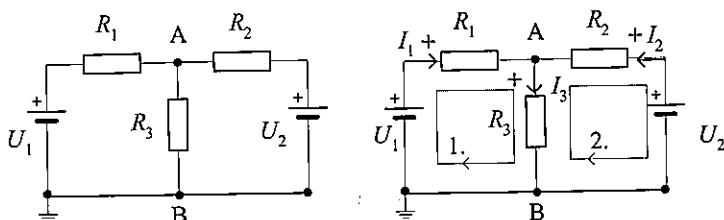
X-P1. Zadana je električna mreža prikazana slikom. a) Odredite broj: grana, čvorova (spojišta) te broj petlji i nezavisnih petlji.



Rješenje: Grana je dio mreže kojim prolazi ista struja. Grana se može sastojati od više serijskih elemenata. U prikazanoj električnoj mreži ima 5 grana. Kod rješavanja mreže struje grana valja označiti i ucrtati ih na shemu (smjer struja se pri tom odabire proizvoljno). Čvor je mjesto u mreži na koje je spojeno 3 ili više grana. U ovom slučaju postoje tri čvora. Jedan od njih označen je kao referentan dok su preostala dva označena brojevima. Petlja obuhvaća više grana (ali nekog čvora kroz mrežu do tog istog čvora) naziva se petlja. Petlja obuhvaća više grana (ali svaku samo jednom). Ovdje ima 6 takvih petlji. Posebno su značajne nezavisne petlje. To su one, koje se od ostalih razlikuju barem za jednu granu (nezavisna petlja mora imati barem jednu «svoju» granu). Ovdje su tri nezavisne petlje, koje se mogu jednostavno prepoznati kao okna ili konture plošno nacrtane mreže.

X-P2. Primjenom jednadžbi Kirchhoffovih zakona odredite struje u granama mreže koja je prikazana na donjoj slici (lijevo).

Zadano je: $R_1 = 6\Omega$ $R_2 = 3\Omega$ $R_3 = 6\Omega$ $U_1 = 24V$ $U_2 = 12V$



Rješenje: Slika (lijevo) prikazuje mrežu s dvije nezavisne konture. Na slici desno su prikazane predradnje koje treba napraviti prije pisanja jednadžbi, a to su: 1. označiti i odabrati smjer struja; 2. označiti polaritet napona na elementima mreže (strana otpornika na koju ulazi struja dobiva oznaku +); 3. označiti petlje te odabrati i označiti smjer obilaženja petlji (obično je to smjer kazaljke na satu). Slijedi pisanje jednadžbi KZS i KZN. Budući da su nepoznate tri veličine (struje), trebaju nam tri jednadžbe. To su:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 && \text{čvor A - KZS (Kirchhoffov zakon za struje)} \\ U_1 - I_1 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_3 &= 0 && \text{petlja 1 - KZN (Kirchhoffov zakon za napone)} \\ -U_2 + I_3 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_2 &= 0 && \text{petlja 2 - KZN (Kirchhoffov zakon za napone)} \end{aligned}$$

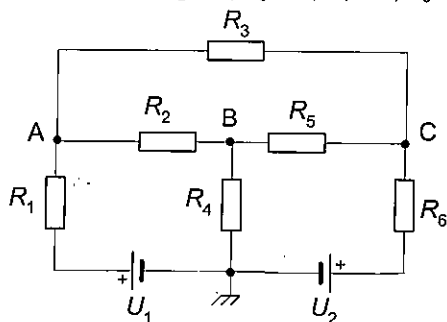
Treba napomenuti da je pravilno napisan sustav jednadžbi osnovni uvjet za dobivanje ispravnog rješenja. Nakon uvrštavanja zadanih podataka slijedi «matematički dio» zadatka, a to je rješavanje sustava n jednadžbi s n nepoznanica (ovdje 3). Postupak prepuštamo čitatelju. Dobivamo $I_2=0$ $I_1=2$ $I_3=2$. Uz zadani skup parametara imamo zanimljivo stanje, gdje kroz granu s otporom R_2 i izvorom U_2 uopće ne teče struja! Taj dio kruga možemo odspojiti, a da se u ostatku kruga ništa ne promijeni. Međutim, promjenom nekog parametra mreže, stanje u mreži će se promijeniti.

Sastavni dio rješavanja zadatka je **provjera dobivenih rezultata** (struja). Točan izračun će zadovoljiti Kirchhoffove zakone (za struje i za napone). Tek nakon provjere, zadatak se može smatrati riješenim!

Napomena: Podsjetimo da se: postupkom superpozicije mreža svodi na mješovite spojeve otpora s jednim izvorom. Time se zaobilazi sustav jednačbi sa više nepoznanica!

X-P3. Metodom napona čvorova odredite struju kroz R_3 u mreži na donjoj slici.

Zadano $R_1=6\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=3\Omega$, $R_4=2\Omega$, $R_5=2\Omega$, $R_6=12\Omega$, $U_1=12V$ i $U_2=24V$.



Rješenje: Mreža ima četiri čvora. Jedan od njih uzimamo za referentan (*uzemljenje ili masa*) i pridajemo mu potencijal 0 V (čvor nultog potencijala). Ostalim čvorovima dali smo oznake A B i C (što je naknadno učinjeno na shemi).

Zamislite da se voltmetar spoji referentnom priključnicom na masu pa se tad naponi čvorova jednostavno izmjere spajanjem druge priključnice voltmetra, redom, na čvorove A, B i C. Iz poznatih napona između čvorova lako bi se mogli izračunati struje i naponi na pojedinim otporima. U teorijskom postupku se, umjesto mjerenja napona, izračunavaju potencijali ostalih čvorova prema referentnom čvoru. Ti se potencijali označavaju grčkim slovom φ s oznakom čvora u indeksu (npr. φ_A je potencijal čvora A). Dobivaju se sljedeće jednačbe, u kojima su nepoznanice potencijali čvorova

$$\varphi_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_B \cdot \frac{1}{R_2} - \varphi_C \cdot \frac{1}{R_3} = \frac{U_1}{R_1} \quad \text{jednačba čvora A}$$

$$-\varphi_A \cdot \frac{1}{R_2} + \varphi_B \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_C \cdot \frac{1}{R_5} = 0 \quad \text{jednačba čvora B}$$

$$-\varphi_A \cdot \frac{1}{R_3} - \varphi_B \cdot \frac{1}{R_5} + \varphi_C \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{U_2}{R_6} \quad \text{jednačba čvora C}$$

Nakon uvrštavanja zadanih podataka dobivamo sustav jednačbi:

$$1 \cdot \varphi_A - 0.5 \cdot \varphi_B - 0.333 \cdot \varphi_C = 2$$

$$-0.5 \cdot \varphi_A + 1.5 \cdot \varphi_B - 0.5 \cdot \varphi_C = 0$$

$$-0.333 \cdot \varphi_A - 0.5 \cdot \varphi_B + 0.917 \cdot \varphi_C = 2$$

Koeficijenti uz nepoznanice ovdje imaju dimenziju električne vodljivosti (simens). Dobivamo sljedeća rješenja za potencijale čvorova:

$$\varphi_A = 6,667 \text{ V} \quad \varphi_B = 4,593 \text{ V} \quad \varphi_C = 7,11 \text{ V}$$

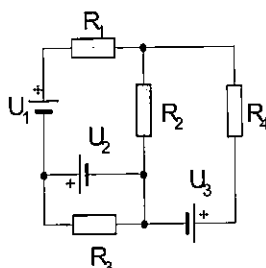
Napon na R_3 je razlika potencijala: $\varphi_C - \varphi_A = U_{CA} = 0,444 \text{ V}$ (plus napona je na C)

Struja kroz R_3 jednaka je $U_{CA}/R_3 = (0,444\text{V})/(3\Omega) = 0,148 \text{ A}$ (smjer od C prema A)

Zaključak: Kod ove metode najprije izračunavamo napone između čvorova, a zatim struje, snage itd. Ova je metoda pogodna u mrežama koje imaju malo čvorova, a puno petlji. Primijeni li se ova metoda u mreži s dva čvora (npr. elektroenergetska mreža s dvije sabirnice) u tom se slučaju ona svodi na *Millmanov teorem*.

X-P4. U mreži prikazanoj na slici Theveninovim teoremom odredite struju kroz otpornik R_2 i pad napona na njegovim krajevima. Koliki bi trebao biti R_2 pa da snaga na njemu bude maksimalna? U čemu je razlika Theveninove i Nortonove metode?

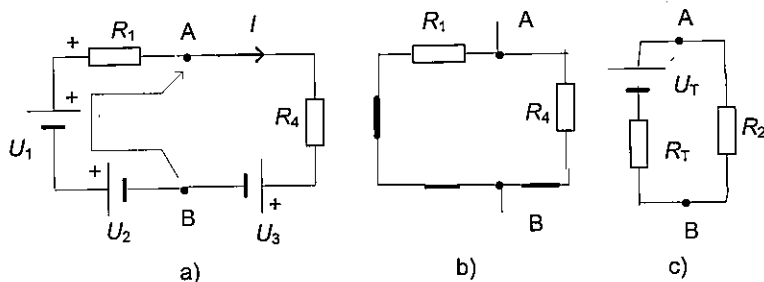
Zadano $R_1=4\Omega$ $R_2=8\Omega$ $R_3=5\Omega$ $R_4=5\Omega$ $U_1=26\text{ V}$
 $U_2=30\text{ V}$ $U_3=14\text{ V}$



Rješenje: Priključnice otpora R_2 označimo (npr. A i B) te taj otpor "izvadimo" iz mreže. U preostaloj mreži izračunamo napon (praznog hoda) koji bi se tada pojavio između točaka A i B (pritom pazimo na polaritet napona). Taj napon predstavlja Theveninov napon.

U našoj, zadanoj mreži odaberemo i označimo neki put od točke B prema A te "zbrojimo" sve napone na tom putu. Naravno da su nam za to potrebne i struje kroz pojedine otpornike.

U ovom zadatku možemo otpornik R_3 zanemariti (paralelno njemu spojen je naponski izvor). Dobijemo konturu u kojoj je struja $I=(U_1+U_2+U_3)/(R_1+R_4)=42/9=4,67\text{ A}$. (slika a).



Krenemo od točke B po označenom putu i dobijemo da je Theveninov napon

$$U_T = U_{AB} = +U_2 + U_1 - I \cdot R_1 = 37,3\text{ V (plus je na A)}.$$

Primjetimo da je Theveninov napon zapravo *napon praznog hoda* koji bi u stvarnoj mreži jednostavno izmjerili voltmetrom.

Za određivanje unutarnjeg otpora Theveninovog nadomjesnog izvora treba „umrtviti“ izvore tako da na mjestu naponskog izvora zamislimo kratki spoj, a na mjestu strujnog zamislimo prekid kruga.

Za preostali spoj otpornika (slika b) odredimo nadomjesni otpor gledano sa priključnica A i B. U ovom slučaju radi se o paralelnom spoju R_1 i R_4 pa dobivamo da je

$R_T = 2,22\Omega$. (taj otpor nazivamo: Theveninov otpor i označavamo sa R_T).

Ovim postupkom smo preostali dio mreže zapravo zamijenili naponskim modelom realnog izvora (s parametrima U_T i R_T). Taj izvor zamjenjuje preostali dio mreže tj. kroz R_2 koji bi priključili na taj izvor prolazila bi ista struja kao u originalnoj mreži. Dakle,

$$I_{R_2} = U_T / (R_T + R_2) = 37,3 / (2,22 + 8) = 3,65\text{ A (slika c). Napon na otporu } R_2 \text{ bit će: } U_{R_2} = I_{R_2} R_2 = 29,2\text{ V}.$$

Ovaj put često je brži nego izračunavanje struje kroz neki element mreže (ovdje R_2) drugim postupcima (za vježbu pokušajte izračunati struju kroz R_2 na neki drugi način) a omogućava nam i dodatne analize vezane uz prijenos energije, na pojedini element mreže, kako slijedi.

Ponekada je važno odrediti otpora trošila uz koji će snaga na njemu biti najveća moguća. To je dakako povezano s prijenosom energije na trošilo kroz neku mrežu.

Ako želimo trošilu prenjeti najveću moguću energiju, potrebno je prilagoditi otpor trošila na mrežu tj. odabrati trošilo koje ima otpor jednak Theveninovom otporu. U ovom zadatku, ako R_2 shvatimo kao trošilo, trebalo bi staviti $R_2 = 2,22 \Omega$, čime bi se osigurao prijenos na taj otpor najveće moguće energije. Napon na R_2 bi uz ovu vrijednost otpora bio jednak polovini Theveninova napona. Za vježbu izračunajte snagu na R_2 kada ima 1Ω ; $2,22 \Omega$ i npr. 4Ω . Skiciramo li graf ovisnosti snage o iznosu R_2 , vidjet ćemo da graf ima maksimum za $R_2 = R_T$.

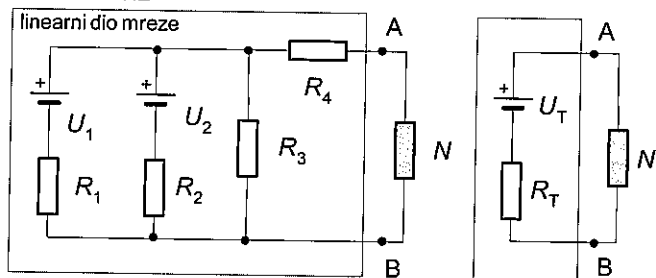
Napomena: Za označavanje Theveninova napona koriste se još i oznake E_T , ili U_{Th} .

Znamo da je svaki realni izvor, osim naponskim modelom (serijski spoj naponskog izvora i otpora) moguće predstaviti i strujnim modelom (paralelni spoj strujnog izvora i otpora). Stoga se ovdje preostali dio mreže može zamijeniti i strujnim modelom realnog izvora (Nortonov teorem). Takav izvor naziva se Nortonov izvor, a metoda određivanja parametara takvog strujnog izvora naziva se Nortonova metoda. Kod ove metode, nakon što smo odstranili neki element (u ovom zadatku R_2) treba priključnice na kojima je bio taj element *kratko spojiti* i zatim izračunati struju kroz taj kratki spoj. To je tzv. Nortonova struja I_N . Nortonov otpor R_N određujemo jednakim postupkom kao i Theveninov otpor. Za vježbu odredite parametre nadomjesnog Nortonovog izvora s priključnica otpornika R_2 . (rezultat $R_N = 2,22 \Omega$ $I_N = 16,8 \text{ A}$).

X-P5. Ako je poznato da je napon na nelinearnom elementu u spoju prema slici jednak U_{NE} odredite struje kroz otpore R_1 , R_2 , R_3 i R_4 .

Zadano $U_1 = 1.2 \text{ V}$ $U_2 = 1.2 \text{ V}$ $R_1 = 0.8 \Omega$ $R_2 = 0.8 \Omega$

$R_3 = 6 \Omega$ $R_4 = 1.5 \Omega$ $U_{NE} = 0.5 \text{ V}$



Rješenje:

Mreža koja sadrži nelinearni element može se podijeliti u dva dijela (lijeva slika). Linearni dio mreže može se zamijeniti Theveninovim izvorom kako je prikazano na desnoj slici.

Parametre tog izvora odredimo tako da nelinearni element odspojimo i zatim izračunamo napon koji se pojavi između točaka A i B (*napon praznog hoda*). Otpor R_4 nema utjecaja na taj napon, jer kroz njega ne prolazi nikakva struja. Tu možemo koristiti Millmanovu formulu

$$U_{AB} = \frac{\left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad U_{AB} = 1.125 \text{ V} \quad U_T = U_{AB}$$

Theveninov otpor dobivamo tako da izračunamo nadomjesni otpor sa stezaljki A i B, mješovitog spoja koji dobijemo kada umjesto naponskih izvora postavimo kratkospojnike.

$$R_T = R_4 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad R_T = 1.875 \Omega$$

Sada idemo unatrag preko Thevenenovog spoja: Ako je napon na nelinearnom elementu U_{NE} poznat (npr. izmjeren) tada je pad napona na R_T (slika desno)

$$U_{RT} = U_T - U_{NE} \quad U_{RT} = 0.625 \text{ V}$$

Time je struja u krugu na desnoj slici (to je struja kroz nelinearni element) jednaka

$$I_{NE} = \frac{U_{RT}}{R_T} \quad I_{NE} = 0.333 \text{ A}$$

Tome je jednaka i struja kroz R_4 na lijevoj slici (vraćamo se u polazni spoj) $I_{R4} = I_{NE}$

Napon na R_4 je $U_{R4} = I_{R4} R_4 \quad U_{R4} = 0.5 \text{ V}$

Prema Kirchhoffovom zakonu za napone, napon na R_3 jednak je zbroju napona na R_4 i napona na nelinearnom elementu:

$$U_{R3} = U_{NE} + U_{R4} \quad U_{R3} = 1 \text{ V}$$

Struja kroz R_3 je $I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} \quad I_{R3} = 0.167 \text{ A}$

napon između točaka C i B jednak je naponu na otporniku R_3

$$U_{CB} = U_{R3}$$

napon na R_1 jednak je

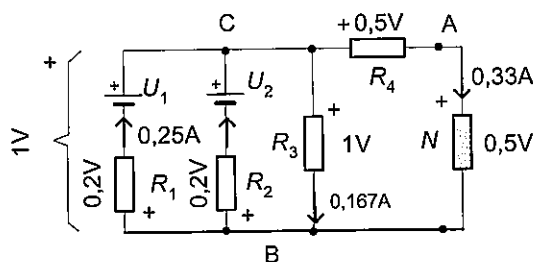
$$U_{R1} = U_1 - U_{CB} \quad U_{R1} = 0.2 \text{ V}$$

struja kroz R_1 je prema Ohmovom zakonu $I_{R1} = \frac{U_{R1}}{R_1} \quad I_{R1} = 0.25 \text{ A}$

napon na R_2 jednak je $U_{R2} = U_2 - U_{CB} \quad U_{R2} = 0.2 \text{ V}$

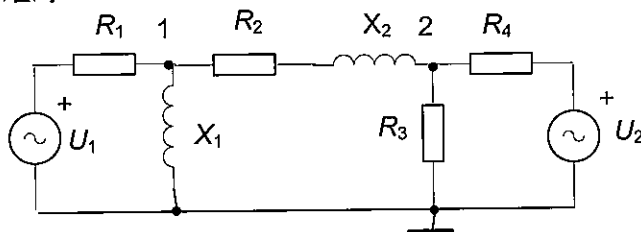
struja kroz R_2 je $I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} \quad I_{R2} = 0.25 \text{ A}$

Sve izračunate veličine su prikazane na slici:



Povjera Kirchhoffovog zakona
za struje u čvoru C:
 $I_{R1} + I_{R2} - I_{R3} - I_{NE} = 0 \text{ A}$
(zadovoljava!)

X-P6. U mreži na slici izračunajte struje kroz pojedine grane. Koristite metodu napona čvorova. Naponi izvora su u fazi (uzmite da je početni fazni kut za oba napona izvora nula). Zadano: $R_1=5 \Omega$, $X_1=j5 \Omega$, $R_2=2 \Omega$, $R_3=6 \Omega$, $R_4=4 \Omega$, $X_2=j3 \Omega$, $U_1=30 \text{ V}$ i $U_2=20 \text{ V}$.



Rješenje:

Postupci rješavanja mreža izmjenične struje iste su kao kod istosmjernih struja s tim da se rješavanje ovdje obavlja u kompleksnom području..

Potrebno je dakle u kompleksnom području (pomoću fazora i kompleksnih impedancija-admitancija) napisati sustav jednažbi za napone čvorova.. Nepoznanice su potencijali (naponi) čvorova.

Jednažbe se zatim rješavaju uobičajenim postupcima (npr.determinantama/matricama, supstitucijom, računalnim programima itd.). Koeficijenti u jednažbama su kompleksni brojevi.

(kad izračunamo napone i struje, možemo izračunati i snage na elementima mreže)

U zadanoj mreži imamo tri čvora, od kojih je jedan referentni. Treba je napisati jednažbe za čvorove označene s 1 i 2.

$$\text{Čvor 1} \quad \underline{\varphi}_1 \cdot (1/R_1 + 1/\underline{X}_1 + 1/(R_2 + \underline{X}_2)) - \underline{\varphi}_2 \cdot 1/(R_2 + \underline{X}_2) = \underline{U}_1/R_1$$

$$\text{Čvor 2} \quad -\underline{\varphi}_1 \cdot 1/(R_2 + \underline{X}_2) + \underline{\varphi}_2 \cdot (1/R_3 + 1/R_4 + 1/(R_2 + \underline{X}_2)) = \underline{U}_2/R_4$$

Rješavanjem ovog sustava jednažbi dobijemo fazore potencijala $\underline{\varphi}_1$ i $\underline{\varphi}_2$:

$$\underline{\varphi}_1 = 14,48 - 8,89j \text{ V}; \quad \underline{\varphi}_2 = 15,18 + 2,63j \text{ V}.$$

Pomoću njih izračunamo struje kroz pojedine elemente npr. $I_{R3} = \underline{\varphi}_2 / R_3$. Za granu u kojoj je naponski izvor, struju računamo ovako: u crtamo referentni smjer te struje npr. neka to za struju kroz R_4 bude smjer "udesno". Referentni plus za napon na R_4 je na lijevoj priključnici.

Sada je $\underline{\varphi}_2 = +\underline{U} + I_{R4} \cdot R_4$ pa je $I_{R4} = (\underline{\varphi}_2 - \underline{U}) / R_4$.

Tako dobivamo (efektivne vrijednosti struja):

$$I_{R1} = 3,58 \text{ A}; \quad I_{R2} = I_{X2} = 1,73 \text{ A}; \quad I_{R4} = 1,38 \text{ A}; \quad I_{R3} = 2,57 \text{ A}; \quad I_{X1} = 3,4 \text{ A}.$$

X-P7. Izračunajte snage na pojedinim elementima mreže iz prethodnog zadatka, a zatim ukupnu radnu i reaktivnu (jalovu) snagu.

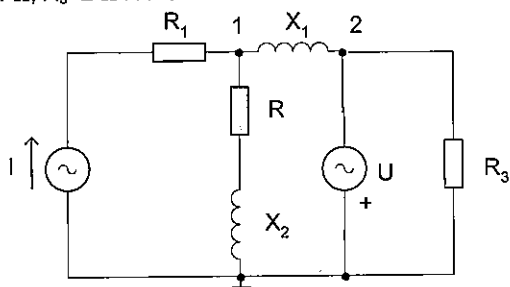
Rješenje : Izračunamo snage na pasivnim elementima i zbrojimo ih. Dobivmo ukupnu radnu snagu $P_{uk} = 117,2 \text{ W}$ i reaktivnu snagu $Q_{uk} = 66,76 \text{ VAR ind.}$ Kod reaktivne snage vodimo računa da je induktivna pozitivna, a kapacitivna negativna. Za kontrolu "balansa" snaga potrebno je izračunati snage izvora. Dobiva se da prvi izvor daje $93,1 \text{ W}$ a drugi $24,1 \text{ W}$. Reaktivnu snagu izvori "pokrivaju" ovako: prvi izvor ima $53,3 \text{ VAR kap.}$ a drugi $13,4 \text{ VAR kap.}$ Algebarski zbroj snaga je nula. U algebarski zbroj snage koju daju izvori ulaze sa negativnim predznakom.

X-P8. U spoju prema slici iz primjera P6 otpornik R_2 je promjenjiv. Treba odrediti iznos otpora R_2 uz koji će snaga na R_2 biti maksimalna kao i iznos te snage.

Rješenje: Ovakvi problemi rješavaju se primjenom Theveninovog (Nortonovog) teorema. Mreža se podijeli u dva dijela. Otpornik R_2 se "izvadi" a preostali dio mreže se zamijeni sa naponskim (Theveninovim) ili strujnim (Nortonovim) izvorom. Za postizanje maksimuma mora biti $R = |Z_{th}|$. Dobiva se: $R_2 = 7,366 \Omega$ $P_{max} = 9,54 \text{ W}$

Napomena Ako umjesto radnog otpora imamo kao trošilo priključenu promjenjivu impedanciju tada mora biti $Z_{trošila} = Z_{th}^*$ (konjugirano kompleksno). Postupak izračunavanja parametara nadomjesnog Theveninovog (Nortonovog) spoja je u načelu jednak kao onaj koji smo primjenjivali kod istosmjernih mreža, ali se sve računa u kompleksnom području.

X-P9. Izračunajte koristeći metodu napona čvorova snagu na otporniku R u mreži prema slici. Rezultat provjerite a) postupkom superpozicije b) Thevenenovom metodom
 Zadano: $i = 10\sqrt{2}\sin(\omega t)$ A, $u = 50\sqrt{2}\sin(\omega t)$ V
 $R_1 = 5 \Omega$, $X_1 = 5 \Omega$, $X_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$ i $R = 3 \Omega$.



Rješenje:

Kod primjene metode čvorova moramo napisati odgovarajući sustav jednačbi u kojemu su nepoznanice potencijali (naponi) čvorova prema referentnom čvoru.

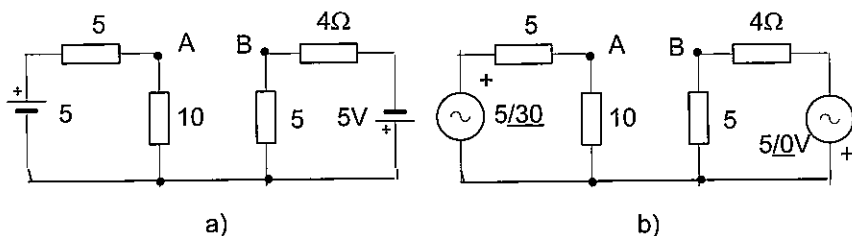
Pažnja: element u seriji sa strujnim izvorom kao i onaj paralelan naponskom izvoru ne ulazi u jednačbe. U prikazanoj mreži je potencijal čvora 2 zapravo poznat $\varphi_2 = -U$ (pogledajte sliku).

Jednačba za čvor 1 bila bi: $\varphi_1 \cdot (1/X_1 + 1/(R+X_2)) - \varphi_2 \cdot 1/X_1 = +i$

Nakon izračunavanja φ_1 dobivamo da je struja $I_R = \varphi_1/(R+X_2) = 3,33 + j6,66$ A (smjer "dolje").

Iz poznate struje računa se snaga $P_R = I_R^2 R = 166,66$ W

X-P10. Odredite parametre Theveninovog nadomjesnog izvora sa stezaljki A i B za spoj prikazan na slici a (istosmjerna mreža) i b (izmjenična mreža).



Rješenje:

Mreže na slikama a) i b) jednako su građene tj. imaju istu topološku strukturu. Razlika je u pobudi (izvorima). Budući da su ostali elementi u granama jednaki bit će Theveninov otpor $5,55 \Omega$ u istosmjernoj mreži jednak kao Theveninova impedancija u izmjeničnoj $5,55/0 \Omega$.

a) Izračunamo struje u konturama, a zatim napone na "okomitim" otpornicima. Pazimo na smjer struja. $I_1 = 5/15$ A (smjer kazaljke na satu) $I_2 = 5/9$ A (smjer kazaljke na satu)
 $U_{AB} = +5 \cdot I_2 + 10 \cdot I_1 = 6,11$ V (+ na A)

b) ovdje su struje $I_1 = 5/30 / 15/0$ A; $I_2 = 5/0 / 9/0$ A
 Napon $U_{AB} = I_2 \cdot 5/0 + I_1 \cdot 10/0 = 5,9 / 16,4^0$ V

ZADACI X

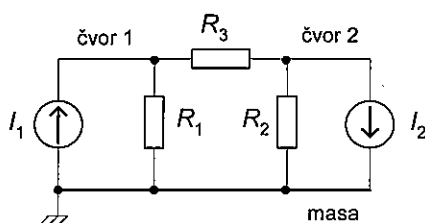
X-1. Izračunajte potencijale čvorova 1 i 2 u spoju na slici desno. Koristite metodu napona čvorova. Koliki je napon U_{12} te kolika struja prolazi kroz R_3 ?

Zadano $R_1 = 2\Omega$ $R_2 = 6\Omega$ $R_3 = 12\Omega$

$I_1 = 4A$ $I_2 = 2A$

Rezultat: $\varphi_1 = 6V$, a $\varphi_2 = -6V$

$I_3 = 1A$ (smjer od čvora 1)



X-2. Odredite struje u granama prikazane mreže a) izravnom primjenom Kirchhoffovih zakona b) pomoću Millmanova teorema.

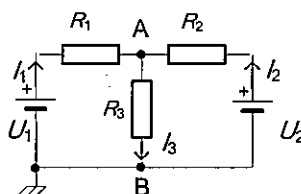
Zadano je: $R_1 = 3\Omega$; $R_2 = 3\Omega$; $R_3 = 6\Omega$;

$U_1 = 24V$; $U_2 = 12V$.

Rezultat: $I_1 = 3,2A$; $I_2 = -0,8A$; $I_3 = 2,4A$.

Uputa (Millman): Prvo izračunamo $U_{AB} = 14,4V$.

Pitanje: Koji vam je postupak jednostavniji?



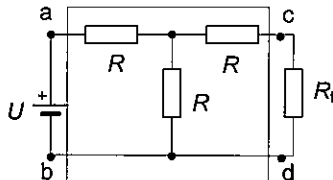
X-3. Na priključnice a i b spojen je (ulazni) napon U . Izračunajte (izlazni) napon na priključnicama trošila, tj. napon između točaka c i d. Koji je odnos tih napona $U_{cd}/U_{ab} = ?$

Zadatak pokušajte riješiti na tri načina: 1. Kao mješoviti spoj otpornika 2. Pomoću Theveninova teorema. 3. Pomoću Nortonova teorema.

Zadano $U = 12V$, $R_1 = 100\Omega$, $R = 57,735\Omega$

Rezultat: Odnos napona je 0,268

Samo 26,8 % ulaznog napona se pojavi na izlazu.

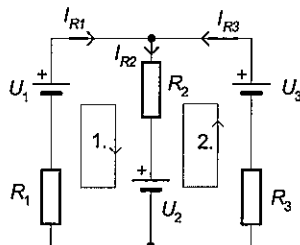


X-4. Odredite struje grana na ove načine a) izravnom primjenom Kirchhoffovih zakona. (jednadžbe treba napisati u skladu s označenim smjerom obilaženja kontura) b) metodom napona čvorova (Millman) c) superpozicijom.

Zadano: $R_1 = 16\Omega$ $R_2 = 4\Omega$ $R_3 = 24\Omega$

$U_1 = 72V$ $U_2 = 8V$ $U_3 = 48V$

Rezultat: $I_{R1} = 3A$ $I_{R2} = 4A$ $I_{R3} = 1A$

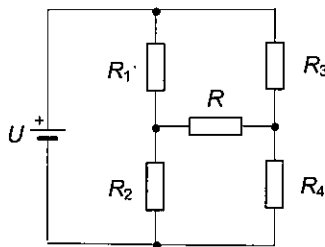


X-5. U prikazanom mostnom spoju izračunajte struju kroz otpor R u dijagonali mosta. Kolika bi bila struja kroz dijagonalu mosta kada bi taj otpor bio jednak nuli? Koliki treba biti R_1 da bi struja kroz otpor R bila jednaka nuli? Primijenite Theveninovu ili Nortonovu metodu.

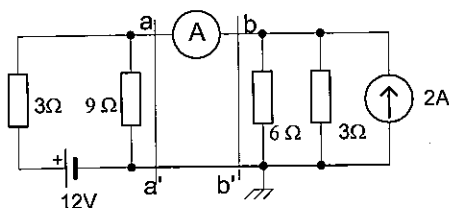
Zadano: $U = 72V$ $R = 5\Omega$ $R_1 = 6\Omega$ $R_2 = 3\Omega$

$R_3 = 12\Omega$ $R_4 = 4\Omega$

Rezultat: $I_R = 0,6A$, $I_0 = 1,2A$ $R_1 = 9\Omega$



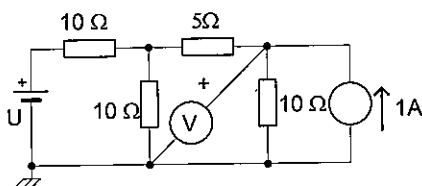
X-6. U prikazanom spoju elemenata odredite struju koju mjeri ampermetar a) Thevenenovom metodom tako da spoj podijelite po presjeku aa' i bb'. b) Millmanovom metodom. Koliki je potencijal lijeve i desne stezaljke ampermetra (pretpostavite $R_a=0$)?



Rezultat: $I_A=1,176\text{ A}$,
(ako je R_a jednak nuli (idealan ampermetar) potencijal obje točke (a i b) je 6,353 V)

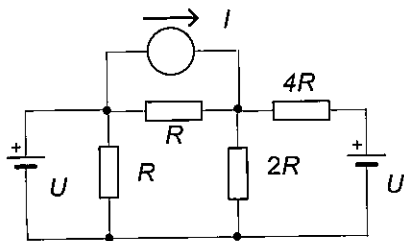
X-7. Koliki je napon izvora u spoju na slici, ako voltmetar pokazuje $U_v=15\text{ V}$ označenog polariteta?

Rezultat: 40 V



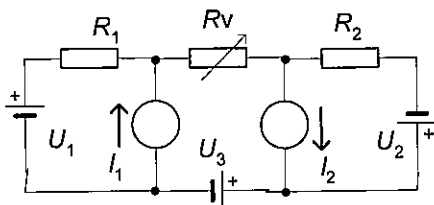
X-8. Odredite napon na otporniku $2R$ u prikazanom spoju. Zadano je $R=5\ \Omega$, $I=2\text{ A}$, $U=20\text{ V}$. Koliki je taj napon ako se promijeni smjer struje strujnog izvora?

Rezultat: 20 V, 8.57 V

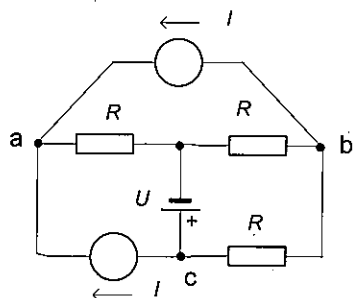


X-9. Odredite maksimalnu snagu na otporniku R_v . Zadano je: $R_1=20\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $U_1=U_3=20\text{ V}$, $U_2=30\text{ V}$, $I_1=I_2=1\text{ A}$.

Rezultat: 30 W



X-10. Prikazani spoj elemenata nadomjestiti prema a) Thevenenovom b) Nortonovom teoremu sa točaka a i c kao i između točaka b i c. $U=1\text{ V}$ $R=1\ \Omega$ $I=1\text{ A}$.



Rezultat:
između točaka a i c: $U_T=1\text{ V}$ (+na a)

$$R_T=R_N=1\ \Omega \quad I_N=1\text{ A}$$

Između točaka b i c: $U_T=1\text{ V}$ (+na c)

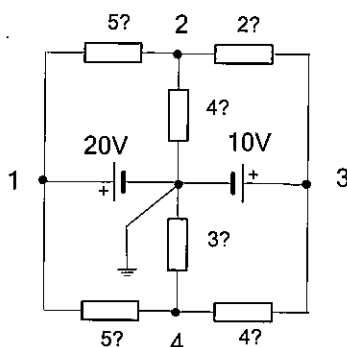
$$R_T=R_N=0,5\ \Omega \quad I_N=2\text{ A}$$

Pitanje Kolika će biti struja kroz otpor od $1\ \Omega$, ako ga spojimo između točaka a i c? ($0,5\text{ A}$)

X-11. Odredite potencijale čvorova 1,2,3 i 4 u spoju na slici, a zatim izračunajte napone na svim otpornicima "vanjske" konture. Provjerite rezultat preko KZN.

Rezultat

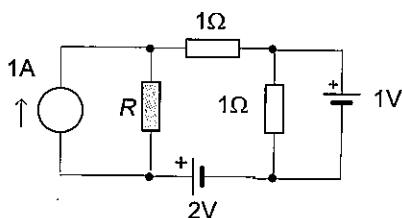
potencijali: 20 V ; $9,47\text{ V}$; 10 V ; $8,3\text{ V}$,
(zbroj napona u konturi mora biti nula!)



X-12. Izračunajte struju kroz otpornik $R=1\ \Omega$ u spoju na slici. Kolika je ta struja ako strujni izvor promijeni smjer struje?

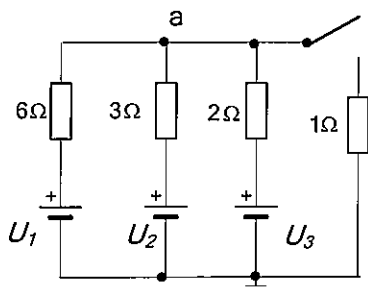
Rezultat : nula, 1 A

Uputa: otpornik paralelno spojen naponskom izvoru treba zanemariti. Strujni izvor i paralelno spojen otpornik R zamijeniti s naponskim izvorom u seriji sa R . Izračunati struju u dobivenoj konturi. "Vratiti se" u polaznu shemu i Kirchhoffovim zakonom za struju izračunati struju kroz R .



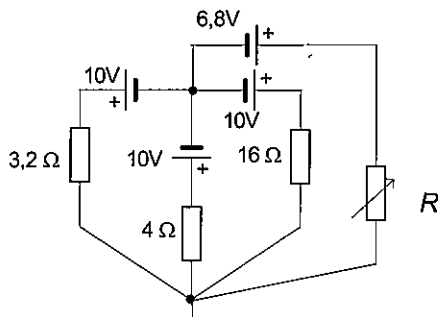
X-13. Izračunajte potencijal točke a prije i poslije zatvaranja sklopke. Zadano je $U_1=U_2=U_3=10\text{ V}$.

Rezultat 10 V; 5 V



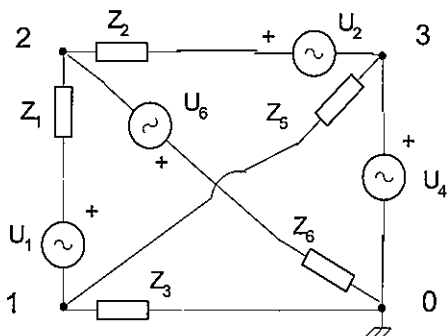
X-14. Izračunajte otpor R spoju na slici desno, uz koji će snaga na njemu biti najveća moguća. Kolika je ta snaga?

Rezultat: 1,6 Ω ; 1,6 W



X-15. U mreži prema slici izračunajte potencijale čvorova, a zatim struju kroz granu sa Z_1 .

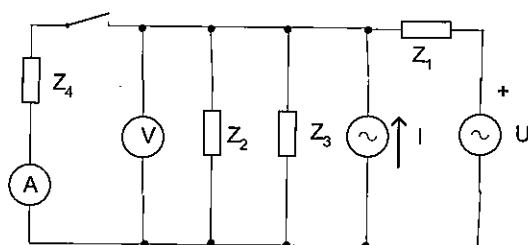
Zadano: $\underline{U}_1=4\text{ V}$; $\underline{U}_2=j8\text{ V}$; $\underline{U}_4=4-j4\text{ V}$; $\underline{U}_6=-j4\text{ V}$; $Z_1=1+j\ \Omega$; $Z_2=j2\ \Omega$; $Z_3=1\ \Omega$; $Z_5=j\ \Omega$; $Z_6=j2\ \Omega$.



Rezultat: $\underline{u}_1=-1-3j\text{ V}$; $\underline{u}_2=1-j\text{ V}$; $\underline{I}_1=j2\text{ A}$; $\underline{I}_1=2\text{ A}$; $i_1(t)=2\sqrt{2}\sin(\omega t+\pi/2)$

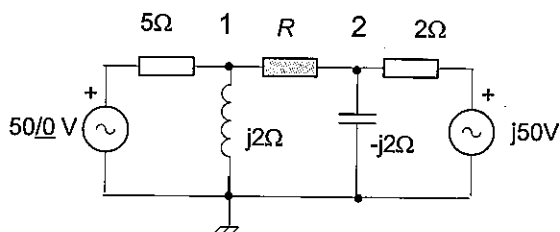
X-16. U mreži prikazanoj na slici, uz otvorenu sklopku voltmetar pokazuje $U_v=10$ V. Odredite struju kroz ampermetar i pokazivanje voltmetra nakon zatvaranja sklopke.

Zadano: $Z_1=2+j2 \Omega$, $Z_2=2-j2 \Omega$, $Z_3=2 \Omega$, $Z_4=1+j2 \Omega$



Rezultat: $I_A=3,54$ A; $U_v=7,93$ V. Uputa: koristite Theveninov teorem

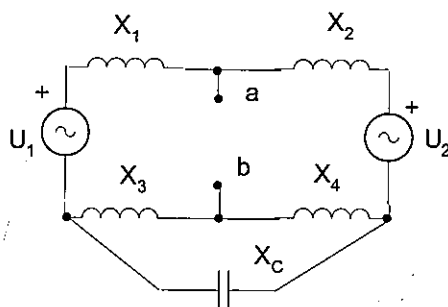
X-17. Izračunajte struju kroz otpor $R=4 \Omega$. Koristite postupke: a) napone čvorova b) superpoziciju i c) Theveninov teorem.



Rezultat: 3,4 A

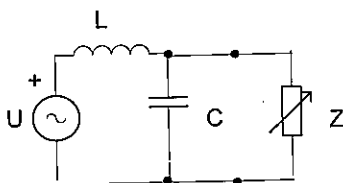
X-18. Mrežu prema slici nadomjestite prema Nortonovom teoremu s točaka a i b. Kolika struja bi tekla kroz otpornik $R=20 \Omega$ koji priključimo između tih točaka?

Zadano: $X_1=X_4=20$, $X_3=40$, $X_2=10$, $X_C=30 \Omega$, $U_1=10$ V (početni fazni kut 0) $U_2=10$ V (početni fazni kut $+90^\circ$).



Rezultat : $Z_N=j20 \Omega$ $I_N=0,371\angle-26,5^\circ$; 0,26 A

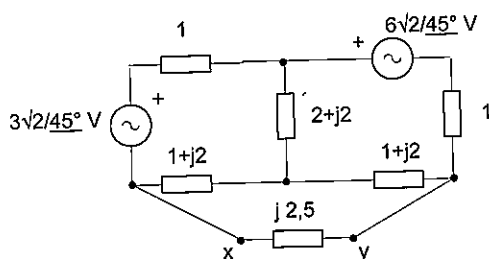
X-19. Izračunajte iznose kapaciteta kondenzatora i induktiviteta zavojnice (zanemarivog omskog otpora) koje treba uključiti u spoj prema slici, pa da struja kroz impedanciju Z bude neovisna o njenom iznosu i jednaka 0,1 A. Napon izvora je $U=120$ V $f=50$ Hz. Da li su dozvoljene vrijednosti impedancije nula odnosno beskonačno?



Rezultat: 2,65 μ F; 3,82 H Beskonačni Z (prekid kruga) nije dozvoljen (serijska rezonancija).
Uputa primijenite Nortonov teorem..

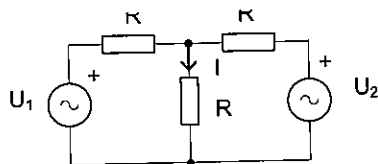
X-20. Izračunajte iznos napona između točaka x i y u spoju na slici.

Rezultat: 2,5 V



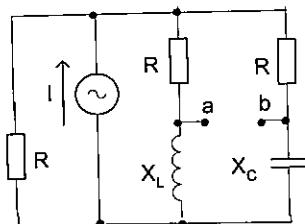
X-21. U spoju prema slici uz $U_1=U_2$ i struja $I=1$ A. Kolika je struja I ako napon U_1 smanjimo na polovinu prvotne vrijednosti?

Rezultat: 0,75 A



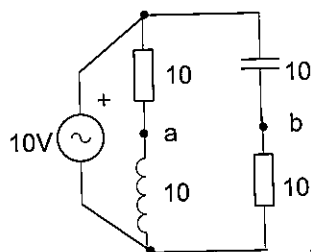
X-22. U spoju prema slici je $R=X_L=X_C$. $I=1$ A. Kolika je Nortonova struja između točak a i b ?

Rezultat: 1 A



X-23. Koliki su Thevenenov napon i impedancija između točaka a i b u spoju na slici desno?

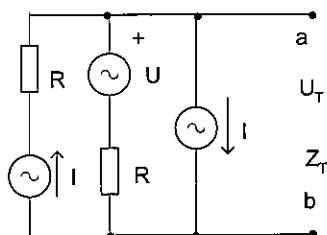
Rezultat: 0V; 10 Ω



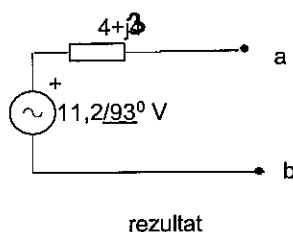
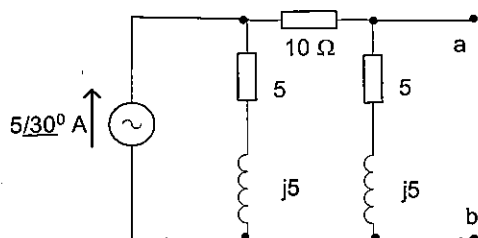
X-24. Odredite elemente nadomjesnog Theveninovog izvora za mrežu na slici ako je $R=1\ \Omega$, $I=1\text{ A}$, $U=1\text{ V}$

Rezultat: $U_T=1\text{ V}$; $Z_T=1\ \Omega$

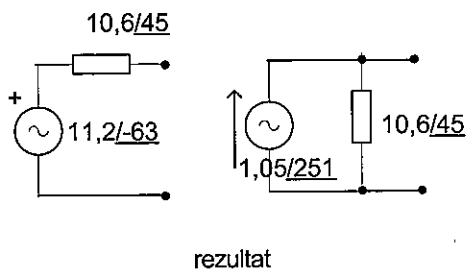
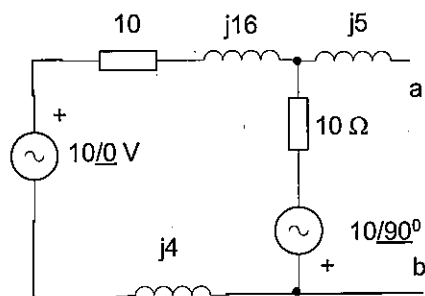
Pitanje: Koliki su U_T i Z_T ako desni strujni izvor promijeni smjer struje? Odg. $Z_T=1\ \Omega$, $U_T=3\text{ V}$



X-25. Odredite parametre Theveninovog nadomjesnog izvora s priključnica a i b.



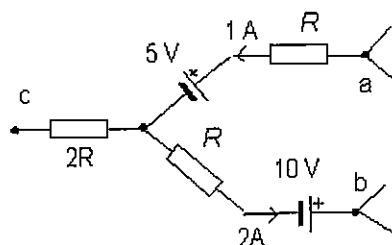
X-26. Odredite parametre nadomjesnog izvora s priključnica a i b po Theveninu, a zatim po Nortonu.



TEST PITANJA X.

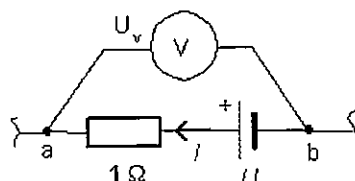
- 1) Na slici je prikazan dio istosmjerne mreže. Koliki je napon između čvorova a i b (U_{ab} ?) ako je $R=5\Omega$.

- A) 10 V
B) 20 V
C) -20 V
D) -10 V
E) -30V



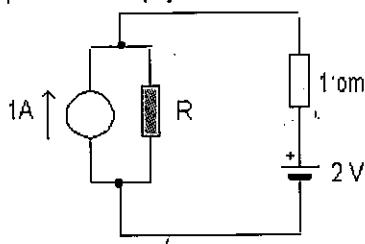
- 2) Ako je u prikazanom dijelu strujnog kruga (grani mreže)) napon $U=1\text{ V}$; $I=1\text{ A}$, koliko pokazuje voltmetar?

- A) 1 V + na a
B) nula
C) 2 V +na a
D) 1 V - na a
E) 2 V - na a



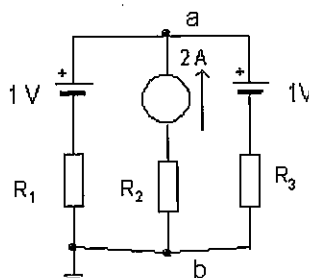
- 3) Kolika je struja kroz otpornik $R=1\Omega$ u prikazanom spoju?

- A) nula
B) 0,5 A
C) 1 A
D) 1,5 A
E) 2 A



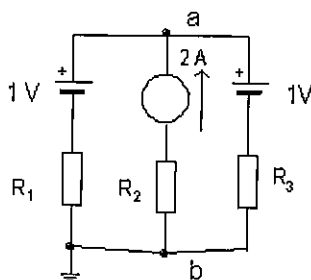
- 4) Koliki je napon U_{ab} ako su otpori $R_1=R_2=R_3=1\Omega$?

- A) nula
B) 1 V
C) 2 V
D) 3 V
E) -1 V



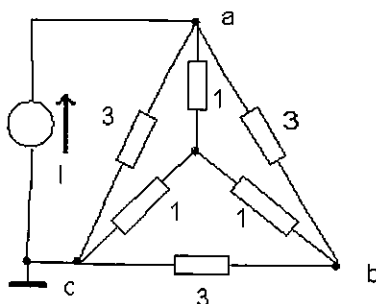
5) Kolika je struja kroz $R_1 = 2 \Omega$ ako je $U_{ab} = +2V$?

- A) nula
- B) 0,5 A, smjer prema dolje
- C) 0,5 A, smjer prema gore
- D) 2 A, smjer prema dolje
- E) 2 A smjer prema gore



6) Koliki je potencijal točke a ako je struja $I = 1 A$?

- A) 3 V
- B) 2 V
- C) 1 V
- D) nula



7) Prilikom određivanja Theveninovog otpora treba sa izvorima postupiti ovako:

- A) strujne zamijeniti kratkim spojem
- B) naponske odspojiti
- C) strujne odspojiti
- D) naponske zamijeniti kratkim spojem

8) Thevenenov nadomjesni spoj (u mreži istosmjerne struje) sastoji se od:

- A) naponskog izvora u paraleli s otpornikom
- B) naponskog izvora u seriji s otpornikom
- C) strujnog izvora u seriju s otpornikom
- D) strujnog izvora u paraleli s otpornikom

9) Na aktivnu mrežu (istosmjerne struje) spojen je promjenjivi otpor. Najveća snaga na tom otporu bit će ako je otpor:

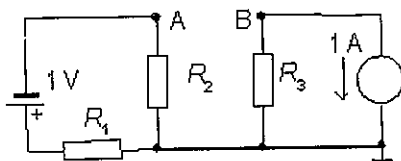
- A) jednak Theveninovom otporu
- B) manji od Theveninovog otpora
- C) veći od Theveninovog otpora

10) Što od navedenog treba učiniti s izvorima prilikom određivanja Nortonovog otpora :

- A) strujne zamijeniti kratkim spojem
- B) naponske odspojiti
- C) strujne odspojiti
- D) sve izvore zamijeniti kratkim spojem
- E) naponske zamijeniti kratkim spojem

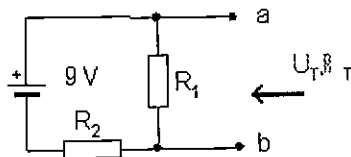
11) Svi su otpori jednaki $R=1\ \Omega$. Koliki je napon U_{AB} ?

- A) 1,0 V
- B) 0,5 V (+ na A)
- C) nula
- D) -0,5 V
- E) -1,0 V



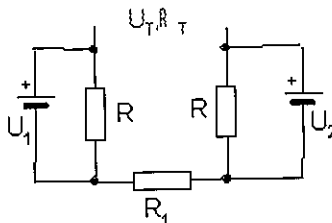
12) Koliki su R_T i U_T ako je $R_1=6\ \Omega$ i $R_2=3\ \Omega$?

- A) 6 V, 9 Ω
- B) 6 V, 2 Ω
- C) 3 V, 2 Ω
- D) 3 V, 9 Ω
- E) 6 V, 6 Ω



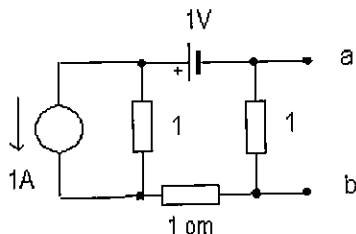
13) Koliki je Theveninov napon ako je $U_1=10\text{ V}$, $U_2=5\text{ V}$ i $R=10\ \Omega$?

- A) nula
- B) 15 V
- C) 5 V
- D) nema dovoljno podataka
- E) 10 V



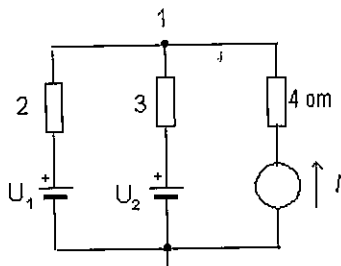
14) Koliki su Theveninov otpor i napon gledano sa točaka a i b?

- A) $U_T=2\text{ V}$
- B) $U_T=2/3\text{ V}$
- C) $U_T=0\text{ V}$
- D) $R_T=1\ \Omega$
- E) $R_T=2/3\ \Omega$



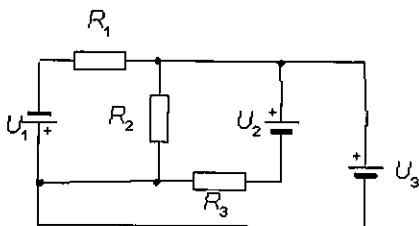
15) Potencijal točke 1 iznosi 10 V. Koliki će biti taj potencijal ako sve otpornike povećamo 10 puta?

- A) 10 V
- B) 100 V
- C) 1 V
- D) nema dovoljno podataka



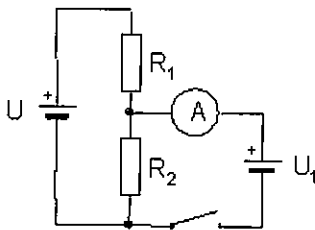
- 16) U prikazanom spoju svi izvori imaju napon od 10 V, a otpori otpor od 10 Ω .
Kolika je struja kroz R_3 ?

- A) nula
B) 1 A
C) 2 A
D) 3 A
E) 1,5 A



- 17) U prikazanom spoju je $R_1=3R_2$. Koliki treba biti napon U_1 pa da nakon zatvaranja sklopke struja ampermetra bude jednaka nuli?

- A) $U_1=0,25 U$
B) $U_1=U$
C) $U_1=0$
D) $U_1=0,66 U$
E) $U_1=0,75 U$

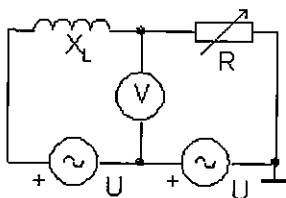


- 18) Na stezaljke mreže nadomještene po Thevenenu priključimo otpornik $R_1=1 \Omega$, a nakon toga otpornik $R_2=4 \Omega$. Snaga na priključenom otporniku je u oba slučaja bila jednaka. Koliki je Thevenenov otpor R_T ?

- A) nema dovoljno podataka
B) 2 Ω
C) 1 Ω
D) 4 Ω
E) nula

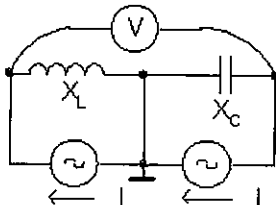
- 19) Koliki je napon voltmetra ako je $\underline{U}=10 \angle 0^\circ$. $R=X_L$?

- A) 10 V
B) 20 V
C) nula
D) 14,1
E) 7,07 V



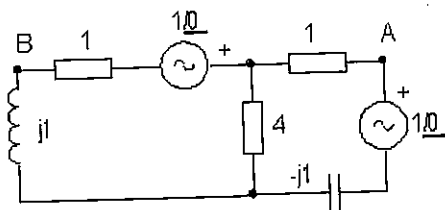
- 20) Struja $I=1$ A (efektivno), $X_C=X_L=1 \Omega$. Koliko pokazuje voltmetar (efektivno)?

- A) nula V
B) 1,41 V
C) 2 V
D) 0,707 V
E) 2,82 V



21) Odredite napon U_{AB} :

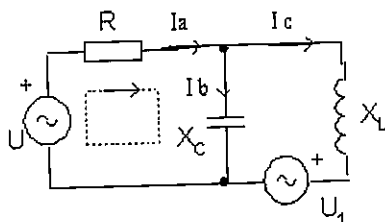
- A) $-0,5-0,1j$
 B) $0,5+0,1j$
 C) $-1-0,2j$
 D) $1+0,2j$
 E) $1-0,1j$ V

22) Kolika je kompleksna vodljivost grane električne mreže koja se sastoji od serijskog spoja strujnog izvora i induktivnog otpora $\underline{X}_L=j12 \Omega$

- A) $j12$
 B) $1/j12$
 C) ∞
 D) 0
 E) $j/12$

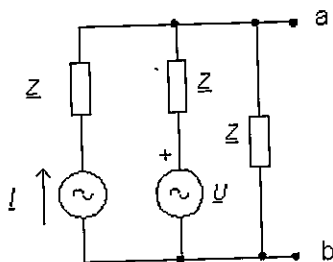
23) Koja od napisanih jednadžbi odgovara za označenu konturu?

- A) $\underline{U} - \underline{I}_a \cdot R - \underline{I}_b \cdot \underline{X}_C = 0$
 B) $\underline{U} + \underline{I}_a \cdot R + \underline{I}_b \cdot \underline{X}_C = 0$
 C) $\underline{U} + \underline{I}_a \cdot R - \underline{I}_b \cdot \underline{X}_C = 0$
 D) $-\underline{U} + \underline{I}_a \cdot R - \underline{I}_b \cdot \underline{X}_C = 0$
 E) $-\underline{U} + \underline{I}_a \cdot R + \underline{I}_b \cdot \underline{X}_C = 0$

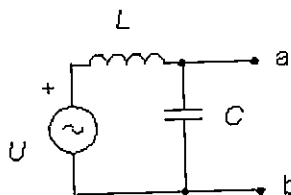


24) Za prikazani spoj odredite Thevenenovu impedenciju sa stezaljki a i b.

- A) \underline{Z}
 B) $\underline{Z}/2$
 C) $\underline{Z}/3$
 D) $3\underline{Z}$
 E) $2\underline{Z}$

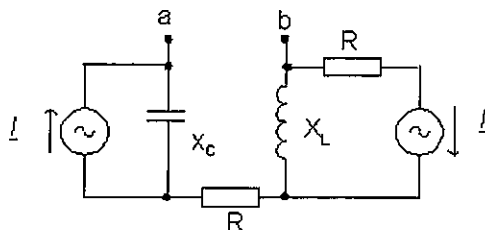
25) Koliki su Nortonova impedancija i struja gledano sa priključnica a i b ako je $\underline{X}_L=10 \Omega$, $\underline{X}_C=10 \Omega$ $U=10$ V.

- A) Z_N je beskonačno
 B) $I_N=1$ A
 C) $Z_N=nula$
 D) $I_N=2$ A



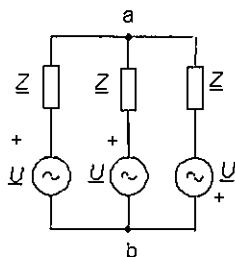
26) Odredite Thevenenovu impedanciju sa stezaljki a i b ako je $R = X_L = X_C = 10 \Omega$

- A) $10 + 0j \Omega$
 B) $10 + 10j \Omega$
 C) $10 + 20j \Omega$
 D) $30 + 10j \Omega$



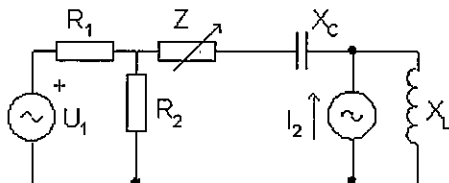
27) Koliki je napon između točaka a i b (koristite Millmanovu metodu):

- A) \underline{U}
 B) $\underline{U}/2$
 C) $\underline{U}/3$
 D) $2\underline{U}$
 E) nula



28) U spoju prema slici impedancija Z odabrana je tako da snaga na njoj bude maksimalna. Kolika je ta snaga? $R_1 = 10, R_2 = 10, X_C = 5, X_L = 5 \Omega, \underline{U}_1 = 50/\underline{0}, \underline{I}_2 = 5/\underline{0}$.

- A) 42,5 W
 B) 62,5 W
 C) 91,8 W
 D) 122,5 W
 E) 137,1 W



Rješenja test pitanja X

1.A 2.B 3.D 4.C 5.B 6.C 7.CD 8.B 9.A 10.CE 11.B 12.B 13.C 14.BE 15.D 16.A 17.A
 18.B 19.A 20.A 21.D 22.D 23.AE 24.B 25.AB 26.A 27.C 28.B

XI. POLIFAZNI SUSTAVI

OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

Trofazni simetrični izvor je spoj (u zvijezdu, ili trokut) 3 izvora napona jednakih amplituda i frekvencija, međusobno pomaknutih u fazi za 120° ($2\pi/3$ rad).

Faze generatora su 3 naponska izvora trofaznog generatora, čiji su naponi označeni indeksima određenog slijeda, npr. ABC, RST, ili 123 (*redoslijed faza*).

Trofazno simetrično trošilo jest spoj (u zvijezdu, ili trokut) 3 međusobno jednake impedancije Z koje nazivamo *faze trošila*.

Trofazni simetrični sustav obuhvaća simetrični trofazni generator i simetrično trofazno trošilo međusobno spojene *trofaznim vodom* (primjer na slici)

Trofazni vod je skup vodiča, koji obuhvaća 3 *fazna vodiča* i eventualno (a u gradskoj niskonaponskoj mreži, obvezno) i *nulvodič*.

Fazni vodiči (oznake **L1, L2 i L3**) su vodiči kojima se naponi (s + priključnica) pojedinih faza generatora dovode do trošila.

Nulvodič (oznaka **N**) je vodič kojim se potencijal nultočke 0 (u spoju zvijezde) izvora dovodi do trošila gdje se njega spaja nultočka 0' (u spoju zvijezde) trošila.

Fazni naponi (iznosa U_f) su naponi na pojedinim fazama (generatora ili trošila). Na trofaznom vodu vrijedi: *fazni naponi su naponi između pojedinih faznih vodiča i nulvodiča*. U simetričnom sustavu, sva tri fazna napona imaju isti iznos U_f .

Linijski naponi (iznosa U_l) su *naponi između pojedinih faznih vodiča (međufazni naponi)*. U simetričnom sustavu, sva tri linijska napona imaju isti iznos U_l .

Linijske struje (iznosa I_l) su *struje koje teku kroz fazne vodiče*. U simetričnom sustavu, sve tri linijske struje imaju isti iznos I_l (na gornjoj slici, to su struje I_1, I_2 i I_3).

Fazne struje (iznosa I_f) su *struje kroz pojedine faze (generatora ili trošila)*. U simetričnom sustavu, sve tri fazne struje imaju isti iznos I_f .

Struja nulvodiča I_0 jednaka je (prema KZS) zbroju svih triju faznih struja. $I_0 = I_1 + I_2 + I_3$

U spoju zvijezde (simetričnog trošila, ili generatora) $I_f = I_l$, a $U_l = \sqrt{3}U_f$ (slučaj na gornjoj slici).

U spoju trokuta (simetričnog trošila, ili generatora) $U_f = U_l$, a $I_l = \sqrt{3}I_f$

Ukupna radna snaga simetričnog trošila (bez obzira na spoj) računa se ovim izrazom:

$$P_{uk} = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi \quad \text{gdje je } \varphi \text{ kut impedancije trošila.}$$

Ukupna jalova snaga simetričnog trošila (bez obzira na spoj) računa se ovim izrazom:

$$Q_{uk} = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi \quad \text{gdje je } \varphi \text{ kut impedancije trošila.}$$

Kompenzacija jalove snage trofaznog simetričnog trošila (smanjenje postojećeg kuta impedancije φ na željenu vrijednost φ') obavlja se dodavanjem kapacitivne snage Q_c i to spajanjem 3 kompenzacijska kapaciteta svaki iznosa C , koji se (ovisno o tipu spoja) računa ovako:

$$C = \frac{Q_c}{3\omega U_f^2} \quad \text{- za spoj u zvijezdu; ili}$$

$$C = \frac{Q_c}{3\omega U_l^2} \quad \text{- za spoj u trokut.}$$

PRIMJERI XI.

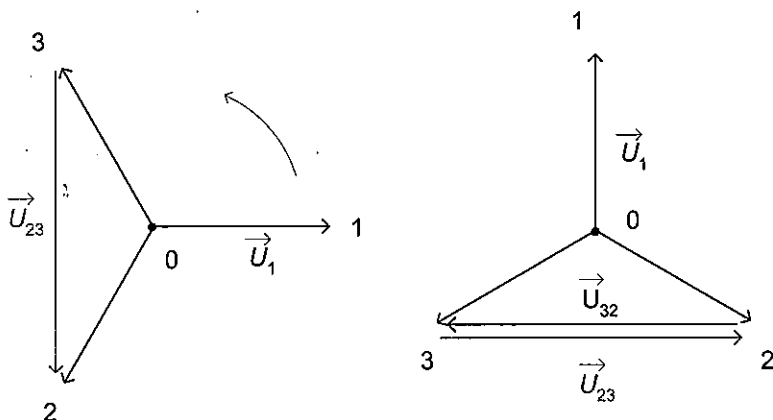
Napomena: u svim zadacima (osim ako nije drugačije napomenuto) smatramo da je trofazni izvor simetričan s uobičajenim redoslijedom faza ($R \rightarrow S \rightarrow T$, što znači da napon faze S fazno zaostaje za 120° , a napon faze T za 240° u odnosu na napon faze R).

XI-P1. U sustavu napona trofaznog izvora odredite kut vektora faznog napona U_1 , ako je početni kut vektora linijskog (međufaznog) napona U_{23} jednak nuli.

Rješenje:

Prvo dogovor o oznakama napona. Dok vodiče voda (linije) označavamo s L_1, L_2, L_3 i N (nulvodič) napone označavamo na različite načine. Fazne napone označavamo samo jednim indeksom (brojke 1, 2 i 3, ili slova A, B i C, ili R, S i T) kojim označavamo pojedinu fazu jer su to naponi pojedinih faza prema istoj referentnoj točki (nultočka generatora, ili nulvodič). Stoga, vektori tri fazna napona u vektorskom dijagramu imaju hvatišta u istoj (zajedničkoj) točki, obično označenoj s 0 (slika dolje lijevo) dok su im na vrhovima oznake pojedinih faza.

Međufazne (linijske) napone označavamo s 2 indeksa (svaki je oznaka jedne faze). Slijed tih indeksa određuje (referentni) polaritet napona, pa time i smjer vektora napona. Vrh vektora dolazi na mjesto prvog indeksa a hvatište na mjesto drugoga. Promijenimo li redoslijed indeksa mijenja se smjer vektora napona. Stoga, za ispravan vektorski prikaz trofaznog sustava napona moramo pravilno označavati napone između pojedinih faza.



Na lijevoj slici je vektor napona prve faze izvora U_1 postavljen u x os (dan mu je početni kut 0). Time je određen položaj vektora svih ostalih napona. Vektor napona U_{23} usmjeren je u ovom slučaju u -y os tj. ima početni fazni kut -90° . Želimo li da taj vektor ima kut 0 (kako se traži u zadatku) moramo kompletan vektorski dijagram zakrenuti za $+90^\circ$ u smjeru označenom na slici, čime se dobiva dijagram na desnoj slici u kojemu vektor napona U_{23} ima kut jednak nuli. U tom slučaju, vektor napona U_1 ima početni kut od 90° . Ako je dakle početni kut vektora napona U_{23} nula tada je kut vektora napona $U_1 + 90^\circ$.

Radi ilustracije redoslijeda indeksa na smjer vektora linijskog napona, na slici je, uz vektor napona U_{23} nacrtan i vektor napona U_{32} .

Na slici se može uočiti da, kao što su sva tri fazna napona istoga iznosa (U_f) i sva tri linijska (međufazna) napona su također istoga iznosa (U_l) koji je, pak, $\sqrt{3}$ puta veći od iznosa faznih napona ($U_l = \sqrt{3}U_f$).

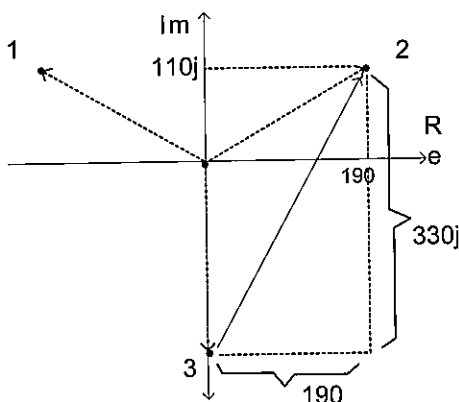
XI-P2. Zadan je fazor faznog napona $\underline{U}_2 = 190 + j110$. Odredite fazor linijskog napona \underline{U}_{23} .

Rješenje:

Apsolutni iznos (modul) fazora zadanog napona je $U_2 = \sqrt{190^2 + 110^2} = 220 \text{ V}$.

Kut (argument) fazora napona računa se ovako: $\arctg \frac{110}{190} = +30^\circ$.

Za daljnji postupak određivanja kompleksnog broja \underline{U}_{23} napraviti ćemo prikaz napona u kompleksnoj ravnini.



Iz slike vidimo da fazor napona \underline{U}_{23} ima realni dio od 190 V dok mu je imaginarni jednak 330 V.

Apsolutni iznos (modul) je

$$U_{23} = \sqrt{190^2 + 330^2} = 380 \text{ V},$$

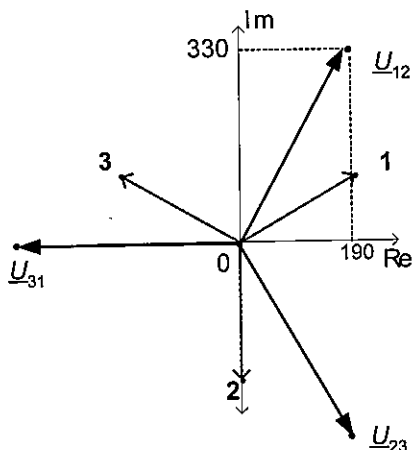
dok mu je kut $\arctg \frac{330}{190} = 60^\circ$.

pa je fazor napona

$$\underline{U}_{23} = 190 + j330 = 380 / 60^\circ \text{ V}$$

Napomena: za fazni napon elektrodistribucijske mreže od 220 V, linijski napon bi matematički bio 381 V, ali se to u razmatranju mreže zaokružuje na 380 V.

XI-P3. Ako su linijski naponi $\underline{U}_{12} = 190 + j330 \text{ V}$ i $\underline{U}_{23} = 190 - j330 \text{ V}$, odredite kut i iznos kompleksnog broja koji određuje treći linijski napon. Nacrtajte sustav napona u kompleksnoj ravnini.



Rješenje:

Na slici je prikazan sustav faznih i linijskih (međufaznih) napona.

Iako se bično uzima da je početni fazni kut napona \underline{U}_1 jednak nuli, to ovdje nije slučaj.

Iz slike je vidljivo da je traženi napon: $\underline{U}_{31} = 380 / 180^\circ \text{ V}$.

Sinusoida tog napona je:
 $u_{31}(t) = 535,8 \cdot \sin(\omega t + \pi) \text{ V}$

Napomena: umjesto oznaka 1, 2, 3 negdje se koriste i oznake R, S, T ili A, B, C.

XI-P4. Za koju najmanju struju treba dimenzionirati priključne vodiče kojima se na mrežu (linijskog) napona 3×380 V priključuju u trokut spojena tri grijača, svaki otpora $R=22 \Omega$?

Rješenje: kod spoja u trokut na grijaču je linijski napon izvora, a to je 380 V. Struja kroz pojedini grijač (fazna struja) je $17,27$ A. Linijska struja je za simetrično trošilo u spoju trokuta $\sqrt{3}$ puta veće od fazne. Vodiči priključnog voda, dakle, moraju podnijeti linijsku struju

$$I_l = \sqrt{3} \cdot 17,27 = 30 \text{ A.}$$

Nazivi fazno i linijsko, ponekad izazivaju nedoumicu glede toga na što se odnose. Izraz *linijski* prvenstveno vezujemo za priključni vod (liniju) tako da su linijske struje struje kroz tri linijska vodiča (L_1 , L_2 i L_3) a linijski naponi su naponi među njima. Kako te napone daje generator, ponekad ih se naziva i linijskim naponima generatora. U stvarnosti, između priključnica trošila i samog generatora u elektroenergetskom sustavu postoji cijela mreža vodova i uređaja (transformatori, dalekovodi i dr.) koji nisu predmet analiza u Osnovama elektrotehnike, tako da je ovdje prikladno sve ono što je trošilo "skriveno" iza linijskih vodiča smatrati trofaznim izvorom te govoriti o linijskim i faznim naponima izvora.

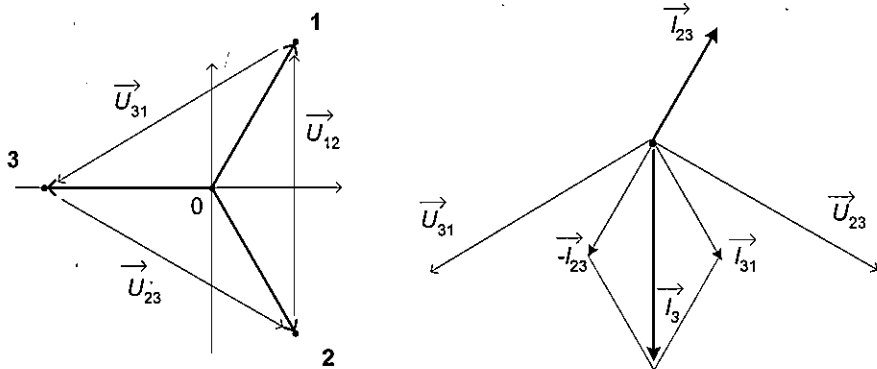
Izraz *fazni*, rabi se za napone i struje pojedinih faza generatora ili trošila (svaki od grijača iz ovog zadatka predstavlja jednu fazu trošila) a iznos faznog napona (U_f) ovisi o tome jesu li faze u spoju zvijezde ili trokuta. Kod spoja u trokut, fazni napon po iznosu je jednak linijskom ($U_f = U_l$) dok je kod spoja faza u zvijezdu fazni napon $\sqrt{3}$ puta manji od linijskog ($U_f = \sqrt{3} U_l$).

Nije li napomenuto drugačije, pretpostavljamo da su faze izvora spojene u zvijezdu, a izraz *fazni naponi* odnosi se na izvor i predstavlja napone pojedinih faza prema nultočki izvora. (Ovi naponi jednaki su naponima pojedinih linijskih vodiča prema nulvodiču, pa se u praksi nekad, kod priključka trofazne mreže, linijski vodiči nazivaju *fazama*, a nulvodič *nulom*).

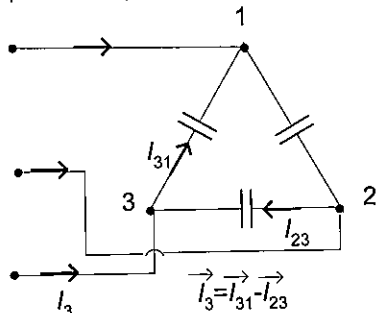
Nije li napomenuto drugačije izraz *fazne struje* odnosi se na struje trošila, koje su određene faznim naponima trošila. One stoga ovise o spoju trošila, jer je kod spoja u trokut na pojedinom grijaču linijski napon izvora, dok bi kod spoja u zvijezdu to bio fazni napon izvora (ovo vrijedi za simetrično trošilo, dok bi kod nesimetričnog trošila stanje bilo nešto složenije).

XI-P5. Tri jednaka kondenzatora otpora $X_C=53 \Omega$ spojena u trokut priključeni su na trofaznu mrežu. Odredite kompleksne izraze za faznu struju I_{23} i linijsku struju I_3 ako je zadano $U_{12}=190$ V.

Rješenje: Rješavanje zadataka iz trofaznih sustava olakšava skica vektorskog dijagrama napona. Pritom moramo odlučiti koji ćemo od napona izvora postaviti pod nula stupnjeva (obično je to fazni napon prve faze). Svi ostali fazni i linijski naponi dobivaju početni fazni kut u odnosu na taj (referentni), koji je postavljen u $+x$ os. U nekim zadacima nema mogućnosti proizvoljnog izbora, jer je unaprijed zadan kut nekog od napona. Npr. u ovom zadatku je to kut međufaznog napona U_{12} koji je postavljen pod $+90^\circ$. Zato mora napon prve faze imati početni fazni kut od 60° . Sada možemo nacrtati vektorski prikaz svih napona.



Veza redoslijeda indeksiranih oznaka i smjera vektora napona opisana je u prvom primjeru. Redoslijed indeksiranih oznaka kod struja povezan je s referentnim smjerom struje. Tako, npr., I_{23} je struja koja ima smjer od točke 2 prema točki 3. Za određivanje struja I_{23} i I_{31} pomoću kojih ćemo kasnije odrediti struju I_3 , «izvukli» smo na posebnu sliku (gore desno) vektore napona U_{31} i U_{23} . Struja I_{23} fazno prethodi naponu U_{23} za 90° , a slično i struja I_{31} fazno prethodi naponu U_{31} za 90° .



Iznos struje dobijemo ovako:

$$I_{23} = U_{23}/X_C = 190/53 = 3,58 \text{ A.}$$

Struja I_{31} ima isti iznos, a prethodi naponu U_{31} za 90° .

Kirchhoffovim zakonom u vektorskom obliku odredimo linijsku struju I_3 .

Vektore napona možemo opisati kompleksnim brojevima (fazori). Tako je $\underline{U}_{31} = 190/\underline{210}^\circ \text{ V}$, a $\underline{U}_{23} = 190/\underline{-30}^\circ \text{ V}$. Pomoću njih i impedancija možemo zadatak riješiti u kompleksnom području. Impedanciju kapaciteta dobijemo množenjem kapacitivnog otpora s $-j$. Dakle, $\underline{X}_C = -j53 \Omega$. Proračun struja u kompleksnom području izgleda ovako:

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{X}_C} \quad \underline{I}_{31} = 1,8 - 3,1j \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{X}_C} \quad \underline{I}_{23} = 1,8 + 3,1j \quad \text{A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} \quad \underline{I}_3 = -6,2j \quad \text{A}$$

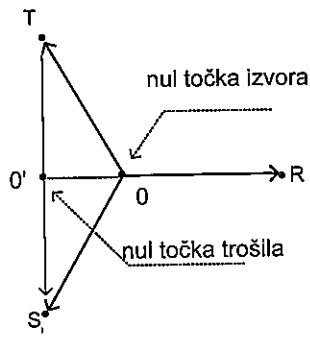
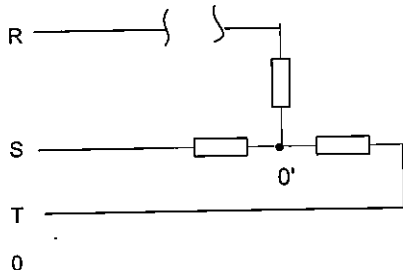
Struja I_3 ima efektivnu vrijednost 6,2 A i početni fazni kut -90° . Sinusoida te struje bila bi $i_3 = 6,2\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/2) \text{ A}$.

XI-P6. Odredite iznos struje kroz pojedinu fazu simetričnog trofaznog trošila spojenog u zvijezdu koje je trovodno (bez nulvodiča) spojeno na trofazni izvor napona $3 \times 380 \text{ V}$. U svakoj fazi trošila je radni otpor od 80Ω (otpor priključnih vodova možemo zanemariti).

Rješenje: Zbog simetrije trošila, nultočka trošila O' je na istom potencijalu kao nultočka izvora 0 (provjerite Millmanom) pa je na svakom otporu (fazi) trošila fazni napon, koji je u ovom spoju manji od linijskog $\sqrt{3}$ puta i iznosi $380\text{V}/\sqrt{3} = 220\text{V}$. Stoga struja svake faze trošila iznosi $220\text{V}/80\Omega = 2,75 \text{ A}$ (što je ujedno i iznos linijske struje tj. struje kroz vodiče priključnog voda).

XI-P7. Ako u spoju iz prethodnog primjera pregori osigurač u jednom od priključnih vodiča (npr. u fazi R) odredite napon između nultočke trošila i nultčke izvora.

Rješenje:



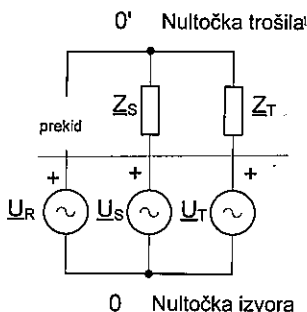
U ovom slučaju kroz otpor faze R ne teče struja (slika gore lijevo) a preostala dva otpora (faze S i T) serijski su spojena na linijski napon U_{ST} (djelilo napona). Otpori su jednaki te na svaki otpada pola napona, pa nultočka trošila O' sada dolazi na polovinu linijskog napona U_{ST} . Između nje i nultočke izvora O sada postoji napon (trošilo više nije simetrično) koji se može odrediti iz skice vektorskog (topografskog) dijagrama (gore desno). U dijagramu je lako vidjeti da napon između nultočki trošila i izvora ovdje iznosi pola faznog napona, tj. 110 V.

Ovaj napon ($U_{O'O}$) može se odrediti i analitički, proračunom u kompleksnom području pomoću Millmanovog teorema (mreža s dva čvora). U tu svrhu, najprije napišemo sustav napona u kompleksnom obliku (uzimamo da je napon faze R pod nula stupnjeva). To daje:

$$\underline{U}_R = 220 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \underline{U}_S = 220 \angle -120^\circ \text{ V}; \quad \underline{U}_T = 220 \angle +120^\circ \text{ V}.$$

Za proračun napona $U_{O'O}$ koristimo poznatu Millmanovu formulu za napon između dva čvora, kako slijedi:

$$U_{O'O} = \frac{\left(\frac{U_R}{Z_R} + \frac{U_S}{Z_S} + \frac{U_T}{Z_T} \right)}{\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_T}}$$



U ovom slučaju je $Z_R = \infty$ (prekid) a $Z_S = Z_T = R$. Time otpadaju prvi pribrojnici u nazivniku i brojniku gornje jednadžbe, dok se $1/R$ u brojniku i nazivniku izlučuje te krati. Nakon malo računanja dobivamo da je $U_{O'O} = -110 + 0j \text{ V}$ što odgovara rezultatu dobivenom iz vektorskog dijagrama. Čitatelju prepuštamo računanje i zaključak koji mu je način određivanja napona $U_{O'O}$ u ovom slučaju bio jednostavniji.

Pitanje 1: Koliko bi pokazivao voltmetra koji bi priključili između točaka O' i O ? (110 V).

Pitanje 2: Koliko bi pokazao voltmetar koji bi spojili između točke O' i točke R (na izvoru)? (330 V, pogledajte dužinu spojnice tih točaka na dijagramu).

Pitanje 3: Koliko bi pokazao voltmetar priključen između točaka O' i S (ili O' i T)? (190 V).

XI-P8: Spoj u trokut triju jednakih otpora vuče iz mreže linijsku struju od 15 A. Kolika je struja kroz pojedini otpor. Kolika će biti struja kroz pojedini otpor ako se otpori prespoje u zvijezdu?

Rješenje: Struja kroz pojedini otpor (fazu) trošila (fazna struja) ovisi o naponu na otporu. U spoju trokuta, taj je napon jednak linijskom naponu. U spoju simetričnog trošila u trokut, linijska struja (15 A) je $\sqrt{3}$ puta veća od fazne. Dakle tražena fazna struja je

$$I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}} = 8,7 \text{ A}.$$

Nakon prespajanja u spoj zvijezde, napon na svakom otporu se smanji i postaje jednak faznom naponu izvora (koji je $\sqrt{3}$ puta manji od linijskog). Prema tome u spoju zvijezde će struja kroz pojedini otpor biti 5 A, a to je u ovom spoju ujedno i linijska struja.

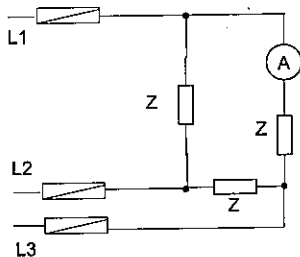
Zaključak: prespajanje jednakih otpora iz trokuta u zvijezdu, smanji linijske struje 3 puta.

Pitanje: Kako se prilikom takvog prespajanja promijeni ukupna snaga trošila?

Odgovor: Ukupna snaga trofaznog simetričnog trošila je $\sqrt{3} \cdot I_l \cdot U_l \cdot \cos \phi$

Dakle, uz 3 puta manju linijsku struju i ukupna snaga je 3 puta manja.

XI-P9. Ampermetar u prikazanom spoju trošila pokazuje 3 A. Koliko će ampermetar pokazivati ako pregori osigurač u linijskomvodu s oznakom L1?



Rješenje: Treba razlikovati normalno, regularno stanje, u kojem je sve spojeno kako je predviđeno, od "neregularnog" stanja nastalog prekidom. Prekidi vodiča u trofaznoj mreži mogu prouzročiti neželjene posljedice, a mogu nastati zbog pregaranja osigurača, mehaničkog oštećenja vodova, nepravilne montaže, i sl.

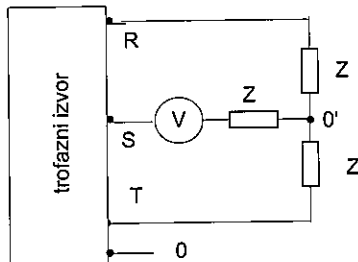
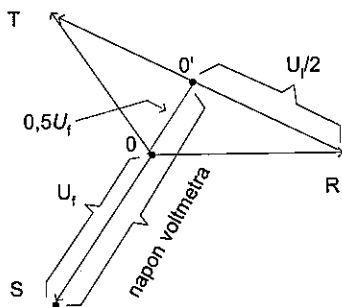
Posebno opasan može biti prekid nul vodiča kod spoja u zvijezdu nesimetričnog trošila, kakva su u pravilu trošila u gradskoj elektrodistribucijskoj mreži (primjer P13).

U ovom slučaju, nakon prekida dobivamo na linijski napon U_{23} , uz impedanciju Z , još paralelno spojen i serijski spoj ostalih dviju impedancija Z , od kojih je jedna ona koja je u seriji s ampermetrom, čija nas struja zanima. Očito je da ta impedancija sada dobiva samo pola linijskog napona U_{23} , dok je prije prekida dobivala puni linijski napon (U_{31}).

Prema tome, ako ima upola manji napon, tada joj je i struja upola manja, pa ampermetar sada pokazuje 1,5 A.

XI-P10. Koliki su fazni i linijski naponi trofaznog simetričnog izvora ako ovako spojen voltmetar (kojeg možemo smatrati idealnim) pokazuje 120 V? Koristite topografski dijagram.

Rješenje:

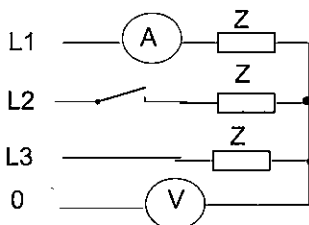


Otpor voltmetra možemo uzeti beskonačno velikim, pa je stoga u ovom spoju vodič faze S zapravo u prekidu. Točka $0'$ u dijagramu (gore lijevo) dolazi na polovinu linijskog napona U_{RT} . Iz istog dijagrama vidi se da je traženi fazni napon izvora $2/3$ pokazivanja voltmetra tj. 80 V. Linijski napon izvora je stoga $U_F = \sqrt{3} \cdot 80 \text{ V} = 138 \text{ V}$.

Pitanje 1: Koliko bi pokazao voltmetar koji bi spojili između točaka 0 i $0'$ te između $0'$ i R?
Odgovor 1: 40 V, 69 V (pogledajte na dijagramu).

Pitanje 2: Koliki su fazni naponi na impedancijama trošila?
Odgovor 2: U fazi S je 0 V; a u ostalim fazama 69 V).

XI-P11. Ako u spoju na slici ampermetar uz zatvorenu sklopku pokazuje 1 A, a voltmetar uz otvorenu 50 V, odredite iznos impedancije Z . Koliko će pokazati voltmetar nakon zatvaranja sklopke?



Rješenje:

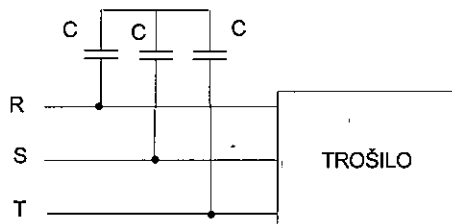
Uz zatvorenu sklopku trošilo je simetrično, pa su nultočka trošila i nultočka izvora na istom potencijali i pokazivanje voltmetra je nula. Pritom je na svakoj impedanciji fazni napon izvora, pa je struja ampermetra $I_A = 1 \text{ A} = U_l / Z$, što daje izraz za izračun iznosa impedancije $Z = U_l / I_A$. Sada nam treba fazni napon koji ćemo odrediti iz pokazivanja voltmetra uz otvorenu sklopku. Voltmetar mjeri napon između nul točke izvora i zvjezdlišta trošila, a *pritom prekida nulvodič*. Iz prethodnih primjera (P7) znamo da u ovakvoj situaciji voltmetar pokazuje $1/2$ faznog napona. Fazni napon je dakle 100 V, pa je iznos impedancije $Z = U_l / I_A = 100 \Omega$.

Pitanje: Koliki je iznos impedancije ako ampermetar uz otvorenu sklopku pokazuje 1 A ?

Odgovor: $I_A = U_l / 2Z = 1 \text{ A}$ pa je $Z = 86,5 \Omega$.

XI-P12. Trofazno simetrično trošilo, radne snage P i faktora snage $\cos \varphi$ (ind), priključeno je na trofazni izvor frekvencije f . Odredite iznos svakog od kompenzacijskih kapaciteta C , kojima bi se u spoju prema slici, ukupni faktor snage poveća na $\cos \varphi'$ (ind).

Zadano: $U_l = 380 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$; $P = 3,5 \text{ kW}$; $\cos \varphi = 0,6$ $\cos \varphi' = 0,8$.



Rješenje:

Kompenzacija jalove snage u trofaznom simetričnom sustavu obavlja se pomoću tri jednaka kompenzacijska kapaciteta, spojena u zvijezdu ili trokut (ovdje u zvijezdu). Iznos pojedinog kompenzacijskog kapaciteta računamo (slično kao kod jednofaznog sustava) kako slijedi:

Iz podatka za faktor snage izračunamo da je fazni kut prije priključenja kondenzatora bio $\varphi = \arccos 0,6 = 53,1^\circ$, a nakon priključenja treba biti $\varphi' = \arccos 0,8 = 36,9^\circ$. Jalova snaga prije priključka kondenzatora je $Q = P \cdot \tan \varphi = 3,5 \text{ kW} \cdot 1,33 = 4,66 \text{ kVar}$, a nakon priključenja treba biti $Q' = P \cdot \tan \varphi' = 3,5 \text{ kW} \cdot 0,75 = 2,63 \text{ kVar}$. Razlika snage koju preuzima kompenzacijski kapacitet je

$$Q_C = Q - Q' = 2,03 \text{ kVar}.$$

Budući da je ovdje $Q_C = U_l^2 / X_C$ a $X_C = 1 / (\omega C)$ i $U_l = U_l / \sqrt{3} = 220 \text{ V}$, potrebni iznos pojedinog kompenzacijskog kapaciteta izračunamo iz jednadžbe (dane u uvodnom dijelu ove teme)

$$C = \frac{Q_C}{3 \omega U_l^2} = 44,5 \mu\text{F}$$

Pitanje 1: Koliki bi trebao biti pojedini kompenzacijski kapacitet ako bi ih spojili u trokut?

Pitanje 2: Koliki bi trebao biti pojedini kompenzacijski kapacitet ako želimo postići potpunu kompenzaciju jalove snage (tj. da faktor snage bude 1)?

Pitanje 3: Kako bi kompenzirali jalovu snagu kod nesimetričnog trošila?

XI-P13*. Neko domaćinstvo je zračnim vodom trofazno priključeno na (trofaznu simetričnu) električnu mrežu faznog napona $U_f=220\text{ V}$. U jednom trenutku u tom domaćinstvu je raspored trošila po fazama ovakav: na **fazi A** su žarulje ukupne snage 300 W ; na **fazi C** je TV prijemnik snage 70 W ; a na **fazi B** je hladnjak snage 135 W , $\cos \varphi=0.865$ (ind). Odredite napone na pojedinim trošilima ako u tom trenutku (zbog kvara) dođe do prekida nulvodiča zračnog voda.

Rješenje: Najprije napišemo sustav napona u kompleksnom obliku (U_A uzimamo s kutem 0°)

$$\underline{U}_A=220\angle 0^\circ\text{ V}; \quad \underline{U}_B=220\angle -120^\circ\text{ V}; \quad \underline{U}_C=220\angle +120^\circ\text{ V}.$$

Snage trošila u fazama su:

$$P_A = 300\text{ W} \quad P_C = 70\text{ W}$$

$$P_B = 135\text{ W} \quad Q_B = P_B \cdot \tan(\arccos(0.865)) \quad Q_B = 78.31\text{ VAR}$$

Iz snaga se dobivaju impedancije pojedinih faza trošila (u omima) kako slijedi:

$$R_A = \frac{U_f^2}{P_A} \quad R_C = \frac{U_f^2}{P_C} \quad I_B = \frac{\sqrt{P_B^2 + Q_B^2}}{U_f}$$

$$R_B = \frac{P_B}{I_B^2} \quad X_B = \frac{Q_B}{I_B^2}$$

$$R_A = 161.33 \quad R_C = 691.43 \quad R_B = 268.25 \quad X_B = 155.61$$

$$Z_B = 268.25 + 155.61j$$

Sada izračunamo napon između nul točke izvora i trošila (Millman)

$$U_{o'o} = \frac{U_A \cdot \frac{1}{R_A} + U_B \cdot \frac{1}{Z_B} + U_C \cdot \frac{1}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{R_C}} \quad U_{o'o} = 56.3 + 1.27j$$

Naponi na pojedinim fazama trošila su :

$$U_{A0'} = U_A - U_{o'o} \quad U_{B0'} = U_B - U_{o'o} \quad U_{C0'} = U_C - U_{o'o} \quad \checkmark$$

Iznosi tih napona su :

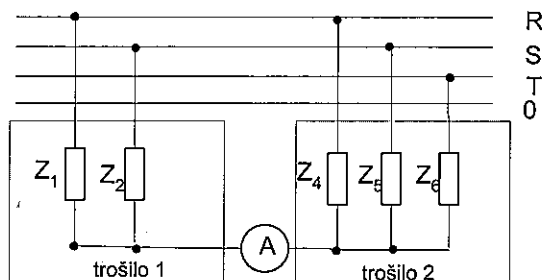
$$U_{A0'}=167,3\text{ V} \quad U_{B0'}=253,8\text{ V} \quad U_{C0'}=251,9\text{ V}$$

Zaključak: U ovom slučaju trošilo u fazi A dobiva napon manji od nazivnog, dok trošila u fazama B i C dobivaju veći napon. To može prouzročiti kvarove trošila, pa je stoga prekid nulvodiča opasan!

Pitanje: Kako biste, da ste u tom trenutku u ovom domaćinstvu, zaključili da je došlo do prekida nulvodiča?

XI-P14*. Na trofaznu mrežu priključena su dva simetrična trošila oba u spoju zvijezde, pri čemu nul-točke trošila *nisu spojene* na nul-točku izvora. Ako dođe do prekida (pregori osigurač) u fazi jednog od trošila (trošilo 1 prema slici) izračunajte struju koju bi u tom slučaju mjerio ampermetar ako bi ga spojili između nultočaka dvaju trošila. Otpore vodova kao i unutrašnji otpor izvora možete zanemariti. Koristite Theveninov teorem.

Zadano: $U_l = 220 \text{ V}$, $Z_1 = Z_2 = 20 - j20 \ \Omega$, $Z_4 = Z_5 = Z_6 = 30 + j30 \ \Omega$.



Rješenje: U ovom primjeru primjena Theveninove metode znatno olakšava rješavanje tj. izračunavanje struje ampermetra. Ampermetar "izvadimo" i preostali dio mreže zamijenimo s Theveninovim nadomjesnim izvorom gledano s priključnih točaka ampermetra. Theveninov napon U_{th} (ovdje, umjesto indeksa "T", koristimo indeks "th" zbog oznake napona faze T) izračunamo kao razliku potencijale zvjezdišta trošila. "Olakšavajuća okolnost": potencijal zvjezdišta kod trošila 2 jednak je nuli (simetrično trošilo). Za određivanje potencijala zvjezdišta trošila 1 koje je nesimetrično (nema impedancije Z_3 u fazi T) koristimo postupak opisan u primjeru P7. Theveninova impedancija nakon "kratkog spajanja" svih izvora je serijski spoj dviju paralelnih grupa impedancija. Struja ampermetra je U_{th}/Z_{th} . Uz malo računanja dobiva se: $I_A = 5,5 \text{ A}$.

Pitanje: Kako bi odredili napone na pojedinim fazama dvaju trošila:

- u slučaju kada nema prekida u fazi trošila 1?
- u slučaju (iz zadatka) kada je došlo do prekida u fazi trošila 1?

Odgovor: a) u slučaju bez prekida oba su trošila simetrična pa svaka od njihovih faza ima (fazni) napon one faze izvora na koju je spojena. Koliko bi u tom slučaju pokazivao ampermetar spojen između nultočki dvaju trošila? (0 A);

- u ovom slučaju ampermetar kratko spaja nultočke dvaju trošila u zajedničku (novu) nultočku tako da dva trošila čine jedno nesimetrično trošilo (u fazi R je spoj $Z_1 \parallel Z_4$, u fazi S je spoj $Z_2 \parallel Z_5$, a u fazi T je samo impedancija Z_6) pa se napon te nove nultočke prema nultočki izvora (te iz toga naponi pojedinih faza trošila) mogu odrediti postupkom opisanim u primjeru P7.

ZADACI XI.

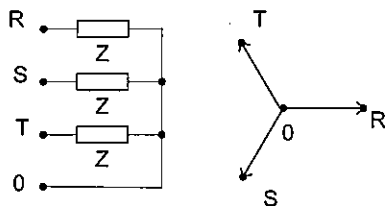
XI-1. Trofazno simetrično trošilo spojeno u zvijezdu četverovodno je priključeno na trofazni izvor linijskog napona 12 V. Impedancija pojedine faze je $Z=100\angle 0^\circ \Omega$. Izračunajte: a) fazni napon; b) faznu struju; c) linijsku struju; d) struju nulvodiča; e) ukupnu radnu snagu. Nacrtajte topografski dijagram napona na trošilu. Uzmite da je fazni napon faze R pod nula stupnjeva.

Rezultat:

- a) $U_f=6,94$ V; b) $I_f=69,4$ mA;
c) $I_l=69,4$ mA; d) $I_0=0$; e) $P=1,43$ W.

Pitanje: što se promijeni u izračunatim podacima ako se prekine nul vodič?

Odgovor: Ništa, jer je trošilo simetrično.



XI-2. Nesimetrično trošilo u zvijezda spoju četverovodno je priključeno na trofazni simetričan izvor. U pojedinim fazama su otpori 100 (R), 200 (S) i 300 (T) Ω . Linijski napon je 400 V. Izračunajte: a) linijsku struju I_R ; b) struju nulvodiča I_0 ; c) ukupnu radnu snagu P .

Rezultat: $I_R=2,3$ A, $I_0=1,35$ A, $P=977,7$ W

XI-3. Tri otpornika $R_1=100 \Omega$, $R_2=200 \Omega$ i $R_3=300 \Omega$, spojena su u trokut i priključena su na trofazni izvor. Izračunajte ukupnu radnu i jalovu i prividnu snagu. Linijski napon je 400V.

Rezultat: $P=2933$ W, $S=2933$ VA, $Q=0$ VAR

XI-4. Tri impedancije spojene su u trokut između točaka 1, 2 i 3 te priključene na trofazni izvor linijskog napona $U_l=120$ V. Ako su impedancije $Z_{12}=Z_{31}=6+j8$ i $Z_{23}=10 \Omega$, odredite a) iznose struja kroz pojedine impedancije I_{12} , I_{23} i I_{31} b) ukupnu radnu i jalovu snagu.

Rezultat: $I_{12}=12$ A; $I_{23}=12$ A; $I_{31}=12$ A; $P=3168$ W; $Q=2304$ VAR

Napomena: Ampermetar bi u svakoj fazi trošila pokazivao jednaku struju od 12 A. Iako su iznosi struja jednaki trošilo nije simetrično, jer međusobni fazni pomak struja nije po 120° .

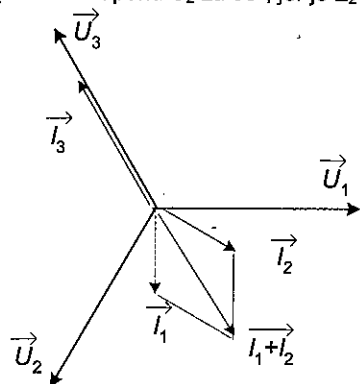
Pažnja: važan je sustav označavanja indeksiranim oznakama. Npr. napon U_{12} je napon točke 1 u odnosu na točku 2, a struja I_{12} je struja koja ima smjer od 1 prema 2. Ovakvim, sustavnim, označavanjem dobivamo pregledan postupak rješavanja i ispravne iznose napona i struja kao i njihove fazne odnose.

XI-5. Impedancije $Z_{12}=20\angle 60^\circ \Omega$, $Z_{31}=20\angle -60^\circ \Omega$ i $Z_{23}=10\angle 0^\circ \Omega$, spojene u trokut, priključene su na trofazni izvor. Uz zadani linijski napon $U_{l2}=190\angle 0^\circ$ V, odredite linijske struje I_1 , I_2 i I_3 (efektivne vrijednosti).

Rezultat: $I_1=0$ $I_2=28,5$ A; $I_3=28,5$ A

XI-6. Tri impedancije spojene u zvijezdu četverovodno su priključene na trofaznu mrežu. Odredite impedanciju Z_3 ako je $Z_1 = j150 \Omega$ i $Z_2 = -j150 \Omega$, a ampermetar u nul vodiču pokazuje nulu. Zadatak riješite pomoću vektorskog dijagrama.

Uputa: Crtamo vektorski dijagram. Napon prve faze U_1 postavljamo pod nula stupnjeva. Struja I_1 fazno zaostaje iza napona U_1 za 90° jer je Z_1 «čisti» induktivni otpor. Struja I_2 fazno prethodi naponu U_2 za 90° , jer je Z_2 «čisti» kapacitivni otpor.



Zbrojimo vektore struja I_1 i I_2 . Dobivamo vektor koji je za $\sqrt{3}$ puta veći od I_1 odnosno I_2 . Budući da zbroj svih vektora faznih struja (struja I_0) mora biti nula zaključujemo da vektor struje I_3 mora imati prikazani položaj i duljinu 1,73 puta veću od vektora I_1 odnosno I_2 . Očito će to biti onda kada je Z_3 «čisti» radni otpor 1,73 puta manji od iznosa Z_1 odnosno Z_2 .

Rezultat: $Z_3 = 150/1,73 = 86,6 \Omega$.

XI-7. Impedancije $Z_1 = 20/30^\circ \Omega$, $Z_2 = 40/0^\circ \Omega$ i $Z_3 = 60/-90^\circ \Omega$ četverovodno su priključene na trofaznu mrežu faznog napona 230 V. Odredite struju nul vodiča. Napomena: otpore vodova zanemariti.

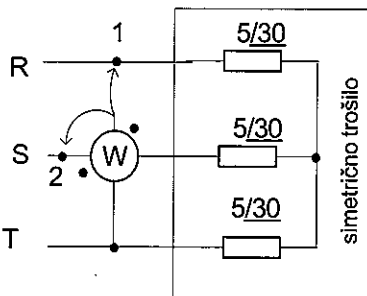
Uputa: napišemo sustav napona izvora:

$$\underline{U}_1 = 230 + 0j \text{ V} \quad \underline{U}_2 = -115 - 199j \text{ V} \quad \underline{U}_3 = -115 + 199j \text{ V}$$

Budući da postoji nul vodič fazni naponi na trošilu su jednaki kao i na izvoru. Izračunamo fazne struje, koje zbrojimo (vektorski) i dobijemo struju nul vodiča.

Rezultat: $I_0 = 13,2 \text{ A}$

XI-8. Trofazno simetrično trošilo u spoju zvijezde priključeno je na trofazni simetričan izvor linijskog napona $U_l = 380 \text{ V}$. Odredite pokazivanje vatmetra (koji ima + i - pokazivanje) ako mu je, prema slici, priključnica naponske grane spojena: a) na točku 1; b) na točku 2. Izračunajte radnu, jalovu i prividnu snagu trošila.



Rezultat: a) -8,33 kW ; b) 8,33 kW; Snage: $P = 25 \text{ kW}$ $Q = 14,4 \text{ kVar}$

Uputa: Vatmetar ima četiri priključnice, dvije strujne (strujna grana) i dvije naponske (naponska grana). Jedna strujna i jedna naponska priključnica označene su (ovdje točkicama) kao referentne. Pokazivanje vatmetra je umnožak efektivne vrijednosti struje kroz strujnu granu (kojoj je referentni smjer u označenu strujnu priključnicu) i efektivne vrijednosti napona na naponskoj grani (kojemu je referentni plus na označenoj naponskoj priključnici) te kosinusa kuta između fazora napona prema fazoru struje ($\alpha_u - \alpha_i$). U slučaju a) množi se napon U_{RT} i struja I_S te kosinus kuta tog napona u odnosu na tu struju (120°). U slučaju b) množi se napon U_{ST} i struja I_S te kosinus kuta tog napona u odnosu na tu struju (60°). Ovi kutevi se lako mogu odrediti iz skice vektorskog prikaza, a linijska struja I_S u ovom spoju jednaka je faznoj struji trošila, koja iznosi $220/5=44$ A.

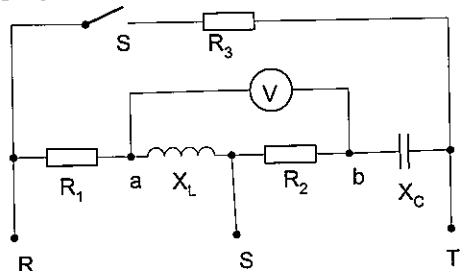
Napomena: Kod spoja u slučaju a) kut između napona i struje vatmetra jednak je $90^\circ \pm \varphi$ (φ je kut impedancije trošila) pa vatmetar pokazuje iznos $P_W = U_{RT} I_S \cos(90^\circ \pm \varphi) = U_l I_l \sin \varphi = Q_{uk}/\sqrt{3}$, koji je $\sqrt{3}$ puta manji od ukupne jalove snage trošila Q_{uk} , tako da se ovaj spoj može koristiti za određivanje jalove snage simetričnog trošila.

XI-9. Kondenzator kapaciteta C priključuje se prvo između stezaljki R i S, a zatim između stezaljki R i 0 trofaznog (simetričnog) generatora ($f=50$ Hz). Ako je u drugom slučaju iznos struje kroz kondenzator manja za ΔI nego u prvom izračunajte linijski napon mreže. Zadano: $C=150 \mu F$; $\Delta I=7.59$ A.

Rezultat: 381 V

XI-10. Na trofazni simetrični generator linijskog napona $U_l=100$ V priključeno je trošilo prema slici. Odredite ukupnu radnu i reaktivnu snagu te pokazivanje voltmetra prije i poslije zatvaranja sklopke S.

Zadano je: $R_1=R_2=R_3=X_L=X_C=10 \Omega$



Rezultat: prije $P=1000$ W, $Q=0$; $U_v=70.7$ V
poslije $P=2000$ W, $Q=0$; $U_v=70.7$ V

Pitanje: Hoće li se i kako promijeniti pokazivanje voltmetra ako R_2 i X_C zamijene mjesta?
Odgovor: Da, 36.6 V.

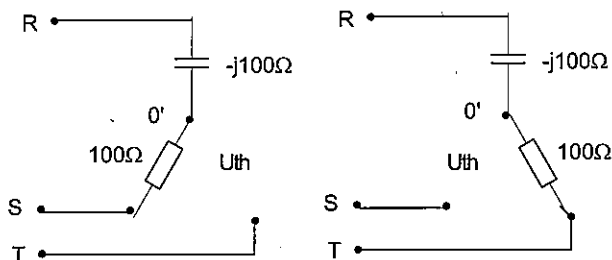
XI-11. Tri grijača snage P , $2P$ i $3P$ ($\cos \varphi = 1$) u zvijezda spoju priključena su četverovodno na trofazni simetričan izvor linijskog napona $U_l=380$ V. Odredite struju kroz nul vodič ako je snaga $P=380$ W.

Rezultat: 3 A

XI-12. Trofazno trošilo sastavljeno od otpornika, kondenzatora i zavojnice $R=X_C=X_L=10 \Omega$, priključeno je na trofazni izvor faznog napona 100 V. Odredite radnu i jalovu snagu trošila ako je a) trošilo spojeno u trokut b) spojeno u zvijezdu (s nul vodičem)

Rezultat: a) 3000 W b) 1000 W; jalova snaga je u oba slučaja nula.

XI-13. U trofaznoj mreži na slici odredite Theveninov napon sa točaka T i 0' odnosno S i 0'. Fazni napon izvora je 220 V, a početni fazni kut napona U_R je nula. U kojem je slučaju Theveninov napon veći? Da li se i Theveninova impedancija razlikuje u ova dva slučaja?



Rezultat:

140 V i 520 V (korisno je skicirati topografski dijagram)
Impedancija je jednaka (paralela otpora i kapaciteta).

XI-14. Simetrično trošilo sastavljeno je od tri otpornika $R=10\ \Omega$ koji su spojeni u zvijezdu. Trošilo je spojeno na trofazni izvor faznog napona $U_f=220\text{V}$. Otpor svakog od priključnih vodova je $1\ \Omega$. Koliki je fazni napon na pojedinom trošilu?

Rezultat: 200 V

Pitanje: Koliki je fazni napon na pojedinom trošilu ako trošilo prespojimo u trokut? Odgovor: 292 V

XI-15* Na trofazni izvor (A,B,C) priključeno je trošilo u zvijezda spoju s nul-vodičem. U fazama B i C nalaze se jednaki radni otpornici (R) dok je u fazi A čisti kapacitivni otpor. Poznat je iznos linijskih struja I_A , I_B i I_C . Uz prekinuti nul-vodič poznata je radna snaga trošila P. Odredite otpor R. Zadano: $I_A=1\text{ A}$; $I_B=I_C=2\text{ A}$; $P=690\text{ W}$.

Rezultat: 98 Ω

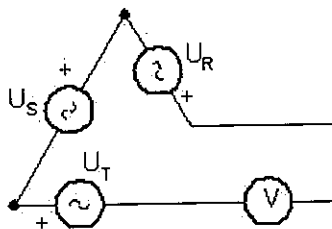
XI-16* Tri impedancije spojene u zvijezdu, priključene su na trofaznu četverovodnu mrežu. Impedancija u fazi R je čisto kapacitivna, dok su impedancije u fazama S i T čisto omske. Ako ampermetri u linijskim vodičima pokazuju $I_R=I_S=I_T=5\text{ A}$, odredite njihova pokazivanja kada dođe do prekida nulvodiča.

Rezultat: 6,7 A 7,5 A 2 A

TEST PITANJA XI

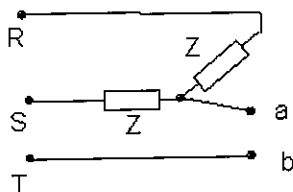
- 1) Početni fazni kut napona faze R je nula stupnjeva. Odredite početni fazni kut napona faze S:
- A) +150 stupnjeva
B) +120 stupnjeva
C) $-2\pi/3$ radijana
D) $-\pi/4$ rad
E) $-\pi/3$ rad
- 2) Fazni napon simetričnog izvora je 220 V. Ako fazor napona faze R ima početni fazni kut nula, odredite fazor napona U_{TR} .
- A) $-330+j190$
B) $-330-j190$
C) $220+j190$
D) $220-j110$
- 3) Trofazni simetrični teret spojen je u zvijezdu bez nul voda. Impedancija svake faze je Z , a linijska struja I . Koliki je linijski napon?
- A) $2.2 I \cdot Z$
B) $1.73 I \cdot Z$
C) $1.41 I \cdot Z$
D) $3 I \cdot Z$
E) $I \cdot Z$
- 4) Koliki napon pokazuje voltmetar u prikazanom spoju?

- A) fazni napon
B) linijski (međufazni) napon
C) nula
D) $3 U_f$
E) $U_f/3$



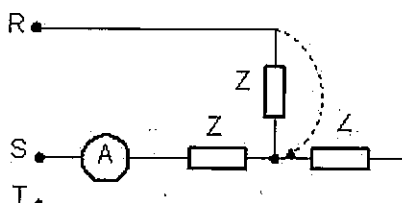
- 5) Na trofazni naponski izvor priključen je spoj prikazan slikom. Koliki je Z_T (Theveninova impedancija) sa stezaljki a i b?

- A) $2 Z$
B) $Z/2$
C) Z
D) nula
E) beskonačno



- 6) Hoće li se i kako promijeniti struja kroz ampermetar ako dođe do kratkog spoja u označenoj fazi?

- A) neće
 B) porasti će 1,73 puta
 C) porasti će tri puta
 D) smanjit će se 3 puta
 E) smanjit će se 1,73 puta

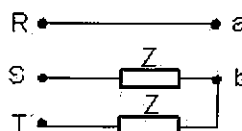


- 7) Simetrično trošilo spojeno je u trokut i priključeno je na simetričan trofazni izvor. Kolika je linijska struja ako je fazna struja 1 A?

- A) 3 A
 B) 1 A
 C) 1,73 A
 D) 1/1,73 A

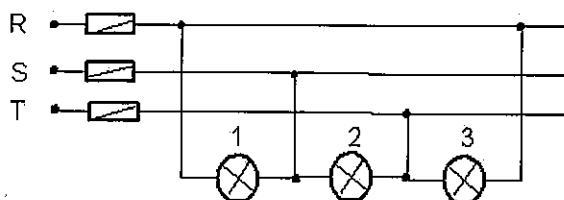
- 8) Koliki je Theveninov napon sa stezaljki a i b ako je trofazni izvor simetričan faznog napona 220 V?

- A) 220 V
 B) 190 V
 C) 380 V
 D) 330 V
 E) nula



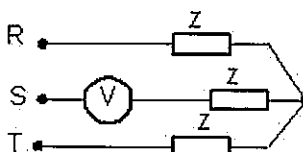
- 9) Ako pregori osigurač u linijskom vodu faze R dogoditi će se slijedeće:

- A) ugasi se žarulje 1
 B) ugasi se žarulja 2
 C) sve žarulje svjetle slabije
 D) žarulje 1 i 2 svjetle slabije, a 3 normalno
 E) žarulje 1 i 3 svjetle slabije, a 2 normalno



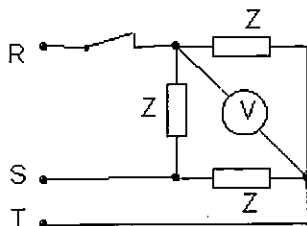
- 10) Koliki je fazni napon ako idealan voltmetar pokazuje 220 V?

- A) 220 V
 B) 146,6 V
 C) 380 V
 D) 110 V
 E) 330 V



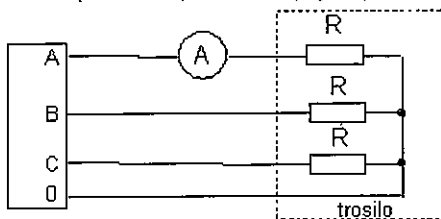
11) Hoće li se i kako promijeniti pokazivanje voltmetra ako se otvori sklopka (prekine se linijski vod faze R)?

- A) poveća se
- B) smanji se
- C) ostane jednako



12) Ampermetrom mjerimo linijsku struju. Kako se promijeni pokazivanje ampermetra ako otpornike prespojimo u trokut (nul vodič pri tom odspojimo)?

- A) poraste 3 puta
- B) poraste 1,73 puta
- C) ostane jednako
- D) smanji se tri puta
- E) smanji se 1,73 puta



13) Nesimetrično trošilo (u zvijezda spoju) je četverovodno spojeno na trofazni izvor. Koje od navedenih posljedica mogu nastupiti pri prekidu nul vodiča?

- A) nema nikakvih posljedica
- B) u nekim fazama se napon smanji, a u nekim se poveća
- C) u svim fazama se napon malo smanji
- D) u svim fazama se napon poveća
- E) u svim fazama napon padne na nulu

14) Nesimetrično trošilo je spojeno u trokut. Dolazi do prekida jednog linijskog voda. Koje posljedice nastupaju na trošilima u pojedinim fazama?

- A) u svim fazama se napon smanji
- B) u jednoj fazi se napon smanji u ostalima ostane jednak
- C) u dvije faze se napon smanji u trećoj ostane jednak
- D) u svim fazama se napon poveća
- E) nema nikakvih posljedica glede napona

15) Kako se promijeni snaga simetričnog trošila koje iz spoja zvijezda prespojimo u trokut spoj?

- A) ne promijeni se
- B) poraste 1,73 puta
- C) poraste 3 puta
- D) smanji se tri puta
- E) smanji se 1,73 puta

16) Simetrično trošilo u zvijezda spoju bez nul voda ima snagu P (ukupno). Kako se promijeni ukupna snaga ako pregori osigurač u jednoj od faza?

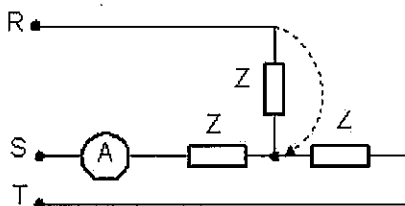
- A) smanji se dva puta
- B) smanji se tri puta
- C) poveća se 1,73 puta
- D) ne promijeni se
- E) smanji se 1,73 puta

17) Trofazno simetrično trošilo spojeno je četverovodno na trofazni izvor. Kako se promijeni snaga trošila ako se napon **jedne** faze smanji za 10%?

- A) smanji se 20 %
- B) smanji se 6,3 %
- C) smanji se 12 %
- D) smanji se 3,25 %

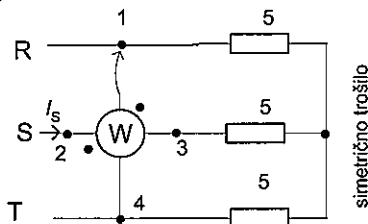
18) U simetričnom trošilu (bez nulvodiča) došlo je do kratkog spoja faze R i nultocke trošila. Kolika struja poteče kroz kratkospojnik ako je fazni napon 220 V, a Z je radni otpor od 100Ω ?

- A) 2,2 A
- B) 3,8 A
- C) 6,6 A
- D) beskonačno
- E) nula



19) Što pokazuje vatmetar u spoju na slici, ako je fazni napon 50 V? (1 i 4 su naponske, a 2 i 3 strujne priključnice).

- A) nulu
- B) 500 VA
- C) 1500 VA
- D) 866 VA
- E) 2600 VA



Odgovori na test pitanja XI

1.C 2.A 3.B 4.C 5.B 6.B 7.C 8.D 9.E 10.B 11.B 12.A 13.B 14.C 15.C 16.A 17.B
18.C 19.A

XII.1. PRIJELAZNE POJAVE

OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

Stacionarno stanje je stanje el. kruga u kojemu su uspostavljeni konačni, ustaljeni oblici struja i napona. Kod uključanja/isključenja izvora u krug s induktivitetom ili/i kapacitetom, zbog nemogućnosti trenutne promjene struje, odnosno napona, ovih elemenata, događa se da ne nastupa odmah stacionarno stanje.

Prijelazno stanje je stanje el. kruga u kojemu još nisu uspostavljeni konačni, ustaljeni oblici napona i struja, a nastaje nakon uključanja (ili isključenja) izvora u krug s induktivitetom ili/i kapacitetom.

Prijelazne pojave (tranzijenti) su vremenske promjene struja i napona tijekom prijelaznog stanja.

Vremenska konstanta τ je parametar kruga koji određuje trajanje prijelaznog stanja, a ovisi o elementima kruga. Uzima se da je

Trajanje prijelaznog stanja = 5τ .

RC-krug

- $\tau = RC$ - vremenska konstanta RC-kruga
- $i_C = ((U - U_0)/R)e^{-t/\tau}$ - struja nabijanja kondenzatora (s početnim naponom U_0) kod priključenja na izvor stalnog napona U
- $u_C = (U - U_{C0})(1 - e^{-t/\tau})$ - napon nabijanja kondenzatora (početnog napona U_{C0}) kod priključenja na izvor stalnog napona U
- $i_C = (U/R)e^{-t/\tau}$ - struja nabijanja praznog kondenzatora na stalni napon U
- $u_C = U(1 - e^{-t/\tau})$ - napon praznog kondenzatora kod nabijanja na stalni napon U
- $i_C = (U_0/R)e^{-t/\tau}$ - struja kod izbijanja kondenzatora početnog napona U_0
- $u_C = U_0e^{-t/\tau}$ - napon kod izbijanja kondenzatora početnog napona U_0 .

RL-krug

- $\tau = L/R$ - vremenska konstanta RL-kruga
- $i_L = (U/R)(1 - e^{-t/\tau})$ - struja kroz induktivitet u nakon priključenja RL-kruga na izvor stalnog napona U (uz početnu struju jednaku nuli)
- $u_L = Ue^{-t/\tau}$ - napon na induktivitetu nakon priključenja na stalni napon U (uz početnu struju jednaku nuli).
- * $i_L = I_m \sin(\omega t + \alpha_i) - I_m \sin \alpha_i e^{-t/\tau}$ - struja u RL-krugu nakon priključenja na izvor sinusnog napona *
 $U_m \sin(\omega t + \alpha_u)$, gdje je:
 $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ - vršna vrijednost (sinusoide) struje u stacionarnom stanju
 $\alpha_i = \alpha_u - \arctan(\omega L/R)$ - početni kut (sinusoide) struje u stacionarnom stanju.

LC-krug*

- $I_m = U_0 \sqrt{C/L}$ - vršna vrijednost (amplituda) sinusoidne struje kod priključenja svitka na kondenzator s početnim naponom U_0 , uz zanemarenje otpora kruga - slučaj tzv. *neprigušenog titranja* (energija stalno titra između C i L)
- $i = I_m \sin(\omega t)$ - vremenska promjena (sinusoide) struje kod priključenja svitka na kondenzator s početnim naponom U_0 - vlastito titranje kruga s kružnom frekvencijom:
- $\omega = \sqrt{LC}$

PRIMJERI XII.1

XII.1.P1. Prethodno nenabijeni kondenzator kapaciteta $C=220 \mu\text{F}$ priključuje se na izvor napona $U=100 \text{ V}$, preko serijski spojenog otpora $R=100 \Omega$. Nakon koliko vremena će se kondenzator nabiti. Odredite energiju koju je kondenzator pritom dobio od izvora.

Napomena: Kod prijelaznih pojava nastalih nakon promjena u el. krugu (npr. uključenje izvora) trenutak u kojem je došlo do promjene označava se kao $t=0$, dok se trenutak neposredno prije toga označava kao $t=0^-$, a trenutak neposredno poslije toga kao $t=0^+$.

Rješenje: U trenutku $t=0$ kondenzator nije bio nabijen. Neposredno nakon toga ($t=0^+$) napon na kondenzatoru još uvijek je nula (jer je kondenzator prazan) pa zatim postupno raste (kondenzator se nabija). Kondenzator se prestane nabijati kada njegov napon postane jednak naponu izvora. Važno je zapaziti da u svakom trenutku (prema Kirchhoffovom zakonu za napon) zbroj napona na otporniku i kondenzatoru mora biti jednaka naponu izvora ($U=u_R+u_C$). To znači da u trenutku $t=0^+$ napon na otporniku $u_R=U$, pa je (po Ohmovom zakonu) struja u tom trenutku $i=U/R$. Kako nabijanjem postupno raste napon na kondenzatoru, tako se smanjuje napon na otporu, pa time i struja. Struja, pa tako i napon na otporu smanjuje se po eksponencijalnom zakonu, tako da je $u_R(t)=U e^{-t/\tau}$. Prema tome napon na kondenzatoru ($u_C = U - u_R$) raste po funkciji $u_C(t)=U(1-e^{-t/\tau})$.

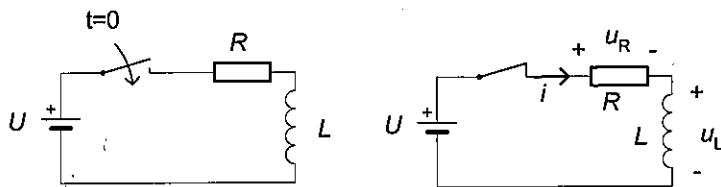
Veličina $\tau=RC$, o kojoj ovisi brzina promjene napona i struje naziva se *vremenska konstanta*. Uzima se da je nakon 5τ nabijanje praktički završeno tj. napon na kondenzatoru postane U . U ovom slučaju to se dogodi nakon 0,11 s, ili 110 ms.

Kako se napon na kondenzatoru povećava, tako se pojačava i električno polje. Za izgradnju polja, tj. razdvajanje naboja, izvor daje energiju koja ostaje spremjena u kondenzatoru. Iznos te energije je u ovom slučaju: $W_C=CU^2/2=1,1 \text{ Ws}=1,1 \text{ J}$

XII.1-P2. Kondenzator kapaciteta $C=220 \text{ pF}$ nabijen je na napon $U=100 \text{ V}$ i odspojen je od izvora. Ako se sada paralelno kondenzatoru spoji otpornik $R=10 \text{ k}\Omega$ dolazi do njegova izbijanja. Odredite: a) početnu struju izbijanja; b) trenutak u kojem će se napon na kondenzatoru smanjiti na 37% početnog napona U ; i c) struju u tom trenutku.

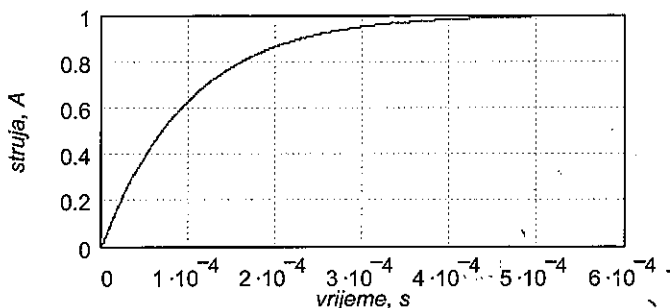
Rješenje: U času kada otpornik spojimo na nabijeni kondenzator, počinjemo mjeriti vrijeme („aktiviramo štopericu“). To je sada trenutak koji se označava kao $t=0$. Od tog trenutka napon na kondenzatoru (a zajedno s njim i napon na otporniku) se smanjuje po eksponencijalnoj funkciji $u_C(t)=U e^{-t/\tau}$. Nakon jedne vremenske konstante napon padne na $0,37U$, na nakon 5 vremenskih konstanti praktički se smanji na nulu. To znači da je potrošena sva energija koja je bila pohranjena u kondenzatoru. Odgovori su: a) $i(t=0^+)=U/R=0,01 \text{ A}$; b) $\tau=2,2 \mu\text{s}$; c) $i(\tau)=3,7 \text{ mA}$.

XII.1-P3. Svitak induktiviteta 10 mH priključuje se u trenutku $t=0$ na izvor napona od 100 V preko otpora od 100Ω . Odredite a) struju i napon svitka u trenutku priključenja b) vrijeme nakon kojeg će napon na svitku iznositi 37 V c) struju svitka u tom trenutku d) vrijeme nakon kojeg će napon na svitku praktički pasti na nulu e) struju svitka u tom trenutku.



Zadano: $L=0,01 \text{ H}$; $U=100 \text{ V}$; $R=100 \Omega$.

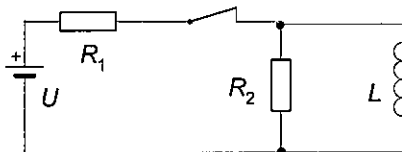
Rješenje: U trenutku uključenje struja je jednaka nuli. Nakon toga struja *postupno* (po eksponencijalnom zakonu) *raste* prema iznosu $U/R=1A$ kako je pokazano na grafu struje. Stanje u krugu za vrijeme porasta struje naziva se: prijelazno stanje. Praktički je trajanje tog stanja jednako 5 vremenskih konstanti: $\tau=L/R=0,1$ ms



Ovdje, naravno, vrijedi Kirchhoffov zakon za napone. Kada je struje u krugu nula, napon na otporniku jednak je nuli pa je napon na induktivitetu jednak naponu izvora U . Kako struja raste tako raste napon na otporniku ($u_R=iR$). Istovremeno napon na induktivitetu pada (suma tih dvaju napona uvijek je jednaka naponu izvora). Pokazuje se da nakon jedne vremenske konstante struja poprimi 63% konačnog iznosa, a da napon na induktivitetu padne na iznos $0,37U$. Matematički napisana funkcija porasta struje je $i(t)=U/R(1-e^{-t/\tau})$. Nakon uspostavljanja konačnog (stacionarnog) stanja struja u krugu je $U/R=1A$. U svitku je pohranjena magnetska energija $W_L=L^2/2$. Ta se energija mora potrošiti prilikom iskapčanja strujnog kruga. Odgovori su: a) 0A; 100 V; b) $\approx \tau=0.1$ ms; c).63 A; d) 0,5 ms; e) 1 A.

Napomena: Usporedite situaciju u pogledu napona i struje pri ukapčanju serijskog RC i serijskog RL spoja na izvor napona.

XII.1-P4. Svitak induktiviteta $L=100$ mH protječan strujom od 10 A, iskapča se iz strujnog kruga tako da se u trenutku $t=0$ otvara sklopka u spoju na na slici. Koliki je napon na otporu R_2 u trenutku iskapčanja. Nakon kojeg vremena će struja svitka praktički pasti na nulu? Zadano je: $L=0.1$ H, $i_L(t=0)=10$ A, $R_2=10$ Ω .



Rješenje: U trenutku $t=0$ kroz svitak prolazi struja od 10 A, zbog čega je svitak pun energije. Nagli prekid struje mogao bi prouzročiti neprilike, jer se energija mora potrošiti. Ako u krugu ne bi bilo otpora R_2 , pri otvaranju sklopke bi se paralelno induktivitetu pojavio vrlo veliki otpor (prijelazni otpor realne sklopke) pa bi se, nastojeći zadržati nepromijenjenu jakost struje, na induktivitetu inducirao visoki napon, koji bi u zraku između kontakata sklopke mogao dovesti do proboja (iskre) što bi moglo oštetiti sklopku. Zato se iskapčanje provodi tako da je pri prekidanju kruga paralelno svitku spojen otpornik manjeg otpora, kroz koji će nastaviti teći struja induktiviteta dok se ne „potroši“ njegova energija.. Ovdje je to otpor R_2 . Struja kroz induktivitet u trenutku iskapčanja mora ostati ista kao što je bila neposredno prije, tj. 10 A. Ta struja će nakon otvaranja sklopke nastaviti teći kroz otpor R_2 spojen paralelno svitku, a sada će ju tjerati u svitku inducirani napon, koji (zbog paralelnog spoja) mora biti jednak naponu na otporu R_2 , tj. $u_L=u_{R2}=i R_2$. Prema tome, u trenutku iskopčanja je

$$u_{R2}=10A \cdot 10\Omega = 100 \text{ V.}$$

Vremenska konstanta iskapčanja je $\tau=L/R_2=0,01$ s = 10 ms. Kako se energija svitka troši tako i struja (po eksponencijalnom zakonu) pada prema nuli, a uzimamo da je struja svitka praktički pala na nulu nakon isteka vremena od 5 vremenskih konstanti, a to je vrijeme:

$$t=5\tau=50 \text{ ms.}$$

ZADACI XII.1

XII.1-1. Kondenzator kapaciteta $C=10\mu\text{F}$ priključen je na napon U i nabijen. Ako je poznata energija na kondenzatoru $W_C = 5\text{ J}$ izračunajte napon izvora.

Rezultat: 1000 V

XII.1-2. Kondenzator kapaciteta $C=100\mu\text{F}$ priključen je na napon $U=100\text{ V}$ preko otpora $R=10\text{ k}\Omega$. Odredite vrijeme nakon kojeg će napon na kondenzatoru doseći iznos od $0,63U$.

Rezultat: nakon 1 s.

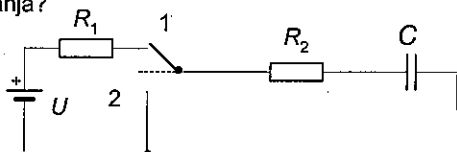
XII.1-3. Nenabijeni kondenzator nepoznatog kapaciteta C priključuje se na izvor napona U preko otpora $R=1000\Omega$. Ako se kondenzator u potpunosti nabije nakon 11 s koliki je kapacitet kondenzatora?

Rezultat: $2,2 \times 10^{-3}\text{ F}$

XII.1-4. U trenutku $t=0$ sklopku postavimo u položaj 1. Nakon 30 ms prebacimo je u položaj 2. Koliki će biti napon na kondenzatoru 12 ms nakon prebacivanja u položaj 2. Kolika je vremenska konstanta nabijanja, a kolika izbijanja?

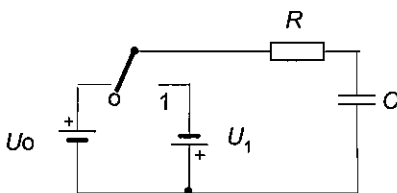
Zadano je $R_1=600\Omega$ $R_2=2,4\text{ k}\Omega$,
 $U=12\text{ V}$, $C=5\mu\text{F}$.

Rezultat: 3,82 V; 15 ms; 12 ms



XII.1-5. U krugu na slici sklopka je dulje vrijeme u položaju 0. U trenutku $t=0$ sklopka se prebacuje u položaj 1. Odredite napon na kondenzatoru i otporniku te struju u krugu u trenutku $t=0^+$ i konačan napon kondenzatora. Zadano: $U_0=20\text{ V}$; $U_1=40\text{ V}$; $R=100\Omega$

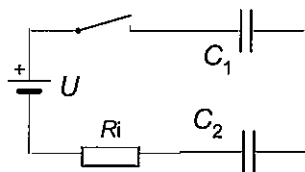
Rezultat: 20 V; 60 V; 600 mA; 40 V.



XII.1-6. U trenutku $t=0$ zatvori se sklopka u krugu na slici. Odredite napon na kondenzatoru C_2 u trenutku t_1 .

Zadano: $U=10\text{ V}$; $R_1=1\text{ k}\Omega$; $t_1=20\text{ ms}$; $C_1=30\mu\text{F}$; $C_2=60\mu\text{F}$

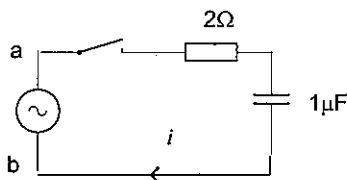
Rezultat: 2,1 V



Uputa: Odredite ukupni kapacitet C_{uk} serijskog spoja te napon na njemu. Zatim prema formuli za kapacitivno djelilo napona izračunajte napon na C_2 (vremenska konstanta je R_1C_{uk}).

XII.1-7. Sklopku zatvaramo u trenutku kada je napon $u_{ab}=-5\text{ V}$. Odredite struju, napon na kondenzatoru i napon na otporniku u trenutku $t=0^+$ (neposredno nakon zatvaranja sklopke).

Rezultat: -2,5 A, nula, 5 V



XII.1-8. Kondenzator je prazan. U trenutku $t=0$ zatvara se sklopka. Koliko će se naboja naći na kondenzatoru u momentu $t=150 \mu\text{s}$. Kolika struja u tom trenutku teče otpornikom R_2 .

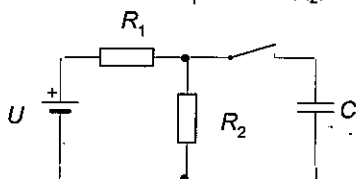
Zadano je: $R_1=4\text{ k}\Omega$, $R_2=12\text{ k}\Omega$, $C=25\text{ nF}$ i $U=120\text{ V}$

Rezultat: $1,945 \mu\text{As}$, $6,48\text{ mA}$.

Uputa: koristite Theveninov nadomjesni izvor tj.

kao da se kondenzator spaja na taj izvor.

($R_T=3\text{ k}\Omega$, $U_T=90\text{ V}$)



XII.1-9. Serijski RL-krug priključuje se u trenutku $t=0$ na istosmjerni naponski izvor U .

Izračunati vremensku konstantu kruga τ , te napon na otporu u trenutku t_1 .

Zadano: $R=2\ \Omega$, $L=0,01\text{ H}$, $U=10\text{ V}$; $t_1=5\text{ ms}$.

Rezultat: 5 ms ; $6,32\text{ V}$

XII.1-10. Odredite analitičke izraze za snage: p_i (snaga izvora), p_R i p_L u serijskom RL krugu nakon priključenja na naponski izvor. Odredite snage na elementima zadanog kruga za trenutak $t=0^+$ i trenutak $t=t_1=5\tau$.

Rezultat: $p_i=U^2(1-e^{-t/\tau})/R$, $p_R=U^2(1-e^{-t/\tau})^2/R$, $p_L=U^2(1-e^{-t/\tau})e^{-t/\tau}/R$.

Uputa: Snaga je umnožak napona i struje. Kod vremenski promjenjivih napona i struja i snaga će biti vremenski promjenjiva. Ako je jedna od tih veličina nula i snaga će biti nula. Graf snage može imati maksimum npr. kod snage na induktivitetu. Energija je površina ispod grafa koji prikazuje snagu.

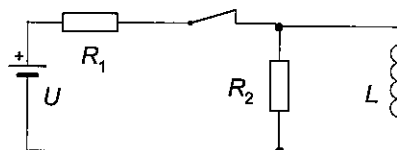
XII.1-11. U trenutku $t=0$ serijski RL-spoj priključuje se na izvor istosmjernog napona $U=10\text{ V}$. Izračunajte snagu izvora u trenutku $t=0,2\text{ s}$. Zadano je $R=5\ \Omega$, $L=1\text{ H}$.

Rezultat: $12,6\text{ W}$

XII.1-12. Nakon što je dulje vrijeme bila zatvorena, sklopka u krugu na slici otvori se u trenutku $t=0$.

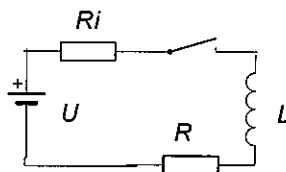
Odredite napon na induktivitetu u trenutku $t=0^+$.

Zadano: $U=12\text{ V}$; $R_1=20\ \Omega$; $R_2=20\text{ k}\Omega$.



Rezultat: 12 kV

XII.1-13. U trenutku $t=0$ zatvori se sklopka u krugu na slici. Ako u trenutku t_1 napon na induktivitetu iznosi U_L , odredite energiju pohranjenu u magnetskom polju svitka nakon završenog prijelaznog stanja. Zadano: $U=100\text{ V}$; $R_1=R=10\ \Omega$; $t_1=40\text{ ms}$; $U_L=60\text{ V}$.



Rezultat: $19,6\text{ Ws}$

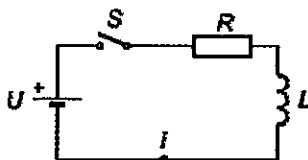
XII.1-14. Svitak otpora zavoja R_s priključuje se u trenutku $t=0$ na naponski izvor stalnog napona U i unutrašnjeg otpora R_i . Ako je u trenutku t_1 na svitku izmjeran napon U_s , odredite induktivitet svitka L_s . Zadano: $U=125\text{ V}$; $R_i=2\ \Omega$; $R_s=2\ \Omega$; $t_1=40\text{ ms}$; $U_s=85,5\text{ V}$.

Rezultat: 160 mH

TEST PITANJA XII.1

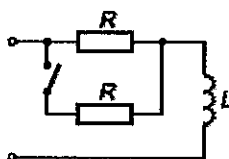
1) Koliki je napon na otporniku u trenutku $t=0^+$ (to je trenutak neposredno nakon zatvaranja sklopke)?

- A) nula
- B) U
- C) $U/2$
- D) $0,63 U$
- E) $0,37 U$



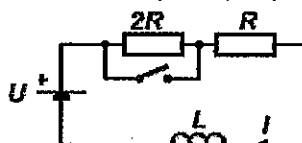
2) Hoće li se i kako promijeniti vremenska konstanta spoja nakon zatvaranja sklopke?

- A) ne mijenja se
- B) poraste dva puta
- C) smanji se dva puta
- D) poraste 4 puta
- E) smanji se 4 puta



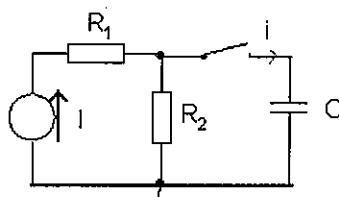
3) Koliki je napon na otporniku R neposredno nakon zatvaranja sklopke ($t=0^+$)

- A) $U/3$
- B) $2U/3$
- C) nula
- D) U



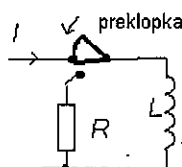
4) Koliki je konačni napon na kondenzatoru u prikazanom spoju?

- A) $I \cdot R_1$
- B) $I \cdot R_2$
- C) $I \cdot (R_1 + R_2)$
- D) $I \cdot R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$
- E) nula



5) Kroz zavojnicu $L=1$ H prolazi struja od 1 A. U nekom trenutku istovremeno s prekidom strujnog kruga na krajeve zavojnice spojimo otpornik od 1000Ω . Koliki je napon na stezaljkama zavojnice u taj čas?

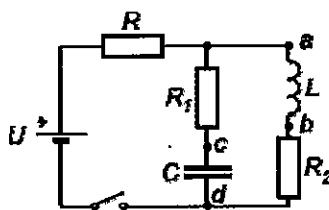
- A) 10 V
- B) 100 V
- C) 1000 V
- D) 10 kV



- 6) Koliki je napon na kondenzatoru 10 s nakon priključka serijskog RC spoja na naponski izvor od 10 V ako je $C=1 \mu\text{F}$ $R=10 \text{ M}\Omega$?
- A) 10 V
B) 6,3 V
C) 3,7 V
D) 5 V
- 7) Napunjeni kondenzator kapaciteta C spoji se na otpornik R . Koliko vremena treba da se potroši sva energija tog kondenzatora?
- A) $5R \cdot C$
B) $R/5C$
C) C/R
D) ovisi o naponu
E) $R \cdot C$
- 8) Serijski RLC krug uključuje se u trenutku $t=0$ na istosmjerni naponski izvor od 10 V. Koliki su neposredno nakon priključenja ($t=0^+$) naponi na elementima spoja? Odaberite točne odgovore
- A) na R je nula
B) na R je 10 V
C) na C je 10 V
D) na L je 10 V
E) na svim elementima je nula
- 9) Napunjeni kondenzator C se spaja na induktivitet L . Kakva bi se struja uspostavila u krugu ako su elementi idealni?
- A) eksponencijalno padajuća
B) eksponencijalno rastuća
C) sinusoidna stalne amplitude
D) sinusoidna padajuće amplitude
E) u takvom krugu nema struje

- 10) U trenutku zatvaranja sklopke za napon U_{cb} vrijedi ovo:

- A) $U_{cb} < 0$ (-na c)
B) $U_{cb} > 0$
C) $U_{cb} = \text{nula}$
D) nema dovoljno podataka



Odgovori na test pitanja XII.1

1.A	2.B	3.A	4.B	5.C	6.B	7.A	8.AD	9.C	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	-----	------

XII.2 NESINUSOIDNE PERIODIČKE VELIČINE

OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

Nesinusoidna periodička veličina je električna veličina čiji oblik vremenske promjene nije sinusoidalna, ali se nakon periode T periodički ponavlja, s frekvencijom $f=1/T$. Oblik vremenske promjene periodičke veličine naziva se **valni oblik**.

Vršna (tjemena) vrijednost Y_m je najveća (maksimalna) vrijednost koju doseže neka veličina $y(t)$.

Najmanja vrijednost Y_{min} je minimalna vrijednost koju doseže neka veličina $y(t)$.

Raspon vrijednosti Y_{pp} (engl. *pick-to-pick*) je razlika najveće i najmanje vrijednosti neke veličina $y(t)$.

Srednja vrijednost Y_{sr} je ona vrijednost koja površinu između te vrijednosti i krivulje vremenske promjene neke veličine (vertikalno) dijeli na dva jednaka dijela (dio površine gdje je krivulja iznad ove vrijednosti, jednak je dijelu površine gdje je krivulja ispod te vrijednosti) a definirana je i računa se ovom jednakžbom.

$$Y_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

Efektivna vrijednost I_{ef} struje (ili napona) je ona vrijednost koju bi trebala imati istosmjerna struja (ili napon) da na istom otporu R stvara istu srednju snagu P . Definirana je i računa se ovom jednakžbom, a obično se označava bez indeksa (samo I).

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}$$

Faktor oblika ξ (*kxi*) predstavlja omjer srednje i efektivne vrijednosti periodičke veličine.

$$\xi = \frac{Y_{ef}}{Y_{sr}}$$

Tjemeni faktor σ (*sigma*) predstavlja omjer efektivne i vršne vrijednosti periodičke veličine.

$$\sigma = \frac{Y_m}{Y_{ef}}$$

Kombinirani valni oblik je onaj koji se može prikazati kao zbroj jedne istosmjerne komponente (Y_0) i jedne izmjenične komponente $y_1(t)$. Efektivna vrijednost tako složenog valnog oblika računa se ovom jednakžbom, gdje je Y_{1ef} efektivna vrijednost izmjenične komponente. (Srednja vrijednost ovdje je jednaka istosmjernoj komponenti).

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_0^2 + Y_{1ef}^2}$$

Pulsni valni oblik predstavlja niz impulsa koji se periodički ponavljaju. Taj niz impulsa može biti neprekinut, ili isprekidan pauzama među impulsima.

- *Neprekinuti* niz nema pauza (cijela perioda T je ispunjena impulsima).
- *Isprekidani* niz impulsa ima samo dio periode T , ispunjen impulsima.

Faktor popunjenosti (T_i/T) (engl. *duty cycle*) impulsnog valnog oblika jest omjer dijela periode ispunjenog impulsima T_i i ukupne veličine periode T .

Srednja vrijednost isprekidanog niza impulsa može se izračunati kao umnožak srednje vrijednosti koju bi imao neprekinuti niz impulsa Y_{sr0} i faktora popunjenosti.

$$Y_{sr} = Y_{sr0} \cdot \frac{T_i}{T}$$

Efektivna vrijednost isprekidanog niza impulsa može se izračunati kao umnožak efektivne vrijednosti koju bi imao neprekinuti niz impulsa Y_{ef0} i (drugog) korijena iz faktora popunjenosti.

$$Y_{ef} = Y_{ef0} \cdot \sqrt{\frac{T_i}{T}}$$

PRIMJERI XII.2

XII.2-P1. Odredite srednju i efektivnu vrijednost pilastog napona koji tijekom svake periode $T=2$ s linearno poraste od nule do $U_m=50$ V i tad trenutačno padne na nulu. Nacrtajte graf zadanog napona kroz vrijeme 4 s.

$$\text{Rješenje: } u(t) = \frac{U_m}{T} \cdot t \quad U_{sr} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{U_m}{T} \cdot t \, dt \quad U_{sr} = \frac{U_m}{2} \quad U_{sr} = 25 \text{ V}$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{U_m}{T} \cdot t \right)^2 dt} \quad U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} \quad U_{ef} = 28.868 \text{ V}$$

Za usporedbu različitih valnih oblika važna su dva odnosa i to:

$$\sigma = \frac{U_m}{U_{ef}} \quad \sigma = 1.732 \quad \text{odnos maksimalne i efektivne vrijednosti}$$

$$\xi = \frac{U_{ef}}{U_{sr}} \quad \xi = 1.155 \quad \text{odnos efektivne i srednje vrijednosti}$$

Napomena: Srednja i efektivna vrijednost ne ovise o frekvenciji.

XII.2.-P2. Izračunajte srednju i efektivnu vrijednost za napon oblika pozitivnog pravokutnog impulsa koji ima trajanje $T_i=10$ ms i periodu ponavljanja $T=20$ ms. Vršna vrijednost je 5 V. Kolika je frekvencija tih impulsa? Koji je odnos impuls/pauza?

Rješenje: 2,5 V; 3,536 V *Uputa:* temeljem "definijske formule" izvedemo formulu za srednju i efektivnu vrijednost pravokutnih impulsa i dobijemo

$$U_m = 5 \quad f = 50 \text{ Hz} \quad T = \frac{1}{f} \quad T_i = 0.010 \text{ s}$$

$$U_{sr} = U_m \cdot \frac{T_i}{T} \quad U_{sr} = 2.5 \text{ V}$$

$$U_{ef} = U_m \cdot \sqrt{\frac{T_i}{T}} \quad U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad U_{ef} = 3.536 \text{ V}$$

Pitanje: Kolike su ove vrijednosti ako smanjimo trajanje impulsa na 1 ms?

Odgovor: $U_{sr}=0,25$ V, a $U_{ef}=1,118$ V

Komentar. Impulsni valni oblici imaju u novije vrijeme veliki značaj. Njihov oblik ne mora biti pravokutan. Općenitija formula za efektivnu vrijednost uzima u obzir efektivnu vrijednost neprekinutog niza impulsa U_{ef0} (u kojem nema razmaka između pojedinih impulsa) je ova:

$$U_{ef} = U_{ef0} \cdot \sqrt{\frac{T_i}{T}}$$

XII.2.P3. Ako se sinusna struja poluvalno ispravi i takva propusti kroz grijač otpora 100Ω izračunajte njegovu snagu. Amplituda struje I_m je 1 A .

Rješenje: potrebno je izračunati efektivnu vrijednost za poluvalno ispravljeni sinusni signal:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (I_m \cdot \sin(\omega t))^2 d\omega t} \quad I_{ef} = 0.5 \quad \text{A}$$

Pitanje: Kolika je srednja vrijednost ovako "ispravljene" struje? Odg.

$$I_{sr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi I_m \cdot \sin(\omega t) d\omega t \quad I_{sr} = 0.318 \quad \text{A}$$

$$P = I_{ef}^2 \cdot R = 25 \text{ W}$$

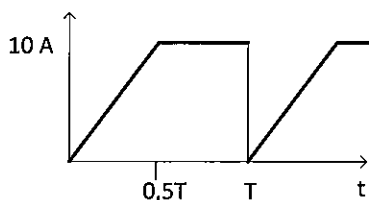
Pitanje 1: Kolika bi bila snaga istog grijača ako bi kroz njega propustili "normalnu" sinusnu struju jednake amplitude?

Odgovor 1. 50 W .

Pitanje 2. Kako bi izračunali efektivnu vrijednost poluvalno ispravljenog napona primjenom formule navedene u komentaru primjeru 2?

Odgovor 2: Poluvalno ispravljeni sinusni signal možemo smatrati nizom impulsa u obliku sinusnog poluvala.

XII.2-P4. Izračunajte efektivnu i srednju vrijednost struje koja ima valni oblik prikazan slikom.



Rješenje: Srednja vrijednost je zapravo srednja površina. Potrebno je izračunati ukupnu površinu (trokut+pravokutnik) za jednu periodu i podijeliti je sa T . Dobivamo $0,75 I_m = 7,5 \text{ A}$. Treba primjetiti da trajanje periode T (odnosno frekvencija) ne utječe na srednju vrijednost.

Za izračun efektivne vrijednosti ovaj valni oblik struje možemo zamisliti kao zbroj dvaju impulsnih nizova:

- 1) pilastog koji ima odnos $T_i/T = 1/2$ (prva polovina periode); i
- 2) pravokutnog koji ima $T_i/T = 1/2$ (druga polovina periode).

Efektivna vrijednost za pilasti niz impulsa je $I_1 = I_m / \sqrt{3} \cdot \sqrt{T_i/T} = I_m / \sqrt{6}$

Efektivna vrijednost za pravokutni niz impulsa je $I_2 = I_m \cdot \sqrt{T_i/T} = I_m / \sqrt{2}$

Ukupna efektivna vrijednost je $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 0,816 I_m = 8,16 \text{ A}$

Proračun putem integrala (definicije) prepuštamo onima koje veseli integriranje.

ZADACI XII.2

XII.2-1 Izračunajte efektivnu vrijednost za trokutasti napon koji ima napon od vrha do vrha $U_{pp}=8\text{ V}$, a srednja vrijednost mu je nula. Kolika bi bila efektivna vrijednost impulsa u obliku trokuta koji imaju trajanje $T_i=T/2$, a vršna vrijednost im je 4 V ? Nacrtajte grafove ovih valnih oblika.

Rezultat: $4/\sqrt{3}$; $4/\sqrt{3} \cdot \sqrt{1/2}$

XII.2-2. Na otporu $R=25\ \Omega$ srednja snaga iznosi $P = 400\text{ W}$. Kolika je vršna vrijednost struje ako je struja a) sinusna b) trokutasta c) pilasta d) poluvalno ispravljena sinusna e) pravokutna sa odnosom impuls/pauza jedan?

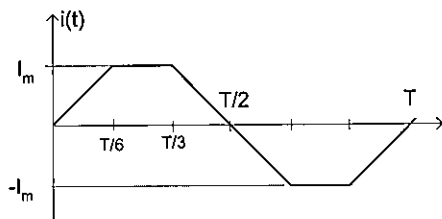
Rezultat: a) $I_m=5,64$ b) $6,92$ c) $6,92$ d) 8 A e) $5,64\text{ A}$.

Uputa: iz snage i otpora izračunamo potrebnu efektivnu vrijednost struje $I_{ef}=4\text{ A}$. Svaki od navedenih valnih oblika ima svoj odnos I_m/I_{ef} (taj odnos se proračuna temeljem definicije efektivne vrijednosti). Za sinus je to $1,41$ tj. maksimalna je $1,41$ puta veća od efektivne, za trokutasti signal to je $1,73$, za poluvalno ispravljeni sinus 2 itd.

XII.2-3. Pravokutni impulsi amplitude 5 V imaju trajanje 10 ms i efektivnu vrijednost $3,536\text{ V}$. Kolika je frekvencija njihova ponavljanja?

Rezultat: 50 Hz

XII.2-4. Izračunajte efektivnu vrijednost struje valnog oblika prema slici ako je $I_m=10\text{ A}$.



Rezultat: 7.5 A

Uputa: Za proračun efektivne vrijednosti možemo negativni dio okrenuti oko osi x . Time dobivamo jednostavniji valni oblik (sličan onome iz primjera P4) koji možemo rastaviti u zbroj dvaju impulsnih nizova.....

Pitanje 1: Kolika je efektivna vrijednost ako se I_m poveća na 20 A ?

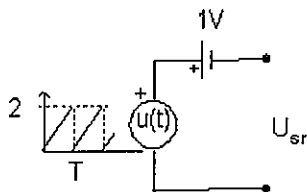
Pitanje 2: Da li efektivna vrijednost ovisi o veličini periode T odnosno frekvencije?

TEST PITANJA XII.2

- 1) Punovalni ispravljeni sinusni signal ima amplitudu 10 V. Kolika je efektivna vrijednost?
- A) ovisi o frekvenciji
 - B) 6,36 V
 - C) 7,07 V
 - D) 5 V
 - E) 10 V
- 2) Kolika je efektivna vrijednost poluvalno ispravljenog sinusnog napona koji ima srednju vrijednost 0,318 V?
- A) 0,707V
 - B) 0,5V
 - C) 1V
 - D) 1,41V
- 3) Pravokutni impulsi napona imaju amplitudu 10 V , trajanje 5 ms i frekvenciju ponavljanja 50 Hz. Kolike su srednja i efektivna vrijednost opisanog impulsnog niza?
- A) $U_{sr}=2,5$ V
 - B) $U_{sr}=5$ V
 - C) $U_{sr}=1$ V
 - D) $U_{ef}=5$ V
 - E) $U_{ef}=7,07$ V
- 4) U neprekinutom niz trokutastih impulsa trajanje impulsa je 1 ms. Kolika je frekvencija?
- A) 1 Hz
 - B) 10 Hz
 - C) 100 Hz
 - D) 1000 Hz
 - E) ovisi o amplitudi
- 5) Trokutasti impulsi imaju napon od vrha do vrha $U_{pp}=5$ V i srednju vrijednost 1 V. Kolika je vršna vrijednost napona?
- A) 1V
 - B) 3,5 V
 - C) 6 V
 - D) 4 V
- 6) Kolika je srednja vrijednost struje $i(t)=1+1\sin\omega t$?
- A) 1,41 A
 - B) nula
 - C) 1,318 A
 - D) 1 A
 - E) 1,636 A

7) Serijski su spojeni istosmjern i "pilasti" izvor ($U_{\max}=2\text{ V}$). Kolika je srednja vrijednost ukupnog napona?

- A) 0,58 V
B) 1 V
C) nula
D) 2 V
E) 3 V



8) Koji je izraz za izračun efektivne vrijednosti složenog valnog :

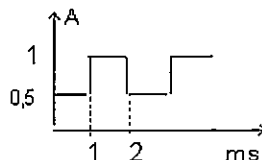
$$u = U_0 + U_{m1} \cdot \sin(\omega t) - U_{m2} \cdot \sin(3\omega t);$$

- A) A
B) B
C) C
D) D

A. $\sqrt{U_0^2 + U_{m1}^2 + U_{m2}^2}$ D. $\sqrt{U_0^2 + 0.25(U_{m1}^2 + U_{m2}^2)}$
B. $\sqrt{U_0^2 + U_{m1}^2 - U_{m2}^2}$ E. $\sqrt{U_0^2 + 0.5(U_{m1}^2 - U_{m2}^2)}$
C. $\sqrt{U_0^2 + 0.5(U_{m1}^2 + U_{m2}^2)}$

9) Kroz otpornik $R=1\ \Omega$ prolazi struja koja ima valni oblik prikazan slikom. Kolika je srednja snaga na otporniku?

- A) 0,625 W
B) 1 W
C) 1,41 W
D) 2,5 W
E) 2,25 W



Odgovori na test pitanja XII.2

1.C 2.B 3.AD 4.D 5.B 6.D 7.C 8.C 9.A

XIII. HARMONIČKI SLOŽENI VALNI OBLICI

OSNOVNI POJMOVI I ZAKONITOSTI

Harmonička analiza: svaka periodički promjenjiva (nesinusoidna) veličina može se rastaviti na niz pribrojnika, u kojemu jedan član može biti vremenski stalne vrijednosti, dok ostale članove čine sinusoide različitih frekvencija. Te frekvencije su sve cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije (frekvencija periodičke veličine). Ovakav odnos frekvencija naziva se harmonički pa se članovi ovoga niza nazivaju *harmonici*, a rastavljanje u takav niz *harmonička analiza*.

Nulti harmonik (istosmjerna komponenta) je član stalne vrijednosti i predstavlja *srednju vrijednost periodičke veličine* (nema ga kod onih veličina čija je srednja vrijednost jednaka nuli).

Prvi (osnovni) harmonik je sinusoidni član osnovne frekvencije, koja je ujedno jednaka i frekvenciji (ponavljanja) cijele periodičke nesinusoidne veličine.

Viši harmonici su sinusoidni članovi viših frekvencija (od kojih je svaka *cjelobrojni višekratnik* osnovne frekvencije).

Načelo superpozicije snage, koje vrijedi za djelovanje harmonički složenih struja i napona, kaže da je ukupna snaga na nekom elementu P jednaka zbroju snaga ($P_0 \dots P_n$) koje bi na tom elementu pojedinačno stvarao svaki od harmonika. Iz toga proizlazi slijedeće:

$$P = P_0 + P_1 + \dots + P_n$$

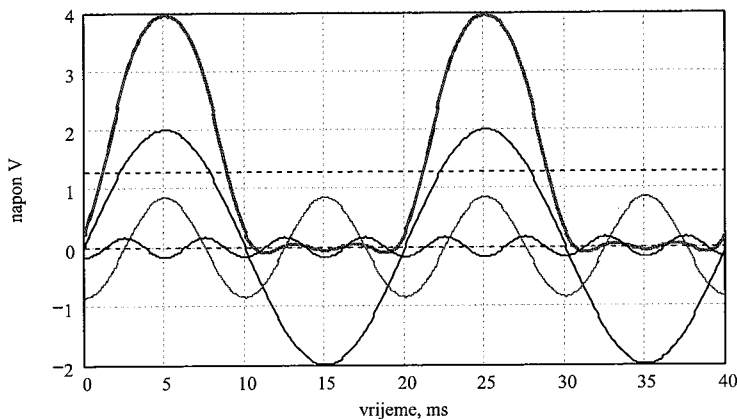
Efektivna vrijednost I harmonički složene struje jednaka je (drugom) korijenu iz zbroja kvadrata efektivnih vrijednosti (I_0, I_1, \dots, I_n) svih harmonika. Isto vrijedi i za efektivnu vrijednost napona.

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_n^2}$$

PRIMJERI XIII

XIII-P1 Otpornik $R=10\ \Omega$ priključen je na izvor nesinusoidnog napona, koji se može predstaviti složenim valnim oblikom: $u(t)=1,27+2\sin(\omega t)+0,85\sin(2\omega t-\pi/2)+0,17\sin(4\omega t-\pi/2)$ V. Treba: a) skicirati valni oblik tog napona za prvih 40 ms ako je $\omega=314\ \text{s}^{-1}$; b) izračunati efektivnu vrijednost napona te snagu na otporniku; c) nacrtati nadomjesni spoj izvora koji bi na svojim priključnicama dao takav napon.

Rješenje: a) Ako nacrtamo na istom grafu sva četiri napona možemo zbrojiti trenutne vrijednosti i tako dobiti graf ukupnog napona prema donjoj slici (za takav postupak pogodno je koristiti računalni program).



Ukupan napon je periodički signal koji prilično dobro predstavlja poluvalno ispravljeni sinusni napon amplitude 4 V. Podsjetimo se, poluvalno ispravljeni sinusni napon je sinusni napon kojemu je "odrezan" negativni poluval (kako bi se ovo moglo ostvariti?).

Pažljivijim pogledom, može se primjetiti da rezultatni napon nema baš ravno "odrezan" negativni poluval, tj. nije baš "idealno" ispravljeni sinusni napon (kao da tu nešto nedostaje). Radi pojašnjenja, ovdje ćemo reći nešto o postupku dobivanja ovih komponenata napona.

Amplitude pojedinih sinusnih komponenata napona nisu nasumce odabrane nego su dobivene matematičkim postupkom harmoničke analize, koji se (prema matematičaru, koji ju je opisao) još naziva i *Fourierova analiza*. Periodička funkcija može se "rastaviti" na niz komponenata, koji obuhvaća jednu istosmjernu komponentu i niz sinusnih komponenata raznih frekvencija koje su cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije (prvi, ili osnovni član). Sve to zajedno naziva se trigonometrijski red (*Fourierov red*) koji ima veliki broj članova. Članovi viših frekvencija sve manje utječu na oblik ukupnog napona, pa ako ih izostavimo imat ćemo jednostavniji opis napona (manje komponenata) ali dobiveni ukupni napon neće biti "idealno" tj. razlikovati će se od stvarnog, a takav je slučaj upravo u ovom primjeru.

Sam postupak "rastavljanja" (harmonička analiza) nije u programu ovog predmeta, već su to postupci računanja s već harmonički "rastavljenim" strujama i naponima. Treba reći da je za tipične periodičke funkcije (pilaste, trokutaste, pravokutne i sl.) harmonička analiza već napravljena, pa se za njih u matematičkim priručnicima mogu pronaći pripadni harmonici. Isto tako su napravljeni programi koji rade Fourierovu analizu i za druge, po volji zadane, valne oblike signala. Mogućnost takvog rastavljanja signala uz *metodu superpozicije* omogućava nam primjenu fazorske metode u rješavanju krugova s nesinusoidni strujama i naponima (koje, zapamtimo to, same *ne možemo predstaviti fazorima!*).

b) Efektivna vrijednost napona u ovom zadatku može se izračunati na dva načina. Osnovna mogućnost je korištenje formule za efektivnu vrijednost harmonički sastavljenih valnih oblika:

$$U'_{ef} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} = 1,997 \text{ V}$$

(gdje su U_1 , U_2 i U_3 efektivne vrijednosti napona pojedinih harmonika).

Drugi način je, znajući da zadani harmonici predstavljaju poluvalno ispravljeni sinusni napon, pomoću poznatog tjemnog faktora ($\sigma=2$) za poluvalno ispravljeni sinusni napon, što daje:

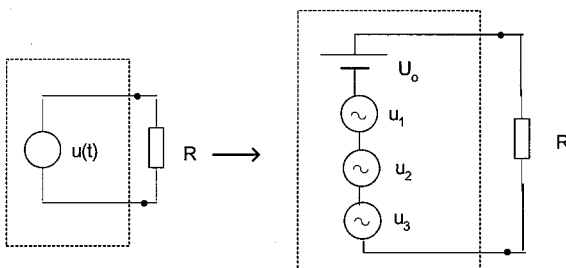
$$U_{ef} = U_m/2 = 2 \text{ V.}$$

Vidimo da je ovako određena (stvarna) efektivna vrijednost U_{ef} poluvalno ispravljenog napona nešto veća od vrijednosti U'_{ef} dobivene nadomještanjem tog napona s nekoliko prvih harmonika, pri čemu odstupanje iznosi samo 0,15%.

Snaga na otporniku je $P = U_{ef}^2/R = 400 \text{ mW}$ (za poluvalno ispravljeni sinusni napon) odnosno $P' = U_{ef}'^2/R = 398,8 \text{ mW}$ (za napon predstavljen s prva tri harmonika, prema zadatku).

Vidimo da se poluvalno ispravljeni sinusni valni oblik može nadomjestiti s harmonički složenim valnim oblikom koji (uz nulti) sadrži samo prva tri harmonika, a da je pritom pogreška u određivanju efektivne vrijednosti valnog oblika ispod 0,2%.

c) Zadani izvor možemo nadomjestiti serijskim spojem 4 izvora (jedan istosmjerni i 3 sinusna s frekvencijama f , $2f$ i $3f$) čiji naponi predstavljaju komponente napona iz zadatka (slika).



Zaključujemo da izvor poluvalno ispravljenog sinusnog napona (s dovoljnom točnošću) možemo zamijeniti s istosmjernim izvorom u seriji sa tri sinusna izvora. Parametri takvih "zamjenskih" izvora dobivaju se Fourierovom analizom. Isto vrijedi i za druge periodičke nesinusne signale. Ako je srednja vrijednost nesinusnog signala jednaka nuli, tada nema istosmjernog izvora. Parametre "zamjenskih" izvora možemo zorno prikazati linijskim spektrom amplituda (ili faza) u kojem na apcisu nanosimo frekvencije (0 , f , $2f$, $3f$ itd) a na ordinatu iznos amplitude (ili faze). Linijske spektre nekih češćih valneih oblika možete pogledati na WebOE : *Fourierova analiza*

XIII-P2. Na serijski spoj otpora R i induktiviteta L priključen je nesinusoidni napon $u(t)$. Fourierovom se analizom pokazalo da se taj napon s dovoljnim točnošću može prikazati kao: $u(t) = 10 + 50 \sin \omega t + 25 \sin 3\omega t \text{ V}$, gdje je $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$. Odredite a) valni oblik struje; b) srednju snagu na otporu. Nacrtajte valni oblik zadanog napona i napona na otporu. Da li se efektivne vrijednosti zadanog napona i izračunate struje mogu mjeriti običnim multimetrom?

Zadano: $R = 5 \Omega$ $L = 0.02 \text{ H}$

Rješenje:

Amplitude sastavnica napona su: $U_0 = 10 \text{ V}$; $U_1 = 50 \text{ V}$; $U_3 = 25 \text{ V}$

Istosmjerna komponenta (nulti harmonik) daje istosmjernu komponentu struje:

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \quad I_0 = 2$$

Prvi (osnovni) harmonik daje struju amplitude i faze kako slijedi:

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}} \quad \varphi_1 = \operatorname{atan}\left(\omega \cdot \frac{L}{R}\right) \quad \varphi_1 = 0.898 \text{ rad} \quad I_1 = 6.229 \text{ A}$$

$$i_1(t) = I_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1)$$

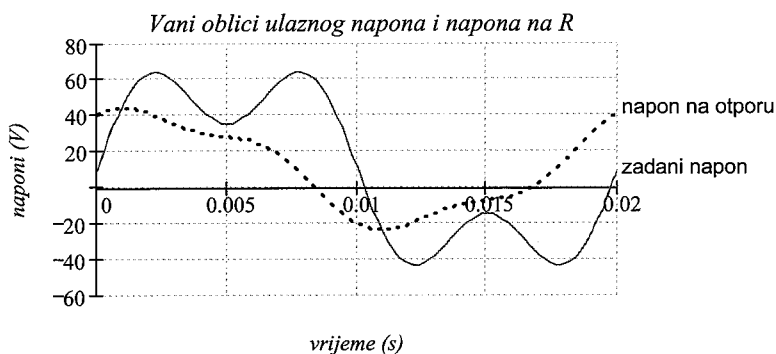
Treći harmonik daje struju amplitude i faze kako slijedi:

$$I_3 = \frac{U_3}{\sqrt{R^2 + (3 \cdot \omega \cdot L)^2}} \quad \varphi_3 = \operatorname{atan}\left(3 \cdot \omega \cdot \frac{L}{R}\right) \quad \varphi_3 = 1.311 \text{ rad} \quad I_3 = 1.283 \text{ A}$$

$$i_3(t) = I_3 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_3)$$

Ukupna struja je: $i(t) = I_0 + I_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) + I_3 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t + \varphi_3)$

Napon na otporu je $u_R(t) = i(t) \cdot R$



b) snagu možemo izračunati na dva načina:

1. Preko efektivne vrijednosti struje

$$I = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{I_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \quad I = 4.921 \quad P = I^2 \cdot R \quad P = 121.104 \text{ W}$$

2. Zadani spoj gledamo kao dvopol, pa snagu računamo preko pripadnih harmonika struje i napona (pri čemu *snagu daju samo harmonici iste frekvencije!*). Tako dobivamo

$$P = U_0 \cdot I_0 + \frac{U_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_1}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\varphi_1) + \frac{U_3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_3}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\varphi_3) \quad P = 121.104$$

Za mjerenje nesinusnih struja i napona postoje posebni instrumenti. Dolaze pod nazivom: multimetar za mjerenje prave efektivne vrijednosti (eng.: *true rms*). Pažnja: obični multimetri predviđeni su samo za mjerenje efektivnih vrijednosti sinusoidnih struja i napona.

Napomena: Ovaj spoj različito reagira na pojedine sastavnice pobude. Istosmjerni dio pobude "vidi" samo otpor R jer je L za taj dio signala (u stacionarnom stanju) kratki spoj. Za frekvenciju 3ω induktivni otpor je veći, pa će to znatno smanjiti udio trećeg harmonika u struji, a zbog toga i u naponu na otporu. Treći harmonik napona većim se je dijelom na induktivitetu. Ako npr. napon na otporu razmatramo kao izlazni napon tada zaključujemo da dolazi do promjene valnog oblika signala (pogledajte grafove).

Pitanja za razmatranje:

1. Kako bi se promijenili naponi (koje bi im bile sastavnice) ako bi induktivitet zamijenili s kapacitetom uz jednaku pobudu.
2. Da li bi došlo do promjene (i kakve) valnog oblika ako se nesinusna pobuda dovede na spoj sastavljen isključivo od otpora?

XIII-P4. Na serijski RLC-spoj priključen je izvor nesinusoidnog napona, koji se može opisati jednadžbom $u(t) = 30 \cdot \sin \omega t + 15\sqrt{2} \cdot \sin 2\omega t$. Odredite radnu snagu izvora. Zadano je: $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$, $R = 3 \text{ } \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ i $C = 0,25 \text{ mF}$.

Rješenje:

Napon ima dva harmonika, prvi efektivne vrijednosti $U_1 = 30/\sqrt{2} \text{ V}$ i drugi efektivne vrijednosti $U_2 = 15 \text{ V}$. za odrediti snagu, potrebno je izračunati odgovarajuće harmonike struje.

prvo izračunamo reaktivne otpore za kružnu frekvenciju ω .

$$X_{L\omega} = \omega L = 1 \text{ } \Omega \quad X_{C\omega} = 1/(\omega C) = 4 \text{ } \Omega$$

Za dvostruku frekvenciju je induktivni otpor dva puta veći, a kapacitivni upola manji:

$$X_{L2\omega} = 2\omega L = 2 \text{ } \Omega \quad X_{C2\omega} = 1/(2\omega C) = 2 \text{ } \Omega$$

Valja primjetiti da su pri frekvenciji 2ω induktivni i kapacitivni otpor međusobno jednaki (što se u tom slučaju događa u krugu?).

Prividni otpor na kružnoj fekvenciji ω je $Z_\omega = \sqrt{R^2 + (X_{L\omega} - X_{C\omega})^2} = 3\sqrt{2} \text{ } \Omega$, pa je efektivna vrijednost prvog harmonika struje

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_\omega} = 5 \text{ A.}$$

Na kružnoj frekvenciji 2ω induktivni i kapacitivni otpor su međusobno jednaki, pa dolazi do rezonancije, što znači da je impedancija jednaka otporu R , tj. $Z_{2\omega} = R = 3 \text{ } \Omega$, pa je efektivna vrijednost drugog harmonika struje

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_{2\omega}} = 5\sqrt{2} \text{ A.}$$

Radna snaga izvora ovdje predstavlja snagu na otporniku, koja je jednaka

$$P = I_{\text{ef}}^2 R = (I_1^2 + I_2^2) R = 150 \text{ W.}$$

ZADACI XIII.

XIII-1. Kroz otpornik $R=1\ \Omega$ prolazi vremenski promjenjiva struja $i(t)=1+2\sin\omega t$. Izračunajte srednju snagu. Kolika bi bila ta snaga ako struja nema istosmjernu komponentu? Koji element može "zaustaviti" istosmjernu komponentu, a propuštati izmjeničnu?

Rezultat: 3 W, 2W, kondenzator.

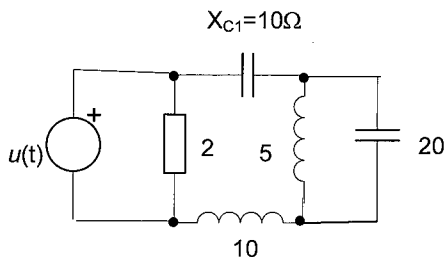
XIII-2. Efektivna vrijednost napona zadanog izrazom $u(t)=1+U_{1m}\sin\omega t$ V jednaka je 1,73 V. Kolika je veličina U_{1m} ?

Rezultat: 2 V

XIII-3. Kolika je perioda napona zadanog izrazom $u(t)=10\sin 100t + 1\sin(300t+\pi/2)$ V?

Rezultat: 62,8 ms

XIII-4. U spoju prema slici napon izvora je $u(t)=4\sin\omega t + 1\sin 2\omega t$ V. Iznosi reaktivnih otpora zadani su za frekvenciju ω . Kolika je efektivna vrijednost struje kroz kapacitet C_1 ?



Rezultat: 0,43 A uputa: koristite superpoziciju, za 2ω induktivni su otpori dva puta veći, a kapacitivni dva puta manji! Obratite pozornost na eventualne rezonancije...

XIII-5. Analizom valnih oblika struje i napona na priključnicama jednog dvopola dobiveno je da se napon i struja s dovoljnom točnošću mogu prikazati u obliku:

$$u(t)=50+50\sin(5\cdot 10^3t)+30\sin(10^4t)+20\sin(2\cdot 10^4t) \text{ V, te}$$

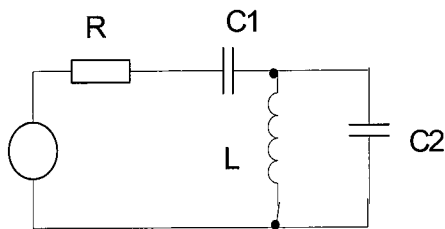
$$i(t)=11,2\sin(5\cdot 10^3t+63,4^\circ)+10,6\sin(10^4t+45^\circ)+8,97\sin(2\cdot 10^4t+26,6^\circ) \text{ A.}$$

Kolika je srednja snaga tog dvopola ?

Rezultat: 317,7 W

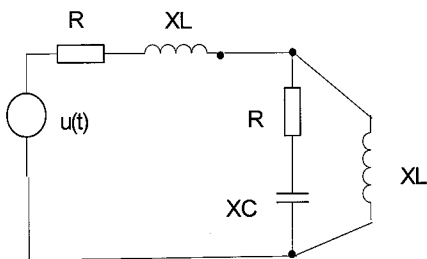
XIII-6. U spoju prema slici, napon izvora je složenog valnog oblika danog slijedećim izrazom: $u(t)=100+141\sin\omega t+14,1\sin3\omega t$ V. Ako je $R=2,5\ \Omega$, $1/(\omega C_1)=1,125\ \Omega$, $\omega L=1\ \Omega$, i $1/(\omega C_2)=9\ \Omega$, izračunajte efektivnu vrijednost:

- ukupne struje;
- napona na serijskoj kombinaciji RC_1 ;
- napona na paraleli LC_2 .



Rezultat: 40 A; 148.4 V ; 46,1 V

XIII-7. Napon izvora u krugu na slici ima prvi i peti harmonik. Efektivna vrijednost struje prvog (osnovnog) harmonika u lijevoj grani iznosi $I_{C1}=2$ A, a petog harmonika u desnoj grani $I_{L5}=0,1$ A. Ako su vrijednosti otpora za osnovni harmonik $R=X_L=X_C=5\ \Omega$, odredite efektivnu vrijednost priključenog napona.



Rezultat: 31,13 V

XIII-8. Na serijski RC spoj $R=8\ \Omega$ i $C=31,8\ \mu\text{F}$ priključen je napon složenog oblika kojemu je osnovna frekvencija $f_1=500$ Hz. Efektivna vrijednost priključenog napona je $U=120$ V, a efektivne vrijednosti viših harmonika su $U_3=0,6U_1$, $U_5=0,25U_1$ i $U_7=0,132U_1$. Izračunajte: a) efektivnu vrijednost struje b) radnu snagu koja se troši u mreži.

Rezultat: 11 A ; 968 W

XIII-9. Na serijski spoj $R=5\ \Omega$, $C=50\ \mu\text{F}$ i $L=5$ mH priključen je napon koji se može prikazati ovako: $150\cdot\sin1000t+100\cdot\sin2000t+75\cdot\sin3000t$ V. Odredite srednju snagu na otporu.

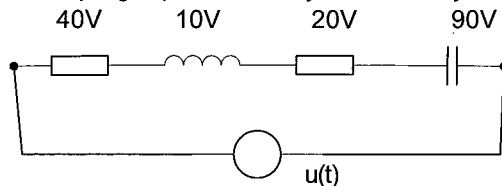
Rezultat: 1374 W

XIII-10. Otpornik $R=5\ \Omega$ spojen je u seriju s paralelnom kombinacijom induktiviteta i kapaciteta. Odredite ukupnu struju $i(t)$ ako je spoj priključen na napon $u(t) = 50 + 20 \sin 500t + 10 \sin 1000t$ V, a za osnovnu frekvenciju $X_L=2\ \Omega$ i $X_C=8\ \Omega$. Kolika je radna snaga spoja?

Rezultat: $i(t)=10+3,53 \sin(500t-0,49)$ A, $P=531$ W

Napomena: Na $1000\ \text{s}^{-1}$ paralela dolazi u rezonanciju i ne propušta struju!

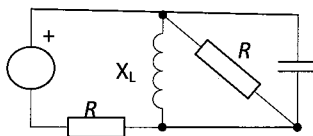
XIII-11. U spoju prema slici struja je sastavljena od prvog i trećeg harmonika, pri čemu je amplituda trećeg harmonika upola manja od amplitude prvog harmonika. Na slici su označene efektivne vrijednosti prvog harmonika napona na pojedinim elementima. Kolika je istosmjerna komponenta ukupnog napona, ako mu je efektivna vrijednost 115 V?



Rezultat: 48 V

XIII-12 Spoj prema slici priključen je na napon $u(t)=40 \sin \omega t+16 \sin 2 \omega t$. Zadan je $R=1,33 \Omega$ i reaktivni otpori za kružnu frekvenciju ω $X_L=1 \Omega$ $X_C=4 \Omega$. Izračunajte efektivnu vrijednost struje izvora.

Rezultat: 14 A



XIII-13. Otpornik $R=5 \Omega$ spojen je u seriju sa paralelnim spojem L i C . Na frekvenciji $\omega=500$ rad/s reaktancije su $X_L=2 \Omega$, $X_C=8 \Omega$. Odredite efektivnu vrijednost ukupne struje ako je spoj priključen na napon: $u(t)=50+66,57 \sin(500t)+50,5 \sin(1000t)$ V.

Rezultat: 13 A

TEST PITANJA XIII

1) Otpornik $R=5\ \Omega$ spojen je u seriju sa paralelnim spojem L i C . Na frekvenciji $\omega=500\text{ rad/s}$ reaktancije su $X_L=2\ \Omega$, $X_C=8\ \Omega$. Odredite efektivnu vrijednost ukupne struje ako je spoj priključen na napon: $50+66,57\sin(500t)+50,5\sin(1000t)\text{ V}$.

- A) 3,83 A
- B) 10 A
- C) 10,31 A
- D) 13 A
- E) 16 A

2) Koji je izraz za izračun efektivne vrijednosti složenog valnog :

$$u=U_0+U_{m1}\cdot\sin(\omega t)-U_{m2}\cdot\sin(3\omega t):$$

- A) A
 - B) B
 - C) C
 - D) D
- $$A. \sqrt{U_0^2 + U_{m1}^2 + U_{m2}^2}$$

$$D. \sqrt{U_0^2 + 0,25(U_{m1}^2 + U_{m2}^2)}$$
- $$B. \sqrt{U_0^2 + U_{m1}^2 - U_{m2}^2}$$

$$E. \sqrt{U_0^2 + 0,5(U_{m1}^2 - U_{m2}^2)}$$
- $$C. \sqrt{U_0^2 + 0,5(U_{m1}^2 + U_{m2}^2)}$$

3) Kolika je srednja vrijednost struje $i(t)=1+1\sin\omega t$ A?

- A) 1,41 A
- B) nula
- C) 1,318 A
- D) 1 A
- E) 1,636 A

4) Kolika je efektivna vrijednost struje $i(t)=1+1,41\sin\omega t$ A?

- A) 1,41 A
- B) nula
- C) 1,318 A
- D) 1 A
- E) 2 A

5) Napon $u(t)=1+1\sin\omega t$ V priključen je na kondenzator koji ima $X_C=1\ \Omega$.

Kolika je efektivna vrijednost struje ?

- A) 1,41 A
- B) nula
- C) 1,318 A
- D) 1 A
- E) 0,707 A.

6) Napon $u(t)=8\sin\omega t-4\sin3\omega t$ V priključen je na otpornik $R=4\ \Omega$. Kolika je snaga ?

- A) 8 W
- B) 10 W
- C) 12 W
- D) 100 W
- E) 70,7 W

7) Napon $u(t)=6\sin\omega t+3\sin 3\omega t$ V priključen je na kondenzator koji na frekvenciji ω ima kapacitivni otpor od $3\ \Omega$. U kojem su odnosu efektivne vrijednosti struje prvog i trećeg harmonika I_1/I_3 ?

- A) 1
- B) 2
- C) 6
- D) $2/3$
- E) 1,5

8) Napon $u(t)=6\sin\omega t+3\sin 3\omega t$ V priključen je na zavojnicu koja na frekvenciji ω ima induktivni otpor od $3\ \Omega$. U kojem su odnosu efektivne vrijednosti struje prvog i trećeg harmonika I_1/I_3 ?

- A) 1
- B) 2
- C) 6
- D) $2/3$
- E) 1,5

9) Napon $u(t)=6\sin\omega t+3\sin 3\omega t$ V priključen je na serijski spoj kondenzatora koji na frekvenciji ω ima kapacitivni otpor od $3\ \Omega$ i otpornika $R=3\ \Omega$. Kakav je odnos efektivnih vrijednosti struje prvog i trećeg harmonika I_1/I_3 ?

- A) 1
- B) manji od 1
- C) veći od 1

10) Za neki dvopol, koji se sastoji od dva serijski spojena elementa, poznati su napon $u(t)=6\sqrt{2}\sin\omega t+U_m\sin 3\omega t$ V i prvi harmonik struje $i_1=2\sin(\omega t+\pi/4)$ A. Taj dvopol se sastoji od:

- A) R i C
- B) R i L
- C) dva otpornika
- D) dva kondenzatora
- E) nema dovoljno podataka da bi se to ustanovilo

11) Poznati su napon $u(t)=6\sqrt{2}\sin\omega t+U_m\sin 3\omega t$ V i struja nekog dvopola $i(t)=2\sin(\omega t+\pi/4)+1\sin(3\omega t+0.322)$. Kolika je radna snaga?

- A) 1 W
- B) 2 W
- C) 3 W
- D) 6 W
- E) 7.5 W

Odgovori na test pitanja XIII

1.D;2.C;3.D;4.A;5.E;6.B; 7.D;8.C; 9.C;10.A;11.E

A. Pavić – I. Felja: OSNOVE ELEKTROTEHNIKE Primjeri i zadaci za vježbu 2. dio (ispravci)

Stranica	Redak	Zadatak	Stoji	Treba stajati
VIII-7	20	VIII-3	Rješenje: 12,2 μF	Rješenje: 14 μF
X-12	Slika	X-13	?	Ω
XII-3	23	Osnovni pojmovi (Tjemeni faktor)	$\sigma = \frac{Y_{ef}}{Y_m}$	$\sigma = \frac{Y_m}{Y_{ef}}$
XIII-1	19	Osnovni pojmovi (Načelo superpozicije snage)	$P = P_0^2 + P_1^2 + \dots + P_n^2$	$P = P_0 + P_1 + \dots + P_n$