3.4. Elementarne matrice. Ekvivalentne matrice

- elem. transf. mogu se opisati pomoću množenja s mat. triju tipova koji se neznatno razlikuju od jedinične

Pr. 10.)

KORAK 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & -8 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -8 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

stožerni element

Ovu operaciju možemo realizirati tako da mat A s lijeva pomnožimo sa $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ koja je iz jedinične istom transf. dobivena (zamjena 1. i 3. reda)

$$\hookrightarrow E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -8 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = A_1$$

KORAK 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -8 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} :2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

→ ove el. transf. (množenje skalarom λ) opisuje mat. koja na dijagonali na odgovarajućem mjestu umjesto 1 ima λ

$$\hookrightarrow E_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -8 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

KORAK 3. Pomoću stožernog el. možemo poništiti sve preostale el. u prvom stupcu (treća el. transf.)

Npr.
→ množimo prvi red sa $-a_{21}$ i dodajemo ga drugom retku
isti postupak ponovimo dalje

$$\cdot(\times 2) \quad \times 1. \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

* E_3 – el. 3. reda pomnožen brojem λ dodajemo drugom retku
Mi smo prvi redak pomnožili s 2 i dodali ga drugom: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3$

→ pokušajmo sa $E_3 \cdot A_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- postupak nastavljamo tražeći među el. drugog stupca ne-nul el.
- smijemo birati u samo preostalim retcima

3.5. Rang i inverz matrice

Rang - broj ne-nul redaka u reduciranom obliku mat.
↳ rang(A)

→ broj linearno nezavisnih redaka u matrici

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$r = 3$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$r = 2$

nije proporc. nijednom
⇒ lin. nez.

linearno nez

⇒ lin. ovisan o 1. i 2.

⇓

2 neovisna = rang 2

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

dobije se ako se 1. množi s 1
dobije se ako se 1. množi s 2

rang = 1

→ 1. redak je lin. nez. jer se ne može dobiti niti jedan drugi redak množenjem konstantom.

⇒ rang(A) nije veći od broja redaka matrice - rang(A) ≤ m
⇒ -//- nije veći ni od broja stupaca - rang(A) ≤ n

$\boxed{\text{LEMA 8.}}$ Kvad. mat. A reda n ima rang jednak n ako i samo ako je $A_R = I$.

$\boxed{\text{LEMA 9.}}$ Ako je kvad mat. A reg. i B ekvivalentna s njom, tad je mat B regularna.

TEOREM 10. Kvad mat A je reg. ako i samo ako ($\Longleftrightarrow$) ima puni rang.

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da je A kvad. mat. reda n.

Puni rang ako je $rang(A) = n$. $\overset{L.8.}{\Longrightarrow}$ $A_R = I$

→ mat. se može dobiti nizom el. transf. iz mat A

$\Downarrow$

Zaključujemo da je mat A reg. mat

$\boxed{\Leftarrow}$ A je reg., svedemo je na reduc oblik A_R

1. slučaj

- A_R nema niti jedan nul-redak

↳ ima n stožernih el.

↳ $rang(A) = n = rang(A_R)$

2. slučaj ↯

- A_R ima bar jedan nul-redak

$\Downarrow$

mat A_R nije reg. jer $det(A_R) = 0$

$\Downarrow$ L.9.

mat A nije reg jer je $\sim A_R$

· mat A je kvad. mat punog ranga

Algoritam za računanje inverzne mat

1. napišimo mat tipa $n \times 2n$ u kojoj je s desna napisana jedinična mat. I.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \text{skraćeno } [A \mid I]$$

2. primjenimo el. transf. na mat A. *(sve transf. vršimo i na desnoj str.)

rezultat niza transf:

$$[A \mid I] \sim [A_1 \mid E_1] \sim [A_2 \mid E_2] \sim \cdots \sim [A_R \mid E_n \cdots E_1]$$

rezultat je mat oblika $[A_R \mid B]$

3. ako je $A_R = I$; mat je regularna i $B = A^{-1}$

ako je $A_R \neq I$; nije regularna i ne postoji njen inverz

Pr. 12) Odredi inverz mat $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[A \mid I\right] \xrightarrow[\text{dobit}]{\text{trebamo}} \left[I \mid A^{-1}\right]$$

$$\det(A) = -1\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\,(2+8) = \underline{\underline{10}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & -(2+8) & 0 \\ 2 & 4-12 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\cancel{\begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 2 & -8 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}} = \cancel{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}}^T$$

neš sam fulala

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{-4}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{to želimo dobiti}$$

* basically transform. tako da dobijem I s lijeva (na to se koncentriram)

Postupak

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \\ \cdot(-4) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]\cdot 2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} +\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\ +\cdot(-2) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right]\cdot\frac{1}{10} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right] + \cdot(2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right] + \cdot 7 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right] = A^{-1} \Rightarrow \text{regularna je}$$