Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja

2. TEMA

OSNOVNI MJERITELJSKI POJMOVI

Predmet "Mjerenja u elektrotehnici"

Prof.dr.sc. Damir Ilić

Zagreb, 2020.

Teme cjeline

- Međunarodni mjeriteljski dokumenti
- Osnovni mjeriteljski pojmovi vezani uz mjerenje
- Kako pristupiti mjerenju?
- Metoda najmanjih kvadrata
- Gaussova razdioba
- Studentova *t*-razdioba
- Slučajni i sustavni učinci

Osnovni mjeriteljski dokumenti

- **Dva osnovna dokumenta, donesena s međunarodnom suglasnošću na svjetskoj razini:**

- ***International vocabulary of metrology - Basic and general concepts and associated terms (VIM)*, 3rd edition, JCGM 200:2012**

- ***Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*, JCGM 100:2008**

- **Na prikaznicama što slijede pojmovi su prevedeni na hrvatski jezik (to nije "službeni" prijevod)**

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Mjeriteljstvo (*metrology*)** - znanost o mjerenju i njegovim primjenama

- **Mjerenje (*measurement*)** – proces eksperimentalnog određivanja jedne ili više vrijednosti veličina koje se razumno mogu pridružiti veličini

- **Vrijednost veličine (*quantity value*)** - svojstvo pojave, tijela ili tvari, gdje svojstvo ima velikoću koja se može izraziti brojem i referencom
  - referenca može biti mjerna jedinica, mjerni postupak, referentni materijal, ili njihova kombinacija
  - primjer: pad napona između točaka A i B u strujnom krugu je 1,2 V
  - generički koncept veličine (*value*) može se podijeliti na nekoliko specifičnih razina, npr.:
    - električni otpor R (općenito)
    - električni otpor otpornika u određenom krugu R_i (specifično)
    - koncentracija tvari (općenito)
    - Rockwell C tvrdoća (općenito)
    - ...

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Mjerena veličina (*measurand*)** - *veličina* koja se nastoji izmjeriti
  - mjerenje, uključujući mjerni sustav i uvjete pod kojima se ono provodi, može promijeniti svojstvo pojave, tijela ili tvari tako da se, veličina koja se izmjeri, može razlikovati od *mjerene veličine*
  - primjeri: spajanje voltmetra ili ampermetra u strujni krug
  - ključno razmatranje (ili problem mjerenja): kako definirati mjerenu veličinu za konkretno mjerenje
  - pitanje: kakve to ima veze s točnošću mjerenja?

- **Utjecajna veličina (*influence quantity*)** - *veličina* koja, u izravnom mjerenju, ne utječe na *veličinu* koja se mjeri, ali utječe na odnos između *pokazivanja* i *mjernog rezultata*
  - ukratko, veličina koja nije mjerena veličina, ali utječe na mjerni rezultat
  - npr. temperatura mikrometra koji se rabi za mjerenje duljine
  - npr. frekvencija kod mjerenja amplitude izmjeničnog napona
  - npr. okolišni uvjeti (temperatura, tlak, polje, i dr.)

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Mjerno načelo (*measurement principle*)** – pojava koja služi kao osnova za mjerenje
  - pojava može u svojoj prirodi biti fizikalna, kemijska ili biološka
  - npr. termoelektrički efekt za mjerenje temperature

- **Mjerna metoda (*measurement method*)** – općeniti opis logičkog slijeda djelovanja koji se rabi za mjerenje
  - to može biti izravna metoda, ništična metoda, metoda zamjene, i dr.

- **Mjerni postupak (*measurement procedure*)** – detaljan opis mjerenja prema jednom ili više mjernih postupaka i prema određenoj mjernoj metodi, koji se temelji na mjernom modelu i uključuje sve izračune kako bi se odredio mjerni rezultat
  - redovito treba biti toliko detaljno dokumentiran koliko je potrebno da mjeritelj obavi mjerenje

uočiti hijerarhiju

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Prava vrijednost veličine (*true quantity value*)** - vrijednost veličine u skladu s definicijom veličine
  - valja prepoznati da, zbog svojstveno nekompletne količine detalja u definiciji veličine, postoji ne jedna prava vrijednost veličine, već niz pravih vrijednosti veličine; međutim, on se u načelu i u praksi ne može spoznati
  - ako je nesigurnost definicije veličine pridružena mjerenoj veličini zanemarivo malena u usporedbi s ostalim sastavnicama mjerne nesigurnosti, možemo smatrati da postoji "zapravo jedinstvena" prava vrijednost veličine

- **Dogovorna vrijednost veličine (*conventional quantity value*)** – vrijednost veličine dogovorom pridijeljena veličini za određenu svrhu
  - npr. normirano ubrzanje slobodnoga pada g_n = 9,806 65 m·s^{-2}

Osnovni mjeriteljski pojmovi

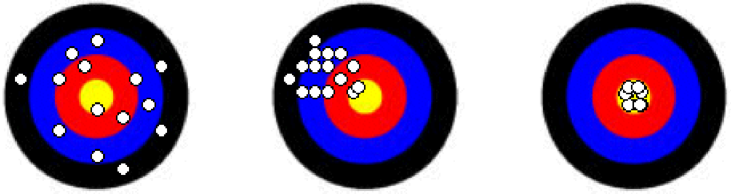
- **Mjerni rezultat (*measurement result*)** – niz vrijednosti veličine pridružen *mjerenoj veličini* zajedno s bilo kojom pripadajućom raspoloživom informacijom
  - općenito, iskaz mjernog rezultata čini **izmjerena vrijednost veličine** i **mjerna nesigurnost**
  - iznimno, ako je mjerna nesigurnost zanemariva za određene namjene, može se izostaviti (taj slučaj nas u pravilu ne zanima)

- **Izmjerena vrijednost veličine (*measured quantity value*)** – vrijednost veličine predstavljena mjernim rezultatom
  - ako je opseg pravih vrijednosti veličine, koji predstavlja mjerenu veličinu, mali u usporedbi s mjernom nesigurnošću, izmjerena vrijednost veličine može se smatrati procjenom "zapravo jedinstvene" prave vrijednosti veličine
  - smatramo da je to "procjena vrijednosti mjerene veličine", ili jednostavnije, "procjena mjerene veličine"

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Mjerna točnost (*measurement accuracy*)** – bliskost slaganja izmjerene vrijednosti veličine (*measured quantity value*) i prave vrijednost veličine (*true quantity value*) mjerene veličine (*measurand*)
  - općenito, mjerna točnost nije veličina i ne daje joj se brojčana vrijednost
  - kaže se da je mjerenje točnije ako nudi manju mjernu pogrešku

- **Mjerna preciznost (*measurement precision*)** – bliskost slaganja izmjerenih vrijednosti veličinâ kod ponovljenih mjerenja na istim ili sličnim objektima pod određenim uvjetima
  - mjerna preciznost obično se iskazuje brojčano mjerom nepreciznosti, kao što je standardno odstupanje, varijanca, ili dr.
  - "određeni uvjeti" mogu biti ponovljivi uvjeti mjerenja ili obnovljivi uvjeti mjerenja
  - mjerna preciznost koristi se za definiranje mjerne ponovljivosti



Osnovni mjeriteljski pojmovi

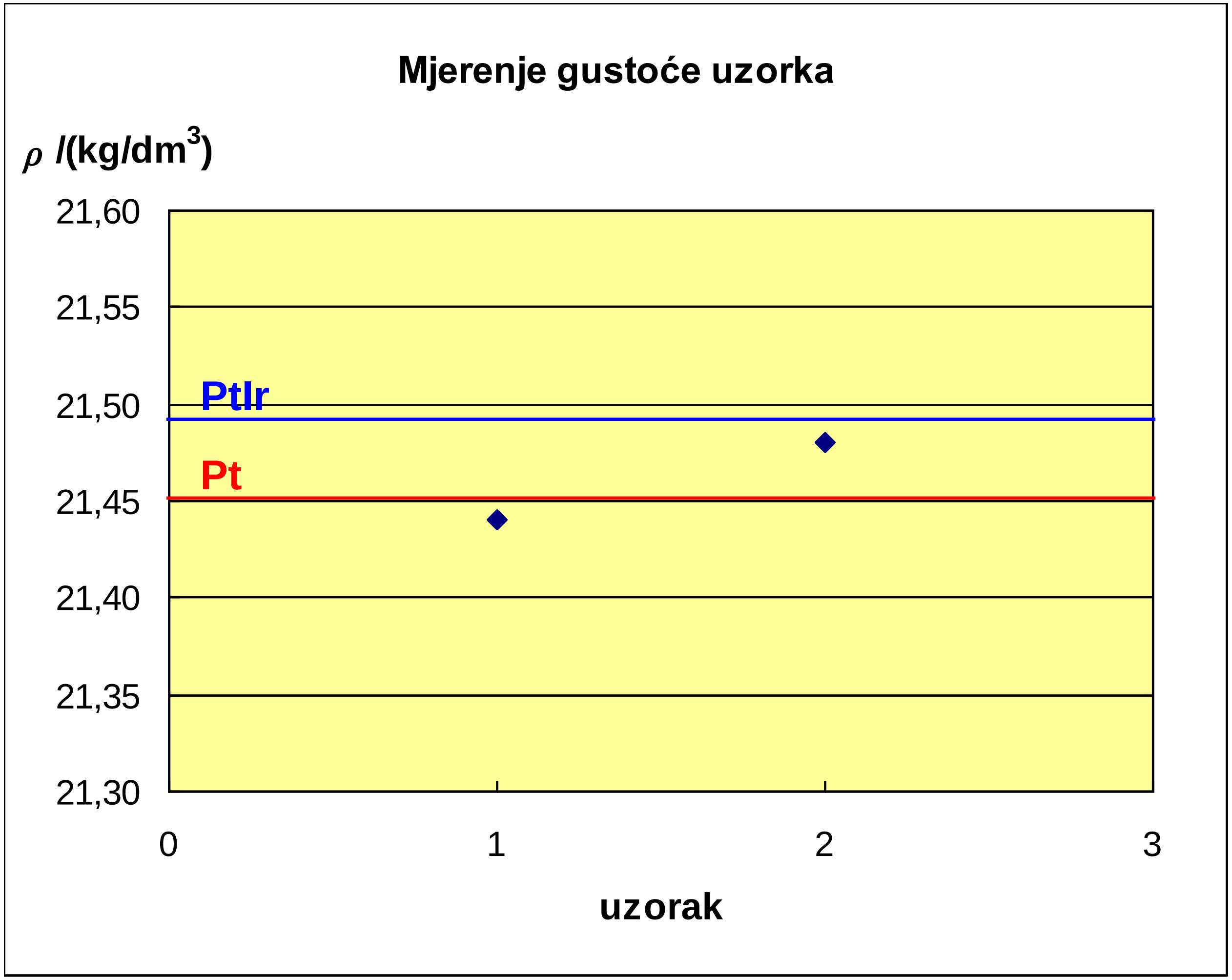
- **Mjerna nesigurnost (*measurement uncertainty*)** – nenegativni parametar koji označuje rasipanje vrijednosti veličina pridruženih mjerenoj veličini, temeljen na uporabljenim informacijama
  - sadrži sastavnice koje se pojavljuju kao sustavni učinci (ispravci, vrijednosti mjernih etalona, i dr.)
  - u načelu sadrži više sastavnica, ili vrste A ili vrste B, a svaka od njih predočuje se kao standardna nesigurnost (o čemu ćemo još učiti)
  - smatra se da se mjerna nesigurnost navodi uz iskazanu vrijednost veličine koja je pridružena mjerenoj veličini

u užem smislu: to je brojčana mjera

u konceptualnom smislu: to je "sumnja u ispravnost rezultata"

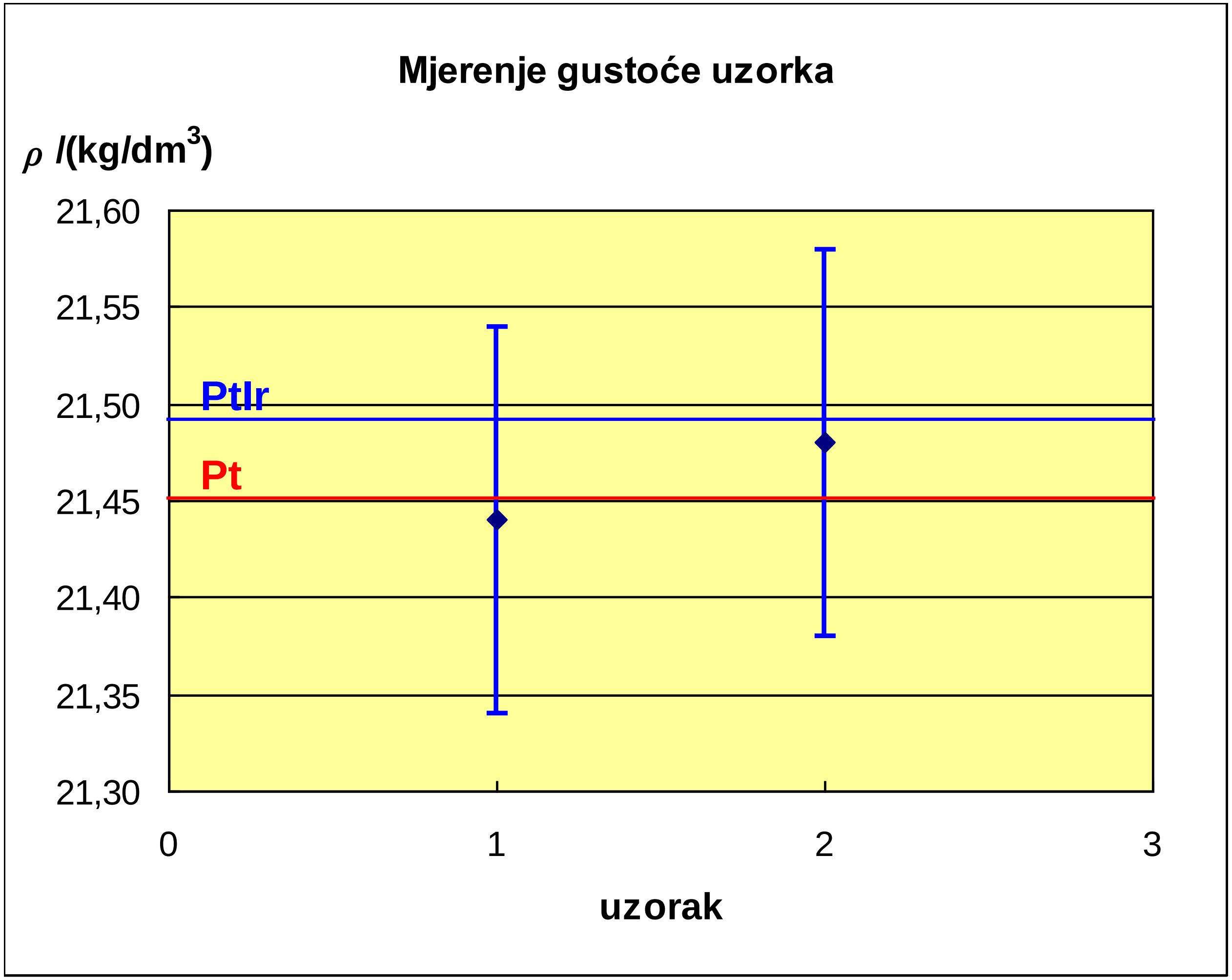
Utjecaj mjerne nesigurnosti

- Usporedba dvaju uzoraka



Utjecaj mjerne nesigurnosti

- **Usporedba dvaju uzoraka**



Utjecaj mjerne nesigurnosti

- **Što možemo zaključiti iz ovih primjera?**

1. **Mjerni rezultat bez iskazane mjerne nesigurnosti zapravo je nekompletan!**
2. **Mjerni rezultat bez iskazane mjerne nesigurnosti može upućivati na sasvim krive zaključke!**
3. **Mjernu nesigurnost trebamo (moramo) izračunati!**
4. **Da bismo mogli uspoređivati kakvoću (ispravnost) mjernih rezultata, treba postojati jednoznačan postupak računanja mjerne nesigurnosti!**

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Referentna vrijednost veličine (*reference quantity value*)** – vrijednost veličine koja se koristi kao osnova za usporedbu vrijednosti veličinâ iste vrste
  - referentna vrijednost veličine može biti prava vrijednost veličine (koja je nepoznata), ili dogovorna vrijednost veličine (koja je poznata)
  - referentna vrijednost veličine s **pridruženom mjernom nesigurnošću** obično se daje s referencom na usporedbu s mjernim etalonom
  - praktično razmatranje: ako je prava vrijednost veličine nepoznata (što je redovit slučaj) referentnu vrijednost veličine s pridruženom mjernom nesigurnošću možemo koristiti kao vrijednost koja nadomješta pravu vrijednost, ako je za određenu namjenu i u određenom slučaju pripadna mjerna nesigurnost prihvatljiva (tj. “dovoljno mala”)

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Mjerna pogreška (*measurement error*)** – izmjerena vrijednost veličine minus referentna vrijednost veličine
  - pogreška:

$$E_X = X - X_{\mathrm{ref}}$$

  - relativna pogreška:

$$e_X = (X - X_{\mathrm{ref}}) \,/\, X_{\mathrm{ref}}$$

  - relativna postotna pogreška:

$$e_{X\%} = [(X - X_{\mathrm{ref}}) \,/\, X_{\mathrm{ref}}\,] \cdot 100\ \%$$

  - pojam “izmjerena vrijednost” ovdje se odnosi na mjerila, a kad se radi o mjerama umjesto “izmjerene vrijednosti” u gornjim izrazima stoji “naznačena vrijednost”
  - ovdje smo pogrešku označili velikim slovom “*E*” (prema eng. “error”) kad označava veličinu te malim slovom “*e*” kad označava relativnu veličinu; mogli smo je označiti i npr. kao:

$$E_X = p_X = X_p \qquad e_X = p_{X\mathrm{r}} = X_{pr}$$

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Sustavna mjerna pogreška (*systematic measurement error*)** – sastavnica mjerne pogreške koja u ponovljenim mjerenjima **ostaje stalna** ili se mijenja na **predvidljiv način**
  - može biti poznata ili nepoznata; za poznate se može primijeniti ispravak
  - općenito nastaje zbog nesavršenosti mjerila, instrumenata i mjernog postupka
  - u nepromijenjenim uvjetima najčešće ostaje stalna po veličini i predznaku
  - primjer: utjecajne veličine koje utječu na pokazivanje mjernih instrumenata (frekvencija, strano magnetsko i električno polje, temperatura i tlak okoline, i dr.)
  - primjer: neispravan instrument uvijek pokazuje krivo (to se ispravlja njegovim ugađanjem, ako je moguće, ili se kalibracijom utvrđuje njegova pogreška)

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Slučajna mjerna pogreška (*random measurement error*)** – sastavnica mjerne pogreške koja se u ponovljenim mjerenjima mijenja na **nepredvidljiv način**
  - posljedica je neobuhvatljivih i neizbježnih promjena koje nastaju u mjerilima i mjernom objektu
  - mijenja se po iznosu i predznaku te općenito čini mjerni rezultat nesigurnim
  - razdioba slučajnih pogrešaka niza ponovljenih mjerenja ima svoju varijancu i očekivanje (koje je općenito jednako 0)
  - njihov utjecaj može se smanjiti ponavljanjem mjerenja
  - zašto je to tako: pa sjetite se Brownovog gibanja

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Ispravak (*correction*)** - vrijednost koja kompenzira procijenjeni sustavni učinak
  - ako smo kod sustavne mjerne pogreške naveli da se za poznate pogreške može primijeniti ispravak, to znači da je po vrijednosti **ispravak jednak pogrešci, no suprotnog je predznaka**
  - to vrijedi i za veličine i za relativne veličine:

$$C_X = -E_X$$

$$c_X = -e_X$$

  - zbog toga za mjerila vrijedi:

ispravljena vrijednost = izmjerena vrijednost + ispravak

  - zbog toga za mjere vrijedi:

ispravljena vrijednost = naznačena vrijednost + ispravak

  - analogno označavanju pogreške, ovdje smo korekciju označili velikim slovom “*C*” (prema eng. “correction”) kad označava veličinu te malim slovom “*c*” kad označava relativnu veličinu; budući da znak korekcije nije normiran, mogli smo je označiti i kao:

$$C_X = k_X = X_k \qquad c_X = k_{X\mathrm{r}} = X_{k\mathrm{r}}$$

Pogreška i ispravak - primjeri

- **Mjerila:**
  - pod mjerilima smatramo različite vrste mjernih instrumenata ili mjernih sustava
  - neka je na umjeravanom voltmetru očitan napon U = 10,0025 V, a na referentnom voltmetru napon U_{ref} = 10,0000 V (kad su oni priključeni paralelno na isti napon)
  - u tom su slučaju pogreška i relativna pogreška redom:

$$E_U = U - U_{\mathrm{ref}} = 10{,}0025\ \mathrm{V} - 10{,}0000\ \mathrm{V} = 2{,}5\ \mathrm{mV}$$

$$e_U = (U - U_{\mathrm{ref}})\ /\ U_{\mathrm{ref}} = (10{,}0025\ \mathrm{V} - 10{,}0000\ \mathrm{V})\ /\ 10{,}0000\ \mathrm{V} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$$

  - nadalje, u tom su slučaju ispravak i relativni ispravak redom:

$$C_U = -E_U = -2{,}5\ \mathrm{mV}$$

$$c_U = -e_U = -2{,}5 \cdot 10^{-4}$$

  - osim ovog preporučenog načina označavanja, za ovaj primjer u kojem se radi o naponu, mogli smo pogrešku i ispravak te njihove relativne vrijednosti označiti i kao: $E_U = p_U = U_p$; $C_U = k_U = U_k$

$$e_U = p_{U\mathrm{r}} = U_{p\mathrm{r}}\ ; \qquad c_U = k_{U\mathrm{r}} = U_{k\mathrm{r}}$$

Pogreška i ispravak - primjeri

- **Mjere:**
  - pod mjerama smatramo različite vrste mjernih uređaja (npr. kalibratora) ili etalona (npr. otpora, napona) koji “generiraju” neku veličinu, odnosno imaju iskazanu naznačenu (postavljenu) vrijednost veličine
  - neka je na umjeravanom etalonu otpora naznačena vrijednost R = 100 Ω, dok smo umjeravanjem referentnim mjernim etalonom utvrdili da je otpor umjeravanog etalona R_{ref} = 100,0043 Ω
  - u tom su slučaju pogreška i relativna pogreška redom:

$$E_R = R - R_{\mathrm{ref}} = 100\ \Omega - 100{,}0043\ \Omega = -4{,}3\ \mathrm{m}\Omega$$

$$e_R = (R - R_{\mathrm{ref}}) / R_{\mathrm{ref}} = (100\ \Omega - 100{,}0043\ \Omega) / 100{,}0043\ \Omega = -4{,}3 \cdot 10^{-5}$$

  - nadalje, u tom su slučaju ispravak i relativni ispravak redom:

$$C_R = -E_R = 4{,}3\ \mathrm{m}\Omega\ ; \qquad c_R = -e_R = 4{,}3 \cdot 10^{-5}$$

  - osim ovog preporučenog načina označavanja, za ovaj primjer u kojem se radi o otporu, mogli smo pogrešku i ispravak te njihove relativne vrijednosti označiti i kao: $E_R = p_R = R_p\ ;\quad C_R = k_R = R_k$

$$e_R = p_{R\mathrm{r}} = R_{p\mathrm{r}}\ ;\quad c_R = k_{R\mathrm{r}} = R_{k\mathrm{r}}$$

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Mjerna ponovljivost (*measurement repeatability*)** – mjerna preciznost ostvarena uz niz ponovljivih uvjeta mjerenja (isti mjerni postupak, isti mjerni sustav, isti mjeritelj, isti radni uvjeti, kratak vremenski interval)
- **Mjerna obnovljivost (*measurement reproducibility*)** – mjerna preciznost ostvarena uz niz različitih uvjeta mjerenja (različit mjerni sustav, različita lokacija, drugi mjeritelj, različit mjerni postupak)
- **Mjerni etalon (*measurement standard*)** – ostvarenje definicije pojedine veličine, s iskazanom vrijednošću veličine i pripadnom mjernom nesigurnošću, koje se rabi kao referenca
- **Mjeriteljski lanac sljedivosti (*metrological traceability chain*)** – slijed mjernih etalona i umjeravanja kojim se mjerni rezultat dovodi u vezi s referencom (referentnom vrijednošću)

Osnovni mjeriteljski pojmovi

- **Da zaključimo:**
  - **ovdje navedene sustavna i slučajna mjerna pogreška nam ukazuju na način na koji utječu na rezultat (ne i na način na koji ćemo računati mjernu nesigurnost)**
  - **ovakav načelni pristup nas uvodi u pojmove sustavan učinak (*systematic effect*) i slučajan učinak (*random effect*)**

ZAŠTO DALJE?

KAKO DALJE?

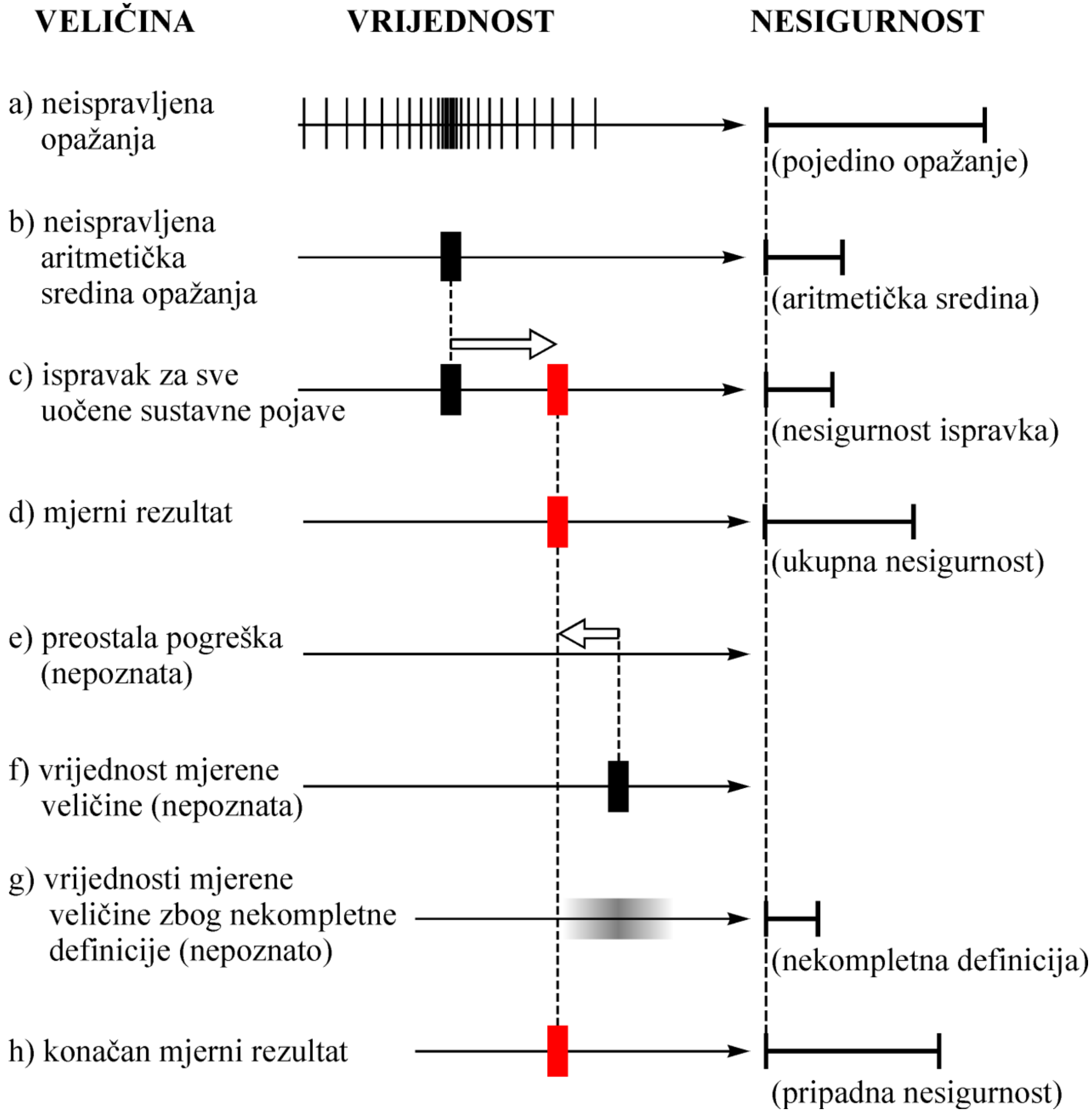
Zašto dalje?

- **Jednostavno, zato što moramo, jer je mjerenje neizostavan dio svakodnevnog života!**
- **Jer nam mjerenje služi da bismo donosili odluke što je u redu, a što nije!**

Kako pristupiti mjerenju?

- Budući da jedino što imamo od konkretnog mjerenja su **opažene vrijednosti** (*observable quantities*), moramo se na njih i osloniti
- To su nam dostupne, ili poznate, informacije dobivene iz konkretnog mjerenja, iz podataka o uporabljenim mjernim uređajima, iz tabličnih podataka ili sličnih izvora, iz dokumenata o umjeravanju referenci, iz prije utvrđenih ovisnosti (npr. temperaturnih ili naponskih), i dr.
- Tako dolazimo do **koncepta nesigurnosti** kod kojeg se oslanjamo na poznate veličine

Koncept nesigurnosti



Koncept nesigurnosti

- ✓ Prethodna slika predstavlja suština onoga što mjerenjem radimo - pokušavamo odrediti izmjerenu vrijednost veličine i pripadnu mjernu nesigurnost:
  - ✓ ponavljanjem mjerenja smanjujemo slučajne učinke
  - ✓ ispravljamo dobiveni rezultat za sve poznate sustavne učinke
  - ✓ određujemo nesigurnost svih doprinosa
  - ✓ iskazujemo mjerni rezultat: izmjerenu vrijednost veličine i mjernu nesigurnost

- ✓ Ovaj koncept primijenjen je u GUM-u

Granice mjerne tehnike

- **U gospodarstvu, industriji i razvoju nastoji se točnost i preciznost mjerenja poboljšati do one granice koja je ekonomski opravdana ili podnošljiva**

- **No, i kad ne bi bilo bilo kakvih ograničenja, postoje prirodne granice, koje opisuju Heisenbergove relacije neodređenosti:**
  - $\Delta x \cdot \Delta v = h$ **(Planckova stalnica $h = 6{,}626\,0693 \cdot 10^{-34}$ Js)**
  - **pokazuje da se ne može istodobno bespogrešno odrediti položaj i brzina čestice**
  - **Werner Heisenberg (1901 – 1976)**

Granice mjerne tehnike

- Znanstveno mjeriteljstvo samo se u izuzetnim slučajevima može približiti tim granicama

- Praktično mjeriteljstvo bavi se nesigurnostima koje su jako daleko (tj. puno su veće) od navednih granica

Slučajni učinci

- **Uzrok:**
  - mnogo malih neizbježnih stalnih promjena u mjerilima, okolini ili kod samog mjeritelja
  - karakteristično je da se mijenjaju po veličini i predznaku te mjerni rezultat čine nesigurnim

- Neka je izvršeno “n“ mjerenja i pojedinačni rezultati iznose x_1, x_2, ..., x_n. Dobiveni su pod istim uvjetima pa ni jedan od njih nema prednost pred drugim. Najvjerojatniju vrijednost mjerene veličine dobit ćemo prema “metodi najmanjih kvadrata”
  - **Carl Friedrich Gauß (1777. – 1855.)**

Slučajni učinci

- **Metoda najmanjih kvadrata**
  - **najvjerojatnije približenje pravoj vrijednosti mjerene veličine može se izračunati iz uvjeta:**

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \mathrm{minimum}$$

  - **odavde slijedi da je aritmetička sredina**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

  - **zbroj svih razlika pojedine vrijednosti i aritmetičke sredine je nula**

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = 0$$

Slučajni učinci

- **Procjena ponovljivosti:**
  - **ako je očekivanje μ prava vrijednost veličine, tada su prave pogreške jednake $a_i = x_i - \mu$, pa je standardno odstupanje beskonačnog skupa σ :**

$$n \cdot \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)^2}$$

  - **kako nam je μ redovito nepoznato, standardno odstupanje σ procjenjujemo (eksperimentalnim) standardnim odstupanjem s**

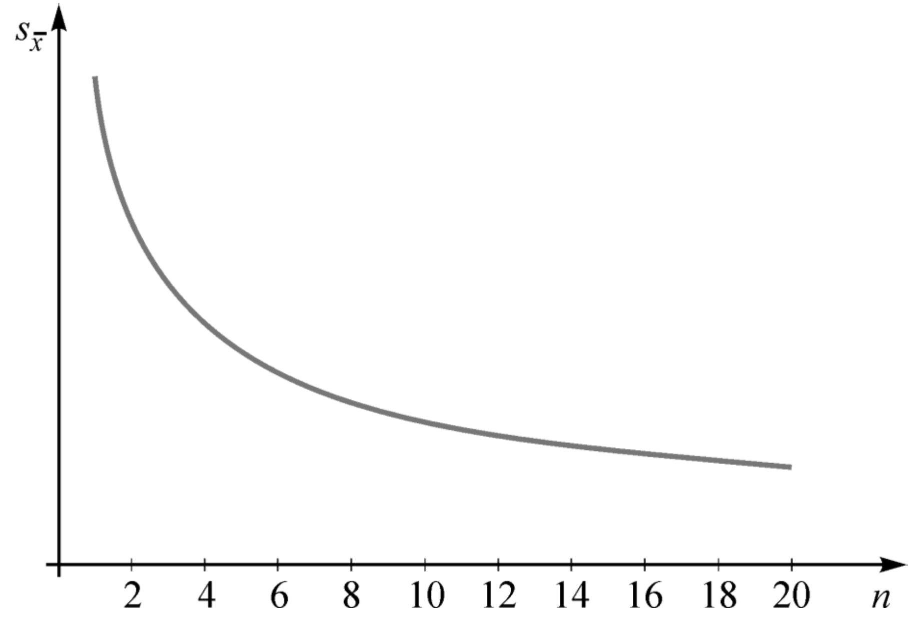
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

  - **pri dovoljno velikom n vrijedi da je $s \approx \sigma$**

Slučajni učinci

- **Standardno odstupanje sredine:**
  - **ponavljajuća mjerenja daju niz aritmetičkih sredina koje se međusobno razlikuju i rasipaju oko neke vrijednosti**
  - **procjenu koliko pojedina aritmetička sredina odstupa od prave vrijednosti veličine računamo kako slijedi**

$$s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$



  - **veliki *n* nema smisla!**

Slučajni učinci

- ***Primjer:*** **Mjerenje otpora**

i	R_i/Ω	$(R_i - \overline{R})/\Omega$	$(R_i - \overline{R})^2/\Omega^2$
1	100,1	0,06	0,0036
2	100,0	–0,04	0,0016
3	99,9	–0,14	0,0196
4	100,2	0,16	0,0256
5	100,0	–0,04	0,0016
Σ	500,2	0	0,052

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n} = \frac{500{,}2\ \Omega}{5} = 100{,}04\ \Omega$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}0{,}052\ \Omega^2} = 0{,}114\ \Omega$$

$$s_{\overline{R}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}114\ \Omega}{\sqrt{5}} = 51\ \mathrm{m}\Omega$$

Opća aritmetička sredina

- **Sigurnost u ispravnost rezultata raste ako se ista mjerena veličina mjeri različitim metodama i uređajima**
  - pozitivni brojevi p_1, p_2, ..., p_m nazivaju se težinama (težinskim faktorima) i određuju na sljedeći način

$$p_i = \frac{K}{s^2_{\bar{x}i}}$$

  - opća aritmetička sredina i pripadno standardno odstupanje su

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i} = \frac{p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2 + \ldots + p_m\bar{x}_m}{p_1 + p_2 + \ldots + p_m} \qquad s_{\bar{x}_s} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s^2_{\bar{x}_i}}}}$$

  - ovakav pristup može se primijeniti ne samo za slučajne pojave, ***<u>već i kod računanja mjerne nesigurnosti</u>*** (tada težine pridjeljujemo prema izračunatim nesigurnostima)

Opća aritmetička sredina

- *Primjer* **za dva niza mjerenja:**

Polazni podaci dva niza	
$\overline{R}_1 = 100{,}04\ \Omega$	$s_{\overline{R}_1} = 51\ \text{m}\Omega$
$\overline{R}_2 = 100{,}12\ \Omega$	$s_{\overline{R}_2} = 97\ \text{m}\Omega$
$K = 51\ \text{m}\Omega \cdot 97\ \text{m}\Omega$	

$$\overline{R}_\text{s} = \frac{p_1\overline{R}_1 + p_2\overline{R}_2}{p_1 + p_2} = \frac{1{,}902 \cdot 100{,}04\,\Omega + 0{,}526 \cdot 100{,}12\,\Omega}{1{,}902 + 0{,}526} = 100{,}057\,\Omega$$

$$s_{\overline{R}_\text{s}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{(51\,\text{m}\Omega)^2} + \dfrac{1}{(97\ \text{m}\Omega)^2}}} = 45\ \text{m}\Omega$$

Gaussova (normalna) razdioba

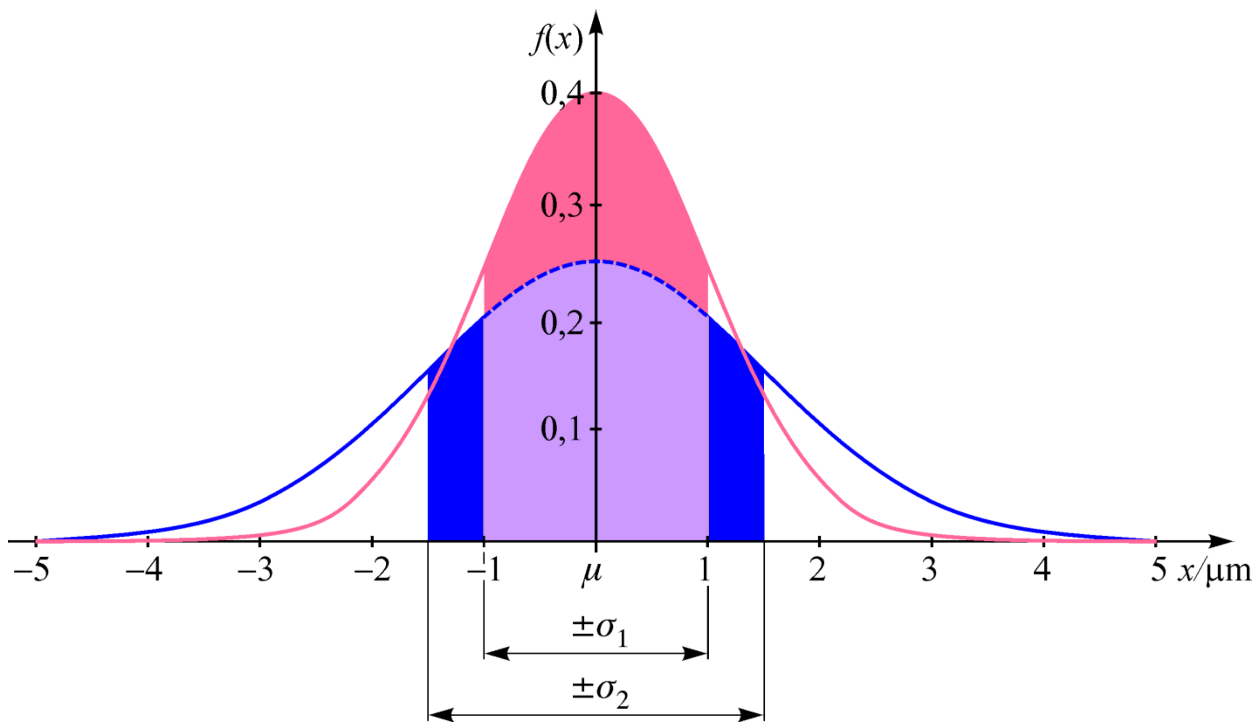
- **Aksiomi teorije slučajnih učinaka**
  - **Pri velikom broju ponovljenih mjerenja jednako vjerojatno nastaju slučajne pogreške jednakog iznosa, a suprotnih predznaka**
  - **Vjerojatnost nastajanja malih pogrešaka je veća od vjerojatnosti nastanka većih pogrešaka**

- **Funkcija gustoće vjerojatnosti Gaussove razdiobe**
  - ***x*** **je kontinuirana slučajna varijabla,** μ **je očekivanje, a** σ **standardno odstupanje beskonačnog skupa**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Gaussova (normalna) razdioba

- **Ta krivulja ima zvonolik oblik, simetrična je s obzirom na ordinatnu os, apscisi se približava asimptotski i jednoznačno je određena s μ i σ $\Rightarrow N\{\mu, \sigma^2\}$**
  - **primjer: dvije Gaussove razdiobe s istim očekivanjem μ uz različite σ_1=1 μm i σ_2=1,5 μm**



Gaussova (normalna) razdioba

- **Površina ispod krivulje za -∞ < *x* < +∞ jednaka je 1, odnosno vjerojatnost je 100 % da se slučajna varijabla *x* nalazi u tom intervalu**
- **Površina ispod krivulje, određena intervalom [x_1, x_2] predstavlja vjerojatnost da se slučajna varijabla nalazi između x_1 i x_2, a dobiva se integracijom kako slijedi:**

$$P_{x_1<x<x_2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

- **Za svaki takav konačan interval vjerojatnost *P* je manja od 1 (ili 100 %), što znači da postoji vjerojatnost da se slučajna varijabla *x* nalazi i izvan tog intervala**

Gaussova (normalna) razdioba

- **Vjerojatnost P može se izračunati za bilo koji interval slučajne varijable**
- **Da bi to računanje bilo neovisno o konkretnoj fizikalnoj veličini (dakle uniformno), uvodi se slučajna varijabla**

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

pa dobivamo normaliziranu krivulju Gaussove razdiobe

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right)$$

- **U priručnicima mogu se pronaći tablične vrijednosti integrala**

$$\Phi(z) = \int_0^z \varphi(z)\mathrm{d}z$$

Gaussova (normalna) razdioba

- **Uzmimo da je $x_1 = \mu - \sigma$ i $x_2 = \mu + \sigma$; tada je $z_1 = -1$ i $z_2 = 1$**
- **S obzirom na simetričnost funkcije $\varphi(z)$, slijedi da je:**

$$P = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)\mathrm{d}z = 2\int_{0}^{z=1} \varphi(z)\mathrm{d}z = 2\Phi(z=1)$$

- **Iz tabličnih podataka tada se dobiva**

$$2\Phi(z=1) = 0{,}6827$$

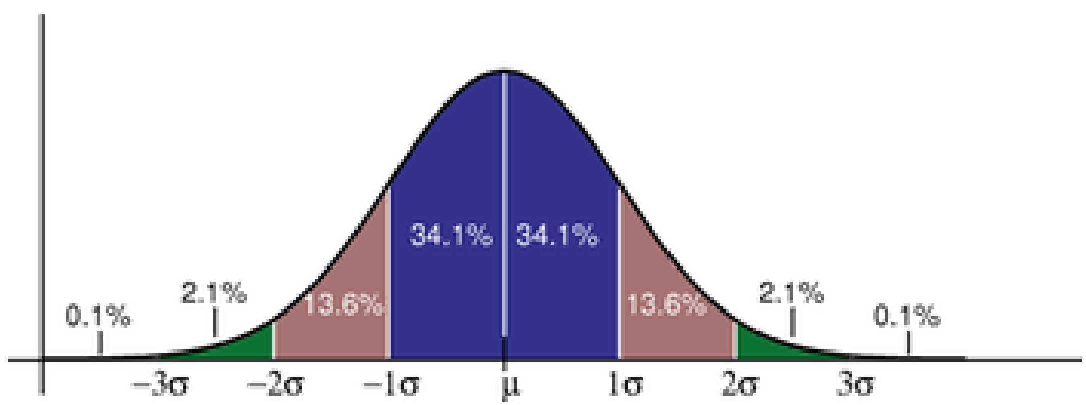
pa je vjerojatnost da se slučajna varijabla x nalazi u intervalu $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ jednaka P = 68,27 %

Gaussova (normalna) razdioba

- **Neke karakteristične vrijednosti**

Granice	Vjerojatnost P da je x unutar	Vjerojatnost P da je x izvan
$\mu \pm 0{,}674\sigma$	50,00%	50,00%
$\mu \pm \sigma$	68,27%	31,73%
$\mu \pm 1{,}96\sigma$	95,00%	5,00%
$\mu \pm 2\sigma$	95,45%	4,55%
$\mu \pm 2{,}576\sigma$	99,00%	1,00%
$\mu \pm 3\sigma$	99,73%	0,27%

Valja uočiti: $P_{-\infty<x<\mu} = P_{\mu<x<+\infty} = 50\ \%$



Gaussova (normalna) razdioba

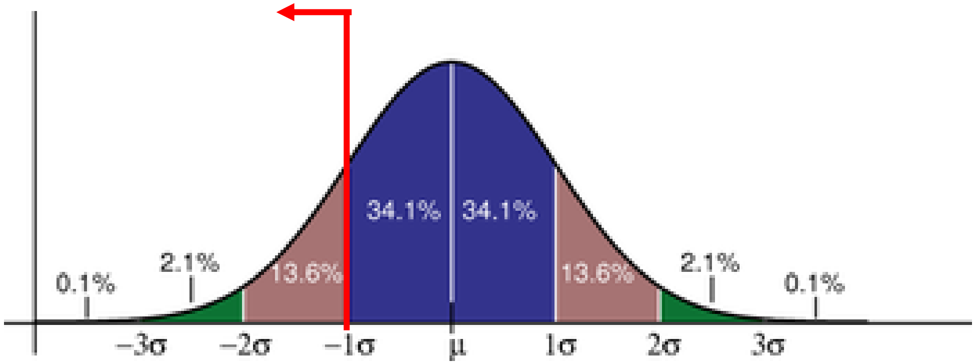
- **Gaussova razdioba vrijedi i u slučajevima kad *n* nije beskonačan, što je redovito slučaj u praksi kad uzimamo *uzorak* iz beskonačnog skupa, pa tada μ procjenjujemo sa $\bar{x}$, a σ sa *s*:**

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s} \right)^2 \right]$$

Gaussova (normalna) razdioba

- ***Primjer***: **Za veliku seriju nogometnih lopti utvrđeno je da im je aritmetička sredina promjera jednaka 20 cm uz standardno odstupanje od 1 cm. Ako nasumce uzmemo jednu loptu iz te grupe, koja je vjerojatnost da je promjer te lopte manji od 19 cm?**

Rješenje: *P* = 15,87 %



Gaussova (normalna) razdioba

- **Procjena očekivanja μ:**
  - **standardno odstupanje sredine računa se izrazom**

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

  - **ponavljanjem određivanje aritmetičke sredine, dobili bismo rezultate koji se rasipaju kao slučajna varijabla i pokoravaju opet Gaussovoj razdiobi**
  - **ako je $s_{\bar{x}}$ dobra procjena standardnog odstupanja $\sigma_{\bar{x}}$, tada zaključujemo da <u>vrijede svi netom pokazani izrazi</u>**
  - **tako vrijedi da je vjerojatnost *P* da se očekivanje μ nalazi u intervalu:**
    - ***P* = 68,27 % za** $\left[\bar{x} \pm s_{\bar{x}}\right]$
    - ***P* = 95,45 % za** $\left[\bar{x} \pm 2s_{\bar{x}}\right]$
    - ***P* = 99,73 % za** $\left[\bar{x} \pm 3s_{\bar{x}}\right]$

$$\boxed{\bar{x} - zs_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + zs_{\bar{x}}}$$

Gaussova (normalna) razdioba

- Prethodna razmatranja vrijede ako je *n* dovoljno velik (sa statističkog stajališta) pa je opravdano procjenjivati σ sa *s* (a isto tako i standardno odstupanje sredine)

- Ovaj izraz “dovoljno velik” možemo prevesti kao $n > 30$

A što kad je *n* manji?

Studentova *t*-razdioba

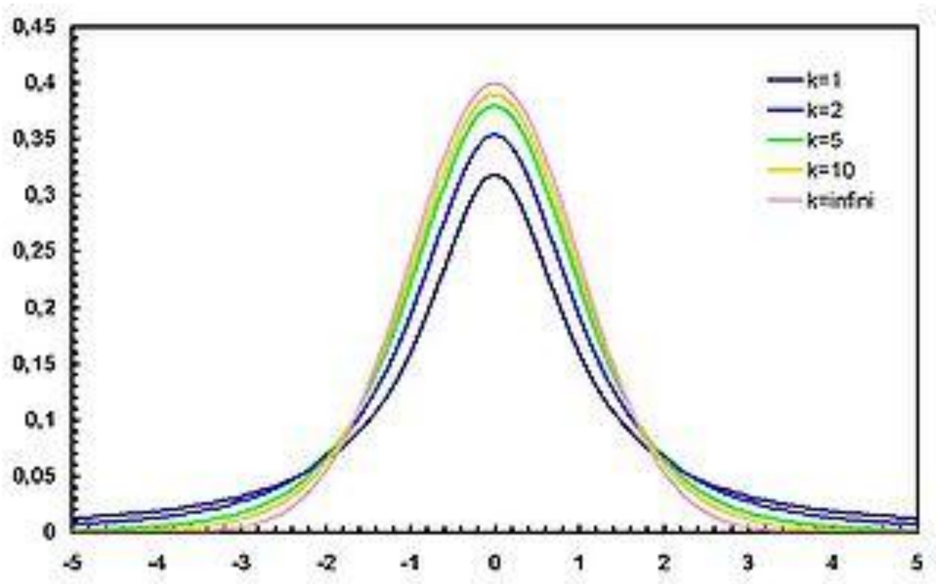
- **William Sealy Gosset ("Student")**
- **U slučaju tipično n<30 upotrebljava se tzv. Studentova t-razdioba, koja je objavljena 1908. godine**
- **Počela se primjenjivati za procjenjivanje ispravnosti svih primjeraka na temelju malog broja uzoraka**
- **Kakve to ima veze s pivom?**

Studentova *t*-razdioba

- **Funkcija gustoće vjerojatnosti Studentove *t*-razdiobe:**

$$f(n,t) = K(n)\left[1 + \frac{t(n,P)}{n-1}\right]^{-n/2}$$

gdje je $k = n - 1$ stupanj slobode; za $n \to \infty$ teži ka Gaussovoj razdiobi



Studentova *t*-razdioba

- **Neke karakteristične vrijednosti faktora *t***

n	3	5	10	20	30		∞
$k = n - 1$	2	4	9	19	29		
$P =$ 68,3 %	1,32	1,14	1,06	1,03	1,02		1
$P =$ 95 %	4,30	2,78	2,26	2,09	2,04		1,96
$P =$ 99 %	9,92	4,60	3,25	2,86	2,75		2,576
$P =$ 99,73 %	19,21	6,62	4,09	3,45	3,27		3

- **Odavde slijedi da se za neki *n* i odabranu vjerojatnost *P* očekivanje μ nalazi u intervalu:**

$$\bar{x} - t \cdot s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + t \cdot s_{\bar{x}}$$

Studentova *t*-razdioba

- ***Primjer:*** **Mjerenje otpora**

i	R_i/Ω	$(R_i-\overline{R})/\Omega$	$(R_i-\overline{R})^2/\Omega^2$
1	100,1	0,06	0,0036
2	100,0	–0,04	0,0016
3	99,9	–0,14	0,0196
4	100,2	0,16	0,0256
5	100,0	–0,04	0,0016
Σ	500,2	0	0,052

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n} = 100{,}04\ \Omega$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\overline{R})^2} = 0{,}114\ \Omega$$

$$s_{\overline{R}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = 51\ \mathrm{m\Omega}$$

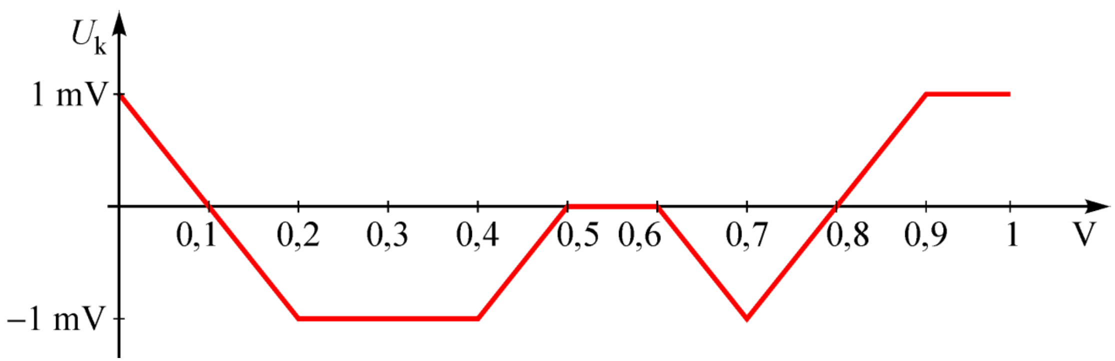
$$t \cdot s_{\overline{R}} = 1{,}14 \cdot 51\ \mathrm{m\Omega} = 58\ \mathrm{m\Omega}$$

- **Dakle, procjenjujemo da je uz *P* = 68,3 %**

$$\overline{R} - 58\ \mathrm{m\Omega} \le \mu \le \overline{R} + 58\ \mathrm{m\Omega}$$

Pogreška i ispravak - primjeri

- **Sustavni učinci mogu biti poznati ili nepoznati**
- **Poznate sustavne učinke možemo ispraviti tako da primijenimo odgovarajuće ispravke (korekcije)**



  - **Primjer za analogni instrument**

- **Svaki ispravak ima svoju nesigurnost**

Zaključak

- Važno je naglasiti da je svako mjerenje u svojoj biti donekle pogrešno, ili da kažemo nesigurno, te da nikad ne možemo odrediti pravu vrijednost mjerene veličine
- Unatoč tomu mi i dalje provodimo mjerenja jer i na temelju takvih (nesavršenih) mjerenja možemo dobiti dovoljno dobru procjenu mjerene veličine
- Ipak treba biti oprezan i kritičan u pretpostavkama i zaključcima