4.7 EGZISTENCIJA I JEDINSTVENOST RJEŠENJA

Cauchyjev problem (CP): $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ rješenje ovog problema je na intervalu $\langle x_0-h, x_0+h \rangle$ je neprekinuta funkcija $y(x)$ koja prolazi $T_0(x_0, y_0)$ i zadovoljava DJ

TM Peanov teorem o lokalnoj egzistenciji

Neka je $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekinuta na pravokutniku oko točke (x_0, y_0) središte

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0| < a,\ |y-y_0| < b\}$$

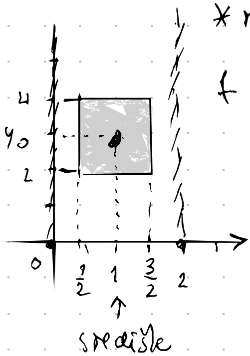
$* \begin{cases} x \in \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \\ y \in \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle \end{cases}$

Tada postoji $\langle x_0-h, x_0+h \rangle$ na kojem CP ima rješenje.

Zad) Nađite neki pravokutnik na kojem su zadovoljeni uvjeti Peanovog TM.

a) Za $(x-2)y' = y^2 + \frac{4}{x}$, $y(1) = 3$ $\longrightarrow$ $y' = \frac{xy^2+4}{(x-2)x} = f(x,y)$

↳ ne moramo riješiti ovu jednadžbu jer nemamo nikakvu poznatu metodu; mi trebamo samo „postoji li rješenje"



* ne mora biti kvadrat!

f nije neprekinuta u $x=0$ i $x=2$

$\Longrightarrow x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$, $y \in \langle 2, 4 \rangle$

TM | Picardov teorem o lokalnoj jedinstvenosti

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def na pravokutniku

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}$$

te neka ima svojstva:

a) f je neprekinuta na D

b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ je omeđena na D.
↳ znači da je $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < M$

$\Longrightarrow$ Tada postoji interval $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ na kojem CP ima jedinstveno rješenje.

Zad) Prethodni zad.

b) Pravokutnik za Picardov TM

$$(x-2)y' = y^2 + \frac{4}{x}, \quad y(1) = 3$$

$$y' = \frac{xy^2 + 4}{(x-2)x} = f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\cancel{x}y}{\cancel{x}(x-2)} = \frac{2y}{x-2}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{2|y|}{|x-2|} < \frac{2 \cdot 4}{\frac{1}{2}} < \cancel{\frac{16}{4}}$$

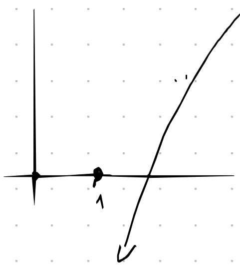
– tražimo gornju među, znači gledamo kada je nazivnik najmanji

Na ovom pravokutniku postoji jedinstveno rješenje

Napomena: OBRAT NE VRIJEDI

tj. ako $\frac{\partial f}{\partial y}$ nije omeđena, ne znamo kad je rješenje jedinstveno

ZAD) $y' = \sqrt{y} + 1 \qquad y(1) = 0 \qquad f(x,y) = \sqrt{y} + 1 \to \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2y}$



ne postoji pravokutnik za Picardov teorem

ALI! moramo riješiti jednadžbu jer ne možemo zaključiti o jedinstvenosti.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y} + 1} = \int dx \qquad y = t^2$$

$$\sqrt{y} + 1 - \ln|\sqrt{y} + 1| = \frac{x}{2} + C$$

$$0 + 1 - \ln 1 = \frac{1}{2} + C \Longrightarrow C = \frac{1}{2}$$

Rješenje JE jedinstveno

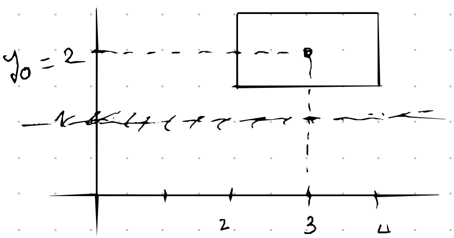
$\boxed{21\text{-}21\text{-}4}$ b) $y' = \sqrt[3]{(y-1)^2}$, $y(3) = y_0$

ii) $y_0 = 2$ odrediti □ na kojem zadani CP zadovoljava uvjete Picarda

$f(x,y) = \sqrt[3]{(y-1)^2}$ *(i dalje fja dvije var)

↳ neprekinuta na $\mathbb{R}^2$ → rješenje postoji

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(y-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{y-1}}$ nije omeđena za $y=1$



$x \in \langle 2, 4 \rangle$

$y \in \langle 1.5, 2.5 \rangle$ nazivnik je najmanji za 1.5

$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < \frac{2}{3\sqrt[3]{0.5}} = M$

↳ Rj. je jedinstveno

i) $y_0 = 1$ → nije omeđena pa nema zaključka po Picardu

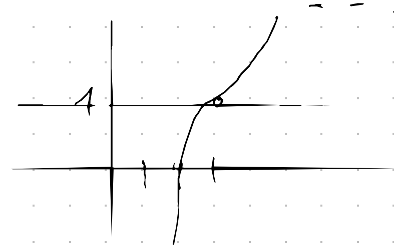
$y' = \sqrt[3]{(y-1)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(y-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{y-1}}$ → prekid u $y=1$

¿??

$\int \frac{dy}{(y-1)^{\frac{2}{3}}} = \int dx \rightarrow 3\sqrt[3]{y-1} = x + C$

$\Rightarrow$ Rj: $3\sqrt[3]{y-1} = x - 3$



$\boxed{\text{DEF}}$ a) $y(x)$ je REGULARNO rj. ako za $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ CP ima jedinstveno rješenje.

b) - $y(x)$ nije regularno ako $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ u kojem CP nema jedinstveno rješenje.

- $y(x)$ je SINGULARNO rj. ako $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ CP nema jedinstveno rj.

U prethodnom zadatku: $y=1$ je singularno rj. (za $\forall x_0$ još neko rj. iz općeg prolazi kroz tu točku)

$3\sqrt[3]{y-1} = x + C$ nije regularno (u jednoj točki nije jedinstveno)

ZAD) $y' = -2y^2 \, / : y^2$ ispitaj (ne) regularnost rješenja

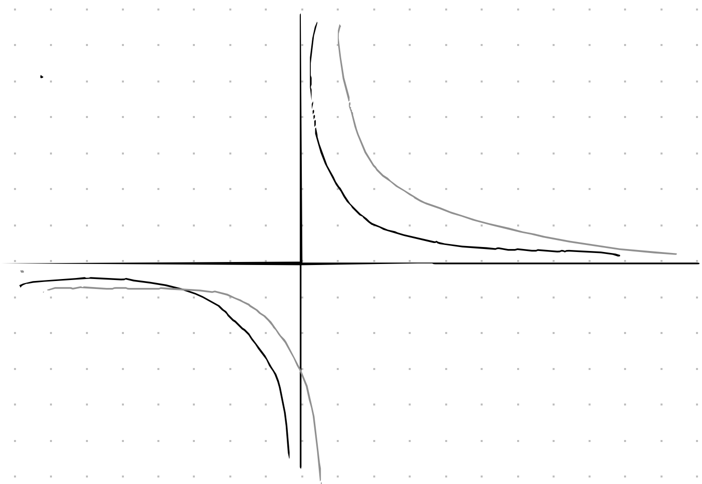
$\Rightarrow$ dodatno rješenje $y=0$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -2\int dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -2\int dx$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = -2x + C \, / \cdot (-1)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2x+C}}$$



ova rj. su reg jer je $y=0$ asimptota rj. općeg