LINEARNI SUSTAVI

Gaussova metoda eliminacije

opći oblik linearnog sustava **m** jednadžbi s **n** nepoznanica

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

=> rješenje svakog sustava je n-torka $(x_1, \dots x_n)$

→ sustav se može zapisati u obliku matrične jednadžbe $Ax = b$

$$\underbrace{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{matrica koeficijenata sustava}} \quad \underbrace{X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{vektor nepoznanica}} \quad \underbrace{b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\text{desna strana sustava}}$$

=> $[A \,|\, b]$ proširena matrica sustava

► Gauss: sustav se elementarnim trans. svede na ekvivalentan (kao kod reduciranja mat)

Riješi sustav:
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = -4$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{matrix} + \\ \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 14 \end{array}\right] + \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ /:5 \\ /:5 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \cdot(-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & -\frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} (\frac{1}{5}) \\ (-\frac{2}{5}) \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 3$$

Homogeni sustavi

- sustav ima jedno rješenje kada je $Ax=0$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

* to je jedno rješenje kad je A regularna mat

→ moramo proučiti situaciju kada A nije regularna (ili kvadratna)

• zapisujemo u obliku $[A \,|\, 0] \xrightarrow[\text{oblik}]{\text{svodimo na}} [A_R \,|\, 0]$

↳ AKO je RANG = broju stupaca $\Longrightarrow x = 0$

▶ Rang ≠ br. stupaca → postoje stupci koji ne sadržavaju stožerne elemente

primjer:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} V & S & V & S \end{array} \end{array}$$

↳ razlikujemo 2 vrste stupaca

SA STOŽER. ELEM.	BEZ STOŽERA
• vezani stupci (i vezane nepoznanice)	• slobodni stupci (i slobodne nepoznanice)
njihov br = rang(A)	njihov br = n - rang(A)

Primjer) Riješi homogeni sustav:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} V & V & S \end{array} \end{array}$$

x_3 je slobodna nepoznanica
↳ odabiremo po volji

$$x_1 + 3x_3 = 0$$
$$x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3\alpha = 0 \\ x_2 - 2\alpha = 0 \\ x_3 = \alpha \end{array} \right. \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \boxed{\alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

- sustav ima beskonačno mnogo rješenja

ako je $w = [-3, 2, 1]^T$ onda je svako rješenje αw, $\alpha \in \mathbb{R}$

(TM) Ako je u sustavu n nepoznanica rang mat sustava jednak r, onda vrijedi:

$$\text{dimenzija prostora rješenja} = n-r$$

→ nakon svođenja na reducirani oblik, broj slobodnih varijabli jednak je broju stupaca umanjenom za broj vezanih varijabli (br. stož el.)

↳ ako je $n=r$ → $d=0$ – sustav ima jednoznačno rješenje

Algoritam za rješavanje homogenog sustava

1. $Ax=0$ napišemo u mat obliku $[A \vdots 0]$
2. El. transf. svodimo sustav na njemu ekvivalentan $[A_R \vdots 0]$
   - stožerni stupac – vezane nepoznanice
   - ostale slobodne
3. vrijednost slobodnih nepoznanica određujemo po volji $(\alpha, \beta ..)$
   ↳ vezane određujemo preko slobodnih
4. rj. zapisati u vekt. obliku kao linearnu komb. $n-r$ vektora

Nehomogeni sustavi

! ovaj sustav uopće ne mora imati rješenja!

$$2x+3y=4$$
$$4x+6y=7$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{array}\right] \cdot(-2) \sim \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$ – nema rješenja

⇓ još se može zapisati

$$x\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$$

linearno zavisni

$$\hookrightarrow x\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

– to bi bila svaka linearna kombinacija oblika za neki λ

↳ b nije takvog oblika

• odrediti njegovo rješenje bilo bi odrediti koeficijente x i y tako da vektor b bude linearna kombo vektor stupaca matrice A

NEMA RJEŠENJA

TM Kronecker-Capelli

· Sustav $Ax=b$ ima rješenje onda i samo onda kad je rang mat A jednak rangu proširene matrice $[A \vdots b]$.

TM Opće rješenje sustava $Ax=b$

$$x = x_h + x_p$$

x_h – rješenje prip. homogenog sust.

x_p – (partikularno) jedno rj. neh. sustava

↳ A je regularna → $Ax=b$ ima jedno rj

$X = X_h + X_p$, a X_h može biti samo nul vektor pa je rješenje jednoznačno

Algoritam za rješavanje nehomogenog sustava

1. $Ax=b$ napišemo u mat obliku $[A \vdots b]$
2. El. transf. svodimo sustav na njemu ekvivalentan $[A_R \vdots b']$
   - ako je rang $(A) <$ rang $[A \vdots b]$, zaustavimo se : sustav nema rj.
3. vrijednost slobodnih nepoznanica određujemo po volji $(\alpha, \beta ..)$
   ↳ vezane određujemo preko slobodnih
4. rj. zapisati u vekt. obliku

Cramerovo pravilo

TM A je kvad i regularna $\longrightarrow$ $Ax=b$ ima jedno rješenje

DOKAZ:

1)

A je regularna $\rightarrow r(A)=n \quad (r[A \vdots b] = r(A))$

$x = x_h + x_p \qquad\qquad x = x_p$

x_h može biti samo nul vektor – rješenje jednoznačno

2) $Ax=0 \longrightarrow x=0$, A je regularna

TM A je regularna mat.

$\rightarrow$ svaka komponenta x_i sustava $Ax=b$ može se napisati kao razlomak kojemu je u nazivniku det. mat. A, a u brojniku razlomka det. mat. u kojoj je i-ti stupac zamijenjen vektorom b.

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \underbrace{b_n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \longrightarrow \text{za tu } x_i \text{ komponentu nj. vrijedi}$$

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

Primjer (iz determinanti $*$):

$$\begin{aligned} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{aligned} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right]$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{de-bf}{ad-bc} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af-ce}{ad-bc}$$

Primjer 10.)

Riješi sustav:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = -4$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 10 = \underline{\underline{25}}$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \qquad x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6(9+2) - (-12+5) + (-8-15)$$

$$= 66 + 7 - 23 = 50$$

$$x_2: \; = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 28 = -25$$

$$x_3: \; = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 14 \end{vmatrix} = 70 + 5 = 75$$

$$x_1 = \frac{50}{25} = 2$$

$$x_2 = \frac{-25}{25} = -1$$

$$x_3 = \frac{75}{25} = 3$$