Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja

3. TEMA

MJERNA NESIGURNOST

Predmet “Mjerenja u elektrotehnici”

Prof.dr.sc. Damir Ilić

Zagreb, 2020.

Teme cjeline

- **GUM**
- **Standardna nesigurnost vrste A**
- **Standardna nesigurnost vrste B**
- **Složena standardna nesigurnost**
- **Primjeri**

GUM

- *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*, **JCGM 100:2008**
- **Početna inicijativa - 1978. od strane CIPM**
- **Ideja vodilja: internacionalni konsenzus u iskazivanju mjerne nesigurnosti**
- **U izradi su sudjelovali:**
  - BIPM - Bureau International des Poids et Mesures
  - IEC - International Electrotechnical Commission
  - ISO - International Organization for Standardization
  - OIML - International Organization of Legal Metrology
  - IUPAC - International Organization for Pure and Applied Chemistry
  - IUPAP - International Organization for Pure and Applied Physics
  - IFCC - International Federation for Clinical Chemistry and Laboratory Medicine

GUM

- **Svrha takvog vodiča:**
  - **Puna informacija o pojedinim sastavnicama nesigurnosti**
  - **Osiguranje osnova za međunarodne usporedbe mjernih rezultata**

- **Idealna metoda za računanje i iskazivanje nesigurnosti mjernih rezultata treba biti:**
  - **UNIVERZALNA - sve grane djelatnosti, primjenjiva na sve vrste mjerenja i sve tipove ulaznih podataka**
  - **INTERNO KONZISTENTNA - izravno proizlazi iz komponenata koje ju čine, a neovisno o njihovu grupiranju i razlaganju na podkomponente**
  - **PRIJENOSNA - nesigurnost jednog rezultata uzima se kao sastavnica za računanje nesigurnosti drugog rezultata**

GUM

- **Osnova:**
  - ***International vocabulary of metrology - Basic and general concepts and associated terms (VIM)*, 3rd edition, JCGM 200:2012.**
  - **ISO 3534-1:2006 Statistics - Vocabulary and symbols - Part 1: General statistical terms and terms used in probability, 2006, ISO**

GUM

OSNOVNI KONCEPT

MJERENJE

Cilj: određivanje vrijednosti (*value of the measurand*)

Matematički model mjerenja, kojim se transformira set ponovljenih opažanja (rezultata) u mjerni rezultat od kritične je važnosti, jer općenito sadrži različite utjecajne veličine koje nisu točno poznate

MJERENA VELIČINA

Tretira se kao skalar, tj. kao pojedinačna veličina i pripadna varijanca

Za zavisne veličine rabi se vektor mjerene veličine i matrica kovarijanci

GUM

IZVORI NESIGURNOSTI

- Nepotpuna i nesavršena realizacija definicije mjerene veličine
- Nereprezentativni uzorak osnovnog skupa
- Nedovoljno poznavanje utjecaja okolnih uvjeta ili njihovo nesavršeno mjerenje
- Osobni utjecaj mjeritelja (npr. očitanje)
- Nedovoljno (konačno) razlučivanje
- Netočnost vrijednosti etalona
- Netočnost stalnica i drugih parametara pri obradi rezultata
- Aproksimacije i pretpostavke ugrađene u mjerni postupak
- Razlike u očitanjima ponovljenih mjerenja pri prividno jednakim uvjetima

GUM

- **STANDARDNA NESIGURNOST** - nesigurnost rezultata izražena kao standardno odstupanje
- **SASTAVNICA NESIGURNOSTI VRSTE “A”** – računa se statističkom metodom
- **SASTAVNICA NESIGURNOSTI VRSTE “B”** – računa se na drugi način
- **SLOŽENA STANDARDNA NESIGURNOST; $u_c(y)$** - standardna nesigurnost rezultata, koji ovisi o više veličina, računata kao korijen iz sume varijanci, vodeći računa o utjecaju pojedine veličine na mjerni rezultat
- **PROŠIRENA NESIGURNOST (U_p)** - veličina koja definira interval oko izmjerene vrijednosti za koji se očekuje da sadrži veći dio razdiobe vrijednosti koje bi razumno mogle opisati mjerenu veličinu (razina pouzdanosti intervala)
- **OBUHVATNI FAKTOR (k_p)** - numerički faktor kojim se množi složena standardna nesigurnost kako bi se iskazala proširena nesigurnost; obično $k_p \in [2, 3]$

GUM

- **Praktična razmatranja**
  - **Matematički model mjerenja određen je traženom točnošću**
  - **Promjene svih relevantnih veličina treba uzimati u najvećem vjerojatnom opsegu kako bi se računanje nesigurnosti oslonilo na mjerne rezultate**
  - **Dobro odabran i pripremljen eksperiment bitan je dio umjetnosti mjerenja**
  - **Pri ispitivanju ispravnog funkcioniranja mjernog sustava u račun valja uzimati samo one komponente koje utječu na mjerne rezultate**
  - **Ako je u usporedbenom postupku nesigurnost etalona i mjernog postupka zanemariva prema traženoj točnosti mjerenja, mjerenje određuje pogreška uspoređivanog uređaja**
  - **Manje ili veće pogreške u zapisu ili prijenosu mjernih rezultata nisu obuhvaćene ovim računanjem mjerne nesigurnosti**

GUM

Ovo je za promišljanje ...

"Ovaj *Vodič* nije zamjena za kritičko razmišljanje, intelektualnu čestitost i profesionalne sposobnosti. Računanje mjerne nesigurnosti nije rutinski zahtjev niti čisto matematički rad; ono ovisi o detaljnom poznavanju prirode mjerene veličine i mjerenja. Stoga kakvoća i upotrebljivost mjernom rezultatu pridružene nesigurnosti ultimativno ovisi o **razumijevanju, kritičkoj analizi i poštenju** onoga tko ima utjecaj u pridruživanju njezine vrijednosti."

Računanje standardne nesigurnosti

- **MODELIRANJE**
- **Mjerena veličina *Y* najčešće se ne mjeri izravno već je određena s *N* ostalih veličina:**

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$$

- **Ulazne veličine X_i možemo promatrati također kao mjerene veličine koje ovise o nekim drugim veličinama, zbog čega funkcija *f* rijetko kad može biti eksplicitno (potpuno) zapisana**

- **S *y* označava se procjena mjerene veličine *Y* na temelju procjena x_i ulaznih veličina X_i:**

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$$

Računanje standardne nesigurnosti

- **Procijenjeno standardno odstupanje pridruženo procjeni izlazne veličine y naziva se složena standardna nesigurnost $u_c(y)$, određena na temelju procijenjenih standardnih odstupanja svake pojedine ulazne veličine x_i, koja se nazivaju standardne nesigurnosti i označuju s $u(x_i)$.**

- **x_i i $u(x_i)$ određene su na temelju razdiobe mogućih vrijednosti ulazne veličine X_i**

- **Standardne nesigurnosti $u(x_i)$ mogu biti vrste A ili vrste B**

Standardna nesigurnost vrste A

- **Najbolja moguća procjena očekivanja μ_q za veličinu *q* koja se mijenja slučajno, određena na temelju *n* nezavisnih opažanja dobivenih pod jednakim uvjetima, je aritmetička sredina:**

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k$$

- **Eksperimentalna varijanca opažanja, koja procjenjuje varijancu razdiobe vjerojatnosti od *q*, jednaka je:**

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2$$

- **Pritom pozitivni korijen ove varijance, $s(q_k)$, jest eksperimentalno standardno odstupanje. Najbolja procjena standardne nesigurnosti vrste A računa se kao pozitivni korijen varijance:**

$$u^2(x_i) = s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n}$$

Standardna nesigurnost vrste B

- **Procjenjuje se na temelju svih raspoloživih informacija o mogućim varijacijama x_i, koje su npr:**
  - **prijašnji mjerni podaci**
  - **iskustvo ili opće poznato ponašanje ili svojstva materijala ili uređaja**
  - **podaci proizvođača mjernog uređaja**
  - **podaci o umjeravanju ili ostali dokumenti**
  - **nesigurnosti pridružene podacima iz priručnika (npr. stalnice)**

Ne govorimo niti o slučajnim niti o sustavnim učincima!

Standardna nesigurnost vrste B

- **Vrlo čest slučaj su *a priori* razdiobe, kod kojih je vjerojatnost 100 % da x_i leži unutar granica a_- i a_+, a 0 % izvan granica; uz uvjet $(a_+ - a_-) = 2a$ slijedi:**

pravokutna razdioba:

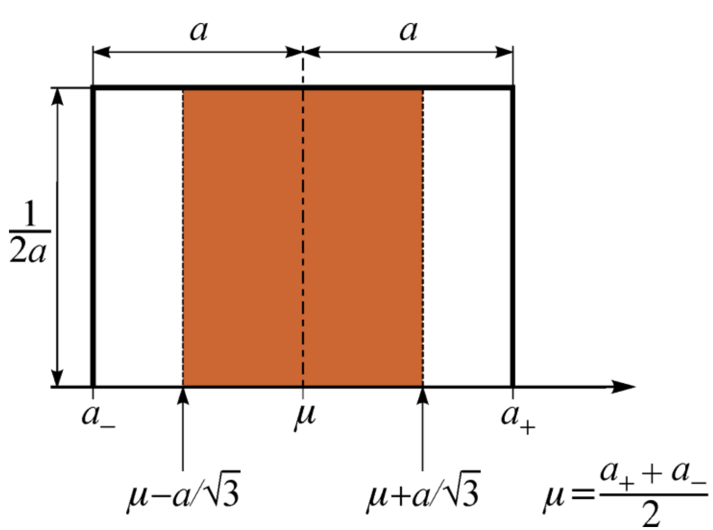
$$x_i = (a_- + a_+)/2$$

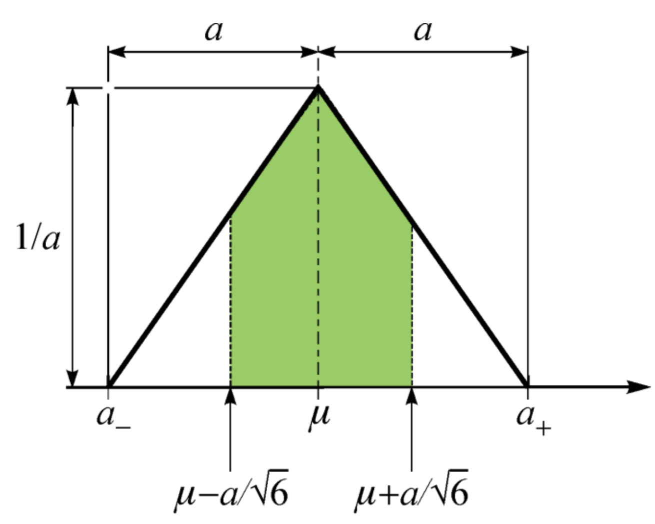
$$u^2(x_i) = a^2/3$$

trokutasta razdioba:

$$x_i = (a_- + a_+)/2$$

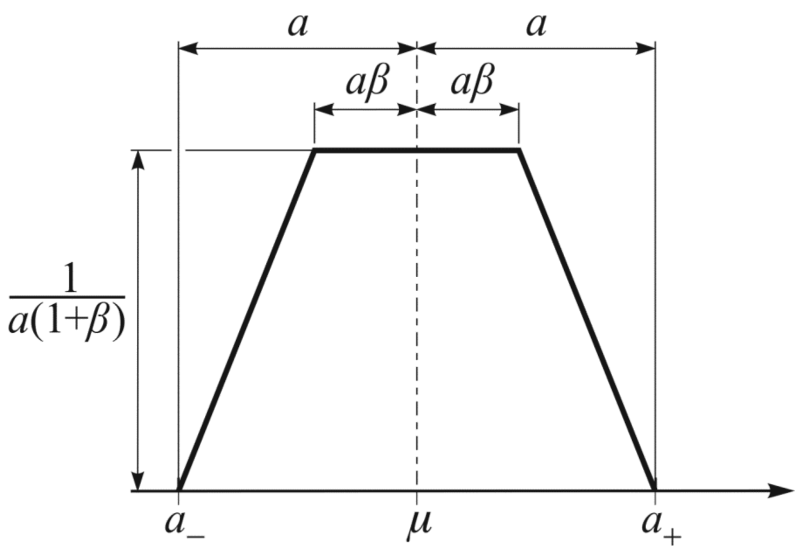
$$u^2(x_i) = a^2/6$$





Standardna nesigurnost vrste B

- **Pravokutna razdioba i trokutasta razdioba samo su posebni slučajevi simetrične trapezoidne razdiobe, čija je baza jednaka $a_+ - a_- = 2a$, a vrh je širine $2a\beta$, gdje je $0 \le \beta \le 1$**
- **Kada je $\beta = 1$ dobit ćemo pravokutnu razdiobu, a za $\beta = 0$ slijedi trokutasta razdioba**



$$x_i = (a_- + a_+)/2$$

$$u^2(x_i) = a^2\left(\frac{1+\beta^2}{6}\right)$$

Standardna nesigurnost vrste B

- **Za mjerne instrumente proizvođači redovito iskazuju *granice pogrešaka* kao simetričan interval ($G = \pm a$) unutar kojeg se sigurno nalazi prava vrijednost mjerene veličine**
- **Za analogne instrumente određene su razredom točnosti:**
  - **G = ± r.t. % (od gornje granice mjernog opsega)**
    - **r.t. je razred točnosti: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2,5; 5**
    - **npr. instrument razreda točnosti 0,5 na mjernom opsegu 2 V neće griješiti više od $G = \pm(0{,}5 \cdot 2\ \text{V})/100 = \pm 10\ \text{mV}$**
- **Za digitalne instrumente definira se zasebno (za svaki tip instrumenta, mjerno područje, mjerni opseg, i dr.) – npr. uz očitanje (*reading*) 1,5468 V na mjernom opsegu (*range*) 2 V i razlučivanje od 4½ znamenaka (digits) to može biti definirano kao:**
  - **G = ±(0,01 % of reading + 0,05 % of range)**
    - **$G = \pm(0{,}0001 \cdot 1{,}5468\ \text{V} + 0{,}0005 \cdot 2\ \text{V}) = \pm 1{,}2\ \text{mV}$**
  - **G = ±(0,2 % of reading + 30 digits)**
    - **$G = \pm(0{,}002 \cdot 1{,}5468\ \text{V} + 3\ \text{mV}) = \pm 6{,}1\ \text{mV}$**
  - **G = ±(0,15 % of reading + 2 mV)**
    - **$G = \pm(0{,}0015 \cdot 1{,}5468\ \text{V} + 2\ \text{mV}) = \pm 4{,}3\ \text{mV}$**

Složena standardna nesigurnost

- **Za nezavisne ulazne veličine složena standardna nesigurnost je pozitivni drugi korijen složene varijance:**

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

- **Parcijalne derivacije $\partial f / \partial x_i$ nazivaju se i koeficijenti osjetljivosti (*sensitivity coefficients*)**
- **Ako je $y = c x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_N$ (tj. kad se radi o produktu ulaznih veličina), tada se relativna složena varijanca zapisuje kao:**

$$\left[\frac{u_c(y)}{y} \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[p_i \frac{u(x_i)}{x_i} \right]^2$$

- **Ako je p_i jednak +1 ili -1, relativna složena nesigurnost jednaka je korijenu iz sume kvadrata pojedinih rel. std. nesigurnosti**

Određivanje proširene nesigurnosti

- **U nekim komercijalnim, industrijskim i upravljačkim primjenama, ili kad se odnosi na zdravlje ili zaštitu, radi se s proširenom nesigurnošću (*expanded uncertainty*):**

$$U_p = k_p \cdot u_c(y)$$

gdje je k_p obuhvatni faktor (*coverage factor*). Tada se mjerni rezultat iskazuje kao

$$Y = y \pm U_p$$

- **Općenito, faktor $k_p \in [2, 3]$, što ovisi o razdiobi veličine y. Vrlo često zadovoljava <u>aproksimacija normalnom razdiobom</u>, kod koje je za k_p = 2 razina pouzdanosti (*coverage probability, level of confidence*) približno 95 %, a za k_p = 3 približno 99 %**

Određivanje proširene nesigurnosti

- **Točnije određivanje proširene nesigurnosti pokazuje da se razdioba varijable $(y - Y) / u_c(y)$ može <u>aproksimirati *t*-razdiobom za efektivni stupanj slobode</u> ν_{eff}, koji se računa Welch-Satterthwaite-ovom formulom:**

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{u_i^4(y)}{\nu_i} \right]}$$

gdje je $u_i(y) = (\partial f / \partial x_i) \cdot u(x_i) = c_i \cdot u(x_i)$

- **Proširena nesigurnost tada se računa izrazom:**

$$U_p = k_p \cdot u_c(y) = t_p(\nu_{\mathrm{eff}}) \cdot u_c(y)$$

te definira interval $Y = y \pm U_p$ koji ima približnu razinu pouzdanosti *P*

Određivanje proširene nesigurnosti

- **Za normalnu razdiobu je ν = $n-1$ dok za "a priori" razdiobu, za koju je $u(x_i)$ točno poznata, $\nu \to \infty$**

- **Ako izračunati ν_{eff} nije cijeli broj, <u>treba ga zaokružiti na prvi manji cijeli broj</u> (npr. ako je izračunata vrijednost 45,78 treba uzeti da je $\nu_{\mathrm{eff}} = 45$)**

- **Kao primjer u tablici su navedene vrijednosti $t_p(\nu_{\mathrm{eff}})$ za različite efektivne stupnjeve slobode i razinu pouzdanosti $P = 95\ \%$**

ν_{eff}	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$t_p(\nu_{\mathrm{eff}})$	4,30	2,57	2,23	2,13	2,09	2,06	2,04	2,03	2,02	2,01	2,01

Određivanje proširene nesigurnosti

- **Ako je** $y = c x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_N^{p_N}$ **(tj. kad se radi o produktu ulaznih veličina), vrijedi da su relativne standardne nesigurnosti redom:**

$$u_{\mathrm{cr}}(y) = \frac{u_{\mathrm{c}}(y)}{y}, \quad u_{\mathrm{r}}(x_i) = \frac{u(x_i)}{x_i}, \quad u_{\mathrm{r}i}(y) = p_i \frac{u(x_i)}{x_i} = p_i \cdot u_{\mathrm{r}}(x_i)$$

- **U tom slučaju možemo računati efektivni stupanj slobode** ν_{eff} **izrazom:**

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u_{\mathrm{cr}}^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{u_{\mathrm{r}i}^4(y)}{\nu_i} \right]}$$

Iskazivanje mjernog rezultata

- **Mjerni rezultat iskazuje se na sljedeće načine:**

1. I_1 = 25,6535 mA uz $u_c(I_1)$ = 0,4 μA; ovakav zapis je preporučljiv
2. I_1 = 25,6535(4) mA; broj u zagradi označuje $u_c(I_1)$ u odnosu na zadnje znamenke iskazanog rezultata
3. I_1 = 25,6535(0,0004) mA; broj u zagradi je $u_c(I_1)$ iskazana istom jedinicom kao i rezultat
4. I_1 = (25,6535 ± 0,0004) mA; ovaj oblik valja izbjegavati jer se on rabi za iskazivanje rezultata s visokom razinom pouzdanosti

1. primjer

Izravno mjerenje napona

Napon mjerimo digitalnim voltmetrom na opsegu 10 V, za koji proizvođač deklarira da ne griješi više od ±[14·10^{-5} of Rdg + 17·10^{-5} of Range] do 1 godine nakon posljednjeg umjeravanja i za laboratorijske temperaturne uvjete. Ako smo uzeli 15 uzoraka mjerenog napona te dobili aritmetičku sredinu 8,4287 V i standardno odstupanje 9,45 mV, koliki je efektivni stupanj slobode i proširena nesigurnost za razinu pouzdanosti 95 %?

Rješenje: $v_{\mathrm{eff}} = 30$ $U_p(U) = 6$ mV

$$U = \overline{U}_{\mathrm{DV}} + \Delta U_{\mathrm{DV}} = 8{,}4287\ \mathrm{V} + 0\ \mathrm{V} = 8{,}4287\ \mathrm{V}$$

$$u_{\mathrm{c}}(U) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{u^2(\overline{U}_{\mathrm{DV}}) + u^2(\Delta U_{\mathrm{DV}})}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = 2{,}95\ \mathrm{mV}$$

u_{A}	2,44	mV
a	2,88	mV
u_{B}	1,66	mV
u_{C}	**2,95**	**mV**
v_{A}	14	
v_{eff}	30,02	
t_p	2,04	
U_p	**6,02**	**mV**

2. primjer

Neizravno mjerenje snage

Istosmjernu snagu trošila određujemo posrednom metodom mjerenjem napona i struje. Ako je napon od 115 V izmjeren uz pripadnu relativnu standardnu nesigurnost $u_r(U)$ = 0,1 %, a struja 0,8 A uz pripadnu relativnu standardnu nesigurnost $u_r(I)$ = 0,25 %, kolika je mjerna nesigurnost tako određene snage?

Rješenje: $u_c(P)$ = 0,25 W

P	92	W
$u_{cr}(P)$	0,27	%
$u_c(P)$	0,25	W

3. primjer

Mjerenje gubitaka

Snagu gubitaka na četveropolu mjerimo kao razliku snage na ulazu i snage na izlazu. Ako je snaga izmjerena vatmetrom W_1 na ulazu u četveropol 352 W uz nesigurnost 2,7 W, a snaga na izlazu 312 W izmjerena vatmetrom W_2 uz nesigurnost 2,1 W, kolika je relativna mjerna nesigurnost snage gubitaka?

Rješenje: $u_{cr}(P_g) = 8{,}6\ \%$

P_g	40	W
$u_c(P_g)$	3,42	W
$u_{cr}(P_g)$	8,55	%

4. primjer

Neizravno mjerenje struje

Nepoznatu struju određujemo tako da mjerimo pad napona na poznatom otporu. Kao poznati otpor rabimo shunt nazivne vrijednosti 0,2 Ω, kojem je umjeravanjem kod 23 °C i 4 A određen otpor od 0,19756 Ω uz relativnu proširenu nesigurnost $5 \cdot 10^{-5}$ za $k = 2$. Temperaturni koeficijent otpora u intervalu (23 ± 5) °C iznosi $5 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}. Digitalni voltmetar ima unutrašnji otpor >1 GΩ, a izravnim uzimanjem uzoraka izmjeren je niz od 9 očitanja, pri čemu je dobivena aritmetička sredina od 0,80357 V i standardno odstupanje od 0,13 mV. Digitalni voltmetar postavljen je tako da mjeri na mjernom opsegu 1 V, na kojem proizvođač deklarira granice pogrešaka ±[0,05 % of Rdg + 0,04 % of Range] unutar (23 ± 5)°C. Temperatura prostorije je (23 ± 2)°C. Kolika je mjerena struja I i pripadna složena standardna nesigurnost $u_c(I)$?

Rješenje: na sljedećim stranicama

4. primjer – nastavak

- **Matematički model:** $I_R = \dfrac{U_{\mathrm{DV}}}{R}$

- **Složenu standardnu nesigurnost računamo izrazom**

$$u_{\mathrm{c}}^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$$

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{c}}^2(I_R) &= c_U^2 u^2(U_{\mathrm{DV}}) + c_R^2 u^2(R) = \\ &= c_U^2\left[u_1^2(U_{\mathrm{DV}}) + u_2^2(U_{\mathrm{DV}})\right] + c_R^2\left[u_1^2(R) + u_2^2(R)\right] \end{aligned}$$

$$c_U = \frac{\partial I_R}{\partial U_{\mathrm{DV}}} = \frac{\partial (U_{\mathrm{DV}}/R)}{\partial U_{\mathrm{DV}}} = \frac{1}{R} \qquad c_R = \frac{\partial I_R}{\partial R} = \frac{\partial (U_{\mathrm{DV}}/R)}{\partial R} = -\frac{U_{\mathrm{DV}}}{R^2}$$

$$u_{\mathrm{c}}^2(I_R) = \frac{1}{R^2}\left[u_1^2(U_{\mathrm{DV}}) + u_2^2(U_{\mathrm{DV}})\right] + \frac{U_{\mathrm{DV}}^2}{R^4}\left[u_1^2(R) + u_2^2(R)\right]$$

4. primjer – nastavak

- **Pojedine standardne nesigurnosti:**

$u_1(U_{\mathrm{DV}})$

$$u_1(U_{\mathrm{DV}}) = s(\overline{U}_{\mathrm{DV}}) = \frac{s(U_{\mathrm{DV}k})}{\sqrt{n}} = 43{,}33\ \mu\mathrm{V}$$

$$u_1^2(U_{\mathrm{DV}}) = 1{,}88 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{V}^2$$

$u_2(U_{\mathrm{DV}})$

$$\pm(0{,}05\% \cdot \overline{U}_{\mathrm{DV}} + 0{,}04\% \cdot 1\ \mathrm{V}) =$$

$$= \pm(5 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}80357\ \mathrm{V} + 4 \cdot 10^{-4} \cdot 1\ \mathrm{V}) = \pm 801{,}79\ \mu\mathrm{V}$$

$$a_U = 801{,}79\ \mu\mathrm{V}$$

$$u_2(U_{\mathrm{DV}}) = \frac{a_U}{\sqrt{3}} = 462{,}9\ \mu\mathrm{V}$$

$$u_2^2(U_{\mathrm{DV}}) = 2{,}14 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{V}^2$$

4. primjer – nastavak

- **Pojedine standardne nesigurnosti:**

$u_1(R)$ $$U_p(R)=\frac{U_p(R)}{R}R=5\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}19756\ \Omega=9{,}88\ \mu\Omega$$

$$U_p(R)=k\cdot u_c(R)=k\cdot u_1(R) \qquad u_1(R)=\frac{U_p(R)}{k}=4{,}94\ \mu\Omega$$

$$u_1^2(R)=2{,}44\cdot 10^{-11}\Omega^2$$

$u_2(R)$ $$\Delta T=\pm 2\ \mathrm{K}$$

$$\Delta R=\alpha\cdot\Delta T\cdot R=\pm\left(5\cdot 10^{-5}\mathrm{K}^{-1}\cdot 2\ \mathrm{K}\cdot 0{,}19756\ \Omega\right)=\pm 19{,}76\ \mu\Omega$$

$$a_R=19{,}76\ \mu\Omega \qquad u_2(R)=\frac{a_R}{\sqrt{3}}=11{,}41\ \mu\Omega$$

$$u_2^2(R)=1{,}3\cdot 10^{-10}\Omega^2$$

4. primjer – nastavak

- **Složena standardna nesigurnost:**

$$u_c^2(I_R) = \frac{1}{(0{,}19756\ \Omega)^2}(0{,}19 + 21{,}43)\cdot 10^{-8}\,\mathrm{V}^2 +$$

$$+\frac{(0{,}80357\ \mathrm{V})^2}{(0{,}19756\ \Omega)^4}(2{,}44 + 13{,}01)\cdot 10^{-11}\,\Omega^2$$

$$u_c^2(I_R) = 5{,}6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{A}^2$$

$$\boxed{u_c(I_R) = 2{,}37\ \mathrm{mA}}$$

- **Mjerena je struja:**

$$\boxed{I_R = \frac{\overline{U}_{\mathrm{DV}}}{R} = \frac{0{,}80357\ \mathrm{V}}{0{,}19756\ \Omega} = 4{,}0675\ \mathrm{A}}$$

5. primjer

Mjerni sustav

Napon dijagonale neuravnoteženog mosta, kojeg spajamo na ulaz pojačala nazivnog pojačanja 60 dB, mjerimo na izlazu pojačala digitalnim voltmetrom na mjernom opsegu 10 V. Poznati su nam sljedeći podaci: točnost pojačanja pojačala ±0,8 te točnost instrumenta definirana kao ±(5 · 10^{-4} of reading + 8 · 10^{-4} of range). Ako smo voltmetrom izmjerili napon 3,755 V izračunajte napon na dijagonali mosta te složenu standardnu nesigurnost $u_c(y)$ tog napona!

Rješenje:

U_d = 3,755 mV

$u_c(U_d)$ = 5,96 μV

$$U_{\mathrm{d}} = \frac{U_{\mathrm{V}}}{A} = 3{,}755\ \mathrm{mV}$$

$$u_{\mathrm{cr}}(U_{\mathrm{d}}) = \sqrt{u_{\mathrm{r}}^2(U_{\mathrm{V}}) + u_{\mathrm{r}}^2(A)} = 1{,}587 \cdot 10^{-3}$$

$$u_{\mathrm{r}}(U_{\mathrm{V}}) = \frac{u(U_{\mathrm{V}})}{U_{\mathrm{V}}} = \frac{a_U}{U_{\mathrm{V}}\sqrt{3}} = 1{,}519 \cdot 10^{-3}$$

$$u_{\mathrm{r}}(A) = \frac{u(A)}{A} = \frac{a_A}{A\sqrt{3}} = 4{,}619 \cdot 10^{-4}$$

$$u_{\mathrm{c}}(U_{\mathrm{d}}) = u_{\mathrm{cr}}(U_{\mathrm{d}}) \cdot U_{\mathrm{d}} = 5{,}961\ \mu\mathrm{V}$$

6. primjer

Mjerenje otpora

Otpornik nazivne vrijednosti R_N = 10 Ω uspoređuje se s etalonskim otpornikom iste nazivne vrijednosti tako da se, uz njihov serijski spoj, dvama voltmetrima istodobno mjere padovi napona na oba otpornika. Poznati su nam podaci o etalonu: otpor $R = R_N(1 - 5\cdot10^{-6})$, proširena nesigurnost $U(R)$ = 0,3 mΩ, obuhvatni faktor k = 2 i pripadni efektivni stupanj slobode ν_{eff} = 14. Nakon ponovljenih mjerenja dobili smo aritmetičke sredine napona, izmjerenih na mjerenom i etalonskom otporniku, redom 0,554793 V i 0,554851 V, čije su složene standardne nesigurnosti redom 7,6 μV i 5,5 μV, a ν_{eff} = 12 za obje vrijednosti. Koliki je efektivni stupanj slobode ν_{eff} izmjerene vrijednosti otpora?

Rješenje: ν_{eff} = 35

$u_r(R)$	1,50E-05	
$u_r(U_X)$	1,37E-05	
$u_r(U)$	9,91E-06	
$u_{cr}(R_X)$	2,26E-05	
R_X	**9,99890**	Ω
r_X	-1,10E-04	
$u_c(R_X)$	2,26E-04	Ω
ν_{eff}	**35,5**	

$$u_{cr}(R_X) = \sqrt{u_r^2(R) + u_r^2(U_X) + u_r^2(U)}$$

$$\nu_{eff} = \frac{u_{cr}^4(R_X)}{\dfrac{u_{cr}^4(R)}{\nu_R} + \dfrac{u_{cr}^4(U_X)}{\nu_{U_X}} + \dfrac{u_{cr}^4(U)}{\nu_U}}$$

Zaključak

- **Računanje mjerne nesigurnost ultimativno ovisi o matematičkom modelu kojim opisujemo mjerenu veličinu**
- **Pojedine sastavnice složene standardne nesigurnosti mogu biti vrste A ili vrste B**
- **Određivanje proširene nesigurnosti ovisi o zahtijevanoj razini pouzdanosti i razdiobi veličine Y**
- **Prva aproksimacija može biti normalna razdioba, a za točnije računanje potrebno je odrediti efektivni stupanj slobode**
- **Ovdje je prikazano računanje mjerne nesigurnosti neizravno mjerenih veličina kad su ulazne veličine nezavisne (ako su one zavisne, tj. koreliraju, računanje je složenije)**