6.1. REDOVI

Teorem
Definicija
tekst / tekst
Napomena

6.1.1. Definicija i osnovna svojstva

Red brojeva je izraz oblika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Svakom redu je pridružen NIZ parcijalnih suma S_n

Red $\sum a_n$ konvergira prema broju S ako $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

* suma geometrijskog reda: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \dfrac{a_1}{1-q}$, $|q|<1$

TM Ako $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergiraju, tada $\sum(a_n+b_n)$ isto konvergira

TM Nužan uvjet konvergencije [NUK]

Ako red $\sum a_n$ konvergira, tada $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

DOKAZIĆ $a_n = S_n - S_{n-1}$ $\quad S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n$

- napadnemo s limesom:

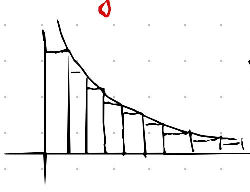
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \quad \text{– oboje teži u isto}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$$

OBRAT NE VRIJEDI!
– ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ne znamo jel konv ili div

→ protuprimjer: harmonijski red: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \dots + \frac{1}{n} = 0$

ALI DIVERGIRA:



$\sum \frac{1}{n} \to \infty$ (matan 1)

6.1.2 Redovi s neneg. članovima

TM Red s neneg članovima konvergira akko mu je niz S_n omeđen.

TM Poredbeni kriterij $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s neneg. članovima tako da: $a_n \le b_n$

a) Ako $\sum a_n$ divergira $\Rightarrow$ $\sum b_n$ divergira

b) Ako $\sum b_n$ konvergira $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergira

Dokaz:

a) Ako $\sum a_n$ divergira $\longrightarrow$ parcijalna suma A_n nije omeđena odozgo, pa prema tome nije ni parc. suma B_n ograničena odozgo $\Rightarrow \sum b_n$ divergira

b) Ako $\sum b_n$ konvergira $\rightarrow$ budući da je B_n ograničena odozgo onda je i parc suma A_n ograničena odozgo $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergira

OBRAT NE VRIJEDI!
- veći konv $\longrightarrow$ manji konv
- manji div $\longrightarrow$ veći div.

* Općenito

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \begin{cases} r>1, & \text{red konvergira} \\ r \le 1, & \text{red divergira} \end{cases}$$

TM Poredbeni limes Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s neneg članovima tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$. Ako je $L \in \langle 0, \infty \rangle$, tada oba reda konvergiraju ili divergiraju, tj. $\sum a_n \sim \sum b_n$.

DOKAZ:

Iz definicije limesa uzmemo $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$, i odredimo proizvoljno $\varepsilon = \frac{L}{2}$

tada $-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon \longrightarrow -\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} - L < \frac{L}{2}$

$\Rightarrow \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}L \;\Big/ \cdot b_n \Rightarrow \frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n$ – promatramo dio po dio

a) $\frac{L}{2} b_n < a_n \xrightarrow{\text{poredbeni}}$ $\sum a_n$ konvergira $\rightarrow \sum b_n$ konv
$\sum b_n$ divergira $\rightarrow \sum a_n$ div

veći

b) $a_n < \frac{3L}{2} b_n \xrightarrow{\text{poredbeni}}$ $\sum b_n$ konvergira $\rightarrow \sum a_n$ konvergira
$\sum a_n$ divergira $\rightarrow \sum b_n$ divergira

manji

TM | D'Alambert

Neka je $\sum a_n$ red s neneg. članovima

a) Ako $\exists g < 1$ t.d. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq g$, $\forall n$ tada $\sum a_n$ konvergira

b) Ako $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $\forall n$ tada $\sum a_n$ divergira

DOKAZ:

a) vidimo da je $a_2 \leq a_1 g$, odnosno mat. ind $\rightarrow a_n \leq a_1 g^{n-1}$.

Geom. red konvergira za $g < 1$ po poredbenom kriteriju konvergencije pa konvergira i manji $\sum a_n$.

b) Ako je $a_{n+1} \geq a_n$, očito je a_n rastući niz $\Rightarrow$ stoga nije zadovoljen NUK $\nexists (\lim_{n\to\infty} a_n = 0)$

$\longrightarrow$ Nije zadovoljen NUK $\Rightarrow \sum a_n$ divergira

$\boxed{! \text{ faktorijele} \rightarrow \text{D'AL}}$

TM | D'Alambert limes

Neka je $\sum a_n$ red s ne-neg članovima

$$\longrightarrow \quad g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} <1, & \text{red konvergira} \\ >1, & \text{red divergira} \\ =1, & \text{nema odluke} \end{cases}$$

pazi

TM | Cauchy

a) Ako $\exists g \in \langle 0, 1 \rangle$, td. vrijedi $\sqrt[n]{a_n} \leq g$ $\forall n \Rightarrow$ KONVERGIRA

b) Ako $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $n \to \infty \Rightarrow$ DIVERGIRA

$\boxed{(\text{nešto})^n = \text{Cauchy}}$

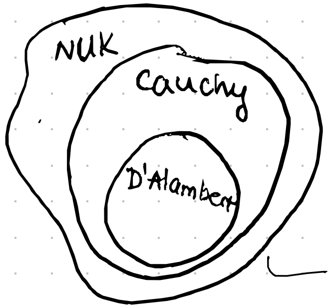
DOKAZ:

a) iz uvjeta $\sqrt[n]{a_n} \leq g \longrightarrow a_n \leq g^n$, $\forall n > 1$; koristimo geometrijski red $\sum g^n$ - konvergentan & poredbeni kriterij $\Rightarrow g^n > a_n$ - konvergira a_n

b) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za $n \to \infty \Rightarrow$ nije zadovoljen NUK $\Rightarrow$ DIVERGIRA

TM | Cauchy-limes:

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} <1 & \text{konvergira} \\ >1 & \text{divergira} \\ =1 & \text{nema odluke} \end{cases}$$



hijerarhija pregledavanja

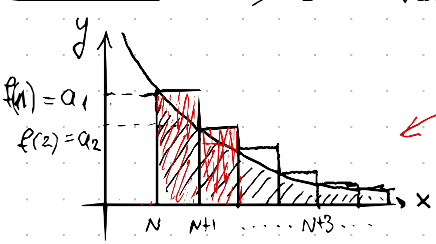
Ako nema zaključka po Cauchyju, ne moramo provjeravati D'Alamberta jer je Cauchy jači.
$\Longrightarrow$ Trebamo provjeriti <u>NUK</u>!

TM | Integralni kriterij: Neka je $\sum a_n$ red s neneg. članovima i neka je $f(x)$ padajuća funkcija na $[N, \infty\rangle$, integrabilna na $[N,\infty\rangle$ i $f(n) = a_n$ za $n \geq N$.

$\Longrightarrow$ red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan ako i samo ako je $\int_N^{\infty} f(x)\,dx < \infty$

DOKAZ: $\Rightarrow$ suma reda konvergira ako i samo ako $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ konv

$P = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$



u tom trenutku je padajuća i poklapa se s vrijednosti a_n

$\underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n}$ — a_n je P jednog ▯ ↳ zbraja P ▯

$\underbrace{\int_N^{\infty} f(x)\,dx}$ — površina ispod krivulje

1) $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots$ = suma površina većih pravokutnika $\Rightarrow$ KONAČNA SUMA
↳ površina grafa ispod krivulje $f(x) \leq \sum a_n$
$\Longrightarrow$ prema poredbenom, budući da $\sum a_n$ konvergira, konvergira i $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$

2) Ako kažemo da $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ konvergira, odnosno površina ispod grafa je konačna i veća od sume površine pravokutnika
$\longrightarrow \int_N^{\infty} f(x)\,dx$ konvergira $\xrightarrow{\text{poredbeni}} \sum a_n$ konvergira

6.1.3. Redovi s realnim članovima

Red je apsolutno konvergentan ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentan

Red je uvjetno konvergentan ako je konverg, ali nije apsolutno konv.

TM | Apsolutno konvergentan red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

DOKAZ: Definiramo dva niza b_n i c_n:

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ 0, & \text{ako je } a_n < 0 \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} 0, & \text{ako je } a_n > 0 \\ -a_n, & \text{ako je } a_n \leq 0 \end{cases}$$

↪ svi poz ↪ svi neg ali u pozitivne (–)

→ lako vidjivo $b_n \leq |a_n|$ i $c_n \leq |a_n|$

-po poredbenom kriteriju ako konvergira veći $\sum |a_n|$ tada konvergiraju i $\sum b_n$ i $\sum c_n$ (dijelovi a_n) $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ konvergira.

OBRAT NE VRIJEDI:

→ ako $\sum a_n$ konvergira ⟶ ne znamo za $\sum |a_n|$

→ ako $\sum |a_n|$ divergira ⟶ ne znamo za $\sum a_n$

Alternirani red je red oblika $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ gdje je a_n niz s neneg. član.

TM | Leibniz

Ako alternirani red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ zadovoljava NUK, i postoji $N \in \mathbb{N}$, tkd vrijedi $a_{n+1} \leq a_n$ za $n \geq N$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konvergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \cdots$$ vrijedi 1) $\lim a_n = 0$

2) niz je padajući $\Rightarrow$ KONVERGIRA

TM | Leibniz

Ako alternirani red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ zadovoljava NUK, i postoji $N \in \mathbb{N}$, tkd vrijedi $a_{n+1} \leq a_n$ za $n \geq N$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 + \dots$$

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) niz a_n je padajuć → KONVERGIRA

$$\boxed{(-1)^n \Rightarrow \text{LEIBNIZ}}$$

DOKAZ:

▸ Promatramo parne parcijalne sume

$S_{2n} = \overset{\text{poz}}{a_1} + \overset{\text{poz}}{(-a_2 + a_3)} + \overset{\text{poz}}{(-a_4 + a_5)} + \dots$ → rastući jer uvijek dodajemo nešto veće i pozitivno $\Rightarrow$ monoton

↳ $S_{2n} = \underline{a_1} - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) + \dots$ → vidimo da je gornja granica

gornja gran → a_1 $\Rightarrow$ OMEĐEN

• niz S_{2n} konvergira nekom broju S

▸ Neparne parcijalne sume

$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, također ≥ 0 ⟶ konvergira nekom broju S_1

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S + \overbrace{\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}}^{0}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S \Rightarrow \text{RED KONVERGIRA}$$

⇝ alternirani harmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$$

⟶ 1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ $\Rightarrow$ KONVERGIRA

⟶ 2) $\frac{1}{n} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ padajuć

6.2. REDOVI POTENCIJA

6.2.1. Osnovni teoremi i primjeri

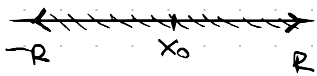
Red potencija oko točke $x_0 \in \mathbb{R}$ je izraz oblika $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$

$\boxed{\text{TM}}$ Područje konvergencije će uvijek biti interval određenog oblika.

$\rightarrow$ $R > |x-x_0|$ R - radijus / polumjer konvergencije

Odnosno to je simetričan interval

$\langle x_0 - R, x_0 + R \rangle$



Red divergira za $|x-x_0| > R$, na rubu ne znamo, nema pravila (div. ili konv., nema pravila)

DOKAZ: Uspoređivanje geom redom, BSO

• zbog jednostavnosti stavimo $x_0 = 0$, pretpostavimo da red konvergira za neki x_1 (tj. $\sum a_n x^n$ konvergira, znači po def NUK $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

$\Longrightarrow$ slijedi $\forall n \geq n_0$ $|a_n x_1^n - 0| < 1$, odnosno $|a_n x^n| < 1$.

• neka je $|x| < |x_1|$, tj $\frac{|x|}{|x_1|} = q < 1$ $\xrightarrow{\text{tada}}$ $\left| \underbrace{a_n x_1^n}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{x^n}{x_1^n}}_{q^n} \right| < q^n$

*prema poredbenom $\rightarrow$ ako konv. veći, konv. manji

▸ ako konvergira q^n (geom red $q<1$), tada po poredbenom kriteriju konvergira i manji $\sum a_n x^n$.

- uzmemo najveći x_1 za koji red konvergira

$$|a_n x^n| = \underbrace{|a_n||x_1^n|}_{<1} \cdot \underbrace{\left|\frac{x^n}{x_1^n}\right|}_{q^n} \Longrightarrow < q^n$$

jer množimo q^n s nečim <1

TM Za polumjer konvergencije vrijedi

↳ Cauchy-Hadamardov TM

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

po recipročnom D'Alembertu ili Cauchyju

* Cauchy i D'Alembert su za ne neg. čl. pa ovdje trebamo apsolutno!

DOKAZIĆ: Gledamo apsolutnu konvergenciju da dobijemo ne neg. članove, zatim D'Alembert

↳ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, promatramo $\sum\limits_{n=0} a_n(x-x_0)^n$

$$\to \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cancel{(x-x_0)}^{n+1}}{a_n\cancel{(x-x_0)}^{n}}\right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$\Longrightarrow |x-x_0| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$$

6.2.2. Taylorovi redovi

Red oblika $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ zovemo Taylorov red funkcije $f(x)$ oko točke x_0.

NUŽAN i DOVOLJAN UVJET:
Taylorov red jednak je $f(x)$ akko $\boxed{\lim\limits_{N\to\infty} R_N(x) = 0}$

*ako je $x_0 = 0$ red se zove McLaurinovim redom

6.2.3. Deriviranje i integriranje redova

TM Neka je $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s polumjer R. Tada:

$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$ te $\int f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + C$

→ kod diverginaja se gubi prvi član, ali kod integriranje NE

⇒ Pritom se R ne mijenja! ALI konvergencija na rubu se može promijeniti!