

Izvodi uz predavanja iz Fizike

i neki primjeri s rješenjima

Grupa P03 - izv. prof. Vjeran Gomzi

Sadržaj

1 - Mehanika materijalne točke u 3D	1
1S20	1
1S24	1
1S25	2
1S26	2
1S27	3
1S30	3
2a - Drugi Newtonov zakon.	4
2S4	4
2S5	5
2S6	6
2S13	7
2S15	8
2S17	10
2S19	11
2b - Rad i kinetička energija.	12
2S20	12
2S21	12
2S27	13
2S33	13
3a - Zakon sačuvanja energije	14
3S6	14
3S9	15
3S10	16
3S13	16
3S16	17
3S21	17
3b - Zakon očuvanja količine gibanja	18
3S23	18
3S24	19
3S25	20
3S26	21
3S28	21
3S29	22
3S30	23
4a - Harmonički oscilator.	24
4S1	24
4S3	25
4S4	26
4S5	26
4S6	26
4S8	27
4b - Prigušeni harmonički oscilator	28
4S9	28
4S10	29
4S11	30
4S12	31
4S14	31
4S15	32
4S18	34
5a - Prisilno gušeno titranje	34
5S2	34
5S6	35

5S7	36
5S9	36
5S10	37
5b - Vezani oscilatori.	38
5S12	38
5S13	39
5S14	40
5S15	41
5S17	42
6a - Valovi. Valna jednačba.	43
6S4	43
6S5	44
6S7	44
6S8	45
6S10	46
6S12	47
6S15	49
6b - Superpozicija valova. Prenesena energija.	49
6S16	49
6S17	50
6S19	51
7a - Valovi na granici sredstava.	53
7S2	53
7S3	56
7S4	56
7S5	57
7b - Zvuk, ultrazvuk, Dopplerova pojava	57
7S12	57
7S16	58
7S17	60
7S19	60
7S22	61
7S26	62
8a - STR: Lorentzove transformacije, uvod i izvod.	63
8S6	63
8S7	64
8S9	66
8S10	67
8S11	68
8S12	69
8S13	69
8b - Transformacije brzina. Izraz za relativističku energiju.	69
8S14	69
8S15	70
8S16	70
8S18	71
8S19	71
8S22	72
8S24	73
9 - Elektrostatika I: Gaussov zakon za električno polje.	73
9S7	73
9S8	74
9S9	75
9S15	75

9S24	78
10a - Električni potencijal. Struja. Biôt-Savartov zakon. Lorentzova sila.	78
10S1	78
10S3	79
10S4	79
10S5	79
10S7	80
10S10	81
10S12	83
10S14	84
10b - Gibanje vodiča u magnetskom polju. Elektromagnetska indukcija i Faradayev zakon.	85
10S17	85
10S20	86
10S24	86
10S28	87
11a - Rotacija vektorskog polja. Faradayev zakon. Ampère-Maxwellova jednadžba.	87
11S5	87
11S6	88
11S9	89
11S11	90
11S12	91
11S13	91
11b - Energija električnog i magnetskog polja.	92
11S18	92
11S19	92
12a - Elektromagnetski valovi. Valna jednadžba, Poyntingov vektor.	93
12S2	93
12S3	94
12S4	94
12S5	95
12S10	96
12S11	97
12S12	98
12b - Polarizacija elektromagnetskih valova.	99
12S13	99
12S15	100
12S18	101
12S19	102
12S20	102
12S21	103
13a - Interferencija elektromagnetskih valova. Youngov pokus.	104
13S14	104
13S15	105
13S16	105
13S17	106
13b - Interferencija elektromagnetskih valova na tankim listićima.	107
13S19	107
13S20	108
13S24	108

1 - Mehanika materijalne točke u 3D

1S20 _____ [Kinematika, vektori - primjer.]

Zadani su vektori položaja parametarski

$$\begin{aligned}\vec{r}_A &= (-2 + 3t)\hat{i} \\ \vec{r}_B &= 4t\hat{j},\end{aligned}\quad (1S20.1)$$

te je udaljenost

$$\begin{aligned}|\vec{r}_A - \vec{r}_B| &= \sqrt{(r_{Ax} - r_{Bx})^2 + (r_{Ay} - r_{By})^2} = \sqrt{(-2 + 3t)^2 + (4t)^2} \\ &= \sqrt{4 - 12t + 25t^2}.\end{aligned}\quad (1S20.2)$$

Minimum te funkcije tražimo kao

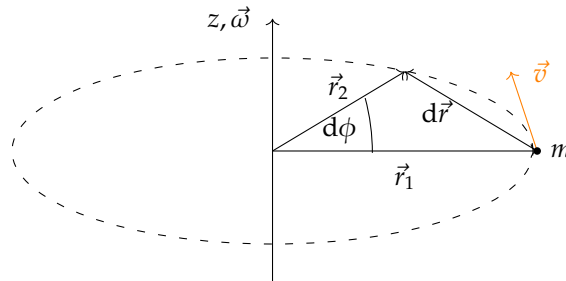
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\vec{r}_A - \vec{r}_B| &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}[\dots] &= \frac{1}{2\sqrt{\dots}}(-12 + 50t) = 0 \Rightarrow \\ t &= \frac{12}{50}\text{ s}.\end{aligned}\quad (1S20.3)$$

1S24 _____ [Kutna brzina.]

Budući da mislimo da o linearnom gibanju znamo sve, gledamo ovdje samo poseban slučaj: *kružno gibanje*.

Tada će vrijediti (Slika 1S24.1) :

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| \equiv r. \quad (1S24.1)$$



Slika 1S24.1

Gledamo kako je u tom slučaju moguće izraziti brzinu:

$$d\vec{r} \simeq r d\phi \hat{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} \hat{v} = r\omega \hat{v}. \quad (1S24.2)$$

Sada promotrimo kako bi se riješili 'cirkularne' definicije, tj. jediničnog vektora brzine u izrazu za definiciju brzine? Pokazuje se da je to moguće ukoliko definiramo *kutnu brzinu* kao vektor koji određuje *os rotacije* oko koje se gibanje odvija (Slika 1S24.1). Smjer vektora brzine reproduciramo ako uz tako definiran smjer vektora (za rotaciju prema pravilu desne ruke) pišemo brzinu kao

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}. \quad (1S24.3)$$

Zanimljivo je ovdje primijetiti da je samo za promjenu smjera vektora položaja, \vec{r} , uz sačuvani iznos moguće pisati:

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad (1S24.4)$$

pa bi brzina u tom slučaju bila:

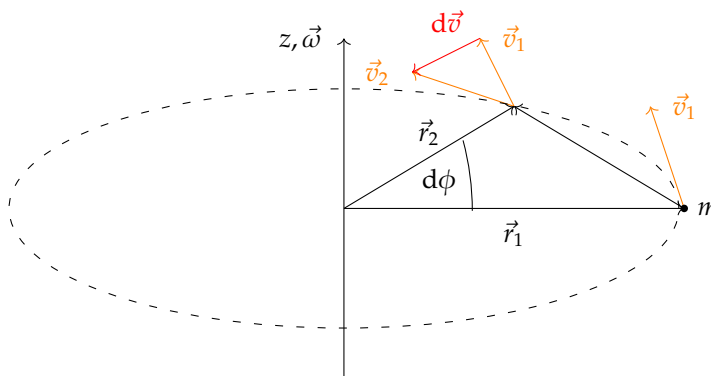
$$\vec{v} = r \frac{d\hat{r}}{dt}, \quad (1S24.5)$$

odnosno, član uslijed promjene *smjera* bi, usporedbom s 1S24.2 odgovarao $\omega \hat{r}$. Na to ćemo se vratiti na odjeljku 1S27, kod opisa ubrzanja općenitog gibanja, gdje je moguća i promjena smjera i promjena iznosa brzine.

1S25 _____ [Ubrzanje kod jednolikog gibanja po kružnici. Centripetalna akceleracija.]

Slično kao i u prošlom slučaju, kada smo gledali promjenu samo smjera, bez promjene iznosa \hat{r} , tako i u slučaju *jednolikog gibanja po kružnici*, gledamo kako se opisuje promjena *smjera* brzine. Promatramo situaciju kao na slici 1S25.1: vektori brzine $\vec{v}_{1,2}$ okomiti su na odgovarajuće vektore položaja $\vec{r}_{1,2}$. Zato je kut između vektora brzina jednak onom između vektora položaja, tj. jednak $d\phi$. Crveno je označen vektor promjene brzine, tj.

$$d\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1. \quad (1S25.1)$$



Slika 1S25.1

Sličnom argumentacijom kao i u prethodnom odjeljku će slijediti

$$d\vec{v} \simeq -v d\phi \hat{r} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -v \frac{d\phi}{dt} \hat{r} = -v\omega \hat{r}, \quad (1S25.2)$$

gdje smo uzeli u obzir da je smjer $d\vec{v}$ prema ishodištu, tj. suprotno od \hat{r} .

Takav izraz, u kojem ne koristimo dodatnu varijablu \hat{r} možemo sažeti

$$\boxed{\vec{a}_{cp} = \vec{\omega} \times \vec{v}}, \quad (1S25.3)$$

slično kao i prije. Ovaj izraz je poznati izraz za **centripetalnu akceleraciju** koja je jedina prisutna kod jednolikog gibanja po kružnici.

1S26 _____ [Ubrzano gibanje po kružnici. Kutna i tangencijalna akceleracija.]

Promatramo li gibanje samo po kružnici, vrijedit će jedn. 1S24.3, koju nismo izveli uz nikakvu drugu posebnu pretpostavku. Zbog okomitosti vektora kutne brzine i položaja, možemo također pisati da je iznos brzine jednostavno

$$|\vec{v}| = r\omega, \quad (1S26.1)$$

pa će se iznos brzine promijeniti jedino ako postoji član različit od nule:

$$|\vec{a}_t| = r \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\equiv \alpha} = r\alpha. \quad (1S26.2)$$

Čime smo definirali novu veličinu, **kutnu akceleraciju**, α . Ovu komponentu (linearnog) ubrzanja, a zvat ćemo **tangencijalno ubrzanje** (ili akceleracija). Smjer te komponente ubrzanja bit će u smjeru brzine, dok će smjer kutne akceleracije biti jednak smjeru kutne brzine $\vec{\omega}$.

Lako je sa slika vidjeti da će smjerovi biti odgovarajući ¹ ako pišemo

$$\boxed{\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}}. \quad (1S26.3)$$

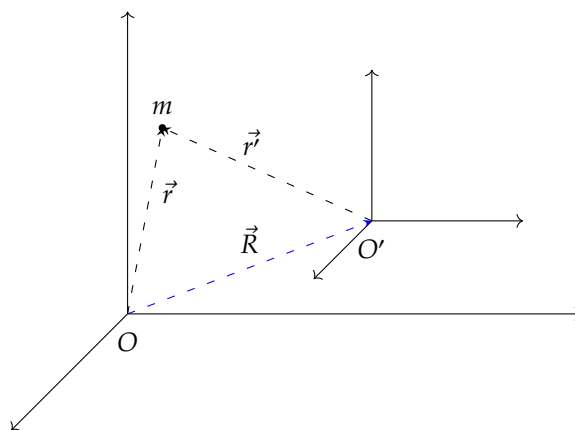
1S27 ————— [Tangencijalno i centripetalno ubrzanje. Ubrzano gibanje po kružnici.]

Općenito ubrzanje kod gibanja po *kružnici* (tj. vrijedi 1S24.3)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_{cp}} \quad (1S27.1)$$

1S30 ————— [I Newtonov zakon i Galileijeva invarijantnost.]

Promatramo dva koordinatna sustava koja jedan u odnosu na drugi miruju ili se gibaju konstantnom brzinom (Slika 1S30.1).



Slika 1S30.1

Ishodišta dviju sustava u nekom trenutku udaljena su za vektor \vec{R} . Veza između opisa gibanja mase m na položaju \vec{r} u S , odnosno na položaju \vec{r}' u S' je (prema Slici 1S30.1)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \quad (1S30.1)$$

Deriviramo li jednadžbu 1S30.1 jednom, dobit ćemo veze brzina u dva sustava:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \quad (1S30.2)$$

gdje smo pretpostavili da je

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt},$$

relativna brzina gibanja ishodišta dvaju sustava.

No, jednadžbe gibanja dobivamo derivirajući 1S30.2, odakle slijedi:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{v}' + \frac{d}{dt}\vec{V} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}', \quad (1S30.3)$$

jer je po pretpostavci $\vec{V} = \text{konst.}$

Dakle, jednadžba gibanja sistema pri gibanju ishodišta koordinatnog sustava konstantnom brzinom relativno u odnosu na drugi koordinatni sustav *ostaje ista*. To je zapravo drugačije izrečen I Newtonov zakon - opis gibanja neće ovisiti o izboru sustava ako oni miruju, ili se relativno gibaju konstantnom relativnom brzinom.

¹(Tj. palac u pravilu desne ruke pokazat će u smjeru brzine \vec{v} ako 'idemo' od smjera \vec{a} prema \vec{r} .)

Transformacije koordinata dvaju sustava koji se jedan u odnosu na drugog gibaju nekom konstantnom brzinom nazivaju se Galilejeve transformacije i glase:

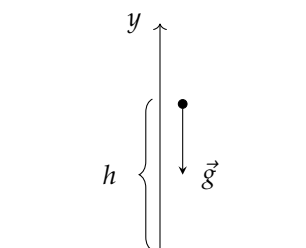
$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}' + \vec{R} \\ t &= t',\end{aligned}\tag{1S30.4}$$

uz $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}t$, $\vec{V} = \text{konst.}$

Prilikom takve transformacije koordinata neće doći do promjene jednadžbi gibanja - jednako će se gibanje opisati u *svim sustavima* koji su međusobno povezani Galileijevim transformacijama.

2a - Drugi Newtonov zakon.

2S4 _____ [Slobodni pad. Konstantna sila.]



Slika 2S4.1

Kao najjednostavniji primjer, rješavamo jednadžbu gibanja materijalne točke koja se giba pod utjecajem konstantne sile. Situacija (Slika 2S4.1) odgovara slobodnom padu.

Jednadžba gibanja (drugi Newtonov zakon)

$$\vec{F} = m\vec{a},\tag{2S4.1}$$

odnosno

$$m\vec{g} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\tag{2S4.2}$$

Uvrstimo li u 2S4.2 raspis po koordinatama, tj. koristimo činjenicu da je gravitacija stalnog smjera:

$$\vec{g} = -g\hat{y},$$

možemo 2S4.2 pisati po koordinatama:

$$\begin{aligned}0 &= m\frac{dv_x}{dt}\hat{x} \\ -mg\hat{y} &= m\frac{dv_y}{dt}\hat{y} \\ 0 &= m\frac{dv_z}{dt}\hat{z}\end{aligned}\tag{2S4.3}$$

Zanimat će nas samo y -komponenta, jer na druge dvije gravitacija ne utječe (tako smo *izabrali* koordinatni sustav! - simetrija 'problema' određuje najpovoljniji način rješavanja). Kako je lijeva strana izraza za v_y u 2S4.3 konstantna, možemo diferencijalnu jednadžbu za komponentu brzine odmah riješiti:

$$-mgdt = mdv_y \int \Rightarrow v_y - v_{0y} = -gt.\tag{2S4.4}$$

Nepoznatu konstantu v_{0y} odredimo iz početnih uvjeta: kako je za $t = 0$ $v_y(0) = 0$ slijedi da mora biti

$$v_y(0) = v_{0y} = 0.$$

Iz definicije brzine:

$$v_y = \frac{dy}{dt}.\tag{2S4.5}$$

imamo diferencijalnu jednadžbu za koordinatu y :

$$\frac{dy}{dt} = -gt, \quad (2S4.6)$$

koju odmah možemo riješiti direktno integracijom jer je g konstantna:

$$dy = -gtdt \int^f \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (2S4.7)$$

Konačna jednadžba gibanja mase m dobiva se određivanjem slobodne konstante y_0 iz početnog uvjeta:

$$y(t = 0) = h,$$

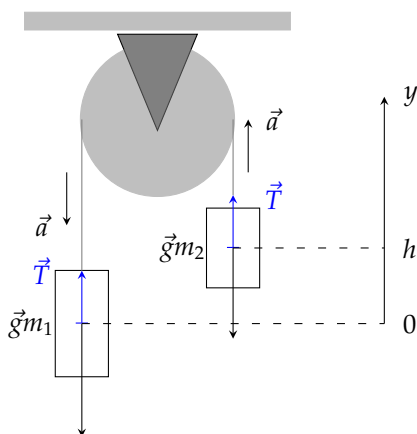
odakle

$$y(0) = y_0 = h,$$

pa napokon slijedi poznata jednadžba za vremensku ovisnost visine u slobodnom padu:

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2S4.8)$$

2S5 _____ [Superpozicija sila. Atwoodov padostroj.]



Slika 2S5.1

Na slici 2S5.1 prikazan je tzv. Atwoodov padostroj. Na tom primjeru pokazat ćemo nekoliko metoda rješavanja jednadžbe gibanja u situacijama u kojima više sila djeluju na tijelo.

Fizikalno, pretpostavljamo da je nit koja povezuje mase preko koloture nerastezljiva i zanemarive mase. Pretpostavljamo također da količinu gibanja koloture možemo zanemariti (bezmasena kolotura). To znači da će se sva sila koju tijelo prenese na nit prenijeti na drugo tijelo. Znači da je nit zapravo definirala zajedničku i koordinatu (y -os, usmjerimo ju uobičajeno prema gore) i akceleraciju (jer su oba tijela povezana, pa gibanje jednog nužno znači i gibanje drugog tijela).

Nakon što je definiran koordinatni sustav, za svako tijelo možemo pisati jednadžbu gibanja (II NZ) uzimajući u obzir smjerove i sve sile koje djeluju na pojedino tijelo:

$$\left. \begin{aligned} -\hat{j}m_1a &= -\hat{j}m_1g + T\hat{j} \\ \hat{j}m_2a &= -\hat{j}m_2g + T\hat{j} \end{aligned} \right\} (-) \Rightarrow (-m_1 - m_2)a = (-m_1 + m_2)g \Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g. \quad (2S5.1)$$

Ovo je problem koji nije samo jednodimenzionalan, već je i problem samo s jednom nepoznanicom iako imamo dva tijela, jer su pomaci masa m_1 i m_2 povezani! Konačno rješenje zapravo znači da smo ovi msamo promijenili ubrzanje padanja - imamo jednaku situaciju kao u prethodnom slučaju (2S4), samo što je akceleracija (sad više ne slobodnog) pada promijenjena.

Ako bi nas sada zanimalo riješiti jednadžbu gibanja, ponovno bi integrirali kao kod slobodnog pada:

$$-\hat{j}m_1a = \hat{j}m_1 \frac{dv_{1y}}{dt} \Rightarrow dv_{1y} = -adt... \quad (2S5.2)$$

Napetost je moguće riješiti uvrštavajući akceleraciju u bilo koju od početnih jednažbi u 2S5.1, odakle

$$-m_1 a = -m_1 g + T \Rightarrow -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g m_1 = -m_1 g + T \Rightarrow \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = T. \quad (2S5.3)$$

Ovim smo skoro posve riješili naš problem. Potpuno rješenje jednažbi gibanja dviju masa dobili bismo sada uzimajući u obzir izbor koordinata na slici 2S5.1. Početno su koordinate tijela povezane, jer su im akceleracije iste, a smjerovi suprotni. Također, početno vrijedi:

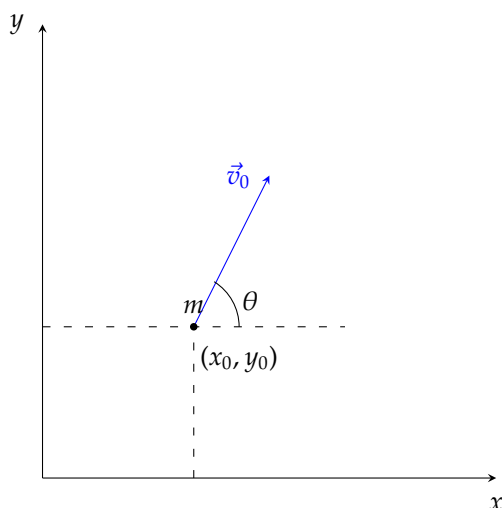
$$\begin{aligned} y_1(t=0) &= 0 \\ y_2(t=0) &= h' \end{aligned}$$

pa koristeći stečeno znanje kod rješavanja slobodnog pada, uz pretpostavku da su brzine tijela na početku bile jednake 0, možemo pisati odmah rješenja kao:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -at^2/2, \\ y_2(t) &= h + at^2/2, \end{aligned} \quad (2S5.4)$$

u što valja uvrstiti konačno a iz 2S5.1.

2S6 _____ [Kosi hitac.]



Slika 2S6.1

Općenita shema kojom opisujemo gibanje koje nazivamo *kosi hitac* prikazana je na slici 2S6.1. Početni uvjeti su dakle:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y} \\ \vec{v}_0 &= v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y} \\ \text{uz :} \\ v_{0x} &= v_0 \cos \theta \\ v_{0y} &= v_0 \sin \theta \end{aligned} \quad (2S6.1)$$

Jednažba gibanja uz ovako definirani koordinatni sustav glasi:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} = m \vec{g} = -mg \hat{y} \quad (2S6.2)$$

Kako bi ju riješili najprije raspišemo komponente:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \Rightarrow \text{jednoliko gibanje u } x \Rightarrow v_x = v_{x0} = v_0 \cos \theta \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta t \\ m\ddot{y} &= -mg \Rightarrow \text{slobodni pad + poč. brzina u } y \Rightarrow v_y = v_{y0} = v_0 \sin \theta \Rightarrow y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{g}{2}t^2 \end{aligned} \quad (2S6.3)$$

Domet se definira kao duljina (ili koordinata, ovdje x) na kojoj će tijelo imati visinu podloge (ovdje $y = 0$). Za ovaj slučaj, domet bi računali iz ovog uvjeta na y , no postoje zadaci u kojima se računa domet na kosini itd. (Tamo je uvjet taj da je presjecište parabole koja opisuje kosi hitac jednako npr. jednažbi pravca koji opisuje kosinu.) Ovdje za domet, općenito iz uvjeta na koordinatu y nađemo vrijeme, pa iz njega koordinatu x :

$$y(t) = 0 = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-v_0 \sin \theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 4y_0 g/2}}{-g}, \quad (2S6.4)$$

gdje treba pripaziti da se uzima samo regularno, smisljeno rješenje u kojem je $t > 0$.

Ova jednažba je jednostavnija kada je projektil ispucan iz ishodišta, tj. $x_0 = y_0 = 0$ pa domet možemo izračunati kao dvostruko vrijeme da brzina u y -smjeru postane 0 (to je upravo trenutak kada putanja dosiže najvišu točku):

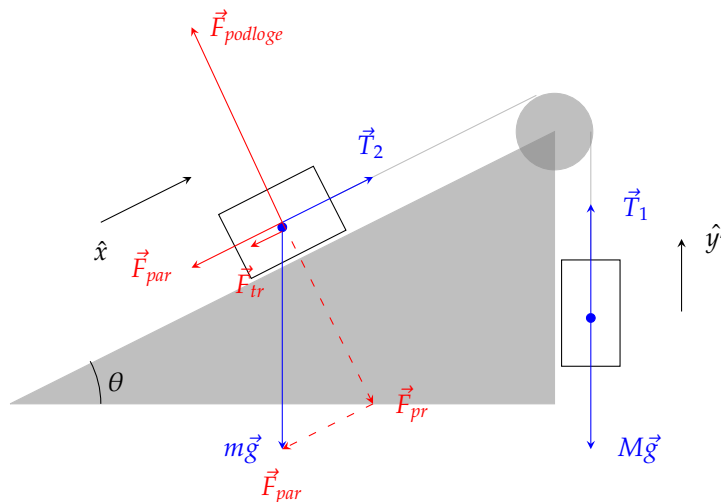
$$\dot{y}(t) = 0 = v_0 \sin \theta - gt \Rightarrow t_{\max} = t_{\text{domet}}/2 = \frac{v_0 \sin \theta}{g}, \quad (2S6.5)$$

2S13 [Trenje i kosina.]

Na slici 2S13.1 prikazane su plavo po dvije 'osnovne' sile koje djeluju na svako tijelo. No, kako je masa m ograničena u svom gibanju na plohu kosine, moramo silu $m\vec{g}$ raspisati tako da uključimo i to ograničenje (prikazano crveno na slici). Poznato je da se tada ograničenje gibanja svodi na to da je sila okomita na podlogu uravnotežena jednakom silom, ali suprotnog smjera koja djeluje na tijelo. Ta sila pritiska, kako je također poznato iz dosadašnjeg školovanja, uzrokom je sile trenja. Sila trenja ovisi o koeficijentu trenja i sili pritiska kao

$$|\vec{F}_{tr}| = \mu |\vec{F}_{pritiska}| \quad (2S13.1)$$

Osim sile pritiska, preostala komponenta sile teže na masu m utječe na gibanje obaju tijela.



Slika 2S13.1: Crveno crtkano označen je raspis sile teže mase m preko člana okomitog na kosinu i paralelnog s kosinom. Punim crvenim strelicama označene su sile koje su posljedica uvođenja kosine kao ograničavajuće plohe gibanja, s definiranim koeficijentom trenja.

Za razliku od situacije uz opis Atwoodovog padostroja (odjeljak 2S5), ovdje nam je sila napetosti, T , element koji povezuje gibanja dviju tijela jednaka samo po iznosu, no prema slici vidimo da su vektori \vec{T}_1 i \vec{T}_2 različiti. Zato i različita oznaka na slici, iako smo ponovno, kako i prije pretpostavili da su i nit i kolotura nerastezljive i bez mase. To bi formalno značilo da bi trebali posebno riješiti lijevu i desnu stranu koloture, te ih povezati preko istog iznosa napetosti T . Najjednostavnije će biti ako koordinatni sustav biramo različito za dva dijela opisa (vidi sliku 2S13.1), pa tako slijedi za ukupnu silu na svako od tijela:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_{par} + \vec{F}_{tr} + \vec{T}_2 \\ M\vec{a} &= M\vec{g} + \vec{T}_1. \end{aligned} \quad (2S13.2)$$

Akceleraciju *biramo* uz pretpostavku da je masa M dovoljno velika da nadjača zajednički učinak sile gravitacije tijela mase m i trenja, pa vrijedi:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_{par} + \vec{F}_{tr} + \vec{T}_2 \Big|_{\hat{x}} \Rightarrow ma = T - F_{par} - F_{tr} \\ M\vec{a}' &= M\vec{g} + \vec{T}_1 \Big|_{\hat{y}'} \Rightarrow Ma = Mg - T, \end{aligned} \quad (2S13.3)$$

gdje smo uzeli u obzir da vrijedi

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T.$$

Jednadžbe 2S13.3 su dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, što lako riješimo kad su nam poznati iznosi F_{par} i F_{tr} . Te iznose odredimo iz poznatog kuta kosine θ i sličnosti trokuta. Vrijedi

$$\begin{aligned} F_{par} &= mg \sin \theta \\ F_{tr} &= mg \cos \theta \Rightarrow F_{tr} = \mu F_{par} = \mu mg \cos \theta, \end{aligned} \quad (2S13.4)$$

pa uvrštavajući u 2S13.3 slijedi:

$$a = \frac{Mg - mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta}{M + m}. \quad (2S13.5)$$

Ponovno je to jednoliko ubrzano gibanje po pravcu kakvo smo već detaljno razmotrili ranije. No, za svako od tijela, to će gibanje biti opisano u odgovarajućem koordinatnom sustavu.

2S15 [Kompliciraniji 1D primjer - sila otpora zraka. Padobranac.]

Razmotrit ćemo jedan poseban primjer u kojem osim gravitacije na tijelo koje slobodno pada u zraku djeluje otpor zraka. Silu otpora pisat ćemo kao silu koja je *proporcionalna brzini ali suprotnog smjera*, tj.

$$\vec{F}_{ot} = -\delta kmv.$$

Izabirući koordinatni sustav tj. y -os ponovno "prema gore", možemo pisati diferencijalnu jednadžbu za y -komponentu brzine kao:

$$-m\dot{v}_y = -mg + kmv_y \Rightarrow -\frac{dv_y}{dt}m = -mg + kmv_y \Rightarrow \frac{dv_y}{-g + kv_y} = dt, \quad (2S15.1)$$

gdje smo u zadnjem koraku već načinili najvažnije za rješavanje ovakve jednostavne diferencijalne jednadžbe - separirali smo varijable, pa možemo jednadžbu riješiti integracijom.² Koristimo supstituciju:

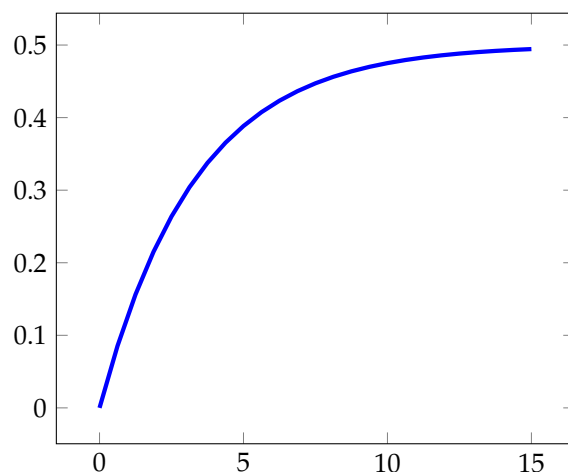
$$\begin{aligned} u &= g - kv_y \\ du &= -kdv_y \\ v_y(0) &= 0 \Rightarrow u(0) = g, \end{aligned} \quad (2S15.2)$$

pa je integral jednostavna logaritamska funkcija:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k} \frac{du}{u} &= dt \Big|_{\int} \Rightarrow -\frac{1}{k} (\ln u - \ln u(0)) = t \\ \Rightarrow -\frac{1}{k} \ln \frac{u}{g} &= t \Big|_{\int} \Rightarrow u = ge^{-kt} \\ \Rightarrow v_y(t) &= \frac{g}{k} - \frac{g}{k} e^{-kt} = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}). \end{aligned} \quad (2S15.3)$$

Tako dobivamo inverzno-eksponencijalni porast brzine prema vrijednosti g/k (0.5 na slici 2S15.1).

²Ovdje smo u postavljanju 2S15.1 *pretpostavili* da je akceleracija u negativnom smjeru osi y . Da smo pretpostavili akceleraciju (lijevu stranu u 2S15.1) pozitivnu, ne bi bilo moguće naći rješenje uz zadani početni uvjet da je brzina jednaka 0. To je i fizikalno smisleno, budući da je član u sili koji gleda u pozitivnom smjeru osi y prisutan jedino ako brzina postoji i usmjerena je u negativnom smjeru osi y . Ovo se može argumentirati i činjenicom da član otpora *mora biti* suprotnog predznaka od brzine. Točnije, mogli smo koristiti i općeniti izraz $\frac{dv_y}{dt}m = -mg + kmv_y$, no tada bi prilikom integracije $\int \frac{dv_y}{kv_y - g}$ trebali uzeti u obzir fizikalnu činjenicu da je nazivnik tada negativan na cijelom području, a integral racionalne funkcije ima smisla za pozitivan nazivnik. Tada bi integral transformirali kao: $\int \frac{dv_y}{kv_y - g} = -\int \left| \frac{dv_y}{g - kv_y} \right|$.

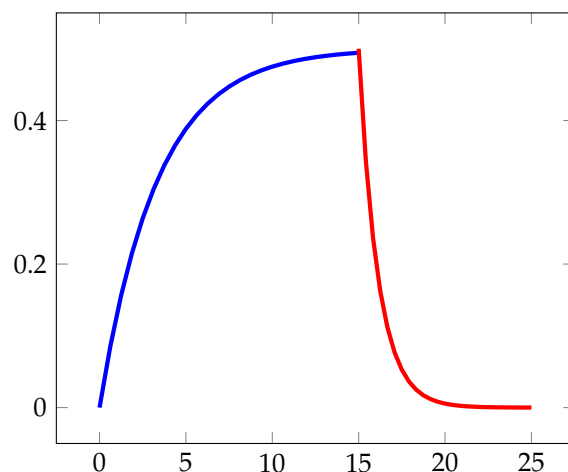


Slika 2S15.1

No, ovo za sada samo opisuje balističko ponašanje - uključili smo otpor zraka. Ovo bi moglo opisati recimo prvi dio pada padobranca, dok padobran još nije otvoren. U drugom dijelu, kada se padobran otvori, postoji neka početna brzina koja je određena izjednačavanjem sila: gravitacijske i sile otpora. Ta brzina je, pogađate, $v(t = t_0) = v_{y0} = g/k$. No, kada je padobran otvoren, konstanta k se mijenja i postaje veća od prethodne dok padobran nije otvoren, tj. $k_2 > k$. Jednadžba gibanja je ista, no početni uvjeti su različiti. Upravo zbog početnog uvjeta na v_{0y} , možemo promjenu nakon otvaranja padobrana promatrati kao da djeluje samo dodatna sila otpora (jer su se gravitacija i otpor zbog početne brzine izjednačili), pa

$$-m\dot{v}_y = k_2 m v_y \Rightarrow -\frac{dv_y}{dt} = +k_2 v_y \int^f \Rightarrow -\ln \frac{v_y}{v_{y0}} = k_2(t - t_0) \Rightarrow v_y = v_{y0} e^{-k_2(t-t_0)}, \quad (2S15.4)$$

što prikazujemo na slici 2S15.2.



Slika 2S15.2

(Pitanje za razmisliti: što je trenutak t_0 Koliko otprilike iznosi prema slici?)

Razmatranje ovog problema možemo nastaviti izvodom ovisnosti položaja o vremenu. No, možemo iz našeg razmatranja vidjeti i koja je konačna brzina padobranca. Jednadžba 2S15.4 vodi na konačnu brzinu $v_y \rightarrow 0$ za $t \rightarrow \infty$, što očito nije baš fizikalno. Problem je naime, što smo u 2S15.4 posve isključili konstantni član gravitacijskog ubrzanja. To je bilo malo previše pojednostavljeno. Pravi izraz mogli bismo dobiti uzimajući u obzir da je jednadžba gibanja uistinu nepromijenjena, te da je početna brzina u trenutku t_0 jednaka g/k :

$$-m\dot{v}_y = -mg + k_2 m v_y \Rightarrow -\frac{dv_y}{dt} = -g + k_2 v_y \int^f \Rightarrow -\ln \frac{u}{u_0} = k_2(t - t_0), \quad (2S15.5)$$

gdje je

$$u = g - k_2 v_y,$$

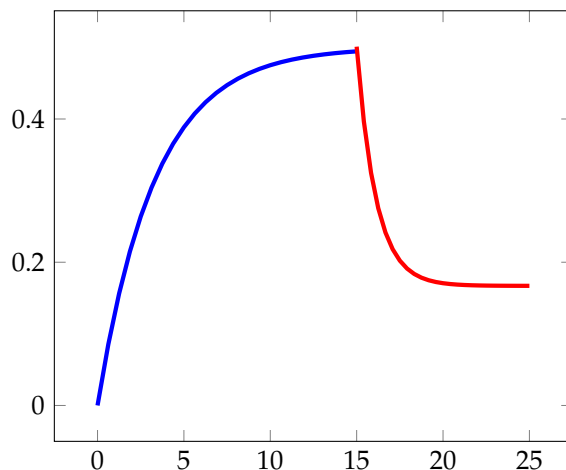
no

$$u_0 = g - k_2 v_{y0} = g - k_2 \frac{g}{k} = g \frac{k - k_2}{k},$$

pa slijedi prema analognom postupku kao pri rješavanju 2S15.3:

$$\Rightarrow v_y(t) = \frac{g}{k_2} \left[1 + \frac{k - k_2}{k} e^{-k_2(t-t_0)} \right]. \quad (2S15.6)$$

Sada dobivamo da je konačna brzina različita od 0, što fizikalno ima više smisla (slika 2S15.3). Tim više,



Slika 2S15.3

konačna brzina je u slučaju $t \gg t_0$ jednaka

$$v_{y,kon} = g/k_2,$$

dakle neovisna o početnoj brzini padanja, ako je padobren otvoren na vrijeme.

2S17

[Balistička krivulja.]

Balistička krivulja je krivulja koja opisuje gibanje projektila (kosi hitac u gravitacijskom polju, uz pretpostavku stalne gravitacije, $\vec{g} = konst$) gdje je u obzir uzet i otpor zraka. Katkad se pretpostavlja da je sila otpora proporcionalna brzini (kako smo pretpostavili kod padanja padobranca), a katkad da je sila proporcionalna *kvadratu* brzine. Ovdje ćemo pretpostaviti istu ovisnost o brzini kao kod padanja padobranca, kako bi mogli koristiti izraze izvedene u tom slučaju. Kosi hitac u općenitom slučaju je gibanje koje razmatramo po komponentama, okomito i paralelno u odnosu na smjer vektora \vec{g} , odnosno horizontalom i vertikalom (u pretpostavci 'ravne' Zemljine površine).

Gibanje u vertikalnoj osi (y) je jednako gibanju padobranca, uz neku zadanu početnu brzinu

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta,$$

pa gibanje u y -smjeru postaje upravo ekvivalentno našem razmatranju padanja padobranca prije otvaranja padobrana, tj. na brzinu v_y utječu i otpor i gravitacija:

$$m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{g}{m} - kmv_y. \quad (2S17.1)$$

Budući da je to (osim predznaka otpora u odnosu na gravitaciju) jednaka jednadžba kao 2S15.1, i rješavanje bi bilo jednako kao postupak 2S15.2-2S15.3, no uz početnu brzinu jednaku

$$v_y(0) = V_0 \sin \theta,$$

pa je granica supstitucijske varijable u jednaka

$$u_0 = g + v_0 k \sin \theta,$$

umjesto $u_0 = g$. Odatle se istim postupkom kao prije dobiva:

$$v_y(t) = -\frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) + v_0 \sin \theta e^{-kt}. \quad (2S17.2)$$

Brzina se očito smanjuje brže nego za kosi hitac bez otpora. Padanje se odvija ubrzano dok se ne dosegne neka maksimalna brzina određena koeficijentom otpora.

Integracijom jedn. 2S17.2 dobivamo parametarsku ovisnost visine:

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{k}t - \frac{1}{k} \left[\frac{g}{k} + v_0 \sin \theta \right] (e^{-kt} - 1). \quad (2S17.3)$$

U horizontalnom smjeru (x -os) gibanje je pak ekvivalentno našem razmatranju padanja padobranca nakon otvaranja padobrana :

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kmv_x. \quad (2S17.4)$$

Kako je jedn. 2S17.4 identična 2S15.4, tako je rješenje u ovom slučaju odmah moguće pisati kao

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta e^{-kt}. \quad (2S17.5)$$

Brzina eksponencijalno opada na 0, pa će, ovisno o konstanti otpora, to očito smanjiti domet takvog projektila.

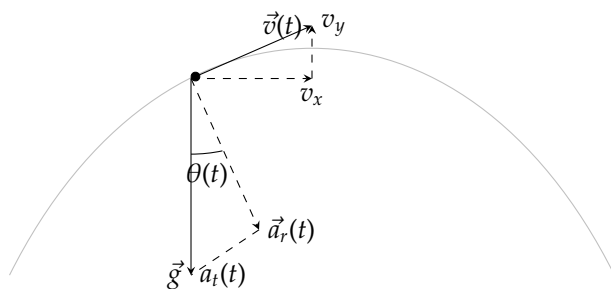
Integracijom po vremenu 2S17.5 dobivamo i rješenje gibanja u x -smjeru

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{k} v_0 \cos \theta (e^{-kt} - 1). \quad (2S17.6)$$

Primjer korištenja ovakvog razmatranja s riješenim jednadžbama gibanja možete proučiti i na [Python simulaciji](#).

2S19 [Centripetalna akceleracija kosog hitca.]

Kako bismo odredili centripetalnu akceleraciju gibanja koje nije isključivo po kružnici? Promotrimo naizgled posve neprikladan primjer - situaciju u kojoj gibanje prirodno razdvajamo u kartezijeve komponente, okomito i paralelno s površinom (približno ravne) Zemlje (Slika 2S19.1).



Slika 2S19.1

Sličan primjer napravili smo u sklopu zadatka ranije (Zad 1.41 na str 35, Predavanja 1), no ovdje ne tražimo ovisnost o putu, nego uobičajenije, o vremenu. Ipak, vidjet ćemo da će radijus zakrivljenosti, odnosno centripetalna akceleracija ovisiti o početnim uvjetima (brzini u x odnosno, y -smjeru).

Promotrimo dva slična trokuta na Slici 2S19.1 koji povezuju ukupnu brzinu (*uvijek* tangenta na krivulju) i centripetalnu akceleraciju (*uvijek* 'gleda' prema centru neke krivulje opisane radijusom zakrivljenosti). Možemo prepoznati da je $\theta(t)$ trenutni kut između komponenta vektora brzine, dan kao

$$\tan \theta(t) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \theta_0 - gt}{v_0 \cos \theta_0}, \quad (2S19.1)$$

što nam je poznato iz rješavanja kosog hitca, ako je projektil ispaljen pod kutem θ_0 brzinom v_0 .

No istovremeno je i

$$\tan \theta(t) = \frac{a_t(t)}{a_r(t)}, \quad (2S19.2)$$

te

$$g = \sqrt{a_t(t)^2 + a_r(t)^2}. \quad (2S19.3)$$

iz 2S19.2 i 2S19.3 možemo odrediti $a_r(t)$ preko $\tan \theta(t)$, odnosno preko omjera komponenti brzina koji nam je poznat, pa

$$a_r(t) = \frac{g^2}{\left(\frac{v_0 \sin \theta_0 - gt}{v_0 \cos \theta_0}\right)^2 + 1}, \quad (2S19.4)$$

te radijus zakrivljenosti iz

$$a_r(t) = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R(t) = \frac{v^2}{a_r} = \frac{(v_0 \sin \theta_0 - gt)^2 + (v_0 \cos \theta_0)^2}{a_r}. \quad (2S19.5)$$

2b - Rad i kinetička energija.

2S20

[Rad. Centripetalna sila.]

Centripetalna sila je sila koja je, kao i centripetalna akceleracija usmjerena prema središtu zakrivljenosti neke putanje. Ona ne utječe na promjenu brzine tijela, nego samo na promjenu smjera. Sjećate li se koje iz dosadašnjeg školovanja?

Možemo se za opis rada centripetalne sile osloniti na sliku 2S19.1 iz prethodnog odjeljka. Prema definiciji rad je

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (2S20.1)$$

No, djelić puta je

$$d\vec{s} = \vec{v} dt,$$

dakle u smjeru brzine koja je *tangencijalna na putanju*, dok je centripetalna sila

$$\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_r,$$

usmjerena prema središtu zakrivljenosti putanje. (Centripetalnu akceleraciju zovemo često i radijalna, kao što smo i do sada činili.)

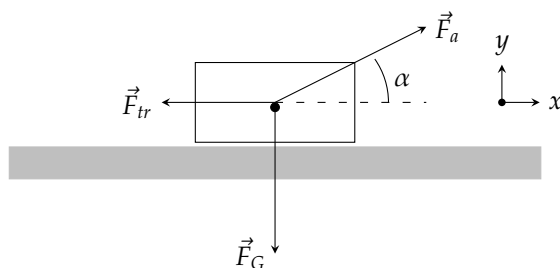
Stavljajući ta dva izraza u jedn. 2S20.1 imamo dakle

$$W = \int \vec{F}_{cp} \cdot d\vec{s} = \int m \underbrace{\vec{a}_r \cdot \vec{v}}_{=0 \text{ jer } \vec{a}_r \perp \vec{v}} dt = 0. \quad (2S20.2)$$

Dakle, rad centripetalne sile, kao i svake koja je okomita na put jednak je 0!

2S21

[Rad stalne sile; rad sile trenja.]



Slika 2S21.1

Zanima nas rad sile trenja za situaciju na slici. Primijetite kako je potrebna neka dodatna sila ili početna brzina, jer trenje je moguće samo kao *otpor* gibanju, a ne kao izvor gibanja. Brzopleto bi se moglo pisati silu trenja samo kao $F_{tr} = \mu F_G$. To je u ovom slučaju pogrešno. Sa slike 2S21.1 valja primijetiti kako vanjska sila \vec{F}_a djeluje pod kutem α u odnosu na horizontalu, pa *postoji komponenta vanjske sile koja djeluje u smjeru y*. Ukupna y-komponenta sile:

$$F_{pr} = F_G - F_{a,y} = F_G - F_a \sin \alpha \Rightarrow F_{tr} = \mu(F_G - F_a \sin \alpha). \quad (2S21.1)$$

Rad sile trenja je dakle:

$$W_{tr} = \int \vec{F}_{tr} \cdot d\vec{s} = \int_{x_1}^{x_2} \mu(F_G - F_a \sin \alpha)(-\hat{x})dx = -\mu(F_G - F_a \sin \alpha)(x_2 - x_1), \quad (2S21.2)$$

i on je *uvijek* negativan. To je povezano s činjenicom da se *trenje uvijek suprotstavlja gibanju*, pa su \vec{F}_{tr} i $d\vec{s}$ uvijek suprotnog predznaka!

Ukoliko bi nas zanimalo rad kao funkcija vremena, pak, trebali bi put pisati preko t , odnosno poznavati rješenje jednadžbe gibanja. To bismo sada trebali znati riješiti, jer je riječ o gibanju stalnom silom (tj. akceleracijom), pa je

$$ma = m\ddot{x} = F_a \cos \alpha + \mu(F_a \sin \alpha - F_G), \quad (2S21.3)$$

te

$$dx = \dot{x}dt = atdt. \quad (2S21.4)$$

pa dakle

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{m} [F_a \cos \alpha + \mu(F_a \sin \alpha - F_G)]^2 t dt, \quad (2S21.5)$$

Ovdje je integral jednostavno riješiti i dobiti umnožak stalne sile s putem dobivenim preko vremena. No, u općenitom slučaju, kad bi se F_a mijenjala u vremenu, ovo bi bio ispravan način za pristupiti rješavanju.

2S27 _____ [Teorem o radu i kinetičkoj energiji.]

Promotrimo koji rad može izvršiti tijelo samo promjenom svoje brzine gibanja. Počnimo s definicijskim izrazom za rad, i pišemo izraze za silu i put preko brzine:

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int m\vec{a} \cdot \vec{v} dt = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int m \vec{v} d\vec{v} = \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \Big|_{v_{po\check{c}}}^{v_{kon}} = \frac{1}{2} m (v_{po\check{c}}^2 - v_{kon}^2) \equiv \Delta E_K. \end{aligned} \quad (2S27.1)$$

Ovdje smo u zadnjem koraku pisali rad kao promjenu nove vrste mehaničke energije koju smo nazvali *kinetička energija* i definirali kao

$$E_K \equiv \frac{1}{2} m v^2. \quad (2S27.2)$$

Također valja primijetiti da smo u izvodu 2S27.1 naizgled integrirali brzinu (vektorsku veličinu) kao da je skalar. To se posebno u ovom slučaju može opravdati sljedećim raspisom:

$$d\vec{v}^2 = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (d\vec{v}) \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (d\vec{v}) = 2\vec{v} \cdot d\vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(\vec{v}^2). \quad (2S27.3)$$

2S33 _____ [Primjer: prosječna i trenutna snaga.]

U zadatku su zadani masa aviona, duljina zaletne staze i koeficijent trenja. Mogli bi biti u iskušenju zadatak riješiti jednostavnim računom koji bi uključio račun ukupne energije:

$$W = \frac{mv_k^2}{2} + \mu mg \cdot s = 1,36 \text{ MJ}, \quad (2S33.1)$$

i dijeleći s vremenom, koje je moguće odrediti iz činjenice da je poznato da je akceleracija stalna, puta i konačne brzine:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{a}{2} t^2 \\ v_k &= at \Rightarrow a = \frac{v_k}{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \frac{v_k}{2} t \Rightarrow t = \frac{2s}{v_k} = 7,2 \text{ s}. \quad (2S33.2)$$

Uvrštavajući tu vrijednost u izraz za snagu:

$$W = \frac{W}{t} = \frac{1,36 \text{ MJ}}{7,2 \text{ s}} = 188 \text{ kW}. \quad (2S33.3)$$

Ovim smo uistinu dobili *srednju snagu*, no to nije rješenje ovog zadatka! Koju snagu motor aviona mora moći postići za uzlijetanje aviona dobit ćemo računanjem *trenutne snage*. Možemo ju izračunati na dva načina:

1. preko izraza $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$:

$$\left. \begin{aligned} F &= ma + \mu mg \\ v_k &= at \Rightarrow a = \frac{v_k}{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = m \frac{v_k^2}{t} + \mu mg v_k = 377 \text{ kW}, \quad (2S33.4)$$

gdje smo u zadnjem koraku uvrstili vrijeme izračunano kao u 2S33.2.

2. preko definicijskog izraza $P = \frac{dW}{dt}$:

$$P = \frac{d}{dt} W = \frac{d}{dt} \left[\frac{mv^2(t)}{2} + \mu mg \cdot s(t) \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{m(at)^2}{2} + \mu mg \frac{a}{2} t^2 \right] = ma^2 t + \mu mg a t, \quad (2S33.5)$$

što je, uz $v_k = at$ isti izraz kao i u prvom načinu. Valja primijetiti da smo ovdje morali u izraz za rad W uvrstiti *trenutni* rad, odnosno $W(t)$ dobili smo uzimajući u obzir da su v i s veličine *ovisne o vremenu* tijekom gibanja!

3a - Zakon sačuvanja energije

3S6 _____ [Konzervativne sile i potencijalna energija.]

Za sile za koje *rad nije funkcija puta*, već samo *položaja* definirali smo veličinu koju smo zvali **potencijalna energija**, koja je s radom bila povezana kao

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\Delta E_P. \quad (3S6.1)$$

Takve sile zvali smo **konzervativnim** silama.

Interesantna posljedica gornjeg izraza je da je moguće povezati silu i potencijal (katkad se tako kraće naziva potencijalna energija). Iz 3S6.1 vidimo da vrijedi i

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\Delta E_P = -(E_{P, \text{kon}} - E_{P, \text{poč}}) = - \int_{E_{P, \text{poč}}}^{E_{P, \text{kon}}} dE_P. \quad (3S6.2)$$

Uspoređujući sada podintegralne članove u 3S6.2 vidimo da možemo pisati:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = -dE_P. \quad (3S6.3)$$

pa bi za jednodimenzionalni slučaj mogli (konzervativnu) silu izraziti preko potencijala, kao derivaciju po prostornoj koordinati:

$$F_x dx = -dE_P \Rightarrow F_x = -\frac{dE_P}{dx}. \quad (3S6.4)$$

Poopćenje ovog obrazloženja na općenit slučaj može se ostvariti definirajući prostornu derivaciju, operator *Del* kojeg uobičajeno označavamo oznakom koju zovemo *nabla*

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3S6.5)$$

Del je operator derivacije po prostornim koordinatama. Ako je djelić puta, općenito

$$d\vec{s} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz, \quad (3S6.6)$$

moguće je infinitezimalnu promjenu općenite skalarne funkcije triju koordinata pisati kao

$$\begin{aligned} dE_P(x, y, z) &= \frac{\partial E_P}{\partial x} dx + \frac{\partial E_P}{\partial y} dy + \frac{\partial E_P}{\partial z} dz \\ &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) E_P (\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz) = \\ &= \vec{\nabla} E_P \cdot d\vec{s} \end{aligned} \quad (3S6.7)$$

te usporedbom s 3S6.3 slijedi napokon

$$(\vec{F} + \vec{\nabla} E_P) d\vec{s} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_P} \quad (3S6.8)$$

Tijelo mase m se giba bez trenja uz kosinu zadanih dimenzija. Pitamo se kolika će biti brzina na vrhu kosine. Na tijelo djeluje rezultantna sila stalnog iznosa i smjera \vec{F}_R (Slika 3S9.1).

Zadatak možemo krenuti rješavati na više načina:

1. Zakon sačuvanja energije

Tim načinom mogli bismo pokušati izračunati ukupni izvršeni rad svih sila koje djeluju na tijelo i tvrditi da je jednak ukupnoj promjeni energije tijela.

$$W = \vec{F}_R \cdot d\vec{s} = \Delta E_P + \Delta E_K \Rightarrow mgh + \frac{mv^2}{2} = F_R s. \quad (3S9.1)$$

Je li ovo točno? Što je ΔE_P ?

Ako je naime promjena potencijalne energije *po definiciji* jednaka radu gravitacijske sile, onda je njen doprinos ovdje dan s ΔE_P , no isto tako uračunana je i kod određivanja *rezultantne* sile, jer je, opet po definiciji

$$\vec{F}_R = \vec{F}_v + \underbrace{\vec{F}_N + \vec{F}_G}_{=\vec{F}_{\text{nizkosinu}}}.$$

Naše shvaćanje u 3S9.1 je dakle pogrešno: ukupni rad, ukoliko uzmemo u obzir i potencijalnu energiju u polju konzervativne sile jednak je radu *vanjske* sile, pa bi ispravna jednadžba bila

$$W = \vec{F}_v \cdot d\vec{s} = \Delta E_P + \Delta E_K \Rightarrow mgh + \frac{mv^2}{2} = F_v s, \quad (3S9.2)$$

pri čemu bi izraženo preko rezultantne sile valjalo pisati

$$\vec{F}_R \cdot d\vec{s} = \Delta E_K \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \underbrace{F_v s - mgh}_{F_R s}. \quad (3S9.3)$$

Tako se dobiva odmah

$$F_R s = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_R s}{b}} = 32,2 \text{ km/h}. \quad (3S9.4)$$

2. II Newtonov zakon

Tim načinom uzet ćemo u obzir da je akceleracija tijela definirana rezultantnom silom.

$$m\vec{a} = \vec{F}_R.$$

Slijedi

$$\left. \begin{aligned} ma_x &= F_{Rx} \\ ma_y &= F_{Ry} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_x t &= v_x \\ a_y t &= v_y \end{aligned} \quad (3S9.5)$$

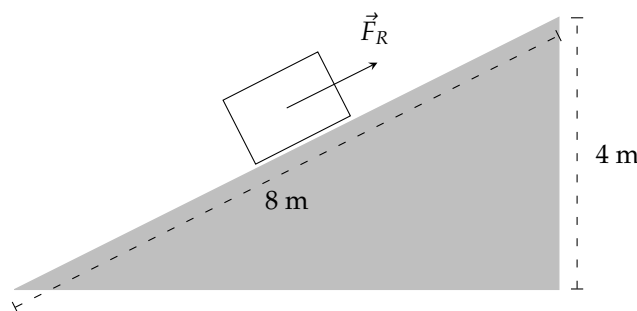
Vrijeme možemo npr. odrediti iz:

$$a_y \frac{t^2}{2} = h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a_y}}. \quad (3S9.6)$$

Brzina je

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = \frac{1}{m^2} [a_x^2 \frac{2h}{a_y} + a_y 2h] = \\ &= 2h \frac{a_x^2 + a_y^2}{a_y} = \frac{2h F_R}{m} \underbrace{\frac{1}{\sin \theta}}_{s/h} = \frac{2s F_R}{m} = 32,2 \text{ km/h}. \end{aligned} \quad (3S9.7)$$

Nakraju, vidimo da nam je intuitivni pristup putem zakona sačuvanja bio donekle otežan, jer je bila zadana *rezultantna* sila u kojoj je uključeno i djelovanje konzervativne sile na tijelo. Uobičajeno je očekivati ipak da je češće zadana vanjska sila, pa je i razumijevanje tada jednostavnije.



Slika 3S9.1

3S10 _____ [Primjer: Elastična sila i trenje.]

Promotrimo li rad *vanjske* sile na kosini iz prethodnog primjera (Sl. 3S9.1), možemo primijetiti da je

$$\vec{F}_R = \vec{F}_v - \vec{F}_{tr} - \vec{F}_p = m\vec{a} \Rightarrow F_v - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma, \quad (3S10.1)$$

odakle za ukupni rad *vanjske* sile dobivamo

$$W = \int F_v \cdot d\vec{s} = \int (ma + mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha) ds, \quad (3S10.2)$$

što se svodi na poznati **zakon sačuvanja mehaničke energije** uz $ds \sin \alpha = dy$ i $W' = \int F_{tr} ds$:

$$W = \int F_v \cdot d\vec{s} = \int (ma + mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha) ds = \underbrace{\int mad s}_{=\Delta E_K} + \underbrace{\int mg \sin \alpha ds}_{=-W_G=\Delta E_P} + \underbrace{\int \mu mg \cos \alpha ds}_{=-W'}, \quad (3S10.3)$$

3S13 _____ [Primjer: Elastična sila i trenje.]

Na slici 3S13.1 je prikazan postav iz Zadatka. Masa tijela je $m = 0,1$ kg, konstanta opruge $k = 20$ N/m, otpor trenja je $\mu = 0,47$.

- (a) Početno se tijelo giba brzinom 1,5 m/s udesno i zaustavi se nakon 8,6 m. Pitamo se koliki treba biti statički otpor tračnice kako tijelo ne bi krenulo ulijevo nakon zaustavljanja. Rješenje ne ovisi o početnoj brzini. Važno nam je jedino da je kinetička energija jednaka 0. U toj situaciji postoji samo sila opruge uslijed udaljenosti od ravnoteže, dakle:

$$\left. \begin{array}{l} F_{lijevo} : -kx = Fel \\ F_{desno} : F_{tr} = \mu_s mg \end{array} \right\} \mu_s \geq \frac{kx}{mg} = 1,75, \quad (3S13.1)$$

što je jako velik broj. Stvarni najveći otpor uobičajenih materijala je 1,4 (srebro na srebru).

- (b) U drugom dijelu zadatka trebamo izračunati do koje udaljenosti smije doći tijelo kako elastična sila ne bi nadvladala trenje, te iz toga odrediti uz koju početnu brzinu bi tijelo stiglo do te udaljenosti. Otpor statičkog trenja $\mu_s = 0,6$ određuje nam udaljenost x_m kao

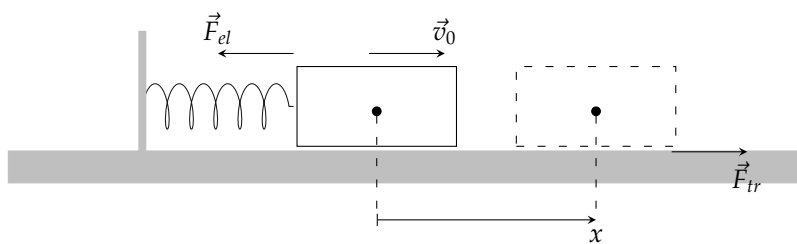
$$kx_m \leq \mu_s mg \Rightarrow x_m = \frac{\mu_s mg}{k}, \quad (3S13.2)$$

što koristimo u ZSE. Ne sudjeluje nikakva vanjska sila pa imamo:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{k}{2} x_m^2 + \mu mg x_m \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{k}{2} \left(\frac{\mu_s mg}{k} \right)^2 + \mu mg \frac{\mu_s mg}{k} = \frac{\mu_s m^2 g^2}{k} \left(\mu + \frac{\mu_s}{2} \right), \quad (3S13.3)$$

odakle

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mu_s mg^2}{k} \left(\mu + \frac{\mu_s}{2} \right)} = 0,66 \text{ m/s}. \quad (3S13.4)$$



Slika 3S13.1

3S16

[Ekstrem potencijala i ravnoteža.]

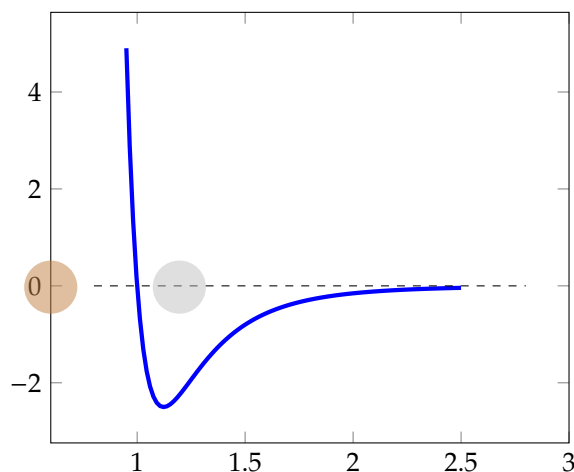
Ravnotežni položaj atoma moguće je povezati s ekstremom u potencijalu koji opisuje međudjelovanje. Pretpostavimo li da između dvije čestice djeluje samo potencijal *Lennard-Jonesov*-og oblika (što se često uzima kao dodatni doprinos međudjelovanja nenabijenih atoma):

$$E_P(r) = 4\epsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right). \quad (3S16.1)$$

U jednadžbi 3S16.1 član negativnog predznaka opisuje privlačenje, a član pozitivnog predznaka odbijanje. Ključan je pravi odnos prevladavanja članova privlačenja i odbijanja s povećanjem, odnosno smanjenjem udaljenosti r . Član odbijanja mora prevladavati pri manjim udaljenostima, a član privlačenja na većim, kako bi postojao minimum, tj. ravnotežni položaj. To je osigurano odnosom potencija (12 u odnosu na 6) u dvama članovima. Na Slici 3S16.1 prikazan je ovaj oblik potencijala i otprilika položaji koje bi zauzeli atomi ukoliko bi bili pod utjecajem samo tog potencijala.

Ravnotežnu udaljenost ostvarilo bi se za

$$\frac{dE_P(r)}{dr} = 0 = 4\epsilon \left(-12 \frac{\sigma^{12}}{r^{13}} - (-6) \frac{\sigma^6}{r^7} \right) \Rightarrow r_0 = \sigma \sqrt[6]{2}. \quad (3S16.2)$$



Slika 3S16.1

Dodatno istraživanje ponašanja ove jednadžbe moguće je na [Python simulaciji](#).

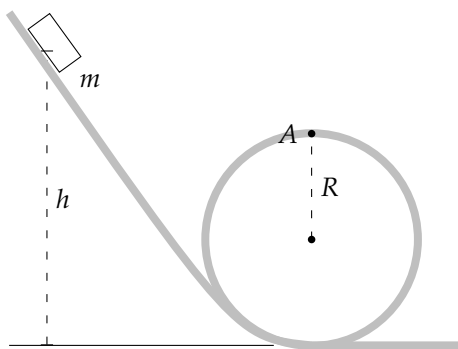
3S21

[Primjer: ZO(M)E i rotacija.]

Objekt je ispušten s visine h i nastavlja se gibati po kružnom 'toboganu' označenom sivo na slici 3S21.1. S koje visine je ispušten, ako je sila pritiska u točki A kojom pritišće обруч jednaka trostrukoj težini tijela?

Rješenje se doima jednostavno, no valja primijetiti da je ukupna sila pritiska u točki A jednaka zbrojenoj centripetalnoj sili i sili zbog djelovanja gravitacije. Stoga je

$$F_{pr} = 3mg = F_{cp} - mg \Rightarrow F_{cp} = 4mg. \quad (3S21.1)$$



Slika 3S21.1

Dalje je zadatak jednostavno uvrštavanje u zakon očuvanja mehaničke energije:

$$\frac{mv^2}{2} + mg(2R) = mgh, \quad (3S21.2)$$

uz

$$F_{cp} = 4mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = 4Rg. \quad (3S21.3)$$

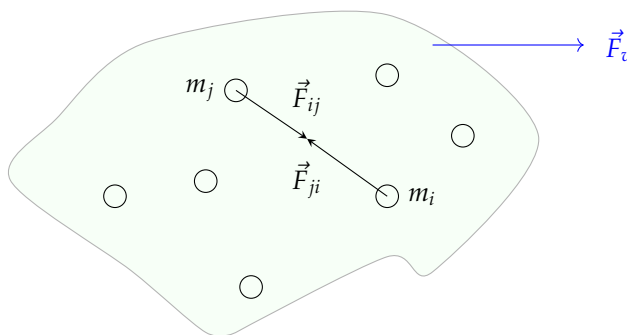
odakle odmah, uvrštavanjem u 3S21.2

$$h = 4R$$

3b - Zakon očuvanja količine gibanja

3S23 _____ [Zakon očuvanja količine gibanja.]

Zakon sačuvanja količine gibanja (ZOKG) je, kao i zakon sačuvanja energije (ZOE) temeljni fizikalni zakon. I dok je ZSE posljedica jedne općenite fizikalne postavke, one o homogenosti vremena, tako je i ZSKG posljedica fizikalne postavke o homogenosti prostora.



Slika 3S23.1

Promotrimo, za razliku od do sada, *sustav čestica* (Slika 3S23.1), te pogledajmo kakva će biti promjena količine gibanja takvog sustava. Pri tome posebno vodimo računa da *unutar sustava* ne djeluju sile, odnosno da je sustav u ravnoteži, te je svako djelovanje čestice na bilo koju drugu unutar sustava uravnoteženo istom silom ali suprotnog predznaka

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (3S23.1)$$

U tom je slučaju ukupna promjena količine gibanja

$$\frac{d\vec{P}_{uk}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) = \sum_i \left[\sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{v,i} \right]. \quad (3S23.2)$$

Zadnji dio izraza znači da smo silu na svaku česticu raspisali kao dva člana: jedan, koji opisuje samo međudjelovanja *unutar sustava*, i drugi \vec{F}_v , koji opisuje međudjelovanje na i -tu česticu kao posljedicu sila *izvan* sustava. Za sile unutar sustava vrijedi 3S23.1, uz $\vec{F}_{ii} = 0$, tj. čestica ne djeluje na samu sebe. Stoga će biti

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \underbrace{\sum_{i,j} \vec{F}_{ij}}_{=\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji}=0} + \sum_i \vec{F}_{v,i} = \sum_i \vec{F}_{v,i} = \vec{F}_v, \quad (3S23.3)$$

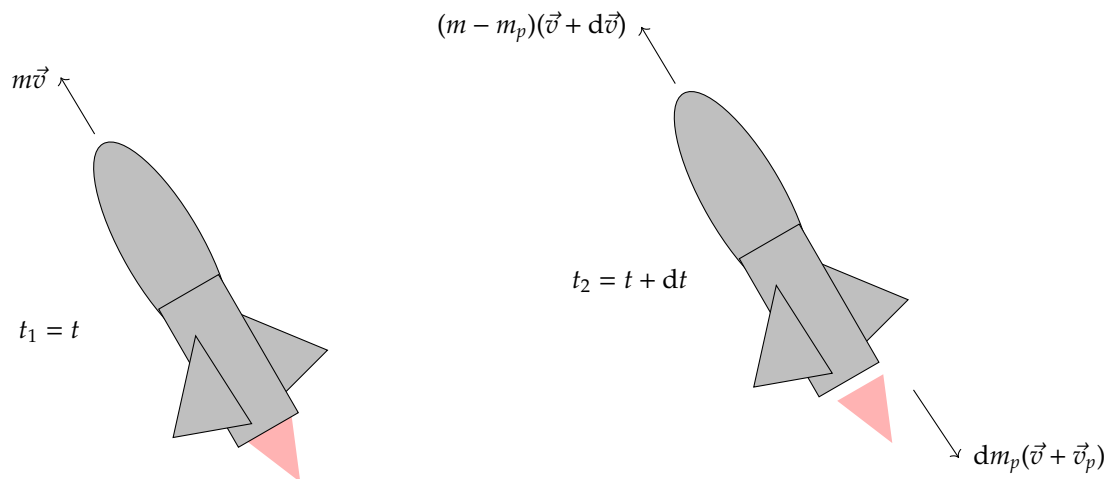
odnosno, budući da je svaka sila unutar sustava uravnotežena odgovarajućom protusilom, ukupna promjena količine gibanja bit će jednaka ukupnoj *vanjskoj* sili koja djeluje na sustav.

U slučaju kada nema vanjskih sila, tj. kad je $\vec{F}_v = 0$, vrijedit će **zakon sačuvanja količine gibanja**, odnosno ukupna količina gibanja bit će stalna

$$\vec{F}_v = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{uk}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{uk} = konst.$$

3S24

[ZOKG. Gibanje rakete.]



Slika 3S24.1

Na slici 3S24.1 vidimo kako opisujemo količinu gibanja *sustava* rakete i gorivih plinova: u prvom trenutku, kojeg označimo s t , uzimamo neku brzinu rakete (zajedno s plinovima) jednaku \vec{v} .

U kasnijem trenutku $t + dt$ raketa i gorivi plinovi su se odvojili. Gorivi plinovi izbačeni su iz rakete brzinom v_p , no to je brzina plinova *u odnosu na raketu*, te je ukupna brzina plinova *u odnosu na tzv. laboratorijski sustav*, ili npr. koordinatni sustav vezan za opažača na Zemlji jednaka $\vec{v} + \vec{v}_p$. U tom se trenutku količina gibanja rakete zbog djelovanja plinova promijenila³.

Ukupna pak količina gibanja se u sustavu nije promijenila jer smo pretpostavili da možemo zanemariti gravitaciju (ovo dakle bolje opisuje slučaj horizontalnog gibanja rakete, dok za vertikalno i gibanje pod utjecajem otpora treba uzeti u obzir dodatne članove). Izjednačavamo dakle količinu gibanja u $t_1 = t$ i u $t_2 = t + dt$ (ZSKG):

$$m\vec{v} = (m - m_p)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_p(\vec{v} + \vec{v}_p) \Rightarrow 0 = m d\vec{v} - \underbrace{dm d\vec{v}}_{\approx 0} + dm_p \vec{v}_p, \quad (3S24.1)$$

gdje smo član s umnoškom diferencijalno malenih veličina zanemarili kao mnogo manji od ostalih. Tako dobivamo

$$-m d\vec{v} = dm_p \vec{v}_p, \quad (3S24.2)$$

³Mogli bismo tvrditi da je raketa dobila upravo onoliko količinu gibanja koliko je količina gibanja izbačenih plinova. Naš izvod se svede praktički na to, uz zanemarivanje člana s dvostrukim diferencijalom.

no, masa rakete se u tom koraku *smanji* za koliko iznosi količina plinova dm_p , tj. vrijedi:

$$-dm = dm_p,$$

pa je napokon diferencijalna jednačba gibanja ovakvog sustava jednaka

$$-md\vec{v} = -dm\vec{v}_p \Rightarrow d\vec{v} = \frac{dm}{m}\vec{v}_p, \quad (3S24.3)$$

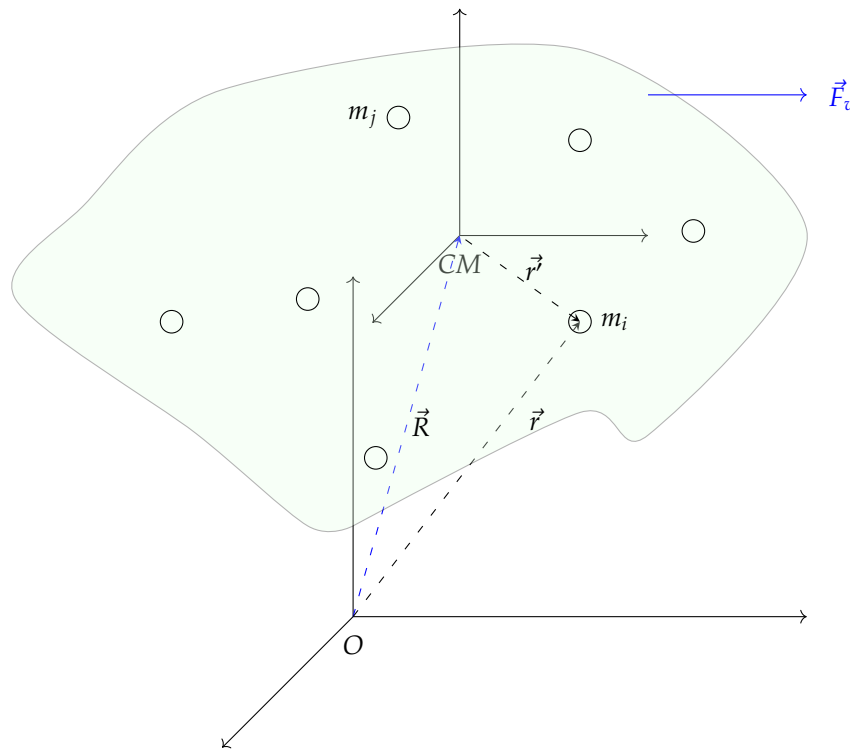
pri čemu uzimamo da je brzina izbacivanja plinova iz rakete konstantna.

Takvu jednačbu sada je lako integrirati, uz pretpostavku da je za neku (početnu) brzinu v_0 masa bila poznata i jednaka m_0 , slijedi

$$d\vec{v} = \frac{dm}{m}\vec{v}_p \int^{int} \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{v}_p \ln \frac{m}{m_0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + |\vec{v}_p| \ln \frac{m_0}{m}, \quad (3S24.4)$$

gdje je u zadnjem koraku uzeto u obzir da je *smjer* \vec{v}_p suprotan od \vec{v} , ali i da je $m < m_0$.

3S25 _____ [Centar mase. Sustav centra mase.]



Slika 3S25.1

Centar mase sustava materijalnih točaka definira se kao vektor položaja čijim jednačbama gibanja možemo opisati djelovanje vanjske sile na sustav. Jednostavnije rečeno, obzirom na djelovanje *vanjskih sila* (tj. sila koje djeluju na sustav, a po porijeklu su izvan sustava), *sustav se ponaša kao da mu je sva masa koncentrirana u centru (središtu) mase.*

Definiramo ukupnu masu sustava kao zbroj

$$\sum_i m_i \equiv M,$$

pa je **središte ili centar mase** definiran(o) kao

$$M\vec{R}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i \Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}. \quad (3S25.1)$$

Jednadžbe gibanja centra mase dobivamo iz definicije brzine i ubrzanja, tj. II NZ:

$$\begin{aligned} M\vec{R}_{CM} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \int^{d/dt} \Rightarrow M\vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i \Leftrightarrow \boxed{\vec{P}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i} \\ M\vec{V}_{CM} &= \sum_i m_i \vec{v}_i \int^{d/dt} \Rightarrow M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_{v,i} = \vec{F}_v}, \end{aligned} \quad (3S25.2)$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili 3S23.1-3S23.3, odnosno da se sile unutar sustava međusobno ponište, pa je ukupna promjena količine gibanja čestica u sustavu jednaka samo doprinosu vanjskih sila.

3S26 _____ [Zakoni očuvanja u SCM.]

Gledamo kako će se promijeniti zakoni sačuvanja mehaničke energije (ZOE) i količine gibanja (ZOKG) pri transformaciji koordinata u sustav centra mase (SCM, Ilijić: ROSM).

Koordinate čestica u vanjskom (tzv. laboratorijskom), ili sustavu promatrača su \vec{r} , koordinate u SCM su \vec{r}' , dok je ishodište sustava središte mase opisano iz laboratorijskog sustava vektorom položaja \vec{R} (Slika 3S25.1).

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}, \quad (3S26.1)$$

Pa pišemo ZOKG u laboratorijskom sustavu i raspišemo uzimajući u obzir 3S26.1

$$\vec{P}_{uk} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i'}_{=0} + \underbrace{\vec{V}_{CM} \sum_i m_i}_{=M} \Rightarrow \boxed{\vec{P}_{uk} = M\vec{V}_{CM} = \vec{P}_{CM}} \quad (3S26.2)$$

jer je u SCM (iz definicije 3S25.1)

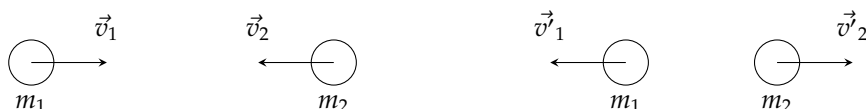
$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \int^{\sum m_i} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i = M\vec{R}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}_i' \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0.$$

Na isti način, za ZOE vrijedi:

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}_{CM})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i'^2 + \underbrace{\vec{V}_{CM} \sum_i m_i \vec{v}_i'}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{V}_{CM}^2 \sum_i m_i}_{=\frac{1}{2} M \vec{V}_{CM}^2 = E_{K,CM}} \\ &\Rightarrow \boxed{E_K = E_K' + E_{K,CM}}, \end{aligned} \quad (3S26.3)$$

3S28 _____ [Centralni sudar dvije čestice.]

Pokazat ćemo kako se jednostavno dobiju uvjeti na odnos početnih i konačnih relativnih brzina u slučaju jednodimenzionalnog centralnog sudara. Primjer će, zbog jednostavnosti biti elastičan jednodimenzionalan sudar, no poopćenje trivijalno vrijedi za slučaj općenitog (3D) centralnog sudara, kao i sudara u kojem kinetička energija nije sačuvana.



Slika 3S28.1

Pratimo sliku 3S28.1, i pišemo početne brzine kao

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= v_1 \hat{x} \\ \vec{v}_2 &= v_2 \hat{x},\end{aligned}\tag{3S28.1}$$

a konačne

$$\begin{aligned}\vec{v}_1' &= v_1' \hat{x} \\ \vec{v}_2' &= v_2' \hat{x}.\end{aligned}\tag{3S28.2}$$

Zakon sačuvanja količine gibanja je temeljni zakon koji *uvijek* vrijedi. Zakon jednakosti *kinetičkih* energija, pak neće uvijek vrijediti. To dakako ne znači da je ZSE na neki način "slabiji" zakon, već da dozvoljavamo da se dio *mehaničke* energije (kinetička) na neki način transformira u neku drugu vrst energije (kemijska, toplinska, itd.).

Zbog jednostavnosti pretpostavljamo najprije da vrijedi i ZOE i pišemo jednodimenzionalne izraze

1. ZOE:

$$\begin{aligned}\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \Rightarrow \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) &= m_2(v_2'^2 - v_2^2) = m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2),\end{aligned}\tag{3S28.3}$$

2. ZOKG:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' + v_2).\tag{3S28.4}$$

Iskoristimo jedn. 3S28.4 kako bi pokratili izraz raspisan u 3S28.3 pa odmah dobivamo

$$\boxed{v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2')},\tag{3S28.5}$$

odnosno, prilikom sudara *relativna brzina* je promijenila smjer.

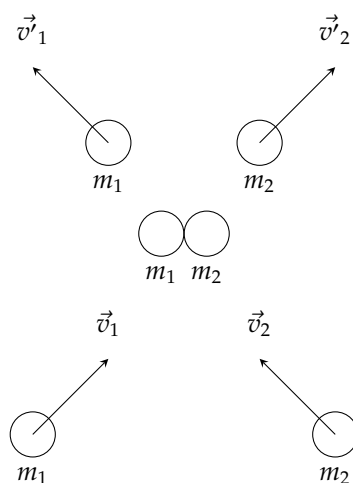
Trivijalno je pokazati da isto vrijedi i za općeniti 3D elastični centralni sudar. Za neelastični sudar vrijedit će da su kinetičke energije prije i nakon sudara povezane preko nekog *faktora* kojeg nazivamo *koeficijent restitucije* kao

$$E_K' = k^2 E_K,$$

gdje je crtano označena kinetička energija nakon sudara. Jednostavno je pokazati da se istim postupkom kao gore u tom slučaju dobiva odnos početnih i konačnih relativnih brzina oblika

$$\boxed{|v_1 - v_2| = -k|v_1' - v_2'|}.\tag{3S28.6}$$

3S29 ————— [Općeniti 3D sudar. Rješavanje pomoću prelaska u sustav CM.]



Slika 3S29.1

U općenitom slučaju (Slika 3S29.1) znatno će se pojednostaviti rješavanje sudara prelaskom u sustav CM. Pokazat će se da u sustavu CM vrijede do sada obajšnjena pravila, pa ćemo moći dobiti izraze za brzine nakon sudara, preko početnih brzina i masa čestica. To nas ipak neće posve osloboditi problema, jer za rješavanje

općenitog 3D sudara u sustavu promatrača (laboratorijski sustav) trebat ćemo ove brzine iz SCM transformirati u taj sustav. Općenito to uključuje dodatne jednačbe koje povezuju koordinatne osi tih dvaju sustava.

No, u sustavu CM brzine čestica prije i nakon sudara označavat ćemo s $\vec{u}_{1,2}$ odnosno s $\vec{u}'_{1,2}$. Veza brzina u laboratorijskom i SCM bit će prema 3S26.1

$$\begin{aligned}\vec{v}_{1,2} &= \vec{u}_{1,2} + \vec{V}_{CM} \\ \vec{v}'_{1,2} &= \vec{u}'_{1,2} + \vec{V}_{CM},\end{aligned}\quad (3S29.1)$$

uz

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3S29.2)$$

Iz ZOKG u SCM (jedn. 3S26.2) vrijedit će da je *ukupna količina gibanja u SCM jednaka 0*, pa

$$\begin{aligned}m_1 \vec{u}_1 &= -m_2 \vec{u}_2 \\ m_1 \vec{u}'_1 &= -m_2 \vec{u}'_2,\end{aligned}\quad (3S29.3)$$

Kinetička energija u SCM je po definiciji prije i nakon sudara jednaka do na neki koeficijent restitucije k

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} m_1 \vec{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{u}_2^2 &= \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} m_1 \vec{u}'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{u}'_2{}^2 \right) \Rightarrow \\ \text{uvrštavanjem } \vec{u}_1 \text{ i } \vec{u}'_1 \text{ iz jedn. 3S29.3} &\Rightarrow \\ u_2 &= \pm \frac{1}{k} u'_2 \text{ tj. } u'_{1,2} = \pm k u_{1,2}.\end{aligned}\quad (3S29.4)$$

U gornjem izrazu samo član s *negativnim* predznakom ima smisla, jer se samo u tom slučaju relativna brzina *promijenila* (odnosno, u slučaju kad je $k = 1$, *promijenila predznak*). Da je relativna brzina ostala ista, to bi značilo da do sudara nije niti došlo.

Promotrimo sada zbog jednostavnosti ponovno elastičan sudar ($k = 1$) i odredimo brzine čestica u odnosu na promatrače u laboratorijskom sustavu. Iz dobivenih izraza za brzine u SCM ($\vec{u}'_{1,2}$) te iz jedn. 3S29.1, uzimajući o obzir 3S29.4, tj.

$$\vec{u}'_{1,2} = -\vec{u}_{1,2}$$

slijedi

$$\begin{aligned}\vec{v}'_{1,2} &= \vec{V}_{CM} + \vec{u}'_{1,2} = \vec{V}_{CM} - \vec{u}_{1,2} = 2\vec{V}_{CM} - \vec{v}_{1,2} \\ \vec{v}'_1 &= \frac{m_1 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}'_2 &= \frac{2m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 - m_1 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.\end{aligned}\quad (3S29.5)$$

3S30 _____ [Primjer - elastični sudar dvije jednake mase.]

U ovom posebnom primjeru promatramo elastični sraz dvije jednake mase, od kojih jedna početno miruje. Za *centralni* sudar vrijedi

$$\begin{aligned}m_1 &= m_2 = m \\ v_1 &= v, v_2 = 0\end{aligned}\quad (3S30.1)$$

Pa odmah, npr. primjenom općenitih izraza 3S29.5 dobivamo

$$\begin{aligned}v'_1 &= \frac{2m \cdot 0 - mv + mv}{2m} = 0 \\ v'_2 &= \frac{2mv - m \cdot 0 + m \cdot 0}{2m} = v.\end{aligned}\quad (3S30.2)$$

U ne-centralnom slučaju možemo se poslužiti matematičkom dosjetkom za odrediti kuteve vektora konačnih brzina. Pišemo

$$\begin{aligned}\text{ZOE: } \frac{mv^2}{2} &= \frac{mv'^2_1}{2} + \frac{mv'^2_2}{2} \Bigg\} v^2 = v'^2_1 + v'^2_2 \\ \text{ZOKG: } m\vec{v} &= m(\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2) \Bigg\} \vec{v} = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \Bigg|^2 \Rightarrow v^2 = v'^2_1 + v'^2_2 + 2\vec{v}'_1 \vec{v}'_2,\end{aligned}\quad (3S30.3)$$

odakle vidimo da mora biti

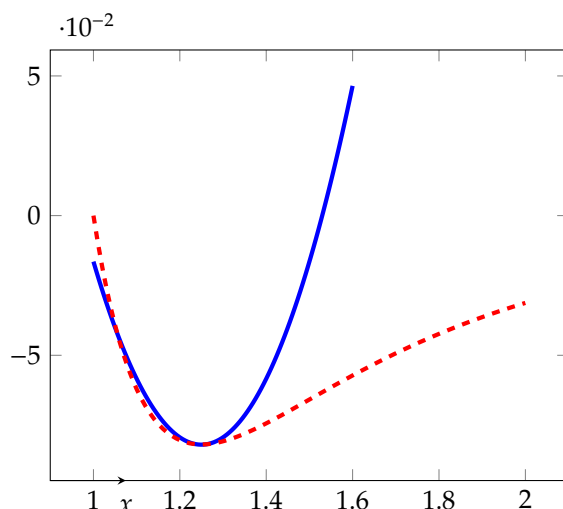
$$\vec{v}'_1 \vec{v}'_2 = 0,$$

odnosno, vektori konačnih brzina čestica moraju zatvarati pravi kut.

4a - Harmonički oscilator.

4S1

[Taylorov razvoj oko minimuma i Hookeov zakon]



Slika 4S1.1

Na slici 4S1.1 vidimo približenje parabolom nekog potencijala koji može opisati međudjelovanje čestica. Naš osnovni potencijal je oblika

$$V(x) = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^4}, \quad (4S1.1)$$

a kvadratnu funkciju koja najbolje opisuje taj potencijal dobili smo pomoću Taylorovog razvoja te funkcije, zaustavljajući se na prvom članu različitom od nule.⁴

Općenitu funkciju $V(x)$ moguće je *oko minimuma* u x_0 razviti u Taylorov red kao

$$V(x) = \underbrace{V(x_0)}_A + \underbrace{\frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} (x-x_0)}_B + \underbrace{\frac{1}{2!} \frac{d^2V(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n V(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_0} (x-x_0)^n}_C. \quad (4S1.2)$$

Posebno ćemo u nastavku razmotriti označene članove A, B i C:

Član označen s **A** je iznos potencijala u minimumu. U našem primjeru na slici on je zadan oblikom potencijala i moguće ga je naći određujući minimum X_0 te izvršavajući potencijal u toj točki. Općenito se zbog jednostavnosti uzima da je moguće *izabrati* nultčku potencijala tako da je u minimumu potencijal jednak 0, odnosno

$$V(x_0) = 0. \quad (4S1.3)$$

Prvi nam član dakle prema tom argumentu isčezava.

Član označen s **B** je umnožak derivacije funkcije u točki minimuma. No, tangenta funkcije u minimumu je 0, pa taj član neovisno o našim pretpostavkama isčezava po uvjetu da razvijamo oko minimuma, tj. da je minimum u x_0 .

Prvi član dakle različit od 0 je član **C**. Taj se član sastoji od konstante (vrijednost druge derivacije funkcije u točki minimuma podijeljene s 2) i kvadratne funkcije (naša parabolična ovisnost na slici).

Najjednostavniji opis potencijala u okolici minimuma je dakle

$$V(x) \approx \frac{1}{2!} \frac{d^2V(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x-x_0)^2. \quad (4S1.4)$$

Kako je to povezano s **Hookeovim zakonom** tj. linearnom ovisnošću sile o udaljenosti od ravnotežnog položaja

$$F(x) = -k(x-x_0), \quad (4S1.5)$$

⁴Možete pokušati za vježbu izvesti jednadžbu te, najbolje parabole.

vidjet ćemo prisjetimo li se da smo konzervativnu silu definirali preko potencijala kao

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad (4S1.6)$$

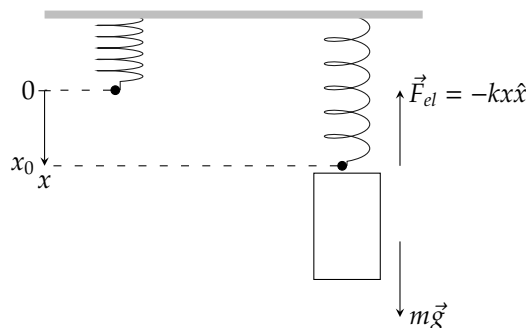
pa uvrštavanjem 4S1.4 u 4S1.6 imamo

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2V(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x-x_0)^2 \right) = -\frac{d^2V(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x-x_0) \equiv -k(x-x_0), \quad (4S1.7)$$

gdje smo odredili konstantu u Hookeovom zakonu kao drugu derivaciju potencijala izvrijednjenu u točki minimuma.

Hookeov zakon, odnosno linearna ovisnost sile o udaljenosti od ravnoteže sa slike vidimo da vrijedi samo u ograničenom području. To je često slučaj u primjeni u fizici - približenje parabolom, harmoničkim oscilatorom, obično je prva, ali često vrlo važna aproksimacija pri proučavanju mnogih sistema koje najprije malo udaljavamo od ravnoteže.

4S3 [Harmonički oscilator - masa na opruzi]



Slika 4S3.1

Pišemo li sve sile koje djeluju na tijelo mase m ovješeno na oprugu konstante k u polju sile teže, možemo dobiti jednodimenzionalnu jednadžbu koja odgovara II NZ:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - kx\hat{x} \Rightarrow m\ddot{x} = mg - kx, \quad (4S3.1)$$

što u ovom obliku nije jednako Hookeovom zakonu zbog konstantnog člana mg . On je posljedica činjenice da smo u polju sile teže *pomaknuli* ravnotežni položaj ovješeno tijela, tako da novi ravnotežni položaj više ne odgovara ravnoteži same opruge koju smo uzeli kao ishodište osi x (slika 4S3.1). Ravnotežni x_0 odredimo iz uvjeta mirovanja čestice

$$F = 0 = mg - kx_0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k}. \quad (4S3.2)$$

Kako bi se riješili tog, konstantnog člana uvodimo supstituciju

$$u = x - x_0 \Rightarrow m\ddot{u} = -ku, \quad (4S3.3)$$

pa vidimo da je u novoj varijabli u jednadžba jednaka onoj koju imamo za parabolični potencijal, odnosno linearnu ovisnost sile o pomaku. Diferencijalnu jednadžbu **harmoničkog oscilatora** općenitije se rješava pomoću *karakteristične jednadžbe*, no ovdje si možemo postupak pojednostaviti matematičkom intuicijom i poznavanjem ponašanja matematičkih funkcija: promotrimo li 4S3.3, primijetit ćemo da će rješenje $u(t)$ te jednadžbe biti takva funkcija koja ima svoju drugu derivaciju po t proporcionalnu samoj funkciji. Takve funkcije dobro su poznate trigonometrijske funkcije oblika $\sin(\omega t)$ odnosno $\cos(\omega t)$. Rješenje stoga općenitije tražimo oblika

$$u = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (4S3.4)$$

odnosno

$$u = A \cos(\omega t + \phi). \quad (4S3.5)$$

4S4 _____ [Harmonički oscilator - određivanje konstanti.]

Fizikalno značenje veličine ω postaje jasno uvrstimo li naša pretpostavljena rješenja (jedin. 4S3.4 ili 4S3.5) u jednadžbu H.O. (jedin. 4S3.3). Vidimo odmah da mora vrijediti

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (4S4.1)$$

Iz oblika naših rješenja, vidimo da konstanta ω ima značenje *kružne frekvencije* i mjeri se u [rad/s].

Konstante A i B ili A i ϕ određuju se iz *početnih uvjeta*: pretpostavimo da smo u početnom trenutku tijelo na opruzi otklonili iz ravnotežnog položaja, te je na početku bilo na udaljenosti L_0 (od x_0). Tijelo je na početku mirovalo, tj. brzina mu je bila jednaka 0. To ćemo matematički zapisati kao (uzmimo oblik rješenja npr. prema jedin. 4S3.5)

$$\left. \begin{aligned} u(t=0) &= A \cos(\phi) = L_0 \\ \dot{u}(t) &= -A\omega \sin(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = L_0 \Rightarrow u(t) = L_0 \cos(\omega t) \quad (4S4.2)$$

vidimo dakle da smo iz činjenice da tijelo početno miruje odredili ϕ , a onda uvrštavajući taj kut (naziva se i *faza*) u prvi izraz u 4S4.2 dobili i konstantu A , koja ima značenje (i dimenziju) *amplitude* oscilacija.

4S5 _____ [H.O. - općeniti početni uvjeti.]

Pogledajmo kako bi odredili konstante A i ϕ u jedin. 4S3.5 u općenitijem slučaju, tj. kad ni pomak ni brzina početno nisu jednaki 0:

$$\left. \begin{aligned} u(t=0) &= A \cos(\phi) = X_0 \quad (1) \\ \dot{u}(t) &= -A\omega \sin(\phi) = V_0 \quad (2) \end{aligned} \right\} (2)/(1) \Rightarrow \frac{V_0}{X_0} = -\omega \tan \phi \Rightarrow \tan \phi = -\frac{V_0}{\omega X_0}. \quad (4S5.1)$$

Amplitudu izračunamo pomoću

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1.$$

Koristeći oznake u jedin. 4S5.1

$$\left. \begin{aligned} (1)^2 \cdot \omega^2 &\Rightarrow A^2 \omega^2 \cos^2(\phi) = X_0^2 \omega^2 \\ (2)^2 &\Rightarrow A^2 \omega^2 \sin^2(\phi) = V_0^2 \end{aligned} \right\} (+) \Rightarrow A^2 \omega^2 = X_0^2 \omega^2 + V_0^2 \Rightarrow A = \sqrt{X_0^2 + V_0^2 / \omega^2}. \quad (4S5.2)$$

4S6 _____ [Primjer/Zadatak - početni uvjeti]

Zadane su brzina i akceleracija u nekom trenutku $t = t_1 \neq 0$ čestice koja se giba pod djelovanjem 1D harmoničke sile. Frekvencija titranja je zadana. U prvom dijelu zadatka tražimo amplitudu oscilacija. Poznate veličine:

$$\begin{aligned} v(t_1) &= 0,7 \text{ m/s} \\ a(t_1) &= 2,2 \text{ m/s}^2 \\ f &= 2 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 12,56 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (4S6.1)$$

Iz općeg oblika rješenja 1D H.O.

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

slijedi

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -A\omega \sin(\omega t + \phi) \\ \ddot{x} &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} -A \sin(\omega t_1 + \phi) &= \frac{0,7 \text{ m/s}}{\omega} \\ -A \cos(\omega t_1 + \phi) &= \frac{2,2 \text{ m/s}^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (4S6.2)$$

Iz zbroya kvadrata sinusa i kosinusa istog kuta sad slijedi

$$A^2 = \left(\frac{0,7 \text{ m/s}}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{2,2 \text{ m/s}^2}{\omega^2} \right)^2 \Rightarrow A = 0,0577 \text{ m}. \quad (4S6.3)$$

Primijetite da smo se tako riješili nepoznate *faze*, jer nam niti kut ϕ , niti vrijeme t_1 nisu poznati.

U drugom dijelu zadatka iz poznatog podatka o t_1 želimo odrediti brzinu u trenutku $t = 0$. No, brzina u tom trenutku je općenito

$$\dot{x}(t = 0) = -A\omega \sin \phi. \quad (4S6.4)$$

Trebamo dakle odrediti fazu ϕ . To ćemo lako postići tako da jednadžbe u 4S6.2 umjesto kvadriranja, podijelimo:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\omega t_1 + \phi) &= -\frac{0,7 \text{ m/s}}{A\omega} \\ \cos(\omega t_1 + \phi) &= -\frac{2,2 \text{ m/s}^2}{A\omega^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan(\underbrace{\omega t_1 + \phi}_{\theta}) = \frac{0,71 \text{ m/s}\omega}{2,2 \text{ m/s}^2} \Rightarrow \theta = 76,14^\circ. \quad (4S6.5)$$

Iz poznatog $t_1 = 0,1 \text{ s}$, sada dobijemo kut

$$\phi = \theta - \omega t_1 = 4,17^\circ,$$

što uz gore određeni A uvrstimo u jedn. 4S6.4 i dobijemo traženu brzinu.

Pažljiviji čitatelj zapitat će se zašto smo uopće tražili $\tan(\omega t_1 + \phi)$, kad je moguće odrediti traženi kut iz jednadžbe za akceleraciju u 4S6.2? Zapravo i nije potrebno, jer nam je sad amplituda A poznata. Takvim računom odmah ćemo dobiti:

$$\cos(\omega t_1 + \phi) = -\frac{2,2 \text{ m/s}^2}{A\omega^2} = -0,2417 \Rightarrow \theta = \omega t_1 + \phi = 104^\circ = 1,815 \text{ rad} \quad (4S6.6)$$

odakle

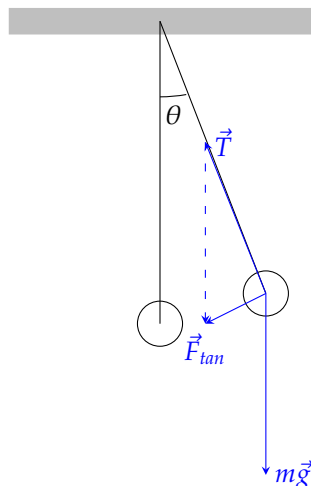
$$\phi = \theta - \omega t_1 = 1,815 \text{ rad} - 1,256 \text{ rad} = 0,55 \text{ rad} \Rightarrow \phi = 31,5^\circ. \quad (4S6.7)$$

No, trebali smo na dva načina dobiti isto, pa u čemu je problem?! Na prvi način smo koristeći tangens izgubili informaciju da je rješenje (kut) u 3. kvadrantu (i sinus i kosinus faze u trenutku t_1 su negativni!) i izračunali kut koji bi odgovarao kutu u prvom kvadrantu, a koji bi odgovarao drukčijoj (neuobičajenoj, iako ne po sebi pogrešnoj) pretpostavci za ovisnost $x(t)$ oblika:

$$x = -A \cos(\omega t + \phi).$$

4S8

[Matematičko njihalo.]



Slika 4S8.1

Sa slike 4S8.1 je vidljivo da je tangencijalna sila koja djeluje na česticu na nerastezljivoj niti odmaknuta iz ravnoteže za neki kut θ po iznosu jednaka

$$F_{tan} = -mg \sin \theta, \quad (4S8.1)$$

pri čemu negativni predznak dolazi od činjenice da je sila usmjerena na smanjenje kuta. Istovremeno, iz općeg razmatranja tangencijalne i kutne akceleracije u prvom predavanju, znamo da vrijedi:

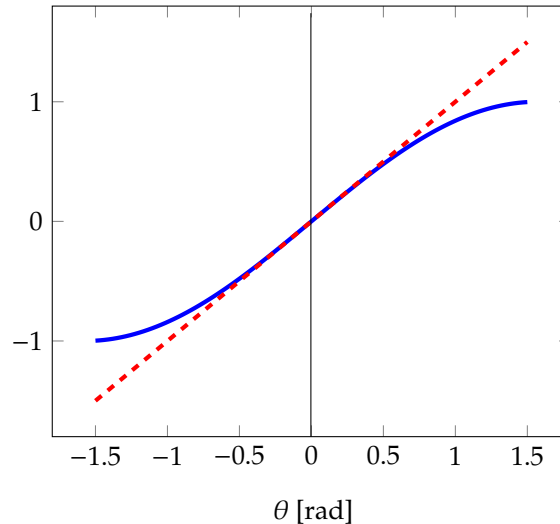
$$\vec{a}_{tan} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \Rightarrow a_{tan} = \alpha l, \quad (4S8.2)$$

gdje smo uzeli u obzir da je gibanje kružno, radijusa l .

Iz 4S8.1 i 4S8.2 slijedi

$$a_{tan} = \alpha l = l\ddot{\theta} = \frac{F_{tan}}{m} = -g \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (4S8.3)$$

Jednadžba 4S8.3 nije jednadžba harmoničkog oscilatora. Ali je sjajan primjer situacije u kojoj se gibanje *za male oscilacije* svodi na takvo ponašanje. Funkcija $f(\theta) = \sin \theta$ može se približno opisati funkcijom $f(\theta) = \theta$ u području u blizini $\theta \approx 0$ (Slika 4S8.2, vidimo da je opis prilično dobar za kuteve do $15^\circ - 20^\circ$).



Slika 4S8.2

U tom približenju diferencijalna jednadžba 4S8.3 svest će se na poznati oblik

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0, \quad (4S8.4)$$

koji opisuje harmoničke oscilacije kuta oko 0, uz kružnu frekvenciju

$$\omega^2 = \frac{g}{l},$$

i **period** oscilacija

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

4b - Prigušeni harmonički oscilator

4S9 _____ [Karakteristična jednadžba.]

Jednadžbi jednodimenzionalnog harmoničkog oscilatora dodamo sad član koji opisuje prigušenje (trenje). Tim dodatnim opisom približavamo se opisu realnih situacija u kojima se obično pojavljuje neki oblik prigušenja oscilacija. Prigušenje ćemo u našem razmatranju prikazati kao što je bilo već razmatrano kod opisa pad padobranca, kao član koji je proporcionalan brzini, i suprotnog smjera od gibanja (akceleracije): članom

$$F_{tr} = -b\dot{x},$$

gdje je b neka pozitivna konstanta. Ukupna diferencijalna jednadžba **gušenog harmoničkog oscilatora** je

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}. \quad (4S9.1)$$

Obično se 4S9.1 piše u malo drukčijem obliku uvodeći uobičajene pokrate

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \frac{k}{m} \\ 2\delta &= \frac{b}{m} \\ \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0.\end{aligned}\tag{4S9.2}$$

Homogena diferencijalna jednačina u kojoj su svi članovi proporcionalni svojim derivacijama može se pokušati riješiti tražeći rješenje oblika eksponencijalne funkcije (koja pri deriviranju ostaje sama sebi proporcionalna). Probno rješenje

$$x(t) = Ae^{\alpha t},\tag{4S9.3}$$

(A i α su neke konstante) uvrštavamo u diferencijalnu jednačinu 4S9.2 čime dobivamo

$$Ae^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2) = 0.\tag{4S9.4}$$

Netrivijalno rješenje dobiva se u slučaju kada izraz u zagradi iščezava. To nam daje kvadratnu jednačinu za α koju zovemo **karakteristična jednačina**. Njeno općenito rješenje odmah možemo napisati:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},\tag{4S9.5}$$

a ovisno o posebnim uvjetima sustava kojeg ćemo opisivati, vidjet ćemo na opis kakvog će sve ponašanja ta jednačina voditi.

4S10 ————— [Eksponencijalni prikaz trigonometrijskih funkcija - Eulerova formula.]

Motivirani opisom trigonometrijskih funkcija stalne amplitude preko tzv. *rotirajućih vektora* (npr. na [Geogebra primjeru](#)) možemo projekcije na pojedine osi x ili y povezati s funkcijom $\cos \phi$ i $\sin \phi$. No istovremeno, možemo općenito kompleksni broj prikazati isto tako: kao broj koji ima realan član jednak projekciji na jednu od osi (uobičajeno x), a imaginarni član na drugu od osi (uobičajeno y). **Eulerova formula** povezuje općeniti opis kompleksnog broja u zapisu preko projekcija (trigonometrijske funkcije) i preko eksponencijalne funkcije, ovisne samo o varijabli (kutu):

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.\tag{4S10.1}$$

Kako bi pokazali da ova formula vrijedi, razvijamo u red trigonometrijske funkcije

$$\begin{aligned}\cos \phi &= 1 - \frac{1}{2!}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4 - \dots \\ \sin \phi &= \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 - \dots,\end{aligned}\tag{4S10.2}$$

i eksponencijalne funkcije imaginarnog argumenta $e^{i\phi}$ i $e^{-i\phi}$

$$\begin{aligned}e^{i\phi} &= 1 + i\phi - \frac{1}{2!}\phi^2 - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{4!}\phi^4 - \dots = \cos \phi + i \sin \phi \\ e^{-i\phi} &= 1 - i\phi - \frac{1}{2!}\phi^2 + \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{4!}\phi^4 + \dots = \cos \phi - i \sin \phi.\end{aligned}\tag{4S10.3}$$

Usporedbom raspisa u redove 4S10.2 i 4S10.3 dobili smo vezu naznačenu u 4S10.3 - raspis reda eksponencijalnog imaginarnog argumenta preko trigonometrijskih funkcija u kompleksnom koordinatnom sustavu.

No iz

$$\left. \begin{aligned}e^{i\phi} &= \cos \phi + i \sin \phi \\ e^{-i\phi} &= \cos \phi - i \sin \phi\end{aligned} \right\} \pm \Rightarrow \begin{aligned}\cos \phi &= \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \\ i \sin \phi &= \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2},\end{aligned}\tag{4S10.4}$$

To možemo vidjeti i iz 4S10.2 i 4S10.3 budući da zbrajanjem ili oduzimanjem članova iz razvoja eksponencijalne funkcije upravo dobivamo (dvostruke) članove za razvoj trigonometrijskih funkcija (za $\sin \phi$, ta funkcija je množena s imaginarnim članom i).

Podkritično, ili *slabo prigušenje* imamo kada vrijedi

$$\delta^2 < \omega_0^2.$$

U tom slučaju će član pod korijenom biti negativan, pa ćemo imati *imaginarno* rješenje. Ovdje nam je to na neki način zanimljiviji slučaj, jer jedino u tom slučaju *imamo prigušeno titranje!* Uvrštavamo naše dobiveno rješenje karakteristične jednačbe u pretpostavljeni opći oblik (4S9.3) odakle, uz definiranje

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (4S11.1)$$

pišemo rješenje u ovom slučaju kao

$$x(t) = A_1 e^{-(\delta+i\omega)t} + A_2 e^{-(\delta-i\omega)t} = e^{-\delta t} (A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{i\omega t}). \quad (4S11.2)$$

Kao i prije, možemo nametnuti neke početne uvjete te u tom slučaju odrediti konstante A_1 i A_2 . Pretpostavljamo da je tijelo pomaknuto iz ravnoteže u $t = 0$ za neki A_0 , te da je početna brzina bila jednaka 0:

$$x(0) = A_0 = A_1 + A_2, \quad (4S11.3)$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -\delta \underbrace{(A_1 + A_2)}_{=A_0} + (-i\omega A_1 + i\omega A_2) \Rightarrow A_1 - A_2 = \frac{\delta A_0}{\omega} i. \quad (4S11.4)$$

Jednačbe 4S11.3 i 4S11.4 su dvije jednačbe s dvije nepoznanice. Zbrajajući ih slijedi

$$2A_1 = \left(\frac{\delta i}{\omega} + 1\right) A_0 \Rightarrow A_1 = \frac{A_0}{2} \left(\frac{\delta i}{\omega} + 1\right) \Rightarrow A_2 = A_0 - A_1 = \frac{A_0}{2} \left(1 - \frac{\delta i}{\omega}\right). \quad (4S11.5)$$

Uvrštavajući dobivene izraze za koeficijente u 4S11.2 slijedi:

$$x(t) = e^{-\delta t} \left[\underbrace{\frac{A_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})}_{2 \cos \omega t} + \underbrace{\frac{A_0}{2} \frac{\delta i}{\omega} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t})}_{=-2i \sin \omega t} \right] = A_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (4S11.6)$$

Ovaj oblik može se pisati i preko jedne trigonometrijske funkcije (npr., kao prije $\cos(\omega t + \phi)$), definiramo li

$$\tan \phi = -\frac{\delta}{\omega}.$$

Tada je

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} (\cos \omega t + \tan \phi \sin \omega t). \quad (4S11.7)$$

No,

$$\tan \phi = -\frac{\delta}{\omega} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \Rightarrow \frac{\delta^2}{\omega^2} = \frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} \Rightarrow \cos^2 \phi \left(1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}\right) = 1 \Rightarrow \cos \phi = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}}, \quad (4S11.8)$$

a raspisujući $\tan \phi$ u 4S11.7 i koristeći

$$\cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t = \cos(\omega t + \phi)$$

slijedi

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \frac{\overbrace{\cos \omega t \cos \phi - \sin \phi \sin \omega t}^{\cos(\omega t + \phi)}}{\cos \phi} = A_0 e^{-\delta t} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \phi). \quad (4S11.9)$$

Ponašanje rješenja i u ovom slučaju može se slikovito proučiti na [Geogebra simulaciji](#) i [Wolfram demonstraciji](#).

U slučaju kad vrijedi

$$\delta^2 > \omega_0^2,$$

član ispod korijena je pozitivan, pa nemamo potrebe za imaginarnim rješenjem. U tom slučaju rješenje karakteristične jednačbe je *realno*, što rezultira jednostavnom eksponencijalnom ovisnošću. Definiramo

$$\epsilon = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (4S12.1)$$

pa je

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \epsilon.$$

To uvrstimo u 4S9.3, odakle

$$x(t) = A_1 e^{-(\delta+\epsilon)t} + A_2 e^{-(\delta-\epsilon)t} = e^{-\delta t} (A_1 e^{\epsilon t} + A_2 e^{-\epsilon t}). \quad (4S12.2)$$

Moguće je ovo rješenje zapisati preko hiperbolnih funkcija \sinh i \cosh .⁵ To ćemo postići ako definiramo konstante A_1 i A_2 nešto drukčije:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= A_1 + A_2 \\ B_2 &= A_1 - A_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 &= \frac{B_1 + B_2}{2} \\ A_2 &= \frac{B_1 - B_2}{2} \end{aligned} \quad (4S12.3)$$

U tom zapisu rješenje ima oblik

$$x(t) = e^{-\delta t} \left[\frac{B_1 + B_2}{2} e^{\epsilon t} + \frac{B_1 - B_2}{2} e^{-\epsilon t} \right] = e^{-\delta t} \left[B_1 \underbrace{\frac{e^{\epsilon t} + e^{-\epsilon t}}{2}}_{\cosh \epsilon t} + B_2 \underbrace{\frac{e^{\epsilon t} - e^{-\epsilon t}}{2}}_{\sinh \epsilon t} \right]. \quad (4S12.4)$$

Ponovno, kao primjer pokažimo kako se određuju nepoznate konstante A_1 i A_2 za neke zadane početne uvjete. Pretpostavljamo neki početni pomak, a brzinu u $t = 0$ uzimamo da je jednaka 0:

$$x(0) = A_0 = A_1 + A_2, \quad (4S12.5)$$

$$\dot{x}(0) = 0 = A_1(-\delta + \epsilon) + A_2(-\delta - \epsilon) \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\epsilon + \delta}{\epsilon - \delta}. \quad (4S12.6)$$

Izražavajući jednu nepoznatu konstantu preko druge i uvrštavanjem u 4S12.5 slijedi

$$A_0 = A_2 \left(\frac{A_1}{A_2} + 1 \right) = A_2 \left(1 + \frac{\epsilon + \delta}{\epsilon - \delta} \right) = \frac{2\epsilon}{\epsilon - \delta} A_2 \Rightarrow A_2 = A_0 \frac{\epsilon - \delta}{2\epsilon}. \quad (4S12.7)$$

te

$$A_1 = \frac{\epsilon + \delta}{\epsilon - \delta} A_0 \frac{\epsilon - \delta}{2\epsilon} = A_0 \underbrace{\frac{\epsilon + \delta}{2\epsilon}}_{= \mu_1 - \mu_2}. \quad (4S12.8)$$

(U zadnjem izrazu u jedn. 4S12.8 navedene su odgovarajuće kratice kakve koristi prof. Horvat u svom udžbeniku.)

Ponašanje rješenja i u ovom slučaju može se slikovito proučiti na [Geogebra simulaciji](#) i [Wolfram demonstraciji](#).

Ostalo nam je pogledati jedan poseban slučaj, kada je član pod korijenom jednak 0. U tom slučaju karakteristična jednačba nema dva rješenja:

$$\delta^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \alpha_{1,2} = -\delta.$$

⁵To se u jeziku linearne algebre naziva *prelazak u novu bazu*.

Poteškoća u ovoj situaciji je ta, što *diferencijalna jednačba drugog reda mora imati dva linearno nezavisna rješenja*. Metoda koja se koristi kako bi se riješilo problem naziva se *metoda varijacije konstanti*. Naše rješenje koje bi dobili uvrštavajući izraz dobiven karakterističnom jednačbom bio bi

$$x(t) = Ae^{-\delta t},$$

no ovdje *pretpostavimo* da je konstanta A neka funkcija

$$A \rightarrow u(t)$$

te pišemo naše probno rješenje kao

$$x(t) = u(t)e^{-\delta t}. \quad (4S14.1)$$

To uvrštavamo u diferencijalnu jednačbu 4S9.2 za prigušene oscilacije:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{u}(t)e^{-\delta t} + u(t)(-\delta)e^{-\delta t} \\ \ddot{x} &= \ddot{u}(t)e^{-\delta t} + 2\dot{u}(t)(-\delta)e^{-\delta t} + u(t)\delta^2e^{-\delta t}, \end{aligned} \quad (4S14.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x &= 0 = \ddot{u}(t)e^{-\delta t} + 2\dot{u}(t)(-\delta)e^{-\delta t} + u(t)\delta^2e^{-\delta t} + 2\delta[\dot{u}(t)e^{-\delta t} + u(t)(-\delta)e^{-\delta t}] + \omega_0^2u(t)e^{-\delta t} \\ \Rightarrow \ddot{u}(t)e^{-\delta t} &= 0 \Rightarrow \ddot{u}(t) = 0, \end{aligned} \quad (4S14.3)$$

pa vidimo da smo dobili *diferencijalnu jednačbu* za naš varirani parametar $u(t)$. Tu jednačbu znamo riješiti - ona nije ništa drugo nego jednačba za jednoliko gibanje po pravcu (druga derivacija, koja u fizikalnom linearnom gibanju odgovara akceleraciji jednaka je 0). Prilikom integracije pojavit će se dodatne konstante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\dot{u}(t) &= 0 \int^t \Rightarrow \dot{u}(t) = V_0 \\ \frac{d}{dt}u(t) &= V_0 \int^t \Rightarrow u(t) - X_0 = V_0t \Rightarrow u(t) = V_0t + X_0, \end{aligned} \quad (4S14.4)$$

pa je naše rješenje za gibanje $x(t)$ napokon

$$x(t) = u(t)e^{-\delta t} = (V_0t + X_0)e^{-\delta t}. \quad (4S14.5)$$

Vidimo da su se ponovno pojavile dvije slobodne konstante koje valja odrediti iz početnih uvjeta. Također vidimo da je u ovom rješenju za varirani parametar $u(t)$ *sadržano* i naše rješenje koje bi dobili uvrštavanjem jedinog rješenja koje smo dobili iz karakteristične jednačbe.

Ponovno, kao primjer uzimamo izabrane početne uvjete

$$\begin{aligned} x(0) &= A_0 \Rightarrow X_0 = A_0 \\ \dot{x}(0) &= 0 = V_0 + X_0(-\delta) \Rightarrow V_0 = A_0\delta = A_0\omega_0 \\ \Rightarrow x(t) &= A_0(1 + \omega_0t)e^{-\delta t}. \end{aligned} \quad (4S14.6)$$

Uz pažljivo namještene parametre, ponašanje rješenja u ovom slučaju može se također proučiti na [Geogebra simulaciji](#) i [Wolfram demonstraciji](#). Moguće je pokazati da u ovom slučaju kritičnog prigušenja dolazi do *najbržeg gušenja amplitude*⁶.

4S15 _____ [Promjena energije i Q-faktor.]

Pogledajmo kako se zbog prigušenja mijenja energija prigušenog oscilatora. Pretpostavljamo materijalnu točku koja se giba na opruzi, uz neko trenje. Ukupna energija u trenutku t jednaka je

$$E_{uk} = E_K(v) + E_P(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (4S15.1)$$

Promjena energije je, primjenjujući pravilo za derivaciju složene funkcije

$$\frac{dE_{uk}}{dt} = \frac{d}{dt}[E_K(v) + E_P(x)] = \frac{dE_K(v)}{dv} \frac{dv}{dt} + \frac{dE_P(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = mv\dot{v} + kx\dot{x} = v(m\dot{v} + kx). \quad (4S15.2)$$

⁶Pokazuje se limesom u $t \rightarrow \infty$ amplitude kritično gušenog u odnosu na npr. nadkritično gušeni oscilator.

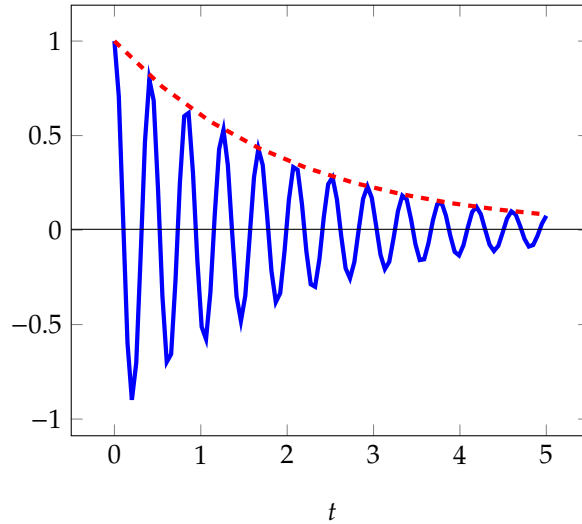
No zadnji izraz u jedn. 4S15.2 možemo pisati i drukčije, uzimajući u obzir našu originalnu jednadžbu prigušenog oscilatora, 4S9.1:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow m\dot{v} + kx = -bv.$$

Dakle, promjena ukupne energije oscilatora može se pisati jednostavno kao

$$\frac{dE_{uk}}{dt} = -bv^2. \quad (4S15.3)$$

Promatrajući koje posebnosti ima prigušeni oscilator, vidjeli smo da se, u slučaju slabog prigušenja, amplituda oscilacija eksponencijalno smanjuje u vremenu (slika 4S15.1)



Slika 4S15.1

Može se dakle za amplitudu pisati izraz

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t} \Rightarrow A(t+T) = A_0 e^{-\delta(t+T)} = A_0 e^{-\delta t} e^{-\delta T} = A(t) e^{-\delta T}. \quad (4S15.4)$$

Iz jedn. 4S15.4 vidimo da se u jednom periodu amplituda smanji za $e^{-\delta T}$. Član u eksponentu naziva se **logaritamski dekrement**

$$\lambda = \delta T.$$

Na kraju, definira se i veličina koju nazivamo **Q-faktor** ili *faktor kvalitete*. Ta je veličina povezana s brzinom gubitka (tj. *prijenos*) energije i bit će povezana i sa širinom rezonantne krivulje kod tjeranog gušenog oscilatora. Definira se izrazom

$$Q \equiv 2\pi \frac{E(t)}{|\Delta E|}. \quad (4S15.5)$$

Za gušeni oscilator ukupnu energiju pisali smo kao sumu kinetičkog $E_K \propto \dot{x}^2$ i potencijalnog $E_P \propto x^2$ člana. No u slučaju slabog prigušenja, kakvo nas ovdje zanima, rješenje je oblika

$$x(t) \propto e^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi).$$

Pri kvadriranju dakle će amplitude oscilatornih članova o vremenu ovisiti eksponencijalno, pa se ovisnost ukupne energije o vremenu može izraziti kao

$$E(t) = \text{konst.} \cdot e^{-2\delta t}. \quad (4S15.6)$$

Zaustavljajući se na prvom redu Taylorova razvoja, ili jednostavno aproksimirajući, možemo pokazati da je promjena energije tijekom jednog perioda

$$\Delta E = E(t+T) - E(t) = \frac{dE}{dt} T = \frac{d(\text{konst.} \cdot e^{-2\delta t})}{dt} T = -2\delta E(t) T. \quad (4S15.7)$$

Uvrštavajući zadnji izraz u definiciju Q-faktora (4S15.5), imamo

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega}{2\delta}, \quad (4S15.8)$$

gdje smo uzeli u obzir definicijsku vezu perioda i kružne frekvencije $2\pi/T = \omega$.

Promjenu energije prigušenog oscilatora odredit ćemo kao razliku ukupne $E_K + E_P$ u dva trenutka. Kako bi to mogli izračunati, trebamo riješiti jednadžbu gibanja. Zadane su nam sve veličine koje opisuju prigušeno gibanje (masa tijela m , konstanta opruge k i koeficijent proporcionalnosti trenja b , kao i početni uvjeti.)

Zgodno je uočiti da se početna energija može jednostavno dobiti iz početnih uvjeta:

$$E_{uk}(t=0) = E_K(t=0) + E_P(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = 1,92 \cdot 10^{-4} \text{ J}. \quad (4S18.1)$$

Iz podataka u zadatku znamo

$$\begin{aligned} m &= 0,16 \text{ kg} \\ k &= 0,6 \text{ N/m} \\ b &= 0,04 \text{ Ns/m} \\ 2\delta &= b/m \Rightarrow \delta = 0,125 \text{ s}^{-1} \\ \omega_0 &= \sqrt{k/m} = 1,936 \text{ s}^{-1} \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 1,932 \text{ s}^{-1}. \end{aligned} \quad (4S18.2)$$

Opći oblik rješenja i brzina

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi) \\ \dot{x}(t) &= A_0(-\delta) e^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi) - A_0 \omega e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (4S18.3)$$

pa odredimo konstante preko početnih uvjeta u $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= -2 \text{ cm} = A_0 \cos \phi \Rightarrow A_0 = \frac{-2 \text{ cm}}{\cos \phi} \\ \dot{x}(t) &= 3 \text{ cm/s} = A_0(-\delta \cos \phi - \omega \sin \phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3 \text{ cm/s} = \frac{-2 \text{ cm}}{\cos \phi} (-)(\delta \cos \phi + \omega \sin \phi) \\ \Rightarrow \frac{3}{2} \text{ s}^{-1} = \delta + \omega \tan \phi \Rightarrow \phi = 0,618 \text{ rad} \\ \Rightarrow A_0 = -2,45 \text{ cm} \end{cases} \quad (4S18.4)$$

Ovim je jednadžba gibanja riješena i konstante određene iz početnih uvjeta. Sad još samo izračunamo položaj $x(t=3 \text{ s})$ i brzinu $\dot{x}(t=3 \text{ s})$ uvrštavajući A_0 i ϕ u 4S18.3. Dobiva se

$$\left. \begin{aligned} x(3 \text{ s}) &= 1,669 \text{ cm} \\ \dot{x}(3 \text{ s}) &= 0,6312 \text{ cm/s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{uk}(3 \text{ s}) = 0,867 \cdot 10^{-4} \text{ J}. \quad (4S18.5)$$

te naposljetku

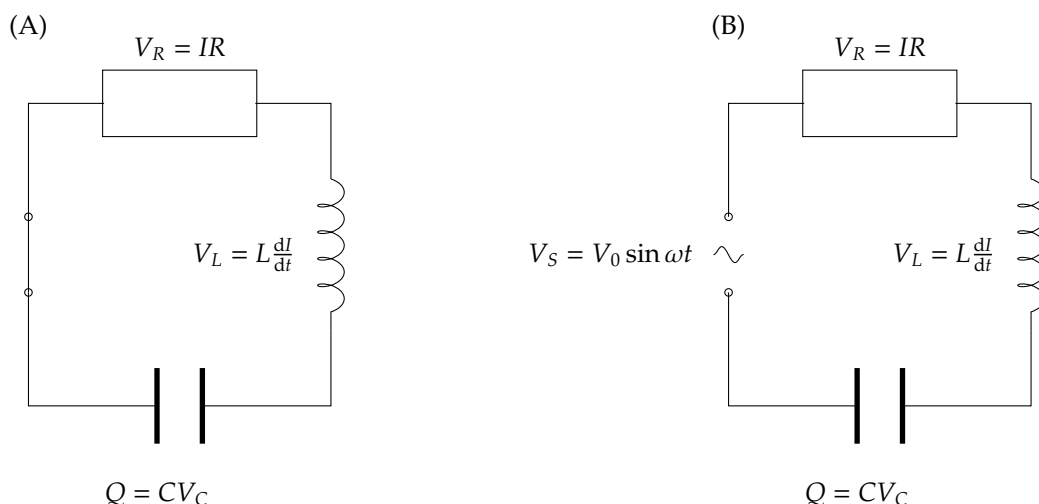
$$\Delta E = E_{uk}(3 \text{ s}) - E_{uk}(0 \text{ s}) = -1,04 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

5a - Prisilno gušeno titranje

Za titranje i oscilacije je interesantno to što se velika klasa različitih pojava može matematički opisati sličnim jednadžbama. Na isti način, i mehanički gušeni oscilator je matematički ekvivalentan električnom titrajnom krugu (Slika 5S2.1).

Za električni titrajni krug prirodna je nadopuna uključivanje sinusnog izvora potencijala, kao na slici 5S2.1 (B). U tom slučaju, primjena Kirchoffova pravila vodila bi na *nehomogenu diferencijalnu jednadžbu*

$$\begin{aligned} V_S &= V_R + V_L + V_C \Rightarrow V_0 \sin \omega t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow \\ \underbrace{\ddot{Q}}_{2\delta} + \underbrace{\frac{R}{L} \dot{Q}}_{\omega_0^2} + \underbrace{\frac{1}{CL} Q}_{\omega_0^2} &= \frac{V_0}{L} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (5S2.1)$$



Slika 5S2.1: Prigušeni (A) i prisilno tjerani gušeni oscilator (B).

5S6 [Fazorsko rješenje prisilnog gušenog titranja.]

Nehomogenu d. j. prisilno tjeranog gušenog oscilatora moguće je riješiti promatrajući **fazore** (vektore stalne amplitude i odnosa faza, koji svi rotiraju *istom* kružnom frekvencijom). U tom slučaju moguće je odnos faza i iznosa odrediti u *jednom odabranom trenutku*.

Opće rješenje *nehomogene* d. j. jednako je zbroju općeg rješenja *homogene* d. j. i *partikularnog* (posebnog) rješenja nehomogene jednadžbe. Opće rješenje homogene jednadžbe za gušeni H.O. detaljno smo proučili ranije. Zanima nas dakle samo još posebno rješenje nehomogene d. j. Razumljivo je *pretpostaviti* da je rješenje oblika

$$x(t) = A \sin(\omega t - \phi), \quad (5S6.1)$$

dobar pokušaj. Pri tome su A i ϕ neke konstante koje trebamo odrediti uvrštavajući ovu našu pretpostavku u diferencijalnu jednadžbu.⁷

Kako bi ova diferencijalna jednadžba bila prikazana u fazorskom obliku, uvrstimo pretpostavljeno rješenje u jednadžbu prisilno tjeranog gušenog oscilatora

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \sin \omega t \quad (5S6.2)$$

i dobivamo

$$-A\omega^2 \sin(\omega t - \phi) + 2\delta A\omega \cos(\omega t - \phi) + \omega_0^2 A \sin(\omega t - \phi) = A_0 \sin \omega t. \quad (5S6.3)$$

Svi članovi u jedn. (5S6.3) osciliraju *istom* frekvencijom **vanjske prisile**, no kako bi odredili odnos faza (kuteva) fazora, moramo voditi računa da je jedan član opisan kosinusom. To zapravo znači da je taj član u fazi pomaknut u odnosu na sinusne članove za $\pi/2$, jer je

$$\cos \theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}).$$

Dakle, skupljajući članove i svodeći na isti, sinusni oblik imamo napokon *fazorsku jednadžbu*:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t - \phi) + 2\delta A\omega \sin(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}) = A_0 \sin \omega t. \quad (5S6.4)$$

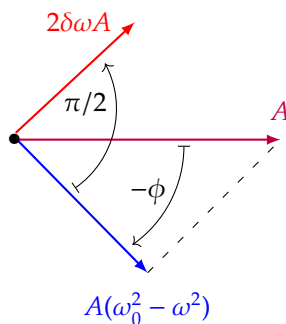
Ta jednadžba odgovara fazorskom zbroju na slici 5S6.1.

Primijetite da cijeli paralelogram sila rotira kružnom frekvencijom ω . Iz pravokutnog trokuta (crtkano) na slici, možemo zaključiti

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2 A^2 = A_0^2 \Rightarrow A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (5S6.5)$$

$$\tan \phi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

⁷Negativan predznak faze ϕ ima značenje pretpostavljanja kašnjenja u fazi odziva (pomaka x) u odnosu na vanjsku prisilu.



Slika 5S6.1

5S7 [Kompleksno rješenje tjeranog gušenog oscilatora.]

Možemo ovakav problem riješiti i prelaskom u račun s kompleksnim brojevima. Tada se oslanjamo na Eulerovu formulu i jedn. 5S6.1 i 5S6.2 pišemo u obliku:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x &= A_0 e^{i\omega t} \\ z(t) &= A e^{i(\omega t - \phi)}\end{aligned}\quad (5S7.1)$$

Uvrštavanjem probnog partikularnog rješenja $z(t)$ dobivamo, analogno kao ranije

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)e^{i(\omega t - \phi)} + 2i\delta\omega A e^{i(\omega t - \phi)} = A_0 e^{i\omega t}. \quad (5S7.2)$$

Primijetite da je ovdje pomak u fazi kojeg smo dobili uslijed člana s kosinusom ranije opisan imaginarnim članom množenim s i . Vremensku ovisnost kao i ranije možemo izlučiti i definirati neku *kompleksnu amplitudu* kao⁸

$$Z = A e^{-i\phi}.$$

Izlučimo Z te nam je iz ostalih poznatih članova preostalo odrediti njegovu amplitudu i fazu

$$Z[\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega] = A_0 \Rightarrow Z = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} = \frac{A_0(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}. \quad (5S7.3)$$

Pa sada imamo

$$\begin{aligned}|Z| &= A = \sqrt{ZZ^*} = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} = -\frac{2i\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \phi = -\theta \Rightarrow \tan \phi = \frac{2i\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},\end{aligned}\quad (5S7.4)$$

jednako kao i prije.

5S9 [Rezonancija.]

Promatramo za koji izbor frekvencije sile prisile ω će amplituda prisilnog titranja biti najveća.

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (5S9.1)$$

Kako bi to odredili, tražimo *minimum* nazivnika u jedn. 5S9.1.

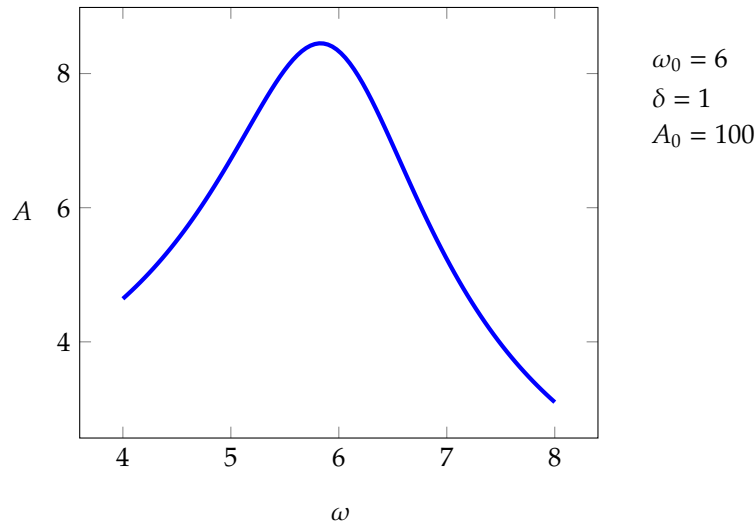
$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2] &= 0 \Rightarrow 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 4\delta^2 2\omega = 0 \Rightarrow \\ -2(\omega_0^2 - \omega^2) &= -4\delta^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}.\end{aligned}\quad (5S9.2)$$

⁸Primijetite da je to ekvivalentno kao da smo na početku pisali $z(t) = Z e^{i\omega t}$, gdje je Z kompleksna amplituda.

Iznos najveće amplitude dobijemo kad uvrstimo tu vrijednost u jedn. 5S9.1. Tako se dobiva:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(-2\delta^2)^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}} = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (5S9.3)$$

Vrijednost je to veća što je prigušenje po iznosu bliže prirodnoj frekvenciji, tj. što smo bliže *kritičnom* uvjetu prigušenja.



Slika 5S9.1: Ovisnost amplitude prisilno tjeranog prigušenog oscilatora o frekvenciji pobude.

5S10 _____ [Prenesena snaga i Lorentzov rezonantni oblik krivulje.]

Gledamo stacionarne uvjete $t \rightarrow \infty$ u kojima je jedini doprinos stacionarnog rješenja, odnosno titranje je frekvencije vanjske prisile (rješenja u odjeljcima 5S6 i 5S7)

$$x(t) = A \sin(\omega t - \phi). \quad (5S10.1)$$

Uz tu pretpostavku računamo snagu iz općenitog izraza

$$P(t) = F(t)v(t) = F_0 \sin \omega t A \omega \cos(\omega t - \phi). \quad (5S10.2)$$

Kosinus razlike raspišemo

$$\cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi,$$

i imamo na umu da je amplituda A povezana s vanjskom silom F_0 preko jedn. 5S6.5 i 5S7.4 uz

$$A_0 = \frac{F_0}{m} \quad (5S10.3)$$

Tako 5S10.2 postaje

$$P(t) = F_0 A \omega (\sin \omega t \cos \omega t \cos \phi + \sin^2 \omega t \sin \phi). \quad (5S10.4)$$

Računamo *srednju snagu*, odnosno *prosječnu snagu tijekom jednog perioda T*:

$$\bar{P}(t) = \langle P(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{F_0 A \omega}{T} \int_0^T dt \left(\underbrace{\frac{1}{2} \sin 2\omega t \cos \phi}_{=0} + \underbrace{\sin^2 \omega t \sin \phi}_{1/2} \right). \quad (5S10.5)$$

Iskoristimo fazorski prikaz na slici 5S6.1 pa vidimo da je

$$\sin \phi = \frac{2A\delta\omega}{A_0},$$

što uvrstimo u 5S10.5 i pokratimo period T kojeg dobijemo integracijom po dt (jer su sve preostalo samo konstante). Uz 5S10.3 slijedi

$$\langle P(t) \rangle_T = \frac{F_0 2A \delta \omega}{2F_0/m} A \omega = m A^2 \omega^2 \delta. \quad (5S10.6)$$

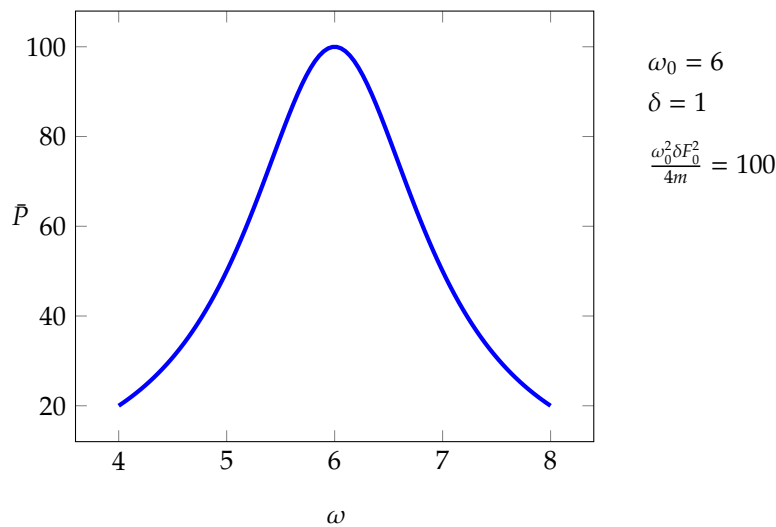
Uvedemo sada približenje da smo s vanjskom prisilom blizu frekvencije slobodnog oscilatora

$$\begin{aligned} \omega &\approx \omega_0 \\ \omega_0^2 - \omega^2 &\approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega), \end{aligned} \quad (5S10.7)$$

te iskoristimo u izrazu za amplitudu 5S9.1, odakle slijedi

$$\langle P(t) \rangle_T \approx \frac{m \omega^2 \delta F_0^2}{m^2 [4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + 4\delta^2 \omega_0^2]} = \frac{\omega_0^2 \delta F_0^2}{4m[(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2]}. \quad (5S10.8)$$

Ovaj izraz opisuje (uz uvedena ograničenja) na koji način dolazi do prijenosa energije iz izvora (vanjska prisila) na gušeni oscilatorni sustav. Ovakav oblik naziva se **Lorentzova rezonantna krivulja** i prikazan je na slici 5S10.1.



Slika 5S10.1: Lorentzova rezonantna krivulja.

5b - Vezani oscilatori.

5S12 _____ [Oberbeckova njihala, vezani oscilatori.]

Općenit primjer Oberbeckovih njihala prikazan je na slici 5S12.1 (A). Znatno ćemo pojednostaviti situaciju uzimajući

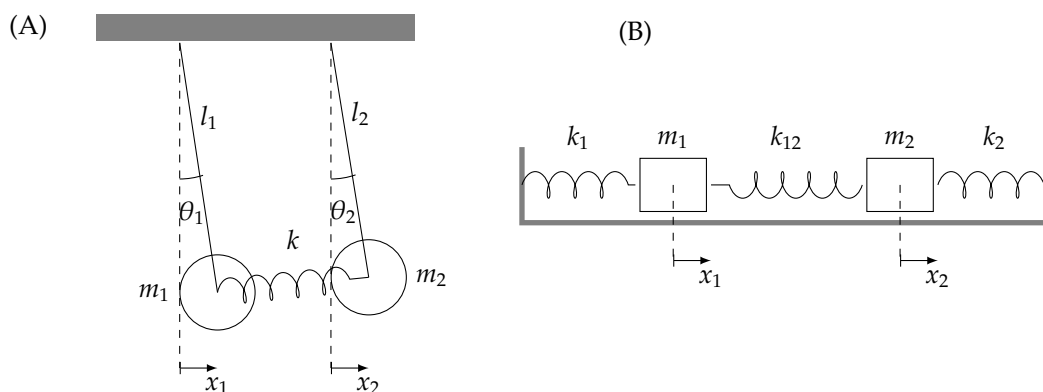
$$\begin{aligned} l_1 &= l_2 = l, \\ m_1 &= m_2 = m, \end{aligned} \quad (5S12.1)$$

i pokazati da se za slučaj malih kuteva $\theta_{1,2} \ll \pi/4$ Oberbeckova njihala mogu matematički ekvivalentno opisati sustavom na slici (B), uz pretpostavku da se mase gibaju bez trenja i da vrijedi

$$\begin{aligned} k_1 &= k_2 = k, \\ m_1 &= m_2 = m. \end{aligned} \quad (5S12.2)$$

Egzaktne jednadžbe gibanja dviju masa u slučaju Oberbeckovih njihala bit će

$$\begin{aligned} m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 &= -m_1 g \sin \theta_1 + k(x_2 - x_1), \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 &= -m_2 g \sin \theta_2 + k(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (5S12.3)$$



Slika 5S12.1: Oberbeckova njihala (A) i vezani H.O. (B).

Za male kuteve vrijedit će

$$\begin{aligned}\theta_1 &\approx \sin \theta_1, \\ \theta_2 &\approx \sin \theta_2, \\ x_1 &\approx l_1 \theta_1, \\ x_2 &\approx l_2 \theta_2,\end{aligned}\tag{5S12.4}$$

te uz 5S12.1 jedn. 5S12.3 poprimaju oblik

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= -\frac{g}{l} \theta_1 + \frac{k}{m} (\theta_2 - \theta_1), \\ \ddot{\theta}_2 &= -\frac{g}{l} \theta_2 + \frac{k}{m} (\theta_1 - \theta_2).\end{aligned}\tag{5S12.5}$$

No matematički ekvivalentan oblik jednadžbi imamo i za pomake vezanih H.O. na slici (B) :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\frac{k}{m} x_1 + \frac{k_{12}}{m} (x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{k}{m} x_2 + \frac{k_{12}}{m} (x_1 - x_2).\end{aligned}\tag{5S12.6}$$

5S13 _____ [Svojstveni načini, svojstvena (vlastita) rješenja i svojstvene (vlastite) vrijednosti.]

Ovo je sustav *vezanih diferencijalnih jednadžbi*, u kojima su pomaci jednog tijela ovisni o pomacima drugog tijela. Takve linearne jednadžbe općenito se rješavaju pronalaženjem **normalnih modova**, linearnih kombinacija fizikalnih pomaka ($x_{1,2}$) takvih da su za te linearne kombinacije jednadžbe jednostavne za riješiti - tj. jednadžbe su za takve linearne kombinacije *razvezane*. Što to znači? Znači da će rješenje za neku linearnu kombinaciju pomaka biti jednostavna funkcija (u našem slučaju titranje jedinstvenom frekvencijom.) To u matematičkom formalizmu znači da smo prelaskom u drukčiju *bazu* (vektorskog prostora) jednadžbe razvezali. Takve linearne kombinacije koje razvezuju sustav jednadžbi nazivamo **normalni modovi** ili *svojstveni načini* titranja. Oni u matematičkom smislu opisuju jednako valjano naš sustav, ali zbog simetrije sustava takve su kombinacije povoljnije za rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi. Rješenja, u ovom slučaju frekvencije titranja svojstvenih načina nazivaju se općenito **vlastite** ili **svojstvene vrijednosti**.

Pokažimo na ovom osnovnom primjeru kako bi taj postupak tekao. Ako jednadžbe (5S12.6) zbrojimo

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -\frac{k}{m} (x_1 + x_2),\tag{5S13.1}$$

tj. dobit ćemo jednu jednadžbu za varijablu

$$u_a = x_1 + x_2,$$

oblika jednostavnog harmoničkog oscilatora:

$$u_a = u_{a0} \cos(\omega_a t + \phi_a),\tag{5S13.2}$$

uz

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}.\tag{5S13.3}$$

Analogno, ako jednadžbe 5S12.6 oduzmemo, slijedi

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{2k_{12}}{m}(x_1 - x_2), \quad (5S13.4)$$

uz pokratu i rješenje oblika

$$x_1 - x_2 = u_b = u_{b0} \cos(\omega_b t + \phi_b), \quad (5S13.5)$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}. \quad (5S13.6)$$

Konstante u_{a0} , u_{b0} , ϕ_a i ϕ_b određuju se kao i ranije iz početnih uvjeta.

Dakle, na sustavu jednadžbi izvršili smo jednostavnu (najjednostavniju) linearnu transformaciju: zbrajanje i oduzimanje, čime smo jednadžbe sveli na oblik u kojem smo prepoznali normalne modove.⁹ Važna značajka normalnih modova je da su oni međusobno *linearно nezavisni*. To za posljedicu ima da su oscilacije u svakom od modova neovisne, te ako se samo jedan od svojstvenih načina titranja potakne na oscilacije, sustav neće nikada biti potrebno opisati drugim načinom titranja.

Fizikalni opis pomaka tijela općenito će biti superpozicija svojstvenih načina. Formule za transformaciju iz normalnih modova na titranja masa možemo lako izvesti. Pišemo normalne modove

$$\left. \begin{aligned} u_a &= x_1 + x_2 \\ u_b &= x_1 - x_2 \end{aligned} \right\} \pm \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{u_a + u_b}{2} \\ x_2 &= \frac{u_a - u_b}{2} \end{aligned} \quad (5S13.7)$$

i vidimo da su općenito naši pomaci dani kao superpozicije titranja različitim frekvencijama ω_a i ω_b .

5S14 _____ [Početni uvjeti, rješenja, faze.]

Pogledajmo kako su dana rješenja, ovisno o nekim posebnim početnim uvjetima.

A) **potaknuli smo početno samo način a:**

Pretpostavimo da smo u $t = 0$ otklonili oba tijela u istom smjeru za X_0 , odnosno

$$x_{10} = x_{20} = X_0.$$

Početna brzina oba tijela je 0. Početni uvjet nam je tada

$$\left. \begin{aligned} u_{a0} &= x_{10} + x_{20} = 2X_0 \\ u_{b0} &= x_{10} - x_{20} = 0 \\ \dot{u}_a(0) &= -u_{a0}\omega \sin \phi_a = 0 \\ \dot{u}_b(0) &= -u_{b0}\omega \sin \phi_b = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{10} &= x_{20} \\ \sin \phi_a &= \sin \phi_b = 0 \Rightarrow \phi_a = \phi_b = 0 \\ x_1 &= x_2 = \frac{u_a}{2} = X_0 \cos \omega_a t \end{aligned} \quad (5S14.1)$$

odnosno, oba tijela titraju u fazi, ali kao da titraju vezani samo jednom oprugom. Opruga kojom su tijela povezana (opisana konstantom k_{12} u načinu a uopće ne sudjeluje u gibanju.

B) **potaknuli smo početno samo način b:**

Pretpostavimo da smo u $t = 0$ otklonili oba tijela za neki X_0 , no ovaj put jedno prema ili od drugog, pa su predznaci pomaka tijela različiti

$$x_{10} = -x_{20} = X_0.$$

Početna brzina oba tijela je 0. Početni uvjet nam je u tom slučaju

$$\left. \begin{aligned} u_{a0} &= x_{10} + x_{20} = 0 \\ u_{b0} &= x_{10} - x_{20} = 2X_0 \\ \dot{u}_a(0) &= -u_{a0}\omega \sin \phi_a = 0 \\ \dot{u}_b(0) &= -u_{b0}\omega \sin \phi_b = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{10} &= -x_{20} \\ \sin \phi_a &= \sin \phi_b = 0 \Rightarrow \phi_a = \phi_b = 0 \\ x_1 &= -x_2 = \frac{u_b}{2} = X_0 \cos \omega_b t \end{aligned} \quad (5S14.2)$$

odnosno, oba tijela titraju u protufazi. Opruga kojom su tijela povezana (opisana konstantom k_{12} u načinu b simetrično sudjeluje u gibanju.

⁹U matematičkom formalizmu ovaj se problem općenito može pisati preko vektorske jednadžbe: $\hat{D} \cdot \vec{u} = \lambda \mathbb{1} \cdot \vec{u}$, gdje je \hat{D} diferencijalni operator sustava, a λ svojstvena vrijednost svojstvenog načina opisanog vektorom \vec{u} .

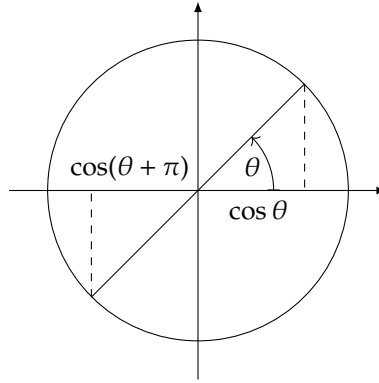
Izraze 5S14.1 i 5S14.2 dobivamo uvrštavajući rješenja za u_a i u_b određena iz početnih uvjeta u jedn. 5S13.7. Možemo dodatno pokazati i što znači to gibanje u protufazi, odnosno kako je ono povezano s negativnim predznakom za x_1 i x_2 pišemo li

$$x_2 = -X_0 \cos \omega_b t = X_0 \cos(\omega_b t + \pi), \quad (5S14.3)$$

gdje smo uzeli u obzir da vrijedi

$$\cos \theta = -\cos(\theta + \pi),$$

što se vidi iz slike 5S14.1 jedinične kružnice.



Slika 5S14.1

5S15 _____ [Svojstveni načini titranja bliskih frekvencija - udari.]

Općenita rješenja gibanja dviju vezanih oscilatora pišemo preko superpozicije svojstvenih načina:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{u_{a0}}{2} \cos(\omega_a t + \phi_a) + \frac{u_{b0}}{2} \cos(\omega_b t + \phi_b) \\ x_2 = \frac{u_{a0}}{2} \cos(\omega_a t + \phi_a) - \frac{u_{b0}}{2} \cos(\omega_b t + \phi_b) \end{cases} \quad (5S15.1)$$

Pretpostavimo da su amplitude titranja svojstvenih načina *jednake*. Tada je moguće primijeniti trigonometrijske identitete za zbroj i razliku kosinusa:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned} \quad (5S15.2)$$

Uz $u_{a0} = u_{b0} = u_0$ možemo to iskoristiti u jedn. 5S15.1, odakle

$$\begin{cases} x_1 = u_0 \cos \left(\frac{\omega_a + \omega_b}{2} t + \frac{\phi_a + \phi_b}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_a - \omega_b}{2} t + \frac{\phi_a - \phi_b}{2} \right) \\ x_2 = u_0 \sin \left(\frac{\omega_a + \omega_b}{2} t + \frac{\phi_a + \phi_b}{2} \right) \sin \left(\frac{\omega_a - \omega_b}{2} t + \frac{\phi_a - \phi_b}{2} \right) \end{cases} \quad (5S15.3)$$

Primijetimo da takve jednadžbe upravo dobijemo uz gore postavljene početne uvjete, no za početne brzine jednake 0, sve faze pojedinih modova također su jednake 0, u tom slučaju su jednadžbe 5S15.3 nešto pojednostavljene:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_0 \cos \left(\frac{\omega_a + \omega_b}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_a - \omega_b}{2} t \right) \\ x_2 &= u_0 \sin \left(\frac{\omega_a + \omega_b}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_a - \omega_b}{2} t \right) \end{aligned} \quad (5S15.4)$$

Ako su sad frekvencije osnovnih načina titranja približno jednake, tj. ako vrijedi

$$\omega_a \approx \omega_b \text{ odnosno } 2k_{12} \ll k, \quad (5S15.5)$$

bit će

$$\begin{aligned}\frac{\omega_a + \omega_b}{2} &\approx \omega_a \approx \omega_b, \\ \frac{\omega_a - \omega_b}{2} &\equiv \Delta\omega \ll \omega_a \approx \omega_b.\end{aligned}\quad (5S15.6)$$

Jednadžbe 5S15.4 možemo dakle promatrati kao *titranje osnovnom frekvencijom* kojem je međutim *amplituda oscilacija modulirana*. Frekvencija modulacije amplitude je $\Delta\omega$:

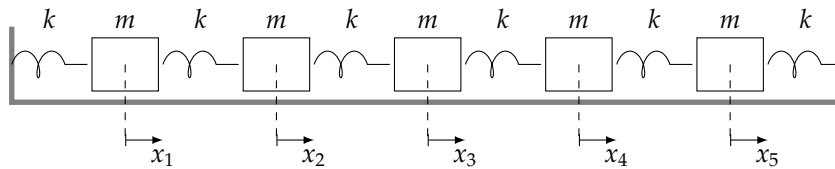
$$\begin{aligned}x_1 &= u_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_a + \omega_b}{2}t\right) \\ x_2 &= u_0 \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_a + \omega_b}{2}t\right).\end{aligned}\quad (5S15.7)$$

modulirana amplit. oscil. frekv. $\omega_a \approx \omega_b$

Neke simulacije koje pojašnjavaju opisane pojave mogu se naći na [academo](#) i [Walter Fendt](#) stranicama.

Slikovit prikaz jedno- i dvodimenzionalnih normalnih modova za jednostavnije razmatranje simetrije sustava i veze sa svojstvenim načinima može se naći na [phet.colorado.edu](#) stranici.

5S17 _____ [Primjer - svojstveni načini sustava 5 masa.]



Slika 5S17.1

Napišemo najprije jednadžbe koje opisuju ovaj sustav oscilatora:

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \\ m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2) + k(x_4 - x_3) \\ m\ddot{x}_4 &= -k(x_4 - x_3) + k(x_5 - x_4) \\ m\ddot{x}_5 &= -k(x_5 - x_4) - kx_5.\end{aligned}\quad (5S17.1)$$

Sustav jednadžbi može se napisati vektorski tj. matrično:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\quad (5S17.2)$$

Ovaj matrični zapis ekvivalentan je kompaktnijem izrazu

$$m\ddot{\vec{x}} = k\hat{S}\vec{x},\quad (5S17.3)$$

gdje je \hat{S} matrični operator koji opisuje sustav (dobiven iz Newtonovih jednadžbi u 5S17.1). Rješenja (linearne kombinacije x_1 do x_5) koja dijagonaliziraju taj operator bit će svojstveni načini. (Analogno sustavu sa samo dva vezana H.O.) Operatorski zapisano, rješenja će biti dana kao

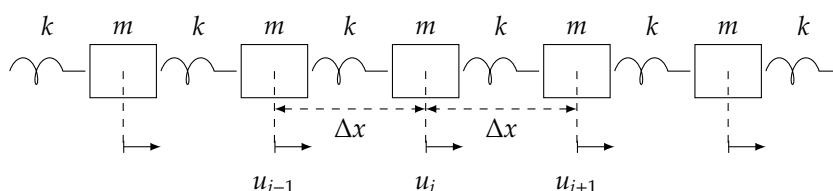
$$\ddot{\vec{O}}\vec{x} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} sv_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sv_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sv_5 \end{bmatrix} \vec{x},\quad (5S17.4)$$

gdje je \hat{O} operator transformacije redaka i stupaca matrice \hat{S} . Takva transformacija *dijagonalizira* matricu koeficijenata. U jedn. 5S17.4 oznake sv_i označavaju *vlastite* ili *svojstvene* vrijednosti pojedinih vlastitih načina (normalnih modova). Prelazak iz jedn. 5S17.3 u jedn. 5S17.4 odgovara zapravo transformaciji vektora baze: umjesto da su rješenja \vec{x} opisana preko 'koordinata' x_i , rješenja \vec{x} su u dijagonalnoj bazi opisana preko novih 'koordinata' tj. normalnih modova u_i .

Rješavanje takvih linearnih vezanih sustava je standardan problem i ovdje smo ga sveli na dijagonalizaciju matrice koeficijenata. Bit će dakle moguće za rješavanje pomoći se razvijenim alatima za dijagonalizaciju kao što je npr. [ovaj na symbolab-u](#). Tako se dobiva svojstvene vrijednosti (vlastite frekvencije) normalnih modova, kao i linearne kombinacije koje dijagonaliziraju sustav. Općenito rješenje gibanja pojedine mase bit će kao i prije *superpozicija* normalnih modova. Kojih, to će ovisiti o *početnim uvjetima*.

6a - Valovi. Valna jednadžba.

6S4 _____ [Jednadžba longitudinalnog vala na sustavu opruga.]



Slika 6S4.1

Na slici 6S4.1 prikazan je sustav opruga čiji su ravnotežni položaji udaljeni za Δx . Pomake i -te mase iz ravnoteže opisat ćemo jednadžbom

$$m\ddot{u}_i = k \underbrace{(u_{i+1} - u_i)}_{\Delta u_i} - k \underbrace{(u_i - u_{i-1})}_{\Delta u_{i-1}} \Rightarrow m\ddot{u}_i = k\Delta u_i - k\Delta u_{i-1}. \quad (6S4.1)$$

Kao i u nekoliko primjera prije, koristimo približan izraz

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i \approx \frac{du_i}{dx} \Delta x = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_i \Delta x, \quad (6S4.2)$$

gdje smo *umjesto diskretne raspodjele pomaka* $u_i(t)$ uveli *kontinuiranu funkciju* $u(x, t)$, pri čemu je indeks i poprimio značenje koordinate x koja opisuje položaj oko kojeg se zbivaju oscilacije prethodno opisane s u_i .

Time jedn. 6S4.1 postaje

$$m\ddot{u}_i(t) = k\Delta x \underbrace{\left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i-1} \right)}_{\Delta(\frac{\partial u}{\partial x})} \approx k\Delta x^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{k\Delta x^2}{m} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (6S4.3)$$

U izvodu 6S4.3 još jednom smo koristili aproksimaciju 6S4.2, samo ovaj put uz drukčije zadanu funkciju, odnosno umjesto u_i sad smo ju primijenili na $\partial u / \partial x$.

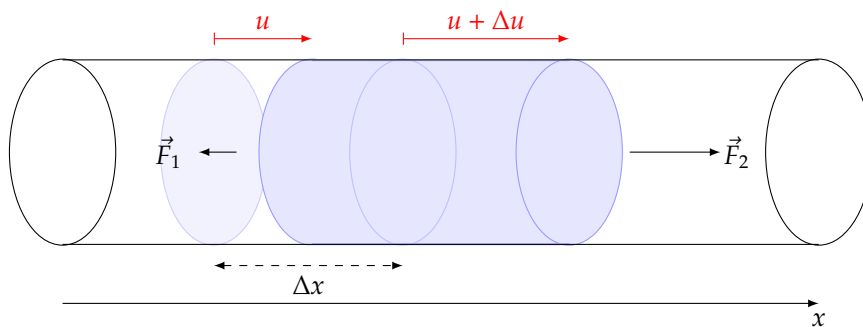
Jednadžba 6S4.3 naša je prva izvedena *valna jednadžba*. Ovaj oblik jednadžbe sretat ćemo još nekoliko puta, pri opisu širenja energije (poremećaja) u različitim sustavima. Općenito se jednadžba piše u obliku

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0}, \quad (6S4.4)$$

uz definiciju konstante v (brzine širenja valova, što će postati jasnije uskoro) kao

$$v^2 = \frac{k\Delta x^2}{m}. \quad (6S4.5)$$

Ono što će opisivati širenje posebno u svakom od različitih sustava bit će upravo ovaj izraz za faznu brzinu koji će sadržavati veličine smislene za fizikalni opis sustava u kojem se valovi šire.



Slika 6S5.1

Širenje vala u štapu presjeka S i Youngovog modula elastičnosti E može se prikazati kao širenje kroz sustav opruga konstante

$$k = \frac{SE}{\Delta x}, \quad (6S5.1)$$

gdje je Δx ravnotežna udaljenost masa u modelu s oprugama.

Valna jednadžba ekvivalentna je 6S4.4, uz odgovarajući izraz za brzinu. Nju dobijemo tako da uvrstimo 6S5.1 u 6S4.5 pa slijedi

$$v^2 = \frac{k\Delta x^2}{m} = \frac{SE\Delta x}{m} = \frac{E}{\rho} \overbrace{\frac{S\Delta x}{m}}^v = \frac{E}{\rho}, \quad (6S5.2)$$

pri čemu smo uzeli u obzir $\rho = m/V$.

Iskoristit ćemo još sliku 6S5.1 da objasnimo detaljnije sve elemente koje u obzir uzimamo pri izvodu valne jednadžbe za longitudinalne valove. Sile $\vec{F}_{1,2}$ su sile koje djeluju na djelić mase koji se nalazi u području $(x, x + \Delta x)$. Pomaci dviju stranica (ljubičastog cilindra na slici) u ravnoteži su udaljeni za Δx . Pri gibanju valova, dozvoljavamo pomake od raavnoteže i opisujemo ih funkcijom $u(x, t)$. Dvije stranice cilindra mogu se od ravnotežnog položaja udaljiti za različit iznos, što ovisi o konstanti elastičnosti (kod modela opruga), odnosno Youngovom modulu. Dakle, na koordinati x istovremeno nalazimo i veličinu koja opisuje ravnotežu (Δx) i pomak iz ravnoteže ($u(x, t)$). Iako su na istoj osi, to su dvije veličine različitog značenja i ponašanja.

Gledamo projekciju sile \vec{F}_i na y -os, budući da promatramo po pretpostavci samo pomake u_i koji su transverzalni (okomiti na smjer širenja vala) (Slika 6S7.1). Pri tome će vrijediti skalarna jednadžba gibanja u y -smjeru

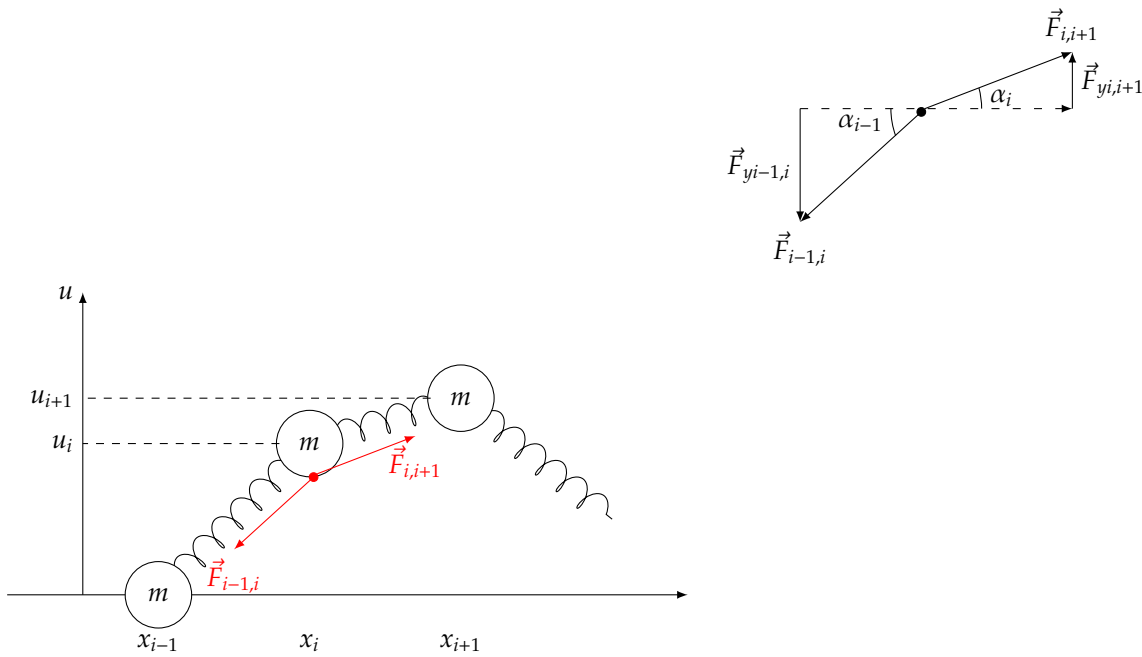
$$m\ddot{u}_i = F_{yi} = F_{yi+1,i} - F_{yi,i-1}, \quad (6S7.1)$$

no te su projekcije dane prema slici kao

$$\begin{aligned} F_{yi+1,i} &= F_{i,i+1} \sin \alpha_i = \overbrace{F_{i,i+1} \cos \alpha_i}^{T_{0x}} \tan \alpha_i \\ F_{yi,i-1} &= F_{i-1,i} \sin \alpha_{i-1} = \overbrace{F_{i-1,i} \cos \alpha_{i-1}}^{T_{0x}} \tan \alpha_{i-1}. \end{aligned} \quad (6S7.2)$$

Pretpostavili smo dakle da je napetost u x -smjeru stalna i jednaka nekoj sili T_{0x} . Zato smo pisali ove izraze preko te, projekcije na longitudinalni smjer i preko tangensa kuta. No, tangensi kuteva su povezani s elongacijama u_i i ravnotežnim razmakom u x -osi Δx (vidjeti sliku 6S7.1) te vrijedi

$$\begin{aligned} \tan \alpha_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \\ \tan \alpha_{i-1} &= \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (6S7.3)$$



Slika 6S7.1

Uvrštavanje 6S7.2 i 6S7.3 u jedn. 6S7.1 vodi uz sličan prijelaz s diskretnog $u_i(t)$ na kontinuiranu varijablu $u(x, t)$ kao prije (vidjeti 6S4.3) na sličnu *valnu jednadžbu*

$$m\ddot{u}_i(t) = T_{0x} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-1} \right)}_{\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \approx T_{0x} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T_{0x} \Delta x}{m} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (6S7.4)$$

Dobili smo dakle, izraz ekvivalentan prijašnjem, za posve drukčije širenje valova. Ovdje se uobičajeno uzme u obzir da je jedna masa m smještena po svakom Δx , pa se definira veličina μ , *linearna gustoća mase*

$$\mu \equiv \frac{m}{\Delta x},$$

te je brzina širenja valova (*fazna brzina*) jednaka

$$v^2 = \frac{T_{0x} \Delta x}{m} = \frac{T_{0x}}{\mu}. \quad (6S7.5)$$

i jednadžba 6S7.4 ponovno je poznatog oblika valne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (6S7.6)$$

iako ovdje opisujemo *oscilacije u drugom smjeru* relativno u odnosu na smjer širenja vala!

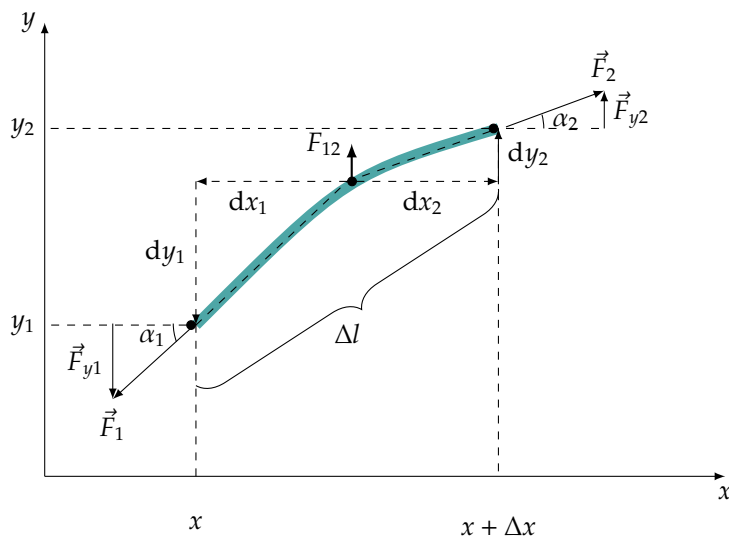
[6S8] _____ [Transverzalni val na žici.]

Na slici 6S8.1 prikazan je djelić žice kojeg možemo opisati sličnim izrazima kao što smo u prošlom odjeljku opisali gibanje središnje mase u sustavu opruga pri opisu transverzalnog vala. Razmatranje će slijediti prethodni izvod, no uz pretpostavku da je produljenje opruge maleno u odnosu na ravnotežnu duljinu tj. da vrijedi

$$\Delta l \approx \Delta x. \quad (6S8.1)$$

U tom slučaju pišemo jednadžbu gibanja (II. NZ)

$$\Delta m \ddot{y}(x, t) = (\mu \Delta l) \ddot{y}(x, t) \approx (\mu \Delta x) \ddot{y}(x, t) = F_{12} = F_{y2} - F_{y1}, \quad (6S8.2)$$



Slika 6S8.1

gdje smo definirali linearnu gustoću mase

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta l} \approx \frac{\Delta m}{\Delta x}, \quad (6S8.3)$$

Analogno prije (jedn. 6S7.2), i sa slike vidimo da projekciju sile na djelić možemo pisati

$$F_{y1,2} = |F_{1,2}| \sin \alpha_{1,2} = \overbrace{|F_{1,2}| \cos \alpha_{1,2}}^{T_{0x}} \tan \alpha_{1,2}. \quad (6S8.4)$$

Ovdje smo ponovno uveli važnu pretpostavku da je *ravnotežna napetost niti konstantna i neovisna o položaju x*. Tu veličinu i ovdje smo označili s T_{0x} .

Analogno jedn. 6S7.3 i 6S7.4 u prethodnom odjeljku i ovdje sada pišemo tangense kuteva prema odnosu pomaka u y i x osima:

$$\tan \alpha_{1,2} = \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{1,2} \Rightarrow F_{y1,2} = T_{0x} \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{1,2}. \quad (6S8.5)$$

Uvrstimo 6S8.5 u 6S8.2 i imamo

$$(\mu \Delta x) \ddot{y}(x, t) = T_{0x} \left(\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_2 - \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_1 \right) = T_{0x} \left(\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_x \right) \approx T_{0x} \Delta x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}, \quad (6S8.6)$$

gdje smo koristili približan izraz

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_x \approx \Delta x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}. \quad (6S8.7)$$

Iz 6S8.6 sada odmah dobivamo *valnu jednadžbu za transversalni val na žici*

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T_{0x}}{\mu} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0}. \quad (6S8.8)$$

[6S10] _____ [Rješenja valne jednadžbe.]

Želimo pokazati da je svaka dvostruko derivabilna funkcija y oblika

$$y(x, t) = f(x \pm vt)$$

rješenje valne jednadžbe. Time ćemo ujedno i opravdati našu tvrdnju da je član uz drugu derivaciju po prostoru u valnoj jednadžbi jednak veličini koja ima dimenziju brzine (značenje te brzine kao rasprostiranja stalne faze

bit će rezervirano za poseban oblik vala, kad je valno gibanje potaknuto harmoničkim oscilacijama). Kako bi to pokazali uvodimo pokratu

$$u(x, t) = x \pm vt, \quad (6S10.1)$$

pa je sada funkcija $y(x, t)$ složena funkcija, odnosno eksplicitno je funkcija varijable u , koja je eksplicitna funkcija naših početnih varijabli x i t

$$y(x, t) = y(u(x, t)). \quad (6S10.2)$$

Deriviramo dva puta takvu složenu funkciju po x i t i uvrstimo u valnu jednadžbu iz prethodnog odjeljka (6S8.8):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial y(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y(u)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial y(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial y(u)}{\partial u} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{\partial y(u)}{\partial u} \right) = \pm v \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) = v^2 \frac{\partial^2 y(u)}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y(u)}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y(u)}{\partial u^2} \end{aligned} \quad (6S10.3)$$

Uvrstimo li konačne izraze iz jedn. 6S10.3 u 6S8.8, dobivamo:

$$\begin{aligned} \overbrace{v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}}^{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}} - \overbrace{\frac{T_{0x}}{\mu} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}}^{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}} &= 0 \Rightarrow \\ \left(v^2 - \frac{T_{0x}}{\mu} \right) \frac{\partial^2 y(u)}{\partial u^2} &= 0 \Rightarrow \\ \boxed{v^2 = \frac{T_{0x}}{\mu}}. \end{aligned} \quad (6S10.4)$$

Dakle, svaka će dvostruko derivabilna funkcija oblika $y(x, t) = f(x \pm vt)$ biti rješenje valne jednadžbe 6S8.8, uz konstantu v (dimenzije brzine) definiranu prema 6S10.4.

6S12 _____ [Fazna brzina, period i valna duljina]

Pogledajmo najprije što bi značila faza, te definirajmo **valnu duljinu i frekvenciju**.

U prethodnom odjeljku pokazano je da je *svaka* dvostruko derivabilna funkcija varijable $u(x, t) = x \pm vt$ valjano rješenje valne jednadžbe. Dakle, možemo kao rješenje tražiti i funkciju oblika $y(x, t) = A_0 \sin k(x - vt)$ ili $y(x, t) = A_0 \cos k(x - vt)$. Takva funkcija kao pretpostavljeno rješenje bit će razuman izbor ako je 'poremećaj' koji se širi medijem uzrokovan harmoničkim titranjem, npr. u ishodištu, zadanim kao

$$y_p(x = 0, t) = A_{0p} \cos \omega t.$$

U tom slučaju mora vrijediti da su oba izraza jednaki za $x = 0$, pa

$$A_0 \cos(-kvt) = A_{0p} \cos \omega t \Rightarrow \omega = kv, \quad (6S12.1)$$

dobivamo vezu između valnog vektora, k , kružne frekvencije ω i fazne brzine.

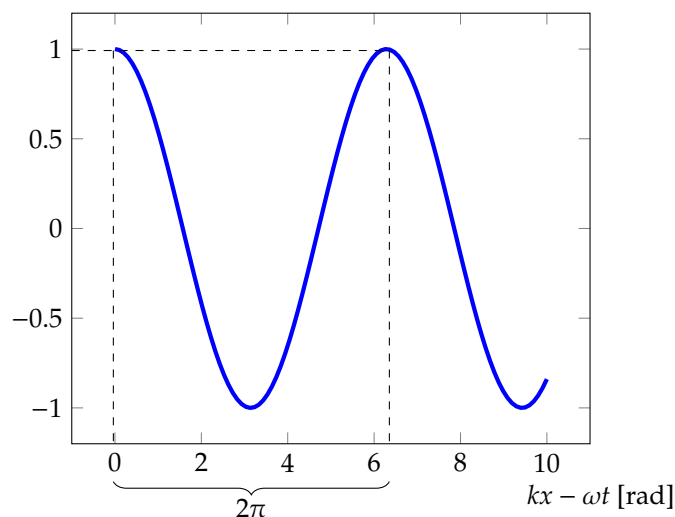
Značenje valnog vektora i kružne frekvencije razumjet ćemo ako promatramo dvije točke koje su u fazi za ovakvu periodičku funkciju dvije varijable (Slika 6S12.1).

- (a) Pogledajmo najprije osciliranje na nekom mjestu x . U dva trenutka za koja je argument kosinusa jednak, oscilacija će biti jednake faze do na 2π , tj.

$$\cos(kx - \omega t_1) = \cos(kx - \omega t_2) \Rightarrow kx - \omega t_1 + 2\pi = kx - \omega t_2 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1},$$

pa takvu razliku trenutaka definiramo kao **period**

$$\boxed{t_2 - t_1 \equiv T = \frac{2\pi}{\omega}}.$$



Slika 6S12.1

- (b) Sad promotrimo isti trenutak t , no oscilacije promatramo na dva položaja x za koja je argument kosinusa jednak. Oscilacije će biti jednake faze do na 2π , za

$$\cos(kx_1 - \omega t) = \cos(kx_2 - \omega t) \Rightarrow kx_1 - \omega t + 2\pi = kx_2 - \omega t \Rightarrow k(x_2 - x_1) = 2\pi,$$

i takvu razliku položaja definiramo kao **valnu duljinu**

$$x_2 - x_1 \equiv \lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Pomoću simulacije na phet.colorado.edu stranici, moguće je razumjeti pojam faze, pa i odrediti faznu brzinu. Podesite li gibanje na 'Oscillate' i postavite gumb 'Slow motion', te uključite 'Ruler' i 'Timer', možete odrediti koliko se ista faza vala udaljila u npr. jednom periodu. U istom trenutku upravo je moguće očitati duljinu koja odgovara valnoj duljini. Matematički zapisano, to će značiti da promatramo oscilatorno gibanje (ravni val) oblika

$$y(x, t) = A_0 \cos k(x - vt) = A_0 \cos(kx - \omega t), \quad (6S12.2)$$

u dva trenutka:

1. U $t = 0$ vrijedi da je faza $\phi = kx - \omega t$ jednaka 0, jer je $x = 0$ i $t = 0$.
2. U $t = T$ (ako smo uspjeli zaustaviti simulaciju u odgovarajućem trenutku, tj. nakon točno jednog perioda) vrijedit će da je $\phi = k\lambda - k v T$. Oba su člana jednaka 2π , jer (po definiciji valne duljine, odnosno perioda) opisuju periodičnost faze u širenju ravnog vala. Tako vidimo i da je

$$k(\lambda - vT) = k\lambda - k v T, \quad (6S12.3)$$

no kako je rečeno, svaki član je jednak 2π , pa

$$k v T = 2\pi \Rightarrow k v = \frac{2\pi}{T} = \omega \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}. \quad (6S12.4)$$

Fazna brzina definirana je kao brzina širenja iste faze. Dakle, vt je udaljenost za koju se val proširio za vrijeme t . Faza na nekom položaju x u trenutku t_2 odgovarat će fazi u ishodištu u nekom ranijem trenutku t_1 . To možemo pokazati promatrajući fazu u ishodištu u t_1

$$\phi_1 = -\omega t_1$$

i istu fazu na nekom položaju x u trenutku t_2

$$\phi_2 = kx - \omega t_2.$$

Budući da su faze iste, bit će

$$kx - \omega t_2 = -\omega t_1 \Rightarrow v = \frac{x}{t_2 - t_1},$$

dakle faza je iz ishodišta stigla na udaljenost x **faznom brzinom** v .

- (a) Brzinu možemo odrediti iz valne duljine i kružne frekvencije zadane u zadatku:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{3} \frac{\lambda}{2\pi} = 0,167 \text{ m/s}. \quad (6S15.1)$$

- (b) Za opći oblik oscilatornog rješenja smao uvrstimo sve poznate veličine u oblik

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = 0,05 \text{ m} \sin\left(\frac{2\pi}{3} \text{ rad}^{-1} t - 4\pi \text{ m}^{-1} x\right).$$

Valja primijetiti da smo uzeli *istu fazu* za naš pretpostavljeni oblik rješenja (sinusni izvor, i fazni član oblika $\omega t - kx$, a ne obratno).

- (c) Razliku visina dviju točaka na nekim položajima odredimo uvrštavajući zadane podatke u izraz za opći oblik rješen pod b). Tako se dobiva:

$$\left. \begin{aligned} y(x = 0,5 \text{ m}, t = 5 \text{ s}) &= 0,05 \text{ m} \sin\left(\frac{2\pi}{3} 5 - 4\pi \cdot 0,5\right) = -0,0433 \text{ m} \\ y(x = 0,75 \text{ m}, t = 5 \text{ s}) &= 0,05 \text{ m} \sin\left(\frac{2\pi}{3} 5 - 4\pi \cdot 0,75\right) = +0,0433 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta y = 0,0866 \text{ m}. \quad (6S15.2)$$

Brzina je

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega(\omega t - kx),$$

pa računamo brzine na dva položaja u trenutku $t = 5 \text{ s}$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(x = 0,5 \text{ m}, t = 5 \text{ s}) &= 0,05 \frac{2\pi}{3} \text{ m/s} \cos\left(\frac{2\pi}{3} 5 - 4\pi \cdot 0,5\right) = -0,0524 \text{ m/s} \\ \dot{y}(x = 0,75 \text{ m}, t = 5 \text{ s}) &= 0,05 \frac{2\pi}{3} \text{ m/s} \cos\left(\frac{2\pi}{3} 5 - 4\pi \cdot 0,75\right) = +0,0524 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta \dot{y} = 0,1048 \text{ m/s}. \quad (6S15.3)$$

Valja primijetiti da smo brzinu računali kao *derivaciju pomaka*. To je brzina neke čestice koja oscilira, a ne brzina vala, tj. fazna brzina koja je jednaka za cijeli homogeni medij po kojem se val giba. Važno je razumjeti ovu razliku, što je brzina čestica, a što brzina širenja vala!

Simulaciju ovog problema može se naći na [Repl.it-u](https://repl.it/u).

6b - Superpozicija valova. Prenesena energija.

Valna jednačba je linearna i homogena, pa je superpozicija pojedinih rješenja također valjano rješenje jednačbe. Možemo tako promatrati dva oscilatorna gibanja, istih ili različitih amplituda i frekvencija. Ovisno o odnosima amplituda, frekvencija i faza, može se promatrati nekoliko posebnih slučajeva u kojima ukupno rješenje ima različita svojstva.

$$y_u(x, t) = \underbrace{A_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t)}_{y_1} + \underbrace{A_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t + \phi)}_{y_2} \quad (6S16.1)$$

(Zbog jednostavnosti uključili smo u općeniti zapis samo relativnu fazu ϕ jednog titranja u odnosu na drugo.)

Na [simulaciji](#) na Geogebri možete vidjeti općenito kakve su sve pojave moguće kad se dva vala (zapravo dvije oscilacije) zbroje, ovisno o odnosu amplituda, frekvencija i faza. (Nije prikazan putujući val, nego vremenski oblik za neki određeni položaj, x .)

1. Pogledajmo najprije jednostavan slučaj: obje frekvencije, valne duljine i amplitude valova jednake, tj.

$$\begin{aligned}A_1 &= A_2 = A \\k_1 &= k_2 = k \\\omega_1 &= \omega_2 = \omega\end{aligned}$$

U toj situaciji, možemo koristiti

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

pa iz 6S16.1 dobivamo

$$y_k(x, t) = 2A \cos(kx - \omega t + \phi/2) \cos(-\phi/2). \quad (6S16.2)$$

Član $\cos(-\phi/2)$ ovisi samo o odnosu faza i neovisan je i o položaju i o vremenu. Dakle, ako je odnos faza takav da je taj član jednak 0 imamo **destruktivnu interferenciju**. To će biti kad je

$$\cos \frac{\phi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\phi}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = (2n + 1)\pi.$$

U slučaju pak ako je taj član jednak 1, odnosno kad je

$$\cos \frac{\phi}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\phi}{2} = (2n) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = 2n\pi,$$

imat ćemo **konstruktivnu interferenciju**.

Vidimo da su konstruktivna i destruktivna interferencija pojave koje se zbivaju kad su valovi istih frekvencija i amplituda, a amplituda rezultantnog vala može varirati između 0 i $2A$ (A su amplitude pojedinih valova u superpoziciji), ovisno o relativnom odnosu faza dvaju valova.

6S17 _____ [Modulacija amplitude i udari.]

2. Pogledajmo sad drugi poseban slučaj: frekvencije i valne duljine malo se razlikuju, a amplitude valova su jednake, tj.

$$\begin{aligned}A_1 &= A_2 = A \\k_1 &\approx k_2 = k \\\omega_1 &\approx \omega_2 = \omega\end{aligned}$$

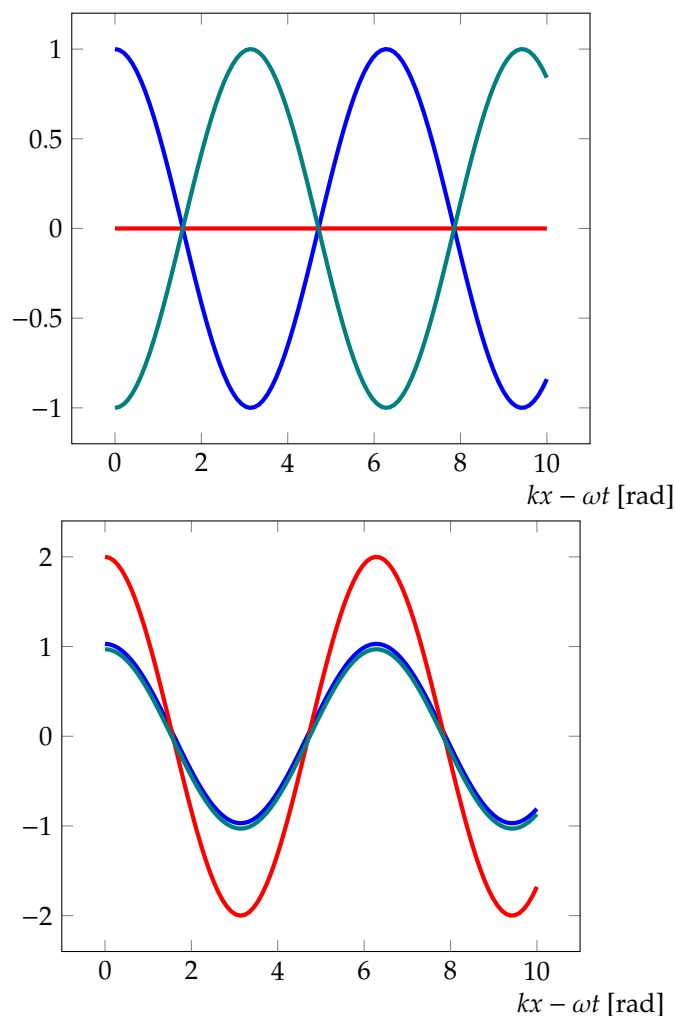
Pretpostavit ćemo također radi jednostavnosti da je fazni pomak između valova jednak 0, tj. $\phi = 0$ u jedn. 6S16.1. U toj situaciji, ponovno možemo koristiti isti trigonometrijski izraz pri superpoziciji

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

no sad iz 6S16.1 dobivamo

$$\begin{aligned}y_k(x, t) &= 2A \cos \left(\overbrace{\frac{k_1 + k_2}{2} x}^{\approx kx} - \overbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}^{\approx \omega t} \right) \cos \left(\overbrace{\frac{k_1 - k_2}{2} x}^{\approx \frac{\delta k}{2} x} - \overbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}^{\approx \frac{\delta \omega}{2} t} \right) \\&= \underbrace{2A \cos \left(\frac{\delta k}{2} x - \frac{\delta \omega}{2} t \right)}_{A(t)} \cos(kx - \omega t).\end{aligned} \quad (6S17.1)$$

Zapisali smo dakle u ovom slučaju ukupni, *rezultantni* val kao val koji se približno širi istom frekvencijom i valnom duljinom kao i dva vala koja ga sačinjavaju (odnosno, točnije, valna duljina i frekvencija su jednake srednjoj vrijednosti dvaju konstituirajućih valova), no *amplituda mu je modulirana*. Amplituda rezultantnog vala oscilira frekvencijom i valnom duljinom koja je određena *razlikom* frekvencija dvaju



Slika 6S16.1 : Destruktivna i konstruktivna interferencija; plavo i zeleno su prikazana dva vala y_1 i y_2 , a crveno je ukupno rješenje (njihova superpozicija).

konstituirajućih valova. U slučaju da su frekvencije i valne duljine valova u superpoziciji bliske, ta će frekvencija/valna duljina modulacije amplitude biti niska u odnosu na srednju frekvenciju, tj. vrijedit će:

$$\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = \omega_1 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \ll \omega_1 (\approx \omega). \quad (6S17.2)$$

Pojava **udara** koji su posljedica modulacije amplitude pri superpoziciji valova bliskih frekvencija je shematski prikazana na slici 6S17.1.

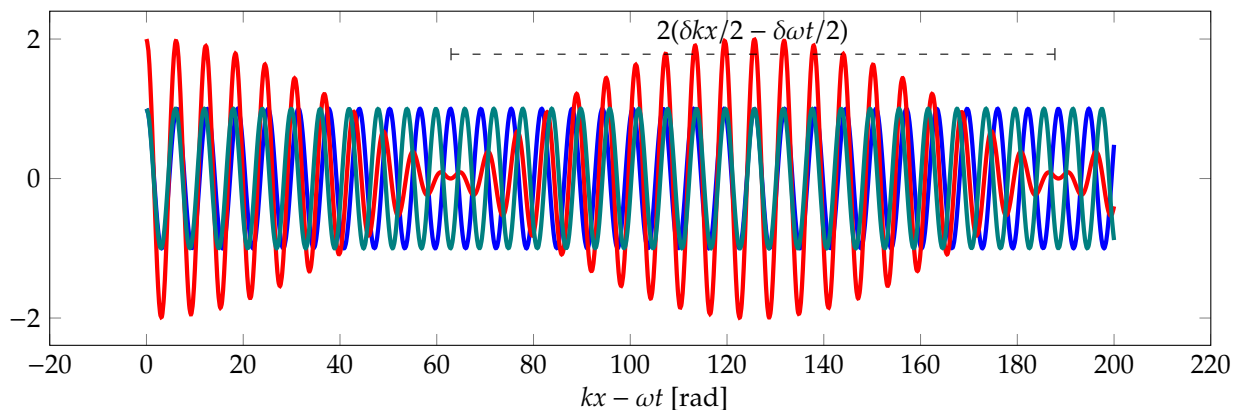
U ovom slučaju, kao i u prethodnom, amplituda također poprima vrijednosti između 0 i $2A$. No ovdje amplituda nije stalna, već *oscilira* frekvencijom $\delta\omega$ u vremenu i mijenja se u prostoru s iznosom valnog vektora jednakim δk .

6S19 _____ [Energija transverznog vala.]

Izvod za *energiju prenesenu transverzalnim valom* kakav ovdje uglavnom slijedimo opisan je i na [hyperphysics](#) stranicama.

Djelić energije koju sadrži djelić žice mase dm na nekom položaju opisanom odklonom ravnog vala iz ravnoteže

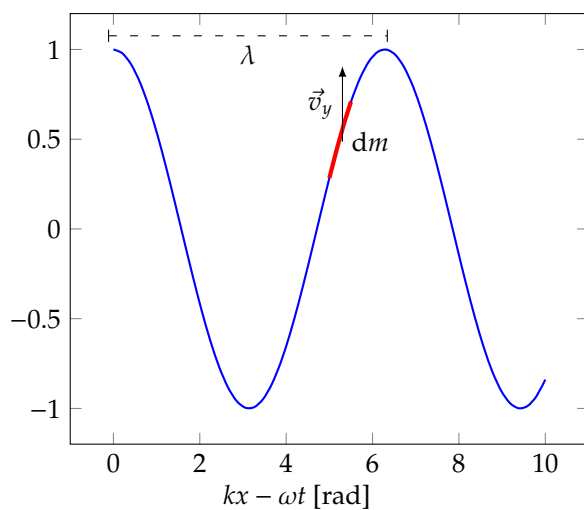
$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (6S19.1)$$



Slika 6S17.1 : Udari (modulacija amplitude); plavo i zeleno su prikazana dva vala y_1 i y_2 , a crveno je ukupno rješenje (njihova superpozicija). Ovdje je $\omega_2 = 1,05 \cdot \omega_1$

na udaljenosti x u trenutku t računamo iz zbroja ukupne kinetičke i potencijalne energije djelića

$$\begin{aligned} dE_K &= \frac{1}{2} v_y^2 dm = \frac{1}{2} \overbrace{\mu dx}^{=dm} A^2 \cos^2(\omega t - kx) \omega^2 \\ dE_P &= \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} y^2 \underbrace{\omega^2 dm}_{=k} = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\mu dx}_{=dm} A^2 \sin^2(\omega t - kx) \omega^2. \end{aligned} \quad (6S19.2)$$



Slika 6S19.1

Integriramo članove u 6S19.2 u području *jedne valne duljine*. Time ćemo izračunati pojedine doprinose energiji koju prenese val po duljini žice jednakoj valnoj duljini λ .

$$\begin{aligned}
dE_K^\lambda &= \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \int_0^\lambda dx \cos^2(\omega t - kx) = \\
& \quad (\text{uzmemo } t = 0) = \\
&= \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \int_0^\lambda dx \cos^2 kx = \\
& \quad \text{koristimo } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, d\theta = kdx \\
&= \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4k} \sin 2kx \right) \Big|_0^\lambda = \\
&= \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{4} A^2 \omega^2 \mu \lambda,
\end{aligned} \tag{6S19.3}$$

$$\begin{aligned}
dE_P^\lambda &= \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \int_0^\lambda dx \sin^2 kx = \\
& \quad \text{koristimo } \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, d\theta = kdx \\
&= \frac{1}{4} A^2 \omega^2 \mu \lambda.
\end{aligned} \tag{6S19.4}$$

U drugom, ponovljenom računu preskočili smo analogne korake, kakvi su provedeni za račun kinetičke energije.

Ukupna energija vala za jednu valnu duljinu može se izračunati ili kao suma konačnih izraza u jedn. 6S19.3 i 6S19.4 ili, još jednostavnije, sumirajući najprije izraze u 6S19.2, gdje dobivamo:

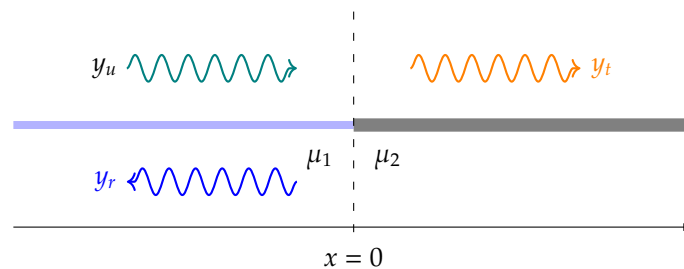
$$\begin{aligned}
dE^\lambda &= dE_P + dE_K = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu (\sin^2 kx + \cos^2 kx) dx \Rightarrow \\
E^\lambda &= \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \int_0^\lambda dx \\
&= \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \lambda.
\end{aligned} \tag{6S19.5}$$

Ukupnu energiju je dakle jednostavnije izračunati nego posebne doprinose, no važno je primijetiti da su kinetički i potencijalni doprinosi jednaki za energiju jedne valne duljine.

7a - Valovi na granici sredstava.

7S2 [Refleksija i transmisija na granici sredstava.]

Na granici dvaju sredstava mijenja se *fazna brzina* vala. To nije neočekivano, jer upravo taj izraz sadrži sve konstante kojima se opisuju posebna svojstva sustava u kojem se valna pojava promatra. Promatramo širenje vala na žici koja je sastavljena od dvije žice različitih linijskih gustoća μ_1 i μ_2 (Slika 7S2.1).



Slika 7S2.1

Žica je na svojim krajevima napeta nekom silom T_{0x} . Pomak u y -smjeru koji opisuje naš val na spoju dvije žice (tj. u $x = 0$) mora imati istu elongaciju (isti iznos), jer je žica kontinuirana. No, val mora u točki spoja biti

i gladak, tj. prva derivacija po x mora biti jednaka u točki spoja.¹⁰

Rezultantni val s *lijeve* strane spoja je superpozicija upadnog i reflektiranog vala i označimo ga s

$$y_1 = y_u + y_r.$$

S *desne* strane spoja rezultatni val jednak je samo transmitiranom valu, tj vrijedi

$$y_2 = y_t.$$

Valjano rješenje valne jednadžbe uz ovako definiran sustav mora dakle zadovoljiti *rubne uvjete*

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(x=0, t) &= y_2(x=0, t) \\ \left. \frac{\partial y_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial y_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \end{aligned}} \quad (7S2.1)$$

Jednadžbe 7S2.1 temelj su rješavanja ove posebne situacije. Kako bi ih primijenili, pišemo općeniti oblik ravnog (harmonijskog) vala za svako od valnih gibanja na slici 7S2.1, uzimajući u obzir smjer širenja (u pozitivnom/negativnom smjeru duž x -osi) te činjenicu da su valne duljine valova u različitom mediju različite. To je posljedica činjenice da frekvencije tih valova moraju biti jednake (jer točka u $x = 0$ titra frekvencijom kojom je potaknuta s *lijeve*, no ona istovremeno biva *izvor* titranja kojom se na titranje potiče medij na *desnoj* strani), pa imamo

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{T_{0x}}{\mu_{1,2}}} = \frac{\omega}{k_{1,2}} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}. \quad (7S2.2)$$

Uzevši sve to u obzir, naša pretpostavljena rješenja su

$$\begin{aligned} y_u(x, t) &= A_u \cos(k_1 x - \omega t) \\ y_r(x, t) &= A_r \cos(k_1 x + \omega t + \phi_r) \\ y_t(x, t) &= A_t \cos(k_2 x - \omega t + \phi_t), \end{aligned} \quad (7S2.3)$$

gdje su

$$k_{1,2} = \frac{2\pi}{\lambda_{1,2}}.$$

Također smo u rješenjima dozvolili mogućnost *faznog pomaka* transmitiranog i reflektiranog vala u odnosu na upadni val u točki promjene sredstva.

Ova rješenja, slično kao pri razmatranju prisilnog gušenog oscilatora (poglavlje 5a), lakše je rješavati prelaskom na kompleksni zapis. Tada jedn. 7S2.3 zapisujemo kao

$$\begin{aligned} y_u(x, t) &= A_u e^{i(k_1 x - \omega t)} \\ y_r(x, t) &= A_r e^{i(k_1 x + \omega t + \phi_r)} \\ y_t(x, t) &= A_t e^{i(k_2 x - \omega t + \phi_t)}. \end{aligned} \quad (7S2.4)$$

Izraze 7S2.4 uvrštavamo u 7S2.1 i želimo riješiti nepoznate veličine A_r, A_t, ϕ_r i ϕ_t , gdje pretpostavljamo da nam je amplituda upadnog vala poznata.

1. Iz uvjeta $y_1 = y_2$ dobivamo uz $x = 0$

$$y_u + y_r = y_t \Rightarrow A_u e^{-i\omega t} + A_r e^{i(\omega t + \phi_r)} = A_t e^{i(\omega t + \phi_t)} \quad (7S2.5)$$

što uspoređujemo s našim originalnim uvjetom:

$$A_u \cos(-\omega t) + A_r \cos(\omega t + \phi_r) = A_t \cos(\omega t + \phi_t)$$

no kako je

$$\operatorname{Re}(e^{-i\omega t}) = \cos \omega t = \operatorname{Re}(e^{i\omega t}),$$

možemo izlučiti $e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \boxed{A_u + A_r e^{i\phi_r} = A_t e^{i\phi_t}} \quad (\text{I}) \quad (7S2.6)$$

¹⁰ Ako to nije posve jasno, može se matematički dokazati, uspoređujući s izrazom 6S8.6, i uzimajući u obzir da razlika parcijalnih derivacija mora biti jednaka 0, jer je u *točki spoja* $\Delta x = 0$!

2. Iz uvjeta $\partial y_1(x, t)/\partial x|_{x=0} = \partial y_2(x, t)/\partial x|_{x=0}$ slijedi

$$y'_u + y'_r = y'_t \Rightarrow k_1 A_u e^{-i\omega t} + k_1 A_r e^{i(\omega t + \phi_r)} = k_2 A_t e^{i(\omega t + \phi_t)} \quad (7S2.7)$$

što uspoređujemo s našim originalnim uvjetom:

$$k_1 A_u \sin(-\omega t) + k_1 A_r \sin(\omega t + \phi_r) = k_2 A_t \sin(\omega t + \phi_t)$$

no kako je

$$\text{Im}(e^{-i\omega t}) = -i \sin \omega t = -\text{Im}(e^{i\omega t}),$$

možemo, uz promjenu predznaka gdje treba izlučiti $e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \boxed{k_1 A_u - k_1 A_r e^{i\phi_r} = k_2 A_t e^{i\phi_t}} \quad (\text{II}). \quad (7S2.8)$$

Jednadžbe 7S2.6 i 7S2.8 (ili, posebno označeni izrazi (I) i (II)) su dvije jednadžbe koje želimo riješiti po amplitudama, tj. izraziti A_r i A_t preko A_u .

Najprije izjednačimo njihove desne strane, odnosno:

$$(I) = (II)/k_2,$$

odakle

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{k_2} (A_u - A_r e^{i\phi_r}) &= A_u + A_r e^{i\phi_r} \Rightarrow \\ \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) A_u &= A_r e^{i\phi_r} \left(\frac{k_1}{k_2} + 1 \right) \Rightarrow \\ A_r e^{i\phi_r} &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_u. \end{aligned} \quad (7S2.9)$$

Vidimo da je lijeva strana zadnjeg izraza nalik onom što smo kod razmatranja prisilno tjeranog gušenog oscilatora zvali *kompleksna amplituda*. S desne je pak strane realni član, pa imaginarni dio $e^{i\phi_r}$ mora iščezavati. To je moguće samo kad je $\sin \phi_r = 0$, odnosno kad je $\phi_r = n\pi$. Ovdje vidimo da je predznak amplitude reflektiranog vala *pozitivan*, kad je

$$k_1 > k_2,$$

a negativan kad je

$$k_1 < k_2.$$

To zapravo znači da u tom slučaju imamo *pomak u fazi* za $\phi_r = \pi$, pa je

$$\text{Re}(e^{i\phi_r}) = \cos \pi = -1.$$

Potom iskoristimo jednostavnu transformaciju:

$$(I) \cdot k_1 + (II),$$

odakle

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} k_1 A_u + k_1 A_r e^{i\phi_r} &= A_t k_1 e^{i\phi_t} \\ k_1 A_u - k_1 A_r e^{i\phi_r} &= A_t k_2 e^{i\phi_t} \end{aligned} \right\} + \Rightarrow \\ 2k_1 A_u &= A_t e^{i\phi_t} (k_1 + k_2) \Rightarrow \\ A_t e^{i\phi_t} &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_u. \end{aligned} \quad (7S2.10)$$

Ponovno na lijevoj strani zadnjeg izraza imamo kompleksnu amplitudu, ovaj put za *transmitirani val*. S desne je strane opet realni član, pa imaginarni dio $e^{i\phi_t}$ mora iščezavati. To je opet moguće samo kad je $\sin \phi_r = 0$, odnosno kad je $\phi_r = n\pi$. Ovdje je predznak amplitude transmitiranog vala *uvijek pozitivan*, jer su $k_1 > 0$ i $k_2 > 0$. Transmitirani val dakle *nikad nema pomak u fazi*.

Koristeći izraz 7S2.2, moguće je konačne izraze za amplitude transmitiranog i reflektiranog vala (jedn. 7S2.9 i 7S2.10) pisati preko linijske gustoće dviju dijelova žice

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} A_u \\ A_t &= \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} A_u. \end{aligned} \quad (7S3.1)$$

Nadalje, ako izvedeni izraz za energiju jedne valne duljine 6S19.5 podijelimo s periodom, T , imat ćemo srednju snagu prenesenu na žicu u jednom periodu, odnosno snagu koju val prenosi medijem.

$$\langle P \rangle_T = \frac{E^\lambda}{T} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu v. \quad (7S3.2)$$

Definiramo sada *koeficijent refleksije* i *transmisije* kao omjer srednje snage reflektiranog i transmitiranog vala u odnosu na upadni:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_u \rangle} \\ T &= \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_u \rangle}. \end{aligned} \quad (7S3.3)$$

Uz nešto pažnje, jednostavno je pokazati da vrijedi

$$R + T = 1, \quad (7S3.4)$$

kao što bismo i očekivali iz ZOE.

Na kraju ovog općenitog razmatranja, pogledajmo još dva posebna slučaja, refleksiju na čvrstom i slobodnom kraju niti (transmisije na kraju niti nema). Slikovit prikaz ovih pojava možete naći na [ovoj simulaciji](#) u Geogebri.

1. Refleksija na čvrstom kraju

Ovdje vrijedi $\mu_2 \rightarrow \infty$, pa

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = -1 \Rightarrow A_r = -A_u. \quad (7S3.5)$$

Pa vidimo da kod refleksije na čvrstom kraju imamo *promjenu faze*. To je povezano s uvjetom da se upadni i reflektirani val *moraju zbrojiti u 0*, jer se točka na čvrstom kraju ne miče!

2. Refleksija na slobodnom kraju

Ovdje vrijedi $\mu_2 \rightarrow 0$, pa

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = 1 \Rightarrow A_r = A_u. \quad (7S3.6)$$

Pa kod refleksije na slobodnom kraju *nema promjene faze*. Primijetite da u toj situaciji rezultatni val (u točki prekida) ima dvostruku amplitudu!

Stojni val nastaje kad se dva vala jednake frekvencije i valne duljine gibaju u suprotnim smjerovima istim sredstvom.

Kao najjednostavniji primjer uzimamo žicu (1D) učvršćenu na oba kraja (već u 2D - komplicirani interferentni uzorci ovisno o rubnim uvjetima, Chladnijeve strukture - [YT video](#).)

Prema našem razmatranju u odjeljcima 7S2 i 7S3, rezultatni val pri refleksiji na čvrstom kraju bit će superpozicija

$$\begin{aligned} y_u(x, t) &= A_u \cos(k_1 x - \omega t) \\ y_r(x, t) &= -A_u \cos(k_1 x + \omega t). \end{aligned} \quad (7S4.1)$$

Prema već poznatom 'receptu', kad imamo superpoziciju oscilacija (pa i valova) istih amplituda, možemo koristiti trigonometrijski izraz kako bi sumu trigonometrijskih funkcija pretvorili u umnožak:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A_u \cos(kx - \omega t) - A_u \cos(kx + \omega t) \\ &= -2A_u \sin kx \sin(-\omega t) \\ &= 2A_u \sin kx \sin \omega t, \end{aligned} \quad (7S4.2)$$

gdje smo koristili

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ovaj izraz se naziva **stojnim valom** jer su ovisnosti o vremenu i prostoru *nezavisne*, odnosno, vremenska oscilacija ima prostorno moduliranu amplitudu. To znači da su *amplitude u svim točkama u prostoru stalne!* To se vidi iz zadnjeg izraza u 7S4.2 : član odgovoran za vremensku ovisnost oscilira amplitudom koja ima čvorove kad god funkcija

$$\sin kx = 0, \quad (7S4.3)$$

odnosno za

$$kx = n\pi \Rightarrow x_n = n \frac{\lambda}{2}. \quad (7S4.4)$$

7S5 _____ [Stojni val i separacija varijabli u valnoj jednačbi.]

Separacija varijabli uobičajen je postupak kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Tražimo oblik rješenja u kojima su vremenska i prostorna ovisnost u valnoj jednačbi separirane. Uvrštavamo pretpostavljeni oblik

$$y(x, t) = A(x)B(t) \quad (7S5.1)$$

($A(x)$ i $B(t)$ su funkcije samo koordinate, odnosno vremena) u valnu jednačbu

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (7S5.2)$$

Slijedi

$$A(x) \frac{d^2 B(t)}{dt^2} - v^2 B(t) \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = 0 \Bigg/ \cdot \frac{1}{v^2 A(x) B(t)} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{v^2 B(t)} \frac{d^2 B(t)}{dt^2}}_{\text{ovisi samo o } t} = \underbrace{\frac{1}{A(x)} \frac{d^2 A(x)}{dx^2}}_{\text{ovisi samo o } x}. \quad (7S5.3)$$

Budući da su u 7S5.3 oba člana ovisna samo o jednoj varijabli, a međusobno su jednaki, to je moguće jedino ako je *svaki od njih konstantan*. Tu zajedničku konstantu kojoj su članovi jednaki nazovemo $-k^2$, a zašto smo tako izabrali bit će odmah jasno:

$$\frac{1}{v^2 B(t)} \frac{d^2 B(t)}{dt^2} = -k^2 = \frac{1}{A(x)} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} + k^2 A(x) = 0 \Rightarrow A(x) = A_0 \cos(kx + \phi_x) \\ \frac{d^2 B(t)}{dt^2} + \underbrace{k^2 v^2}_{=\omega^2} B(t) = 0 \Rightarrow B(t) = B_0 \cos(\omega t + \phi_t) \end{cases} \quad (7S5.4)$$

Dobili smo dakle jednačbe jednostavnog harmoničkog oscilatora za obje komponente, čija rješenja su nam poznata. Ukupno rješenje je, prema 7S5.1

$$y(x, t) = A_0 B_0 \cos(kx + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_t), \quad (7S5.5)$$

tj. upravo *oblika stojnog vala* (jedn. 7S4.2)! Stojni valovi su dakle rješenja valne jednačbe u kojima je separirana ovisnost o vremenu i prostornoj koordinati.

7b - Zvuk, ultrazvuk, Dopplerova pojava

7S12 _____ [Decibel.]

Decibel [dB] je fizikalna jedinica za **jakost zvuka** definirana na *logaritamskoj skali*.

Jakost zvuka je intenzitet longitudinalnog zvučnog vala i mjeri se dakle u $[W/m^2]$.

Najmanja jakost zvuka koja nam je zbog ograničenja ljudskih osjetila važna (*prag čujnosti*) jednaka je

$$I_0 = 10^{-12} W/m^2.$$

Najveća jakost zvuka je reda $10 W/m^2$.

Zbog ovog velikog raspona, za praktičnije uspoređivanje koristi se jedinica decibel, definirana kao:

$$L[\text{dB}] = 10 \log \frac{I}{I_0}, \quad (7S12.1)$$

gdje je I_0 gore navedena vrijednost za prag čujnosti.

Veličina koja se mjeri decibelima naziva se **razina jakosti zvuka**, L .

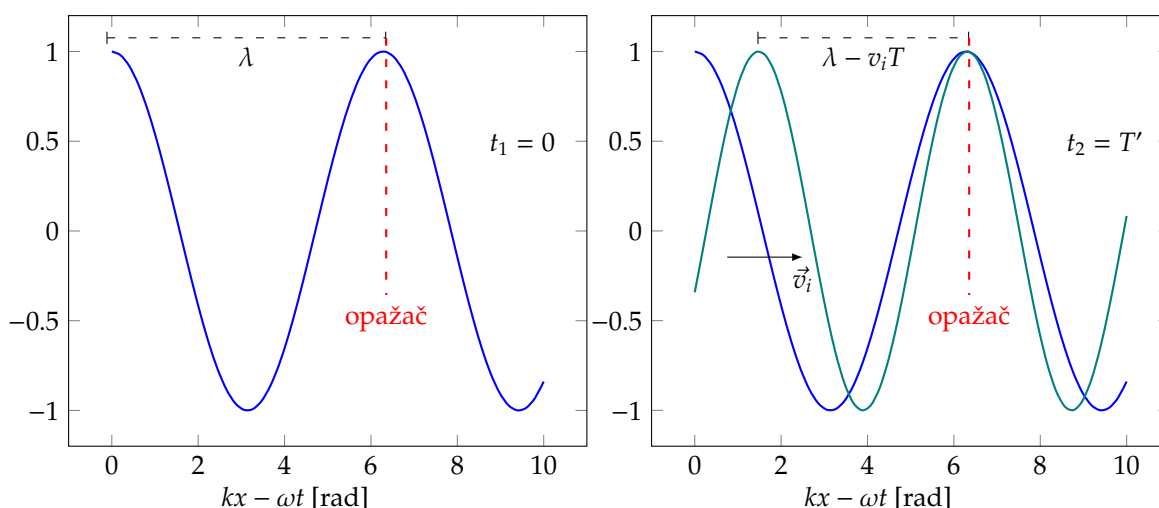
Izračunajmo kao primjer kojem intenzitetu (mjeri se u W/m^2) odgovara granica boli koja iznosi oko 120 dB:

$$\begin{aligned} L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 120 \text{ dB} &\Rightarrow \log \frac{I}{I_0} = 12 \stackrel{10^x}{\Rightarrow} \\ \frac{I}{I_0} = 10^{12} &\Rightarrow I = I_0 10^{12} = 1 \text{ W/m}^2. \end{aligned} \quad (7S12.2)$$

Dakle sad bolje razumijemo što znače deklaracije o razini jakosti zvuka (buke) na hladnjaku (40 dB), usisavaču (79 dB), motornoj pili (102 dB)...

7S16 [Dopplerova pojava.]

Za one koji čitaju stripove 'fiju' je standardni izraz proljetanja (nečega) pored opažača. U toj onomatopeji krije se i nešto fizike: samoglasnik 'i' izgovara se standardno *višom* frekvencijom nego 'u'. To dakle najprije opisuje trenutak prilaska objekta (viša frekvencija), a potom prolazak i udaljavanje objekta (niža frekvencija) od promatrača. Postoji fizikalno objašnjenje ove pojave i zove se Dopplerov efekt (ili pojava).



Slika 7S16.1: Izvor se giba prema opažaču.

Promatramo situaciju kada se izvor (u gornjem primjeru zvučnih, no nije nužno) valova giba relativno u odnosu na opažača. Razlikovat ćemo dvije situacije prikazane na slikama 7S16.1 i 7S16.2 i simulirane u jednostavnim Python-appletima:

1. Izvor se giba, a opažač stoji.

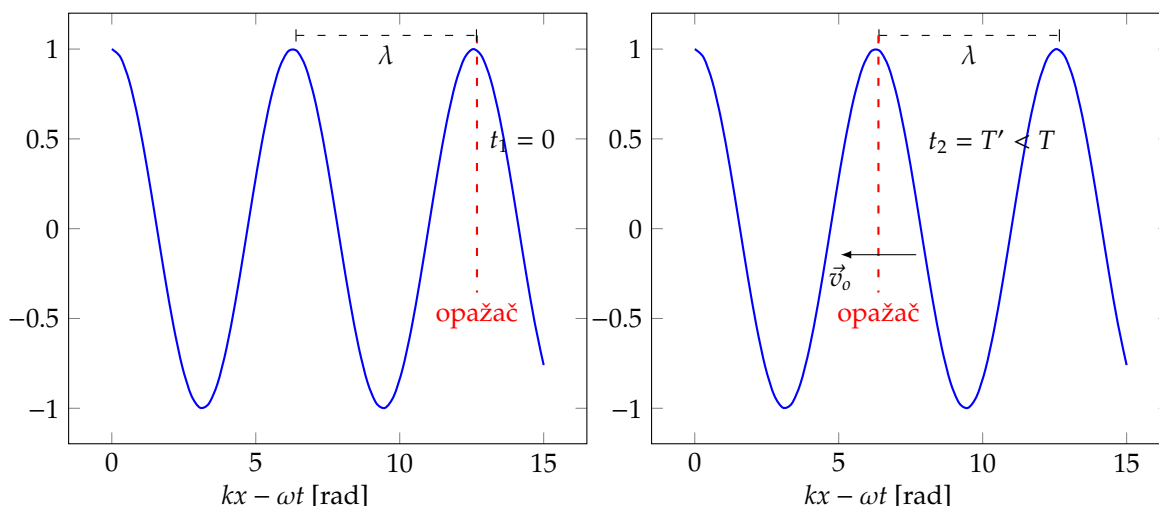
U ovoj situaciji, brzina nailaska pojedine faze vala od izvora (npr. maksimuma vala, kao u [simulaciji pokretnog izvora](#)) bit će jednaka poznatoj faznoj brzini vala, jer se medij kojim se val širi u odnosu na opažača ne giba. Međutim, opažač će čuti različitu frekvenciju u odnosu na onu u situaciji mirovanja, jer se *valna duljina* (a time i frekvencija) koju opažač čuje promijenila - val u ovoj situaciji kao da ima valnu duljinu skraćenu za

$$\lambda' = \lambda - v_i T, \quad (7S16.1)$$

gdje smo s λ označili valnu duljinu vala u slučaju mirovanja izvora, λ' valnu duljinu vala koju čuje opažač, v_i brzinu izvora, a T period vala.

Motivirani pristupom u simulaciji, možemo promatrati kako se mijenja vrijeme između nailaska dva maksimuma za opažača. To vrijeme (označimo ga s T') bit će koliko je valu fazne brzine v potrebno da prevali skraćenu valnu duljinu λ' :

$$T' = \frac{\lambda - v_i T}{v} = T \frac{v - v_i}{v}. \quad (7S16.2)$$



Slika 7S16.2: Opažalac se giba prema izvoru.

Analogno, mogli smo promatrati uvjet da je *fazna brzina stalna, kad nema relativne brzine između opažača i medija*, tj.

$$\lambda' f' = \lambda f = v \Rightarrow f' = f \frac{\lambda}{\lambda'} . \quad (7S16.3)$$

U oba slučaja, lako dobivamo konačni izraz za *promjenu frekvencije kod približavanja izvora opažaču*

$$f' = f \frac{v}{v - v_i} . \quad (7S16.4)$$

U slučaju udaljavanja, morali bismo *promijeniti predznak brzine izvora*:

$$f' = f \frac{v}{v + v_i} , \quad (7S16.5)$$

što opisuje *niže frekvencije* pri udaljavanju.

2. Izvor miruje, a opažalac se giba prema izvoru.

U ovoj situaciji, brzina nailaska pojedine faze vala (npr. maksimuma vala, kao u [simulaciji pokretnog opažača](#)) bit će povećana u odnosu na faznu brzinu vala, jer *gibanje opažača možemo smatrati kao gibanje medija kojim se val širi u odnosu na izvor*. Opažalac će dakle čuti različitu frekvenciju u odnosu na onu u situaciji mirovanja, jer se fazna brzina (a time i učestalost nailaska iste faze) povećala. Valna duljina se, pak ovdje nije promijenila, pa vrijedi

$$v' = v + v_o , \quad (7S16.6)$$

i vrijeme za nailazak iste faze je

$$T' = \frac{\lambda}{v'} = \frac{vT}{v + v_o} , \quad (7S16.7)$$

odakle su frekvencije povezane kao

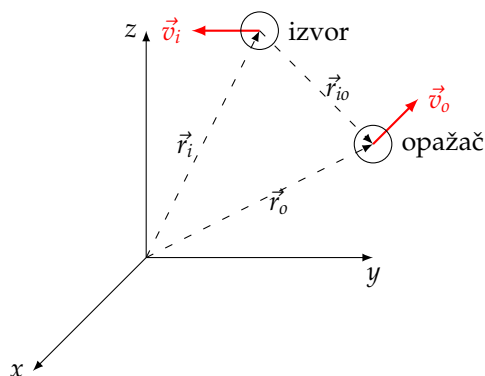
$$f' = f \frac{v + v_o}{v} . \quad (7S16.8)$$

Ponovno, kao i u slučaju 1., ovo vrijedi za *približavanje opažača izvoru*. U slučaju udaljavanja, imat ćemo isti izraz, samo promijenjenog predznaka brzine opažača:

$$f' = f \frac{v - v_o}{v} . \quad (7S16.9)$$

Oba uvjeta (utjecaj približavanja/ udaljavanja izvora i opažača) razmatrana u prethodnom odjeljku mogu se sažeti u općenitiji izraz koji uključuje i situacije u kojima brzine nisu isključivo usmjerene duž spojnice izvor-opažač. U tom slučaju brzina koja utječe na promjenu frekvencije koja se na prijemniku opaža je projekcija brzine na vektor usmjeren duž spojnice izvora i prijemnika \hat{r}_{io} . Sažeto se to opisuje izrazom 7S17.1.

$$f' = f \frac{v - \hat{r}_{io} \vec{v}_o}{v - \hat{r}_{oi} \vec{v}_i} \quad (7S17.1)$$



Slika 7S17.1

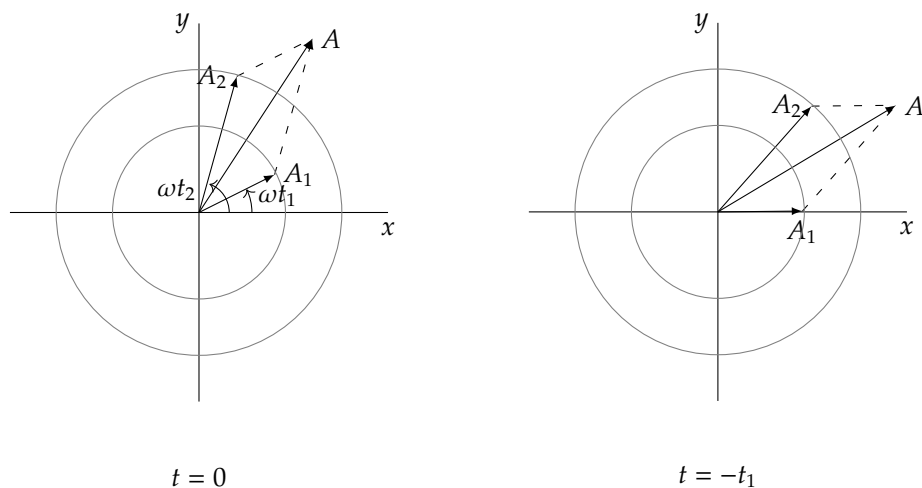
Želimo pisati superpoziciju dviju oscilacija *iste* frekvencije, ali različitih amplituda i faza kao jedinstveno oscilatorno rješenje

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \omega(t + t_1) \\ x_2 &= A_2 \cos \omega(t + t_2) \end{aligned} \right\} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (7S19.1)$$

uz $t_1 = 1/6$ s, $t_2 = 1/2$ s, $\omega = \pi$ rad/s, $A_1 = 1$ cm, $A_2 = 3A_1$.

Rješenje se može naći na dva načina:

I) Preko fazora.



Slika 7S19.1

Sa slike 7S19.1 vidimo da za račun rezultantnog vektora (fazora) amplitude A možemo odabrati trenutak u kojem je faza jednog od fazora jednaka 0! Tako izabrana situacija dodatno pojednostavljuje račun jer ne trebamo računati fazni pomak fazora x_1 , te on nema y -komponentu. Imamo

$$t = -1/6s \Rightarrow \begin{cases} x_1 = A_1, \\ x_2 = A_2 \cos \omega(-1/6 + 1/2), \\ y_2 = A_2 \sin \omega(-1/6 + 1/2), \end{cases} \quad (7S19.2)$$

$$\begin{cases} A_x = x_1 + x_2 \\ A_y = y_2 \end{cases} \Rightarrow A^2 = A_x^2 + A_y^2, \tan(\omega(-1/6s) + \phi) = \frac{A_y}{A_x}$$

gdje smo s $A_{x,y}$ označili komponente (projekcije na osi) rezultantnog fazora $x(t)$. $A_{x,y}$ dobijemo iz zbroja projekcija na x -os:

$$\begin{aligned} x_2 &= A_2 \cos \omega(-1/6 + 1/2) = 0,5A_2 = 1,5A_1 \Rightarrow A_x = 2,5\text{cm} \\ y_2 &= A_2 \sin \omega(-1/6 + 1/2) = 2,598\text{cm} \Rightarrow A_y = 2,598\text{cm} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x_2 \\ y_2 \end{aligned}} \right\} A = 3,60\text{cm}. \quad (7S19.3)$$

Sad još odredimo fazu kao

$$\tan(\underbrace{\omega(-1/6s) + \phi}_{\theta=0,80}) = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \phi = \theta + \omega(1/6s) \Rightarrow \phi = 1,33\text{rad}. \quad (7S19.4)$$

Iz 7S19.3 i 7S19.4 slijedi konačno:

$$x(t) = 3,60\text{cm} \cos(\pi t + 1,33\text{rad}). \quad (7S19.5)$$

II) Prelaskom u kompleksni zapis.

U kompleksnom zapisu pišemo oscilacije kao:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{i\omega(t+t_1)} \\ x_2 = A_2 e^{i\omega(t+t_2)} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = e^{i\omega t} (A_1 e^{i\omega t_1} + A_2 e^{i\omega t_2}) = e^{i\omega t} A_1 (e^{i\omega t_1} + 3e^{i\omega t_2}). \quad (7S19.6)$$

Nadalje

$$A e^{i(\omega t + \phi)} = e^{i\omega t} A_1 (e^{i\omega t_1} + 3e^{i\omega t_2}). \quad (7S19.7)$$

Iz jedn. 7S19.7 faktoriziramo zajedničku oscilaciju, član $e^{i\omega t}$, pa imamo

$$A e^{i\phi} = A_1 (e^{i\omega t_1} + 3e^{i\omega t_2}), \quad (7S19.8)$$

što rješavamo kao jednadžbu za kompleksni broj kojem želimo odrediti iznos i fazu. Odredimo realni i imaginarni dio desne strane, pa dobivamo:

$$\begin{aligned} \text{Re}[A_1 (e^{i\omega t_1} + 3e^{i\omega t_2})] &= A_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{Im}[A_1 (e^{i\omega t_1} + 3e^{i\omega t_2})] &= A_1 \frac{7}{2} \end{aligned} \quad (7S19.9)$$

Sada je:

$$\begin{aligned} A^2 &= \text{Re}^2 + \text{Im}^2 \Rightarrow A = 3,60\text{cm}, \\ \tan \phi &= \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = 1,328\text{rad}. \end{aligned} \quad (7S19.10)$$

7S22 _____ [Primjer: stojni valovi (Zadatak, MI 2015).]

Osnovni mod titranja napete žice ima valnu duljinu $\lambda = 2L$, pa je frekvencija

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

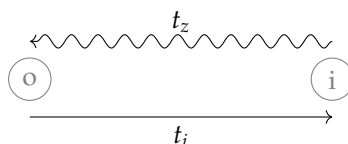
Napetost i duljina promijenile su se kao:

$$\begin{aligned} T_1 &= T + 0,7T = 1,7T \\ L_1 &= L - 0,35L = 0,65L \end{aligned} \quad (7S22.1)$$

pa je omjer frekvencija

$$\frac{f_1}{f} = \frac{2L}{2 \cdot 0,65L} \sqrt{\frac{1,7T}{T}} = 2. \quad (7S22.2)$$

7S26 _____ [Primjer: Dopplerova pojava (Zadatak, MI 2012).]



Slika 7S26.1

Na slici 7S26.1 prikazana je situacija opisana u zadatku: vrijeme koje se izvor udaljavao je t_i , a vrijeme koje je trebalo zvuku da doputuje od izvora do opažača je t_z . Važno je za ispravno razumjevanje zadatka primijetiti da je vrijeme u kojem želimo odrediti frekvenciju koju čuje opažač (zadano je $t = 20$ s) jednako *ukupno* vremenu koje je potrebno da se izvor udalji od opažača i da zvuk stigne od izvora do opažača. Dakle, brzinu s kojom se izvor kretao ne možemo odrediti jednostavno uvrštavajući u $v = at$ ovaj zadani podatak, već vrijeme udaljavanja trebamo odrediti iz

$$20s = t_z + t_i \Rightarrow t_i = 20s - t_z, \quad (7S26.1)$$

Drugu jednadžbu možemo dobiti uzimajući u obzir da je *put* koji je prevalio zvuk (konstantnom brzinom v_z) u vremenu t_z jednak putu koji je (ubrzanim gibanjem, zadanom akceleracijom a) prevalio izvor u vremenu t_i :

$$v_z t_z = s = \frac{a}{2} t_i^2. \quad (7S26.2)$$

Sad imamo dvije jednadžbe te uvrštavanjem 7S26.1 u 7S26.2 dobivamo kvadratnu jednadžbu za vrijeme t_i :

$$\begin{aligned} v_z(20s - t_i) &= \frac{a}{2} t_i^2 \Rightarrow \\ \frac{a}{2} t_i^2 + v_z t_i - 20s v_z &= 0 \Rightarrow \\ t_{i1,2} &= \frac{-v_z \pm \sqrt{v_z^2 + 4av_z \cdot 20s}}{a} \\ &= \frac{-340 \pm 428}{5} s = 17,7s. \end{aligned} \quad (7S26.3)$$

To uvrštavanjem u

$$v_i(t) = a \cdot t_i$$

vodi na:

$$v(t_i) = 5 \cdot 17,7 \text{ m/s} = 88 \text{ m/s}. \quad (7S26.4)$$

i napokon uvrstimo tu brzinu u izraz za promjenu frekvencije pri Dopplerovoj pojavi za *udaljavanje* izvora:

$$f' = \frac{v_z}{v_z + v_i} f = 2697,9 \text{ Hz}. \quad (7S26.5)$$

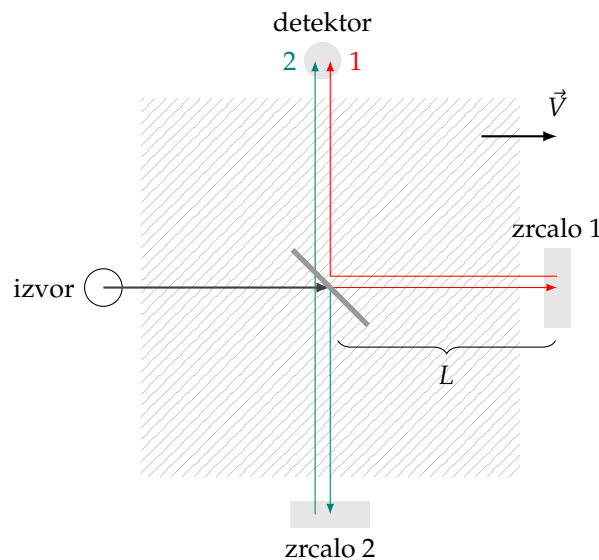
8a - STR: Lorentzove transformacije, uvod i izvod.

8S6

[Pokus Michelsona i Morleya.]

Ono što je potaklo da se poznati eksperiment Michelsona i Morleya osmisli i izvede nije izravno povezano s posebnom (specijalnom) teorijom relativnosti (STR). Htjelo se naime vidjeti širi li se svjetlost kroz neku vrst medija ("eter"), što je u to doba bilo nužno kako bi potvrdili da je svjetlost valne prirode. Pretpostavka za pokus je da, ukoliko postoji medij kroz koji se svjetlost širi, tada se Zemlja kroz stacionarni medij giba nekom stalnom brzinom. Prema tada jedino korištenim Galileijevim transformacijama, brzina svjetlosti bi se u tom slučaju zbrajala ili oduzimala s brzinom gibanja Zemlje, u smjeru širenja, no ne bi utjecala na brzinu širenja svjetlosti u smjeru *okomitom* na gibanje Zemlje. Pretpostavilo se također da je brzina svjetlosti puno veća od brzine Zemlje, pa se pokus osmislio pomoću *interferometra*, maštovitog načina kojim se mali pomaci (tj. vremena dolaska vala) odražavaju u *različitoj interferentnoj slici*, ovisno o fazama dvaju valova. Faze vala na zastoru su naime ovisne o razlici optičkih puteva, odnosno kašnjenju jednog vala u odnosu na drugi, ukoliko su oba vala početno titrali u fazi.

Na slici 8S6.1 prikazana je skica pokusa, dok su na slici 8S6.2 prikazane situacije koje prikazuju put koji svaka zraka svjetlosti prijeđe u slučaju paralelnog postavljanja uređaja u odnosu na smjer gibanja Zemlje.



Slika 8S6.1

Radi jednostavnosti uzmimo da su sve udaljenosti od izvora do polupropusnog zrcala u sredini, do zrcala 1 i 2 te do detektora jednake i iznose L . S \vec{V} označena je brzina kojom površina Zemlje prolazi kroz pretpostavljeni eter. Zrake 1 i 2 kako vidimo na slici 8S6.2 koje su istovremeno krenule iz izvora na zrcalo bi stigle u trenutcima t_1 odnosno t_2 jednakim

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{s}{c} + \frac{L}{c+V} + \frac{L}{c-V} \\ t_2 &= \frac{3s}{c}. \end{aligned} \quad (8S6.1)$$

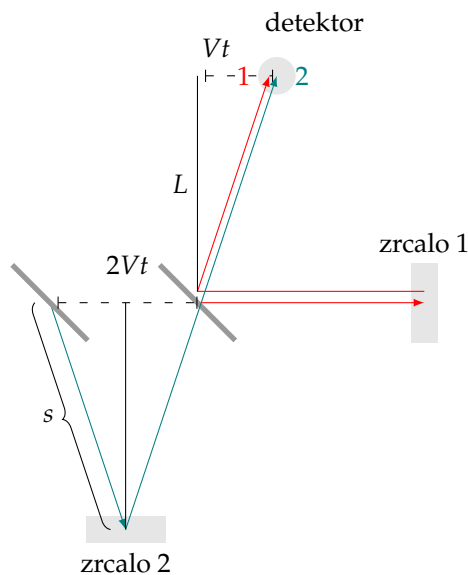
gdje je s označena brzina svjetlosti.

Put koji u vremenu t prijeđe Zemlja jednak je Vt , no za isto vrijeme, svjetlost prijeđe put $s = ct$, a prema pravokutnom trokutu sa slike, te su veličine povezane s duljinom L kao

$$s = \sqrt{L^2 + V^2 t^2}$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{L^2 + V^2 t^2}{c^2} \Rightarrow L^2 = c^2 - v^2 t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{L^2}{c^2 - V^2} \Rightarrow \\ s &= \sqrt{L^2 + V^2 \frac{L^2}{c^2 - V^2}} = L \frac{1}{1 - V^2/c^2}. \end{aligned} \quad (8S6.2)$$



Slika 8S6.2

Uvrštavajući ovaj izraz za s u 8S6.1, može se izračunati *razlika u fazi*, odnosno razlika u vremenu dolaska dvije zrake na detektor

$$t_1 - t_2 = \frac{s}{c} + \frac{L}{c+V} + \frac{L}{c-V} - \frac{3s}{c} = \frac{2Lc}{c^2 - V^2} - \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8S6.3)$$

Korijen u nazivniku u zadnjem izrazu u slučaju da je brzina svjetlosti puno veća od brzine sustava, $V \ll c$ može se približno pisati kao

$$\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}.$$

Jednako tako, može se i prvi član pisati u tom slučaju kao

$$\frac{2Lc}{c^2 - V^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - V^2/c^2} \approx \frac{2L}{c} (1 + V^2/c^2),$$

pa uvrštavanjem u 8S6.3 slijedi

$$t_1 - t_2 = \Delta t_{12} \approx \frac{2L}{c} (1 + V^2/c^2) - \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{LV^2}{c^3}. \quad (8S6.4)$$

Vidimo dakle da je moguće provjeriti prema interferentnom uzorku kako brzina gibanja sustava (Zemlje u odnosu na "eter") utječe na brzinu širenja svjetlosti. Eksperiment nije pokazao da postoji razlika u širenju u dva smjera, što je bilo poticaj da se odbaci zamisao širenja svjetlosti kroz eter i potaklo razvoj posebne teorije relativnosti.

[8S7] _____ [Lorenzove transformacije - opći izvod.]

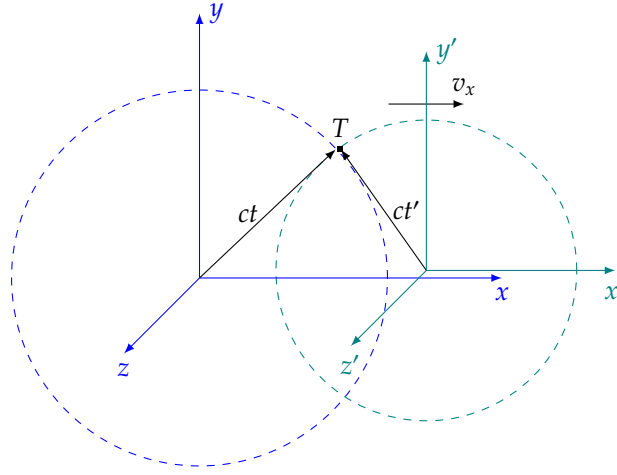
Lorenzove transformacije izvedene su iz nekoliko temeljnih principa za koje pretpostavljamo da univerzalno vrijede. Na slici 8S7.1 prikazana je osnovna 'motivacija': spoznaja da se **brzina svjetlosti širi istom brzinom u svim sustavima**. To znači da za brzinu svjetlosti (a prema tome i općenito) više neće vrijediti jednostavno zbrajanje brzina kakvim smo se koristili u Galilejevim transformacijama između sustava koji se relativno jedan u odnosu na drugog gibaju stalnim brzinama. Kako bi se 'pomirilo' zahtjev da je fizikalno opažanje *neovisno* o izboru sustava koji se jedan u odnosu na drugog gibaju stalnom brzinom s činjenicom da je brzina svjetlosti *ista* u svim takvi sustavima, razvijene su *Lorenzove transformacije koordinata i vremena* između takvih (inercijalnih) sustava.

Na slici je vidljiv opis problema: u ishodištu sustava S (necrtane koordinate, plavo) u trenutku $t = 0$ odaslan je svjetlosni signal. Gledajući iz tog, mirujućeg sustava, svjetlosni val se do trenutka t proširio do točke T na udaljenosti ct . No, opisujući iz drugog sustava S' (označen *crtanim* koordinatama, zeleno) koji se relativno u

odnosu na S giba brzinom v_x duž osi x čija su se ishodišta u $t = 0$ poklapala, jednako kao i u osnovnom sustavu, položaj do kojeg se svjetlosni val proširio mora biti opisan istim izrazom

$$s' = ct'.$$

No, kako je brzina svjetlosti c neovisna o gibanju sustava, jasno je da će to biti moguće jedino ako se *duljina* i *vrijeme* koje se u svakom sustavu mjeri transformira na poseban način.



Slika 8S7.1

Najprije tvrdimo da, budući da je brzina u x -smjeru, u preostalim smjerovima transformacija koordinata je trivijalna:

$$\begin{aligned} y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \quad (8S7.1)$$

Također postavljamo *početne uvjete* tj. da su se ishodišta poklapala u $t = 0$, te da smo vrijeme počeli mjeriti jednako u ishodištu oba sustava, tj. $t = 0 = t'$:

$$\begin{aligned} x'(t' = 0) &= 0 = x(t = 0) \\ t'(x' = 0) &= 0 = t(x = 0) \end{aligned} \quad (8S7.2)$$

Fizikalno također zahtijevamo *homogenost* i *izotropnost* prostora i vremena, odnosno, da transformacije tih veličina moraju biti *linearne*:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt \\ t' = Dx + Et \end{cases} \quad (8S7.3)$$

te *inercijalnost*, tj. da se ishodišta *dva*ju sustava gibaju konstantnom brzinom jedno u odnosu na drugo:

$$\begin{aligned} x' = 0 &\Rightarrow x(t) = v_x t \\ x = 0 &\Rightarrow x'(t') = -v_x t' \end{aligned} \quad (8S7.4)$$

Naposljetku, koristit ćemo i činjenicu da val emitiran iz središta mora jednako biti detektiran u točki T (Slika 8S7.1) u oba sustava, S i S' , što se matematički može zapisati kao

$$\begin{cases} c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{cases} \quad (8S7.5)$$

(Ovo je zapravo matematička formulacija 1. postulata STR.)

I)

Prvo koristimo fizikalni uvjet homogenosti i izotropnosti u kombinaciji sa zahtjevom inercijalnosti. Uvrštavajući uvjet inercijalnosti u jedn. 8S7.3 slijedi

$$\begin{aligned} x' = Ax + Bt = 0 &\Rightarrow Av_x t + Bt = 0 \Rightarrow B = -Av_x \Rightarrow \\ x' &= A(x - v_x t). \end{aligned} \quad (8S7.6)$$

II)

Iz 8S7.3 izvedemo *inverzne transformacije*:

$$\left. \begin{aligned} x' &= Ax + Bt \Big| \cdot E \Rightarrow Ex' = AEx + BEt \\ t' &= Dx + Et \Big| \cdot B \Rightarrow Bt' = DBx + BEt. \end{aligned} \right\} (-) \Rightarrow (AE - DB)x = Ex' - Bt' \quad (8S7.7)$$

Koristeći sada izraz koji vrijedi za ishodište $x = 0$ sustava S , imamo

$$\begin{aligned} x = 0 &= Ex' - Bt' = -Ev_x t' - Bt' \Rightarrow -Ev_x = B \\ \text{usporedbom s jedn. 8S7.6 } B &= -Av_x \Rightarrow E = A \\ \text{uvrštavanjem u 8S7.3 } t' &= A\left(t - \frac{D}{A}x\right). \end{aligned} \quad (8S7.8)$$

III)

Nakraju sve navedeno uvrštavamo u oba izraza u matematičkoj formulaciji 1. postulata STR (8S7.5):

$$\begin{aligned} c^2 t^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ c^2 t'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \Rightarrow c^2 A^2 \left(\frac{D^2}{A^2} x^2 - 2 \frac{D}{A} xt + t^2 \right) = A^2 (x^2 - 2v_x xt + v_x^2 t^2) + y^2 + z^2 \Big\} (-) \Rightarrow \\ [A^2(c^2 - v_x^2) - c^2]t^2 &- [1 - A^2 + c^2 D^2]x^2 + \left(-c^2 \frac{D}{A} + 2v_x A^2\right)xt = 0 \end{aligned} \quad (8S7.9)$$

kako bi ovo bilo zadovoljeno za svaki izbor koordinata i vremena,

članovi uz iste potencije koordinata i vremena moraju iščezavati, pa mora biti :

$$\begin{aligned} A^2(c^2 - v_x^2) - c^2 &= 0 \Rightarrow A^2 = \frac{c^2}{c^2 - v_x^2} = \frac{1}{1 - v_x^2/c^2} \\ c^2 \frac{D}{A} &= 2v_x A^2 \Rightarrow D = \frac{v_x}{c^2} A = \frac{v_x/c^2}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}. \end{aligned}$$

U jedn. 8S7.6-8S7.9 našli smo rješenja za sve koeficijente, pa naposljetku možemo sve uvrstiti i dobiti **Lorentzove transformacije**:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \\ t' &= \frac{t - v_x x/c^2}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned}} \quad (8S7.10)$$

Redovito se koriste pokrate:

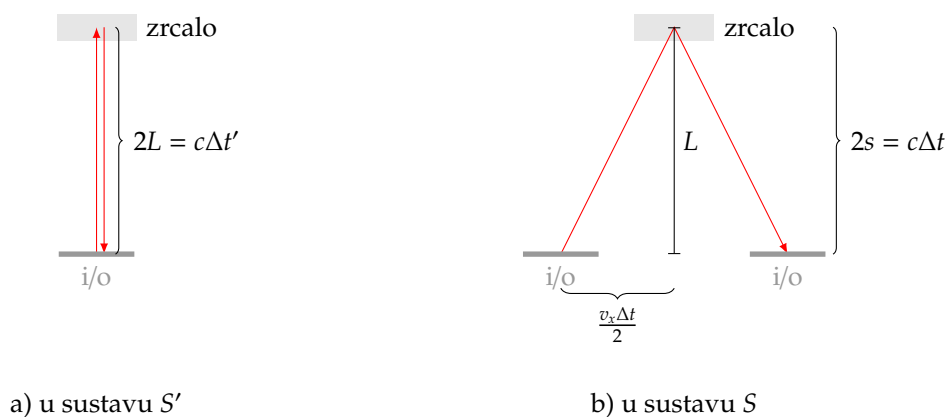
$$\boxed{\begin{aligned} \beta &= v_x/c \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}} \quad (8S7.11)$$

pa se Lorentzove transformacije mogu pisati:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - v_x t) \\ t' &= \gamma(t - \beta x/c) \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned}} \quad (8S7.12)$$

8S9 _____ [Produljenje (dilatacija) vremenskog intervala.]

Promatramo dva događaja koji se zbiju *na istom mjestu* u S' koji se relativno u odnosu na S giba brzinom v_x duž x -osi. Pretpostavimo da iz ishodišta u $t = t' = 0$ pošaljemo zraku svjetlosti do zrcala na udaljenosti L *okomito* na x -os (Slika 8S9.1).



Slika 8S9.1

Iz slike 8S9.1 i [simulacije](#) vidimo da su putevi koju svjetlost prewali u sustavima S i S' različiti. Zbog toga će *vremenski interval* potreban da svjetlost prewali put do zrcala i natrag do početne točke (u S' sustavu!) biti različit, jer svjetlost putuje *jednakom brzinom u oba sustava!* Jednostavno razmatranje odnosa puteva (pravokutni trokut) vodi na izraz za *dilataciju (produljenje) vremenskog intervala* mjenog u *laboratorijskom sustavu*, u odnosu na vrijeme koje se mjeri u sustavu koji se giba. To vrijeme, u kojem objekt koji se u odnosu na laboratorijski sustav giba miruje zovemo *vlastito vrijeme*.

Izrazi se najprije put s kao

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4} = s^2 = L^2 + \frac{v_x^2 \Delta t^2}{4} \Rightarrow L = \frac{\Delta t}{2} \sqrt{c^2 - v_x^2}, \quad (8S9.1)$$

što se potom poveže s izrazom koji vrijedi u sustavu S', pa

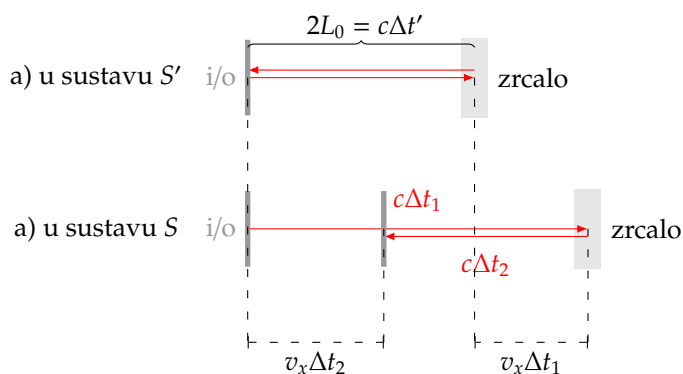
$$2L = c\Delta t' = 2 \frac{\Delta t}{2} \sqrt{c^2 - v_x^2} : c \Rightarrow \Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v_x^2/c^2}. \quad (8S9.2)$$

Kako je izraz pod korijenom manji od 1, interval $\Delta t'$ je *manji* od Δt . Dakle, vrijeme u sustavu koji se giba *teče sporije*. To se može pisati i kao

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (8S9.3)$$

8S10 _____ [Skraćivanje (kontrakcija) duljine.]

Slično kao što smo u prošlom odjeljku promatrali vrijeme potrebno da svjetlost otputuje neku udaljenost u *okomitom* smjeru na relativno gibanje sustava S i S', tako ovdje uspoređujemo vrijeme potrebno da svjetlost prewali određenu udaljenost, mjereno iz oba sustava, no ovaj put svjetlost se giba *paralelno* s relativnom brzinom dvaju sustava. U trenutku $t = 0$ emitira se snop svjetlosti iz ishodišta (obaju sustava koji se u tom trenutku poklapaju) prema zrcalu na kraju 'štapa' *vlastite duljine* L_0 . Vlastita duljina je, kao i vlastito vrijeme, definirana kao *duljina u sustavu u kojem tijelo miruje*.



Slika 8S10.1

Oslanjamo se ponovno za razumijevanje na sliku 8S10.1 i [simulaciju](#). U laboratorijskom sustavu kraj štapa (položaj zrcala) pomakne se za iznos $v_x \Delta t_1$ za vrijeme koje je svjetlosti potrebno da prevali neku duljinu $L + v_x \Delta t_1$, gdje smo definirali veličinu L koju ćemo zvati *duljinom štapa mjerenu u laboratorijskom sustavu*. U ishodište gibajućeg sustava svjetlost se vrati nakon nekog vremena Δt_2 , a za to vrijeme ishodište se pomakne za iznos $v_x \Delta t_2$, pa je svjetlost na povratku prevalila put jednak $L - v_x \Delta t_2$. Ukupni vremenski interval u sustavu S za povratak svjetlosti do izvora/detektora je jednak

$$\left. \begin{aligned} c\Delta t_1 &= L + v_x \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c - v_x} \\ c\Delta t_2 &= L - v_x \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c + v_x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t = \frac{2Lc}{c^2 - v_x^2} \quad (8S10.1)$$

Kako tražimo odnos veličina L i L_0 , povezat ćemo ih preko poznatog odnosa vremenskih intervala u sustavima S i S' , jednadžbe 8S9.3:

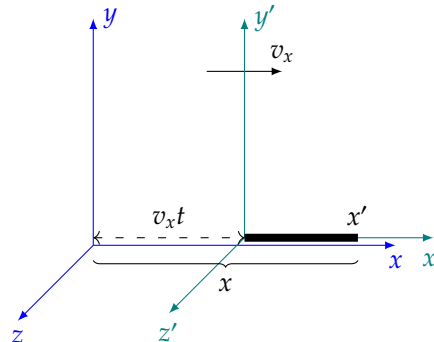
$$\frac{2L_0}{c} = \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{2Lc}{c^2 - v_x^2} \sqrt{1 - v_x^2/c^2} \Rightarrow L = L_0 \sqrt{1 - v_x^2/c^2}. \quad (8S10.2)$$

Kao i u prethodnom odjeljku, korijen u zadnjem izrazu manji je od 1, pa je *duljina mjerena u laboratorijskom sustavu skraćena* u odnosu na vlastitu duljinu L_0 . To se ponovno može pisati korištenjem pokratak kao

$$L = \frac{L_0}{\gamma}. \quad (8S10.3)$$

8S11 ————— [Lorentzove transformacije (alternativni izvod).]

Iz transformacija intervala i duljine moguće je također izvesti Lorentzove transformacije: promatramo dva sustava u nekom trenutku $t > 0$ kad se ishodišta sustava više ne poklapaju. Pitamo se *kojem iznosu u laboratorijskom sustavu odgovara udaljenost koordinata x' u sustavu koji se giba?*



Slika 8S11.1

Udaljenost koja odgovara koordinati x' se u laboratorijskom sustavu, prema izrazu za kontrakciju duljine smanjila za iznos x'/γ . Potpun izraz za koordinatu x koja odgovara x' dobijemo kad uzmemo u obzir i činjenicu da se ishodište S' prema inercijalnosti sustava pomaklo u sustavu S za iznos $v_x t$ (slika 8S11.1). Ukupno to možemo pisati kao:

$$x = v_x t + \frac{x'}{\gamma} \Rightarrow x' = \gamma(x - v_x t). \quad (8S11.1)$$

Ovdje je važno primijetiti da smo kod ovog izvoda Lorentzovih transformacija promatrali koordinatu u S , a pomak ishodišta S' izrazili smo preko vremena u S , i koordinate u S' . Kako bi izveli transformacije koordinata iz jednog sustava u drugi, moramo izraziti koordinatu u S' preko vremena i koordinate u S .

Obratno, ako bismo gledali iz sustava S' , brzina ishodišta S bila bi jednaka $-v_x$, tj. mogli bi pisati inverznu transformaciju kao

$$x = \gamma(x' + v_x t') \Rightarrow \frac{x}{\gamma} = x' + v_x t' \Big/ (\div) \gamma \Rightarrow \frac{x}{\gamma^2} = \frac{x'}{\gamma} + \frac{v_x t'}{\gamma}. \quad (8S11.2)$$

U to sad uvrstimo 8S11.1 pa slijedi

$$\frac{x}{\gamma^2} = \frac{\gamma(x - v_x t)}{\gamma} + \frac{v_x t'}{\gamma} \Rightarrow t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x). \quad (8S11.3)$$

Tako smo dobili Lorentzovu transformaciju vremena između sustava S i S' (usporedite s 8S7.12).

Lorentzove transformacije se svode na Galilejeve transformacije za $v_x \ll c$. To je lako pokazati:

$$\begin{aligned} x' &\approx \lim_{v/c \rightarrow 0} \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = x - v_x t \\ t' &\approx \lim_{v/c \rightarrow 0} \frac{t - v_x x/c^2}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = t \end{aligned} \quad (8S12.1)$$

Iz Lorentzovih transformacija (ako smo ih npr. izveli postupkom kao u odjeljku 8S7) je moguće izvesti izraze za kontrakciju duljine i dilataciju vremena.

I) Skraćivanje duljina

Promotrimo *dva istovremena događaja u S*. Duljinu štapa, L dakle definiramo kao istovremeno očitavanje dvaju krajeva u S . Primjenom Lorentzovih transformacija dobit ćemo da su krajevi štapa u sustavu mirovanja štapa:

$$\Delta x' = \gamma(x_1 - v_x t) - \gamma(x_2 - v_x t) = \gamma \Delta x. \quad (8S13.1)$$

II) Produljenje intervala

Promotrimo *dva događaja na istom mjestu u S'*. Interval, $\Delta t'$ dakle definiramo kao očitavanje dvaju vremena na istom mjestu u S' . Primjenom inverznih Lorentzovih transformacija dobit ćemo da je interval u S :

$$\Delta t = \gamma(t'_1 - v_x x'/c^2) - \gamma(t'_2 - v_x x/c^2) = \gamma \Delta t'. \quad (8S13.2)$$

Ovdje treba biti oprezan: jednostavnom primjenom iste zamisli, ali ne za inverzne transformacije, dobili bismo jednak ali 'obratan' izraz, tj. $\Delta t' = \gamma \Delta t$. To može izgledati paradoksalno, no promislimo li bolje, to je u skladu s našim razumijevanjem, jer se u tom slučaju sustav S giba, ako promatramo iz S' !

8b - Transformacije brzina. Izraz za relativističku energiju.

Brzine se pri prelasku iz opisa u laboratorijskom (mirujućem, u odnosu na promatrača) i sustavu koji se giba relativno u odnosu na taj sustav nekom brzinom v_x određujemo prema definiciji:

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \left\{ \begin{aligned} u'_x &= \frac{du'_x}{dt'} \\ u'_y &= \frac{du'_y}{dt'} \\ u'_z &= \frac{du'_z}{dt'} \end{aligned} \right. \quad (8S14.1)$$

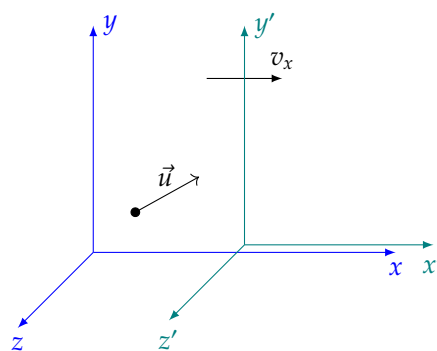
Kako bi dobili transformacijske izraze za brzine primijenimo Lorentzove transformacije na koordinate i vremenske intervale. Iz 8S7.12

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - v_x dt) \\ dt' &= \gamma(dt - \beta dx/c) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz, \end{aligned} \quad (8S14.2)$$

pa uvrštavajući u 8S14.1 slijedi

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx - v_x dt}{dt - \beta dx/c} \bigg/ \frac{dt}{dt} = \frac{u_x - v_x}{1 - \beta u_x/c} \\ u'_y &= \frac{dy}{\gamma(dt - \beta dx/c)} \bigg/ \frac{dt}{dt} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \beta u_x/c)}, \end{aligned} \quad (8S14.3)$$

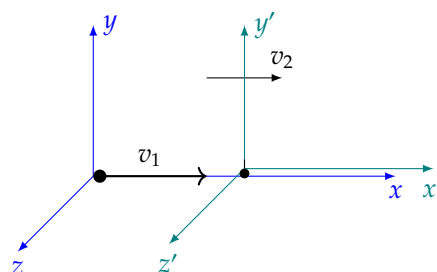
i analogno izrazu za u'_y i za u'_z . Primijetite da smo ovdje brzine tijela koje se u laboratorijskom, ili u sustavu koji se u odnosu na njega giba brzinom v_x označavali s $u_{x,y,z}$, odnosno $u'_{x,y,z}$ (slika 8S14.1). To je nužno kako bi se izbjegla zabuna i miješanje s v_x , što je brzina gibanja sustava.



Slika 8S14.1

[8S15] _____ [Primjer: Konceptualno pitanje (2015/2016).]

Relativna brzina jedne čestice u odnosu na drugu u okviru STR treba se shvatiti kao *usporedba brzine čestice u sustavu u kojem druga čestica miruje!* U tom slučaju je jasno kako postupiti: transformiramo brzinu čestice 2 u sustav u kojem čestica 1 miruje.



Slika 8S15.1

Dakle, primjenom izraza za transformaciju brzina, želimo transformirati brzinu v_1 u sustav koji se giba brzinom v_2 u istom smjeru. Dakle primjenom 8S14.3 uz $u_x = v_1$ i $v_x = v_2$ slijedi

$$-w = u'_x = \frac{v_1 - v_2}{1 - u_1 u_2 / c^2}. \quad (8S15.1)$$

Tako smo dobili relativnu brzinu čestice 1 u odnosu na česticu 2, pa je

$$w = \frac{v_2 - v_1}{1 - u_1 u_2 / c^2}. \quad (8S15.2)$$

Kako je ovaj nazivnik <1 , to će vrijediti $w > v_2 - v_1$.

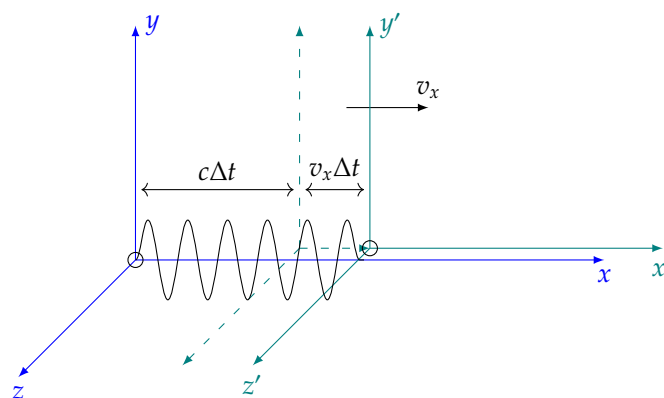
[8S16] _____ [Longitudinalna relativistička Dopplerova pojava.]

U trenutku kad je odaslan prvi signal, izvor i opažač bili su na udaljenosti $x_1 = c\Delta t$ (slika 8S16.1). Drugi signal poslan je točno kad je prvi signal stigao do opažača. Tada je udaljenost izvora od opažača bila $x_2 = c\Delta t + v_x \Delta t$. U tom vremenskom periodu, izvor je emitirao neki broj valova jednak $f_0 \Delta t'$. Ovdje smo uzeli u obzir da je f_0 vlastita frekvencija izvora, te da vrijeme različito teče za opažača i izvor signala. No sad mora vrijediti da je ukupna udaljenost u S jednaka ukupnom broju valnih duljina u S pristiglih od izvora tj. umnošku broja valova emitiranih u S' s valnom duljinom u S, λ .

Između prvog i drugog signala je emitirano $f_0 \Delta t'$ valova u S' , no svi oni se moraju nalaziti na udaljenosti $c\Delta t + v_x \Delta t$ u S:

$$c\Delta t + v_x \Delta t = f_0 \Delta t' \lambda \Rightarrow (c + v_x) = c \frac{f_0}{f} \frac{\Delta t'}{\Delta t} \Rightarrow f = f_0 \frac{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}{1 + v_x/c} = f_0 \frac{\sqrt{1 - v_x/c}}{\sqrt{1 + v_x/c}}. \quad (8S16.1)$$

Ovaj izraz izveli smo za *udaljavanje*. U suprotnom, predzank v_x u jedn. 8S16.1 valja promijeniti.



Slika 8S16.1

[8S18] _____ [Relativistička energija.]

Računamo mehaničku relativističku energiju počevši od uobičajenog definicijskog izraza za rad sile. Zbog jednostavnosti račun provodimo u 1D.

$$W = \int F dx = \int \frac{dp}{dt} v dt = \int_0^v v dp. \quad (8S18.1)$$

Prisjetite se: ovdje smo pri računu nerelativističke kinetičke energije koristili jednostavnu vezu $p = mv$ i rješenje dobili gotovo trivijalnim integriranjem. No, *relativistička količina gibanja* definirana je kao

$$p = \gamma mv = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

pa ćemo to uvrstiti u 8S18.1. No, prije toga, integriranje će biti jednostavnije ako najprije parcijalno integriramo 8S18.1 koristeći

$$v dp = d(vp) - p dv.$$

Tako dobivamo

$$\begin{aligned} W &= \int_0^v v dp = \int_0^v d(vp) - \int_0^v p dv = \gamma mv^2 \Big|_0^v - m \int_0^v \frac{mv dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \gamma mv^2 - mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \Big|_0^v = \gamma mv^2 + mc^2 (\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1) \\ &= \frac{mv^2 + mc^2 - mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{E_{uk}} - \underbrace{mc^2}_{E_{mirovanja}}. \end{aligned} \quad (8S18.2)$$

Dakle, iz 8S18.2 vidimo da je ukupna energija slobodne relativističke čestice jednaka kinetičkoj energiji (prema Teoremu o radu i kinetičkoj energiji) uvećanoj za *energiju mirovanja*, poznati izraz

$$E_0 = mc^2.$$

Vrijedi dakle

$$W = E_K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2, \quad (8S18.3)$$

odnosno

$$E_{uk} = \gamma mc^2 = E_K + mc^2, \quad (8S18.4)$$

[8S19] _____ [Relativistička invarijanta.]

U prilično velikom broju novih jednačbi kojih se valja sjetiti pri rješavanju relativističkih zadataka, jedan izraz posebno je zgodan jer je *Lorentz-invarijantan*, odnosno vrijedi neovisno o sustavu u kojem ga računamo. Kako bi ga izveli, promotrimo definicijske jednačbe za količinu gibanja i ukupnu energiju :

$$p = \gamma mv = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (8S19.1)$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Uvrštavajući te definicije, računamo sad ovakav izraz

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2}{1 - v^2/c^2} = m^2 c^4 \frac{1 - v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = m^2 c^4. \quad (8S19.2)$$

Dobili smo dakle

$$\boxed{E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4}, \quad (8S19.3)$$

Lorentz-invarijantu koja je često korisna pri rješavanju problema (vidjeti sljedeći odjeljak).

8S22 _____ [Primjer - raspad piona.]

U fizici čestica često se mora koristiti relativistički račun. To je redovito tako, jer se zbog zakona sačuvanja (ne samo energije i količine gibanja, već i "čestičnih" svojstava - naboja, leptonskog broja, ...) pri raspadu tzv. *masivnih* čestica (*hadrona*, u koje spada i π -mezon) često uz masivni *lepton* (ovdje μ -čestica) pojavljuju i njihovi odgovarajući *anti/neutrini*. Neutrino je, kao i antineutrino čestica (praktički?) bez mase, pa je za proračun količina gibanja i njihovih energija **nužno** koristiti relativističke izraze. Dakako, energija mirovanja takvih čestica bit će jednaka 0, no energija i količina gibanja će im, prema 8S19.3 biti

$$\boxed{E = pc}$$

$$\boxed{p = \frac{E}{c}} \quad (8S22.1)$$

Proces raspada π^+ -mezona na μ^+ -česticu i pripadni neutrino pišemo kao

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

Početno pretpostavljamo da promatramo u sustavu u kojem π -mezon miruje, pa vrijedi

$$p_\pi = 0 = p_\mu + p_\nu \Rightarrow p_\mu = -p_\nu$$

$$E_\pi = m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu = \underbrace{E_{\mu,K} + m_\mu c^2}_{E_\mu} + \underbrace{cp_\nu}_{-cp_\mu}. \quad (8S22.2)$$

Često u rješavanju ovakvih relativističkih sudara i raspada nije teško naći jednadžbe s kojima se može problem rješavati, već je veći problem kako je tih jednadžbi mnogo, voditi računa koje od njih su međusobno nezavisne, pa mogu dovesti do rješenja. Ovdje se pokazuje da je najbrži put pokušati iskoristiti Lorentz-invarijantni izraz 8S19.3, kako bi odredili energiju miona. Najprije pišemo 8S22.2 u obliku

$$m_\pi c^2 - E_\mu = -cp_\mu \int^2 \Rightarrow (m_\pi c^2)^2 + \underbrace{E_\mu^2 - c^2 p_\mu^2}_{\text{Lor. inv.: } (m_\mu c^2)^2} = 2m_\pi c^2 E_\mu \Rightarrow E_\mu = 214 m_e c^2. \quad (8S22.3)$$

Ovdje smo energiju miona najlakše izrazili u jedinicama $m_e c^2$, pa tako odredimo i kinetičku energiju (vidi se kako je to posebno elegantan pristup kad su mase čestica zadane na ovaj način, relativno u odnosu na m_e .)

$$E_\mu = 214 m_e c^2 = E_{\mu,K} + m_\mu c^2 \Rightarrow E_{\mu,K} = (214 - 207) m_e c^2 = 7 m_e c^2. \quad (8S22.4)$$

Kako bi se ta veličina napisala u traženim jedinicama (MeV), najjednostavnije je koristiti činjenicu da je *energija mirovanja elektrona*

$$m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV}$$

. Tako dobivamo

$$E_{\mu,K} = 3,6 \text{ MeV}.$$

Iz početnog izraza u 8S22.3 preostalo nam je odrediti količinu gibanja miona

$$p_\mu = \frac{273 - 214}{c} m_e c^2 = 30,2 \text{ MeV}/c. \quad (8S22.5)$$

U sustavu čestice koja se giba brzinom $v = 0,9c$ kut emisije fotona je $\alpha = 60^\circ$. Pitamo se koliki je kut u Laboratorijskom sustavu (sustavu opažača, u kojem se čestica giba navedenom brzinom). Zadatku možemo pristupiti na dva načina:

I) Promatramo kao da je kut 60° u sustavu koji se giba i koristimo uobičajene izraze.

U svakom od sustava je kut

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{u_y}{u_x} \\ \tan \alpha_{S'} &= \frac{u'_y}{u'_x},\end{aligned}\quad (8S24.1)$$

gdje su $u'_{x,y}$ komponente brzine fotona u sustavu čestice, a $\alpha_{S'}$ kut u tom sustavu. Za taj sustav pišemo (jer je riječ o fotonu, koji se giba brzinom c):

$$\begin{aligned}u'^2_y + u'^2_x &= c^2 \\ u'_x &= c \cos \alpha_{S'} \\ u'_y &= c \sin \alpha_{S'},\end{aligned}\quad (8S24.2)$$

pa iz uobičajenih transformacija brzina (8S14.3) pišemo

$$\begin{aligned}c \cos \alpha_{S'} &= \frac{u_x - 0,9c}{1 - 0,9cu_x/c^2} \Rightarrow c \cos \alpha_{S'}(1 - 0,9cu_x/c^2) = u_x - 0,9c \Rightarrow \\ c \cos \alpha_{S'} - 0,9u_x \cos \alpha_{S'} &= u_x - 0,9c \Rightarrow u_x(1 + 0,9 \cos \alpha_{S'}) = c \cos \alpha_{S'} + 0,9c \Rightarrow u_x = 0,9655c \\ c \sin \alpha_{S'} &= \frac{u_y}{\gamma(1 - 0,9cu_x/c^2)} \Rightarrow \gamma c \sin \alpha'_{S'}(1 - 0,9u_x/c) = u_y \Rightarrow \gamma \sin \alpha'_{S'}(c - 0,9u_x) = u_y \Rightarrow u_y = 0,2603c.\end{aligned}\quad (8S24.3)$$

Brzine u laboratorijskom sustavu uvrstimo u opći izraz za kut 8S24.1, pa slijedi

$$\tan \alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{0,2603}{0,9655} = 0,2696 \Rightarrow \alpha \approx 15,1^\circ. \quad (8S24.4)$$

II) Promatramo inverzne transformacije brzine.

U tom pristupu koristili bi činjenicu da ovaj kut koji opisuju komponente brzine fotona želimo transformirati u sustav koji se u odnosu na česticu giba brzinom $v = -0,9c$. Odgovarajuće transformacije bile bi:

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \beta u'_x/c} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + \beta u'_x/c)}.\end{aligned}\quad (8S24.5)$$

Rješenje koje bi se dobilo na taj način trebalo bi dakako biti jednako.

9 - Elektrostatika I: Gaussov zakon za električno polje.

Iz diferencijalnog oblika I Gaussovog zakona

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (9S7.1)$$

integracijom po volumenu i primjenom Gaussovog teorema

$$\oint_S \vec{f} d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{f}) dV$$

slijedi

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int^{\text{d}V} \Rightarrow \overbrace{\int \nabla \vec{E} \text{d}V}^{\oint \vec{E} \text{d}\vec{S}} = \overbrace{\int \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{d}V}^{\frac{Q}{\epsilon_0}} \Rightarrow \oint \vec{E} \text{d}\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (9S7.2)$$

Integralni oblik Gaussovog zakona kaže da je tok električnog polja kroz zatvorenu plohu S jednak ukupnom naboju unutar plohe podijeljenom s ϵ_0 . Glavna primjena u zadacima mu je mogućnost da se integral polja za posebno izabranu plohu koja ovisi o simetriji problema piše u obliku jednostavnog umnoška (vidjeti primjere u odjeljku 9S15).

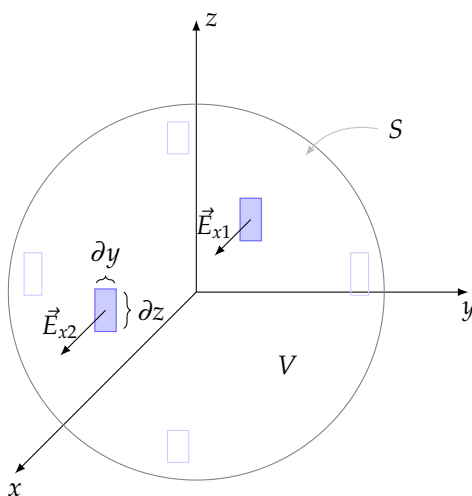
9S8 _____ [Skica dokaza Gaussovog teorema.]

Gaussov teorem povezuje volumni integral divergencije vektorskog polja i integral tog polja po zatvorenoj plohi koja određuje volumen (tok polja kroz zatvorenu plohu). To je riječima izrečeno ono što je sadržano u izrazu

$$\oint_S \vec{f} \text{d}\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{f}) \text{d}V \quad (9S8.1)$$

Konceptualno, možemo ovaj teorem razumjeti kao matematički zapis sačuvanja nečega poput "silnica vektorskog polja". Ukoliko u nekom volumenu postoji divergencija polja (dakle, postoji mjesto gdje polje "divergira", tj. nije kontinuirano, već ima neki *izvor* ili *ponor*, kako je objašnjeno kod uvođenja pojma toka polja), tada sve te silnice *moraju proteći* kroz plohu koja ograničava taj volumen.

Izraz 9S8.1 bit će od velike važnosti pri našem kompaktnom opisu elektromagnetizma pomoću *Maxwellovih jednadžbi*. Kako bi bolje razumjeli na što se jednadžba odnosi, pokušajmo slikovito opisati ove integrale. Slika 9S7.1 prikazuje volumen i graničnu plohu kroz koju promatramo tok vektorskog polja.



Slika 9S8.1

Prema slici, tok polja kroz plohu \vec{S} jednak je

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \text{d}\vec{S} &= \int \overbrace{E_{x2} \partial y \partial z - E_{x1} \partial y \partial z}^{E_{x2} - E_{x1} = \Delta E_x \approx \frac{\partial E_x}{\partial x} \partial x} + \\ &+ \int E_{y2} \partial x \partial z - E_{y1} \partial x \partial z + \\ &+ \int E_{z2} \partial x \partial y - E_{z1} \partial x \partial y = \\ &= \int \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)}_{\nabla \cdot \vec{E}} \text{d}V. \end{aligned} \quad (9S8.2)$$

Ovdje smo već uzeli da je polje za koje dokazujemo Gaussov teorem električno polje. Valja možda posebno primijetiti da je pozitivan smjer komponenti polja $E_{x,y,z}$ u smjeru koordinatnih osi, no *djelic plohe na 'stražnjoj' strani kugle* (članovi s indeksima x_1, y_1 i z_1) usmjereni su u *suprotnom smjeru* od koordinatnih osi, pa je umnožak polja i vektora plohe u tim članovima negativan. To je razlog za pojavu ovih razlika u integralu, koje su nam pak ključne da dobijemo derivacije komponenti polja.

[9S9] _____ [I Maxwellova jednadžba iz Coulombovog zakona i principa superpozicije.]

Coulombov zakon vodi na izraz za električno polje, nad kojim najprije primijenimo operator divergencije, a potom integriramo po volumenu izvora

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}') \int_V \Rightarrow \nabla \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \int dV' \Rightarrow \\ &\underbrace{\int \nabla \vec{E}(\vec{r}) dV'}_{\text{Gaussov teorem}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int \nabla \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV'}_{\text{Gaussov teorem}} \Rightarrow \\ &\int \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d\vec{S}.\end{aligned}\quad (9S9.1)$$

Ako sad izaberemo plohu vrlo velikog polumjera¹¹, takvog da je $r \gg r'$, možemo pisati

$$\int \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}. \quad (9S9.2)$$

No za sfernu plohu je $r = \text{konst.}$ pa je integracija po plohi dana integracijom samo preko *prostornog kuta* $d\Omega$:

$$d\vec{S} = \hat{r} r^2 d\Omega.$$

Odatle odmah slijedi uvrštavanjem u 9S9.2:

$$\int \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{r^3}{r^3} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (9S9.3)$$

[9S15] _____ [Primjeri primjene Gaussovog zakona.]

Na slici 9S15.1 prikazana su tri slučaja za koja ćemo moći primijeniti Gaussov zakon kako bi jednostavno izračunali polje. Pri tome koristit ćemo se posebnom simetrijom problema (raspodjele naboja) koja će odrediti najbolji oblik plohe S uz koji će biti posebno jednostavno odrediti polje.

Iz *simetrije raspodjele naboja* možemo zaključiti kako bi električno polje bilo usmjereno, i o kojoj veličini može postojati ovisnost.

Iz te pretpostavke odabrat ćemo plohu tako da *električno polje bude ili okomito na plohu i konstantnog iznosa* ili da polje bude okomito na normalu plohe. U drugom slučaju će tok biti jednak nuli, jer je tada $\vec{E} \Delta \vec{S} = 0$.

Na slici su prikazane raspodjele naboja: (1) ravna beskonačna pravčasta raspodjela, (2) beskonačna ravna ploha, i (3) sferna (kuglasta) raspodjela polumjera R . Crveno je naznačen oblik polja koji je zaključen na temelju simetrije, a crtkano skicirana odabrana ploha za korištenje u Gaussovom zakonu.

Koristit ćemo integralni oblik Gaussovog zakona 9S7.2 za određivanje električnog polja. Kako bi iskoristili snagu jednostavnosti Gaussovog zakona, za svaki od tih slučajeva važno je odrediti *pravu plohu* za račun toka. Izbor plohe bit će određen *simetrijom problema*:

¹¹ Za dokazati općeniti slučaj

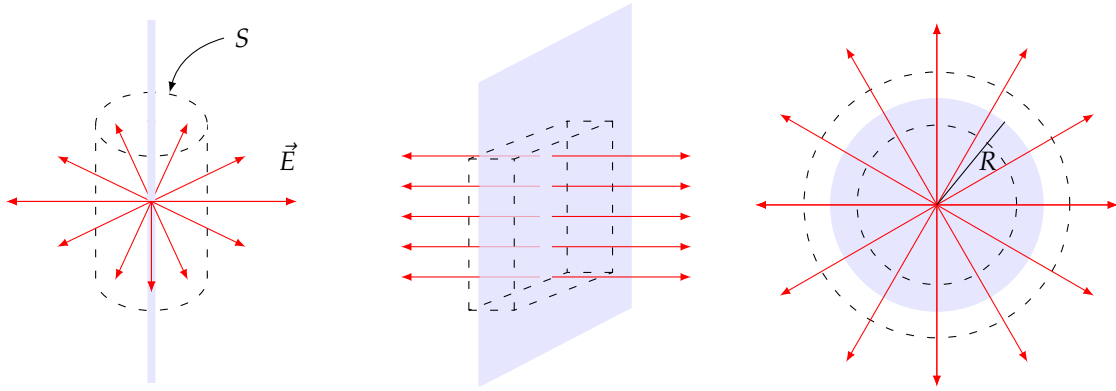
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}') dV'$$

potrebno je koristiti Diracovu δ -funkciju

$$4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \nabla \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

te njeno svojstvo

$$\rho(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') dV'.$$



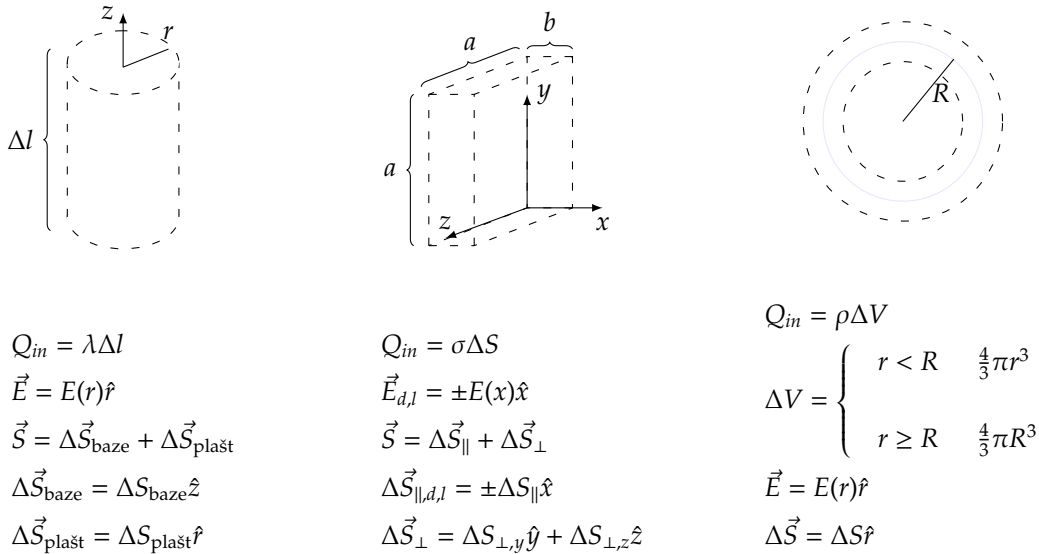
Slika 9S15.1

(1) Beskonačna jednolika pravčasta raspodjela naboja upućuje na cilindričnu simetriju. Polje može biti ovisno samo o udaljenosti od pravca, i usmjereno okomito na njega. Biramo plohu tako da je polje svuda na plohi jednakog iznosa ondje gdje je polje paralelno s plohom (plašt valjka), ili da je polje okomito na normalu plohe (baze valjka).

(2) Beskonačna ravnina dijeli prostor na dva dijela. Prirodno je očekivati da polje mora biti usmjereno okomito na plohu i ovisno jedino o udaljenosti od plohe. Zbog jednostavnosti možemo plohu izabrati u obliku kvadra, pri čemu su dvije stranice paralelne s plohom raspodjele, dok su preostale na nju okomite.

(3) Kuglasta homogena raspodjela naboja polumjera R prirodno će voditi na izbor sferne plohe. Ovdje ćemo razlikovati dvije bitno različite situacije: plohu čiji je polumjer manji ili veći od R . Razmatrajući tako, dobit ćemo izraz za polje u svakom od područja.

Na slici 9S15.2 prikazane su neke veličine i zaključci ostvareni na temelju simetrije i našeg posebnog izbora plohe korisne za izvod polja i primjenu Gaussovog zakona u svakom od slučajeva.



$$Q_{in} = \lambda \Delta l$$

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

$$\vec{S} = \Delta \vec{S}_{baze} + \Delta \vec{S}_{plašt}$$

$$\Delta \vec{S}_{baze} = \Delta S_{baze} \hat{z}$$

$$\Delta \vec{S}_{plašt} = \Delta S_{plašt} \hat{r}$$

$$Q_{in} = \sigma \Delta S$$

$$\vec{E}_{d,l} = \pm E(x)\hat{x}$$

$$\vec{S} = \Delta \vec{S}_{\parallel} + \Delta \vec{S}_{\perp}$$

$$\Delta \vec{S}_{\parallel,d,l} = \pm \Delta S_{\parallel} \hat{x}$$

$$\Delta \vec{S}_{\perp} = \Delta S_{\perp,y} \hat{y} + \Delta S_{\perp,z} \hat{z}$$

$$Q_{in} = \rho \Delta V$$

$$\Delta V = \begin{cases} r < R & \frac{4}{3}\pi r^3 \\ r \geq R & \frac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$$

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

$$\Delta \vec{S} = \Delta S \hat{r}$$

Slika 9S15.2

Primjenom Gaussovog zakona za tako odabrane površine S slijedi:

$$(1) \quad \int \vec{E}(r) d\vec{S} = E(r)\hat{r}\vec{S} = E(r)\Delta S_{plašt} + 0 = 2r\pi\Delta l E(r) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \Delta l}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0}.$$

(9S15.1)

$$(2) \quad \int \vec{E}(x) d\vec{S} = E(x)\hat{x}\vec{S} = E_d(x)\Delta S_{\parallel,d} + E_l(x)\Delta S_{\parallel,l} + 0 = 2E(x)\Delta S = 2E(x)a^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

(9S15.2)

Primijetite da je ovo polje samo jedne ploče. Za *pločasti kondenzator*, ako se može pretpostaviti da su ploče približno beskonačne (tj. razmak između ploča malen u usporedbi s njihovom dimenzijom) ukupno polje je zbroj polja za svaku od ploča pa se dobiva izraz koji je nekima možda otprije poznat: $E = \sigma/\epsilon_0$. U svakom slučaju za takvu je raspodjelu naboja polje *konstantno, neovisno o udaljenosti od ploče!*

(3)

$$r \geq R: \int \vec{E}(r) d\vec{S} = E(r)S = E(r)4r^2\pi = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2\epsilon_0}.$$
(9S15.3)

$$r < R: \int \vec{E}(r) d\vec{S} = E(r)S = E(r)4r^2\pi = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{r\rho}{3\epsilon_0}.$$
(9S15.4)

Zadnje dvije jednadžbe mogu se pisati u drukčijem obliku uzimajući u obzir da je raspodjela naboja homogena, tj.

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4R^3\pi}.$$

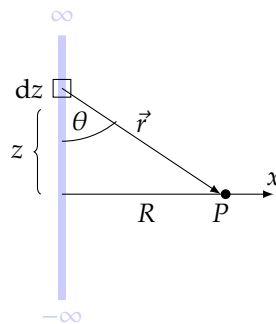
Odatle

$$r \geq R: E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$r < R: E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$
(9S15.5)

Izvan jednoliko nabijene kugle, polje je jednako kako da je sav naboj koncentriran u centru, pa imamo izraz jednak kao za točkasti naboj (Coulombov zakon) dok je unutar kugle polje *proporcionalno* udaljenosti od središta.

Za usporedbu, u ovom odjeljku možemo još izračunati polje beskonačne pravčaste raspodjele naboja ali korištenjem definicijskog izraza (Coulombove interakcije) i principa superpozicije. Računamo polje u točki P (Slika 9S15.3), na udaljenosti R od raspodjele.



Slika 9S15.3

Opći izraz

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \overbrace{\frac{\rho(\vec{r}') dV'}{r^2}}^{=dq=\lambda dz} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{x} \Rightarrow$$

$$E_x(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz}{r^2} \overbrace{\cos(\pi/2 - \theta)}^{\sin \theta}.$$
(9S15.6)

U zadnjem izrazu u 9S15.6 smo koristili pretpostavku da polje *mora* biti usmjereno okomito na pravčastu raspodjelu, odnosno duž osi x. Također smo uzeli da je raspodjela homogena i opisana *linijskom gustoćom* λ.

Sa slike koristimo trigonometrijske odnose kako bi integraciju mogli provesti po kutu θ:

$$\tan \theta = \frac{R}{z} \Rightarrow dz = -\frac{R}{\tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\sin \theta = \frac{R}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \theta}.$$
(9S15.7)

Uvrštavanjem u jedn. 9S15.7 imamo

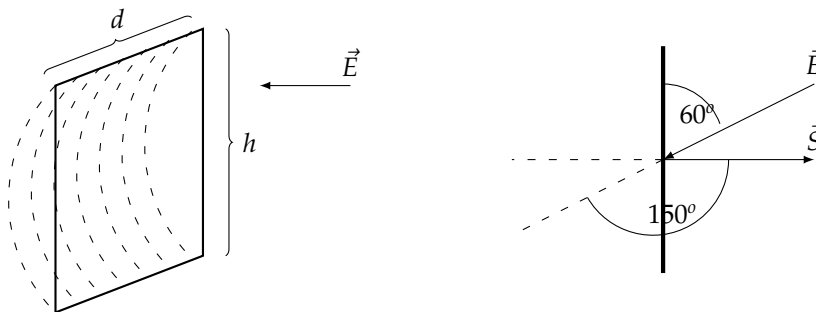
$$E_x(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi}^0 \left(-\frac{R}{\tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi}^0 d(\cos \theta) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (9S15.8)$$

Dobili smo, dakako isti izraz kao ranije, ali s nešto više posla.

9S24 [Primjer: tok električnog polja.]

Zadatak se može shematski opisati i lako riješiti preko toka kroz *zatvorenu* plohu koja se sastoji od okvira vratnica gola i mreže (slika 9S24.1). Tok kroz zatvorenu površinu koja omeđuje volumen je, prema Gaussovom zakonu za električno polje jednak

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = 0 = \Phi_{okvir} + \Phi_{mreža} \Rightarrow \Phi_{mreža} = -\Phi_{okvir}. \quad (9S24.1)$$



Slika 9S24.1

Pa je u slučaju (a)

$$\int_{okvir} \vec{E} d\vec{S} = E(dh) \overbrace{\hat{E} \cdot \hat{S}}^{=-1} = -0,8 \text{ Nm}^2/\text{C} \Rightarrow \Phi_{mreža} = 0,8 \text{ Nm}^2/\text{C}. \quad (9S24.2)$$

U slučaju (b) je argumentacija slična, samo je tok kroz vratnice nužno izračunati uzevši u obzir da je kut upada polja obično definiran u odnosu na ravninu gola, ne nužno u odnosu na vektor normale (slika 9S24.1). Tako dobivamo

$$\int_{okvir} \vec{E} d\vec{S} = E(dh) \overbrace{\hat{E} \cdot \hat{S}}^{=\cos 150^\circ} = -0,7 \text{ Nm}^2/\text{C} \Rightarrow \Phi_{mreža} = 0,7 \text{ Nm}^2/\text{C}. \quad (9S24.3)$$

10a - Električni potencijal. Struja. Biôt-Savartov zakon. Lorentzova sila.

10S1 [Rad Coulombove sile i električni potencijal.]

Rad Coulombove sile je prema *Teoremu o radu i energiji* (vidjeti odjeljak 3a) jednak potencijalnoj energiji, budući da je Coulombova sila *konzervativna*:

$$W = \int \vec{F} d\vec{s} = k \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_1 q_2}{r^2} \overbrace{\hat{r} \cdot d\vec{s}}^{dr} = k \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k q_1 q_2 \left. \frac{-1}{r} \right|_{r_1}^{r_2} = k q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -\Delta E_p. \quad (10S1.1)$$

Podijelimo li sad 10S1.1 s q_2 , dobit ćemo

$$\int_{r_1}^{r_2} \underbrace{k \frac{q_1}{r^2}}_E dr = \underbrace{k q_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}_{\equiv -\Delta U}. \quad (10S1.2)$$

Time smo definirali novu veličinu - *električni potencijal*.

Kako bi veličina koju smo definirali samo preko promjene (ΔU) bila jednoznačno određena, trebamo odrediti ishodište, nultočku od koje računamo potencijal. Uzmemo da je za

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta E_p \rightarrow 0,$$

odnosno potencijalna energija (+) naboja na beskonačnoj udaljenosti od drugog (+) naboja postavljenog u ishodište teži u 0. Na isti način je stoga i *potencijal* nekog probnog (+) naboja postavljenog na $r = \infty$ jednak 0.

Nekoliko komentara ovdje valja dodati:

- Odnos polja i potencijala posve preslikava odnos Coulombove sile i potencijalne energije.
- Isto tako, odnos sile i električnog polja preslikan je u odnosu potencijalne energije i potencijala: sila i energija, kao mehaničke veličine, su 'konkretizirana' tj. ostvarena svojstva međudjelovanja - mjerive veličine. No, električno polje i potencijal oba su definirani preko nekog *probnog naboja* na kojeg bi polje djelovalo, i koji bi se gibal u potencijalu iznosa koji je opisan samo raspodjelom *preostalih* naboja. To je način da se pojednostavi kompleksna činjenica da i naboj čije gibanje želimo promatrati *utječe* na preostale naboje. Gibanja tih svih naboja, strogo govoreći nisu nezavisna, pa bi se egzaktno problem trebao rješavati u pristupu preko teorije polja.
- Potencijalna energija Coulombove sile jednaka je *radu koji je potreban da se naboj q_2 iz beskonačnosti dovede u točku u prostoru na udaljenosti r_1 od naboja q_1* . Električni potencijal je onda iznos tog rada podijeljen s iznosom q_2 , odnosno potreban rad za neki jedinični naboj.

Potencijal je dakle

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (10S3.1)$$

Iz izraza u 10S1, vidimo da postoji analogija izraza za silu preko potencijalne enegije i polje preko potencijala - formalno, razlika je 'samo' u tome da smo u drugom slučaju gornju jednadžbu podijelili s jednim od naboja.

$$\begin{aligned} \int \vec{F} d\vec{r} &= -\Delta E_p \Rightarrow \vec{F} = -\nabla E_p \\ \int \vec{E} d\vec{r} &= -\Delta U \Rightarrow \vec{E} = -\nabla U. \end{aligned} \quad (10S4.1)$$

Ovako zapisani ti izrazi upućuju da je *moгуće odrediti polje iz potencijala* jednostavno derivirajući po komponentama. No, kako je potencijal *skalarna* funkcija, općenito je jednostavnije primijeniti princip superpozicije

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (10S4.2)$$

te izračunati vektorsku veličinu (polje) koristeći vektorsku derivaciju, ∇U . U slučaju vektorskog polja primjenu vektorske derivacije

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

zvali smo *divergencija* vektorskog polja, što je bila skalarna funkcija. Primjena pak na skalanu funkciju daje nam vektorski izraz. U ovom slučaju taj produkt nazivamo *gradijent* skalarnog polja.

Iako je općenito jednostavnije riješiti integral za potencijal kao skalarnu veličinu, donosimo primjer u kojem je polje jednostavnije izračunati jer možemo iskoristiti I Gaussov zakon. Zapravo, primjer koji koristimo je homogena kuglasta raspodjela naboja, tj. naš treći slučaj u odjeljku 9S15. Ako bismo pomoću superpozicije željeli izračunati potencijal na nekom mjestu u ili izvan kugle, morali bismo dV' pisati u sfernim koordinatama

i odrediti odgovarajuću udaljenost od djelića naboja do naše točke u kojoj određujemo potencijal. Takav integral nije posve lako riješiti. Stoga možemo iskoristiti izraze za polje (Jedn. 9S15.5) i vezu

$$\int_{\infty}^r E(r) \hat{r} dr = -U(r), \quad (10S5.1)$$

gdje smo uzeli u obzir da polje ovisi samo o r , kao i da je sila centralna (pa pomnožimo paralelne vektore pod integralom u 1), te činjenicu da je $\Delta U = U_2 - U_1 = U_2 - 0$ za $r_1 = \infty$.

Polje izvan kugle je izraženo jednostavnim Coulombovim izrazom, pa za $r \geq R$

$$U(r \geq R) = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (10S5.2)$$

Polje unutar kugle je

$$E(r < R) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

gdje je R polumjer kugle. Za $r < R$ moramo izračunati *ukupan* rad potreban da naboj dovedemo u neku točku na položaju r unutar kugle. Dakle, u tom slučaju

$$\begin{aligned} U(r < R) &= - \int_{\infty}^R E(r \geq R) dr - \int_R^r E(r < R) dr = - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_R^r \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2), \end{aligned} \quad (10S5.3)$$

pa smo jednostavno dobili potencijal u cijelom prostoru iz polja. To je u ovom posebnom slučaju posljedica činjenice da smo mogli primijeniti Gaussov zakon za određivanje polja.

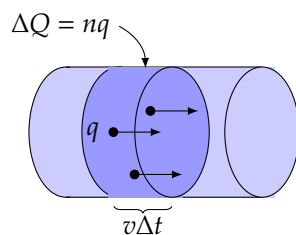
Polje u točki $r = R$ ima prekid u prvoj derivaciji, no potencijal koji je integral polja ima promjenu konkavnosti, točku infleksije. To se lijepo vidi na [prikazu tih funkcija](#).

10S7 _____ [Struja.]

Kako bi uveli sve veličine potrebne za opis Faradayevog zakona indukcije (III Maxwellova jednadžba), kao i objasnili pojavu magnetizma, valja objasniti što je struja. Najjednostavnije, možemo reći da je struja *tok naboja*

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Struju opažamo uglavnom u vodičima, pa ćemo ju u tom smislu detaljnije i opisati. Promatramo vodič kružnog presjeka S kojim teče struja I . Mikroskopski struju možemo opisati preko gustoće jediničnih naboja (slika 10S7.1).



Slika 10S7.1

Oznaka n je broj naboja u volumenu $\Delta V = S\Delta x = Sv\Delta t$, pa je *gustoća naboja*

$$n_0 = \frac{n}{\Delta V} \Rightarrow \Delta Q = n_0 \Delta V q = n_0 q S v \Delta t. \quad (10S7.1)$$

(Time želimo od zapisa ΔQ preko broja nosilaca, specifične veličine ovisne o odabranom volumenu prijeći na opis preko *intenzivne* veličine, neovisne o dimenziji.) Uvrštavanjem u definicijski izraz za struju, slijedi

$$I = n_0 q S v. \quad (10S7.2)$$

Definiramo također *gustoću struje*

$$|\vec{j}| = \frac{I}{S} \Rightarrow \vec{j} = n_0 q \vec{v}. \quad (10S7.3)$$

Želimo struju povezati s uzrokom pomicanja naboja, Coulombovom silom, odnosno poljem \vec{E} . Izjednačimo električni član Lorentzove sile (tj. definicijski izraz za električno polje) s ukupnom silom u Newtonovom zakonu

$$m\vec{v} = q\vec{E}, \quad (10S7.4)$$

te sad načinimo najveće približenje kojim prevedemo mnoge mikroskopske kvantno-mehaničke pojave u vodiču u jednostavan svijet klasičnih pojava: uzmemo da je brzina naboja u vodiču jednaka *prosječnoj brzini* koju naboji postignu u nekom vremenu Δt ¹²

$$m\vec{v} = q\vec{E}\Delta t. \quad (10S7.5)$$

Uvršavajući brzinu iz 10S7.5 u 10S7.3 dobivamo da je gustoća struje *proporcionalna* električnom polju. Konstantu proporcionalnosti nazivamo *električna vodljivost* i označavamo sa σ (koju ne treba pomiješati s istom oznakom za drugu veličinu, površinsku gustoću naboja koju smo koristili kod izvoda za polje u 9S15).

$$\vec{j} = \underbrace{\frac{n_0 q \Delta t}{m}}_{\equiv \sigma} \vec{E}. \quad (10S7.6)$$

Upravo npr. kod pločastog kondenzatora polje je konstantno, pa bi u tom slučaju mogli odmah pisati da je naboj između ploča jednak (slika 10S7.2)

$$U = \int \vec{E} d\vec{l} = E\Delta l, \quad (10S7.7)$$

pa sad iz 10S7.6

$$\vec{j} = \sigma \frac{U}{\Delta l} \cdot S \Rightarrow I = \frac{\sigma S}{\Delta l} U. \quad (10S7.8)$$

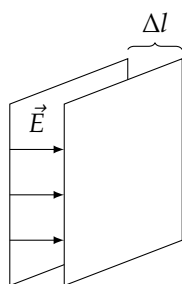
U zadnjoj jednadžbi 10S7.8 prepoznamo Ohmov zakon, odnosno proporcionalnost struje i napona

$$\boxed{U = RI} \quad (10S7.9)$$

uz definiciju *otpornosti*

$$R = \frac{\Delta l}{\sigma S} = \rho \frac{\Delta l}{S} \quad (10S7.10)$$

gdje je *otpornost* $\rho \equiv 1/\sigma$.



Slika 10S7.2

10S10

[Biôt-Savartov zakon - primjeri.]

Biôt-Savartov zakon je za magnetsko polje izraz analogan općem definicijskom izrazu za električno polje (naboji su izvor električnog polja, Coulombovo međudjelovanje uz princip superpozicije, npr. 9S15.6). Empirijski je zaključeno da je *gibanje naboja*, tj. struja izvor magnetskog polja. Jednako kako i za električno polje jakost

¹²To vrijeme se uobičajeno naziva *vrijeme između sudara*, smatrajući da se naboji u vodiču, uobičajeno elektroni ili šupljine, ubrzavaju dok se ne 'sudare' s fononima, odnosno s kvantima titranja kristalne rešetke.

međudjelovanja opada s kvadratom udaljenosti, no za razliku od električnog polja, smjer magnetskog polja *okomit je* na plohu koju određuju smjer brzine gibanja naboja i vektor položaja točke opažanja i naboja-izvora u gibanju.

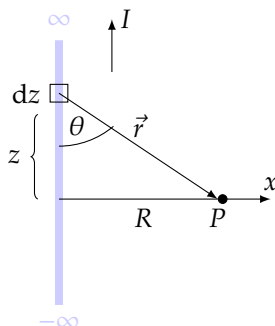
Primijenit ćemo Biôt-Savartov zakon

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (10S10.1)$$

za račun magnetskog polja u dva posebna ali vrlo instruktivna slučaja:

1. Polje u okolici beskonačnog vodiča kojim teče struja

Skica problema, slika 10S10.1 (usporedite sa slikom 9S15.3) kao i račun pokazat će se identični kao i kod računa polja pravčaste raspodjele naboja u odjeljku 9S15 (jedn. 9S15.6-9S15.8). Pogledajmo kako do toga dolazi.



Slika 10S10.1

Najprije napišemo jednadžbu 10S10.1 u našem slučaju, izabirući smjer struje (i vodiča) duž z-osi: $Id\vec{l} = I\hat{z}dz$

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Idz\hat{z} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (10S10.2)$$

Prema pravilu desne ruke, magnetsko polje će biti usmjereno 'u papir', tj., duž y-osi. Računamo dakle samo tu komponentu polja. Iznos vektorskog produkta u brojniku jednak je $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, što je kut između osi z i smjera \hat{r} . Dakle, iako je smisao drukčiji, matematički oblik podintegralne funkcije je u ovom posebnom slučaju jednak kao kod integrala kojeg smo već obradili u odjeljku 9S15. Stoga će, koristeći iste trigonometrijske odnose i integrirajući po kutu θ od π do 0 i rješenje biti isto. Imamo dakle

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Idz \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4R\pi} \int_{\pi}^0 d(\cos \theta) = \frac{\mu_0 I}{2R\pi}, \quad (10S10.3)$$

odnosno, vektorski

$$\vec{B}(P) = B_y \hat{y} = \frac{\mu_0 I}{2R\pi} \hat{y}. \quad (10S10.4)$$

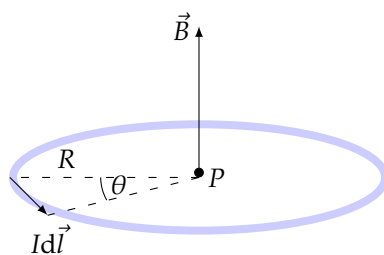
2. Polje na osi kružne petlje kojom teče struja

Magnetsko polje u središtu kružne petlje polumjera R kojom teče struja vrlo je lako izračunati (slika 10S10.2). U tom slučaju je udaljenost od djelića izvora $d\vec{l}$ do točke P u kojoj polje određujemo stalno istog iznosa, i okomita na djelić. Stoga je

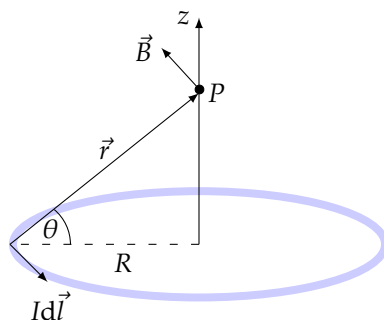
$$Id\vec{l} \times \hat{R} = Idl.$$

Integrirati možemo ili jednostavno po duljini opsega, od 0 do $2R\pi$ ili, uzimajući u obzir da se djelić kružnice može pisati $dl = R d\theta$, po kutu od 0 do 2π . Jednadžba 10S10.1 u ovom slučaju dakle ima gotovo trivijalan oblik

$$\vec{B}(P) = B_z \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \hat{z} \int_0^{2R\pi} dl = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{z}. \quad (10S10.5)$$



Slika 10S10.2



Slika 10S10.3

Iskoristimo ovdje priliku pa izračunajmo i općenitiji slučaj - polje *na osi* petlje, no ne nužno u središtu. U tom slučaju odgovarajuća skica će biti kao na slici 10S10.3.

Kut između \vec{r} i $Id\vec{l}$ ponovno je 90° , pa je vektorski produkt riješen na isti način kao u prethodnom primjeru. Iznos \vec{r} također je stalan, no sad ovisi o udaljenosti na osi z točke P, tj.

$$r^2 = R^2 + z^2.$$

Važna je novost da je doprinos polju u P od djelića $Id\vec{l}$ usmjeren pod nekim kutem u odnosu na simetralu kružnice (vidi sliku 10S10.3). Ako želimo samo integrirati po iznosu Idl , dobili bi pogrešan iznos, jer bi zbrajali i doprinose polju koji se pokraze zbog suprotnih smjerova (predznaka) u xy -ravnini. Stoga moramo *projicirati* doprinose na smjer z. Sa slike vidimo da je kut između smjera \vec{B} i \hat{z} jednak θ , pa tražimo projicirano polje na os z kao

$$\vec{B}(P) = \vec{B} \cdot \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \underbrace{\hat{B} \cdot \hat{z}}_{\cos \theta} \int_0^{2R\pi} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \frac{1}{R^2 + z^2} 2R\pi \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}. \quad (10S10.6)$$

U izvodu smo uzeli u obzir da je $|\vec{r}| = konst.$, kao i trigonometrijsku vezu $\cos \theta = R/r$. Lako se pokazuje da ovaj općeniti slučaj prelazi u naš posebni slučaj, kad uvrstimo $z = 0$.

10S12 _____ [Lorentzova sila.]

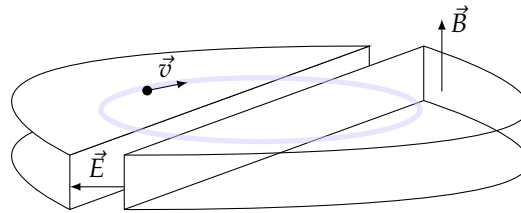
Lorentzova sila je najvažniji element koji nije sadržan u Maxwelllovim jednadžbama, a nužan je za razumijevanje elektromagnetskih pojava. Ona definira općeniti oblik sile na nabijenu česticu u električnom i magnetskom polju

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (10S12.1)$$

Vidimo da je magnetski doprinos *uvijek okomit na smjer brzine*, pa taj član ne može promijeniti iznos brzine, već samo njen smjer. Dakle, u situaciji kad nemamo električnog polja, a nabijena čestica nekom brzinom uleti u magnetsko polje, njen će se smjer putanje zakrenuti. Općenito, to svojstvo usmjeravanja naboja magnetskim poljem izvor je mnogih spektroskopskih mjernih metoda, ali i drugih načina manipulacije nabojima (najpoznatiji, i možda najzanimljiviji su primjene u ubrzivačima čestica, odnosno pri zarobljavanju čestica na vrlo visokim temperaturama u pokušaju iskorištavanja fuzije kao izvora energije).

Kao primjer, pokazat ćemo jedan model ubrzivača čestica - *ciklotrona* (slika 10S12.1). Ciklotron se u bitnom sastoji od dvije D-elektrode (tako nazvane zbog svog oblika). U elektrodama ne djeluje električno, već samo

magnetsko polje koje je u našem primjeru usmjereno prema gore. Magnetsko polje zakreće naboj. Električnim poljem se naboj ubrzava ali *samo između D-elektroda*. No, očito je, kako bi polje ubrzavalo naboj, mora se sinkronizirano mijenjati, jer svaki puta kada naboj prolazi između D-elektroda, on mijenja svoj smjer prolaska. Interesantno je dakle izračunati koji je period putanje naboja. Idealno, naboj će imati spiralnu putanju, jer mu električno polje pri prolascima između elektroda povećava brzinu (kinetičku energiju).



Slika 10S12.1

Naboj se u nekom trenutku u D-elektrodi giba brzinom iznosa v . Sila koja djeluje na naboj bit će zbog smjera polja (uzmimo da je \vec{B} u $+\hat{z}$ smjeru) i pretpostavljenog gibanja čestice u xy -ravnini

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = -qvB\hat{r}. \quad (10S12.2)$$

Ovdje smo zapisali činjenicu da će u odsustvu električnog polja magnetsko polje zakretati česticu i sila će biti usmjerena prema nekom centru kružnice po kojoj se naboj giba. No takvo gibanje obradili smo već u prvim predavanjima iz kinematike: to je sila kakva je uzrokovala jednoliko kružno gibanje - okomita na brzinu i stalnog iznosa. Možemo dakle izjednačiti ovaj izraz s izrazom kojeg smo izveli za takvo gibanje

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = -qvB\hat{r} = -m\omega^2\vec{r}. \quad (10S12.3)$$

Iz jedn. 10S12.3 uzimajući u obzir da je brzina kod jednostavnog kružnog gibanja u ravnini povezana s kutnom brzinom kao $v = \omega r$ možemo dobiti izraz za *polumjer putanje i frekvenciju kruženja (ciklotronska frekvencija)*.

$$qvB = m\omega^2 r \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{mv}{qB} \\ \omega = \frac{qB}{m} \end{cases} \quad (10S12.4)$$

Ovdje vidimo da je, uz ostale uvjete nepromijenjene, polumjer gibanja *proporcionalan brzini*. To znači da je naša skica na sl. 10S12.1 približna i putanja nije kružnica, već spirala širećeg polumjera - naposljetku obično ubrzana čestica izlijeće iz ciklotrona na predviđenom mjestu i udara u metu!

Zanimljivo je još primijetiti da je period *kruženja*

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10S12.5)$$

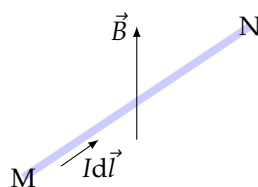
To znači da naboj napravi puni krug u tom vremenu, no naše električno polje (vidi sliku) mora se u tom vremenu promijeniti dva puta, kako bi bilo usklađeno sa zahtjevom da pri svakom prolasku između elektroda ubrzava naboj. Kako je to onda ciklotronska frekvencija koju smo izračunali naizgled u neskladu s frekvencijom promjene polja? Rješenje se nalazi u činjenici da promatramo *sinusni napon*, a frekvencija izmjeničnog polja definirana je za *punu sinusnu oscilaciju*, tijekom koje je polje pola svog perioda pozitivno, a pola negativno.

10S14 _____ [Sila na vodič kojim teče struja u magnetskom polju.]

Promotrimo djelić vodiča (M,N) kojim teče struja I i nalazi se u magnetskom polju koje je homogeno, konstantno i okomito na vodič (slika 10S14.1).

Počnemo naše razmatranje od magnetskog člana Lorentzove sile, no doprinose sili pišemo preko *superpozicije* djelića doprinosa koji dolaze od pojedinih naboja

$$\begin{aligned} \vec{F}_{L,m} &= q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} = \overbrace{Idt}^{dq} \vec{v} \times \vec{B} = \\ &= Idt \underbrace{\frac{d\vec{l}}{dt}}_{\vec{v}} \times \vec{B} = Id\vec{l} \times \vec{B}. \end{aligned} \quad (10S14.1)$$



Slika 10S14.1

Pa je ukupna sila na djelić vodiča naznačen na slici integral:

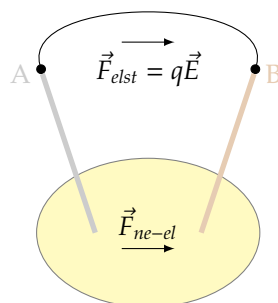
$$\vec{F} = \int_M^N d\vec{F} = \int_M^N Id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (10S14.2)$$

10b - Gibanje vodiča u magnetskom polju. Elektromagnetska indukcija i Faradayev zakon.

10S17 _____ [Krivuljni integral električnog polja i potencijal.]

U odjeljcima 10S1-10S4 u početku ovog poglavlja uveli smo električni potencijal preko rada Coulombove sile. Tvrdili smo da je elektrostatska interakcija (Coulombova sila) *konzervativna*. Time smo tvrdili i da je *krivuljni integral električnog polja* po zatvorenoj krivulji jednak 0. Sve navedeno povezano je s našom definicijom električnog potencijala kao funkcije stanja. Matematički se to da najjednostavnije opisati preko veze

$$W = \int \vec{F} d\vec{l} = q \int \vec{E} d\vec{l} = -\Delta E_P / q \Rightarrow \int \vec{E} d\vec{l} = \frac{-\Delta E_P}{q} \equiv -\Delta U. \quad (10S17.1)$$



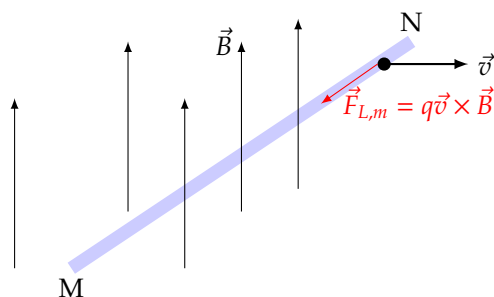
Slika 10S17.1

Ukoliko sad postoji i neka dodatna sila koja u strujnom krugu stvara potencijal, a *nije elektrostatskog porijekla* (slika 10S17.1), tada će *krivuljni integral električnog polja* po zatvorenom krugu biti i dalje 0, no

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} + \underbrace{\int_A^B \vec{F}_{ne-el} / q d\vec{l}}_{\Delta U_{BA}} = 0 \Rightarrow \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \Delta U_{AB} = - \int_A^B \frac{\vec{F}_{ne-el}}{q} d\vec{l} = \mathcal{E}. \quad (10S17.2)$$

U predznacima smo uzeli u obzir da neelektrostatska sila djeluje u *suprotnom smjeru* od elektrostatske. Ovako je definiran napon *otvorenog* strujnog kruga, odnosno uz pretpostavku da ne teče struja. Kad teče struja I , napon između točaka A i B manji je zbog *otpora izvora*, R :

$$\int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \Delta U_{AB} = \mathcal{E} - IR. \quad (10S17.3)$$



Slika 10S20.1

10S20 _____ [Gibanje vodiča u homogenom magnetskom polju.]

Pretpostavimo da se vodič giba u homogenom stalnom magnetskom polju, i da mu je brzina okomita na smjer magnetskog polja (slika 10S20.1).

U vodiču se po pretpostavci nalaze slobodni naboji, pa će, prema izrazu za magnetski član Lorentzove sile, na sve njih djelovati *sila duž vodiča*, ovisna o brzini i magnetskom polju

$$\vec{F}_{L,m} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F_{L,m} = qvB. \quad (10S20.1)$$

Ako se vodič nastavlja gibati, na kraju M (na slici, uz pretpostavku da su nosioci naboja pozitivni), će se nagomilavati pozitivni naboj, a na kraju N ostat će negativni naboj. To razdvajanje naboja pri gibanju kroz magnetsko polje nastaviti će se sve dok se sila zbog novouspostavljenog polja zbog razdvajanja naboja ne izjednači sa magnetskim članom zbog gibanja kroz polje, odnosno

$$qE = qvB \Rightarrow E = vB. \quad (10S20.2)$$

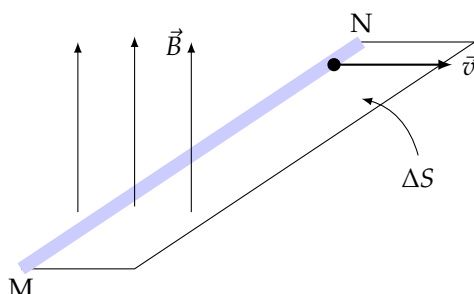
Potencijal koji se tako uspostavi (tj. elektromotorna sila) jednak je

$$\mathcal{E} = \int_M^N E dl = \int_M^N vB dl = vBl_{MN}, \quad (10S20.3)$$

jer su polje i brzina po pretpostavci konstantni.

10S24 _____ [Integralni oblik Faradayevog zakona.]

Integralni oblik Faradayevog zakona dobit ćemo koristeći već objašnjeni primjer indukcije elektromotorne sile (razlike potencijala) pri gibanju vodiča kroz magnetsko polje. Promotrimo ponovno primjer u prošlom odjeljku, ali ga interpretiramo pomoću *toka magnetskog polja*: put koji vodič duljine dl prevali u vremenu dt jednak je $dx = vdt$, pa iz jednadžbe 10S20.3 možemo pisati



Slika 10S24.1

$$\mathcal{E} = \int_M^N vB dl = \int \frac{dx}{dt} B dl = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{B} d\vec{S}}_{\Phi} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (10S24.1)$$

pri čemu je (-) predznakom u zadnja dva izraza zapisano **Lentzovo pravilo** prema kojem je polaritet inducirane elektromotorne sile određen tako da je struja koju elektromotorna sila uzrokuje takvog smjera da se *suprotstavlja promjeni toka magnetskog polja*. To praktično znači da će inducirana struja biti usmjerena tako da uzrokuje magnetsko polje u smjeru polja \vec{B} kad se tok polja smanjuje, odnosno suprotno od smjera polja ako se tok povećava!

10S28 _____ [Zadatak MI 2013-2014.]

Proton se giba u pozitivnom smjeru y -osi, pa njegovu brzinu možemo pisati kao

$$\vec{v} = 100 \text{ m/s} \cdot \hat{j}. \quad (10S28.1)$$

No, kako postoji i električno i magnetsko polje, jednoliko pravocrtno gibanje je moguće jedino ako je električno polje stalno okomito na smjer gibanja i upravo uravnotežava zakretanje zbog magnetskog člana Lorentzove sile. Ukupna Lorentzova sila mora biti jednaka 0, no izraze moramo gledati vektorski:

$$\vec{v} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{F}_L = 0 = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}. \quad (10S28.2)$$

Svi izrazi na desnoj strani jednadžbe 10S28.2 su nam poznati, pa samo trebamo izračunati vektorski produkt da odredimo traženo polje:

$$\vec{E} = - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 100 \text{ m/s} & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \text{ T} \end{vmatrix} = -\hat{i} \cdot 100 \cdot 0,01 \text{ V/m} = -1 \text{ V/m} \cdot \hat{i}. \quad (10S28.3)$$

11a - Rotacija vektorskog polja. Faradayev zakon. Ampère-Maxwellova jednadžba.

11S5 _____ [Faradayev zakon.]

U odjeljcima 10S1-3 definirali smo električni potencijal. Rekli smo da je potencijal *funkcija stanja* i ne ovisi o putu. Potencijal smo definirali kao krivuljni integral elektrostatske sile i tvrdili da će za zatvorenu krivulju vrijediti

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (11S5.1)$$

Faradayev zakon opisuje situaciju *elektromagnetske indukcije*. U tom slučaju na vodič ne djeluju isključivo elektrostatske sile (promatrali smo vodič u gibanju) i u tom slučaju smo pokazali da vrijedi

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (11S5.2)$$

Kako bismo iz ovog izraza došli do **Faradayevog zakona u integralnom obliku** valja prepoznati da su u *potpunoj derivaciji toka po vremenu opisana zapravo dva uzroka*: 1. eksplicitna promjena polja u vremenu, i 2. promjena uslijed gibanja vodiča u magnetskom polju. Može se pisati¹³

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}. \quad (11S5.3)$$

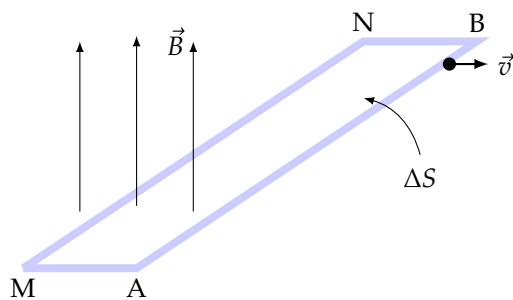
U sklopu Maxwellovih jednadžbi promatramo *samo* član u kojem je rotacija električnog polja inducirana *izravnom ovisnošću toka o vremenu*, tj.

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{B} d\vec{S}. \quad (11S5.4)$$

Primjer te razlike možemo uočiti kad na pomični vodič sa slike 11S5.1 koji se giba u homogenom i stalnom magnetskom polju priključimo strujni krug - iako postoji inducirana razlika potencijala, ona je takva da je u točkama A i M, odnosno B i N potencijal jednak, pa krivuljni integral po strujnom krugu iščezava (slika 11S5.1).

No, ako se tok kroz plohu ΔS promijeni, imat ćemo cirkulaciju magnetskog polja različitu od 0. U III Maxwellovoj jednadžbi tj. Faradayevom zakonu opisujemo *isključivo* tu situaciju.

¹³Detaljnije objašnjenje zahtijeva razmatranje koje prelazi razinu kolegija i može se naći u [članku](#) na Wikipediji.



Slika 11S5.1

11S6 _____ [Stokesov teorem i Faradayev zakon u diferencijalnom obliku.]

Kako bismo Faradayev zakon iz prošlog odjeljka napisali u diferencijalnom obliku, koristit ćemo matematički identitet koji povezuje integral cirkulacije vektorskog polja po površini i integral tog polja po krivulji koja omeđuje tu površinu

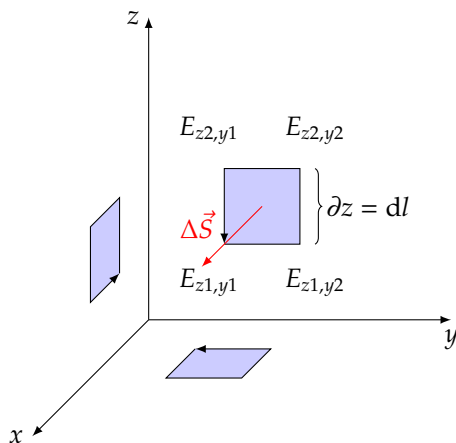
$$\oint_c \vec{f} d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{f}) d\vec{S}. \quad (11S6.1)$$

Taj se teorem naziva **Stokesov teorem**.

Najprije ćemo dati skicu dokaza tog teorema. Na slici 11S6.1 prikazane su projekcije na tri osi neke krivulje u 3D prostoru. U svakoj ravnini je dakle polje određeno iznosom u po četiri točke koje smatramo da su međusobno vrlo malo udaljene (tj. promatramo projekcije infinitezimalnog djelića krivulje c). Počnimo s definicijom zatvorenog integrala po krivulji, što raspišemo preko sume po svakoj od tih projekcija krivulje.

$$\oint_c \vec{f} d\vec{l} = \oint_c (f_x dx + f_y dy + f_z dz). \quad (11S6.2)$$

Račun provedemo nezavisno za svaku od projekcija, kako bismo pokazali da se izraz može napisati konačno



Slika 11S6.1

kao skalarni produkt rotacije polja $\nabla \times \vec{f}$ (izraz koji ovim postupkom želimo dobiti) i vektora djelića površine $d\vec{S}$ (koji je dakako smjera normale). Vektor djelića površine koji opisuje projekcija krivulje u npr. yz -ravnini je $\hat{i}dS_x = \hat{i}\partial y\partial z$.

Uzmimo npr. članove za krivuljni integral u yz -ravnini:

$$\begin{aligned}
 \oint_{yz} \vec{E} d\vec{l} &= \oint_{yz} (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = \\
 &= \oint_{yz} [(E_{z2,y2} - E_{z1,y2})dz + (E_{z1,y1} - E_{z2,y1})dz + (E_{z1,y2} - E_{z1,y1})dy + (E_{z2,y1} - E_{z2,y2})dy] = \\
 &\quad \underbrace{\Delta E_z(y_2) - \Delta E_z(y_1)}_{\frac{\partial E_z}{\partial y} \partial y} \underbrace{\Delta E_y(z_1) - \Delta E_y(z_2)}_{-\frac{\partial E_y}{\partial z} \partial z} \\
 &= \int_{S_{yz}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \partial y \partial z - \frac{\partial E_y}{\partial z} \partial z \partial y \right) = \int_{S_{yz}} (\nabla \times \vec{E})_x \partial z \partial y = \int_{S_{yz}} (\nabla \times \vec{E})_x (dS)_x,
 \end{aligned} \tag{11S6.3}$$

gdje smo koristili općeniti izraz

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \tag{11S6.4}$$

i približenje

$$\Delta E_z(y_2) - \Delta E_z(y_1) = \Delta_y(\Delta E_z) \approx \frac{\partial E_z}{\partial y} \partial y. \tag{11S6.5}$$

Vidimo dakle da smo dobili za krivuljni integral u jednoj ravnini upravo odgovarajući član u površinskom integralu rotacije električnog polja, pa možemo izvod u 11S6.3 poopćiti za sve tri ravnine, te dobiti upravo Stokesov teorem, jedn. 11S6.1. Pri tome smo dakle općenitu 3D krivulju prikazali kao sumu infinitezimalnih djelića čiji je oblik takav da je projekcija u svakoj od ploha zatvorena krivulja definiranog smjera obilaženja, [poput ove prikazane u Geogebri](#).

Faradayev zakon je iz integralnog oblika sad lako prevesti u diferencijalni:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\int_S (\nabla \times \vec{E}) d\vec{S}}_{\oint \vec{E} d\vec{l}} &= -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{B} d\vec{S} \Rightarrow \\
 \int_S (\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) d\vec{S} &= 0 \Rightarrow \\
 \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}.
 \end{aligned} \tag{11S6.6}$$

11S9 _____ [Ampèreov zakon.]

Magnetsko polje ravnog vodiča odredili smo u odjeljku 10S10 (jedn. 10S10.4).

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R\pi}. \tag{11S9.1}$$

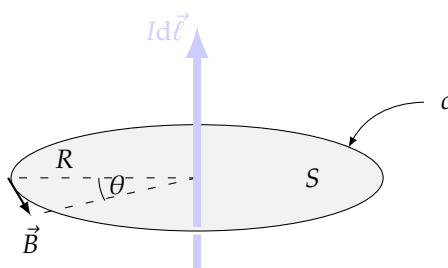
U tom izrazu možemo prepoznati krivuljni integral magnetskog polja konstantnog iznosa B po kružnici polumjera R . Pišući tako, dobivamo izraz kojeg poopćimo u **integralni zapis Ampèreovog zakona**

$$\underbrace{2R\pi}_\oint d\ell B = \mu_0 I \Rightarrow \oint_c \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I. \tag{11S9.2}$$

Situacija je prikazana na slici 11S9.1

Općenito, uz uključen i princip superpozicije izvora, pišemo Ampèreov zakon kao

$$\boxed{\oint_c \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_i I_i}. \tag{11S9.3}$$

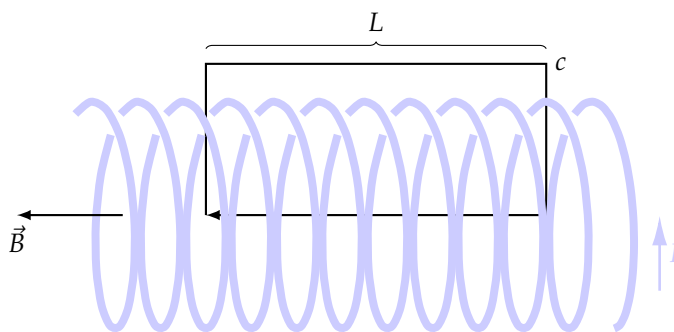


Slika 11S9.1

Ampèreov zakon opisuje *izvore* cirkulacije magnetskog polja. Magnetsko polje uzrokovano je gibanjem naboja (strujom) i jedinični element nije izvor ili ponor iz kojeg se šire silnice već zatvorena petlja silnica: magnetsko polje pojavljuje se samo kao neisčezavajuća cirkulacija silnica. Na taj način je Ampèreov zakon neizravan je analogon Gaussovom zakonu: dok Gaussov zakon opisuje nastajanje (silnica) električnog polja, Ampèreov zakon opisuje nastanak (silnica) magnetskog polja. Dok je električno polje opisano izvorom (točkom, nabojem) silnica, magnetsko je opisano *petljom u čijem je središtu struja*.¹⁴

11S11 _____ [Primjer korištenja Ampèreovog zakona za račun magnetskog polja.]

U posebnim slučajevima moguće je iskoristiti Ampèreov zakon kako bi se odredilo magnetsko polje bez korištenja Biôt-Savartovog zakona. Jedan takav primjer je račun magnetskog polja na osi uske i beskonačne zavojnice kojom teče struja (slika 11S11.1). Slično kao što smo kod korištenja Gaussovog zakona za određivanje električnog polja (odjeljak 9S15) trebali promišljeno odabrati plohu integracije, tako i ovdje trebamo promišljeno odabrati krivulju integracije. Polje strujne petlje u središtu je ovisno samo o struji i polumjeru petlje i prema pravilu desne ruke usmjereno okomito na petlju (odjeljak 10S10). Stoga za usku približno beskonačnu zavojnicu pretpostavljamo a) da je polje u središtu zavojnice stalnog iznosa, homogeno i izotropno; b) da je polje izvan zavojnice vrlo maleno, pa ga možemo zanemariti. Petlju koja će nam pomoći da odredimo homogeno polje provući ćemo kao na slici 11S11.1, središtem zavojnice i paralelno s tim dijelom, izvan zavojnice. Kraće dijelove koji spajaju ova dva člana duljine L moći ćemo proizvoljno smanjiti, pa ćemo tvrditi da su njihovi doprinosi ukupnoj cirkulaciji polja približno jednaki 0, iako polje u tim dijelovima može biti neisčezavajuće. Osim toga, doprinosi polju bi, zbog smjera struje u susjednim zavojima imali suprotan predznak, pa toliko dugo dok je zavojnica gusto namotana i beskonačna naše su pretpostavke valjane.



Slika 11S11.1

U situaciji kao na slici pretpostavimo da smo unutar duljine L obuhvatili krivuljom točno N navoja zavojnice. Tada plohu, čiji je rub krivulja c , "probada" N struja iznosa I , pa prema Ampèreovom zakonu

$$\left. \begin{aligned} \oint_c \vec{B} d\vec{\ell} &= B_u L + \overbrace{B_v L}^0 + \overbrace{B_r \Delta L}^{\approx 0} \approx B_u L \\ \mu_0 \sum_i I_i &= N \mu_0 I \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_u = \frac{\mu_0 N I}{L} \quad (11S11.1)$$

¹⁴Na simetričan način, pokazali smo da je *strujna petlja* izvor pravčaste silnice magnetskog polja. U tom je slučaju najlakše zamisliti elementarni magnetski 'kvant', magnetski dipol.

Koristeći Stokesov teorem (jedin. 11S6.1) i definiciju *gustoće struje*

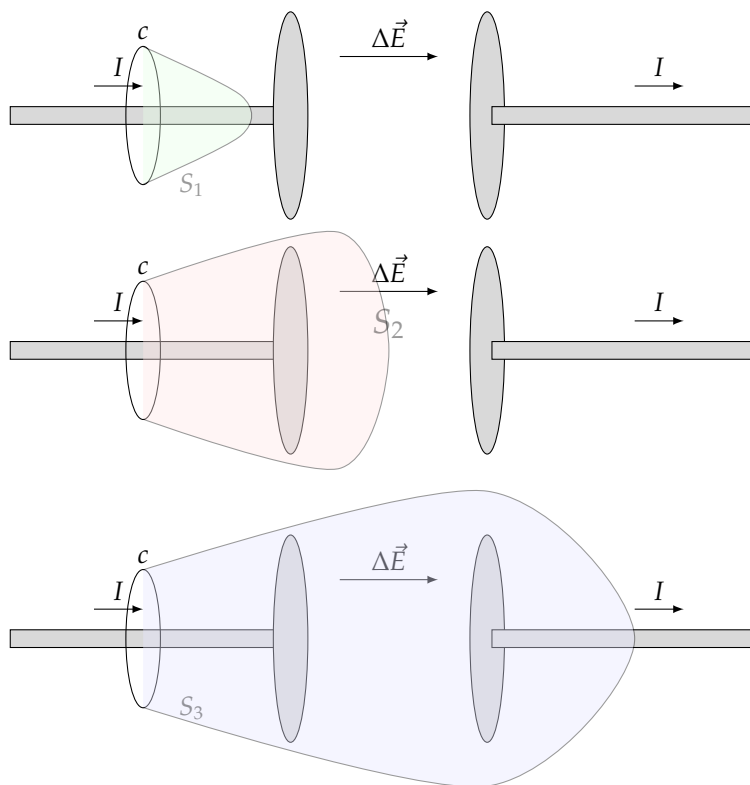
$$I = \int \vec{j} d\vec{S}$$

iz Ampèreovog zakona

$$\underbrace{\oint_c \vec{B} d\vec{\ell}}_{\int_S (\nabla \times \vec{B}) d\vec{S}} = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{S} \Rightarrow \int_S d\vec{S} (\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (11S12.1)$$

odmah smo dobili diferencijalni oblik Ampèreovog zakona. Kako će se pokazati, za potpunu IV Maxwellovu jednažbu (Ampère-Maxwellov zakon) ovdje će valjati dodati još jedan član.

Promotrimo situaciju koja je Maxwella navela da otkrije potrebu za dodavanjem još jednog člana u Ampèreov zakon: na slici 11S13.1 prikazana je situacija u kojoj se želimo poslužiti Ampèreovim zakonom kako bi odredili rotaciju magnetskog polja pri *nabijanju* pločastog kondenzatora. Prema Ampèreovom zakonu, cirkulacija po krivulji c povezana je tokom struje koja "probija" plohu čiji rub je ta krivulja. No, za situaciju na slici moguće je za istu krivulju c odabrati tri topološki različite plohe, označene na slici kao S1-S3.



Slika 11S13.1

I dok za izbor plohe S1 i S3 imamo situaciju u kojoj je cirkulacija polja dana strujom nabijanja kondenzatora prema poznatom Ampèreovom zakonu, za plohu S2 (na slici označena crveno) *struja ne teče*, pa bi za taj izbor plohe rezultat bio različit! Takav nesklad između teorijskog očekivanja (Stokesov zakon ne omogućuje različit opis ovisno o izboru plohe kojoj je krivulja c rubna) i ovog praktičnog misaonog eksperimenta potaknuo je Maxwella da potraži dodatni član koji bi:

- (i) Dao upravo iznos koji nedostaje pri izboru plohe S2 kroz koju ne teče struja, ali postoji *promjena električnog polja*;

- (ii) Bio u skladu s ostalim jednadžbama elektromagnetizma (Maxwellove jednadžbe i jednadžba kontinuiteta tj. definicija struje kao toka naboja);

Iz tih uvjeta, te polazeći od upravo potonje definicije struje, mogao je Maxwell nadograditi postojeći Ampèreov zakon uvodeći tzv. *pomaćni* (eng. 'displacement') naboj, koji je zapravo samo virtualna oznaka za naboj koji bi uzrokovao istu cirkulaciju magnetskog polja kao što ga uzrokuje dana promjena električnog polja ingeniozno prepoznavši da je naboj, a time i struju moguće izraziti iskoristivši Gaussov zakon:

$$\left. \begin{aligned} \oint_c \vec{B} d\vec{\ell} &= \mu_0(I + I_d) \\ I_d &= \frac{dQ}{dt} \\ \oint \vec{E} d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_d = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\oint_c \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} d\vec{S}}. \quad (11S13.1)$$

Ovo je integralni oblik Ampèreovog zakona. Primjenom Stokesovog teorema (jedm. 11S6.1) odmah se dobiva i njegov diferencijalni oblik:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}. \quad (11S13.2)$$

11b - Energija električnog i magnetskog polja.

11S18 _____ [Energija električnog polja.]

Skicirat ćemo kako bi energiju električnog polja odredili kao ukupnu energiju u nekom volumenu. Na taj način bit će nam posebno zanimljiva veličina *gustoća energije*, w_e definirana kao

$$w_e = \frac{W}{V}. \quad (11S18.1)$$

Prema jedn. 11S18.1 vidimo da ćemo energiju u ovom izvodu označiti preko rada, prije svega da izbjegnemo zamijenu s iznosom električnog polja.

Prema definiciji potencijala (odjeljak 10S1) te za homogeno polje u pločastom kondenzatoru površina ploča S i razmaka l možemo pisati

$$\left. \begin{aligned} dW &= U dQ = E l dQ \\ \oint \vec{E} d\vec{S} &= ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow dQ = \epsilon_0 S dE \end{aligned} \right\} \Rightarrow W = \int dW = \epsilon_0 S l \int E dE = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V. \quad (11S18.2)$$

Iz 11S18.1 i 11S18.2 odmah slijedi

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}. \quad (11S18.3)$$

11S19 _____ [Energija magnetskog polja.]

Skicirat ćemo kako bi energiju magnetskog polja odredili kao ukupnu energiju u nekom volumenu. *Gustoća energije*, w_m magnetskog polja je, jednako kako i u slučaju električnog polja definirana kao

$$w_m = \frac{W}{V}. \quad (11S19.1)$$

Za homogeno magnetsko polje u zavojnici površine presjeka S i duljine L kojom teče struja I možemo pisati

$$\left. \begin{aligned} dW &= U dQ = UI dt = U \frac{LB}{N\mu_0} dt \\ |U| &= |\mathcal{E}| = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{S} = NS \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow W = \int dW = \frac{1}{\mu_0} SL \int B dB = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V, \quad (11S19.2)$$

gdje smo koristili izraz za magnetsko polje u središtu zavojnice

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}.$$

Iz 11S19.1 i 11S19.2 slijedi

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (11S19.3)$$

U ova dva odjeljka skicirali smo jednostavan izvod za gustoću energije električnog i magnetskog polja za posebne slučajeve. Pokazat ćemo ubrzo kako su dobiveni izrazi općeniti te vrijede za račun energije elektromagnetskog polja u vakuumu posve neovisno o geometriji odnosno vrsti izvora polja.

12a - Elektromagnetski valovi. Valna jednačba, Poyntingov vektor.

12S2 [Valna jednačba elektromagnetskih valova.]

Maxwellove jednačbe u vakuumu poprimaju gotovo posve simetričan oblik u odnosu na električno i magnetsko polje:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} &= 0 & \nabla \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (12S2.1)$$

Valnu jednačbu ćemo izvesti tako da još jednom primijenimo operator rotacije na jedan od zadnja dva izraza:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (12S2.2)$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili Maxwellovu jednačbu za rotaciju magnetskog polja. Kako bi dobili valnu jednačbu trebamo još iskoristiti matematički identitet:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}. \quad (12S2.3)$$

Uvrštavajući taj izraz za rješavanje odgovarajućeg izraza u 12S2.2 dobivamo

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (12S2.4)$$

jer je (prema uvjetu da valnu jednačbu izvodimo u *vakuumu*) $\nabla \cdot \vec{E} = 0$!

Operator ∇^2 često se naziva *Laplaceov operator* i ima oblik

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Jedn. 12S2.4 je dakle upravo (trodimenzionalni) oblik **valne jednačbe**

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (12S2.5)$$

gdje je faktor uz drugu derivaciju po vremenu povezan s *faznom brzinom* kao

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \quad (12S2.6)$$

(usporedite s jednačbama u poglavlju 6a).

Najjednostavnije je transverzalnost elektromagnetskih valova dokazati uzimajući *linearno polariziran putujući ravni (monokromatski) val*, odnosno njegovu električnu komponentu:

$$\vec{E} = E_0 \hat{n} \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \quad (12S3.1)$$

uz

$$\begin{aligned} \vec{k} &= k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \\ \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}. \end{aligned} \quad (12S3.2)$$

Iz uvjeta

$$\nabla \vec{E} = 0$$

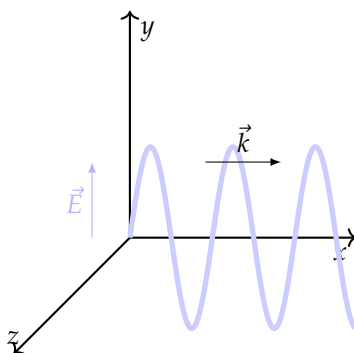
slijedit će transverzalnost.

Kako bi to pokazali, primijenimo divergenciju na polje zadano oblikom 12S3.1

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} &= E_0 \hat{n} \nabla (\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) = \\ &= E_0 \hat{n} [k_x \hat{x} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + k_y \hat{y} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + k_z \hat{z} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] = \\ &= E_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \underbrace{\hat{n} [k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}]}_{\vec{k}} = 0 \Rightarrow \hat{n} \cdot \vec{k} = 0. \end{aligned} \quad (12S3.3)$$

Kako je \hat{n} upravo smjer u kojem titra amplituda električnog ravnog linearno polariziranog vala, a \vec{k} valni vektor (koji je, kako se sjećamo otprije, usmjeren u smjeru širenja vala), upravo smo pokazali da je *smjer titranja električnog polja okomit na smjer širenja*, što je definicija transverznog vala.

U prošlom odjeljku pokazali smo da je smjer titranja električnog polja okomit na smjer širenja elektromagnetskog vala. No, kako su komponente električnog i magnetskog polja *povezane Maxwellovim jednadžbama*, želimo vidjeti što se tada zbiva s magnetskim poljem. Pretpostavimo ravni harmonički linearno polarizirani elektromagnetski val, a smjer titranja električnog polja i širenja vala izaberemo kao na slici 12S4.1.



Slika 12S4.1

To matematički zapisujemo u obliku:

$$\vec{E} = E_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t) \quad (12S4.1)$$

i primijenimo na takvo polje Faradayev zakon u vakuumu:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (12S4.2)$$

odakle imamo

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 \sin(kx - \omega t) & 0 \end{vmatrix} = \hat{z} E_0 k \cos(kx - \omega t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (12S4.3)$$

Pa integracijom po vremenu lako dobijemo (u ovom slučaju jedinu postojeću) z-komponentu magnetskog polja:

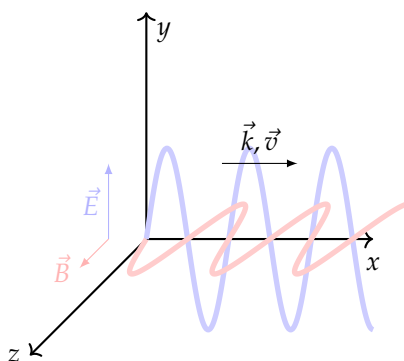
$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \hat{z} k E_0 \cos(kx - \omega t) \Big| \cdot \hat{z} \Rightarrow B_z = -k E_0 \int \cos(kx - \omega t) dt = E_0 \frac{k}{\omega} \sin(kx - \omega t). \quad (12S4.4)$$

U jednadžbi član k/ω prepoznamo kao recipročnu faznu brzinu, v , pa naposljetku imamo da je magnetsko polje u ovom slučaju oblika

$$\vec{B} = \hat{z} B_z = \hat{z} \frac{E_0}{v} \sin(kx - \omega t). \quad (12S4.5)$$

Vidimo da su odgovarajuće komponente magnetskog i električnog polja u fazi (oba titraju istom fazom), da su međusobno okomite (promjenjivo E_y inducira samo B_z), i oba polja okomita na smjer širenja! Time smo samo potvrdili transversalnost elektromagnetskih valova. Odnos amplituda električne i magnetske komponente je

$$B_z = \frac{E_y}{v}. \quad (12S4.6)$$



Slika 12S4.2

Možemo te odnose predočiti slikom, kao što je prikazano na sl. 12S4.2. Možemo također činjenicu da su polja međusobno okomita, da im je odnos amplituda dan s 12S12.5 te da su polja okomita na smjer širenja (kao i smjer brzine, \vec{v}) sažeti izrazima koji povezuju vektore \vec{E} , \vec{B} i \vec{v} :

$$\begin{aligned} \hat{E} \times \hat{B} &= \hat{v} & E &= Bv \\ \vec{E} &= \vec{B} \times \vec{v} & \vec{B} &= \frac{\hat{v} \times \vec{E}}{v} \end{aligned} \quad (12S4.7)$$

Te izraze najlakše je razumjeti pomažući se slikom 12S4.2 i pravilom desne ruke.

Simulacija širenja EMV prikazana je interaktivno i u Geogebri. (Na taj ćemo se prikaz češće vraćati u poglavlju 12b kod opisa polarizacije.)

12S5 _____ [Brzina elektromagnetskog vala.]

Kod izvoda valne jednadžbe elektromagnetskih valova već smo pokazali da je fazna brzina u vakuumu definirana preko dielektrične konstante vakuuma i permeabilnosti vakuuma (jedn. 12S2.6).

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (12S5.1)$$

I eksperimentalno je pokazano da se elektromagnetski val u vakuumu (i približno zraku) širi brzinom svjetlosti, c . To je bila prva indikacija da je svjetlost uistinu elektromagnetski val!

U sredstvu (u kojemu i dalje ne očekujemo pojavu slobodnih naboja i struja, tj. i dalje su približno ostvareni uvjeti, jedn. 12S2.1, pod kojima smo izveli valnu jednadžbu) dielektrična konstanta i permeabilnost postaju

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 \mu_r \\ \epsilon &= \epsilon_0 \epsilon_r, \end{aligned} \quad (12S5.2)$$

te u skladu s tim

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c}{n}, \quad (12S5.3)$$

gdje je n iz optike poznati *indeks loma* sredstva definiran kao

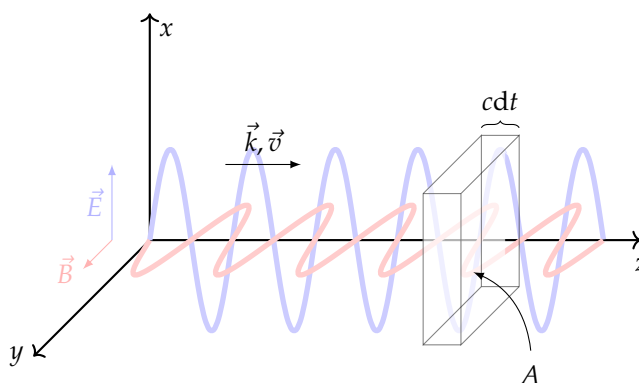
$$n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}. \quad (12S5.4)$$

Njim su opisani učinci induciranih struja i naboja (polarizacija) u tvari na brzinu prijenosa elektromagnetskog zračenja (energije EMV) u tvari.

12S10 _____ [Poyntingov vektor, skica izvoda.]

Pojednostavljeni opis Poyntingova vektora temelji se na izvodu prikazanom u [2], str. 185-186. Počinjemo podsjećanjem na izraze za energiju električnog i magnetskog polja izvedene u poglavlju 11b, kao i vezi komponenti polja elektromagnetskog vala izvedene u odjeljku 12S4. Ukupna energija elektromagnetskog vala u nekom djeliću volumena ΔV (slika 12S10.1) jednaka je gustoći energije električnog i magnetskog polja prisutnih u valu u tom volumenu.

$$\left. \begin{aligned} \Delta W &= \Delta W_e + \Delta W_m \\ \Delta W_e &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 V \\ \Delta W_m &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 V \\ E &= E_x, B = B_y \Rightarrow B_y = \frac{E_x}{c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 = \epsilon_0 E_x^2 = \frac{1}{\mu_0} B_y^2. \quad (12S10.1)$$



Slika 12S10.1

Poyntingov vektor opisuje *snagu izzračenu kroz neku površinu*. Standardno se označava vektorom \vec{S} , koji ima smjer jednak smjeru širenja vala. (Zato smo ovdje površinu volumena označili s A , kako bi izbjegli zabunu.) Iz jedn. 12S10.1 možemo pisati

$$\Delta W = \frac{1}{\mu_0} B_y^2 \Delta V = \frac{1}{\mu_0} B_y \underbrace{\frac{E_x}{c}}_{B_y} A c dt, \quad (12S10.2)$$

pa

$$P = \frac{d}{dt} \Delta W = \frac{1}{\mu_0} E_x B_y A \Rightarrow \frac{P}{A} \equiv |\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0} E_x B_y, \quad (12S10.3)$$

što je naš poseban izraz za slučaj ovako izabranih polja. Smjerovi \vec{E} i \vec{B} su u elektromagnetskom valu okomiti i okomiti na smjer širenja vala (za koji smo rekli da je istovremeno i smjer Poyntingova vektora), pa općenito zadnji izraz u 12S10.3 možemo poopćiti na

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}}. \quad (12S10.4)$$

Jedn. 12S10.4 definicijski je izraz za Poyntingov vektor koji ćemo uskoro izvesti i općenitije, iz Maxwellovih jednažbi.

Izvod ovdje slijedi uglavnom onaj dan u [4] str. 6-7 i 6-8. Rad Lorentzove sile na djelić naboja dq koji se nalazi u djeliću volumena na slici 12S10.1 može se pisati

$$dW = \vec{F}_L d\vec{s} = dq \vec{E} \vec{v} dt. \quad (12S11.1)$$

Naboj i brzinu (što su svojstva čestice na koju polje može djelovati) želimo napisati preko veličina koje možemo izraziti Maxwellovim jednadžbama. Pokažimo stoga da je član $\vec{v} dq$ moguće napisati preko *gustoće struje* \vec{J} . Počinjemo s jedn. 10S7.2 tj. 10S7.3

$$\vec{J} = n_0 q \vec{v}, \quad (12S11.2)$$

gdje je n_0 broj naboja po jedinici volumena, pa se, za naše oznake ovdje može pisati

$$\vec{J} = dq \vec{v} \frac{1}{\Delta V} \Rightarrow dq \vec{v} = \vec{J} \Delta V, \quad (12S11.3)$$

što uvrstimo u 12S11.1 kako bi dobili izraz za snagu

$$P = \frac{dW}{dt} = \int dq \vec{E} \vec{v} = \int (\vec{E} \vec{J}) dV. \quad (12S11.4)$$

Iz Ampère-Maxwellova zakona sad možemo izraziti gustoću struje

$$\vec{J} = \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (12S11.5)$$

što uvrstimo u 12S11.4, pa

$$P = \int \vec{E} \left(\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV = \int \vec{E} (\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}) dV - \epsilon_0 \int \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV. \quad (12S11.6)$$

Drugi član možemo pisati u obliku kakav smo ranije sreli, uzmemo li u obzir

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{E} = 2 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t},$$

pa je drugi član u 12S11.6 jednak

$$- \epsilon_0 \int \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV = - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}^2 dV. \quad (12S11.7)$$

Prvi pak član raspišemo koristeći matematički identitet za divergenciju vektorskog produkta, tj.

$$\nabla (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} (\nabla \times \vec{b}). \quad (12S11.8)$$

Primjenom ovog izraza na prvi član u 12S11.6, uz npr. $\vec{a} \rightarrow \vec{E}$ i $\vec{b} \rightarrow \vec{B}/\mu_0$ slijedi

$$\int \vec{E} (\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}) dV = \frac{1}{\mu_0} \int \vec{B} (\nabla \times \vec{E}) dV - \frac{1}{\mu_0} \int \nabla (\vec{E} \times \vec{B}) dV. \quad (12S11.9)$$

Iz prvog člana u 12S11.9 primjenom Faradayevog zakona odmah dobijemo oblik nalik 12S11.7, samo za magnetsko polje:

$$\frac{1}{\mu_0} \int \vec{B} (\nabla \times \vec{E}) dV = - \frac{1}{\mu_0} \int \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV = - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B}^2 dV. \quad (12S11.10)$$

Drugi pak član već ima oblik nalik Poyntingovu vektoru kakav smo definirali u prethodnom odjeljku. Za prijeći iz volumnog integrala divergencije u tok po površini samo trebamo primijeniti Gaussov teorem:

$$- \frac{1}{\mu_0} \int \nabla (\vec{E} \times \vec{B}) dV = - \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{E} \times \vec{B} d\vec{S}. \quad (12S11.11)$$

Naposljetku smo dakle dobili snagu zračenja elektromagnetskog vala (12S11.6) kao sumu izraza 12S11.7, 12S11.9 i 12S11.10, odnosno:

$$P = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) dV - \frac{1}{\mu_0} \oint (\vec{E} \times \vec{B}) d\vec{S}. \quad (12S11.12)$$

Ovo je **Poyntingov teorem** koji opisuje promjenu energije elektromagnetskog vala. Ukupna promjena energije u nekom vremenu sastoji se od

- a) promjene gustoće energije u nekom *volumenu* V , i
b) toka polja kroz *plohu* S koja omeđuje taj volumen.

Ovaj potonji član ono je što opisujemo *intenzitetom* odnosno Poyntingovim vektorom.

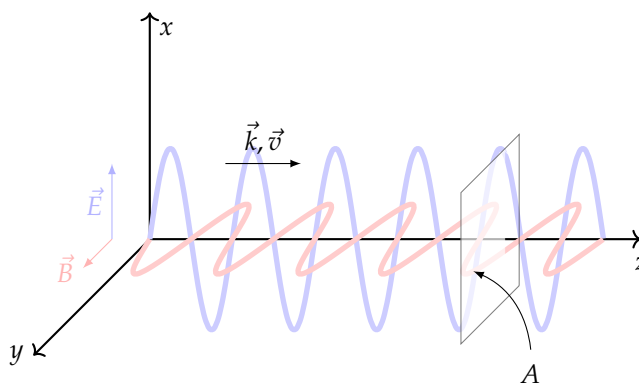
12S12 [Intenzitet. Prijenos količine gibanja.]

Odredimo intenzitet elektromagnetskog zračenja - srednju snagu toka zračenja po jedinici površine. Pretstavimo linearno polariziran ravni val kao u odjeljcima 12S4 i 12S10. Uzmimo da se širi u smjeru pozitivne z -osi

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t). \quad (12S12.1)$$

Magnetsko polje može se izračunati kao prije pomoću Faradayeva zakona, a možemo ga odmah i napisati, uz pomoć skice i znajući da polja titraju u fazi te da se iznosi amplitude električnog i magnetskog polja odnose kao

$$B_y = \frac{E_x}{c}, \vec{B} = \hat{y} B_y \Rightarrow \vec{B} = \hat{y} \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t). \quad (12S12.2)$$



Slika 12S12.1

Odredimo sad Poyntingov vektor iz 12S10.4:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ E_0 \sin(kz - \omega t) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) & 0 \end{vmatrix} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \hat{z} \sin^2(kz - \omega t). \quad (12S12.3)$$

Srednja snaga (prosjeck u jednom periodu) može se pisati

$$\langle \vec{S} \rangle_T = \epsilon_0 c E_0^2 \underbrace{\langle \sin^2(kz - \omega t) \rangle_T}_{=1/2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2, \quad (12S12.4)$$

pri čemu smo koristili vezu

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}.$$

Elektromagnetski val prenosi i *količinu gibanja* na naboj. Koju količinu gibanja prenosi EMV vidjet ćemo promatrajući linearno polariziran EMV i računajući promjenu količine gibanja kao posljedicu Lorentzove sile kojima polja u EMV djeluju na neki probni naboj q . Količinu gibanja može promijeniti i magnetsko polje, pa pišemo za promjenu usrednjenu po jednom periodu

$$\left\langle \frac{d\vec{P}}{dt} \right\rangle_T = q \langle E_x \rangle \hat{x} + q \langle B_y (v_x \hat{x} + v_z \hat{z}) \times \hat{y} \rangle = q \langle B_y \dot{x} \rangle \hat{z} - q \langle B_y \dot{z} \rangle \hat{x}. \quad (12S12.5)$$

Svi oscilirajući članovi u jednom periodu usrednje se na 0. To je bio slučaj s električnim doprinosom u jedn. 12S12.5. Brzina naboja u z -smjeru približno je malena ili može biti konstantna, dok B_y oscilira, pa i taj član iščezava. No, umnožak brzine u x -smjeru i magnetskog polja različit je od 0, jer *oba člana osciliraju istom frekvencijom*. Imamo dakle

$$\left\langle \frac{d\vec{P}}{dt} \right\rangle_T = q \langle B_y \dot{x} \rangle \hat{z}. \quad (12S12.6)$$

Prisjetimo se sada činjenice da energiju može prenijeti jedino električno polje, pa pišemo za promjenu energije (snagu)

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T = \langle \vec{F} \vec{v} \rangle = q \langle E_x \dot{x} \rangle, \quad (12S12.7)$$

pri čemu valja imati na umu da je brzina u x-smjeru brzina gibanja *probnog naboja* a ne fazna brzina vala! No, kako znamo da je $E_x = cB_y$:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T = qc \langle B_y \dot{x} \rangle \quad (12S12.8)$$

slijedi uvrštavanjem u 12S12.6

$$\left\langle \frac{d\vec{P}}{dt} \right\rangle_T = \frac{1}{c} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T \hat{z}. \quad (12S12.9)$$

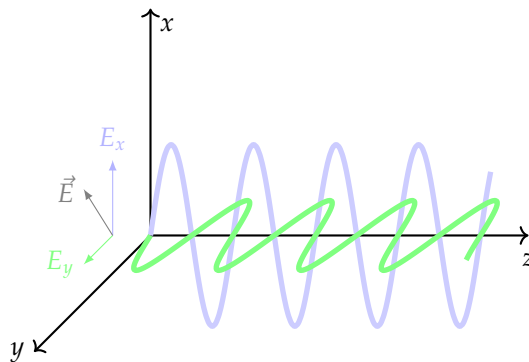
Vidimo dakle da smo na ovaj način pokazali kakva je veza između prenesene količine gibanja i energije EMV. Primijetite da je veza nalik onoj koju smo imali za vezu količine gibanja bezmasene relativističke čestice (npr. foton!) i njene energije:

$$p = E/c.$$

12b - Polarizacija elektromagnetskih valova.

12S13 _____ [Linearna, eliptična i cirkularna polarizacija EMV.]

Rekli smo da je elektromagnetski val transversalan. No, to još uvijek ostavlja mogućnost da se polje u transversalnoj ravnini raspiše *preko dvije komponente* (slika 12S13.1).



Slika 12S13.1

Općenito možemo očekivati da je svaka od komponenti opisana s

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \sin(kz - \omega t + \phi_x) \\ E_y &= E_{0y} \sin(kz - \omega t + \phi_y) \end{aligned} \quad (12S13.1)$$

I) Pokažimo najprije kako bi izgledalo resultantno električno polje, ako dvije komponente titraju u fazi:

$$\phi_x = \phi_y = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = \hat{x} E_{0x} \sin(kz - \omega t) + \hat{y} E_{0y} \sin(kz - \omega t) = \sin(kz - \omega t) (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y}). \quad (12S13.2)$$

Vektor polarizacije je

$$\hat{E} = \frac{E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y}}{|\vec{E}|} \quad (12S13.3)$$

i vidimo da je *vektor polarizacije stalan u vremenu* (u izrazu gore to je konstantni vektor u xy-ravnini) i ovisi o odnosu amplituda komponenti polja. To je situacija kada imamo **linearno polariziran** EMV.

II) Kako bi izgledalo resultantno električno polje, ako dvije komponente titraju s proizvoljnim pomakom u fazi? Uzmimo

$$\phi_x = 0, \phi_y \neq 0 \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = \hat{x} E_{0x} \sin(kz - \omega t) + \hat{y} E_{0y} \sin(kz - \omega t + \phi_y). \quad (12S13.4)$$

Vektor polarizacije je ovdje općenita superpozicija dvaju titranja istom frekvencijom, različitih amplituda i s nekim pomakom u fazi. Ovako superponirano titranje kao što se u [simulaciji](#) pokazuje opisuje **eliptičnu** polarizaciju: projekcija promjene vektora rotacije opisuje elipsu.

III) Pogledajmo naposljetku kako bi izgledalo rezultantno električno polje, ako dvije komponente imaju jednake amplitude i titraju s pomakom u fazi od $\pi/2$. Uzmimo

$$\phi_x = 0, \phi_y = \pi/2, E_{0x} = E_{0y} = E_0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = \hat{x} E_0 \sin(kz - \omega t) + \hat{y} E_0 \sin(kz - \omega t + \pi/2) \\ &= E_0 (\hat{x} \sin(kz - \omega t) + \hat{y} \cos(kz - \omega t)). \end{aligned} \quad (12S13.5)$$

Vektor polarizacije u jednoj komponenti odnosi se kao funkcija sinus, a u drugoj kao kosinus: takvo je ponašanje upravo ono koje opisuje vektor koji prati točku koja rotira po kružnici!

$$\hat{E} = \frac{\hat{x} \sin(kz - \omega t) + \hat{y} \cos(kz - \omega t)}{\sqrt{2}} \quad (12S13.6)$$

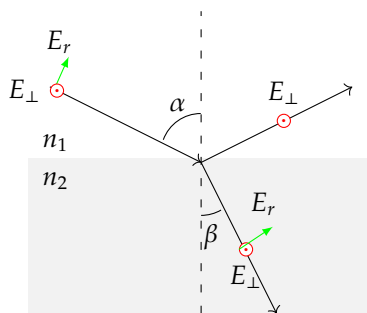
Upravo kao kružnica i izgleda projekcija ovog polja u transverzalnoj ravnini, pa se ovako polarizirano polje i naziva **cirkularnom** polarizacijom.

Na [simulaciji](#) u Geogebri moguće je mijenjati iznos i fazu dvaju transverzalnih komponenti električnog i magnetskog polja. Na taj način moguće je vidjeti ovo što smo ovdje matematički pokazali:

- Polarizacija je *linear*na ako su transverzalne komponente u fazi.
- Polarizacija je *eliptič*na ako su transverzalne komponente polja pomaknute u fazi za proizvoljan iznos, a amplitude im se mogu razlikovati.
- Polarizacija je *cirkular*na ako je pomak u fazi dvaju transverzalnih komponenti polja jednak $\pi/2$, a amplitude su im jednake.

12S15 [Polarizacija refleksijom - Brewsterov kut.]

Na slici 12S15.1 prikazana je zraka svjetlosti koja se lomi na granici sredstava. Do polarizacije *reflektirane zrake* u toj situaciji dolazi zbog činjenice da su elektromagnetski valovi transverzalni i geometrije problema: oscilacije na granici koje su ponajprije uzrok reflektiranoj i lomljenoj zraci mogu se odvijati pretežno u ravnini koja je granica sredstava. Upadna zraka može imati komponentu i u ravnini refleksije (ova ravnina prikazana na slici), E_r , ali i okomito na tu ravninu, E_\perp . Komponente upadne zrake prenose dalje reflektirana i lomljena zraka preko oscilacija dipola na granici sredstava. Komponenta upadne zrake E_r (komponenta u ravnini refleksije) samo se malim dijelom može prenijeti lomljenom zrakom, jer ta komponenta uglavnom nije transverzalna na tu zraku. Ako je kut između lomljene i reflektirane zrake 90° , svo titranje u ravnini refleksije preuzima lomljena zraka, a reflektirana zraka je gotovo posve polarizirana *okomito na ravninu refleksije*!



Slika 12S15.1

Nakon ovog obrazloženja, uvjet za najbolju polarizaciju refleksijom lako je izvesti iz uvjeta da kut loma i kut refleksije (kut upada) čine zajedno pravi kut, te Snellovog zakona loma

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (12S15.1)$$

Sa slike (i iz opisa) uvjet maksimalne polarizacije je

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Uvrstimo li to u Snellov zakon, dobivamo uvjet maksimalne polarizacije, ovisan o odnosu indeksa loma u dva sredstva:

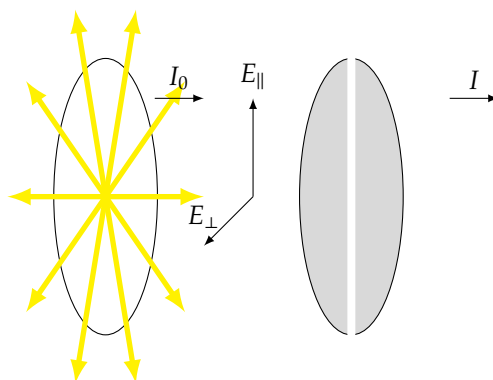
$$\frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{n_2}{n_1}. \quad (12S15.2)$$

Na [stranici](#) je dostupna simulacija koja olakšava objašnjenje uzroka polarizacije. Slično se može vidjeti i na [Replit-u](#), no (nakon prijavljene pogreške) u UNIX konzoli valja utipkati: "java -jar ejs_waves_brewster.jar".

12S18 _____ [Intenzitet nepolariziranog i polariziranog elektromagnetskog zračenja.]

Polarizator je uređaj načinjen od *polaroida* - tvari koja je sačinjena od posebnih, usmjerenih molekula što pokazuju pojavu *dikroizma*, različitog propuštanja različito polariziranih zraka svjetlosti (ili, različito usmjerenih komponenti EMV).

Početno nepolarizirana svjetlost intenziteta I_0 pada na polarizator. Pitamo se koliki je intenzitet izlaznog snopa (slika 12S18.1).



Slika 12S18.1

Možemo taj problem riješiti na dva načina:

1. Možemo ukupno polje koje upada na polaroid podijeliti na komponentu paralelnu smjeru propuštanja i okomitu na nju:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} = \hat{x}E_{\parallel} + \hat{y}E_{\perp} \Rightarrow I_0 = \text{konst.}(E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2), \quad (12S18.1)$$

no kako su u nepolariziranoj svjetlosti *svi smjerovi jednako zastupljeni*, uzimamo da je $E_{\perp} = E_{\parallel}$, pa

$$I_0 = \text{konst.}(2E_{\parallel}^2). \quad (12S18.2)$$

No izlazni intenzitet je dan samo preko izlaznog polja:

$$I = \text{konst.}E_{\parallel}^2. \quad (12S18.3)$$

Kako su konstante jednake u oba slučaja, možemo iz ove dvije jednadžbe dobiti odmah

$$I = \text{konst.}E_{\parallel}^2 = \frac{I_0}{2}. \quad (12S18.4)$$

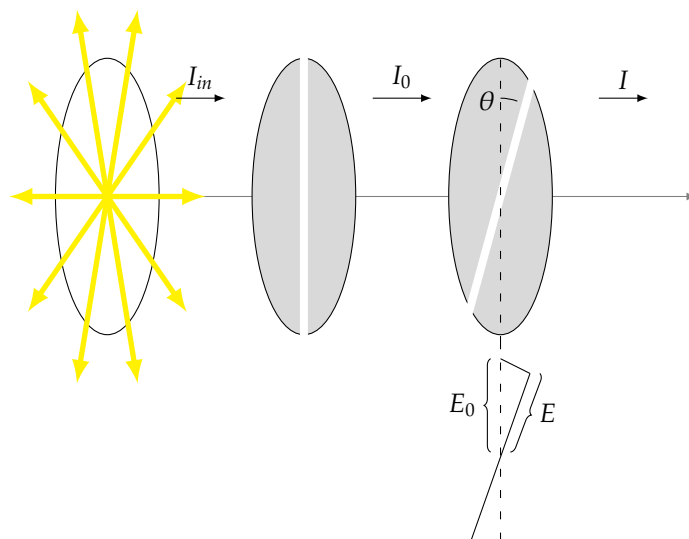
2. Drugi način za dobiti isti rezultat je korištenje veze između izlaznog polja iz polarizatora ovisno o smjeru upadnog polja (**Malusov zakon**)

$$E = E_{\parallel} = E_0 \cos \theta, \quad (12S18.5)$$

gdje je θ kut između smjera propuštanja polarizatora i smjera polarizacije upadne zrake. No, kako upadni snop nepolariziranog svjetla ima *bilo koju* polarizaciju, intenzitet izlaznog snopa je *srednja vrijednost po svim kutevima*, dakle:

$$I_{\theta} = I_0 \cos^2 \theta \Rightarrow I = \langle I_{\theta} \rangle = \left\langle I_0 \cos^2 \theta \right\rangle = \frac{I_0}{2}, \quad (12S18.6)$$

Nadogradimo sad naš sustav iz prošlog primjera s još jednim polarizatorom koji je pod kutem θ u odnosu na prethodni, i računamo intenzitet nakon njega. Upadnim intenzitetom I_0 ovaj put označimo već *polariziranu* zraku (slika 12S19.1). Intenzitet I je sada posljedica električnog polja koje je *projekcija* na smjer propuštanja.



Slika 12S19.1

Polje je dakle

$$E = E_0 \cos \theta, \quad (12S19.1)$$

no kako je intenzitet $I \propto E^2$, intenziteti linearно polariziranog vala prije i nakon zakrenutog polarizatora se odnose kao

$$I_\theta = I_0 \cos^2 \theta, \quad (12S19.2)$$

što je **Malusov zakon**.

Za sljedeća dva primjera ponovno nadogradimo sustav iz prošlog odjeljka s dodatnim polarizatorom. Njega postavljamo najprije *paralelno* s ulaznim polarizatorom (slika 12S20.1).

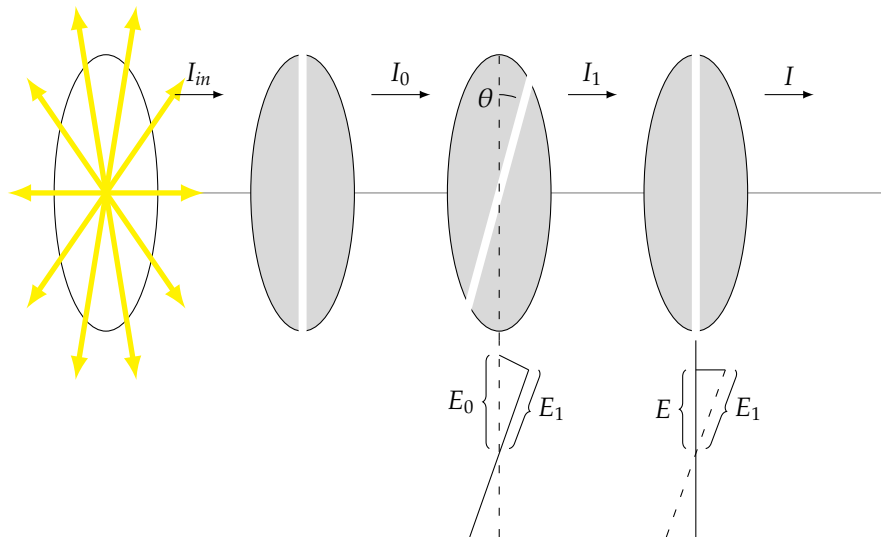
Sa slike i sheme ispod slike razaznajemo da vraćanje polarizatora u osnovni položaj za zraku zakrenutu za θ od vertikale ima isti učinak kao da takvu zraku, ovaj puta već smanjenog polja E_1 , ponovno želimo projicirati na smjer pod kutem θ u odnosu na njenu polarizaciju. Možemo pisati (možda lakše razmatrajući polja *od kraja*)

$$E = E_1 \cos \theta = \underbrace{(E_0 \cos \theta)}_{E_1} \cos \theta = E_0 \cos^2 \theta. \quad (12S20.1)$$

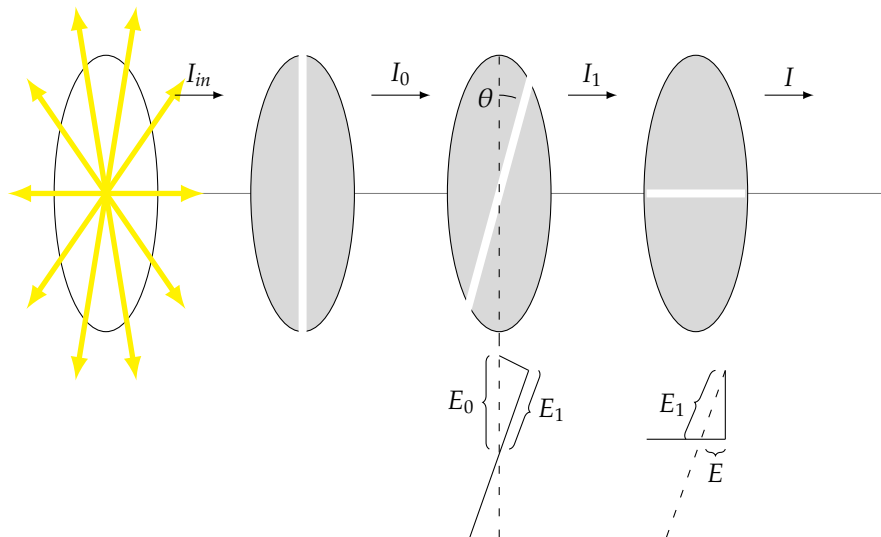
Intenzitet je onda

$$I = I_0 \cos^4 \theta. \quad (12S20.2)$$

Ovi primjeri mogu se interaktivno proučavati pomoću [simulacije na Geogebri](#).



Slika 12S20.1



Slika 12S21.1

12S21 ————— [Prolaz svjetlosti kroz sustav polarizatora - okomiti ulazni i izlazni polarizator.]

U ovom primjeru postavimo izlazni polarizator *okomito* na ulazni (slika 12S21.1). Donekle suprotno intuitivnom shvaćanju, pokazat će se da izlazni intenzitet *neće biti 0!* Pokažimo to.

Sa slike i sheme ispod slike razaznajemo da postavljanje polarizatora u vodoravan položaj za zraku zakrenutu za θ od vertikale ima učinak kao da takvu zraku projiciramo na smjer pod kutem $90^\circ - \theta$ u odnosu na njenu polarizaciju. Možemo pisati, ponovno razmatrajući polja od kraja

$$E = E_1 \cos(90^\circ - \theta) = \underbrace{(E_0 \cos \theta)}_{E_1} \sin \theta = E_0 \cos \theta \sin \theta. \quad (12S21.1)$$

Koristimo poznati trigonometrijski identitet

$$\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta,$$

pa pišemo

$$E = \frac{E_0}{2} \sin(2\theta). \quad (12S21.2)$$

Intenzitet je onda

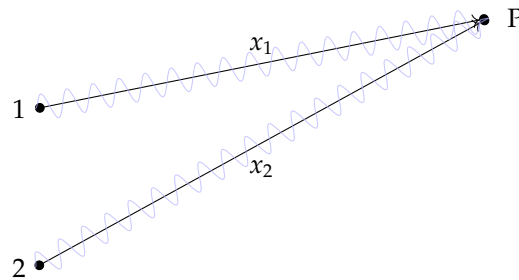
$$I = \frac{I_0}{4} \sin^2(2\theta), \quad (12S21.3)$$

i uistinu je *različit od 0*, no jedino ako između dvaju okomito postavljenih polarizatora postoji neki koji će u odnosu na oba biti zakrenut za neki kut. Postavljanjem sustava polarizatora možemo dakle *zakrenuti* ravninu polarizacije!

13a - Interferencija elektromagnetskih valova. Youngov pokus.

13S14 [Interferencija svjetlosti iz dva točkasta izvora.]

Dva elektromagnetska vala mogu interferirati ako imaju *istu frekvenciju, stalan odnos faza i istu polarizaciju*. Promotrimo koje rezultatno polje proizvode dva izvora u nekoj točki P (slika 13S14.1)



Slika 13S14.1

Električno polje širi se duž smjera kojeg označimo s x .

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \hat{j}E_{01} \sin(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \omega t) \\ \vec{E}_2 &= \hat{j}E_{02} \sin(\vec{k}_2 \vec{r}_2 - \omega t).\end{aligned}\quad (13S14.1)$$

Očito to je različit smjer u svakoj od jednadžbi, tj. definiran kao smjer valnog vektora; polarizacija pak, označena s \hat{j} mora biti zajednička - ovdje npr. definirana kao smjer *iz slike*. (Oscilacije, tj. valni oblik na slici ne prikazuje dakle pravi smjer oscilacije polja, već je samo ilustrativnog značenja.)

Prema tome možemo pisati

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 \vec{r}_1 &\equiv k_1 x_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} x_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 x_1 \\ \vec{k}_2 \vec{r}_2 &\equiv k_2 x_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} x_2 = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 x_2.\end{aligned}\quad (13S14.2)$$

Gdje smo koristili izraz za valnu duljinu pri širenju valova u sredstvu indeksa loma n_1

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1}.$$

Uzmimo sada da su amplitude oba izvora i indeksi loma sredstva kroz koji se šire oba vala jednaki:

$$E_{01} = E_{02} = E_0, \quad n_1 = n_2 = n.$$

pa je prema pravilu superpozicije polje u točki P jednako

$$\left. \begin{aligned}\vec{E}_1 &= \hat{j}E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} nx_1 - \omega t\right) \\ \vec{E}_2 &= \hat{j}E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} nx_2 - \omega t\right)\end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}_P = \hat{j}E_0 \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} nx_1 - \omega t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} nx_2 - \omega t\right) \right]. \quad (13S14.3)$$

Član u uglatoj zagradi u 13S14.3 možemo prebaciti u drugačiji oblik koristeći identitet za sumu sinusa:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2},$$

odakle

$$\vec{E}_P = \underbrace{\hat{j} 2E_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{nx_1 - nx_2}{2}}_{=E_{0P}(x)} \sin \left(\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{nx_1 + nx_2}{2}}_{=\alpha(x)} - \omega t \right). \quad (13S14.4)$$

U jedn. 13S14.4 označili smo dva bitno različita dijela: $E_{0P}(x)$ je amplituda, koja je ovisna o položaju, odnosno *razlici optičkih puteva*

$$\delta \equiv nx_1 - nx_2,$$

a u drugom članu imamo oscilaciju zajedničkom frekvencijom no prostorni član vođen je faznom funkcijom $\alpha(x)$ koja ovisi o *sumi optičkih putava* $nx_1 + nx_2$.

Jednadžba 13S14.4 može se uz ove pokrate pisati kao

$$\vec{E}_P = \hat{j}E_{0P}(x) \sin(\alpha(x) - \omega t), \quad (13S14.5)$$

uz

$$E_{0P}(x) = 2E_0 \cos \frac{\phi(x)}{2}, \quad \frac{\phi(x)}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{nx_1 - nx_2}{2} \text{ i } \alpha(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{nx_1 + nx_2}{2}. \quad (13S14.6)$$

Vaja spomenuti ovdje da je valna duljina u ovim izrazima *vakuumaska* valna duljina, a eventualne razlike su uzete u obzir izravno preko indeksa loma u izrazima!

Amplituda, član $E_{0P}(x)$, *nije ovisna o vremenu*. To znači da postoje pruge interferencije, maksimumi i minimumi koji su *stalni u prostoru*, ovisni o frekvenciji i relativnom položaju izvora. Kako bi se to pokazalo, upućujem studente da isprobaju neku od [simulacija1](#), [simulacija2](#) za više izvora i više izbora parametara.

Mogli bi se zapitati opisuje li ovakva superpozicija putujući ravni val? To i nije posve smisleno pitanje, jer smo superpoziciju računali u definiranoj točki P. No primjećujemo da $\alpha(x)$ ima uobičajeni oblik prostornog dijela putujućeg ravnog vala, ali u varijabli $x_1 + x_2$.

13S15 _____ [Pruge minimuma i maksimuma.]

Kao što je u prethodnom odjeljku naznačeno, izraz za interferenciju dvaju koherentnih izvora istih amplituda predviđa postojanje delokaliziranih pruga interferencije, ovisnih o prostorno-ovisnoj amplitudi

$$E_{0P}(x) = 2E_0 \cos \frac{\phi(x)}{2}, \quad \frac{\phi(x)}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{nx_1 - nx_2}{2}. \quad (13S15.1)$$

Kad je dakle ovaj $\cos \phi/2$ jednak 1, imamo maksimume, a kada je jednak 0 imamo minimume. Matematički:

Maksimumi:

$$\cos \frac{\phi(x)}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\phi(x)}{2} = l\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \underbrace{\frac{nx_1 - nx_2}{2}}_{\delta/2} = l\pi \Rightarrow \boxed{\delta_{max} = l\lambda}. \quad (13S15.2)$$

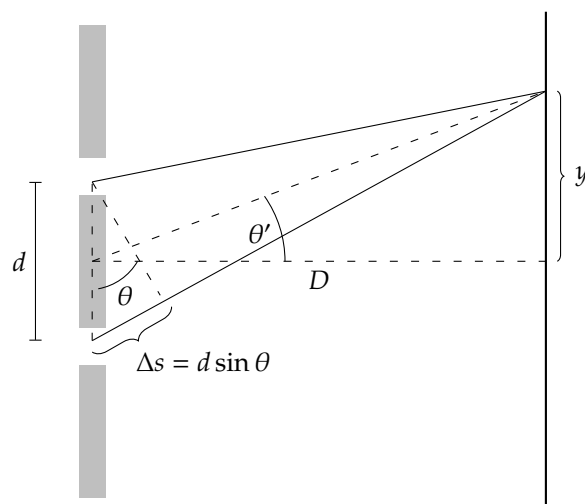
Minimumi:

$$\cos \frac{\phi(x)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\phi(x)}{2} = (2l + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \delta/2 = (2l + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\delta_{min} = (2l + 1)\frac{\lambda}{2}}. \quad (13S15.3)$$

To su sve izrazi koje smo intuitivno već prihvatili u dosadašnjem obrazovanju: ako su dva inače jednaka valna oblika pomaknuta za punu valnu duljinu, poklopit će se bregovi, i amplituda će biti dvostruka. Ako su pomaknuti (u fazi) za pola valne duljine, poklopit će se upravo maksimumi s minimumima, pa će val rezultatno poništiti.

13S16 _____ [Youngov pokus.]

Sad ćemo iskoristiti zaključke iz prethodnih razmatranja interferencije valova iz dva izvora na jedan važan poseban primjer - Youngov pokus. Riječ je o pokusu u kojem svjetlost iz nekog izvora pada na dvije malo razmaknute pukotine. Te dvije pukotine postaju koherentni monokromatski točkasti izvori, baš kako smo pretpostavili pri izvodu u odjeljku 13S14. Stavi li se zastor na neku udaljenost D od izvora, na njemu će se pokazati *interferentni uzorak* koji će ovisiti o položaju na zastoru (slika 13S16.1).



Slika 13S16.1

Svi izrazi iz odjeljaka 13S14 i 13S15 vrijede i ovdje. Sad samo želimo odrediti *položaje* y za koje na zastoru imamo minimume i maksimume. Iz geometrije vrijedi

$$\begin{aligned}\tan \theta' &= \frac{y}{D} \\ \Delta s &= |x_1 - x_2| = d \sin \theta \\ \text{uzmimo da se svjetlost širi u zraku, pa } n &= 1 \\ \Rightarrow \delta &= x_1 - x_2, \\ \text{a vrijedi i } \theta' &\approx \theta \text{ odakle} \\ \Rightarrow \delta &= d \sin \theta \Rightarrow \sin \theta \approx \theta = \frac{\delta}{d} \approx \theta' \approx \tan \theta' = \frac{y}{D} \Rightarrow \\ \boxed{\frac{\delta}{d} &= \frac{y}{D}}\end{aligned}\tag{13S16.1}$$

U izvodu smo pretpostavili da se za *male kuteve* tangens kuta jednako kao i sinus kuta približno može izraziti vrijednošću samog kuta, kao i to da za d maleno u odnosu na D (razmak pukotina malen u odnosu na udaljenost do zastora) možemo uzeti $\theta \approx \theta'$ (pogledati sliku 13S16.1).

Iz zaokruženog izraza u 13S16.1 i minimuma i maksimuma prema 13S15.2 i 13S15.3 dobivamo položaje minimuma i maksimuma na zastoru u Youngovom pokusu:

Maksimumi

$$\delta_{\max} = l\lambda \Rightarrow y_{\max} = l\lambda \frac{D}{d}, l = 0, 1, 2, \dots\tag{13S16.2}$$

Minimumi

$$\delta_{\min} = (2l + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow y_{\min} = (2l + 1)\frac{\lambda}{2} \frac{D}{d}, l = 0, 1, 2, \dots\tag{13S16.3}$$

13S17 _____ [Intenzitet u Youngovom pokusu.]

Srednji intenzitet elektromagnetskog vala izveli smo u 12S12.4

$$\langle \vec{S} \rangle_T = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2.\tag{13S17.1}$$

Polje pak dvaju interferirajućih izvora jednake amplitude dano je prema 13S14.5

$$\vec{E}_P = \hat{j} E_{0P}(x) \sin(\alpha(x) - \omega t) = \hat{j} 2E_0 \cos \frac{\phi(x)}{2} \sin(\alpha(x) - \omega t).\tag{13S17.2}$$

Uvrstimo li ovo polje u izraz za intenzitet dobili bi:

$$\langle \vec{S} \rangle_T = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \left(2E_0 \cos \frac{\phi(x)}{2} \right)^2 = 2E_0^2 \epsilon_0 c \cos^2 \frac{\phi(x)}{2}. \quad (13S17.3)$$

(Ovdje je važno istaknuti: faktor $\frac{1}{2}$ u izrazu za intenzitet 13S17.1 *već dolazi od usrednjenja po vremenu* oscilatornog člana $\sin(\alpha(x) - \omega t)$ u izrazu za polje 13S17.2!)

Usporedimo li 13S17.3 s 13S17.1 (i tvrdimo da je intenzitet jednog izvora jednak I_0), vidimo da se može pisati

$$I_{\text{interferentno}} = 2E_0^2 \epsilon_0 c \cos^2 \frac{\phi(x)}{2} = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi(x)}{2}. \quad (13S17.4)$$

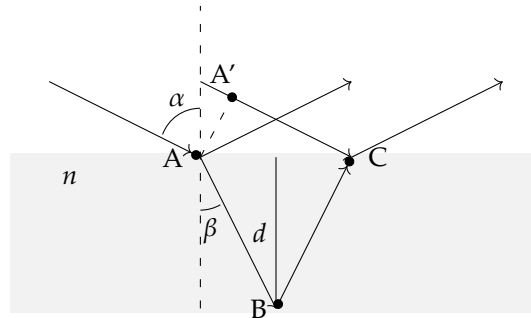
Dakle, intenzitet dvaju izvora ovisno o razlici optičkih puteva može varirati od 0 do $4I_0$, gdje je I_0 intenzitet jednog izvora

Simulacije pružaju mogućnost da samostalno interaktivno istražite ovisnost položaja minimuma i maksimuma o udaljenosti između izvora d , udaljenosti do zastora D , odnosno valnoj duljini λ : [simulacija 1](#), [simulacija 2](#), [simulacija 3](#), [simulacija 4](#).

13b - Interferencija elektromagnetskih valova na tankim listićima.

13S19 _____ [Interferencija na tankim listićima.]

Koherentne izvore moguće je dobiti i refleksijom na tankom sloju. Promotrimo upad svjetlosti pod nekim kutem na tanki sloj debljine d i indeksa loma n . Promatramo interferenciju dviju zraka svjetlosti: jedne, reflektirane s gornje strane listića, i druge, reflektirane s donje strane listića. Pri tome će nam od posebne važnosti biti da *refleksija na čvrstom kraju* unosi dodatni *pomak u fazi* reflektirane zrake. "Čvrsti kraj" će zapravo u ovom slučaju značiti da je indeks loma drugog sredstva na granici dvaju sredstava *veći* od indeksa loma prvog sredstva.



Slika 13S19.1

Proučimo odnos optičkih puteva kako bi odredili uvjete za minimume i maksimume interferencije. Točke A i A' su na istoj valnoj fronti, pa sa slike čitamo

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_C &= \vec{E}_{A'C} + \vec{E}_{ABC} \\ \delta &= 2n\overline{AB} - (\overline{A'C} + \frac{\lambda}{2}) \\ d &= \overline{AB} \cos \beta \\ \frac{\overline{A'C}}{\cos(90^\circ - \alpha)} &= 2\overline{AB} \sin \beta \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin \alpha &= n \sin \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \overline{A'C} &= 2\overline{AB} \sin \beta \sin \alpha \\ \delta &= 2\overline{AB}(n - \sin \alpha \sin \beta) - \frac{\lambda}{2} = \\ &= \frac{2d}{\cos \beta}(n - \sin \alpha \sin \beta) - \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad (13S19.1)$$

Još valja zadnji izraz pokratiti i pisati preko upadnog kuta α :

$$\delta = \frac{2d}{\cos \beta} \overbrace{(n - \sin \alpha \sin \beta)}^{n \cos^2 \beta} - \frac{\lambda}{2} = 2dn \overbrace{\cos \beta}^{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} - \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} \quad (13S19.2)$$

Izraz 13S19.2 jednadžba je izvedena u slučaju da u točki B nema promjene faze! To je slučaj kad refleksija u toj točki odgovara refleksiji na slobodnom kraju, odnosno, kad je indeks loma listića veći od loma sredstva na kojem se nalazi sloj (npr. mjehurić sapunice!).

Za gotovo okomiti upad $\alpha \approx 0 \Rightarrow \sin \alpha \approx 0$, pa 13S19.2 prelazi u

$$\delta = 2dn - \frac{\lambda}{2}. \quad (13S19.3)$$

Uvjete za minimum i maksimum ovisno o debljini listića, d dobivamo uvrštavajući za razliku optičkog puta uvjete izvedene u jedn. 13S15.2 i 13S15.3, pa imamo:

Maksimum:

$$\delta = 2dn - \frac{\lambda}{2} = l\lambda \Rightarrow d_{\max} = (2l + 1)\frac{\lambda}{4n} \quad (13S19.4)$$

Minimum:

$$\delta = 2dn - \frac{\lambda}{2} = (2l + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow d_{\min} = m\frac{\lambda}{2n}, m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13S19.5)$$

U zadnjem izrazu smo promijenili indeks sumacije, jer se prvi član (za $l = 0$) pokрати, pa indeksi počnu s ± 1 .

13S20 _____ [Interferencija na tankim listićima - refleksija na čvrstom kraju.]

U slučaju da tvar na kojoj stoji listić ima indeks loma veći od listića, u točki B (slika 13S19.1) imat ćemo također pomak u fazi za π , odnosno $\lambda/2$. Razlika optičkih puteva na slici će tada biti

$$\delta = 2n\overline{AB} + \frac{\lambda}{2} - (\overline{A'C} + \frac{\lambda}{2}).$$

Osim te razlike izvod za razliku optičkih puteva bio bi jednak, pa bi jedn. 13S19.2 u ovom slučaju nakraju glasila

$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}, \quad (13S20.1)$$

jer bi se dva pomaka u fazi na čvrstom kraju pokратila u izrazima.

Analogno, pojednostavljena varijanta, u slučaju približno okomitog upada sada bi bila samo

$$\delta = 2dn. \quad (13S20.2)$$

Uvjete za minimum i maksimum bi dobili na sličan način kao prije:

Maksimum:

$$\delta = 2dn = l\lambda \Rightarrow d_{\max} = \frac{l\lambda}{2n} \quad (13S20.3)$$

Minimum:

$$\delta = 2dn = (2l + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow d_{\min} = (2l + 1)\frac{\lambda}{4n} \quad (13S20.4)$$

u ovom slučaju bez potrebe za uvođenjem novog indeksa.

Primjeri za interaktivne simulacije su i u ovom slučaju zanimljivi [primjer 1](#), [primjer 2](#).

13S24 _____ [Interferencija na tankim listićima - primjer zadatka.]

Promatramo gotovo okomiti upad svjetlosti na listić.

U prvom dijelu zadatka listić je u zraku i tražimo uvjet za destruktivnu refleksiju valne duljine λ_1 na slobodnom kraju, uz uvjet da je $d > 2\lambda_1$. Iz poznatog indeksa loma i valne duljine trebali bi odrediti d . Iz 13S19.5 slijedi

$$d_{\min} = \frac{m\lambda_1}{2n} > 2\lambda_1 \Rightarrow m = 7, d_{\min} = 1400nm. \quad (13S24.1)$$

U drugom dijelu zadatka listić je položen na staklo. Promatramo interferencijski maksimum za slučaj refleksije na čvrstom kraju. Iz 13S20.3 tražimo vrijednost l takvu da je $d > d_{\min}$, odakle odredimo i d_{\max}

$$d_{\max} = \frac{l\lambda_2}{2n} > d_{\min} \Rightarrow l = 8, d_{\max} = 1480nm. \quad (13S24.2)$$

Udžbenici

- [1] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentals of Physics*, 10. (ili bilo koje ranije izdanje). Wiley, 2015.
- [2] V. Henč-Bartolić and P. Kulišić. *Valovi i optika: udžbenik fizike za studente Fakulteta elektrotehnike i računarstva*, 3. izd. Školska knjiga, 2004.
- [3] D. Horvat. *Fizika I*. Hinus, 2005.
- [4] D. Horvat. *Fizika II*. Didacta, 2011.
- [5] S. Ilijić. *Elektromagnetizam (skripta)*. (Vlastita naklada autora), 2022. URL: <http://sail.zpf.fer.hr/labs/elektromagnetizam.pdf>.
- [6] S. Ilijić. *Mehanika (skripta)*. (Vlastita naklada autora), 2022. URL: <http://sail.zpf.fer.hr/labs/mehanika2.pdf>.
- [7] P. Kulišić. *Mehanika i toplina*. Školska knjiga, 2005.
- [8] F. W. Sears, M. W. Zemansky, and H. D. Young. *University Physics, Fifth edition*. Addison-Wesley, 1976.
- [9] H. D. Young and R. A. Freedman. *University Physics with Modern Physics, 15th Edition*. Pearson, 2020.

Zbirke zadataka

- [10] A. Halpern. *Schaum's 3000 solved problems in physics*. 1988.
- [11] V. Henč-Bartolić, M. Baće, P. Kulišić, L. Bistričić, D. Horvat, Z. Narančić, T. Petković, and D. Pevec. *Riješeni zadaci iz valova i optike*. 2002.
- [12] S. Ilijić. *Zadaci za vježbu (FER3)*. 2019. URL: http://sail.zpf.fer.hr/labs/fizika_zadaci_fer3.pdf.
- [13] I. E. Irodov. *Problems in general physics*. 1988.
- [14] A. A. Kamal. *1000 Solved Problems in Classical Physics*. 2011.
- [15] P. Kulišić, L. Bistričić, D. Horvat, Z. Narančić, T. Petković, and D. Pevec. *Riješeni zadaci iz mehanike i topline*. 2002.