

2.7. IMPLICITNO DERIVIRANJE

Matan 1: $x^2 + y^2 = 4$ / $\frac{d}{dx}$! paziti da ne primakujemo

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

parcijalno ako nam se
pomoć!

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

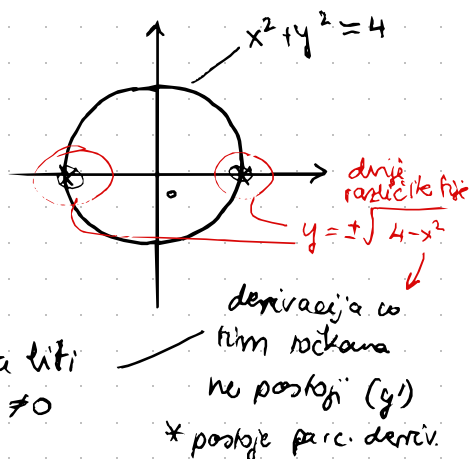
$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

vrjednici samo
ako je $y \neq 0$

→ parcijalna
deriv.

mora biti
 $\neq 0$



III Neka je $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow$ jed. fije $y = y(x)$

ako je parc. deriv. $\neq 0$, tada postoji jedinstvena implicitno zadana fije

koja zadovoljava $f(x, y) = 0$, a njena deriv. se računa po

formuli
$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Ako je krivulja $y = y(x)$ zadana implicitno s $f(x, y) = 0$, onda je
tangenta na tu krivulju u točki $T_0(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) = 0$$

TM $f(x,y,z)=0$. Ako je $\frac{\partial f}{\partial z}(T_0) \neq 0$. Tada postoji jedinstvena implicitno zadana $z(x,y)$ u T_0 , te $\frac{\partial z}{\partial x}(T_0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(T_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(T_0)}$

Zad: $x^3y + xz + yz^3 = 2$, $T(1,0,2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{3x^2y + z + 0}{x + 3yz^2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(T) = \underline{\underline{-2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{x^3 + z^3}{x + 3yz^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(T) = \underline{\underline{-9}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{(6xy + \frac{\partial z}{\partial x})(x + 3yz^2) - (3yx^2 + z)(1 + 6yz \frac{\partial z}{\partial x})}{(x + 3yz^2)^2} = 4$$

deriv. umnoška jer im

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{(0 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y})(x + 3yz^2) - (x^3 + z^3)(0 + 3z^2 + 6yz \frac{\partial z}{\partial y})}{(x + 3yz^2)^2} = 216$$

izig!

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - \frac{(3x^2 + 3z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x})(x + 3yz^2) - (x^3 + z^3)(1 + 6yz \frac{\partial z}{\partial x})}{(x + 3yz^2)^2} = 30$$

2. 1.

Tangenijalna ravnina:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(T_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(T_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(T_0)(z-z_0) = 0$$

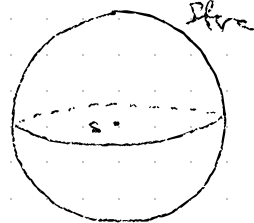
$$\rightarrow x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$$

M1-20-2 $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$ $T(0,2,0)$

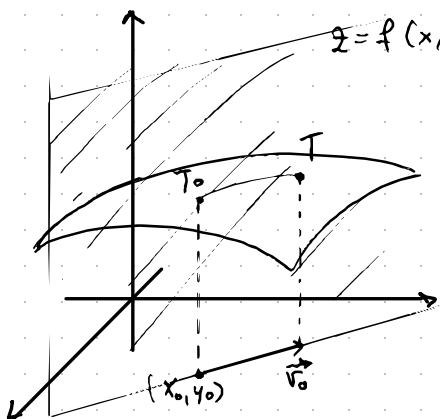
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2$$

$$\textcircled{0}(x-0) + \textcircled{2}(y-2) + \textcircled{2}(z-0) = 0$$

$$2y + 2z = 4 \quad \text{tang. ravnina}$$



2.8. USMJERENA DERIVACIJA



$\frac{\partial f}{\partial x}$ - prirast f-je u smjeru x-osi

$\frac{\partial f}{\partial y}$ - prirast f-je u smjeru y-osi

DEF Usmjereni derivacija funkcije $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ iz točke \vec{x}_0 u smjeru vektora \vec{v} definira se kao

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}_0) - f(\vec{x}_0)}{t}, \text{ gdje je } \vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

* derivacija ne ovisi o duljini vektora u čijem smjeru f-ja ide.

PROPOZICIJA: Neka je f diferencijabilna u nekoj točki T_0 . Tada

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0) = \underbrace{\nabla f(T_0) \cdot \vec{v}_0}_{\text{Skalarni P.}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_{0i} \quad \leftarrow \text{komponente vektora}$$

Izvod za $f(x, y)$: $\vec{v}_0 = v_{01} \vec{i} + v_{02} \vec{j}$!
 → presječemo s ravninom kao kod parcijalnih
 ↳ parametriziramo pravac na kojem je T_0
 *a smjer lijevo ili desno *

Koristimo TH o lančanoj derivaciji

P... $x = x_0 + t \cdot v_{01}$ Važno: $z = f(x, y) = f(x_0 + t \cdot v_{01}, y_0 + t \cdot v_{02})$

$y = y_0 + t \cdot v_{02}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x_{(t)}} v_{01} + \frac{\partial z}{\partial y_{(t)}} v_{02}$$

* usmjereni der. računano u točki T_0

Uvrstimo: $t=0 \rightarrow \frac{dz}{dt}(T_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0) = \nabla f(T_0) \cdot \vec{v}_0$

Napomena: 1. Usmjereni derivacija = Realan broj!

2. Za $z = f(x, y)$ \vec{v} je 2D.

3. Postoji beskonačno usmjerenih deriv. u svakoj točki

2AD $f(x, y) = x^2y + 2xy^3$ u $T(1, 1)$ u smjeru $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$

$$\nabla f = (2xy + 2y^3, x^2 + 6xy^2), \quad \nabla f(T) = (4, 7)$$

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{5}}$$

$$= 4\vec{i} + 7\vec{j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = (4, 7) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{-10}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{-2\sqrt{5}}} \quad \left(\begin{array}{l} < 0 \\ \text{tj. pada} \end{array} \right)$$

↳ nagib tangente u tom smjeru!

• BRZINA u smjeru x-osi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \nabla f \cdot \vec{i} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(\vec{i}) = 4 \rightarrow \text{rask. u x smjeru}$$

• BRZINA u smjeru neg. y-osi

$$\frac{\partial f}{\partial (-\vec{j})} = -\nabla f \cdot \vec{j} = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial (-\vec{j})}(T) = -7$$

M1-23-3

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\vec{s} = (1, \sqrt{3})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{e^{xz} \cdot z + y + 0}{e^{xz} \cdot x + 0 - 1}$$

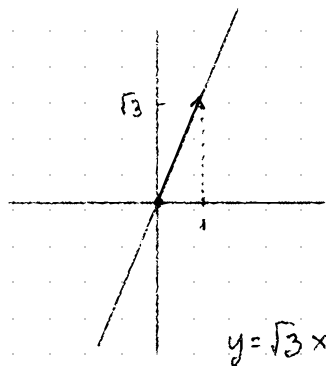
$$\vec{s}_0 = \frac{(1, \sqrt{3})}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{0 + x}{e^{xz} x - 1}$$

$$\vec{s}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$T(0, 1), z=1$ (dobijemo vrštanu)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = (2, 0) \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1$$



Pitanja: 1. U kojem smjeru krenuti da imamo najveću brzinu? (logična) (Da se fja najbrže mijenja)

2. Kolika najveća može biti brzina (promjena)?

ODGOVOR NA OBA PITANJA: gradijent ∇f

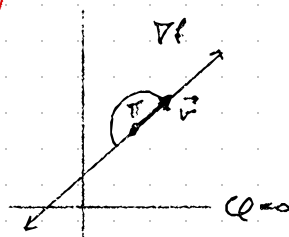
$$\text{Uočimo: } \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f \cdot \vec{v}_0 = \|\nabla f\| \cdot \underbrace{\|\vec{v}_0\|}_{1} \cos \varphi = \|\nabla f\| \underbrace{\cos \varphi}_{[-1, 1]}$$

→ odgovor na 2. ⇒ duljina gradijenta

$$\underline{-\|\nabla f\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \leq \|\nabla f\|}$$

za $\varphi = \pi$

za $\varphi = 0$



TM a) $\nabla f(\vec{t}_0) = \vec{0} \Rightarrow$ ne umjerene deriv. u \vec{t}_0 su nula
 ↳ znači da stojimo ⇒ stacionarna točka

b) $\nabla f(\vec{t}_0) \neq \vec{0} \Rightarrow f$ najbrže raste u smjeru ∇f , a iznos max rasta je $\|\nabla f(\vec{t}_0)\|$ (i najbrže pada u smjeru $-\nabla f$)

M1-22-3 $\nabla f = (3x^2 - 2xy^2 + y^2 + 10, -2xy^2 + 2xy)$

$\nabla f(2,3) = (-5, -12)$ vektor u smjeru kojeg fja najbrže raste

ali traži se JEDINIČNO OD gradijenta

$$\vec{v}_1 = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{-5, -12}{13} = \left(\frac{-5}{13}, \frac{-12}{13} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}} \right\} \begin{array}{l} \text{max} \\ \text{rast} \end{array}$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{5}{13}, \frac{12}{13}} \right\} \begin{array}{l} \text{max} \\ \text{pad} \end{array}$$

ne možemo računati $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ jer već znamo po teoremu $\Rightarrow \|\nabla f\| = 13$, rast -13 pad

c) $f(2,3) = 10 \rightarrow x^3 + x^2y^2 + xy^2 + 10x = 10$

$C=10$ tang... umetimo parcijalne u točku \vec{t}_0 koje smo već izračunali u prethodnom zadataku

$$\dots -5(x-2) - 12(y-3) = 0$$

M1-21-3

$$f(x, y) = 3x^2y - 2xy + 5x - 3y$$

$$\nabla f = (6xy - 2y + 5, 3x^2 - 2x - 3)$$

$$\vec{r} = \overline{T_1 T_2} = (3, -4), \quad \vec{r}_0 = \frac{(3, -4)}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = (15, 5) \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right) = \underline{\underline{5}} \quad \text{— promjena nadmorske visine u dan smjeru}$$

↑
uvjetavamo točku
u kojoj se nalazimo,
ne u koju idemo!

c) Najbrže sići → najbrži pad ⇒ negativan (suprotan) predznak
gradijenta

$$\nabla f = (15, 5) \rightarrow \underline{\underline{-\nabla f = -(15, 5)}}$$

$$\text{iznos} = -\|\nabla f\| = -5\sqrt{10}$$

d) Ako se z ne mijenja, usmjerena deriv. je jednaka nuli (0)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = 0 = \nabla f \cdot \vec{r}_0 \quad \text{— uvjet ortogonalnosti dva vektora}$$

• usmjerena deriv. je 0 u smjeru okomitom na gradient

$$\nabla f \perp \vec{r}_0 \Rightarrow \text{VRIJEDNOST SE NE MIJENJA U SMJERU OKOMITOM NA GRADIJENT}$$

TM Gradient i Rija su uvijek okomiti na nivo liniju.

Neka je f dif. u T_0 i neka je $\nabla f \neq 0$. Tada je $\nabla f(T_0)$ okomit na nivo-plohu (krivulju) koja prolazi točkom T_0 .