6.1. Ravnina

- fokusiramo se na V^3

= računom gledano; pravac je u 2D ono što je ravnina u 3D

GEOMETRIJSKI ZOR:

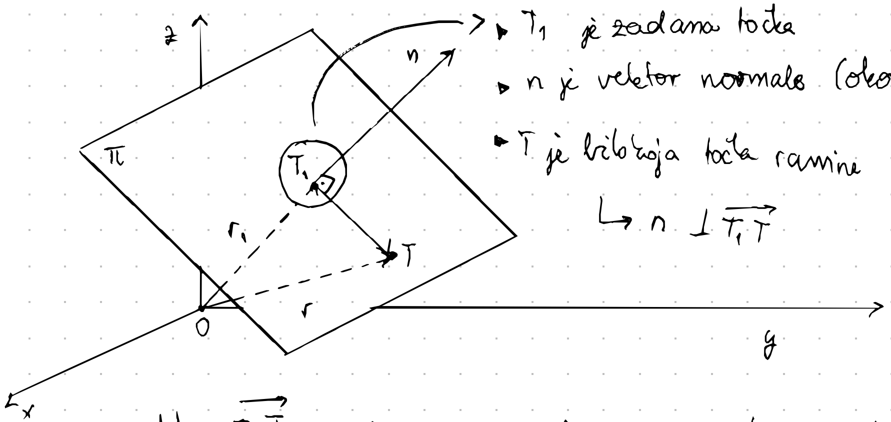
Ravnina π u prostoru određena je na neki od:

- s tri točke koje nisu kolinearne (x, y, z)
- pravac i točka koja nije na pravcu (van njega)
- 2 usporedna pravca
- 2 pravca koja se sijeku

} dva pravca koja leže u toj ravnini

*ako su 2 pravca mimoilazna, oni razapinju prostor; ne tvore ravninu.

Normala: vektor koji je okomit na ravninu



- T_1 je zadana točka
- n je vektor normale (okomit na sve ostale
- T je bilo koja točka ravnine

↳ $n \perp \overrightarrow{T_1T}$

vektor $\overrightarrow{T_1T}$ možemo zapisati kao razliku radijvektora

$\overrightarrow{T_1T} = r - r_1 \Rightarrow$ jednadžba ravnine u vektorskom obliku $\boxed{n(r - r_1) = 0}$

$T_1(x_1, y_1, z_1)$

$T(x, y, z)$

$n = Ai + Bj + Ck$

} Jednadžba ravnine zadane točkom i vektorom normale

$$\boxed{(x - x_1)A + (y - y_1)B + (z - z_1)C = 0}$$

Opća jednadžba ravnine

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

$$Ax-Ax_1+By-By_1+Cz-Cz_1=0$$

$$Ax+By+Cz-Ax_1-By_1-Cz_1=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{Ax+By+Cz}_{\text{vektor normale}}+D=0$$ opća jednadžba ravnine

- dovoljno je uvrstiti 2 točke i treću odrediti jednadžbom

Zadatak: π – ravnina

1) Ravnina π je okomita na ravnine π_1 i π_2 i prolazi T

$\pi_1 \equiv 2x-y+z-2=0$

$\pi_2 \equiv x+z+1=0$

$T(1,2,-1)$

$\pi=?$

normala ravnine mu je vektorski produkt koji mora biti okomit na normalu prve i normalu druge ravnine.

$\pi_1 = 2i-1j+1k$

$\pi_2 = 1i+0j+1k$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i-\vec{j}+\vec{k}$$

uvrstimo ravnine

$$-(x-1)-(y-2)+(z+1)=0$$

$$-x+1-y+2+z+1=0$$

$$-x-y+z+4=0$$

Jednadžba ravnine zadane s tri točke

$T_1(x_1, y_1, z_1)$
$T_2(x_2, y_2, z_2)$
$T_3(x_3, y_3, z_3)$
} tri nekolinearne točke

Kako glasi jednadžba ravnine koja ih sadrži?

• odredimo neku $T(x, y, z)$ točku ravnine

↳ $\overrightarrow{T_1T}, \overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3}$ leže u ravnini → njihov mješoviti umnožak je 0

$$\left[\overrightarrow{T_1T}, \overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

– razvojem det po prvom stupcu:

$Ax + By + Cz + D = 0$

Segmentni oblik jednadžbe pravca

$Ax + By + Cz + D = 0$ je jednadžba ravnine π

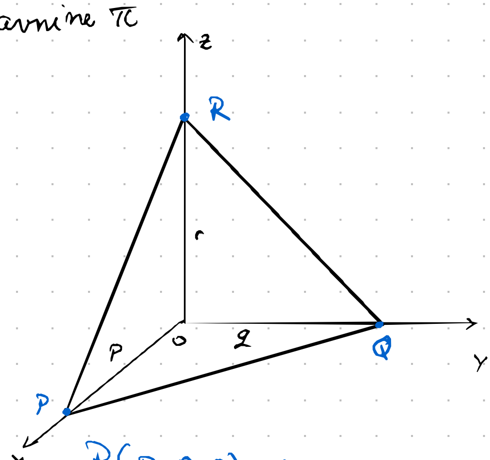
▸ $D = 0$ – ravnina prolazi ishodištem

▸ $D \neq 0$ dijelimo s $-D$:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

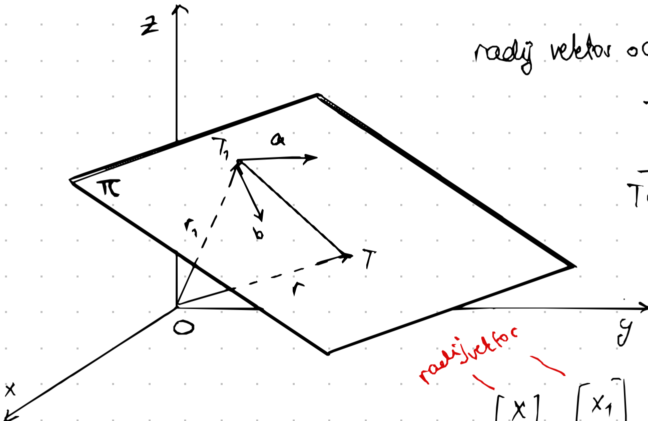
(uz pretp. da su $A, B, C \neq 0$)

↳ $$\underbrace{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r}}_{} = 1$$



$P(p, 0, 0)$
$Q(0, q, 0)$
$R(0, 0, r)$
} segmenti

Parametarska jednadžba ravnine



radij vektor od T → $\vec{OT} = \vec{OT_1} + \vec{T_1T}$

T_1 je točka ravnine π

$\vec{T_1T}$ leži u π → može se rastaviti u lin. kom. $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{OT} = \vec{OT_1} + \overbrace{\lambda a + \mu b}^{\vec{T_1T}}$$

radij vektor

preko koordinata vektora:

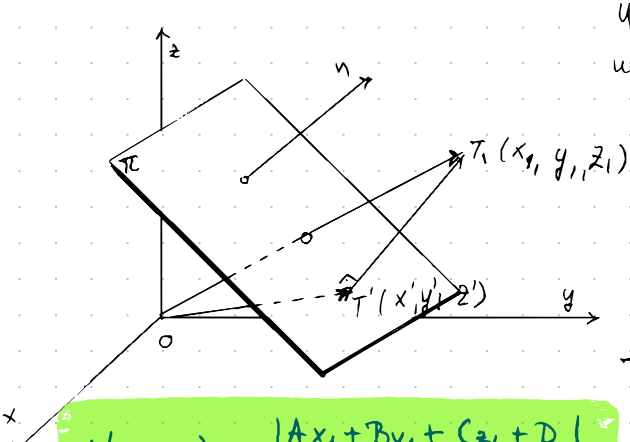
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}}_{\text{Parametarska jednadžba ravnine}}$$

$$x = x_1 + \lambda a_x + \mu b_x$$

$$y = y_1 + \lambda a_y + \mu b_y$$

$$z = z_1 + \lambda a_z + \mu b_z$$

Udaljenost točke od ravnine



udaljenost $d(T_1, \pi)$ je jednaka duljini udaljenosti $d(T_1, T')$

↳ T' je projekcija T_1 na ravninu (okomito)

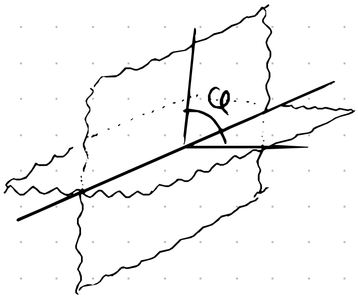
$$d(T_1, \pi) = |T_1T'|$$

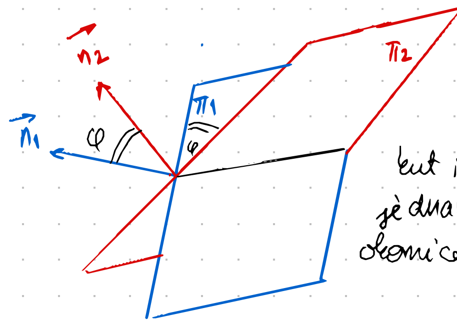
$\vec{T'T_1}$ kolinearan je s $\vec{n}$

$$d(T_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Kut između dviju ravnina

→ ako su ravnine paralelne ili se podudaraju ; $\varphi = 0$





kut između ravnina jednak je kutu između okomica ravnine

$\varphi = \sphericalangle(n_1, n_2)$ ili $\varphi = 180° - \sphericalangle(n_1, n_2)$

kut je jednak kutu koji zatvaraju normale ravnina ili njegovom suplementu

$$\cos\varphi = |\cos\sphericalangle(n_1, n_2)| = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|} \rightarrow \cos\varphi \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

PARALELNE π_1 i π_2

$n_1 = \lambda n_2$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

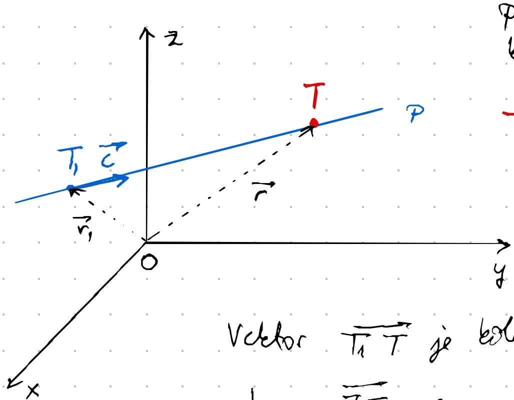
OKOMITE π_1 i π_2

$n_1 \cdot n_2 = 0$

$$\Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

6.2. PRAVAC

Jednadžba pravca



pravac p određen je točkom T_1 kroz koju prolazi i vektorom smjera c

T je bilo koja točka pravca

Vektor $\overrightarrow{T_1T}$ je kolinearan s vektorom $\vec{c}$

↳ $\overrightarrow{T_1T} = \lambda c$

$$\overrightarrow{T_1T} = r - r_1 \xrightarrow[\text{pravca}]{\text{vekt. jedn.}} \lambda c = r - r_1$$

Vektorska jednadžba pravca

$$\boxed{p \ldots r = \lambda c + r_1}$$

u kanonskoj bazi

$c = li + mj + nk$

$$xi + yj + zk = x_1 i + y_1 j + z_1 k + \lambda(li + mj + nk)$$

$$xi + yj + zk = x_1 i + y_1 j + z_1 k + \lambda(li + mj + nk)$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda l \\ y &= y_1 + \lambda m \\ z &= z_1 + \lambda n \end{aligned}$$

parametarska jednadžba pravca

Za svaki taj neki λ promijenit će se x, y i z i to će odgovarati točki na pravcu p

Kanonska jednadžba pravca

$x = x_1 + \lambda l \longrightarrow x - x_1 = \lambda l \;/ : l$

$y = y_1 + \lambda m$

$z = z_1 + \lambda n$

$$\underbrace{\lambda = \frac{x - x_1}{l} \qquad \lambda = \frac{y - y_1}{m} \qquad \lambda = \frac{z - z_1}{n}}$$

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

Kanonska jednadžba pravca ↑

* uobičajeno je ~~zapisivati~~ ovako kanonsku. čak i kada je l, m ili n = 0

Primjer: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1}$ ⟹ pravac koji prolazi točkom $T(2, 1, -2)$

⇙ ima vektor smjera

$\lambda c = r - r_1$

$c = li + mj + nk$

$l = 3 \quad m = 0 \quad n = -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{c = 3i - k}}$

⇘ izraz $\frac{y-1}{0}$ se interpretira da $y = 1$ (da bi cijeli bio $\frac{0}{0}$)

Zadatak: parametarsku jednadžbu pravca p napišimo u kan. oblik

1) $p \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ t je parametar

$t = \frac{x-1}{2} \qquad t = y + 2 \qquad t = \frac{z-3}{-2}$

$$\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}}$$

Pravac kroz dvije točke

$T_1(x_1, y_1, z_1) \quad T_2(x_2, y_2, z_2)$

vektor $\overline{T_1 T_2}$ ima komponente $\underset{x}{l}, \underset{y}{m}$ i $\underset{z}{n}$ $\Longrightarrow$

$l = x_2 - x_1$

$m = y_2 - y_1$

$n = z_2 - z_1$

parametarska jednadžba

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$$
$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$$

kanonski oblik

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Primjer 13) kanonska i parametarska jednadžba

1) $M(1, 2, -1)$, vektor smjera $c = i + 3j - k$

paramet.

$$\begin{cases} x = 1 + t \cdot 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

broj uz i

$$\underbrace{\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}}_{\text{kanonski}}$$

2) $M(1, 2, -1)$ i $N(2, 0, 3)$ $\longrightarrow N - M$

$$c = \overrightarrow{MN} = i - 2j + 4k$$

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) = 1 + t \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) = 2 - 2t \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) = -1 + 4t \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{4}}$$

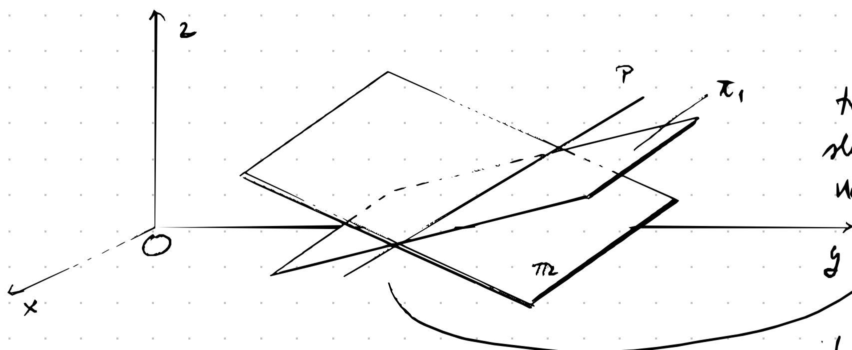
6.3. MEĐUSOBNI POLOŽAJ PRAVCA I RAVNINA

Pravac kao presjek dviju ravnina

$\pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

→ sve točke prostora leže i u prvoj i u drugoj ravnini



te točke u općem slučaju leže na jednom pravcu

presjeku ravnina π_1 i π_2

MOGUĆA SU 3 SLUČAJA

1. sustav nema rješenja (nema presjeka)

$$\begin{cases} x + y - z + \underset{=}{1} = 0 \\ x + y - z + \underset{=}{3} = 0 \end{cases}$$

⟹ njegovim jedn. određene dvije paralelne ravnine

2. ravnine su identične

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \quad / \cdot 2 \\ 2x + 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

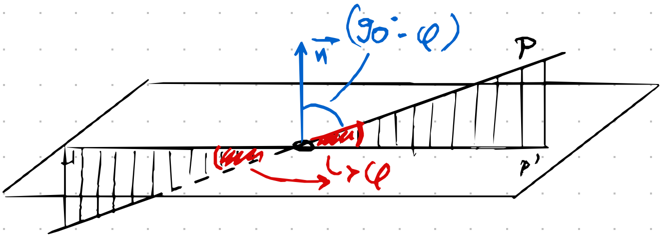
⟹ presjek je cijela ravnina (ta ista)

3. U ostalim slučajevima dvije se ravnine sijeku po pravcu

↳ samo rješimo (normalan sustav)

Kut između pravca i ravnine

→ to je kut između pravca p i njegove ortogonalne projekcije na ravninu π



$$\sin\varphi = \cos(90° - \varphi) = \frac{|c \cdot n|}{|c||n|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Kao i kod odnosa dviju ravnina

pravac je paralelan s ravninom

$$c \cdot n = 0$$

$$Al + Bm + Cn = 0$$

pravac je okomit s ravninom

$$c = \lambda n$$

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

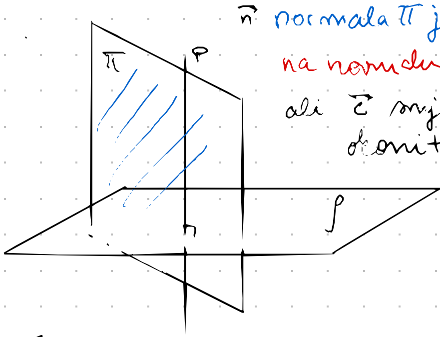
Zad. 17: Odredite jednadžbu ravnine π koja prolazi pravcem p a okomita je na ravninu:

$$p \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow T(1,1,1)$$

$\vec{c} = i + j + k$

$$\rho \ldots 2x + 3y + z + 1 = 0$$

$\hookrightarrow \vec{n} = 2i + 3j + k$



$\vec{n}$ normala π je okomita na normalu ρ ($\vec{m}$) ali $\vec{c}$ smjera p je okomit na ρ isto

$c \cdot m = 0$

$c \cdot m = 0$

$(i + j + k)(2i + 3j + k) = 0$

$\cancel{2i \cdot i} + 3i \cdot j + i \cdot k + 2j \cdot i + \cancel{3j \cdot j} + j \cdot k + 2k \cdot i + 3k \cdot j + \cancel{k \cdot k} = 0$

$3k + j - 2k + i - 2j - 3i = 0$

$-2i - j + k = 0 \Rightarrow \boxed{-2x - y + z = 0} \ldots \pi$

Pramen ravnina

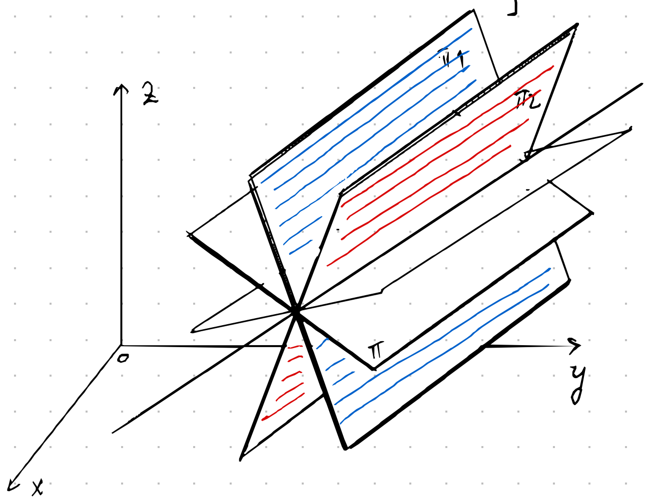
- imamo dvije ravnine koje se sijeku (π_1 i π_2)

↳ njihove normale:

$n_1 = A_1 i + B_1 j + C_1 k$

$n_2 = A_2 i + B_2 j + C_2 k$

} njihove normale ne mogu biti kolinearne



P → kroz presječni pravac može se provući familija ravnina

⇓

Pramen ravnina

Određivanje neke ravnine iz pramena:

=> jednadžbe početnih dviju ravnina određuju pramen

$\pi_1 \ldots A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$\pi_2 \ldots A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

, $T(x, y, z)$ – bilo koja točka koja leži na presječnom pravcu

(*trebaju zadovoljavati obje jedn.)

=> $\mu(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$

raspišemo → $(\mu A_1 + \lambda A_2)x + (\mu B_1 + \lambda B_2)y + (\mu C_1 + \lambda C_2)z + (\mu D_1 + \lambda D_2) = 0$

vektor normale je oblika $\mu n_1 + \lambda n_2$ (linearna kombinacija)

$\mu = 0 \longrightarrow$ daje π_2 , $\lambda = 0 \longrightarrow$ daje π_1