6.2. REDOVI POTENCIJA

6.2.1. OSNOVNI TEOREMI I PRIMJERI

motivacija: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots,\ |q| < 1$ konvergira $\to \langle -1, 1 \rangle$

isto je $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots\ |x| < 1$ konvergira

DEF Red potencija oko točke $x_0 \in \mathbb{R}$ je izraz oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots,\quad a_n \in \mathbb{R}$$

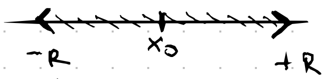
$\llcorner$ za koje x ova suma konvergira?

TM Područje konvergencije će uvijek biti interval određenog oblika.

Područje konvergencije reda potencija je $|x - x_0| < R$.

odnosno to je simetričan interval:

$\langle x_0 - R, x_0 + R \rangle$!



gdje R nazivamo polumjer (radijus) konvergencije.

$\rightarrow$ ovaj TM vrijedi u n dimenzija, ali mi gledamo u samo jednoj varijabli

MATAN3 - područje konvergencije je KRUG!

Red divergira za $|x - x_0| > R$, na rubu ne znamo, nema pravila, može divergirati ili konvergirati.

$\llcorner \rightarrow$! rubove posebno ispitujemo

DOKAZ: uspoređivanje s geom. redom - manje više svaki dokaz tako ide

BSO (Bez smanjenja općenitosti)

$x_0 = 0$; pretp. da red konvergira za neki x_1, tj. $\sum a_n x_1^n$ konvergira,

tada po definiciji NUK $\lim_{n \to \infty} a_n x^n = 0$.

Iz toga slijedi po definiciji: $\forall n \geq n_0,\ |a_n x_1^n - 0| < 1$, odnosno $|a_n x_1^n| < 1$.

• Neka je $|x| < |x_1|$, tj. $\left|\frac{x}{x_1}\right| = q < 1$. Tada $\left| \underbrace{a_n x_1^n}_{<1} \underbrace{\frac{x^n}{x_1^n}}_{q^n} \right| < q^n$.

*poredbeni kriterij, ako konv. veći, onda konv. i manji.

Dakle ako konv. q^n (geom. red, $q < 1$), tada po poredbenom kriteriju konvergira i manji $\sum a_n x^n$.

Uzmemo najveći x_1 za koji red konvergira.

TM | Za polumjer konvergencije vrijedi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{ili} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

*ako ti limesi postoje

↳ po recipročnom D'Alambertu ili Cauchyju

*Cauchy i D'Alam su za nenegativne a ovdje se radi o $a_n \in \mathbb{R}$ pa trebamo apsolutno!

DOKAZIĆ:

Gledamo apsolutnu konvergenciju da dobijemo ne-neg. članove i zatim D'Alamberta:

$\frac{n+1}{n}$, *promatramo: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad / : \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$|x-x_0| < \underbrace{\boxed{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R}}_{\text{po pretpostavci}}$$

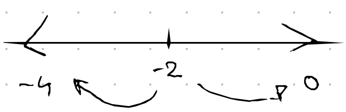
LJIR-20-5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n(n+2)} \quad \to x_0 = -2$$

tu uvrštavamo rubove!

bez x! moramo dobiti pozitivan realan broj!!

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{2^n(n+2)}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+3)}} \right| = \underline{\underline{2}}$$



$x \in \langle -4, 0 \rangle$

moramo ispitati rubove!

Za $x=0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(n+2)} = \sum \frac{1}{n+2} \sim \sum \frac{1}{n} \quad \text{divergira}$$

Za $x=-4$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} \xrightarrow{\text{Leibnitz}} \lim \frac{1}{n+2} = 0 \quad \frac{1}{n+2} \text{ je padajući}$$

red konvergira po Leibnitzu

$$\boxed{\text{KONAČNO RJ: } x \in [-4, 0\rangle}$$

konvergira — divergira

Zad.) $\sum_{n=0}^{\infty}(2x-3)^n \sin\frac{1}{n^2+1}$

WIR-23

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\left(x-\frac{3}{2}\right)^n \cdot \sin\frac{1}{n^2+1}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n \cdot \sin\frac{1}{n^2+1} \approx \frac{1}{n^2}}{2^{n+1}\cdot \sin\frac{1}{(n+1)^2+1} \approx \frac{1}{n^2}}\right| = \frac{1}{2} \qquad x\in\langle 1,2\rangle$$

$x_0=1:$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n^2+1} \xrightarrow{\text{TM. o aps.}} \sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2+1} \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ — $r>1$ konvergira

*možemo i Leibniz
ali moramo detaljno objasniti zašto je padajuća i to

$x_0=2$ $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2+1} \sim \sum\frac{1}{n^2}$ konvergira

$$\boxed{x\in[1,2]}$$

Zad.) $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}_{a_n}(x-1)^{2n}$ — zbog ovog ne možemo koristiti formulu za R jer tamo vrijedi samo za $a_n(x-x_0)^n$!

jednako vrijedi i ako je red oblika $(x^m-x_0)^n$
(čim red nije oblika $a_n(x-x_0)^n$, ne možemo koristiti formulu za R)

Direktno koristimo Cauchyja (a ne formule za R)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n(x-1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)|x-1|^2 = \frac{1}{2}|x-1|^2$$

$\longrightarrow$ prema Cauchyju: $\frac{1}{2}|x-1|^2<1$

$|x-1|^2<2 \;/\sqrt{\ }$

$|x-1|<\sqrt{2}$ $\implies R=\sqrt{2}$

ako idemo po onoj formuli dobijemo krivo jer činimo ovaj posao

$$\boxed{x\in\langle 1-\sqrt{2},\, 1+\sqrt{2}\rangle}$$

na oba ruba divergira po NUK-u
(radili smo prošli tjedan pa nećemo sad)

R smije ispasti 0 ili ∞ !

Primjer) a) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ $\quad R = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$ — ne miče se od središta

područje konvergencije je jedan broj

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ — sljedeći primjer

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \underline{\underline{\infty}}$$

↓

ova suma postoji za svaki x koji je iz $\mathbb{R}$

↳ konvergira za $\forall_x \in \mathbb{R}$

6.2.2. Taylorovi redovi

Podsjetimo se Taylora za $f(x)$ (matan 1)

$$f(x) = T_N(x) + R_N(x)$$

↳ Taylorov polinom n-tog stupnja $T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$$R_N(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$$

(c je iz okoline x_0)

- f-ja će imati Taylorov red ako $R \to 0$ (napadnemo limesom $\lim_{N\to\infty}$)

DEF Red oblika $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ zovemo Taylorov red funkcije $f(x)$ oko točke x_0.

*Nap.) Ako je $x_0 = 0$, red se zove Maclaurinov.

NUŽAN I DOVOLJAN UVJET:

Taylor red je jednak $f(x)$ akko $\boxed{\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0}$

Primjer: $f(x) = e^x$ — sve njene deriv. su jednake = beskonačno diferencijabilna

$f^n(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $f^{(n)}(0) = 1$

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

područje konv je $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} R_N(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} = e^c \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

jer faktorijele brže rastu od polinoma pa i da piše $(\text{milijun})^n$, $n!$ raste brže

Izr. sumu:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = e^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$

$n=0$ $n=1$

$x = \frac{1}{2}$

to vrijedi kada ide od 0

oduzmemo prva dva člana