2. DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA VIŠE VARIJABLI

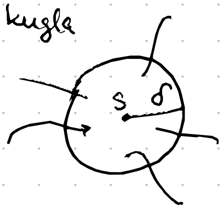
1. Limesi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

↳ $(\forall x,y \in D_f)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(0 < \underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}} < \delta\right) \Rightarrow \left(|f(\vec{x}) - L| < \varepsilon\right)$

krug je najprirodnija okolina (za 2D)

→ za 3D – $f(x,y,z)$ → kugla



središte: (x_0, y_0)

polumjer: δ

Limes postoji ako je jednak po svim smjerovima!

POLARNE KOORDINATE:

bolje za određivanje limesa koji sadrže ovako nešto

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \; x^2+y^2=r^2$$

$\boxed{\text{DEF}}$ Kažemo da je f-ja neprekinuta ako je $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$

↳ tj. limes mora biti jednak vrijednosti funkcije.

2. Parcijalne derivacije

– gledamo samo jednu varijablu, druge fiksiramo

$\boxed{\text{DEF}}$ $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{T_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

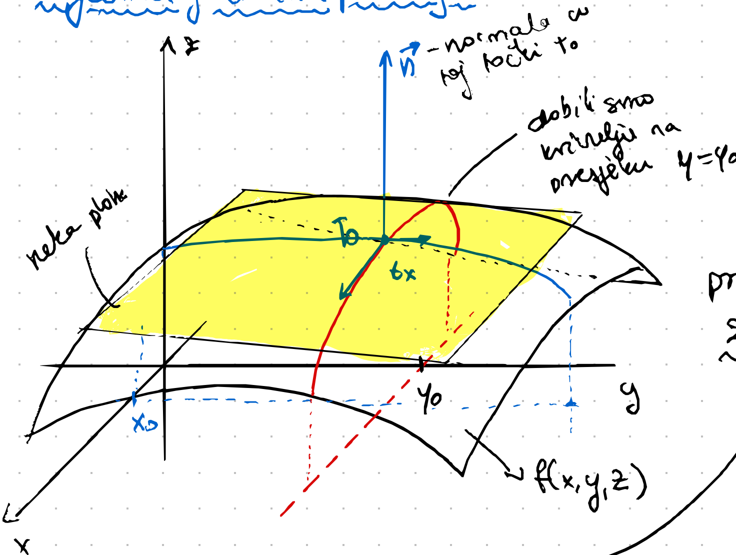
y_0 je fiksiran jer promatramo x

$\boxed{\text{TM}}$ **Schwarzov** – nije bitan redoslijed deriviranja $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

· gradijent u točki T → $\nabla f(T) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(T)\vec{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(T)\vec{e_2} + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(T)\vec{e_n}$

Geometrijska interpretacija $\longrightarrow$ tangencijalna ravnina

- ravnina u kojoj leže tangente u točki T_0 svih glatkih krivulja koje leže na plohi i prolaze T_0



presjecanjem po y_0 dobijemo
$z = f(x, y_0)$

$\rightarrow \vec{r}_x[x] = (x, y_0, f(x, y_0))$ $\qquad \vec{r}_y[y] = (x_0, y, f(x_0, y))$

$\rightarrow r_x'[x] = \left[1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] = t_x$ $\qquad r_y'[y] = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) = t_y$

- da bismo dobili tang. ravninu trebamo $\vec{n}$

$\hookrightarrow \vec{n} = t_x \times t_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x} T_0, -\frac{\partial f}{\partial y} T_0, 1\right)$

$\Rightarrow$ jednadžba tang ravnine (ako postoji) na plohu $f(x,y)$ u točki $T(x_0, y_0, z_0)$, gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(T_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(T_0) \cdot (y - y_0)}$$

a jednadžba normale n u točki T_0 $\Rightarrow$ $n \ldots \dfrac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x} T_0} = \dfrac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y} T_0} = \dfrac{z - z_0}{-1}$

3. Diferencijabilnost

DEF Funkcija je diferencijabilna u (x_0, y_0) ako:

→ postoje parcijalne derivacije u (x_0, y_0)

→ vrijedi: $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \underbrace{o(\Delta x, \Delta y)}_{\text{greška linearne aproksimacije}}$

→ pri čemu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{o(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$

TM Funkcija je diferencijabilna ako postoji tang. ravnina u T_0

→ DOVOLJAN UVJET, obrat ne vrijedi

TM Ako je $f(x,y)$ diferencijabilna u $T(x_0, y_0)$ → tada je neprekinuta

NUŽAN UVJET

DOKAZ: vrijedi sve iz def diferencijabilnosti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{o(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} o(\Delta x, \Delta y) = 0$$

· definicija diferencijabilnosti: $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(\Delta x, \Delta y)$

↳ napadnemo s limesom:

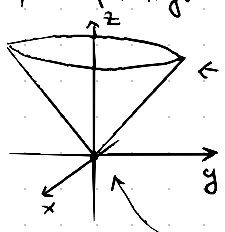
$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}} \cdot 0 + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}} \cdot 0 + \cancel{0}$$

→ $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x_0, y_0)$ → funkcija je neprekinuta po definiciji neprekinutosti

Napomene: ako f ima prekid u T_0, f nije diferencijabilna u T_0

- obrat ne vrijedi → ako je f neprekinuta u T_0, ne mora biti dif.

· protuprimjer: STOŽAC $z = \sqrt{x^2+y^2}$



← f-ja je neprekinuta ali nije dif!

ne postoje parc. deriv. u $(0,0)$

4. Diferencijal i primjena

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}_{\Delta f} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \cancel{o(\Delta x,\Delta y)}$$

kada su Δx i Δy dovoljno mali, $o(\Delta x,\Delta y)\to 0 \to \underbrace{\Delta f - \frac{\partial f}{\partial x}(T_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(T_0)\Delta y}_{\text{prvi diferencijal}}$

Osnovna primjena: linearna aproksimacija

$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \Delta f$

odabiremo najjednostavniju i bližu točku

$\Rightarrow f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$

općenito: $df(T_0) = \nabla f(T_0)\cdot \Delta \vec{x}$

6. Derivacija složene funkcije

$*$: $(f\circ g)'(x) - f'(g(x))\cdot g'(x)$

TM Lančano deriviranje

$z = f(x,y)$ i $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ — diferencijabilne funkcije u točki

diferencijabilna funkcija u točki $\longrightarrow$ $T_0(x_0,y_0) = (x(t_0), y(t_0))$

$\Rightarrow$ vrijedi: $(f\circ \vec{r})'(t_0) = \nabla f(\vec{r}(t_0))\cdot \vec{r}\,'(t_0)$ $\quad n=2$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}(T_0)\cdot \frac{\partial x}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial z}{\partial y}T_0 \cdot \frac{dy}{dt}(t_0)$$

za n varijabli: $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(T_0)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t}(t_0) + \dots \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t}(t_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}$

ako je $u = u(x_1 \dots x_n)$, $x_i = x_i(t_1, \dots t_m)$ za $i = 1, \dots n$

onda dobivamo Jacobijevu matricu $= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}$

ovo kraće zapisujemo:

$$\frac{\partial u}{\partial(t_1\dots t_m)} = \frac{\partial u}{\partial(x_1,\dots x_n)}\cdot\frac{\partial(x_1\dots x_n)}{\partial(t_1,\dots t_m)}$$

7. Implicitna derivacija

TM | O implicitnoj derivaciji

· Neka je $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, onda postoji jednoznačno određena funkcija $y=y(x)$

↳ zadovoljava $f(x,y)=0$ ⟶ njena derivacija: $\underbrace{y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}}$

· ako je krivulja $y=y(x)$ zadana implicitno s $f(x,y)=0$, onda je tangenta na tu krivulju u točki $T_0(x_0,y_0)$. *imp. zadana f-ja 1 varijable

$$y-y_0 = y'(x_0)(x-x_0)$$

$$y-y_0 = -\frac{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}}(x-x_0)$$

$$\underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}(y-y_0) = 0}$$

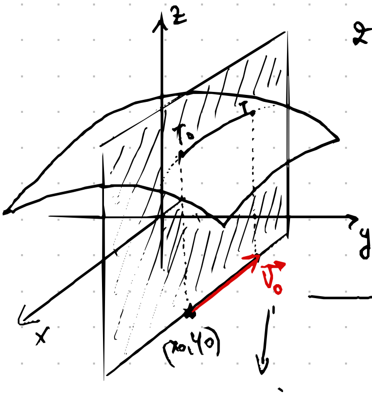
TM | $f(x,y,z)=0$. Ako je $\frac{\partial f}{\partial z}(T_0) \neq 0$, tada postoji jedinstvena implicitno zadana funkcija $z(x,y)$ ⟶ $\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}(T_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(T_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(T_0)}}$

*imp. zadana f-ja 2 var

TANGENCIJALNA RAVNINA na plohu zadanu implicitno: $\frac{\partial f}{\partial x}(T_0)(x-x_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(T_0)(y-y_1) + \frac{\partial f}{\partial z}(T_0)(z-z_1) = 0$

8. Usmjerena derivacija

· parc. deriv. predstavljaju stopu promjene u smjeru vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$



usmjerena derivacija u smjeru vektora je stopa promjene funkcije

DEF | Usmjerena deriv f-je $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ iz točke $\vec{x_0}$ u smjeru vektora $\vec{v}$ definira se kao

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\cdot \vec{v_0}, y+t\cdot\vec{v_0}) - f(x_0,y_0)}{t}$$

⟶ $\vec{v_0} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ - jedinični vektor

* f je diferencijabilna u nekoj točki T_0, tada

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0) = \nabla f \cdot \vec{v_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_{0_1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_{0_2}$$

izvod za $\nabla f \cdot \vec{v_0}$:

$$\vec{v_0} = v_{01}\vec{i} + v_{02}\vec{j}$$

$p \ldots \quad x = x_0 + t \cdot v_{01}$

$\qquad y = y_0 + t \cdot v_{02}$

} važno: $\underline{z} = f(x,y) = f(x_0 + t\cdot v_{01},\ y_0 + t \cdot v_{02})$

TM o lančanom deriviranju

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

. usmjerenu derivaciju računamo u točki T_0

∠ uvrstimo: $\frac{\partial z}{\partial t}(T_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0) = \boxed{\nabla f \cdot \vec{v_0}}$

! usmjerena derivacija je REALAN BROJ

! za $f(x,y)$ $\vec{v}$ je 2D

! Postoji beskonačno mnogo usmjerenih derivacija u svakoj točki

uoči: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f \cdot \vec{v_0} = \|\nabla f\| \cdot \underbrace{\|\vec{v_0}\|}_{1} \cdot \cos\varphi = \|\nabla f\| \cdot \cos\varphi$

za $\varphi = \pi$, za $\varphi = 0$

$$-\|\nabla f\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \leq \|\nabla f\| \to u\ x_0$$

$\boxed{\text{TM}}$

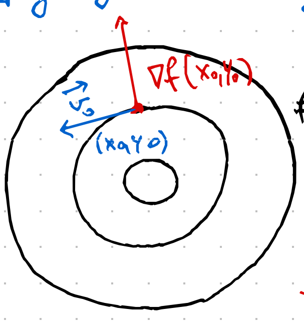
a) $\nabla f(T_0) = \vec{0}$ - sve usmjerene deriv. su nula u T_0

→ znači da stojimo => STACIONARNA TOČKA

b) $\nabla f(T_0) \neq \vec{0}$ - f najbrže raste u smjeru ∇f.

- iznos max rasta je $\|\nabla f(T_0)\|$
- iznos najbržeg pada je u smjeru $-\nabla f$

$\boxed{\text{TM}}$ Gradijent i funkcija su uvijek okomiti na nivo krivulju.



$f(x,y) = z_0$

Neka je f diferencijabilna u T_0 i neka je $\nabla f \neq 0$.

Tada je $\nabla f(T_0)$ okomit na nivo krivulju koja prolazi točkom T_0.

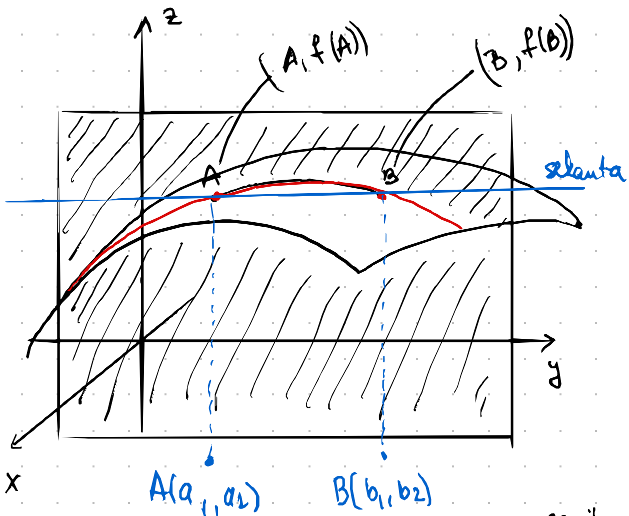
→ Gradijent je normala na točku

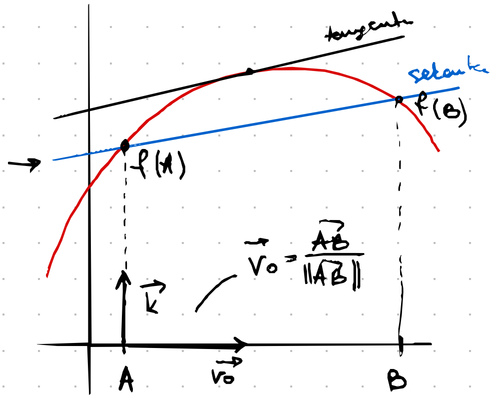
- okomit na tangentu nivo krivulje
- i ⊥ na nivo plohu

→ tangencijalna ravnina na nivo plohu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(T_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(T_0)\cdot(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(T_0)\cdot(z - z_0) = 0$$

9. Teorem srednje vrijednosti





nagib sekante ... $\dfrac{f(B)-f(A)}{d(A,B)} = \dfrac{f(B)-f(A)}{\|\vec{AB}\|}$

nagib tangente u $C \in \vec{AB}$ ... $\dfrac{\partial f}{\partial v}(c) = \nabla f(c) \cdot \vec{v_0} = \nabla f(c) \cdot \dfrac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$

$\Rightarrow$ Dakle $\dfrac{f(B)-f(A)}{\|\vec{AB}\|} = \nabla f(c) \cdot \dfrac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$

$$\Downarrow$$

$$f(B) - f(A) = \nabla f(c) \cdot \vec{AB}$$

$\boxed{\text{TM}}$ Lagrangeov TSV $f: U \to \mathbb{R}$ je diferencijabilna na $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\cdot$ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su također u U, tada na spojnici postoji c takav da vrijedi $f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

DOKAZ:

1) parametriziramo spojnicu od $\vec{a}$ i $\vec{b}$: $\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$, $t \in [0,1]$

2) Pogledajmo fiju $g(t)$ $\to$ parametrizaciju ubacimo u f

$$g(t) = f(\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}))$$

$\hookrightarrow$ postoji $s \in [0,1]$ takav da $g(1) - g(0) = g'(s)(1-0)$

$f(b) - f(a) = g(1) - g(0)$ $\quad$ *{za $t=1 \to b$, za $t=0 \to a$}

$g(1) - g(0) = g'(t_c)(1-0)$

$\cdot g(t)$ lančano deriviramo $\longrightarrow g'(t) = \nabla f(\vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}))(\vec{b} - \vec{a})$

$f(b) - f(a) = g'(t_c)(1-0) = g'(t_c)$

$f(b) - f(a) = \nabla f(\underbrace{\vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})}_{\vec{c}})(\vec{b} - \vec{a}) \Rightarrow \underline{f(b) - f(a) = \nabla f(\vec{c})(\vec{b} - \vec{a})}$

Korolar LTSV

I.) $\nabla \vec{f} \equiv \vec{0}$ → funkcija je konstantna

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \cancel{\vec{0}(\vec{b}-a)}$$

$$\underline{\vec{f}(\vec{b}) = f(\vec{a})}$$

II.) $\nabla f \equiv \nabla g$ → f i g se razlikuju ~~za~~ konstantu c

$\llcorner$ $\nabla f \equiv \nabla g \quad \nabla f - \nabla g \equiv \vec{0} \; / \int$ (* ∇ je operator)

$$\underline{f - g \equiv c}$$