# RIJEŠENI ZADACI IZ VALOVA I OPTIKE

Udžbenik za studente Elektrotehničkog fakulteta

# Sadržaj

# 1. TITRANJE

## 1.1. Uvod

**Elastičnost.** Idealno čvrsta ili kruta tijela pod djelovanjem vanjskih sila ne mijenjaju svoj oblik, dok se realna čvrsta tijela deformiraju. Ako su deformacije elastične, vrijedi Hookeov zakon:

$$\sigma = E\,\varepsilon\,.$$

Napetost $\sigma = F/S$, gdje je $F$ sila, a $S$ površina na koju djeluje sila. Koeficijent proporcionalnosti $E$ je Youngov modul elastičnosti. Definira se relativna deformacija $\varepsilon = \Delta x/x$, tj. omjer promjene dimenzije tijela zbog djelovanja sile i dimenzije tijela prije djelovanja sile.
Poseban je slučaj deformacija štapa učvršćenog na jednom kraju. Kada na drugom kraju štapa djeluje par sila, moment para sila $\vec{M}_\mathrm{p}$ izazvat će torziju, pa vrijedi zakon:

$$\vec{M}_\mathrm{p} = D\,\vec{\vartheta}\,,$$

gdje je $D$ konstanta torzije:

$$D = \frac{\pi}{2}\,\frac{r^4}{l}\,G\,,$$

a $\vec{\vartheta}$ zakret zbog torzije za štap duljine $l$ i polumjera (radijusa) $r$. Pritom je $G$ modul torzije.
**Titranja i njihanja.** Materijalna točka (sitno tijelo) *jednostavno titra* oko položaja ravnoteže pod utjecajem elastične ili harmonijske sile. Ta sila vraća tijelo u položaj ravnoteže i ima oblik:

$$\vec{F} = -k\,\vec{s}\,,$$

gdje je $k$ konstanta elastičnosti (npr. opruge), a $\vec{s}$ elongacija, tj. udaljenost tijela od položaja ravnoteže. Jednadžba gibanja *harmoničkog oscilatora* ima oblik:

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{s}}{\mathrm{d}t^2} + k\,\vec{s} = 0\,. \tag{1.1}$$

Opće rješenje glasi:

$$\vec{s} = \vec{A}\sin(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{1.2}$$

ili

$$\vec{s}(t) = \vec{A}e^{i(\omega t+\varphi)},$$

gdje je $\vec{A}$ amplituda, $\varphi_0$ početna faza, a $\omega$ kružna frekvencija ili pulzacija. Frekvencija titranja jednaka je recipročnoj vrijednosti titrajnog vremena (perioda titranja), tj. $f = 1/T$.
Veza između kružne frekvencije i frekvencije prikazana je izrazom

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Period titranja ili titrajno vrijeme:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Sitno tijelo (materijalna točka) mase $m$ obješeno o nit stalne duljine, a zanemarive težine je *matematičko njihalo.* Izvedemo li tijelo iz položaja ravnoteže u stranu za kut $\vartheta$ i prepustimo ga samom sebi, ono se njiše. Sila koja vraća tijelo u položaj ravnoteže jest:

$$F = -mg\,\sin\vartheta\,,$$

a za mali kut $\vartheta$ vrijedi da je

$$F = -mg\,\vartheta\,.$$

Uz mali kut $\vartheta$ jednadžba gibanja i rješenja jednaka su u matematičkom smislu kao kod jednostavnog titranja, što je prikazano izrazima (1.1) i (1.2).
Stoga je period titranja matematičkog njihala:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

gdje je $l$ duljina niti, a $g$ akceleracija slobodnog pada.
Kod *torzionog oscilatora* (njihala) moment para vanjskih sila $\vec{M}_p$ uravnoteži se momentom u žici $\vec{M}_ž$

$$\vec{M}_p = -\vec{M}_ž\,.$$

U trenutku kada prestane djelovati moment para sila $\vec{M}_p$, tijelo će se vratiti u položaj ravnoteže momentom žice $\vec{M}_ž$:

$$\vec{M}_ž = -D\vec{\vartheta}\,,$$

gdje je $D$ konstanta torzije.



Tijelo će izvoditi torziono titranje prema jednadžbi gibanja koje se temelji na zakonu vrtnje krutog tijela oko stalne osi ($\vec{M} = I\vec{\alpha}$, $\alpha$ je kutna akceleracija), pa je:

$$I\frac{d^2\vec{\vartheta}}{dt^2} + D\vec{\vartheta} = 0\,. \tag{1.3}$$

Ta je jednadžba u matematičkom smislu jednaka jednadžbi (1.1), pa je period torzionih titranja

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\,.$$

$I$ je moment inercije tijela s obzirom na os vrtnje.
Kruto tijelo koje se može okretati oko horizontalne osi koja ne prolazi kroz njegovo težište je *fizičko njihalo.* Ako se takvo tijelo izvuče iz položaja ravnoteže za kut $\vec{\vartheta}$ i prepusti samo sebi, ono se njiše pod utjecajem momenta težine. Za male kutove moment težine jest:

$$\vec{M} = -mgL\vec{\vartheta}\,,$$

gdje je $L$ udaljenost osi rotacije od težišta $T$ pa jednadžba gibanja ima oblik

$$I\frac{d^2\vec{\vartheta}}{dt^2} + mgL\vec{\vartheta} = 0 \tag{1.4}$$

i matematički je jednaka jednadžbi (1.3), odnosno (1.1).
U tom je slučaju formula za period fizičkog njihala

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}\,,$$

gdje je $mg$ težina tijela, a $I$ moment inercije s obzirom na os.
*Reducirana duljina* fizičkog njihala $l_r$,

$$l_r = \frac{I}{mL}\,,$$

je duljina matematičkog njihala koje ima isti period kao (pripadno) fizičko njihalo.
Ukupna energija $E$ tijela koje jednostavno titra, tj. harmonijskog oscilatora je konstantna i jednaka zbroju potencijalne i kinetičke energije. Vrijedi:

$$E = \frac{1}{2}kA^2\,. \tag{1.5}$$

Ako postoji kod titranja gubitak energije zbog trenja, tijelo izvodi *prigušeno titranje*. Jednadžba gibanja glasi:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}s = 0\,, \tag{1.6}$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = 0\,, \tag{1.7}$$

gdje je $b$ konstanta trenja, vlastita pulzacija neprigušenog oscilatora $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, a $\delta$ je faktor prigušenja.
Opće rješenje jednadžbe (1.7) može glasiti:

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{1.8}$$

ili

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{e}^{i(\omega t + \varphi)}\,,$$

gdje je pulzacija prigušenih titranja

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,.$$

Logaritamski dekrement prigušenog titranja $\lambda = \delta T$, gdje je $T$ period prigušenog titranja.
*Prisilno titranje* nastaje kada vanjska sila $F_v$ djeluje na tijelo koje titra. Ako je ta sila oblika:

$$F_v = F_0 \sin\omega t\,, \tag{1.9}$$

jednadžba gibanja glasi:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = A_0\sin\omega t\,, \tag{1.10}$$

gdje je $A_0 = F_0/m$, a $\omega$ pulzacija vanjske sile.
Opće rješenje jednadžbe može se pisati:

$$s(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{1.11}$$

s amplitudom:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\,, \tag{1.12}$$

i

$$\tan\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\,. \tag{1.13}$$



Rezonantna pulzacija

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\,. \tag{1.14}$$

Primjer vezanog oscilatora je *Oberbeckovo njihalo*, tj. sustav od dva njihala. Elongaciju samo jednog njihala $s$ možemo predočiti kao zbroj dvaju jednostavnih osnovnih titranja $s_1$ i $s_2$. Vrijedi:

$$s = s_1 + s_2 = A(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) \tag{1.15}$$

$$s = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\,\sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\,.$$

Kad njihalo izvodi istodobno oba osnovna titranja prema (1.15) ono titra pulzacijom:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,. \tag{1.16}$$

Maksimalna amplituda se vraća dva puta u periodi funkcije kosinus ili s frekvencijom udara

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}\,,$$

gdje je $\omega_1 = 2\pi f_1$, a $\omega_2 = 2\pi f_2$, pa je

$$\nu = f_1 - f_2\,. \tag{1.17}$$

Ako sitno tijelo izvodi istodobno titranje po osi $x$ i po osi $y$, to ono u bilo koji čas $t$ ima ove elongacije:

$$x = A\sin\omega_1 t$$
$$y = B\sin(\omega_2 t - \varphi)\,. \tag{1.18}$$

Putanja koju opisuje tijelo u koordinatnom sustavu je Lissajousova krivulja.

## 1.2. Primjeri

**1.1** Žica je produljena djelovanjem naprezanja $\sigma$ unutar granica elastičnosti. Kolika je gustoća energije pohranjene u žici zbog elastične deformacije, ako je zadan Youngov modul elastičnosti žice $E$?

***rješenje*** Produljenje žice zbog djelovanja naprezanja $\sigma$ unutar područja elastičnosti opisano je Hookeovim zakonom:

$$E\cdot\frac{\Delta l}{l} = \sigma\,, \tag{1}$$

gdje je $l$ početna duljina žice, a $\Delta l$ njezino ukupno produljenje. Iz relacije (1) za ukupno produljenje $\Delta l$ dobivamo

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} \cdot l \,. \tag{2}$$

Prema Hookeovu zakonu sila $F(x)$ potrebna da bi se žica produljila za $x$ jednaka je

$$F(x) = \frac{SE}{l} \cdot x \,, \tag{3}$$

gdje je $S$ ploština presjeka žice.
Energija pohranjena u žici jednaka je:

$$\int_0^{\Delta l} F(x) \cdot \mathrm{d}x = \frac{SE}{l} \int_0^{\frac{\sigma}{E} \cdot l} x \cdot \mathrm{d}x = \frac{\sigma^2}{2E} \cdot Sl \,. \tag{4}$$

Zanemarimo li malenu uzdužnu promjenu dimenzije, možemo volumen žice $V$ napisati kao produkt $V = S \cdot l$, tako da iz (4) dobivamo gustoću energije:

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{\sigma^2 Sl}{2E} = \frac{1}{Sl} \cdot \frac{\sigma^2 Sl}{2E} = \frac{\sigma^2}{2E} \,.$$

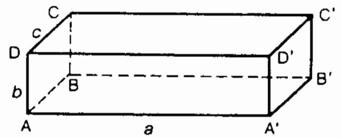
**1.2.** Prizmatični čelični štap dimenzija 1 m × 0,2 m × 0,1 m opterećen je sa svih strana naprezanjem (tlakom) 10 GPa. Koliko iznosi smanjenje volumena štapa zbog tog opterećenja? Koliki je volumni modul elastičnosti

$$B = -V \, \frac{\Delta p}{\Delta V}$$

ako je Youngov modul elastičnosti

$$E = \sigma \, \frac{l}{\Delta l} = 200 \text{ GPa} \,,$$

a Poissonov broj, tj. omjer relativne poprečne kontrakcije i relativnog uzdužnog produženja $\mu = 0{,}3$?




Slika 1.1.

***rješenje*** Kada između dviju suprotnih stranica štapa, npr. ABCD i A'B'C'D' (sl. 1.1) djeluje naprezanje $\sigma$, duljina brida $a$ skratit će se za $\Delta a$, a duljine bridova $b$ i $c$ povećat će se za $\Delta b$ i $\Delta c$. Prema Hookeovu zakonu bit će:

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{\sigma}{E} \,, \qquad \frac{\Delta b}{b} = -\mu \, \frac{\Delta a}{a} \,, \qquad \frac{\Delta c}{c} = -\mu \, \frac{\Delta a}{a} \,.$$



Zbog toga će se volumen štapa promijeniti za $\Delta V'$:

$$V + \Delta V' = a\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) b\left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) c\left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = abc\left(1 - \frac{\sigma}{E}\right)\left(1 + \frac{\mu\sigma}{E}\right)^2 \doteq$$

$$\doteq V\left(1 - \frac{\sigma}{E} + \frac{2\mu\sigma}{E}\right) ,$$

gdje su zanemareni članovi višeg reda. Dakle,

$$\Delta V' = -V(1 - 2\mu) \, \frac{\sigma}{E} \,.$$

Uzmemo li u obzir tlak na ostale stranice, ukupna promjena volumena je triput veća:

$$\Delta V = 3\Delta V' = -V(1 - 2\mu) \, \frac{3\sigma}{E} \,.$$

Volumni modul elastičnosti je

$$B = -V \, \frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{\sigma}{\Delta V} \, V \,,$$

dakle,

$$B = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \,.$$

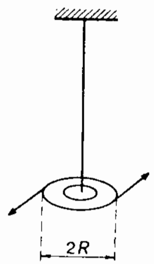
Za promatrani štap promjena obujma jest $\Delta V = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ m$^3$, a volumni modul elastičnosti $B = 167$ GPa.

**1.3.** Žicu učvršćenu na gornjem kraju tordira par sila (sl. 1.2) koji djeluje na ploči na donjem kraju žice. Poznato je da je moment para sila $\vec{M}_\mathrm{p}$ proporcionalan zakretu $\vec{\vartheta}$:

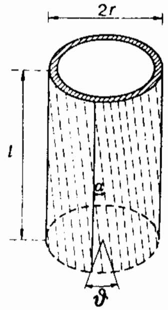
$$\vec{M}_\mathrm{p} = D\vec{\vartheta} \,,$$

gdje je $D$ konstanta torzije. Odredite fizikalno značenje konstante $D$.

***rješenje*** Žicu promatramo kao cilindar. Pri torziji gornja osnovica miruje, a donja se zakrene za kut $\vartheta$. Zamislimo da je žica sastavljena od niza koncentričnih šupljih cilindara čiji je polumjer $r$ malih debljina stijenki $\mathrm{d}r$. Na šuplji cilindar nacrtan na slici 1.3. djeluje od ukupnog momenta $M$ sile $F$ tek njegov djelić $\mathrm{d}M$. Torzijom šupljeg cilindra neka se donja osnovica zakrene za mali kut $\vartheta$. Tada




Slika 1.2.




Slika 1.3.

izvodnica cilindra zatvara kut $\alpha$ koji je označen na slici. Za visinu cilindra $l$, veza između kutova $\alpha$ i $\vartheta$ je:

$$\alpha = \frac{r}{l}\,\vartheta \,.$$

Naprezanje u cilindru dano je izrazom:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}F}{2\pi r\,\mathrm{d}r}\,,$$

gdje je $2\pi r\,\mathrm{d}r$ ploština presjeka, a $\mathrm{d}F$ sila koja djeluje tangencijalno na taj presjek. Ako je zadovoljen Hookeov zakon, vrijedi:

$$\frac{\mathrm{d}F}{2\pi r\,\mathrm{d}r} = G\alpha\,, \tag{1}$$

gdje je $G$ modul torzije, konstanta ovisna o materijalu žice.
Iz (1) dobivamo:

$$\mathrm{d}F = 2\pi\, G\alpha r\,\mathrm{d}r\,,$$

odnosno

$$\mathrm{d}F = 2\pi\, G\,\frac{r^2}{l}\,\vartheta\,\mathrm{d}r\,.$$

Dio momenta sile koji otpada na promatrani šuplji cilindar jest:

$$\mathrm{d}M = 2\pi\, G\,\frac{r^3}{l}\,\vartheta\,\mathrm{d}r\,.$$

Ukupni moment $M$ sile $F$ za sve šuplje cilindre iz kojih je žica sastavljena, a izaziva torziju punog cilindra, odnosno žice polumjera $r_0$ iznosi:

$$M = 2\pi\,\frac{\vartheta}{l}\,G\int_0^{r_0} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\,\frac{\vartheta}{l}\,G\,r_0^4\,.$$

Granice integracije protežu se od osi cilindra do njegova plašta. Odatle dobivamo fizikalno značenje modula torzije

$$G = \frac{2l}{\pi\vartheta r_0^4}\,M\,.$$

U našem primjeru moment $M$ pripada paru sila na ploči te iznosi

$$M_p = 2RF\,,$$

pa je modul torzije

$$G = \frac{2l}{\pi\vartheta r_0^4}\,2RF\,.$$

Tu je $R$ polumjer ploče, pa je moment para sila na ploči $M_p = \dfrac{\pi G r_0^4}{2l}\,\vartheta$.
Za konstantu torzije dobivamo:

$$D = \frac{\pi}{2}\,\frac{r_0^4}{l}\,G\,.$$

Ona uvelike ovisi o polumjeru (radijusu) žice, povećava se s njegovom četvrtom potencijom, a obrnuto je proporcionalna duljini žice. (Usporedite taj izraz s izrazom za jakost struje tekućine u uskim cijevima.)



**1.4.** Tijelo titra na opruzi. Amplituda iznosi 15 cm, a period mu je 2 s. Kolika je brzina tijela kad je elongacija jednaka polovici amplitude?

***rješenje*** Neka je položaj opisan funkcijom kosinus, tj.:

$$x(t) = A\cos\omega t = A\cos\frac{2\pi}{T}t\,,$$

pa je brzina

$$\dot{x}(t) = -\frac{2A\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t\,.$$

Iz uvjeta zadatka

$$x(t_1) = \frac{A}{2} = A\cos\frac{2\pi}{T}\,t_1\,,$$

pa je $t_1 = \frac{1}{6}$ s. Uvrštavanjem $t_1$ u izraz za brzinu dobivamo $\dot{x}(t_1) = 0{,}408$ m/s.

**1.5.** Izračunajte kružnu frekvenciju titrajnog sustava koji se sastoji od materijalne točke mase $m$ i triju opruga spojenih kao na slici 1.4.a, čije su konstante $k_1$, $k_2$ i $k_3$.

***rješenje*** Opruge konstanti $k_1$ i $k_2$ spojene su serijski, pa je ekvivalentna konstanta

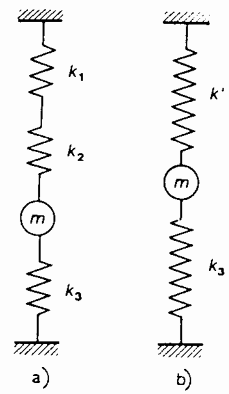
$$k' = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\,.$$

Sustav prikazan na slici 1.4.a možemo dakle zamijeniti ekvivalentnim sustavom prikazanim na slici 1.4.b. Opruge s konstantama $k'$ i $k_3$ spojene su paralelno, pa je ekvivalentna konstanta

$$k = k' + k_3 = k_3 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\,.$$

Taj sustav možemo zamijeniti s materijalnom točkom mase $m$ na opruzi konstante $k$. Kružna frekvencija sustava je:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_3(k_1 + k_2) + k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}\,.$$




Slika 1.4.

**1.6.** Na vertikalno postavljenu oprugu duljine $l_0$ u trenutku $t = 0$ stavimo predmet mase $m$ i sustav počne titrati početnom brzinom jednakom nula (sl. 1.5). Odredite elongaciju kao funkciju vremena.

***rješenje*** Jednadžba gibanja sustava jest:

$$ma = -ks + mg = -ks + F_0$$

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m}\,,$$

gdje je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

To je nehomogena diferencijalna jednadžba drugog reda. Opće rješenje nehomogene jednadžbe dobiva se tako da se općem rješenju homogene pribroji jedno od partikularnih rješenja nehomogene jednadžbe.

Opće rješenje homogene jednadžbe ($\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$), tj. jednadžbe jednostavnoga harmoničkog oscilatora jest

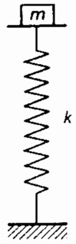
$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\,,$$

a posebno rješenje nehomogene jednadžbe glasi:

$$s = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,.$$

To se može provjeriti uvrštavanjem. Opće rješenje nehomogene jednadžbe jest:

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,,$$



Slika 1.5.

u što se možemo također uvjeriti uvrštavanjem. Iz početnih uvjeta $t = 0$, $s = 0$, $\dot{s} = 0$ dobivamo

$$A\cos\varphi + \frac{F_0}{m\omega_0^2} = 0\,,$$

$$A\omega_0 \sin\varphi = 0\,,\quad \varphi = 0\,,$$

$$A = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}\,,$$

pa je

$$s = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}\cos\omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,.$$

Označimo li da je

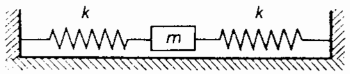
$$y = s - \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,,$$

dobivamo

$$y = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}\cos\omega_0 t$$

dakle, jednostavno harmoničko titranje.

**1.7.** Predmet mase 1 kg vezan je dvjema jednakim oprugama tako da može kliziti horizontalnom ravninom (sl. 1.6). Konstanta opruge je 50 N/m, koeficijent trenja klizanja između tijela i podloge je $\mu = 0{,}2$. Pomaknimo tijelo iz položaja ravnoteže ($s = 0$) za $s_0 = 10$ cm i pustimo da titra s početnom brzinom jednakom nula. Odredite elongaciju tijela nakon prvog perioda?



Slika 1.6.

$k = 50$



***rješenje*** Za vrijeme $0 < t \leq T/2$ tijelo se giblje zdesna nalijevo i pritom na njega djeluju sile jedne i druge opruge nalijevo ($ks + ks = 2ks$) i sila trenja nadesno ($\mu m g$). Jednadžba gibanja glasi:

$$m\ddot{s} = -2ks + \mu m g\,,$$

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = \mu g\,,$$

gdje je $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$. Rješenje te jednadžbe je

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\mu g}{\omega_0^2}\,,$$

u što se možemo uvjeriti uvrštavanjem.

Konstante $A$ i $\varphi$ određujemo iz početnih uvjeta:

$$t = 0,\qquad s = s_0,\qquad \dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

$$A\cos\varphi + \frac{\mu g}{\omega_0^2} = s_0,\qquad A\omega\sin\varphi = 0\,,$$

$$\varphi = 0,\qquad A = s_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}\,.$$

Elongacija je u tom vremenskom intervalu

$$s(t) = \left(s_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos\omega_0 t + \frac{\mu g}{\omega_0^2}\,,$$

$$s(t) = 0{,}0804\ \mathrm{m}\ \cos 10\,\mathrm{s}^{-1} t + 0{,}0196\ \mathrm{m}\,.$$

U trenutku $t = T/2 = 0{,}314$ s elongacija je $s = -s_0 + \frac{2\mu g}{\omega_0^2} = -6{,}1$ cm. U trenutku $t = T/2$ tijelo se zaustavi i počne vraćati nadesno. Sada se promijeni smjer sile trenja i jednadžba gibanja glasi:

$$m\ddot{s} = -2ks - \mu m g$$

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = -\mu g\,.$$

Rješenje te jednadžbe je

$$s = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{\mu g}{\omega_0^2}\,.$$

Iz uvjeta $t = T/2 = \frac{\pi}{\omega}$, $s = -6{,}1$ cm, $\dot{s} = 0$, dobivamo

$$s = \left(s_0 - \frac{3\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos\omega t - \frac{\mu g}{\omega_0^2}\,.$$

U trenutku $t = T$ elongacija je

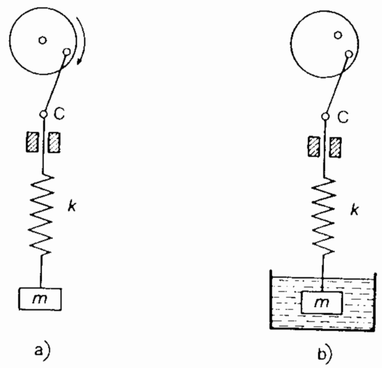
$$s = s_0 - \frac{4\mu g}{\omega_0^2}\,,$$

$$s = 2{,}2\ \mathrm{cm}\,.$$

**1.8.** Tijelo mase $m$ visi na opruzi konstante $k$. Gornji kraj opruge spojen je preko poluge s rotirajućom pločom preko ekscentra, kao što je prikazano na slici 1.7.a. Kada se ploča vrti kutnom brzinom $\omega$, gornji kraj opruge titra vertikalno gore–dolje po zakonu

$$s_1 = A_1 \sin \omega t \, .$$

**a)** Izračunajte amplitudu i elongaciju titranja sustava.




Slika 1.7.

**b)** Ako je tijelo uronjeno u viskoznu tekućinu (sl.1.7.b) tako da je sila proporcionalna brzini tijela

$$F_{tr} = -bv \, ,$$

izračunajte elongaciju i amplitudu titranja tijela.

Riješite zadatak i za posebne slučajeve kada je $m = 250$ g, $k = 10$ N/m, $b = 1$ Ns/m, $A_1 = 1$ cm, ako se ploča okreće kutnom brzinom 13 s$^{-1}$, 19,8 s$^{-1}$, odnosno 25 s$^{-1}$.

***rješenje*** a) Zanemarimo li prigušenje, na tijelo (matrijalnu točku) djeluje sila opruge $-ks$ i sila teža $mg$. Kada se tijelo nalazi u statičkoj ravnoteži, tj. kad ne titra, opruga je istegnuta za $\Delta l$, a težina tijela uravnotežena s elastičnom silom opruge, $mg = k\Delta l$. Kada sistem titra, u trenutku $t$ elongacija tijela je $s$, gornji kraj opruge pomaknut je od položaja ravnoteže za $s_1$, tako da je ukupna sila opruge koja djeluje na tijelo

$$F_{op} = -k\Delta l - k(s - s_1) \, .$$

Ako je dio te sile ($k\Delta l$) uravnotežen težinom tijela, zaključujemo da je sila koja djeluje na tijelo

$$F = -ks + ks_1 = -ks + kA_1 \sin \omega t \, ,$$

tj. da je zbroj harmoničke sile opruge $-ks$ i vanjske periodične sile

$$F' = kA_1 \sin \omega t = F_0 \sin \omega t \, .$$



Nakon primjene drugoga Newtonova zakona na to gibanje, dobivamo

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks + F_0 \sin \omega t$$

ili

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = A_0 \sin \omega t \, , \qquad (1)$$

gdje je tzv. prirodna (vlastita) frekvencija sustava

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{i} \qquad A_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{kA_1}{m} \, .$$

Pretpostavimo li da rješenje jednadžbe (1) ima oblik:

$$s(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \varphi) \, , \qquad (2)$$

tj. da sustav titra frekvencijom $\omega$, da kasni za $\varphi$ nakon titranja vanjskog oscilatora i da amplituda $A$ ovisi o frekvenciji, nakon deriviranja i uvrštavanja u jednadžbu (1) dobivamo

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t - \varphi) = \frac{A_0}{A} \sin \omega t \, .$$

Ta jednadžba mora biti zadovoljena u svakom trenutku $t$, dakle, mora biti

$$\text{za } \omega < \omega_0 \, , \qquad \varphi = 0 \, ,$$
$$\text{za } \omega > \omega_0 \, , \qquad \varphi = \pi \, ,$$

odnosno

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \frac{A_0}{A} \, , \qquad A = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$s = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \qquad \text{za } \omega < \omega_0$$

$$s = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t - \varphi) \qquad \text{za } \omega > \omega_0 \, .$$

Za $\omega = \omega_0$ amplituda postaje beskonačno velika ako nema gubitaka energije trenjem. Međutim, u realnosti uvijek postoje gubici, pa rezonantna amplituda, premda je velika, uvijek ima konačnu vrijednost.

**b)** Nije li trenje zanemarivo, jednadžba gibanja glasi:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - bv + F_0 \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = A_0 \sin \omega t \, , \qquad (3)$$

gdje je

$$\delta = \frac{b}{2m} \, , \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{i} \qquad A_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{kA_1}{m} \, .$$

Pretpostavimo li rješenje

$$s(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \varphi)\,, \tag{4}$$

potrebno je odrediti amplitudu $A$ i razliku u fazi $\varphi$ uvrštavajući rješenje (4) u jednadžbu gibanja (3). Napisat ćemo rješenje (4) u obliku kompleksne funkcije

$$s(t) = Ae^{i(\omega t - \varphi)} = A[\cos(\omega t - \varphi) + i\sin(\omega t - \varphi)]$$

čiji je imaginarni dio upravo traženo rješenje (4). Nakon deriviranja i uvrštavanja u (3) dobivamo:

$$(-\omega^2 A + 2i\delta\omega A + \omega_0^2 A)e^{i(\omega t - \varphi)} = A_0 e^{i\omega t}\,.$$

Odavde je

$$A = \frac{A_0 e^{i\varphi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} = \frac{A_0 e^{i\varphi}(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}\,,$$

a rješenje imaginarni dio funkcije

$$s(t) = Ae^{i(\omega t - \varphi)} = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} e^{i\omega t}\,,$$

tj.

$$s(t) = \frac{A_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}\sin\omega t - \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}\cos\omega t\,.$$

Usporedimo li to sa (4)

$$s(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \varphi) = A(\omega)\cos\varphi\sin\omega t - A(\omega)\sin\varphi\cos\omega t\,,$$

vidimo da je

$$A\cos\varphi = \frac{A_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}\,, \qquad A\sin\varphi = \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}\,,$$

odnosno

$$A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{A_0^2\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^2}\,,$$

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\,,$$

$$\tan\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\,.$$

U posebnom je slučaju

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\,\mathrm{s}^{-1}\,,$$

$$\delta = \frac{b}{2m} = 2\,\mathrm{s}^{-1}\,,$$

$$A = \frac{ks_1}{m} = 4\,\mathrm{m\,s}^{-2}\,.$$



a) bez trenja:

$$\omega = 13\,\mathrm{s}^{-1}\,, \qquad A = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1{,}7\,\mathrm{cm}, \qquad \varphi = 0$$

$$\omega = 19{,}8\,\mathrm{s}^{-1}\,, \qquad A = 5{,}0\,\mathrm{cm}, \qquad \varphi = 0$$

$$\omega = 25\,\mathrm{s}^{-1}\,, \qquad A = 1{,}8\,\mathrm{cm}, \qquad \varphi = \pi\,.$$

b) s trenjem:

$$\omega = 13\,\mathrm{s}^{-1}\,, \qquad A = 1{,}7\,\mathrm{cm}, \qquad \varphi = 0{,}34\,\mathrm{rad}$$

$$s(t) = 1{,}7\,\mathrm{cm}\cdot\sin(13t - 0{,}34)$$

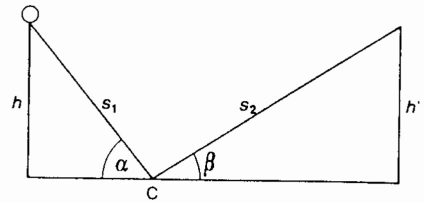
$$\omega = 19{,}8\,\mathrm{s}^{-1}\,, \qquad A = 5{,}2\,\mathrm{cm}, \qquad \varphi = 1{,}47\,\mathrm{rad}$$

$$s(t) = 5{,}2\,\mathrm{cm}\cdot\sin(19{,}8t - 1{,}47)$$

$$\omega = 25\,\mathrm{s}^{-1}\,, \qquad A = 1{,}6\,\mathrm{cm}, \qquad \varphi = 2{,}73\,\mathrm{rad}$$

$$s(t) = 1{,}6\,\mathrm{cm}\cdot\sin(25t - 2{,}73)\,.$$

**1.9.** Izračunajte period titranja malene kuglice prema slici 1.8. ako su $h = 50$ m, $\alpha = 45°$ i $\beta = 30°$. Zanemarite rotacijsku energiju kuglice.




Slika 1.8.

***rješenje*** Iz zakona o očuvanju energije proizlazi da je $h = h'$, a iz trigonometrijskih odnosa

$$s_1 = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{a}{2}t_1^2\,,$$

gdje je $a = g\sin\alpha$, a $t_1$ vrijeme za koje kuglica dođe u točku C. Dakle

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{g\sin\alpha}{2}t_1^2\,,$$

pa je

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{1}{\sin\alpha}\,.$$

Slično dobijemo i $t_2$ za $s_2$ segment. Onda je

$$T = 2(t_1 + t_2) = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)$$

$$T = 21{,}8\,\mathrm{s}\,.$$

**1.10.** Izračunajte period titranja stupca tekućine u U–cijevi zatvorenoj s obje strane, ako je masa tekućine 0,1 kg, presjek cijevi $2 \cdot 10^{-4}$ m$^2$, udaljenost od razine tekućine u ravnoteži do vrha cijevi 0,2 m, tlak plina iznad tekućine u ravnoteži $1{,}0 \cdot 10^3$ Pa i gustoća tekućine $1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m$^3$.

***rješenje*** Sila $F$, koja djeluje na stupac tekućine u U–cijevi koji nije u ravnoteži, sastoji se od komponente što je uzrokuje razlika tlakova plinova iznad tekućine u krakovima cijevi i komponente što je uzrokuju različite visine tekućine u kracima cijevi.

$$F = (p_1 - p_2)\,A + 2x\,A\,\varrho\,g\,, \tag{1}$$

gdje je $A$ ploština presjeka U-cijevi, $\varrho$ gustoća tekućine, $x$ udaljenost ravnine tekućine od položaja ravnoteže, $g$ akceleracija sile teže, a $p_1$ i $p_2$ tlakovi plina u kracima s višom, odnosno nižom razinom tekućine.
Iz Boyle–Mariotteova zakona izlazi

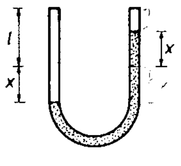
$$p_1\,V_1 = p_0\,V_0 \quad \text{i} \quad p_2\,V_2 = p_0\,V_0\,, \tag{2}$$

gdje je $p_0$ tlak plina iznad tekućine u ravnoteži, a $V_1, V_2$ i $V_0$ su jednaki:

$$V_1 = A\,(l - x), \qquad V_2 = A\,(l + x), \qquad V_0 = A\,l\,.$$

Uvrštavanjem tih izraza za obujmove u relaciju (2) dobiva se

$$p_1 = \frac{p_0\,l}{l + x} \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{p_0\,l}{l - x}\,.$$




Slika 1.9.

Razlika tlakova $p_1 - p_2$ jest:

$$p_1 - p_2 = p_0\,l\left(\frac{1}{l - x} - \frac{1}{l + x}\right)$$

$$p_1 - p_2 = p_0\,l\,\frac{2x}{l^2 - x^2} \approx \frac{2p_0}{l}\,x\,. \tag{3}$$

Primjenom relacije (1) dobiva se jednadžba gibanja

$$-m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = (p_1 - p_2)\,A + 2x\,A\,\varrho\,g\,. \tag{4}$$

Uvrštavanjem (3) u (4)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2A\,(p_0 + \varrho\,g\,l)}{m\,l} \cdot x = 0 \tag{5}$$

Jednadžba (5) je jednadžba za neprigušeno harmoničko titranje, pa je kružna frekvencija tog titranja

$$\omega = \sqrt{\frac{2A\,(p_0 + \varrho\,g\,l)}{m\,l}}$$

a period titranja

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m\,l}{2A\,(p_0 + \varrho\,g\,l)}}$$

$$T = 0{,}816\ \text{s}.$$



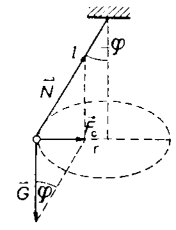
**1.11.** Odredite ophodno vrijeme (period) koničnog njihala duljine $l$, kojemu nit pri gibanju zatvara s vertikalnim smjerom kut $\varphi$ (sl. 1.10).

***rješenje*** Konično njihalo na slici je sitno tijelo (materijalna točka) na niti stalne duljine koja, stavljena u gibanje u horizontalnoj ravnini, opisuje kružnicu polumjera

$$r = l \sin\varphi\,.$$

Pritom na tijelo djeluje centripetalna sila

$$\vec{F}_c = -\frac{\vec{r}}{r}\,\frac{mv^2}{r}$$




Slika 1.10.

izazvana težinom tijela i napetosti u niti. Iz slike dobivamo

$$F_c = mg\,\tan\varphi\,,$$

pa vrijedi

$$mg\,\tan\varphi = \frac{mv^2}{l\sin\varphi}\,.$$

Odavde je

$$v^2 = \frac{mg}{m}\,l\,\tan\varphi\sin\varphi = gl\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,. \tag{1}$$

Ophodno vrijeme $T$ sadrži izraz za brzinu tijela

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi l\sin\varphi}{T}\,. \tag{2}$$

Iz izraza (1) i (2) dobivamo

$$\frac{4\pi^2 l^2 \sin^2\varphi}{T^2} = gl\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,,$$

odakle je ophodno vrijeme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\varphi}{g}}\,.$$

Za male kutove $\varphi$ ophodno vrijeme je približno jednako periodu matematičkog njihala jer je $\cos\varphi \doteq 1$.

**1.12.** Odredite kružnu frekvenciju harmoničkog gibanja što ga izvodi tijelo mase $m$, ovješeno kao na slici 1.11.a. Pretpostavite da je amplituda titraja mala.

***rješenje*** Zbog težine tijela položaj ravnoteže izgleda kao što je prikazano na slici 1.11.b. Opruge su produžene na $d'$. Pomaknemo li tijelo u vertikalnom smjeru za $\Delta x$ ispod položaja ravnoteže, sila $F$ koja vraća tijelo je

$$F = k\left(\sqrt{d^2 + (h + \Delta x)^2} - d'\right)\,,$$

te je rezultantna harmonička sila jednaka

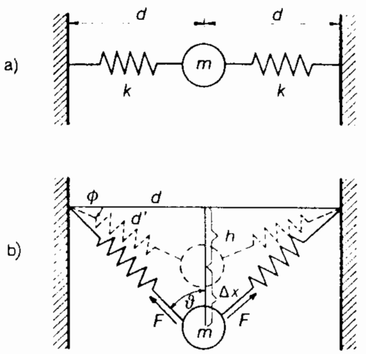
$$-2F\cos\vartheta = -2k\left(\sqrt{d^2 + (h + \Delta x)^2} - d'\right)\,\frac{h + \Delta x}{\sqrt{d^2 + (h + \Delta x)^2}}\,.$$

Nakon sređivanja, znajući da je $d' = \sqrt{d^2 + h^2}$, imamo

$$-2F\cos\vartheta = -2kh\left(1+\frac{\Delta x}{h}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2h\Delta x+\Delta x^2}{d'^2}}}\right).$$

Budući da je riječ o malim pomacima, možemo iskoristiti binomni razvoj zadržavajući se na članovima 1. reda, pa je konačno:

$$-2F\cos\vartheta \approx -2hk\left(1+\frac{\Delta x}{h}\right)\frac{1}{2}\,\frac{2h\Delta x+\Delta x^2}{d'^2} \approx -(2k\sin^2\phi)\Delta x\,.$$




Dobivena je proporcionalna ovisnost sile koja vraća tijelo u položaj ravnoteže o pomaku $\Delta x$. Faktor $2k\sin^2\phi$ ima značenje "efektivne" konstante opruge sistema. Zato je kružna frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{ef}}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\phi\,.$$

Slika 1.11.

**1.13.** Pretpostavimo da je duž osi vrtnje Zemlje prokopan tunel s jednoga kraja Zemlje na drugi. Blizu Zemljine površine, duž meridijana, prolazi putanja satelita. Tijelo počinje slobodno padati kroz tunel u trenutku kada se satelit nalazi iznad otvora tunela. Što će prije stići do drugoga kraja tunela, satelit ili tijelo?

***rješenje*** Na udaljenosti $r$ od središta Zemlje na tijelo mase $m$ djeluje gravitacijska sila

$$\vec{F} = -\gamma\,\frac{mM_1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\,.$$

$M_1$ je masa Zemlje unutar kugle polumjera $r$, pa je

$$\frac{M_1}{M_z} = \frac{r^3}{R_z^3}\,.$$

$M_z$ je ukupna masa Zemlje, a $R_z$ radijus Zemlje, pa je gravitacijska sila

$$\vec{F} = -\gamma\,\frac{mM_z}{R_z^3}\cdot\vec{r}\,.$$

Tijelo harmonički titra u odnosu prema središtu Zemlje, s periodom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_z^3}{\gamma M_z}}\,.$$



Za satelit koji brzinom $v$ kruži blizu Zemljine površine, gravitacijska sila jednaka je centripetalnoj sili

$$\frac{mv^2}{R_z} = \gamma\,\frac{mM_z}{R_z^2}$$

a jer je $v = \dfrac{2\pi R_z}{T'}$ za ophodno se vrijeme satelita dobiva

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{R_z^3}{\gamma M_z}}\,.$$

Tijelo i satelit istodobno će stići do drugoga kraja tunela, jer je $T = T'$, pa je i $\frac{T}{2} = \frac{T'}{2}$.

**1.14.** Gustoća tekućine povećava se linearno s dubinom, tako da je na površini gustoća $\varrho_0$, a na dubini $d$ je $2\varrho_0$. Koliki su period titranja i amplituda kuglice gustoće $2\varrho_0$ ispuštene na dubini $d/2$ s početnom brzinom jednakoj nuli? Trenje kuglice valja zanemariti.

***rješenje*** Ovisnost gustoće tekućine $\varrho$ o dubini $x$ dana je relacijom

$$\varrho(x) = ax + b\,, \tag{1}$$

gdje su $a$ i $b$ koeficijenti koji se određuju iz uvjeta $\varrho(0) = \varrho_0$ i $\varrho(d) = 2\varrho_0$. Relacija (1) tada glasi:

$$\varrho(x) = \frac{\varrho_0}{d}\cdot x + \varrho_0\,. \tag{2}$$

Sila $F$ koja djeluje na kuglicu volumena $V$ gustoće $\varrho_k = 2\varrho_0$, na dubini $x$ jednaka je razlici težine $G$ i uzgona $U$:

$$F = G - U = \varrho_k V g - \varrho(x) V g$$

$$F = Vg[\varrho_k - \varrho(x)]\,. \tag{3}$$

Primjenom relacija (2) i (3) dobiva se za jednadžbu gibanja kuglice

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = Vg\varrho_0\left(1-\frac{x}{d}\right)\,. \tag{4}$$

Budući da je $m = \varrho_k V = 2\varrho_0 V$, to iz (4) izlazi

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{g}{2d}(d-x)\,. \tag{5}$$

Translatira li se ishodište koordinatnog sustava u točku oko koje kuglica titra uvođenjem supstitucije

$$y = d - x\,, \tag{6}$$

za jednadžbu gibanja u novom sustavu dobiva se

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{2d}\,y = 0\,. \tag{7}$$

Jednadžba (7) je jednadžba neprigušenoga harmoničkog titranja, pa je kružna frekvencija tog titranja

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2d}}\,,$$

a period titranja

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2d}{g}}\,.$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (7) glasi

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)\,,$$

gdje se $A$ i $\varphi$ određuju iz početnih uvjeta. Početni uvjeti $\dot{x} = 0$ i $x(0) = \frac{d}{2}$ pomoću (6) prelaze u

$$\dot{y} = 0 \quad \text{i} \quad y(0) = \frac{d}{2}\,.$$

Iz prvoga početnog uvjeta

$$\dot{y} = A\omega\cos(\omega\cdot 0 + \varphi) = 0 \quad \text{dobiva se} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\,.$$

Iz drugoga početnog uvjeta dobiva se amplituda titranja $A$

$$A = y(0) = \frac{d}{2}\,.$$

**1.15.** Kolika mora biti duljina niti o koju je obješena kuglica čiji je promjer 4 cm, da bismo pri određivanju perioda malih titranja kuglicu s niti mogli smatrati matematičkim njihalom. Dopuštena pogreška pri toj aproksimaciji je 1 posto.

***rješenje*** Period titranja matematičkog njihala $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, dok je period titranja fizičkog njihala $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$.

Moment inercije kuglice prema Steinerovu poučku je

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2 = ml^2\left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{r}{l}\right)^2\right] = ml^2x\,,$$

gdje je $x = 1 + \frac{2}{5}\left(\frac{r}{l}\right)^2$, $l = L + r$. Pritom je $L$ duljina niti a $r$ polumjer kuglice.
Period titranja fizičkog njihala je

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{lx}{g}}\,.$$

Omjer perioda $T_2$ i $T_1$ njihala je

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{x}\,.$$

Pogreška

$$\Delta = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

$$\Delta = \frac{T_2}{T_1} - 1 = \sqrt{x} - 1\,.$$



Za $x$ vrijedi:

$$x = 1 + \frac{2}{5}\left(\frac{r}{l}\right)^2$$

$$x = (1+\Delta)^2\,.$$

$$\frac{r}{l} = \sqrt{\frac{5}{2}(1+\Delta)^2 - 1}\,.$$

Uz uvjet da pogreška bude $\Delta \leq 0{,}01$ slijedi $\frac{r}{l} \leq 0{,}224$, što za duljinu daje uvjet $l \geq 0{,}089$ m, pa je duljina niti $L = l - r = 0{,}069$ m.

**1.16.** Titrajni sustav sastoji se od homogenog diska mase $m_1$ i polumjera $r$ koji se može okretati oko horizontalne osi, opruge konstante $k$ i utega mase $m_2$ (sl. 1.12). Kolika je kružna frekvencija sustava ako sustav harmonički titra?

***rješenje*** Kinetička energija sustava (sl. 1.12) je

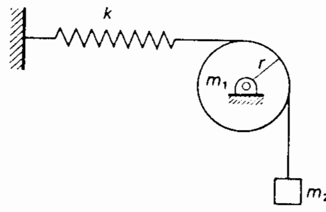
$$E_k = E_{k1} + E_{k2} = \frac{1}{2}m_2\dot{s}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2\,.$$

Ako je

$$I = \frac{1}{2}m_1r^2\,, \qquad s = r\vartheta\,, \qquad \dot{s} = r\dot{\vartheta}\,,$$

dobiva se

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)\dot{s}^2 = \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)r^2\dot{\vartheta}^2\,.$$




Slika 1.12.

Elastična potencijalna energija opruge iznosi

$$E_p = \frac{1}{2}ks^2\,.$$

Maksimalna potencijalna energija opruge u amplitudnom položaju

$$E_{pm} = \frac{1}{2}kA^2$$

jednaka je maksimalnoj kinetičkoj energiji kad je sustav u položaju ravnoteže

$$E_{km} = \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)r^2\dot{\vartheta}_0^2 = \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)A^2\omega^2\,.$$

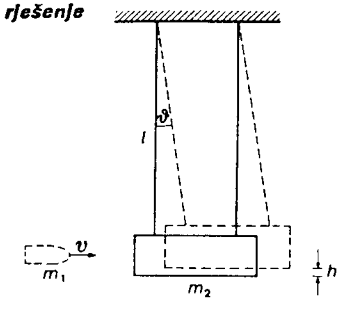
Izjednačivši ta dva izraza, možemo izračunati frekvenciju sustava:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{2m_2 + m_1}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{4m_2 + 2m_1}}\,.$$

**1.17.** Balističko se njihalo sastoji od komada drva obješenog poput njihala na dvije niti, svaka duljine $l = 2$ m (sl. 1.13). Kada se tane zarine u drvo, njihalo se zanjiše do visine $h = 2{,}6$ cm. Odredite amplitudu, frekvenciju i period njihala. Zanemarite trenje.

***rješenje***




Slika 1.13.

Kutna elongacija njihala dana je izrazom

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin \omega t\,.$$

Amplituda je

$$\vartheta_0 = \arccos \frac{l-h}{l}$$

$$\vartheta_0 = 9{,}25^\circ = 0{,}161 \text{ rad}\,.$$

Brzina njihala $\dot{s} = l\dot{\vartheta} = l\vartheta_0\omega \cos\omega t$ i maksimalna je za $\vartheta = 0$. Tada je kinetička energija također maksimalna

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2}\, l^2 \vartheta_0^2 \omega^2\,,$$

pri čemu je $m_1$ masa taneta, a $m_2$ masa komada drva. Maksimalna kinetička energija jednaka je maksimalnoj potencijalnoj energiji $(m_1 + m_2)gh$ koju njihalo ima kad je na visini $h$. Iz toga uvjeta izračunamo kružnu frekvenciju, frekvenciju i period njihala:

$$\frac{m_1 + m_2}{2}\, l^2 \vartheta_0^2 \omega^2 = (m_1 + m_2)gh\,.$$

Kružna frekvencija

$$\omega = \frac{\sqrt{2gh}}{l\vartheta_0} = 2{,}2\,\text{s}^{-1}\,.$$

Frekvencija

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}35 \text{ Hz}\,.$$

Period njihala

$$T = \frac{1}{f} = 2{,}8 \text{ s}\,.$$

**1.18.** Ravni štap duljine $l$ i mase $m$ njiše se kao fizičko njihalo oko svojega kraja. Po štapu se može pomicati uteg mase $\mu$. Na kojoj je udaljenosti $r$ od osi njihanja potrebno učvrstiti uteg (sl. 1.14) da to fizičko njihalo ima najkraći period?

***rješenje*** Fizičko se njihalo sastoji od jednolikog štapa i utega (sl. 1.14). Ukupni moment inercije tog tijela je

$$I = I_1 + \mu r^2\,,$$

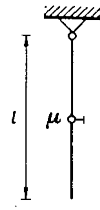
gdje je $I_1$ moment inercije štapa ako se vrti oko svojeg kraja, pa je

$$I = \frac{ml^2}{3} + \mu r^2\,.$$



Položaj težišta

$$b = \frac{m\,\frac{l}{2} + \mu r}{m + \mu}\,,$$




Slika 1.14.

gdje je $l/2$ udaljenost težišta od osi za sam štap, a $b$ udaljenost težišta od osi kada je na njemu uteg mase $\mu$. Reducirana duljina njihala je

$$l_r = \frac{I_1 + \mu r^2}{(m+\mu)b} = \frac{\frac{ml^2}{3} + \mu r^2}{\frac{ml}{2} + \mu r} =$$

$$= \frac{2ml^2 + 6\mu r^2}{3ml + 6\mu r}\,. \qquad (1)$$

Da bi fizičko njihalo imalo najkraći period, mora izraz (1) zadovoljavati nužan uvjet $\frac{\mathrm{d}l_r}{\mathrm{d}r} = 0$, pa je odredbena jednadžba za $r = r_0$

$$\frac{12\mu r(3ml + 6\mu r) - (2ml^2 + 6\mu r^2)6\mu}{(3ml + 6\mu r)^2} = 0\,,$$

odnosno

$$r = -\frac{ml}{2\mu} \pm \sqrt{\frac{m^2 l^2}{4\mu^2} + \frac{ml^2}{3\mu}}\,.$$

Odavde fizikalno rješenje koje daje za $r_0$

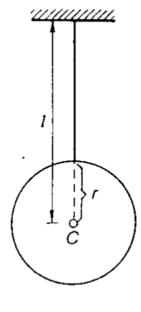
$$r_0 = -\frac{ml}{2\mu} + \sqrt{\frac{m^2 l^2}{4\mu^2} + \frac{ml^2}{3\mu}}$$

$$r_0 = \frac{ml}{2\mu}\left[\sqrt{1 + \frac{4\mu}{3m}} - 1\right]\,.$$

**1.19.** Fizičko se njihalo u obliku diska, čiji je polumjer $r$, njiše oko horizontalne osi okomito na disk koja prolazi na udaljenosti $l$ od središta diska (sl. 1.15). Koliki je period njihala ako je: **a**) $l = r$ i **b**) $l \gg r$? Kolika bi trebala biti udaljenost $l$ da bi period njihala bio minimalan?

***rješenje*** Period fizičkog njihala je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}\,.$$




Slika 1.15.

Iz izraza $I_{cm} = mr^2/2$ primjenom Steinerova poučka određujemo moment tromosti

$$I = I_{cm} + ml^2 = \frac{mr^2}{2} + ml^2\,.$$

To je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^2 + 2l^2}{2gl}}\,.$$

a) $l = r$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3r}{2g}}$

b) $l \gg r$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^2+2l^2}{2gl}} \approx 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

Period je minimalan ako je $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l} = 0$. Dakle,

$$2g(r^2+2l^2) - 8gl^2 = 0\,,$$

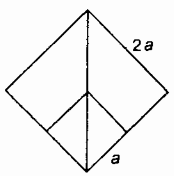
$$l = \frac{r\sqrt{2}}{2}\,.$$

**1.20.** Homogena tanka kvadratna ploča mase $m$ sa stranicom $a$ njiše se oko horizontalne osi koja prolazi jednim vrhom ploče i okomita je na ploču (sl. 1.16). Na kojem se mjestu na dijagonali ploče, kojom prolazi os vrtnje, može nalijepiti točkasta masa na ploču tako da se kretanje ploče ne promijeni? Moment tromosti homogene kvadratne ploče mase $m$ sa stranicom $a$ u odnosu prema osi koja je okomita na ploču i prolazi kroz njezino središte je $\frac{1}{6}\,ma^2$.

***rješenje*** Moment tromosti tanke kvadratne ploče mase 4 $m$ i stranice 2 $a$, s obzirom na os koja je okomita na ploču i prolazi kroz središte ploče, je

$$I' = \frac{1}{6}\,4m(2a)^2\,,$$

odakle proizlazi da je moment tromosti ploče stranice $a$ i mase $m$ s obzirom na os okomitu na ploču, koja prolazi kroz jedan njezin vrh




Slika 1.16.

$$I = \frac{I'}{4} = \frac{2}{3}\,ma^2\,.$$

Za otklon $\alpha$ ploče od okomice jednadžba gibanja je

$$I\ddot{\alpha} = -mg\,\frac{a}{\sqrt{2}}\,\sin\alpha\,,$$

pa je

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g\sin\alpha}{\frac{2}{3}\sqrt{2}a}\,.$$

Za matematičko njihalo duljine $l$ vrijedi ova jednadžba gibanja:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\,\sin\alpha\,.$$

Uzmemo li za duljinu njihala $\frac{2\sqrt{2}}{3}\,a$, uz iste početne uvjete, njihalo i ploča gibat će se na isti način. Vidimo da se točkasta masa mora naljepiti na 2/3 dijagonale od osi.



**1.21.** Torziono se njihalo sastoji od diska mase $m = 1$ kg i polumjera $R = 0{,}1$ m, koji visi na čeličnoj žici duljine $l = 2$ m i promjera $2r_0 = 2$ mm (sl. 1.17). Modul torzije čelika je $G = 70$ Gpa.

H

a) Kolika je konstanta torzije žice?
b) Koliki je period njihala?

***rješenje*** Moment elastičnih sila u žici proporcionalan je kutu $\vartheta$ za koji se disk zakrene (sl. 1.17)

$$M_{\check{z}} = -D\vartheta\,,$$

gdje je $D$ konstanta torzije ovisna o materijalu i dimenzijama žice. Modul smicanja (posmaka ili torzije) $G$ je konstanta koja ovisi samo o elastičnim svojstvima materijala. Torzija žice ili štapa poseban je primjer smicanja. Kut torzije $\vartheta$ proporcionalan je momentu (para) vanjskih sila $M_p$ (vidi primjer 1.3)

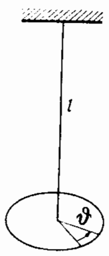
$$\vartheta = \frac{1}{G}\,\frac{2l}{\pi r_0^4}\,M\,,$$

gdje je $l$ duljina žice, $r_0$ polumjer poprečnog presjeka žice. Veza između konstante torzije i modula torzije je

$$D = \frac{\pi r_0^4}{2l}\,G\,.$$

Uvrštavajući izraz za moment inercije $I = \dfrac{mR^2}{2}$ i izraz za konstantu torzije $D$, za period konstante njihala dobivamo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{2D}}\,.$$




Slika 1.17.

Uvrštavanjem zadanih podataka dobivamo za konstantu torzije žice i period njihala

$$D = 55\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Nm}\,,\qquad T = 1{,}9\ \mathrm{s}\,.$$

**1.22.** Homogeni željezni valjak čija je visina $h = 20$ cm, polumjer baze $R = 15$ cm, visi na žici dugoj $l = 2$ m, kružnog presjeka polumjera $r = 1$ mm, učvršćenoj u središtu baze valjka. Izračunajte period malih titranja $T$ valjka ako je modul torzije žice $b = 8\cdot 10^{10}$ Pa (gustoća željeza $\varrho$ je 7 800 kg/m$^3$).

H

***rješenje*** Period titranja torzionog njihala je:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\,.$$

a konstanta torzije

$$D = \frac{\pi G}{2l}\,r^4\,,$$

gdje je $G$ modul torzije. Moment inercije valjka je

$$I = \frac{mR^2}{2}\,,$$

masa je

$$m = \varrho V = \varrho R^2 \pi h ,$$

pa je moment inercije

$$I = \frac{\varrho R^4 \pi h}{2} .$$

Period titranja valjka je:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\varrho R^4 h l}{G r^4}}$$

$$T = 28{,}09 \text{ s} .$$

**1.23.** Na jednodimenzionalni harmonički oscilator kružne frekvencije $\omega_0$ djeluje u konačnom vremenskom intervalu $\tau$ konstantna vanjska sila $F$. Odredite amplitudu titranja nakon što je vanjska sila prestala djelovati, ako je u početnom trenutku ($t = 0$, $x = 0$) brzina $v = 0$.

***rješenje*** Jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora u vremenu $0 \le t \le \tau$ je

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx + F . \tag{1}$$

Uvrštavajući

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} , \tag{2}$$

dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} . \tag{3}$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe je

$$x_h(t) = a_1 \sin \omega_0 t + b_1 \cos \omega_0 t ,$$

a partikularno rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe

$$x_p = \frac{F}{m\omega_0^2} .$$

Rješenje jednadžbe (3) je

$$x_1(t) = x_h + x_p = a_1 \sin \omega_0 t + b_1 \cos \omega_0 t + \frac{F}{m\omega_0^2} , \tag{4}$$

Početni uvjeti $t = 0$, $x = 0$ i $v = 0$ daju:

$$b_1 = \frac{-F}{\omega_0^2 m} \quad \text{i} \quad a_1 = 0 ,$$

pa je u vremenu $t \le \tau$

$$x_1(t) = \frac{-F}{\omega_0^2 m} (\cos \omega_0 t - 1) . \tag{5}$$



Pošto je vanjska sila prestala djelovati, tj. za $t > \tau$ jednadžba gibanja je

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 . \tag{6}$$

Rješenje je

$$x_2(t) = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t , \tag{7}$$

Funkcije $x(t)$ i $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ moraju biti kontinuirane funkcije, pa je u času $t = \tau$

$$x_1(t) = x_2(t) \tag{8}$$

i

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

što daje sustav jednadžbi iz kojih možemo odrediti konstante $a$ i $b$:

$$\frac{F}{m\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 \tau) = a \sin \omega_0 \tau + b \cos \omega_0 \tau , \tag{10}$$

$$\frac{F}{m\omega_0^2} \sin \omega_0 \tau = a\omega_0 \cos \omega_0 \tau - b\omega_0 \sin \omega_0 \tau . \tag{11}$$

Rješenje sustava je

$$a = \frac{F}{m\omega_0^2} \sin \omega_0 \tau \qquad b = \frac{F}{m\omega_0^2} (\cos \omega_0 \tau - 1) , \tag{12}$$

pa je amplituda titranja

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} , \tag{13}$$

tj.

$$A = \frac{F}{m\omega_0^2} \sqrt{2(1 - \cos \omega_0 \tau)} , \tag{14}$$

odnosno

$$A = \frac{2F}{m\omega_0^2} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} . \tag{15}$$

**1.24.** Tijelo mase $m = 0{,}1$ kg, obješeno je na opruzi, prisilno titra pod djelovanjem periodične vanjske sile amplitude $F_0 = 10$ N. Vlastita kružna frekvencija titranja tijela $\omega_0 = 20\ \mathrm{s}^{-1}$. Koeficijent prigušenja $b = 3\ \mathrm{kg\,s}^{-1}$. Odredite rezonantnu amplitudu titranja.

***rješenje*** Jednadžba gibanja tijela je

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx + F_0 \sin \omega t - b \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} . \tag{1}$$

Rješenje je

$$x(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \varphi) , \tag{2}$$

gdje je amplituda titranja

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} , \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} , \qquad \delta = \frac{b}{2m} . \tag{3}$$

Rezonancija nastupa za frekvenciju pri kojoj amplituda $A(\omega)$ ima maksimum

$$\frac{\mathrm{d}A(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}A(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\frac{-F_0}{2m}\left[-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\delta^2\omega\right]}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2]^{3/2}} . \tag{5}$$

Izraz (2) jednak je nuli ako je

$$-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\delta^2\omega = 0 . \tag{6}$$

Rezonantna kružna frekvencija

$$\omega_{rez.} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} , \tag{7}$$

a rezonantna amplituda

$$A(\omega_{rez.}) = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} . \tag{8}$$

$$A(\omega_{rez.}) = 0{,}843 \text{ m} .$$

**1.25.** Amplituda harmoničkog oscilatora u sredstvu s otporom smanji se od početne vrijednosti nakon $n$ titraja za faktor $1/e$. Odredite omjer perioda titranja $T$ tog oscilatora, prema periodu $T_0$ koji bi imao isti oscilator kada bi otpor zanemarili.

***rješenje*** Amplituda titranja je

$$A = A_0 e^{-\delta t} , \tag{1}$$

gdje je $A_0$ amplituda titranja u trenutku $t = 0$.
Nakon $n$ titraja amplituda

$$A_1 = A_0 e^{-1} ,$$

pa je vrijeme potrebno za $n$ titraja $t = \frac{1}{\delta}$.

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}} , \tag{2}$$

Period titranja $T = \frac{t}{n} = \frac{1}{n\delta} = \frac{2\pi}{\omega}$ pri čemu je konstanta

$$\delta^2 = \frac{\frac{k}{m}}{1+4\pi^2 n^2} . \tag{3}$$

Period titranja u sredstvu bez otpora iznosi

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

gdje je $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ kružna frekvencija oscilatora u sredstvu bez otpora.



Omjer perioda titranja

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1+4\pi^2n^2}{\omega_0^2}}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = \sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2 n^2}} .$$

Za velik broj titraja $n$ izraz možemo razviti u Taylorov red, pa je traženi omjer perioda

$$\frac{T}{T_0} \approx 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2} .$$

**1.26.** Ako je elongacija prigušenih titraja dana izrazom

$$s(t) = A e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi) ,$$

gdje su $A$ i $\varphi$ proizvoljne konstante (koje se mogu odrediti iz početnih uvjeta), a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

pokažite da je brzina čestice dana izrazom

$$v(t) = -A\omega_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi - \psi) ,$$

gdje je $\tan\psi = \frac{\omega}{\delta}$.

***rješenje*** Deriviranjem elongacije dobiva se brzina

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -Ae^{-\delta t}[\delta\sin(\omega t+\varphi) - \omega\cos(\omega t + \varphi)] . \tag{1}$$

Da bismo taj izraz transformirali, uvedimo novu varijablu $\psi$:

$$\delta = \omega_0\cos\psi , \qquad \omega = \omega_0 \sin\psi . \tag{2}$$

Nakon uvrštavanja (2) u (1) dobivamo

$$v = -Ae^{-\delta t}\omega_0[\cos\psi\sin(\omega t+\varphi) - \sin\psi\cos(\omega t+\varphi)]$$

$$v(t) = -A\omega_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi - \psi) .$$

**1.27.** Pretpostavite da je kod prigušenog titranja faktor prigušenja $\delta$ mnogo manji od neprigušene vlastite kružne frekvencije $\omega_0$. Izračunajte u tom slučaju kako kinetička i ukupna energija ovise o vremenu. Kolika je disipacija energije u jedinici vremena?

***rješenje*** Elongacija prigušenog titranja dana je relacijom

$$s(t) = A e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi) ,$$

gdje je $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Brzina je vremenska derivacija elongacije

$$v = \frac{ds}{dt} = A\left[-\delta\, e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) + \omega\, e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)\right].$$

Kvadrat brzine je

$$v^2 = A^2 e^{-2\delta t}[\delta^2 \sin^2(\omega t + \varphi) - 2\delta\omega \sin(\omega t + \varphi)\cos(\omega t + \varphi) + \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)].$$

Kako je $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ i $\cos^2(\omega t + \varphi) = 1 - \sin^2(\omega t + \varphi)$, to vrijedi

$$v^2 = A^2 e^{-2\delta t}\left\{\omega_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) - 2\delta\omega \sin(\omega t + \varphi)\cos(\omega t + \varphi) + \right.$$
$$\left. +\delta^2\left[2\sin^2(\omega t + \varphi) - 1\right]\right\}.$$

Dva posljednja člana u gornjem izrazu mogu se zanemariti, jer je $\delta \ll \omega_0$, pa za kinetičku energiju dobivamo

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 e^{-2\delta t}\omega_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi).$$

Potencijalna energija je

$$E_p = \frac{1}{2}ks^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 s^2 = \frac{m}{2}A^2 e^{-2\delta t}\omega_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Ukupna je energija, dakle

$$E = E_p + E_k = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 e^{-2\delta t}.$$

Disipaciju energije u jedinici vremena dobivamo derivacijom ukupne enrgije po vremenu

$$-\frac{dE}{dt} = 2\delta\, \frac{m}{2}\, \omega_0^2 A^2 e^{-2\delta t} = 2\delta E.$$

**1.28.** Odredite logaritamski dekrement prigušenja harmoničkog titranja točkaste mase ako je nakon 10 s titranja energija 50 posto manja. Period titranja je 2 s.

***rješenje*** U početnom trenutku $t = 0$ točkasta masa udaljena je od položaja ravnoteže za $x_0$, potencijalna energija je

$$E_0 = \frac{1}{2}\, kx_0^2.$$

Nakon 10 s tijelo načini 5 titraja, potencijalna energija je

$$E_t = \frac{1}{2}\, kx^2.$$

Omjer tih energija je

$$\frac{E_t}{E_0} = \frac{\frac{1}{2}\, kx}{\frac{1}{2}\, kx_0^2} = \frac{1}{2},$$

pa je pomak iz položaja ravnoteže

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}.$$



Budući da je omjer udaljenosti

$$\frac{x}{x_0} = e^{-\delta t} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a zatim

$$e^{-2\delta t} = \frac{1}{2}$$

te $\delta = \frac{\ln 2}{2t}$ pa će logaritamski dekrement prigušenja biti

$$\delta T = \frac{T \ln 2}{2t}$$

$$\delta T = 0{,}0693.$$

**1.29.** Na niti dugoj 1 m obješena je aluminijska kuglica. U vremenu od 27 min amplituda titranja kuglice smanji se od 6° na 5,4°. Odredite faktor prigušenja i razmotrite utjecaj viskoznosti zraka na period njihala.

***rješenje*** Amplituda prigušenih titraja je

$$A = A_0 e^{-\delta t}.$$

Konstanta prigušenja je

$$\delta = -\frac{1}{t}\ln\frac{A}{A_0}$$

$$\delta = 6{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Za njihalo kružnu frekvenciju neprigušenih titraja $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ treba zamijeniti sa $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, pa je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \delta^2}.$$

Period titranja je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \delta^2}}.$$

Budući da je $\delta^2 = 4{,}2 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}^{-1} \ll \frac{g}{l} = 9{,}81\ \mathrm{s}^{-2}$, period titranja bit će

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}01\ \mathrm{s}.$$

Viskoznost zraka praktički ne utječe na period titranja njihala iako utječe na amplitudu.

**1.30.** U vodi pliva komad drva oblika paralelepipeda, čija osnovica ima površinu $S = 1\ \mathrm{dm}^2$ i visinu $h = 0{,}5\ \mathrm{dm}$. U početnom trenutku drvo dobije brzinu $2\ \mathrm{m/s}^{-1}$ u smjeru okomitom prema površini vode. Kolika je brzina drva u bilo kojem trenutku ako je sila kojom se opire voda $F_0 = -b\dot{x}$, gdje je $b = 0{,}5\ \mathrm{kg\ s}^{-1}$, a gustoća drva $\varrho_D = 900\ \mathrm{kg\ m}^{-3}$?

***rješenje*** Za opisano gibanje komada drva vrijedi ova diferencijalna jednadžba:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - \varrho_V S g x \,,$$

odnosno

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \,,$$

gdje su

$$\delta = \frac{b}{2m} = 0{,}55\ \mathrm{s}^{-1}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{\varrho_V g}{\varrho_D h}} = 14{,}76\ \mathrm{s}^{-1} \,,$$

i $\varrho_V$ gustoća vode.

Rješenje ove jednadžbe ima oblik:

$$x = X_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \,,$$

gdje je

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 14{,}75\ \mathrm{s}^{-1} \,.$$

Početna amplituda $X_0$ i faza $\varphi$ odrede se iz početnih uvjeta:

$$t = 0\ \mathrm{s} \qquad x = 0\ \mathrm{m} \qquad \dot{x} = v_0$$

$$0 = X_0 \sin\varphi \qquad v_0 = -X_0\delta \sin\varphi + X_0\omega \cos\varphi$$

$$\varphi = 0 \qquad X_0 = \frac{v_0}{\omega} \,.$$

Za brzinu se dobije

$$v = v_0 \left(\cos\omega t - \frac{\delta}{\omega} \sin\omega t\right) e^{-\delta t}$$

$$v = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \left[\cos(14{,}75\ \mathrm{s}^{-1} t) - 0{,}04 \sin(14{,}75\ \mathrm{s}^{-1} t)\right] e^{-0{,}55\ \mathrm{s}^{-1} t} \,.$$

**1.31.** Odredite jednadžbu gibanja koja je rezultat dvaju jednostavnih titranja u istoj osi:

$$x_1 = A_1 \cos\omega(t + \tau_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos\omega(t + \tau_2) \,,$$

gdje je $\tau_1 = \frac{1}{6}$ s : $\tau_2 = \frac{1}{2}$ s : $\omega = \pi\ \mathrm{s}^{-1}$ i $A_2 = 2A_1$.

***rješenje*** Rezultantno gibanje ima oblik

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}\, t + \varphi\right)$$

Potrebno je, dakle, naći $T$, $A$ i $\varphi$. Odmah se može zaključiti da će period $T$ biti 2 s, jer je



$$T_1 = T_2 = 2\ \mathrm{s} \,,$$

naime

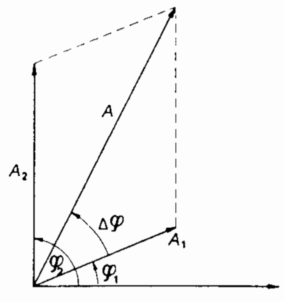
$$\frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{T_2} = \pi\ \mathrm{s}^{-1} .$$

Faze su $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Prema kosinusovom poučku (sl. 1.18):

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} = \sqrt{7}\, A_1 \,,$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_2 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} = 2{,}88 \,,$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\, 2{,}88 = 0{,}4\, \pi\ \mathrm{rad} \,.$$




Slika 1.18.

Konačno je

$$x = \sqrt{7}\, A_1 \cos \pi\ \mathrm{s}^{-1}(t + 0{,}4\ \mathrm{s}) \,.$$

**1.32.** Odredite jednadžbu staze $y(x)$ materijalne točke koja se dobiva superpozicijom dvaju harmoničkih titranja:

$$x = A \sin\omega t \qquad \text{i} \qquad y = A \sin 2\omega t \,.$$

Napišite jednadžbu za $A = 2$ cm, pa je prikažite grafički.

***rješenje*** Valja ujediniti dva međusobno okomita harmonička titranja u jedinstvenu stazu tijela – Lissajousovu krivulju:

$$x = A \sin\omega t \tag{1}$$

$$y = A \sin 2\omega t \,. \tag{2}$$

Relacija (2) može se zapisati kao

$$y = A 2 \sin\omega t \cos\omega t \,, \tag{3}$$

pa uvrštenjem (1) u (3) dobivamo

$$y = 2x \cos\omega t \,, \tag{4}$$

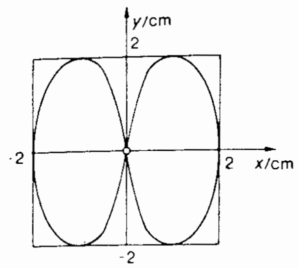
odnosno

$$y = 2x\sqrt{1 - \sin^2\omega t} \,. \tag{5}$$

Iz relacije (1) možemo izraziti

$$\sin\omega t = \frac{x}{A} \tag{6}$$

i uvrstiti u jednadžbu (5) te dobiti konačno rješenje




Slika 1.19.

$$y = 2x\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \quad \text{ili}$$

$$y^2 = 4x^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) \tag{7}$$

Stazu materijalne točke – Lissajousovu krivulju za $A = 2$ cm, u grafičkom prikazu (vidi sliku) prepoznajemo kao Bernoullievu lemniskatu unutar intervala $-2\,\text{cm} \le x \le 2\,\text{cm}$ i $-2\,\text{cm} \le y \le 2\,\text{cm}$.

## 1.3. Zadaci

**1.1.** Obješena čelična žica duga 4 m, čiji je promjer 2 mm, na donjem je kraju opterećena utegom mase 20 kg. Youngov modul elastičnosti za čelik je 196 GN/m$^2$. Koliko je produljenje žice?

Rezultat: $\Delta l = 1{,}27$ mm

**1.2.** Kolika je sila potrebna da za 1 mm rastegne bakrenu žicu dugu 2 m, čiji je polumjer 2 mm? Youngov modul elastičnosti za bakar iznosi 117,6 GN/m$^2$.

Rezultat: $F = 184{,}7$ N

**1.3.** Kolika će biti relativna promjena volumena komada bakra koji je u eksplozionoj komori izložen tlaku 345 MPa? Volumni modul elastičnosti za bakar iznosi 138 GPa.

Rezultat: $\Delta V/V = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ ili 0,25%

**1.4.** Do koje dubine možemo vertikalno spustiti u more olovni kabel prije nego što dođe do njegovog pucanja zbog vlastite težine. Gustoća olova je 11 400 kg/m$^3$, gustoća morske vode 1 040 kg/m$^3$, a naprezanje pri kojem dolazi do pucanja kabla iznosi $2 \cdot 10^7$ Pa?

Rezultat: $h = 196{,}8$ m

**1.5.** Električni motor pokreće pumpu pomoću željezne osovine duge 20 cm, čiji je promjer 2 cm. Motor, pri kutnoj brzini osovine 200 rad/s daje osovini snagu 14,92 kW. Koliki je kut torzije osovine ako je modul torzije željeza $8 \cdot 10^{10}$ Pa?

Rezultat: $\varphi = 0{,}68°$

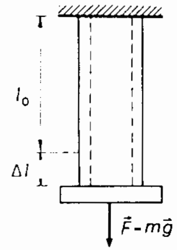
**1.6.** Izračunajte relativnu deformaciju gumene vrpce zbog tlačnog naprezanja. Polumjer kružnog presjeka vrpce iznosi $r = 0{,}005$ m. Sila koja djeluje iznosi 9,8 N. Youngov modul elastičnosti za gumu je $E = 4{,}4 \cdot 10^6$ Pa.

Rezultat: $\dfrac{\Delta l}{l} = -0{,}028$



**1.7.** Gumeno crijevo dugo $l_0 = 60{,}5$ cm učvršćeno je na gornjem kraju, a donji kraj opterećen je utezima (sl. 1.20) tako da zbog vlačnog naprezanja dolazi do deformacije dužine. Vanjski polumjer cijevi je $r_v = 6 \cdot 10^{-3}$ m, a unutarnji $r_u = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ m. Rezultati mjerenja prikazani su u tablici. Odredite Youngov modul elastičnosti.

| $m$/kg | $l$/cm | $\Delta l$/cm |
|---|---|---|
| 0 | 60,5 | |
| | | 3,5 |
| 1 | 64,0 | |
| | | 7,1 |
| 2 | 67,6 | |
| | | 10,6 |
| 3 | 71,1 | |




Slika 1.20.

Rezultat: srednja vrijednost, $\overline{E} = 3{,}4 \cdot 10^6$ Pa

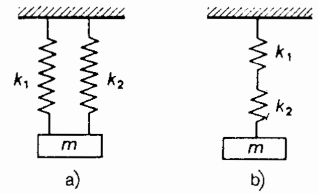
**1.8.** Pravokutna platforma je obješena na 4 žice koje su pričvršćene na uglovima. Promjer svake žice je 2 mm, a duljina 3 m. Youngov modul elastičnosti materijala od kojeg je žica napravljena jest $E = 180\,000$ MPa. Za koliko će se milimetara platforma spustiti zbog produženja žica ako se teret mase 50 kg stavi na sredinu platforme?

Rezultat: $\Delta l = 0{,}65$ mm

**1.9.** Na čeličnu žicu čiji je promjer 2 mm i duljine 1 m obješen je teret mase 60 kg. Ako je produljenje žice 0,94 cm, koliki je Youngov modul elastičnosti?

Rezultat: $E = 240$ MPa

**1.10.** Izračunajte kružnu frekvenciju titrajnih sustava na slikama 1.21.a) i b) ako su $m = 5$ kg, $k_1 = 105$ N/kg i $k_2 = 95$ N/kg.




Slika 1.21.

Rezultat: a) $\omega = 6{,}3\ \text{s}^{-1}$, b) $\omega = 9{,}98\ \text{s}^{-1}$

**1.11.** Klip motora automobila ima hod 55,5 mm i masu 360 g. Uz pretpostavku da gibanje klipa u cilindru motora možemo aproksimirati jednostavnim harmoničkim titranjem, kolika je maksimalna brzina i akceleracija klipa pri vrtnji motora s 3 000 okretaja u minuti? Kolika je pritom maksimalna sila na klip?

Rezultat: $v_m = 8{,}7\ \mathrm{ms}^{-1}$, $a_m = 2{,}74\ \mathrm{km\ s}^{-2}$, $F_m = 985$ N

**1.12.** Tijelo mase $m$ obješeno o spiralnu oprugu uzrokuje produljenje opruge 4 cm. Koliko titraja napravi to tijelo u 1 min kada ga se pobudi na vertikalno harmoničko titranje?

Rezultat: $n = 150$ titraja

**1.13.** Nerastegnuta opruga duljine $L$ pričvršćena je u horizontalnom položaju na oba kraja, a zatim prerezana na $\frac{1}{4} L$. Na tom je mjestu pričvršćeno tijelo (za oba kraja opruge), pomaknuto iz položaja ravnoteže i ostavljeno da titra po horizontalnoj podlozi bez trenja. Potrebno je izračunati omjer perioda titranja tog sustava i iste (neprerezane) opruge opterećene istim tijelom, ali u vertikalnom smjeru.

Rezultat: $T : T_v = 0{,}433$

**1.14.** Jedna opruga opterećena utegom produlji se 4 cm, a druga, opterećena istim utegom, produlji se 5 cm. Koliki je period titranja serijski spojenih opruga opterećenih istim utegom?

Rezultat: $T = 0{,}602$ s

**1.15.** Uteg mase srednje vrijednosti 8,000 kg obješen je na donjem kraju elastične opruge. Mjerenjem pomoću zaporne ure određeno je da 10 uzastopnih titraja traju 10,41 s (srednja vrijednost). Odredite konstantu $k$ opruge i relativnu i apsolutnu pogrešku mjerenja. Dokažite da za relativnu pogrešku vrijedi izraz:

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta m}{m} + 2\,\frac{\Delta T}{T}\,,$$

gdje je $m$ masa utega, a $T$ period. U mjerenju maksimalna apsolutna pogreška $\Delta m = 0{,}001$ kg, a $\Delta T = 0{,}02$ s.

Rezultat: $k = (291{,}4 \pm 11)\ \mathrm{kg\ s}^{-2}$

(Točnost mjerenja vremena bitno utječe na pogrešku.)

**1.16.** U času $t = 0$ jednostavni harmonički oscilator udaljen je na osi $x$ od svog ravnotežnog položaja za $+6$ cm i giba se brzinom $v_x = 5$ cm/s. Odredite početnu fazu titranja i amplitudu ako je period njegova titranja 2 s.

Rezultat: $\varphi = 50{,}19°$, $A = 7{,}81$ cm

**1.17.** Posuda s utezima visi na opruzi i titra periodom 0,5 s. Dodavanjem utega u posudu period titranja se promijeni na 0,6 s. Koliko se produljila opruga dodavanjem utega?

Rezultat: $\Delta l = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ m



**1.18.** Odredite omjer potencijalne i kinetičke energije materijalne točke koja harmonički titra kao funkciju vremena:
a) u općenitom slučaju, b) uz početne uvjete $t_0 = 0$ s, $\varphi_0 = 0$, c) uz početne uvjete $t_0 = 0$ s, $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$.

Rezultat: a) $\frac{E_p}{E_k} = \tan^2(\omega t + \varphi_0)$, b) $\frac{E_p}{E_k} = \tan^2 \omega t$, c) $\frac{E_p}{E_k} = \mathrm{ctg}^2\, \omega t$.

**1.19.** Koliki je omjer perioda vertikalnih titranja tijela vezanog na dvije jednake opruge ako se serijski spoj opruga zamijeni paralelnim?

Rezultat: $T_1 : T_2 = 2 : 1$

**1.20.** Na tankoj niti visi uteg pod čijom se težinom nit produljila za $\Delta x_0 = 0{,}1$ m. Odredite period malih vertikalnih titranja toga utega ako je sila niti na uteg dana izrazom:

$$F_N = -c_1 \Delta x - c_2 (\Delta x)^3\,,$$

gdje je $\Delta$ promjena duljine niti, a $c_1 = 294\ \mathrm{Nm}^{-1}$, $c_2 = 9800\ \mathrm{Nm}^{-3}$. 0,625

Rezultat: $T = 0{,}52$ s

**1.21.** Kuglica mase $2 \cdot 10^{-2}$ kg, pričvršćena na oprugu konstante elastičnosti $8\ \mathrm{Nm}^{-1}$, harmonički titra amplitudom $A$. Na udaljenosti $A/2$ od položaja ravnoteže postavi se masivna pregrada, od koje se kuglica savršeno elastično odbija. Odredite period titranja kuglice.

Rezultat: 0,21 s

**1.22.** Zamislite da je uzduž jednog promjera Zemlje probijen tunel kroz cijelu Zemljinu kuglu. Ne računate li s otporom, odredite koliki bi bio period titranja nekog tijela proizvoljne mase $m$ ispuštenog u taj tunel. Pretpostavite konstantnu vrijednost gustoće Zemlje.

Rezultat: $T = 84$ min

**1.23.** Knjiga leži na horizontalnoj podlozi koja jednostavno harmonički titra u horizontalnom smjeru i pritom ima amplitudu 1 m. Kolika je maksimalna frekvencija tog gibanja pri kojoj još neće doći do klizanja knjige po podlozi? Faktor trenja je 0,5.

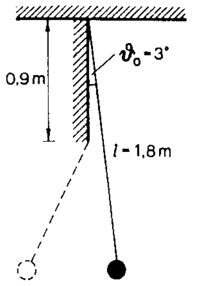
Rezultat: $f_{maks} = 0{,}35$ Hz

**1.24.** Nađite period njihanja Galileijeva njihala prikazanog na slici 1.22.

Rezultat: $T = 2{,}28$ s

**1.25.** Istodobno su zanjihana dva matematička njihala, za čije duljine vrijedi $l_1 - l_2 = 22$ cm. Nakon nekog vremena jedno je njihalo načinilo $N_1 = 30$, a drugo $N_2 = 36$ njihaja. Odredite njihove duljine.

Rezultat: $l_1 = 72$ cm, $l_2 = 50$ cm




Slika 1.22.

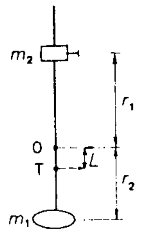
**1.26.** Matematičko se njihalo dugo 60 cm njiše u zrakoplovu koji se uspinje pod kutom 30° prema horizontalnoj ravnini, s ubrzanjem od 4 m s$^{-2}$. Odredite period njihanja matematičkog njihala.

Rezultat: $T = 1{,}39$ s

**1.27.** Kolika je napetost niti matematičkog njihala mase $m = 10$ g i duljine $l = 1$ m ako je u $t = 0$ maksimalna elongacija $\vartheta_0 = 6°$?

Rezultat: $F = 0{,}098$ N

m · g ?




Slika 1.23.

**1.28.** Na slici 1.23. je njihalo metronoma. Sastoji se od dva tijela masa $m_1$ i $m_2$, od kojih se tijelo mase $m_2$ može pomicati po štapu. Tijela su učvršćena na štap zanemarive mase. Težište $T$ njihala smješteno je ispod osi 0 vrtnje. Izvedite izraz za period titranja njihala metronoma i objasnite rezultat.

Rezultat: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1r_1^2 + m_2r_2^2}{g(m_1r_1 - m_2r_2)}}$

(Udaljavanjem tijela mase $m_2$ od osi vrtnje povećava se period titranja jer se time povećava i moment inercije, a smanjuje se udaljenost težišta od osi.)

**1.29.** Koliki je period fizičkog njihala u obliku homogenog štapa duljine $l = 2$ m ako se njiše oko osi koja prolazi:

a) jednim njegovim krajem,



b) kroz točku udaljenu od sredine štapa za $d = l/6$.

?c) Kada je period najmanji, a kada najveći?

Rezultat: a) $T = 2{,}3$ s, b) $T = 2{,}3$ s

c) period je najmanji za $d = 0{,}58$ m, a maksimalan (beskonačan) je za $d = 0$.

**1.30.** Njihalo se sastoji od štapa mase 0,5 kg, duljine 1 m, na čijem je donjem kraju pričvršćena kuglica polumjera 0,05 m. Kolika mora biti gustoća kuglice da bi period njezinih titraja oko okomite osi na štap koja prolazi gornjim krajem štapa, bio 2 sekunde?

Rezultat: $\varrho = 2\,610$ kg/m$^3$

**1.31.** Puni homogeni disk polumjera $R$ njiše se oko horizontalne osi koja je okomita na osnovicu diska i od njezina središta udaljena za $r$. Kolika mora biti ta udaljenost $r$ da bi period malih titraja bio minimalan.

Rezultat: $r = R/\sqrt{2}$

**1.32.** Na nit dugu 3 m obješena je kuglica čiji je polumjer 3 cm. Za koliko je veći period titranja tog fizičkog njihala od perioda matematičkog njihala kojim se ono može aproksimirati?

Rezultat: $\Delta T = 6{,}95 \cdot 10^{-5}$ s

**1.33.** Kugla polumjera 10 cm njiše se oko horizontalne osi udaljene 5 cm od središta C. Gdje treba biti os druge jednake kugle da omjer perioda titranja bude 0,5?

Rezultat: 0,78 cm

**1.34.** Dva homogena štapa duljine $l$ spojeni su tako da je dobiven štap duljine $2l$. Ako je omjer masa štapova 2 : 1, koliki je omjer perioda titranja kad je os na jednom, odnosno drugom kraju štapa?

Rezultat: $T_1/T_2 = 0{,}\cancel{966}1$

0,9165

**1.35.** Tanki homogeni štap njiše se oko horizontalne osi koja prolazi kroz jedan njegov kraj. Koliki je odnos perioda titranja toga štapa duljine $l$ i njemu jednakog štapa, dvostruke duljine $2l$?

Rezultat: $T_l/T_{2l} = 0{,}707$

**1.36.** Vanjska periodička sila maksimalnog iznosa 10 N djeluje na tijelo na opruzi koje, zbog djelovanja te sile, titra 1 000 puta u minuti amplitudom 1 cm. Na početku titranja tijelo je udaljeno pola amplitude od središnjeg položaja. Valja izračunati rad što ga izvrši sila u vrijeme jednog perioda ako je u $t = 0$ sila maksimalna.

Rezultat: $W = 0{,}2721$ J

**1.37.** Tijelo obješeno o oprugu titra amplitudom 10 cm. U jednom trenutku počinje djelovati sila koja prigušuje titranje čiji period postaje 2 s. Ako je omjer amplituda u prvoj i sedmoj sekundi prigušenja jednak 10, za koje vrijeme će se amplituda smanjiti na 1 cm?

Rezultat: $t = 6$ s

**1.38.** Tijelo na opruzi titra gotovo neprigušeno periodom $T_0 = 0{,}6$ s. Ako paralelno opruzi spojimo amortizer, period titranja povećava se na $T = 0{,}68$ s. a) Koliki je faktor prigušenja amortizera? b) Koliko bi puta amortizer morao imati veće trenje da nastupi kritično prigušenje?

Rezultat: a) $\delta = 4{,}9\ \mathrm{s}^{-1}$, b) $\delta_{kr} = 10{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$; 2,1 puta

**1.39.** Materijalna točka izvodi istodobno dva međusobno okomita harmonijska titranja opisana jednadžbama:

$$x = 1\,\mathrm{cm}\cos\pi\,\mathrm{s}^{-1}t \qquad i \qquad y = 2\,\mathrm{cm}\cos\frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1}t\,.$$

Odredite stazu materijalne točke.

Rezultat: $y^2 = (2\,\mathrm{cm})x + 2\,\mathrm{cm}^2$ uz $-1\,\mathrm{cm} \le x \le 1\,\mathrm{cm}$

# 2. MEHANIČKI VALOVI

## 2.1. Uvod

Jedan od načina prenošenja energije kroz prostor je valovito gibanje. Valovi koji se šire kroz elastična sredstva su mehanički valovi.
Transverzalni val nastaje ako čestice koje prenose val titraju okomito na smjer širenja, dok kod longitudinalnog vala čestice titraju oko položaja ravnoteže na pravcu kojim se širi val.
Fazna brzina vala $v$ povezana je valnom duljinom $\lambda$ i frekvencijom $f$ u izrazu:

$$v = \lambda f\,.$$

Jednadžba transverzalnog vala na žici ili gipkom užetu ima oblik:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0\,. \tag{2.1}$$

Opće rješenje te jednadžbe je funkcija čiji je oblik:

$$s(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)\,,$$

gdje je $s$ elongacija, a $v$ fazna brzina

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\,,$$

pri čemu je sila $F$ napetost žice ili užeta, a $\mu$ linearna gustoća, tj. masa žice ili užeta po jedinici duljine. Val se pri tome širi duž osi $x$ u vremenu $t$.
Rješenje jednadžbe ima oblik:

$$s = A\sin(\omega t - kx)\,,$$

gdje je $A$ amplituda, $\omega$ kružna frekvencija ili pulzacija, tako da je

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\,,$$

gdje je $T$ period titranja ili titrajno vrijeme, a $k$ je valni broj, pa vrijedi veza

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\,.$$

Snaga $P$ koja se transportira valnim gibanjem, tj. njezina srednja vrijednost $\overline{P}$ prikazana je ovim izrazima:

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P\,\mathrm{d}t$$

$$\overline{P} = \frac{A^2}{2}\,k\omega F = \frac{A^2}{2}\,k\omega v^2\mu$$

$$\overline{P} = \frac{A^2}{2}\,\omega^2 v\mu\,,$$

gdje je $P = A^2\omega kF\cos^2(\omega t - kx)$.
Diferencijalnu jednadžbu (2.1) zadovoljava i niz rješenja

$$s_n = 2A\sin k_n x\cos\omega_n t\,,$$

koji opisuje moguće stojne valove na gipkom užetu učvršćenom na oba kraja, tako da je

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}\,,$$

a valna duljina

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}\,,$$

gdje su $n = 1, 2, 3\ldots$, a $l$ duljina užeta za odgovarajući niz pulzacija $\omega_n$. Ako je žica napeta, (monokord) jedno mjesto na žici titra ovim elongacijama:

$$s(x = \text{konst.}, t) = \frac{A_0}{2} + A_1\sin\omega t + A_2\sin 2\omega t + A_3\sin 3\omega t + \cdots\,.$$

Dva harmonička vala kojima se frekvencije malo razlikuju imaju grupnu brzinu

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}\,,$$

gdje indeksi 1 odnosno 2 pripadaju prvom odnosno drugom valu. Ako pritom brzina ovisi o valnoj duljini (disperziona sredstva), grupna brzina se razlikuje od fazne, pa vrijedi

$$v_g = v - \lambda\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda} = v + k\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}k}\,,$$



gdje je $v$ fazna brzina.
Jednadžba zvuka za ravni val u plinu (longitudinalni val) ima oblik:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\varrho}{B}\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0\,, \tag{2.2}$$

gdje je $s$ elongacija, $\varrho$ gustoća plina, a $B$ volumni modul elastičnosti plina. Valovi zvuka šire se kroz plin brzinom

$$v = \sqrt{\frac{B}{\varrho}} = \sqrt{\kappa\,\frac{p}{\varrho}}\,,$$

gdje je $p$ tlak plina prije pobude, a $\kappa$ adijabatska konstanta, koja za zrak iznosi 1,40. Izraz možemo pisati i kao

$$v = \sqrt{\kappa\frac{RT}{M}}\,,$$

gdje je $R = 8{,}314\ \mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}$, $T$ apsolutna temperatura, a $M$ molna masa. Jednadžbu (2.2) zadovoljavaju i rješenja stojnih longitudinalnih valova nastalih refleksijama na slobodnim krajevima, kao kod titranja štapova ili stupca zraka u otvorenim sviralama. Za taj slučaj moguća su rješenja:

$$s_n = 2A\cos k_n x\sin\omega_n t\,,$$

gdje je niz harmoničkih valnih duljina određen sa:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}\,,$$

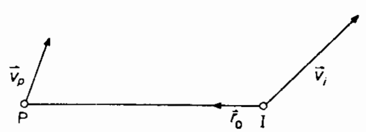
a $l$ je duljina štapa ili stupca.
Razina jakosti zvuka $L$ definirana ja kao

$$L = 10\log\frac{I}{I_0}\,,$$

gdje je $I$ jakost zvuka (buka), a $I_0$ jakost zvuka na pragu čujnosti i izražava se u decibelima (dB). Jakost zvuka na pragu čujnosti iznosi:

$$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{Wm^{-2}}\,.$$

*Glasnoća* pak zvuka je osjet jakosti zvuka u našem uhu. Jedinica za razinu glasnoće je fon (znak ph), (v. str. 124 *Valovi i optika*).




Slika 2.1.

Dopplerov efekt se javlja kada se izvor zvučnog vala i prijamnik jedan u odnosu na drugog gibaju. Tada je frekvencija izvora $f_i$ različita od frekvencije prijamnika $f_p$. Veza između tih frekvencija jest:

$$f_p = f_i \frac{v - \vec{r}_0 \vec{v}_p}{v - \vec{r}_0 \vec{v}_i},$$

gdje je $\vec{r}_0$ jedinični vektor prema slici 2.1, $v$ brzina zvuka u sredstvu, $\vec{v}_p$ brzina prijamnika, a $\vec{v}_i$ brzina izvora.

## 2.2. Primjeri

**2.1.** Formulirajte opći uvjet uz koji će fazna brzina $v$ harmoničkog vala, koji se rasprostire zategnutom žicom, biti jednaka najvećoj transverzalnoj brzini $u_{maks}$ čestice žice.

***rješenje*** Elongacija jednodimenzionalnog vala na žici, s valnim parametrima pulzacijom $\omega$ i valnim brojem $k$, opisan je funkcijom

$$y = A \sin(\omega t - kx)\,. \tag{1}$$

Kako je brzina vala

$$v = \lambda f \tag{2}$$

slijedi

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Transverzalna brzina čestice jest

$$u = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t - kx)\,, \tag{3}$$

a najveću vrijednost poprima kada joj faza $\varphi = \omega t - kx$ postaje jednaka nuli

$$u_{maks} = A\omega \cos 0^\circ = A\omega\,. \tag{4}$$

Traženi uvjet $v = u_{maks}$ je zadovoljen ako je

$$\frac{\omega}{k} = A\omega$$

ili ako je amplituda vala

$$A = k^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi}\,.$$

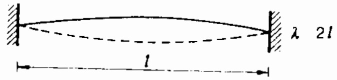


**2.2.** Klavirska žica duga 1,5 m načinjena je od željeza čija gustoća iznosi $\varrho = 7\,700\ \mathrm{kg/m^3}$, a Youngov modul elastičnosti $2{,}2 \cdot 10^{11}$ Pa. Naprezanje žice je takvo da je relativno produljenje žice 1%. Izračunajte osnovnu frekvenciju žice.

***rješenje*** Osnovna frekvencija žice odgovara najvećoj valnoj duljini stojnog vala formiranog na žici. Iz slike 2.2. konstatira se da je najveća valna duljina stojnog vala na žici

$$\lambda_1 = 2l\,,$$

gdje je $l$ duljina žice.




Slika 2.2.

Osnovna frekvencija je tada jednaka

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}\,, \tag{1}$$

gdje je $F$ sila kojom je žica zategnuta, a $\mu$ linearna gustoća žice.
Iz Hookova zakona dobiva se za silu $F$

$$F = S \cdot E \cdot \left(\frac{\Delta l}{l}\right), \tag{2}$$

gdje je $S$ ploština presjeka žice, $E$ Youngov modul elastičnosti žice, a $\Delta l$ produljenje žice.
Linearna gustoća $\mu$ žice jest

$$\mu = \frac{\varrho S l}{l} = \varrho S\,. \tag{3}$$

Stavljanjem relacija (2) i (3) u (1) dobiva se osnovna frekvencija žice

$$f_1 = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{\varrho} \cdot \left(\frac{\Delta l}{l}\right)} = 178\ \mathrm{Hz}\,.$$

**2.3.** Homogena žica duljine $l$ učvršćena na oba kraja, transverzalno titra. Odredite općeniti izraz za elongaciju vala na toj žici uz početne uvjete $t = 0$, $s(x, t = 0) = 0$ i $\dot{s}(x, t = 0) = \mathrm{konst.} = u_0$.

***rješenje*** Na žici nastaju transverzalni stojni valovi valnih duljina, odnosno valnih brojeva:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}\,, \qquad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l}\,,$$

dok je frekvencija titranja

$$\omega_n = \frac{2\pi v}{\lambda_n} = \frac{n\pi v}{l}\,.$$

Općeniti izraz za elongaciju vala na žici bit će

$$s(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin k_n x(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t)\,.$$

Iz početnih uvjeta dobivamo

$$t=0,\qquad s(x,t=0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin k_n x=0\,,$$

pa slijedi $A_n=0$, te je

$$s(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin k_n x\sin\omega_n t\,.$$

Iz drugog početnog uvjeta slijedi

$$\frac{\partial s(x,t=0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\omega_n\sin k_n x=u_0$$

To je Fourierov red za funkciju $s(x)$. Fourierov koeficijent $B_n\omega_n$ određuje se integralom:

$$\omega_n B_n=\frac{2}{l}\int_0^l u_0\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\quad n=1,2,3\,,$$

odakle je

$$B_n=\frac{2u_0 l}{n^2\pi^2 v}(1-\cos n\pi)\,.$$

Ako je $n$ paran broj, $B_n=0$, te u izrazu za titranje dolaze samo neparni brojevi $n=1,3,5,\ldots$ i elongacija je

$$s(x,t)=\frac{4u_0 l}{\pi^2 v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi v}{l}t\,.$$

**2.4.** Glazbena viljuška, čija je frekvencija $f=340$ Hz, titra iznad 1 m visoke cilindrične posude (cijevi) u koju se polako ulijeva voda. Za koju visinu vode u posudi će zvuk glazbene viljuške biti primjetno pojačan? Brzina zvuka neka je 340 m/s.

***rješenje*** Zvuk će biti primjetno pojačan u slučaju kad se frekvencija glazbene viljuške podudara s vlastitom frekvencijom zračnog stupca u posudi koja u slučaju jednog otvorenog kraja cijevi iznosi

$$f_k=\frac{2k+1}{4}\frac{v}{l_k}\,,$$

Pri tome je $l_k$ duljina zračnog stupca, $v$ brzina zvuka u zraku, a $k=0,1,2,3\ldots$ Imamo

$$l_k=\frac{2k+1}{4}\frac{v}{f_k}\,.$$



Kako je $l=1$ m, moguća su samo dva rješenja:

$$\text{za}\quad k=0,\qquad l_0=0,25\text{ m}$$

$$\text{za}\quad k=1,\qquad l_1=0,75\text{ m}$$

jer je za njih $l_k$ manji od 1 m. Dobivene duljine zračnog stupca odgovaraju visinama vode:

$$h_1=1\text{ m}-0,75\text{ m}=0,25\text{ m}$$

$$h_2=1\text{ m}-0,25\text{ m}=0,75\text{ m}\,.$$

**2.5.** Fazna brzina $v_f$ harmonijskih valova valne duljine $\lambda$ na površini tekućine dana je relacijom

$$v_f^2=\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\sigma}{\lambda\varrho}\,,$$

gdje je $g$ akceleracija sile teže, $\varrho$ gustoća tekućine, a $\sigma$ površinska napetost tekućine. Kolika je grupna brzina valova na površini tekućine?

***rješenje*** Grupna brzina $v_g$ dana je relacijom

$$v_g=v_f+k\frac{dv_f}{dk}\,, \tag{2}$$

gdje je $k$ valni broj. Budući da je fazna brzina harmoničkih valova na površini tekućine

$$v_f=\sqrt{g\frac{\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\sigma}{\varrho}}$$

$$v_f=\sqrt{\frac{g}{k}+\frac{\sigma}{\varrho}k}\,,$$

to se deriviranjem po valnom broju $k$ dobije

$$\frac{dv_f}{dk}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{g}{k}+\frac{\sigma}{\varrho}k}}\cdot\left(-\frac{g}{k^2}+\frac{\sigma}{\varrho}\right)\,.$$

Iz gornje relacije proizlazi

$$k\cdot\frac{dv_f}{dk}=\frac{\left(-\frac{g}{k}+\frac{\sigma}{\varrho}k\right)}{2\cdot\sqrt{\frac{g}{k}+\frac{\sigma}{\varrho}k}}=-\frac{v_f}{2}+\frac{\sigma}{\varrho v_f}k \tag{2}$$

Uvrštavanjem (2) u (1) i uvažavanjem izraza $k=2\pi/\lambda$ dobiva se

$$v_g=\frac{v_f}{2}+\frac{2\pi\sigma}{\varrho v_f\lambda}\,.$$

**2.6.** Ehosonderom se mjeri dubina mora. Od trenutka emitiranja pa do trenutka prijema odjeka s morskog dna prošlo je 2,5 s. Kolika je dubina mora na tom mjestu? Gustoća morske vode je 1 030 kg/m$^3$, a koeficijent stlačivosti $K = 4,6 \cdot 10^{-10}$ m$^2$N$^{-1}$.

***rješenje*** Brzina zvuka kroz fluid računa se pomoću izraza

$$v = \sqrt{\frac{B}{\varrho}},$$

gdje je $B$ volumni modul elastičnosti, a $\varrho$ gustoća fluida. Usporedba definicijskih jednadžbi za volumni modul elastičnosti $B$ i koeficijent stlačivosti $K$

$$B = -V\frac{\Delta p}{\Delta V} \qquad K = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p}$$

pokazuje da vrijedi $B = \frac{1}{K}$, pa za brzinu zvuka u fluidu možemo pisati

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varrho K}}.$$

Uvrštavanje vrijednosti za morsku vodu daje

$$v = 1\,452 \text{ m s}^{-1}.$$

Za 2,5 s zvuk je prešao 3 630 m, što odgovara dvostrukoj dubini mora. Dubina mora na tome mjestu iznosi

$$d = 1\,815 \text{ m}.$$

**2.7.** Napišite izraz za pomak neke čestice (molekule plina) u zraku kada se zvučni val frekvencije 1 000 Hz i amplitude $2 \cdot 10^{-6}$ m širi zrakom. Kolika je pritom maksimalna promjena (amplituda) tlaka? Izračunajte gustoću energijskog toka vala i razinu jakosti zvuka (decibeli). Pretpostavite da je gustoća zraka 1,29 kg/m$^3$, a brzina zvuka u zraku 340 m/s.

***rješenje*** Pretpostavit ćemo da je taj ravni val longitudinalni sinusoidalni val koji se širi uzduž osi $x$

$$s(x,t) = A\sin(\omega t - kx),$$

gdje je amplituda $A = 2 \cdot 10^{-6}$ m, kružna frekvencija $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^{-3}$ s$^{-1}$ i valni broj $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = 18,5$ m$^{-1}$. Oscilacije tlaka oko položaja ravnoteže $p_0$ jesu

$$p = p_0 + \varrho v\omega A\cos(\omega t - kx).$$

Maksimalna promjena (amplituda) tlaka je

$$\Delta p_{\text{maks.}} = \varrho v\omega A = 5,5 \text{ Pa}.$$

Gustoća energijskog toka koju val nosi sa sobom – ili kako se još naziva jakost (intenzitet) zvuka, računa se pomoću formule:

$$I = \frac{(\Delta p_{\text{maks.}})^2}{2v\varrho} = 3,45 \cdot 10^{-2} \text{ Wm}^{-2}.$$



Razina jakosti zvuka je

$$L = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{I}{10^{-2}\text{Wm}^{-2}},$$

gdje je $I_0$ jakost zvuka na pragu čujnosti. Uvrštavanjem podataka dobivamo za razinu jakosti zvuka:

$$L = 105,4 \text{ dB}.$$

**2.8.** Na udaljenosti $r_1 = 1$ m od točkastog izvora razina jakosti zvuka je 80 dB. Kolika je razina jakosti zvuka na 100 m udaljenosti? Pretpostavite atenuaciju (slabljenje) jakosti po eksponencijalnom zakonu $e^{-\mu x}$, gdje je faktor atenuacije za zrak $\mu = 0,02$ m$^{-1}$.

***rješenje*** Razina jakosti zvuka računa se pomoću izraza

$$L = 10\log\frac{I}{I_0}$$

gdje je $I_0 = 10^{-12}$ Wm$^{-2}$, te je na udaljenosti $r_1 = 1$ m

$$I_1 = I_0 10^{\frac{L_1}{10}} = 10^{-4} \text{ Wm}^{-2}.$$

Intenzitet kuglastih valova opada s kvadratom udaljenosti, pa uzevši u obzir opadanje kao i atenuaciju, dobivamo

$$I_2 = I_1\frac{r_1^2}{r_2^2}e^{-\mu(r_2-r_1)}.$$

Logaritmirajući ovaj izraz, dobivamo:

$$\log\frac{I_2}{I_1} = 2\log\frac{r_1}{r_2} - \mu(r_2 - r_1)\log e$$

$$L_2 - L_1 = 20\log\frac{r_1}{r_2} - 4,34\,\mu(r_2 - r_1)$$

$$L_2 = 31,4 \text{ dB}.$$

**2.9.** Izvor zvuka čija frekvencija $f_0 = 1\,700$ Hz i slušatelj nalaze se na istome mjestu. U jednom se trenutku izvor počinje udaljavati od slušatelja stalnim ubrzanjem $a_m = 10$ m s$^{-2}$. Ako je brzina zvuka 340 m s$^{-1}$, valja odrediti frekvenciju koju čuje slušatelj 10 s od početka gibanja izvora.

***rješenje*** Za zvuk (z), odnosno izvor (i) vrijedi:

$$s_z = v_z t_z; \qquad s_i = \frac{a}{2}t^2.$$

Kako je

$$s_z = s_i; \qquad t_z = \frac{a}{2v_z}t_i^2,$$

dobijemo $(t = t_i + t_z)$

$$t_i + \frac{a}{2v_z}t_i^2 - t = 0; \qquad t_i = \frac{-v_z + v_z\sqrt{1 + \frac{2at}{v_z}}}{a},$$

odnosno

$$v_i = v_z\left(\sqrt{1+\frac{2at}{v_z}}-1\right).$$

U izraz za frekvenciju Dopplerovoj pojavi uvrstimo prethodni izraz pa dobijemo:

$$f = f_0\,\frac{v_z + v_{sl}}{v_z + v_i}$$

$$f = \frac{f_0}{\sqrt{1+\frac{2at}{v_z}}} = 1\,348{,}9\ \mathrm{Hz}.$$

**2.10.** Približavajući se Zemlji brzinom 0,2 c, svemirski brod emitira signal zelene svjetlosti čija valna duljina iznosi 0,5 μm. Koliku će valnu duljinu signala izmjeriti motritelj na Zemlji?

***rješenje*** Izvor se giba prema motritelju brzinom $v = 0{,}2\,c$. Neka je $T'$ period vala svjetlosnog signala koji mjeri mirni motritelj. U tom vremenu $T'$ svjetlosni signal prelazi put $cT'$, a izvor svjetlosnog signala, tj. svemirski brod put $vT'$. Valna duljina koju će mjeriti mirni motritelj je

$$\lambda' = (c-v)T', \tag{1}$$

a frekvencija iznosi

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{(c-v)T'}. \tag{2}$$

Period $T'$ je povezan s periodom $T$ u sustavu izvora relativističkom transformacijom:

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$f' = \frac{c}{c-v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,f = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,f \tag{4}$$

$$c = \lambda' f' = \lambda f \tag{5}$$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,\lambda \tag{6}$$

$$\lambda' = 0{,}408\ \mu\mathrm{m}.$$

**2.11.** Koliku frekvenciju zvuka registrira motritelj koji se kreće na vrtuljku čiji je polumjer 10 m s ophodnim vremenom 4 s, ako izvor zvuka frekvencije $f$ miruje i nalazi se vrlo daleko od motritelja u istoj horizontalnoj ravnini?



***rješenje*** Zbog Dopplerova efekta motritelj registrira frekvenciju $f'$ različitu od frekvencije izvora $f$. U slučaju kada izvor miruje, frekvencija $f'$ dana je relacijom

$$f' = \frac{v - v_m\cos\theta_m}{v}\cdot f, \tag{1}$$

gdje je $v$ brzina širenja zvuka, $v_m$ brzina motritelja, a $\theta_m$ kut između smjera brzine motritelja i smjera širenja zvuka. Pretpostavimo li da se u trenutku $t = 0$ s podudaraju smjerovi brzine motritelja i brzine zvuka, tada se uvidom u sliku dobiva

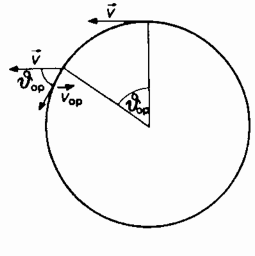
$$\theta_m = \omega t = \frac{2\pi t}{T}. \tag{2}$$

Iznos brzine motritelja je konstantan te iznosi

$$v = r\,\omega = \frac{2\pi r}{T}. \tag{3}$$

Uvrštavanjem (2) i (3) u (1) dobiva se

$$f' = \frac{v - \left(\frac{2\pi r}{T}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{v}\cdot f. \tag{4}$$



Slika 2.3.

Stavljanjem za brzinu zvuka 340 m/s i uvrštavanjem zadanih veličina u relaciju (4), dobiva se

$$f' = \left(1 - \frac{\pi}{68}\cdot\cos\frac{\pi t}{2}\right)\cdot f$$

## 2.3. Zadaci

**2.1.** Transverzalni val opisan je jednadžbom

$$s(x,t) = 0{,}1\ \mathrm{m}\,\sin(20\ \mathrm{s}^{-1}t - 3\ \mathrm{m}^{-1}x)$$

Odredite:
**a)** amplitudu, frekvenciju, period, valnu duljinu, brzinu vala i smjer širenja,
**b)** Izračunajte pomak, brzinu i akceleraciju titranja čestice na mjestu $x_1 = 3{,}6$ cm u trenutku $t_1 = 0{,}6$ s.
**c)** Koji val moramo dodati tome valu da bismo dobili stojni val koji u trbusima ima amplitudu 20 cm i čvor u točki $x = 0$.

Rezultat: a) $A = 0{,}1$ m, $f = 20$ Hz, $T = 0{,}05$ s, $\lambda = 0{,}33$ m, $v = 6{,}67\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, val se širi slijeva nadesno, u smjeru pozitivne osi $x$.
b) $s = 0{,}095$ m, $u = 3{,}9\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $a = 1\,500\ \mathrm{m\,s^{-2}}$
c) $s'(x,t) = -0{,}1\ \mathrm{m}\sin 2\pi(20\ \mathrm{s}^{-1}t + 3\ \mathrm{m}^{-1}x)$.

**2.2.** Transverzalni valni impuls koji se širi užetom u času $t = 0$ opisan je jednadžbom

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2},$$

gdje je konstanta $a = 1$ m, (veličine $x$ i $y$ iskazane su istom jedinicom). Maksimum impulsa je u točki $x = 0$ m. Ako se val širi u smjeru $+x$ osi brzinom 2 m/s, odredite oblik vala nakon 2 s.

Rezultat: $y(x, 2s) = \dfrac{a^3}{a^2 + (x - 4\text{ m})^2}$

**2.3.** Odredite koliko će se postotaka sniziti frekvencija svirale s usnama ako se umjesto zraka upuhuje $CO_2$ jednake temperature? Gustoća zraka je $1,293$ kg/m$^3$, a gustoća $CO_2$ $1,977$ kg/m$^3$ uz normalne uvjete.

Rezultat: $f_{CO_2} = 0{,}79\, f_z$. (za udjel 21%)

**2.4.** Osnovna frekvencija žice napete silom $F$ čiji je polumjer 0,1 mm je 440 Hz. Imamo dva uzorka te žice, a razlikuju se malo u promjerima poprečnog presjeka. Svaki je uzorak napet jednakom silom $F$. Kada obje žice titraju čuje se 10 udara u 3 s. Odredite razliku promjera žica.

Rezultat: $d_1 - d_2 = 1{,}52 \cdot 10^{-6}$ m

**2.5.** Dvije žice jednake duljine ($l = 1$ m) napete jednakim silama daju jednake tonove. Kada se, ne mijenjajući naprezanje, jedna žica skrati 2 cm, pri titranju se čuje 6 zvučnih udara u sekundi. Koliko iznose frekvencije tih titranja?

Rezultat: $f_1 = 300$ Hz, $f_2 = 294$ Hz

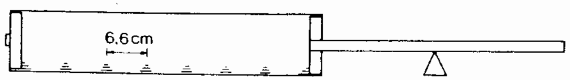
**2.6.** Superpozicijom sinusoidalnog vala $s_1 = 4\text{ cm}\sin(3\text{ s}^{-1}t - x/7\text{ cm})$ i pripadajućeg drugog vala $s_2$ formirao se stojni val. Čvor titranja je u točki $x = 5$ cm. Napišite potpunu jednadžbu pribrojenoga drugog vala.

Rezultat: $s_2 = 4\text{ cm}\sin(3\text{ s}^{-1}t + x/7\text{ cm} + 1{,}711)$

**2.7.** Željezna i srebrna žica jednakih promjera i jednakih duljina podvrgnute su jednakim napetostima. Izračunajte osnovnu frekvenciju srebrne žice ako je osnovna frekvencija željezne žice 200 Hz. Gustoća željeza je 7 800 kg/m$^3$, a gustoća srebra 10 600 kg/m$^3$.

Rezultat: 171,6 Hz

**2.8.** Kundtova cijev zatvorena je na jednom kraju pomičnim čepom, na drugom kraju cijevi je čelični štap dug 1 m, u sredini učvršćen, a na krajevima slobodan (sl.2.4). Ako su čvorovi stojnog vala u plinu cijevi udaljeni 6,6 cm, izračunajte frekvenciju i brzinu zvuka u plinu koji ispunjava cijev. Koliki je adijabatski koeficijent plina ako je gustoća plina $\varrho = 1{,}27$ kg/m$^3$ i tlak plina $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa? ($E_{čelika} = 200$ GN/m$^2$)




Slika 2.4.

Rezultat: $f = 2{,}53$ kHz, $v = 334$ ms$^{-1}$, $\kappa = 1{,}4$



**2.9.** Žica duga 1,5 m, čiji je promjer 0,5 mm i masa 0,9 g, napeta je silom 20 N. Žicom putuju sinusoidalni valovi frekvencije 120 Hz i amplitude 3 cm. Kolika je gustoća energije tih valova i njihov intenzitet?

Rezultat: $W = 7{,}82 \cdot 10^5$ J/m$^3$; $I = 1{,}43 \cdot 10^8$ W/m$^2$

**2.10.** Kolika je snaga točkastog izotropnog izvora zvuka ako na udaljenosti 30 m od tog izvora razina jakosti zvuka iznosi 85,486 dB?

Rezultat: $P = 4$ W

**2.11.** Izvor zvuka izotropno zrači sferne valove čija je frekvencija 250 Hz. Prag čujnosti za tu frekvenciju je 0,15 nW/m$^2$. Koeficijent prigušenja zvučnih valova jest $6 \cdot 10^{-4}$ m$^{-1}$. Na udaljenosti 150 m od izvora izmjerena je razina jakosti zvuka 50 dB. Kolika je zvučna snaga izvora?

Rezultat: $P_i = 5{,}08$ W

**2.12.** Kada bi se vozač približavao crvenom svjetlu semafora ($\lambda = 650$ nm) brzinom $v = 0,15$ c, kakvu bi svjetlost opažavao?

Rezultat: $\lambda = 560$ nm, zelenu svjetlost

**2.13.** Radarskim valovima čija je frekvencija 2 000 MHz kontrolira se brzina automobila. Kolika je razlika u frekvenciji upadnog vala i vala reflektiranog na automobilu koji se približava brzinom 72 km/h?

Rezultat: $\Delta f = 266{,}7$ Hz

**2.14.** Mlažnjak leti nisko. Pri nailasku zrakoplova čuje se zvuk čija je frekvencija $f_1 = 1{,}5 \cdot 10^4$ Hz, a pri udaljavanju ta je frekvencija 1 000 Hz. Izračunajte brzinu zrakoplova.

Rezultat: $v = 1\,071$ km h$^{-1}$

**2.15.** Izvor zvuka čija je frekvencija 500 Hz miruje, a prema njemu se približava slušatelj brzinom 10 posto manjom od brzine zvuka. Koju frekvenciju čuje slušatelj?

Rezultat: $f = 950$ Hz

**2.16.** Dva se automobila međusobno udaljavaju brzinom $v/10$ ($v$ je brzina zvuka). Ako automobil koji se udaljava od reflektirajućeg zida brzinom $v/20$ šalje zvučne valove čija je frekvencija 1 000 Hz, koje frekvencije čuje slušatelj u drugom autu?

Rezultat: $f_1 = 904{,}76$ Hz i $f_2 = 1\,000$ Hz

**2.17.** Izvor, pričvršćen na horizontalnoj ploči, emitira ton čija je frekvencija 1 000 Hz. Izvor je udaljen 1,5 m od vertikalne osi vrtnje. Ako vrtnja ploče dostiže kutnu brzinu 50 s$^{-1}$, koji frekventni pojas čuje vrlo udaljeni motritelj? (Brzina zvuka u zraku je 340 m/s.)

Rezultat: $\Delta f_p = (819 - 1\,283)$ Hz

# 3. MAXWELLOVE JEDNADŽBE

## 3.1. Uvod

Električno polje očituje se električnom silom na mirni naboj i influencijom na nenabijenom tijelu, pa osnovne jednadžbe za jakost električnog polja i električni pomak takvog elektrostatskog polja u konačnom prostoru glase:

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = 0 \qquad\qquad \oiint \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = Q\,.$$

Prilike u jednoj točki električnog polja opisuju jednadžbe u diferencijalnom obliku:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad\qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \varrho\,,$$

a vrijedi veza

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

za homogeni izotropni izolator, gdje je $\vec{E}$ vektor jakosti električnog polja, $\mathrm{d}\vec{s}$ djelić staze po kojoj se obavlja integracija, $\vec{D}$ je vektor električnog pomaka, $\mathrm{d}\vec{S}$ djelić površine integracije, $Q$ količina mirnoga električnog naboja, $\varrho$ gustoća naboja, dok su $\varepsilon_0$ apsolutna dielektrična konstanta vakuuma, a $\varepsilon_r$ relativna dielektrična konstanta.

Od elementa struje $I\mathrm{d}\vec{s}$, gdje je $I$ jakost električne struje, a $\mathrm{d}\vec{s}$ djelić duljine žice, na udaljenosti $\vec{r}$ mjerene od žice, vektor jakosti magnetskog polja je

$$\mathrm{d}\vec{H} = \frac{I\mathrm{d}\vec{s} \times \frac{\vec{r}}{r}}{4\pi r^2}\,.$$

Na vodič kojim teče struja, a nalazi se u magnetskom polju, djeluje (elektromagnetska) sila. Na element struje ta sila iznosi

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{s} \times \left(-\frac{\vec{r}}{r}\,\frac{\phi}{4\pi r^2}\right)\,,$$



gdje je $\phi$ magnetski tok. Sila se može pisati i u obliku

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}\,.$$

$\vec{B}$ je vektor magnetske indukcije. Uz definiciju jakosti električne struje $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, gdje je $t$ vrijeme, izraz opisuje silu na električni naboj koji se giba brzinom $\vec{v}$. Ona glasi

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q\,\vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Istodobno djelovanje električnog i magnetskog polja na naboj izraženo je Lorentzovom silom:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q\,\vec{E} + \mathrm{d}q\,\vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Za vektore elektromagnetskog stacionarnog polja vrijede ove jednadžbe u integralnom obliku:

$$\oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint_S \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = 0$$

$$\oiint \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \varrho \cdot \mathrm{d}V$$

$$\oiint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0\,,$$

gdje je $\vec{J}$ gustoća električne struje, $\varrho$ gustoća električnog naboja u volumenu $V$.

U diferencijalnom obliku (za jednu točku prostora) jednadžbe za stacionarno elektromagnetsko polje glase:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \varrho$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0\,.$$

Uz poznavanje dielektričnosti $\varepsilon$, permeabilnosti $\mu$ i specifične vodljivosti $g$ sredstva vrijede veze između gustoće struje električnog pomaka i magnetske indukcije:

$$\vec{J} = g\vec{E}\,; \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \mathrm{i} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}\,.$$

Inducirani napon u zatvorenom zavoju žice jednak je brzini kojom se mijenja magnetski tok obuhvaćen tim zavojem, tj.

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}\,.$$

Miruje li zavoj, inducirani je napon

$$U_{ind} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

ili

$$\oint \vec{E}\,d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\,d\vec{S}\,.$$

Osnovne jednadžbe elektromagnetskog polja, tj. Maxwellove jednadžbe, u integralnom obliku u vremenski mirnoj, nepromjenljivoj zatvorenoj stazi, odnosno plohi inegracije glase:

$$\oint \vec{H}\,d\vec{s} = \iint_S \vec{J}\,d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{D}\,d\vec{S} \qquad \text{Ampèreov zakon}$$

$$\oint \vec{E}\,d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\,d\vec{S} \qquad \text{Faradayev zakon indukcije}$$

$$\oiint \vec{D}\,d\vec{S} = \iiint_V \varrho\cdot dV$$

$$\oiint \vec{B}\,d\vec{S} = 0\,. \qquad \text{Gaussovi zakoni}$$

Za mirnog motritelja te jednadžbe u diferencijalnom obliku glase:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \varrho$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0\,.$$



Gustoća energije homogenoga električnog polja:

$$w_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

$$w_{el} = \frac{1}{2}ED\,,$$

dok je gustoća energije magnetskog polja:

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$$

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}\,.$$

## 3.2. Primjeri

**3.1.** Specijalnu Gaussovu površinu definiraju ovi uvjeti:

1. Površina je zatvorena.
2. Na bilo kojoj točki površine vektor $\vec{D}$ je ili normalan ili tangencijalan na tu površinu.
3. $|\vec{D}|$ ima istu vrijednost u svim točkama površine gdje je normalan.

Primjenom specijalne Gaussove površine odredite $\vec{D}$ od:

a) jednolikoga beskonačnoga linijskog naboja gustoće $\varrho_l$ (C/m),

b) homogenoga sfernog naboja gustoće $\varrho$ i polumjera $a$.

***rješenje*** a) Budući da je posrijedi beskonačni naboj, $\vec{D}$ ima samo radijalnu ($r$) komponentu, pa za Gaussovu površinu odabiremo valjak (sl. 3.1). Prema Gaussovu zakonu

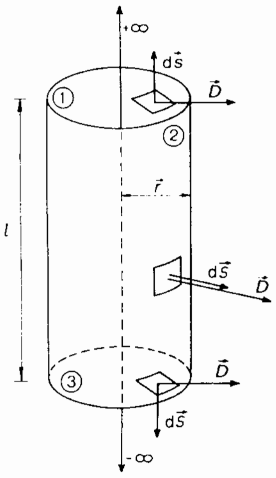
$$\int_1 \vec{D}\,d\vec{S} + \int_2 \vec{D}\,d\vec{S} + \int_3 \vec{D}\,d\vec{S} = Q\,,$$

gdje je integracija razdijeljena na plašt (2) i obje baze (1, 3). Integrali preko baza iščezavaju, pa je

$$Q = D\int_2 dS = D2\pi rl\,.$$

Konačno je

$$\vec{D} = \frac{\varrho_l}{2\pi r}\,\vec{r}_0\,.$$




Slika 3.1.

b) Za Gaussovu površinu odabiremo kuglu istog ishodišta. Razlikuju se dva slučaja: kada je $r \leq a$ i kada je $r > a$. Primjena Gaussova zakona daje

$$\vec{D} = \frac{\varrho r}{3}\frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{uz uvjet } r \leq a$$

i

$$\vec{D} = \frac{\varrho a^3}{3r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{uz uvjet } r > a\,.$$

**3.2.** Odredite div $\vec{D}$ u sfernom koordinatnom sustavu kad je centar kuglastoga homogenog naboja s polumjerom $a$ u ishodištu.

***rješenje*** $\vec{D}$ je u ovom primjeru zadan dvama izrazima:

$$\vec{D} = \frac{\varrho r}{3}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{za} \quad r \leq a$$

$$\vec{D} = \frac{\varrho a^3}{3r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{za} \quad r > a\,.$$

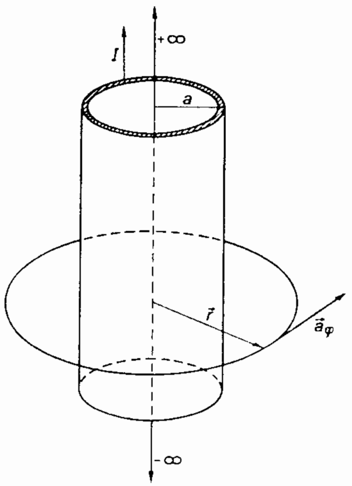
Primjenom diferencijalnog operatora divergencije u sfernom koordinatnom sustavu, i to samo njegovog radijalnog dijela $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2$, dobivamo:

za $r \leq a$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\varrho r}{3}\right) = \frac{1}{r^2}\left(3r^2\frac{\varrho}{3}\right) = \varrho$$

za $r > a$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\varrho a^3}{3r^2}\right) = 0\,.$$




Slika 3.2.



**3.3.** Šuplji cilindrični vodič, tanke stijenke, beskonačne dužine, vodi struju $I$. Primjenom Ampèreova zakona odredite $\vec{H}$.

***rješenje*** Biot-Savartov zakon uzima u obzir samo $\varphi$ komponente magnetskog polja (u cilindričnom koordinatnom sustavu). Zato odabiremo kružnicu kao put integracije. Unutar cilindra imamo

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = I = 0\,.$$

Izvan cilindra vrijedi

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = 2\pi r H_\varphi = I\,.$$

Za $r > a$ slijedi

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{a}_\varphi\,,$$

gdje je $\vec{a}_\varphi$ jedinični vektor.

**3.4.** Pločasti kondenzator, koji se sastoji od dvije kružne ploče polumjera 0,18 m i razmaknute 1 mm, spojen je na gradsku mrežu.
a) Kolika je struja pomaka među pločama?
b) Koliko je magnetsko polje na rubu kondenzatora?
Zanemarite efekt rubova i smatrajte da je električno polje na rubovima jednako onom u sredini kondenzatora.

***rješenje*** Napon gradske mreže je

$$U = U_0 \sin\omega t\,, \tag{1}$$

gdje je $U_0 = 220\sqrt{2}$ V, $\omega = 2\pi f = 314\ \mathrm{s}^{-1}$. Tok električnog polja unutar kondenzatora je

$$\Phi_D = DS = \frac{\varepsilon_0 U_0 \sin\omega t}{d}R^2\pi\,, \tag{2}$$

gdje je

$$d = 10^{-3}\ \mathrm{m} \quad \text{i} \quad R = 0,18\ \mathrm{m}\,.$$

Struja pomaka je

$$I_p = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{\varepsilon_0 R^2\pi U_0\omega}{d}\cos\omega t$$
$$I_p = 88\,\mu\mathrm{A}\ \cos\omega t\,. \tag{3}$$

Maksimalna vrijednost struje pomaka iznosi 88 μA, njezina efektivna vrijednost je 62 μA.

Magnetsko polje na rubu kondenzatora dobiva se iz četvrte Maxwellove jednadžbe. Izračunat ćemo magnetsku indukciju:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p\,,$$

$$B\,2R\pi = \mu_0 I_p$$

$$B = 98\ \mathrm{pT}\ \cos\omega t\,.$$

## 3.3. Zadaci

**3.1.** Dva jednaka beskonačna linijska naboja gustoće $\varrho_l = 2$ μC/m protežu se uzduž osi $X$ i $Y$. Odredite vektor električnog pomaka $\vec{D}$ u točki (3,3,3) m.

Rezultat: $\vec{D} = 1,3 \; \dfrac{\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{2}}$ μCm$^{-2}$

**3.2.** Vodič okružuje površinu 0,65 m$^2$ u ravnini $z = 0$. Koliki je inducirani napon ako se magnetska indukcija mijenja po zakonu

$$\vec{B} = 0{,}05\ \mathrm{T}\ \cos\left[\left(10^3 t\,\frac{\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{s}^{-1}\right]\ ?$$

Rezultat: $U_i = 23$ V $\sin 10^3\ \mathrm{s}^{-1} t$

**3.3.** Puni ravni vodič kružnog presjeka, beskonačne duljine, polumjera $a$, vodi struju $I$ čija je gustoća jednaka u svim dijelovima presjeka vodiča. Primjenom Ampèreova zakona odredite jakost magnetskog polja $\vec{H}$.

Rezultat: $\vec{H} = \dfrac{Ir}{2\pi a^2}\,\vec{a}_\varphi$ za $r < a$

$\vec{H} = \dfrac{I}{2\pi r}\,\vec{a}_\varphi$ za $r > a$

**3.4.** Kvadratni okvir, čija je stranica $a = 2$ cm, sadrži 100 zavoja tankog vodiča, visi na niti čija je konstanta torzije $10^{-5}$ Nm/°. Ravnina okvira podudara se sa smjerom vanjskoga magnetskog polja. Odredite kolika je magnetska indukcija tog polja ako se pri propuštanju struje 1 A kroz zavoje okvira on zakrene za 60°.

Rezultat: $B = 3 \cdot 10^{-2}$ T

**3.5.** U dugoj zavojnici kružnog presjeka duljine $l$ i broja zavoja $N$ mijenja se jakost električne struje po zakonu: $i = at^2$. Primjenom Faradayeva zakona indukcije odredite zakon po kojem se mijenja jakost električnog polja duž polumjera zavojnice.

Rezultat: $E = \dfrac{\mu_0 N a t}{l}\, r$, gdje se $r$ mijenja od $r = 0$ u osi zavojnice do $r = R$ na njezinoj površini.

**3.6.** Metalni štap dug 1 m vrti se brzinom 20 rad/s u magnetskom polju indukcije 0,05 T. Os rotacije prolazi krajem štapa i usporedna je sa silnicama polja. Izračunajte inducirani napon na krajevima štapa. Odredite omjer tog napona i onog induciranog na krajevima zavojnice od 100 zavoja, presjeka 100 cm$^2$, koja rotira u istom magnetskom polju jednakom kutnom brzinom. Os rotacije okomita je na smjer magnetskog polja i na aksijalnu os zavojnice.

Rezultat: $U_š = 0{,}5$ V $\quad \dfrac{U_š}{U_z} = \dfrac{1}{2}$

# 4. ELEKTROMAGNETSKI TITRAJI I VALOVI

## 4.1. Uvod

Elektromagnetski titraji nastaju u električnom titrajnom krugu, koji se sastoji od kondenzatora kapaciteta $C$, zavojnice induktiviteta $L$ i otpornika otpora $R$, skraćeno $LCR$-krug. Idealizirani krug je $LC$-krug u kojem je zbroj električne i magnetske energije konstantan, tj.

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{konst.},$$

gdje je $Q$ količina električnog naboja, a $I$ jakost električne struje. Diferencijalna jednadžba $LC$-kruga glasi:

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,Q = 0$$

i analogna je jednadžbi harmoničkog oscilatora. Rješenje koje zadovoljava jednadžbu glasi:

$$Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\,, \tag{4.1}$$

gdje je $\omega_0$ vlastita kružna frekvencija titrajnoga kruga. Kako je

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,,$$

period ili titrajno vrijeme glasi

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,.$$

Iz (4.1) vremenska promjena napona

$$U = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\,,$$

dok je jakost struje u krugu

$$I = Q_0\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

tj. struja prethodi naponu na kondenzatoru za fazni pomak $\pi/2$ rad.
U realnom $LCR$-krugu titranje je prigušeno. Pripadna diferencijalna jednadžba analogna je jednadžbi za prigušeno mehaničko titranje, tj.

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}Q = 0 ,$$

i rješenje glasi:

$$Q = Q_0 \mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$$

uz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} ,$$

gdje je $\delta = \dfrac{R}{2L}$.
Prisilni elektromagnetski titraji nastaju ako je $LCR$-krug spojen na vanjsku izmjeničnu elektromotornu silu (napon) amplitude $\mathcal{E}_0$ i kružne frekvencije $\omega$. Diferencijalna jednadžba ima ovaj oblik:

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = \mathcal{E}_0 \sin\omega t$$

i analogna je jednadžbi mehaničkoga prisilnog titranja. Rješenje jednadžbe govori o promjeni naboja

$$Q = Q_0(\omega)\sin(\omega t + \varphi) ,$$

dok se jakost izmjenične struje mijenja prema zakonu:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \psi) ,$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} .$$

Impedancija

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

i rezonancija je postignuta kada je kružna frekvencija

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 .$$



Ako su omski otpornik, kondenzator i zavojnica serijski spojeni, u krugu pri maksimalnoj struji javlja se naponska ili serijska rezonancija.
Ako su ta tri pasivna elementa spojena paralelno, javlja se strujna ili paralelna rezonancija kada je struja u krugu minimalna.
Iz otvorenoga titrajnog kruga odašiljača (otvorenog kondenzatora) šire se u prostor elektromagnetski valovi. Prijamnik je drugi titrajni krug koji je u rezonanciji s odašiljačkim krugom.
Pri širenju elektromagnetskog vala u homogenom izotropnom sredstvu vrijede Maxwellove jednadžbe (3. poglavlje) uz supstituciju $\vec{J} = 0$, $\varrho = 0$, te $\varepsilon$ i $\mu$ konstantno. To opisuje prostor bez struje i naboja.
Valne jednadžbe (uz $\vec{B} = \mu\vec{H}$) za širenje ravnoga elektromagnetskog vala koji putuje po osi $z$, ako vektor jakosti električnog polja titra okomito na ravninu $y, z$, a vektor jakosti magnetskog polja titra okomito na ravninu $x, z$, glase:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 . \tag{4.3}$$

Fazna brzina $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. U vakuumu brzina širenja elektromagnetskih valova

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

i po definiciji od 1984. godine je prirodna konstanta.
Omjer valne duljine elektromagnetskog vala $\lambda_0$ u vakuumu, prema njegovoj duljini $\lambda$ u nekom sredstvu glasi:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} .$$

Posebna rješenja jednadžbi (4.2) i (4.3) jesu:

$$E_x = E_0 \sin\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) = E_0\sin(\omega t - kz)$$

$$B_y = B_0 \sin\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) = B_0\sin(\omega t - kz) ,$$

gdje je $\omega = 2\pi f$, a $E_0$ i $B_0$ su amplitude.
Često se rješenje valne jednadžbe piše u ovom obliku:

$$E_x = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)} .$$

Gustoća energije elektromagnetskog polja je zbroj gustoće energije električnog polja i gustoće energije magnetskog polja,

$$w = \frac{1}{2}\,\varepsilon E_x^2 + \frac{1}{2\mu}\,B_y^2\,,$$

gdje su pribrojnici u napisanom izrazu jednakog iznosa.
Intenzitet elektromagnetskog vala, gustoća toka energije ili snaga po jediničnoj površini

$$\mathcal{S} = wv = v\varepsilon E_x^2 = v\mu H_y^2 = E_x H_y\,.$$

Poyntingov vektor vektorski određuje gustoću toka i glasi:

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu}(\vec{E} \times \vec{B})\,.$$

Monokromatski elektromagnetski val na granici dvaju dielektrika dijelom se odbija, a dijelom ulazi u drugo sredstvo. Pritom se mijenja fazna brzina vala, tako da je

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}\,.$$

Indeksi 1 i 2 odnose se na prvi i drugi dielektrik. Oznaka $n$ je apsolutni indeks loma, tako da je

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \sqrt{(1+\chi_e)(1+\chi_m)}\,,$$

gdje je $\chi_e$ električna, a $\chi_m$ magnetska susceptibilnost.
U vidljivom dijelu elektromagnetskog spektra vrijedi Cauchyeva formula:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}\,,$$

gdje su $A$ i $B$ konstante karakteristične za materijal.
Promatrajući materiju mikroskopski, za indeks loma dobiva se izraz:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}\,,$$

gdje je $N$ broj elementarnih dipola materijala kroz koje se širi val, $e$ naboj elektrona, $m_e$ masa elektrona, $\omega_0$ vlastita kružna frekvencija elektrona, $\omega$ kružna frekvencija elektromagnetskog vala, a $\gamma$ je konstanta prigušenja.
Veza između fazne brzine $v$ i grupne brzine $v_g$ (vidi 2. poglavlje) glasi:

$$v_g = v\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right) = c\left(n + \lambda\,\frac{dn}{d\lambda}\right)\,.$$



Upadaju li elektromagnetski valovi koso na granicu dvaju sredstava, tada se valovi, čiji električni vektor titra paralelno s ravninom upada $E_{u\parallel}$ i oni kod kojih titra okomito $E_{u\perp}$, različito reflektiraju. Vrijede Fresnelove jednadžbe:

$$E_{r\parallel} = -E_{u\parallel}\,\frac{\tan(u-l)}{\tan(u+l)}$$

$$E_{r\perp} = -E_{u\parallel}\,\frac{\sin(u-l)}{\sin(u+l)}\,,$$

pa pripadni faktori refleksije $\varrho \left(\varrho = \frac{\mathcal{S}_r}{\mathcal{S}_u} = \frac{(EH)_r}{(EH)_u}\right)$ glase:

$$\varrho_\parallel = \frac{\tan^2(u-l)}{\tan^2(u+l)}$$

$$\varrho_\perp = \frac{\sin^2(u-l)}{\sin^2(u+l)}\,.$$

U izrazima $u$ je kut upada, $l$ kut loma, a mjereni su od smjera širenja vala do okomice na granici dvaju sredstava. Vrhovi kutova su u točki loma i odbijanja.

## 4.2. Primjeri

**4.1.** Raspolažemo idealnim $LC$-krugom spojenim na bateriju stalnog napona $U_0$ uz početne uvjete $t = 0$, $Q = Q_0$, $I = 0$. Odredite frekvenciju titranja, naboj i struju kao funkciju vremena. U posebnom primjeru uzmite da je $L = 1$ H, $C = 10$ μF, $Q_0 = 2$ mC, $U_0 = 100$ V. Koji je analogni mehanički sustav?

***rješenje*** Primjenom 2. Kirchhoffova pravila na strujni krug (sl. 4.1.a) dobivamo

$$U_0 - L\,\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0\,,$$

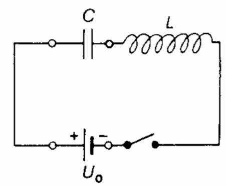
odnosno nakon zamjene

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}\,,$$

pa slijedi

$$L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0\,.$$

a)




Slika 4.1.a

To je diferencijalna jednadžba za titranje naboja u krugu. Mogli smo je dobiti i iz zakona očuvanja energije:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = QU_0\,,$$

deriviranjem po vremenu

$$\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = \frac{dQ}{dt}U_0 \qquad \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = \frac{U_0}{L}.$$

Rješenje te jednadžbe glasi:

$$Q = A\sin(\omega_0 t + \varphi) + CU_0\,,$$

u što se možemo uvjeriti uvrštavanjem. Konstante $A$ i $\varphi$ određujemo iz početnih uvjeta. Vlastita frekvencija sustava je

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Primjenom početnih uvjeta dobivamo

$$t = 0\,, \qquad Q = Q_0\,, \qquad I = \frac{dQ}{dt} = 0\,.$$

$$Q_0 = A\sin\varphi + CU_0 \qquad A\omega_0\cos\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\,, \qquad A = Q_0 - CU_0\,,$$

te su naboj i struja kao funkcije vremena:

$$Q = (Q_0 - CU)\cos\omega_0 t + CU_0$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega_0(Q_0 - CU_0)\sin\omega_0 t\,.$$

U posebnom primjeru $L = 1$ H, $C = 10$ μF, $Q_0 = 1$ mC

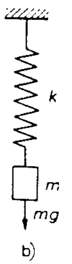
$$\omega_0 = 316\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$Q = 10^{-3}\ \mathrm{C}\cos(316\ \mathrm{s}^{-1}t) + 10^{-3}\ \mathrm{C}$$

$$\boxed{I = -0{,}316\ \mathrm{A}\sin(316\ \mathrm{s}^{-1}t)\,.}$$

Analogni mehanički sustav dobivamo formalnom zamjenom

$$L \to m, \qquad \frac{1}{C} \to k, \qquad U \to F_0, \qquad I = \frac{dQ}{dt} \to v = \frac{ds}{dt}.$$



Slika 4.1.b

Mehanički se sustav sastoji od opruge konstante $k$, na kojoj je tijelo mase $m$ na koje djeluje stalna sila $F_0$ (npr. sila teža na uteg mase $m$ na slici 4.1.b).
Jednadžba gibanja mehaničkog sustava glasi:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = \frac{F_0}{k}\,,$$

gdje je $s$ ukupno produljenje opruge zbog titranja i djelovanja sile teže ($s$ je razlika duljine opruge u svakom trenutku i duljine neopterećene opruge).

Rješenje jednadžbe gibanja je

$$s = A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{k}\,.$$



Uz početne uvjete $t = 0$, $s = s_0$, $\frac{ds}{dt} = v = 0$ dobivamo

$$s = \left(s_0 - \frac{F_0}{k}\right)\cos\omega_0 t + \frac{F_0}{k}\,; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Brzina titranja tijela je

$$v = \frac{ds}{dt} = -\omega_0\left(s_0 - \frac{F_0}{k}\right)\sin\omega_0 t\,.$$

Međutim, najčešće se kao pomak uzima pomak utega na opruzi iz položaja ravnoteže, tj. $s - F_0/k$. Označimo li taj pomak sa $y$, jednadžba gibanja i njezino rješenje glase:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0 \qquad y = y_0\cos\omega_0 t \qquad v = -\omega_0 y_0\sin\omega_0 t\,.$$

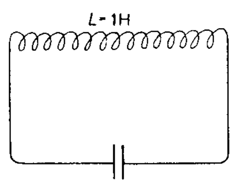
To je jednadžba jednostavnog harmoničkog titranja. Poseban primjer ($m = 1$ kg, $k = 10^5$ N/m, $F_0 = 100$ N, $s_0 = 2$ mm) praktički je neostvariv.

**4.2.** Maksimalna struja kroz titrajni $LC$-krug (sl. 4.2.a) ($L = 1$ H, $C = 1$ μF) iznosi 10 mA. **a)** Koliki je maksimalni naboj na kondenzatoru? Kolika je energija $LC$-kruga? Koliko je titrajno vrijeme?
**b)** Nacrtajte odgovarajući mehanički sustav. Odredite masu tijela koje titra, konstantu opruge na kojoj visi tijelo, maksimalni pomak (amplitudu) i maksimalnu brzinu tijela.

***rješenje*** a) Energija $LC$-kruga je

$$E = \frac{1}{2}LI_0^2$$

$$E = \frac{Q_0^2}{2C}\,. \qquad (1)$$



Slika 4.2.a

Odatle je

$$Q_0 = I_0\sqrt{LC} = 10^{-5}\ \mathrm{C} \qquad (2)$$

$$E = \frac{1}{2}LI_0^2 = 5\cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}\,. \qquad (3)$$

Period je

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 6{,}3\ \mathrm{ms}\,. \qquad (4)$$

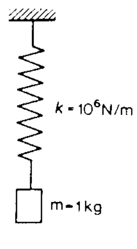
b) Analogni mehanički sustav prikazan je na slici 4.2.b. Analogne veličine u mehaničkom i električnom titrajnom sustavu jesu:

$$Q \leftrightarrow s \qquad C \leftrightarrow \frac{1}{k} \qquad L \leftrightarrow m \qquad I \leftrightarrow v\,.$$

Uspoređujući dobivamo

$$A = 10^{-5}\ \mathrm{m}\,, \qquad m = 1\ \mathrm{kg}\,,$$

$$k = 10^6\ \mathrm{Nm}^{-1}\,, \qquad v_m = 10^{-2}\ \mathrm{m\,s}^{-1}\,.$$



Slika 4.2.b

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 6{,}3\ \mathrm{ms}\,.$$

Analogni mehanički sustav praktično je teško ostvariti, ali je električni izvediv. Vrijedi i obratno: ako se mehanički sustav može ostvariti, električni je, zbog velikih kapaciteta, neizvediv.

**4.3.** U ravnom elektromagnetskom valu u vakuumu električno polje opisuju ovi izrazi:

$$E_x = 0\ \mathrm{Vm^{-1}},$$
$$E_y = 0\ \mathrm{Vm^{-1}},$$
$$E_z = 6\cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,[\sin(x+y)\cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}} - \omega t]\,.$$

Odredite izraze koji opisuju magnetsku indukciju u tom valu.

***rješenje*** Iz izraza za električno polje mogu se odrediti komponente valnog vektora:

$$\begin{aligned} E_x &= 0\ \mathrm{Vm^{-1}}, \\ E_y &= 0\ \mathrm{Vm^{-1}}, \\ E_z &= 6\cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}[\sin(x+y)\cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}} - \omega t] \end{aligned} \tag{1}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \tag{2}$$

$$\vec{k}\vec{r} = (x+y)\cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}} \tag{3}$$

$$k_x x + k_y y = (x+y)\cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$k_x = k_y = 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$k_x = k\cos\varphi = \frac{k}{\sqrt{2}}, \qquad \text{gdje je } \varphi = 45^\circ\,. \tag{4}$$

Za amplitude električnog polja i magnetske indukcije vrijedi:

$$\vec{B}_0 \times \vec{v} = \vec{E}_0 \tag{5}$$

$$\vec{v} \times (\vec{B}_0 \times \vec{v}) = \vec{v} \times \vec{E}_0\,. \tag{6}$$

Svojstvo vektorskog produkta je:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \quad \text{pa je:} \tag{7}$$

$$\vec{v} \times (\vec{B}_0 \times \vec{v}) = \vec{B}_0(\vec{v}\vec{v}) - \vec{v}(\vec{v}\vec{B}_0) = \vec{B}_0 v^2\,. \tag{8}$$

Budući da je u ovom slučaju $v = c$, tada je vektor magnetske indukcije

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{c}\times\vec{E}_0}{c^2} = \frac{1}{c^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{c}{\sqrt{2}} & \frac{c}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & E_{z0} \end{vmatrix} \tag{9}$$



$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c}\left[\vec{i}\left(\frac{E_{z0}}{\sqrt{2}}\right) - \vec{j}\left(\frac{E_{z0}}{\sqrt{2}}\right)\right]\,. \tag{10}$$

Komponente magnetske indukcije jesu:

$$B_{x0} = \frac{1}{c\sqrt{2}} E_{z0} \qquad B_{y0} = -B_{x0} \qquad B_{z0} = 0\,. \tag{11}$$

$$B_x = \sqrt{2}\cdot 10^{-12}\ \mathrm{T}\ \sin[(x+y)\cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}} - \omega t]\,.$$

**4.4.** Srednja vrijednost energijskog toka monokromatskog harmoničkog elektromagnetskog ravnog vala u zraku je 26 $\mathrm{Wm^{-1}}$. Kolika je srednja gustoća energije zračenja?

***rješenje*** Za monokromatski sinusoidalan val srednja vrijednost Poyntingova vektora (gustoća energijskog toka) je

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2$$

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\,E_0 H_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mu_0}\,E_0 B_0 = \frac{1}{2c\mu_0}\,E^2$$

Budući da je srednja gustoća energije elektromagnetskog zračenja to je

$$\overline{w} = \overline{w}_{\mathrm{l}} + \overline{w}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E_0^2$$

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\cdot\frac{2\overline{S}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}$$

$$\overline{w} = \frac{\overline{S}}{c} = \frac{26\ \mathrm{Wm^{-2}}}{3\cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}} = 8{,}7\cdot 10^{-8}\ \mathrm{J\,m^{-3}}.$$

**4.5.** Izračunajte srednju vrijednost Poyntingova vektora te amplitudu električnog i magnetskog polja na udaljenosti $r = 100$ m od točkastog izvora čija je snaga 100 W.

***rješenje*** Pretpostavit ćemo da izvor emitira valove jednoliko u svim pravcima. Poyntingov vektor daje snagu koja u promatranoj točki prostora prođe kroz jediničnu površinu okomito na smjer širenja vala. Na udaljenosti $r = 100$ m od točkastog izvora možemo smatrati da je val ravni, te je iznos Poyntingova vektora:

$$S = \frac{1}{\mu_0}\,EB = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2 = \frac{1}{\mu_0 c}\,E^2\,,$$

gdje su $E$ i $B$ trenutne vrijedosti jakosti električnog polja i magnetske indukcije u toj točki. Budući da se $E$ i $B$ mijenjaju kao funkcije sinus ($E = E_0\sin(kz - \omega t)$), to je srednja vrijednost Poyntingova vektora

$$\overline{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\,\overline{E^2} = \frac{1}{\mu_0 c}\,\overline{E_0^2\sin^2(kz - \omega t)}$$

$$\overline{S} = \frac{1}{2\mu_0 c}\,E_0^2\,.$$

Ukupna snaga koju zrači izvor $P = 100$ W na površini kugle polumjera $r$ jednaka je umnošku srednje vrijednosti Poyntingova vektora i površine te kugle

$$P = 4r^2\pi\overline{S}$$

te je

$$\overline{S} = \frac{P}{4r^2\pi} = 7{,}96 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\,.$$

Odavde se može izračunati amplituda električnog polja

$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c\overline{S}} = 0{,}775\ \mathrm{V\,m^{-1}}\,.$$

Uzimajući u obzir vezu amplituda električnog i magnetskog polja u elektromagnetskom valu dobivamo:

$$E_0 = \mu_0 c H_0$$

$$E_0 = cB_0$$

$$H_0 = 2{,}06 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A\,m^{-1}}\,, \qquad B_0 = \frac{E_0}{c} = 2{,}6 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{T}\,.$$

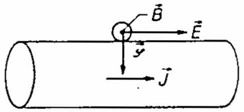
**4.6.** Kroz bakreni vodič ($\varrho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$) čiji je polumjer 1 mm teče struja 10 A. Koliki je Poyntingov vektor na površini vodiča?

***rješenje*** Poyntingov vektor dan je izrazom:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\,.$$

Smjer vektora $\vec{E}$ tangencijalan je na površinu u smjeru toka struje. Magnetsko je polje tangencijalno na površinu, ali okomito na vodič, pa je vektor $\vec{S}$ okomit na površinu prema unutrašnjosti vodiča (sl. 4.5). Električno polje na površini vodiča

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{\frac{I}{S}}{\frac{1}{\varrho}} = \frac{I\varrho}{S} = 54\ \mathrm{mV\,m^{-1}}\,.$$




Slika 4.3.

Magnetska indukcija na površini vodiča

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r\pi} = 2\ \mathrm{mT}\,.$$

Iznos Poyntingova vektora je

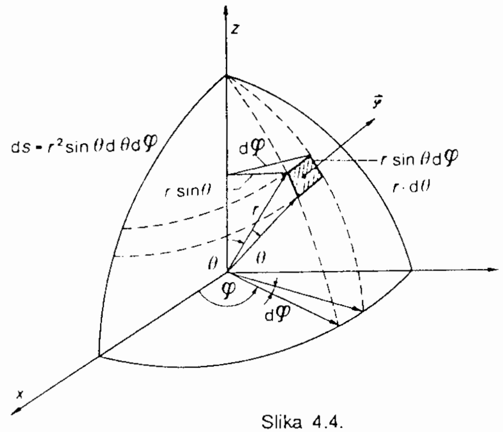
$$S = \frac{1}{\mu_0}EB$$

$$S = 859\ \mathrm{W\,m^{-2}}\,.$$

**4.7.** Radio-odašiljač zrači prosječnom snagom 100 kW. Pretpostavite da odašiljač zrači izotropno u gornji poluprostor iznad tla. Izračunajte:

a) prosječnu gustoću energijskog toka radio-valova,






Slika 4.4.

b) amplitudu magnetskog polja,

c) amplitudu električnog polja, udaljenog 15 km od odašiljača.

Utjecaj tla je zanemariv i pretpostavite da je odašiljač unutar polukugle točkasti izvor.

***rješenje*** Izračena snaga, pretpostavljajući da je radio-odašiljač malih dimenzija, tj. točkasti izvor, dobiva se integriranjem okomite komponente Poyntingova vektora po površini zamišljene polukugle polumjera $r$. To prikazuje slika 4.4:

$$P = \overline{S}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} r^2\sin\theta\, d\theta = \overline{S}\cdot 2\pi r^2\,. \tag{1}$$

S druge pak strane, srednja vrijednost Poyntingova vektora u ravnom valu iznosi

$$\overline{S} = \frac{1}{2}E_0 H_0 = \frac{H_0^2}{2}\eta = \frac{1}{2\eta}E_0^2\,, \tag{2}$$

gdje je $\eta$ karakteristični valni otpor slobodnog prostora prema jednadžbi

$$E_0\sqrt{\varepsilon_0} = \sqrt{\mu_0}H_0 \qquad \eta = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\ \Omega\,. \tag{3}$$

Iz jednadžbe (1), te povezivanjem (1), (2) i (3) dobivamo:

a) $\overline{S} = \dfrac{P}{2\pi r^2} = 7{,}08 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W\,m^{-2}}\,.$

b) $H_0 = \sqrt{\dfrac{2\overline{S}}{\eta}} = \sqrt{\dfrac{2}{\eta}\cdot\dfrac{P}{2\pi r^2}} = 6{,}13 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{A\,m^{-1}}\,.$

c) $E_0 = \sqrt{\overline{S}\cdot 2\eta} = \sqrt{\dfrac{P}{2\pi r^2}\cdot 2\eta} = 0{,}231\ \mathrm{V\,m^{-1}}\,.$

**4.8.** Helij–neonski laser snage 1 mW zrači uski snop narančaste svjetlosti u obliku svjetlosnog stošca s kutom $\vartheta = 0,01°$. Koliki je intenzitet snopa (tj. srednja vrijednost Poyntingova vektora) na udaljenosti 100 m od lasera? Kolika bi bila srednja vrijednost Poyntingova vektora točkastog izvora iste snage?

***rješenje*** Svjetlost koju emitira laser divergira u prostoru i snop ima oblik uskog stošca kružnog presjeka. Kut stošca zove se kut divergencije lasera.

Na udaljenosti $R = 100$ m presjek snopa je $S = r^2\pi$, gdje je $r = R\vartheta$ te je srednja vrijednost Poyntingova vektora u toj točki

$$\bar{S} = \frac{P}{S}$$

$$\bar{S} = \frac{P}{R^2\vartheta^2\pi} = 1,05\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\,.$$

Točkasti izvor snage 1 mW koji emitira jednoliko u cijeli prostor na toj bi udaljenosti dao

$$\bar{S} = \frac{P}{4R^2\pi} = 8\cdot 10^{-9}\ \mathrm{W\,m^{-2}}\,,$$

dakle oko $1,3\cdot 10^8$ puta slabiji intenzitet.

**4.9.** Radio–stanica koja radi na frekvenciji $1,5\cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$ ima dvije identične okomite dipolne antene udaljene 400 m. Odredite raspodjelu intenziteta električnog polja u okolici radio–stanice.

***rješenje*** Električno polje prve antene je $E_1 = E_0\cos\omega t$, a druge $E_2 = E_0\cos(\omega t + \varphi)$, gdje je $\varphi$ početna razlika u fazi. Ukupno električno polje je izračunano metodom rotirajućih vektora

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \qquad (1)$$

$$E^2 = E_0^2 + E_0^2 + 2E_0^2\cos\varphi = 2E_0^2(1+\cos\varphi)\,. \qquad (2)$$

Intenzitet je:

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_0^2(1+\cos\varphi) = 2I_0(1+\cos\varphi)\,, \qquad (3)$$

gdje je $I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_0^2$ intenzitet električnog polja jedne antene.

Najveća vrijednost intenziteta dobije se uz uvjet:

$$d\sin\alpha = n\lambda \qquad n = 0,1,2,\dots\,, \qquad (4)$$

a najmanja vrijednost

$$d\sin\alpha = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda \qquad n = 0,1,2,\dots\,. \qquad (5)$$

Razlika u fazi $\varphi = 2\pi n$, $n$ je broj valnih duljina sadržanih u razlici putova.

$$\varphi = 2\pi\,\frac{d\sin\alpha}{\lambda} = kd\sin\alpha\,, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}\,. \qquad (6)$$

Intenzitet je tada:

$$I = 2I_0[1+\cos(kd\sin\alpha)]\,. \qquad (7)$$



U ovom primjeru $\lambda = \frac{c}{v} = 200$ m, $d = 400$ m, $\sin\alpha = \frac{n\lambda}{d} = \frac{n}{2}$. Vrijednosti $n > 2$ daju $\sin\alpha > 1$, što znači da ne postoji smjer u prostoru za koji je razlika puta veća od $2\lambda$. Slično, najmanja vrijednost intenziteta je za

$$\sin\alpha = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda}{d} = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

pa vrijednosti za $n > 1$ nemaju smisla.

Raspodjela intenziteta je:

$$I = 2I_0[1+\cos(4\pi\sin\alpha)]\,. \qquad (8)$$

**4.10.** Pomoću Fresnelovih jednadžbi izračunajte koeficijent refleksije staklene ploče ($n = 1{,}52$) kao funkciju upadnog kuta.

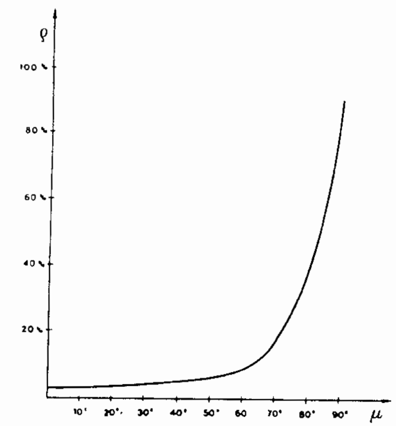
***rješenje*** Faktor refleksije nepolarizirane svjetlosti je:

$$\varrho = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(u-l)}{\sin^2(u+l)} + \frac{\tan^2(u-l)}{\tan^2(u+l)}\right],$$

gdje je kut loma $l$ izražen pomoću kuta upada $u$ i indeksa loma $n$ formulom

$$l = \arcsin\frac{\sin u}{n}\,.$$

Uvrštavanjem za $n = 1{,}52$ i vrijednost različitih kutova loma dobivamo rezultate u tablici i na slici 4.5.




Slika 4.5.

Tablica

| $u/°$ | 0,1 | 1 | 5 | 20 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 85 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varrho/\%$ | 4,26 | 4,26 | 4,26 | 4,29 | 4,85 | 6,06 | 9,25 | 17,5 | 39,1 | 61,5 | 100 |

Zanemarimo li apsorpciju, faktor transmisije je

$$\tau = 1 - \varrho .$$

Pri raznim primjenama važna je što veća propusnost stakla (veći faktor transmisije), što se postiže pri manjim upadnim kutovima. Ako je indeks loma manji (npr. 1,4), refleksija je manja (npr. 2,8% pri malim kutovima), dakle propusnost svjetlosti je veća.

**4.11.** Izračunajte indeks loma vodika za elektromagnetske valove valne duljine 19 nm (rentgensko zračenje). Pretpostavite da je rezonantna frekvencija $f_0 = 3{,}36 \cdot 10^{15}$ Hz i da u 1 m$^3$ vodika ima $3{,}8 \cdot 10^{25}$ elektronskih oscilatora. Kolika je fazna i grupna brzina tih valova?

***rješenje*** Ako je zanemareno prigušenje ($\gamma = 0$), indeks loma možemo izračunati pomoću formule

$$n^2 = 1 + \frac{Nc^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} ,$$

gdje su $N = 3{,}8 \cdot 10^{25}$, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Fm$^{-1}$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2{,}11 \cdot 10^{16}$ s$^{-1}$, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 9{,}9 \cdot 10^{16}$ Hz.

$$n^2 = 1 - 1{,}285 \cdot 10^{-5}$$

$$n = 1 - 6{,}4 \cdot 10^{-6} .$$

Fazna je brzina:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{1 - \dfrac{Nc^2}{2m_e\varepsilon_0\omega^2}} = c\left(1 + \frac{Nc^2}{2m_e\varepsilon_0\omega^2}\right)$$

$$v = c(1 + 6{,}4 \cdot 10^{-6}) = 1{,}000\,006\,4\ c .$$

Grupna je brzina:

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}} = \frac{c}{1 - \dfrac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0\omega^2} + \omega \dfrac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0\omega^3}}$$

$$v_g = \frac{c}{1 + \dfrac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0\omega^2}}$$

$$v_g = \frac{c}{1 + 6{,}4 \cdot 10^{-6}} = \frac{c}{1{,}000\,006\,4} .$$



## 4.3. Zadaci

**4.1.** Kondenzator kapaciteta $C = 2$ μF, nabijen do napona $U_0 = 100$ V, spojimo paralelno sa zavojnicom induktiviteta $L = 5$ mH i zanemarivog omskog otpora. Kolika je frekvencija titranja i jakost struje u tom titrajnom krugu?

Rezultat: $\omega = 10^4$ s$^{-1}$, $I_0 = 2$ A

**4.2.** Pokažite da je $E_y(x,t) = f(x \pm vt)$ rješenje jednodimenzionalne diferencijalne valne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} .$$

**4.3.** Ako su $E_{y1}(x,t)$ i $E_{y2}(x,t)$ rješenja diferencijalne valne jednadžbe u zadatku 4.2. pokažite da je i $E_{y1} + E_{y2}$ također rješenje.

**4.4.** Pokažite da funkcija $f(x - vt)$ koja je rješenje diferencijalne valne jednadžbe u zadatku 4.2. predstavlja progresivni val koji se kreće u smjeru pozitivne osi $x$, a $f(x + vt)$ val koji se kreće u negativnom smjeru osi $x$.

Rezultat: Valni poremećaj definiran valnom funkcijom $f(x - vt)$ kreće se brzinom određenom uvjetom konstantnosti faze $\varphi = x - vt =$konst, $\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 0\right)$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$. Slično, valni poremećaj definiran valnom funkcijom $f(x + vt)$ kreće se brzinom $v$, ali u negativnom smjeru osi $x$.

**4.5.** Magnetsko polje zadano je izrazom za magnetsku indukciju:

$$\vec{B} = \vec{k} B_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) .$$

Pokažite da polje zadovoljava drugu Maxwellovu jednadžbu. Kao integracijsku plohu odaberite kocku stranice $a$.

**4.6.** Ravni elektromagnetski val frekvencije $6 \cdot 10^{14}$ s$^{-1}$, koji se širi u pozitivnom smjeru osi $x$, u vakuumu ima amplitudu električnog polja 42,42 V/m. Val je linearno polariziran tako da je ravnina titranja vektora električnog polja pod kutom 45° u ravnini $yz$. Odredite izraze za komponente električnog polja.

Rezultat: $E_x = 0$ Vm$^{-1}$

$$E_y = E_z = 30\ \mathrm{Vm^{-1}} \sin\left[12\pi \cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}} \left(t - \frac{x}{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}\right)\right]$$

**4.7.** Uz koji uvjet ravni harmonički elektromagnetski val u vakuumu opisan izrazima: $E_x = 0$, $E_y = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$, $E_z = 0$, $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = B_0 e^{i(\omega t - kx)}$ zadovoljava valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}\ ?$$

Rezultat: $\frac{\omega}{k} = c$

**4.8.** Električno polje elektromagnetskog vala zadano je jednadžbom

$$\vec{E} = \vec{j}E_0 f(x - ct)\,,$$

gdje je $f$ proizvoljna funkcija. U kojem se smjeru širi val? Napišite jednadžbu za magnetsko polje tog vala.

Rezultat: Val se širi u smjeru osi $+x$; $\vec{B} = \vec{k}\,\frac{E_0}{c} f(x - ct)$

**4.9.** Električno polje svjetlosnog vala dano je izrazom:

$$\frac{E}{\mathrm{Vm^{-1}}} = 0{,}5 \sin\pi\left(\frac{1{,}2\cdot 10^{15}\,t}{\mathrm{s}} - \frac{4\cdot 10^{6}\,x}{\mathrm{m}}\right)\,.$$

Odredite amplitudu, frekvenciju, valnu duljinu i brzinu.

Rezultat: $E_0 = 0{,}5\ \mathrm{Vm^{-1}}$, $f = 6\cdot 10^{14}$ Hz,
$\lambda = 5\cdot 10^{-7}$ m, $v = c = 3\cdot 10^{8}\ \mathrm{ms^{-1}}$

**4.10.** Magnetska indukcija ravnoga elektromagnetskog vala opisana je izrazima:

$$B_x = 0, \quad B_y = -10^{-9}\,\mathrm{T}\,\vec{j}\sin\left[2\cdot 10^{14}\pi\,\mathrm{s^{-1}}\left(t - \frac{x}{3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\right)\right], \quad B_z = 0$$

Napišite izraz za električno polje tog vala.

Rezultat: $E_z = 0{,}3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,\sin\left[2\pi\cdot 10^{14}\,\mathrm{s^{-1}}\left(t - \frac{x}{3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\right)\right]$

**4.11.** Intenzitet Sunčeva zračenja na plohi koja je okomita na smjer zraka iznosi 1 370 $\mathrm{W/m^2}$ (solarna konstanta). Kolika je amplituda jakosti električnog polja i magnetske indukcije u tom valu?

Rezultat: $E_0 = 1\,016\ \mathrm{Vm^{-1}}$, $B_0 = 3{,}4\ \mu\mathrm{T}$

**4.12.** Točkasti izvor elektromagnetskih valova ima snagu 100 W. Izračunajte prosječni intenzitet i amplitudu električnog polja i magnetske indukcije na udaljenosti 10 m od izvora.

Rezultat: $E_0 = 7{,}74\ \mathrm{Vm^{-1}}$, $B = \frac{E}{c} = 25{,}8$ nT

**4.13.** Pokažite da je srednja gustoća energije električnog polja ravnog harmoničkog elektromagnetskog vala jednaka srednjoj gustoći energije magnetskog polja.

Rezultat: $\overline{w}_e = \frac{1}{4}\,\varepsilon E_0^2 = \frac{1}{4\mu}\,B_0^2 = \overline{w}_m$



**4.14.** Zadano je električno polje u vakuumu

$$\vec{E} = \vec{i}E_0 \sin\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\,.$$

Izračunajte struju pomaka kroz kocku stranice $a$. Kolika je cirkulacija električnog polja po rubu svake stranice kocke?

Rezultat: $I_{p1} = -I_{p2} = \varepsilon_0 E_0 a c\left[\sin\omega\left(t - \frac{a}{c}\right) - \sin\omega t\right]$. Za ostale stranice struja pomaka je nula. Cirkulacija magnetskog polja po rubu stranice jednaka je odgovarajućoj struji pomaka.

**4.15.** Ravni sinusni linearno polarizirani elektromagnetski val frekvencije $5\cdot 10^{14}$ Hz putuje u vakuumu. Odaberite koordinatni sustav tako da je smjer širenja vala u smjeru osi $+z$, a ravnina titranja električnog polja paralelna s osi $+x$. Srednja vrijednost intenziteta vala je $1\ \mathrm{W/m^2}$. Napišite jednadžbe za električnu i magnetsku indukciju tog vala.

Rezultat: $E_x = 27{,}4\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\sin(3{,}14\cdot 10^{15}\,\mathrm{s^{-1}}t - 1{,}05\cdot 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}x)$
$B_y = \frac{E_x}{c} = 91\ \mathrm{nT}\,\sin(3{,}14\cdot 10^{15}\,\mathrm{s^{-1}}t - 1{,}05\cdot 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}x)$

# 5. GEOMETRIJSKA OPTIKA

## 5.1. Uvod

**Osnovni zakoni.** Svojstva i djelovanja zrcala i leća mogu se tumačiti trima osnovnim zakonima geometrijske optike. Prvi je *zakon o pravocrtnom širenju svjetlosti.* U optički jednolikom i prozirnom sredstvu zamišljamo da se svjetlost širi u zrakama.
Drugi zakon geometrijske optike je *zakon odbijanja* ili *refleksije.* Padne li zraka svjetlosti na glatku plohu, ona se odbije. Upadna zraka, normala na plohu u upadnoj točki i odbijena zraka leže u istoj ravnini. Pritom je kut upada $u$ jednak kutu odbijanja $o$, tj.

$$\sphericalangle u = \sphericalangle o \,.$$

Treći zakon je *zakon loma ili refrakcije.* Pri prolaženju iz jednog sredstva u drugo svjetlosna zraka mijenja smjer. Upadna zraka, normala na granicu u upadnoj točki, i lomljena zraka leže u istoj ravnini zajedno s odbijenom zrakom. **Upadni kut** $u$ i **kut loma** $l$ povezuje Snellov zakon loma:

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{n_2}{n_1} \,,$$

gdje je $n_1$ indeks loma sredstva u kojem se širi upadna zraka, a $n_2$ indeks loma sredstva u kojem se širi lomljena zraka. **Indeks loma** je omjer brzine svjetlosti u vakuumu $c$ i fazne brzine svjetlosti $v$ u nekom sredstvu, tj.

$$n = \frac{c}{v} \,.$$

**Ravno i sferno zrcalo.** *Ravno zrcalo* je ravna ploha koja može odbijati zrake svjetlosti. Ako je točkasti predmet na udaljenosti $a$ od zrcala, onda će zrcalo formirati virtualnu sliku realnog predmeta na udaljenosti $b$ iza zrcala tako da vrijedi

$$a = b \,,$$



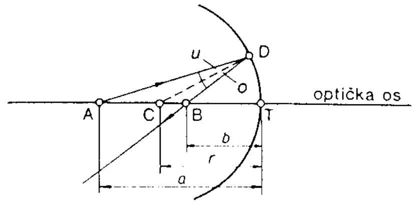
gdje je $a$ predmetna daljina, a $b$ slikovna daljina.

*Sferno zrcalo* je dio kugline plohe koja može odbijati zrake svjetlosti. Središnja točka plohe je *tjeme* zrcala. Pravac na kojem leži središte zakrivljenosti plohe zrcala i tjeme zove se *optička os.* Ako se točkasti predmet nalazi na optičkoj osi u predmetnoj daljini $a$, sferno zrcalo načini sliku na optičkoj osi u slikovnoj udaljenosti $b$ prema jednadžbi sfernog zrcala

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \,, \tag{5.1}$$

gdje je $r$ polumjer zakrivljenosti sfernog zrcala (sl. 5.1). Veličine $a, b$ i $r$ su pozitivne, ako su točkasti predmet i slika ispred zrcala a isto tako i centar zakrivljenosti.
Tada su predmet i slika realni, a zrcalo udubljeno, konkavno.
Jednadžba vrijedi kada su ispunjene Gaussove aproksimacije.
Poprečno povećanje za sferno zrcalo je

$$m = -\frac{b}{a} \,.$$



Slika 5.1.

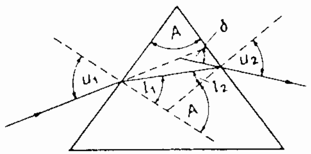
**Totalna refleksija.** Padne li zraka svjetlosti na granicu dvaju optički različitih sredstava, dio svjetlosti se odbije, a dio se lomi u drugo sredstvo. Prolaženjem svjetlosti iz sredstva većeg indeksa loma u sredstvo manjeg indeksa loma može se postići pri određenom kutu upada da je kut loma $l = 90°$. U tom slučaju Snellov zakon loma ima oblik:

$$\sin u_g = \frac{n_2}{n_1} \,.$$

Sve zrake koje upadaju pod većim kutom od graničnog upadnog kuta $u_g$, totalno, tj. potpuno se reflektiraju.
**Prolaženje svjetlosti kroz planparalelnu ploču.** Zraka svjetlosti koja pada na plohu planparalelne ploče, indeksa loma $n$ i debljine $d$, lomi se prvi put pri ulasku u ploču a zatim ponovno pri izlasku iz ploče. Pritom zraka svjetlosti ne mijenja smjer širenja, već pokazuje samo paralelni pomak $\Delta$. On je izražen upadnim kutom zrake na plohu, tj.

$$\Delta = d \sin u \left(1 - \frac{\cos u}{\sqrt{n^2 - \sin^2 u}}\right) \,.$$

**Prolaženje svjetlosti kroz optičku prizmu.** Optička prizma je tijelo čiji je glavni presjek trokut. Najčešće je od stakla. Dvije dobro polirane plohe prizme čine lomni kut prizme $A$ (sl. 5.2). Zraka svjetlosti koja upada na prvu plohu prizme pod upadnim kutom $u_1$ lomi se pod kutom $l_1$ u sredstvo prizme indeksa loma $n$. Šireći se prizmom zraka upada na drugu lomnu plohu pod kutom $l_2$ i izlazeći iz prizme lomi se pod kutom $u_2$. Ukupno skretanje, *devijacija* zrake od upadnog smjera iznosi:




Slika 5.2.

$$\delta = u_1 - l_1 + u_2 - l_2 \, .$$

Budući da je lomni kut prizme

$$A = l_1 + l_2 \, ,$$

ukupna devijacija zrake je

$$\delta = u_1 + u_2 - A \, .$$

Minimalna je devijacija $\delta_{\text{min.}}$ kada je prolaženje svjetlosti kroz prizmu simetrično. Tada su

$$u_1 = u_2 \quad \text{i} \quad l_1 = l_2 \, ,$$

pa je postignuta najmanja devijacija

$$\delta_{\text{min.}} = 2u_1 - A \, .$$

Tada je lomni kut prizme

$$A = 2l_1 \, ,$$

što omogućuje računanje indeksa loma sredstva prizme

$$n = \frac{\sin u_1}{\sin l_1} = \frac{\sin\left(\dfrac{\delta_{\text{min.}} + A}{2}\right)}{\sin \dfrac{A}{2}} \, .$$

**Lom svjetlosti na sfernoj granici.** Sferna granica je dio kugline plohe koja dijeli dva prozirna optička sredstva dvaju različitih indeksa loma, $n_1$ i $n_2$.

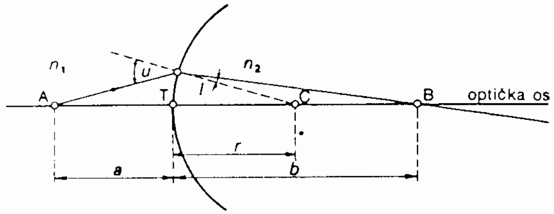
Ako je točkasti izvor na optičkoj osi sferne granice i u predmetnoj daljini $a$ od tjemena te granice, tada zrake, koje zadovoljavaju Gaussove aproksimacije, prave sliku na optičkoj osi u točki koja je od granice udaljena za slikovnu daljinu $b$. Vrijedi zakon loma na sfernoj granici:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \, ,$$

gdje je $r$ polumjer zakrivljenosti sferne granice (sl. 5.3).

Predmetna daljina je pozitivna, $a > 0$ ako je svijetli predmet lijevo od tjemena granice. Slikovna daljina je pozitivna, $b > 0$ ako je slika u točki na






Slika 5.3.

optičkoj osi desno od sferne granice (sl. 5.3). Također, polumjer zakrivljenosti je pozitivan $r > 0$ za konveksnu sfernu granicu, a negativan $r < 0$ za konkavnu sfernu granicu.

Poprečno povećanje sferne granice dvaju prozirnih sredstava

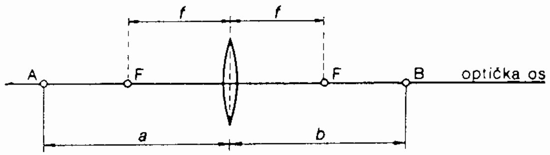
$$m = -\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{b}{a} \, .$$

**Tanka leća.** Leća je prozirno optičko tijelo omeđeno dvjema glatkim prozirnim površinama. Ako su površine sferne, tada se radi o sfernim lećama. Obje sferne površine leže na zajedničkoj optičkoj osi. Ako su tjemena sfernih površina, tj. granica vrlo blizu, $\overline{T_1T_2} \doteq 0$, tada je to *tanka leća*.

Ako je tanka leća, od sredstva s indeksom loma $n_2$, uronjena u drugo sredstvo, čiji je indeks loma $n_1$, zakon loma svjetlosti za zrake koje zadovoljavaju Gaussove aproksimacije ima oblik:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \, ,$$

gdje su $a$ predmetna daljina, $b$ slikovna daljina a $r_1$ i $r_2$ polumjeri zakrivljenosti prve i druge sferne granice.




Slika 5.4.

Jakost ili konvergencija leće:

$$J = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \, ,$$

gdje je $f$ žarišna daljina leće. Izražava se recipročnim metrom, $\mathrm{m}^{-1}$. Recipročni metar kao jedinica jakosti optičkih leća naziva se ponekad dioptrija i označava dpt. U nas dioptrija nije zakonita jedinica.

Poprečno povećanje leće

$$m = -\frac{b}{a}.$$

**Disperzija svjetlosti.** Lomeći se kroz prizmu, zraka polikromatske svjetlosti rasipa se u spektar. Osobina spektra određena je *veličinom otklona*, tj. devijacijom i *širinom spektra*, tj. disperzijom.

Prizma različito otklanja različite boje svjetlosti. Mjera za devijaciju je otklon $\delta_D$ žute natrijeve svjetlosti (D–linija) pri simetričnom prolazu prizmom. Disperziona moć $\omega$ se iskazuje kutom $\delta_D$, te kutovima $\delta_C$ i $\delta_F$ što ga čine crvena i zelenomodra svjetlost iz spektra atoma vodika. To su C–linija i F–linija prema Fraunhoferu. Vrijedi: $\omega = \dfrac{\delta_F - \delta_C}{\delta_D}$, odnosno za mali kut $A$ prizme: $\omega = \dfrac{n_F - n_C}{n_D - 1}$.

Devijacija Sunčeve zrake svjetlosti, koja daje primarnu dugu, iznosi

$$\delta = 180° - 2u - 4l,$$

gdje je $u$ upadni kut zrake na površinu kapi, a $l$ je kut loma. Najmanja devijacija postiže se pri upadnom kutu što ga definira izraz

$$\cos^2 u = \frac{n^2 - 1}{3},$$

gdje je $n$ indeks loma vode. Vidni kut primarne duge jest $\alpha = 180° - \delta$. Tako kod promatranja duge on za crvenu svjetlost iznosi za 42° 21′, a za ljubičastu 41°29′.

## 5.2. Primjeri

Zraka svjetlosti koja se širi vakuumom pada na ravnu staklenu ploču čiji je indeks loma $n = 1{,}5$. Koliko iznosi upadni kut $u$ zrake ako lomljena zraka s upadnom zrakom zatvara kut $\phi = 190°30'$ (sl. 5.5)?

***rješenje*** Prema slici 5.5. kut što ga zatvaraju upadna i lomljena zraka

$$\phi = \theta + 2u, \tag{1}$$

gdje je $u$ upadni kut, a kut $\theta$ zatvaraju odbijena i lomljena zraka. Iz slike se također vidi da je

$$\theta = 180° - (u + l), \tag{2}$$

gdje je $l$ kut loma.



Iz izraza (1) i (2) izlazi:

$$l = 180° + u + \phi$$

ili

$$l = u - 10{,}5°.$$

Iz zakona loma

$$\sin u = n \sin l$$

dobivamo:

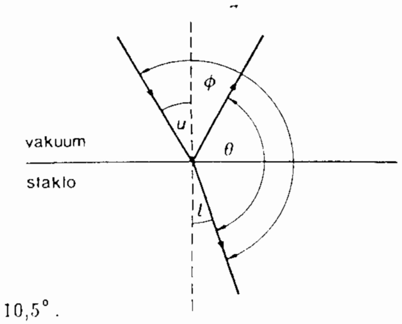
$$\sin u = 1{,}5 \sin u \cos 10{,}5° - 1{,}5 \cos u \sin 10{,}5°.$$

Dijeljenjem izraza sa $\cos u$ dobivamo:

$$\tan u = \frac{1{,}5 \sin 10{,}5°}{1{,}5 \cos 10{,}5° - 1},$$

pa je

$$u = 30°.$$




Slika 5.5.

Indeks loma stakla od kojeg je napravljena kocka čija je stranica duga 10 cm iznosi 5/3. U središtu te kocke je točkasti izvor svjetlosti. Odredite koju najmanju površinu na svakoj plohi te kocke treba potamniti ako želimo da se izvor svjetlosti ne vidi.

***rješenje*** Da bismo odredili površinu svake plohe kocke koju je potrebno zatamniti, valja naći granični kut upada zraka svjetlosti $u_g$ za koji je kut loma $l = 90°$. Zakon loma je:

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{1}$$

Iz uvjeta za granični kut upada

$$\sin u_g = \frac{n_2}{n_1} \tag{2}$$

slijedi

$$\tan u_g = \frac{r}{\frac{a}{2}}, \qquad r = \frac{a}{2} \tan u_g,$$

pa je polumjer kruga u funkciji najmanje površine na plohama zadane kocke

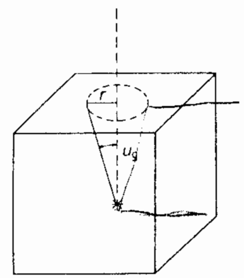
$$r = \frac{a}{2} \frac{\sin u_g}{\cos u_g} = \frac{a}{2} \frac{\sin u_g}{\sqrt{1 - \sin^2 u_g}}. \tag{3}$$

Budući da je

$$\sin u_g = \frac{3}{5}, \tag{4}$$

slijedi

$$r = 3{,}75 \text{ cm}.$$



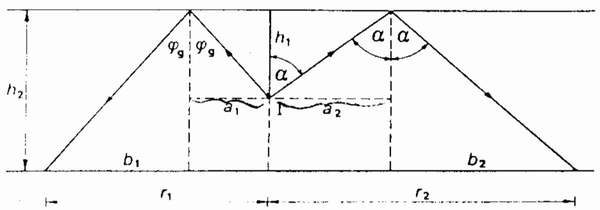

Slika 5.6.

Površina koju valja na svakoj plohi kocke zatamniti jest:

$$P = r^2\pi \tag{5}$$

$$P = 44{,}2\ \mathrm{cm}^2 .$$

**5.3.** Reflektor se nalazi u bazenu na dubini $h_1 = 3$ m i usmjeren je okomito na površinu vode svjetlosnim snopom stožastog oblika s kutom pri vrhu stošca $2\alpha = 120°$. Kakav je oblik i koje su dimenzije lika koji će se zbog refleksije s površine vode vidjeti na dnu bazena ako je dubina bazena $h_2 = 4$ m? Indeks loma vode $n = 4/3$.




Slika 5.7.

***rješenje*** Sve zrake iz svjetlosnog snopa izvora $I$ koje na površinu vode padaju pod kutom manjim od graničnog lome se i izlaze iz vode. Svjetlosne zrake koje na površinu vode padaju pod kutom koji je veći ili jednak graničnom, a manji ili jednak polovici kuta pri vrhu stošca, totalno će se reflektirati tako da će se na dnu bazena formirati kružni vijenac. Polumjere kružnog vijenca odredit ćemo iz slike na kojoj su prikazane totalne refleksije zraka koje na površinu vode padaju pod graničnim kutom $\varphi_g$ i pod kutom $\alpha$ jednakim polovici kuta pri vrhu svjetlosnog stošca.

Budući da je

$$\varphi_g = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) ,$$

a

$$a_1 = h_1 \cdot \tan\varphi_g \qquad b_1 = h_1 \cdot \tan\alpha$$

$$a_2 = h_2 \cdot \tan\varphi_g \qquad b_2 = h_2 \cdot \tan\alpha ,$$

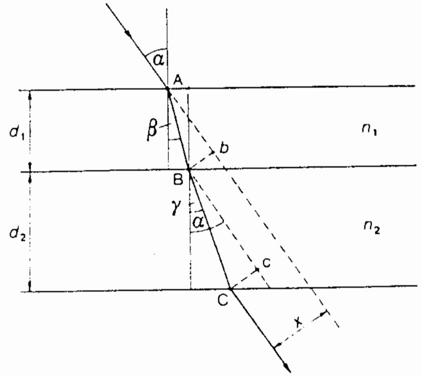
za polumjere kružnog vijenca dobivamo:

$$r_1 = (h_1 + h_2)\cdot\tan\varphi_g = 7{,}94\ \mathrm{m}$$

$$r_2 = (h_1 + h_2)\cdot\tan\alpha = 12{,}12\ \mathrm{m} .$$

**5.4.** Dvije prozirne planparalelne ploče debljina $d_1 = 4$ cm i $d_2 = 6$ cm, indeksa loma $n_1 = 2$, $n_2 = 1{,}5$, priljubljene su jedna uz drugu. Na prvu ploču, pod kutom $\alpha = 37°$ prema normali, upada zraka svjetlosti. Za koliko je centimetara zraka svjetlosti pomaknuta u stranu nakon prolaska kroz obje ploče.






Slika 5.8.

***rješenje*** Traženi pomak odredit ćemo kao zbroj pomaka u svakoj ploči. Prema slici 5.8:

$$\overline{Bb} = \overline{AB}\sin(\alpha-\beta) = \frac{d_1}{\cos\beta}\sin(\alpha-\beta) = d_1(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\beta)$$

$$\overline{Cc} = \overline{BC}\sin(\alpha-\gamma) = \frac{d_2}{\cos\gamma}\sin(\alpha-\gamma) = d_2(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\gamma) ,$$

odnosno

$$x = \overline{Bb} + \overline{Cc} = d_1(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\beta) + d_2(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\gamma) .$$

Nepoznate vrijednosti $\tan\beta$ i $\tan\gamma$ odredimo iz zakona loma:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_1} \qquad \sin\gamma = \frac{n_1}{n_2}\sin\beta$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} \qquad \tan\gamma = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma}}$$

$$x = 2{,}9\ \mathrm{cm} .$$

Zraka svjetlosti je pomaknuta u stranu 2,9 cm.

**5.5.** Ravno zrcalo nalazi se jedan metar ispred konkavnog sfernog zrcala okrenuto prema njemu i postavljeno okomito na njegovu optičku os. Točkasti izvor svjetlosti $S$, nalazi se na optičkoj osi između zrcala 60 cm udaljen od sfernog zrcala.

**a)** Koliki je polumjer sfernog zrcala ako se svjetlosni snop, pošto se reflektira od sfernog i ravnog zrcala, vraća u polaznu točku $S$?

**b)** Gdje, tj. na kojoj udaljenosti treba staviti ravno zrcalo da bi se snop svjetlosti, nakon refleksije na konkavnom, a zatim na ravnom zrcalu, fokusirao u žarištu konkavnog zrcala?

***rješenje*** a) Sferno zrcalo dat će od točkastog predmeta $S$ sliku u točki $S'$. Ta je slika za ravno zrcalo virtualni predmet, i od njega će nastati realna slika $S''$, koja prema uvjetima zadatka treba pasti u polaznu točku $S$.

Iz jednadžbe sfernog zrcala koja glasi:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}\,,$$

uvrštavajući za $a = 60$ cm, $b = 100$ cm $+ 40$ cm $= 140$ cm, dobivamo polumjer zrcala $r = 84$ cm.

b) Pretpostavimo da je razmak zrcala $d$. Nakon uvrštavanja vrijednosti za $a = 60$ cm, $b = 2d - \frac{r}{2}$ i $r = 84$ cm u jednadžbu sfernog zrcala dobivamo razmak $d = 91$ cm. Ravno zrcalo treba dakle postaviti 91 cm ispred konkavnog zrcala.

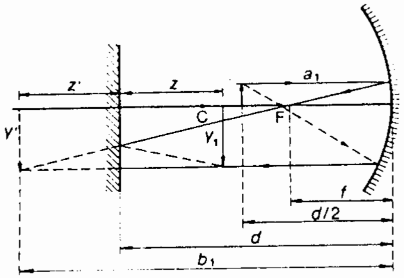
**5.6.** Konkavno zrcalo, čija je žarišna daljina $f = 25$ cm, nalazi se nasuprot ravnom zrcalu na udaljenosti $d = 70$ cm. Predmet se nalazi u središtu tog razmaka. Dvije realne slike predmeta nastaju refleksijama na oba zrcala, i to: refleksijom na sfernom, a zatim na ravnom zrcalu i obrnuto, refleksijom na ravnom, a zatim na sfernom zrcalu. Na kojoj se međusobnoj udaljenosti nalaze te slike?

***rješenje*** Zadani su podaci:

$d = 70$ cm, udaljenost dvaju zrcala,

$f = 25$ cm, žarišna daljina konkavnog zrcala,

$\frac{d}{2} = 35$ cm, položaj predmeta.




Slika 5.9.

a) Refleksiju na konkavnom, a zatim na ravnom zrcalu pokazuje slika 5.9.

Jednadžba konjugacije za konkavno zrcalo glasi:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f} \qquad \frac{1}{35\ \text{cm}}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{25\ \text{cm}}\,,$$

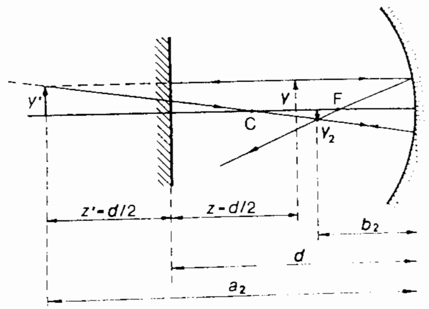
pa je

$$\frac{1}{b_1}=\frac{2}{175\ \text{cm}} \qquad \text{i} \qquad b_1 = 87{,}5\ \text{cm}.$$

Svojstvo simetrije ravnog zrcala ($z = z'$) određuje položaj, tj. koordinatu $y_1$:

$$y_1 = d - z = 70\ \text{cm} - (b_1 - 70\ \text{cm}) = 70\ \text{cm} - 17{,}5\ \text{cm} = 52{,}5\ \text{cm}\,.$$






Slika 5.10.

b) Refleksiju na ravnom, a zatim na sfernom zrcalu pokazuje slika 5.10.

Na osnovi simetrije slike ravnog zrcala ($z = z'$) pišemo jednadžbu za konkavno zrcalo:

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f} \qquad a_2 = d+\frac{d}{2} = 105\ \text{cm}\,,$$

pa je

$$b_2 = 32{,}8\ \text{cm}\,.$$

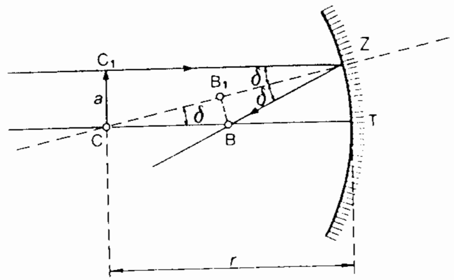
Položaj slike $y_2$ istovjetan je koordinati $b_2$:

$$y_2 = 32{,}8\ \text{cm}\,.$$

Usporedimo li rješenja a) i b), dobit ćemo razmak između slika:

$$y_1 - y_2 = (52{,}5 - 32{,}8)\ \text{cm} = 19{,}7\ \text{cm}\,.$$

**5.7.** Zraka svjetlosti pada na konkavno sferno zrcalo polumjera $r$ paralelno s optičkom osi zrcala i na udaljenosti $a$ od osi. Poslije refleksije na zrcalu zraka siječe optičku os u točki $B$. Pretpostavimo li da je točka $B$ žarište, činimo relativnu grešku 1%. Iz zadanih podataka odredite omjer $a/r$.




Slika 5.11.

***rješenje*** Nacrtajte sliku i označite presjecište $B$ na optičkoj osi $CT$. Prema slici 5.11. i uvjetima zadatka jednadžba glasi:

$$\frac{r}{2}-\overline{BT}=0{,}01\,\frac{r}{2}\,, \tag{1}$$

$$\overline{CB} + \overline{BT} = r \quad \text{i} \quad \overline{CB} = r + 0{,}01\,\frac{r}{2} - \frac{r}{2}\,. \tag{2}$$

$$\overline{CB} = 0{,}505\,r\,.$$

U trokutu $CC_1Z$ vidimo da je

$$\sin\delta = \frac{a}{r}\,, \tag{3}$$

a iz trokuta $CB_1B$ da je

$$\overline{CB} = \frac{r}{2}\cdot\frac{1}{\cos\delta} = \frac{r}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}\,. \tag{4}$$

Budući da je $\overline{BT} \approx \overline{CB}$, mogu se povezati jednadžbe (2) i (4):

$$0{,}505r = \frac{r^2}{2}\,\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\,. \tag{5}$$

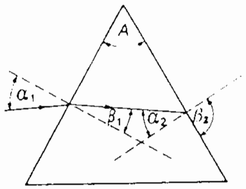
Rješenje jednadžbe (5) u parametru $\frac{a}{r}$ glasi:

$$\frac{a}{r} = 0{,}14\,.$$

**5.8.** Svjetlost pada na prizmu pod kutom 25°. Kut prizme je $A = 60°$. Odredite koliki bi morao biti indeks loma prizme da svjetlost ne izađe na suprotnoj strani prizme.

***rješenje*** Za prizmu prema slici 5.12. vrijedi:

$$\alpha_2 + \beta_1 = A \quad \text{i} \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n\,. \tag{1}$$




Slika 5.12.

Svjetlost neće izići iz prizme ako je kut loma svjetlosti na suprotnoj stranici prizme $\beta_2 = 90°$. Dakle,

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \frac{1}{n}\,, \tag{2}$$

pa je za $\beta_2 = 90°$

$$\sin\alpha_2 = \frac{1}{n}\,.$$

Trigonometrijskim transformacijama možemo dobiti indeks loma prizme $n$.

$$\sin\beta_1 = \sin(A-\alpha_2) \tag{3}$$

$$\sin\beta_1 = \sin A\cos\alpha_2 - \cos A\sin\alpha_2$$

$$\sin\beta_1 = \sin A\sqrt{1-\sin^2\alpha_2} - \cos A\sin\alpha_2$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{n} = \sin A\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \frac{\cos A}{n}\,.$$

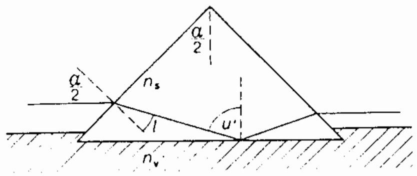


Rješenje te jednadžbe

$$n = \frac{\sqrt{1+\sin^2\alpha_1 + 2\sin\alpha_1\cos A}}{\sin A} \tag{4}$$

$$n = 1{,}46\,.$$

**5.9.** Koliki mora biti kut pri vrhu prizme, čiji je presjek jednakokračan trokut, da bi se zraka paralelna s horizontalnom plohom prizme i u ravnini njezina presjeka, (sl. 5.13) totalno reflektirala od horizontalne plohe prizme? Horizontalna ploha dodiruje površinu vode. Indeks loma stakla prizme je $n_s = 3/2$, a indeks loma vode je $n_v = 4/3$.




Slika 5.13.

***rješenje*** Totalna refleksija na horizontalnoj plohi prizme koja dodiruje vodu nastaje ako je upadni kut $u$ zrake na tu plohu takav da je

$$\sin u > \frac{n_v}{n_s}\,.$$

Budući da je

$$u = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} - l\right)\,,$$

to je uvjet za totalnu refleksiju na horizontalnoj plohi

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} - l\right) > \frac{n_v}{n_s}\,, \tag{1}$$

a zakon loma za upadnu zraku

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin l} = n_s\,. \tag{2}$$

Eliminiranjem kuta loma $l$ iz relacija (1) i (2) dobivamo

$$\alpha < 2\arcsin\left(\frac{n_s^2 - n_v^2}{1+n_s^2-2n_v}\right)^{\frac{1}{2}} = 128{,}25°\,.$$

Paralelni snop svjetlosti pada na staklenu kuglu ($n = 1{,}5$) polumjera 5 cm. Gdje je fokusiran taj snop?

***rješenje*** Uz uvjete Gaussovih aproksimacija, slika koju daje prvi sferni dioptar (zrak--staklo) nalazi se na udaljenosti $b$:

$$\frac{n_1}{a}+\frac{n_2}{b}=\frac{n_2-n_1}{r}$$

$$b=\frac{n_2 r}{n_2-1}=\frac{nr}{n-1}=3\,r=15\text{ cm}\,.$$

Međutim na izlasku snopa iz kugle (pošto prijeđe put od 10 cm) snop svjetlosti se ponovno lomi. Slika koju je dao prvi sferni dioptar virtualni je predmet za drugi dioptar (staklo–zrak). Udaljenost tog virtualnog predmeta od druge sferne granice je

$$a'=-(b-2r)=\frac{2-n}{n-1}\,r\,.$$

Primjenom jednadžbe sfernog dioptra dobivamo

$$\frac{n_1}{a'}-\frac{n_2}{b'}=\frac{n_2-n_1}{r}$$

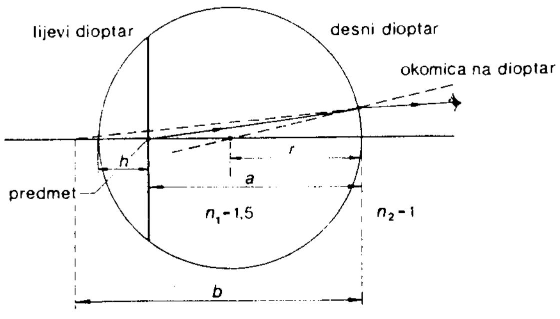
$$-\frac{n}{\dfrac{(2-n)r}{n-1}}+\frac{1}{b'}=\frac{n-1}{r}$$

$$b'=\frac{r(2-n)}{2(n-1)}=2{,}5\text{ cm}\,.$$

Fokus je iza kugle, udaljen 2,5 cm od njezina ruba, odnosno 12,5 cm od površine kugle u koju upada snop.

**5.11.** Staklenoj kugli, čiji je indeks loma $n=3/2$, odsječena je kalota. Preostali dio kugle položen je ravnom stranom na neki tekst, i pokazuje pod Gaussovim aproksimacijama udvostručena (po veličini) slova. U kojem su omjeru visina odsječene kalote i polumjer kugle?

***rješenje*** Nacrtajte kuglu čija je kalota odsječena i ucrtajte karakteristične zrake uz uvjete Gaussovih aproksimacija.




Slika 5.14.

Jednadžba konjugacije sfernog dioptra prema slici 5.14. glasi:

$$\frac{n_1}{a}+\frac{n_2}{b}=\frac{n_2-n_1}{r}\,. \tag{1}$$



Kao sferni dioptar javlja se samo desna zakrivljena strana kugle. Dioptar na ravnoj, lijevoj strani ne djeluje jer je predmet na samoj granici dvaju optičkih sredstava.

Iz slike vidimo da je

$$a=2r-h\,. \tag{2}$$

Poprečno (linearno) povećanje sfernog dioptra je

$$m=-\frac{b}{a}\,\frac{n_1}{n_2}\,. \tag{3}$$

Zadani su podaci:

$$n_1=1{,}5\,,\qquad n_2=1\qquad \text{i}\qquad m=2\,.$$

Valja, dakle, riješiti sustav koji čine jednadžbe (1) i (3):

$$\frac{1{,}5}{2r-h}+\frac{1}{b}=-\frac{0{,}5}{(-r)}\,. \tag{4}$$

$$2=-\frac{b}{2r-h}\cdot\frac{1{,}5}{1}\,. \tag{5}$$

U jednadžbi (4), zbog konvencije o predznacima, polumjer $r$ je negativan.
Iz jednadžbe (4) određujemo $b$, pa je

$$b=-\frac{2r(2r-h)}{(r+h)}\,. \tag{6}$$

Dobivena relacija za $b$ je negativna, što se na slici i vidi, a što je u skladu sa dogovorom o predznacima.
Izraz za $b$ iz (6) uvodimo u jednadžbu (5),

$$2=-\frac{1{,}5}{(2r-h)}\cdot\frac{[-2r(2r-h)]}{(r+h)}=\frac{3r}{r+h}\,, \tag{7}$$

da bi sređivanjem dobili odnos $r$ i $h$:

$$2r+2h=3r\qquad \text{i}\qquad \frac{h}{r}=\frac{1}{2}\,.$$

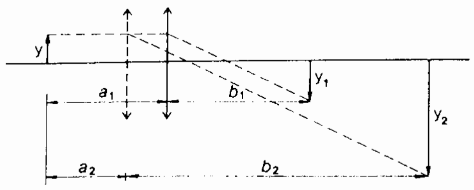
**5.12.** Izvor svjetlosti udaljen je 1,5 m od zastora. Na zastoru se pomoću tanke konvergentne leće dobiva uvećana slika izvora čiji je promjer 18 mm. Pomakne li se zastor za 3 m od leće, ponovno se dobije uvećana slika izvora promjera 96 mm. Odredite žarišnu daljinu leće i promjer izvora svjetlosti.

***rješenje*** Na slici 5.15. se vide geometrijski odnosi:

$$\frac{y_1}{y}=\frac{b_1}{a_1}\,, \tag{1}$$

gdje je $y$ promjer izvora svjetlosti, a $y_1$ i $y_2$ promjeri slika izvora.
**a)** Pod uvjetom da je udaljenost od izvora do zastora $l_1=1{,}5$ m imamo:

$$a_1+b_1=l_1 \tag{2}$$




Slika 5.15.

$$a_1 = l_1 - b_1 = l_1 - a_1 \frac{y_1}{y} \tag{3}$$

$$a_1 = \frac{l_1 y}{y + y_1} .$$

Jednadžba leće daje:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f} , \tag{4}$$

pa zbog

$$b_1 = \frac{y_1 l_1}{y + y_1} \tag{5}$$

slijedi

$$\frac{1}{f} = \frac{y + y_1}{l_1 y} + \frac{y + y_1}{l_1 y_1} = \frac{(y + y_1)^2}{l_1 y y_1} . \tag{6}$$

b) Za udaljenost izvora i zastora $l_2 = 4{,}5$ m na isti se način kao u a) dobije izraz:

$$\frac{1}{f} = \frac{(y + y_2)^2}{l_2 y y_2} . \tag{7}$$

Uspoređivanjem izraza (6) i (7) odredi se promjer izvora i žarišna daljina leće:

$l_1 = 1{,}5$ m

$y_1 = 0{,}018$ m

$l_2 = 1{,}5$

$y_2 = 0{,}036$ m

$$\frac{(y + y_1)^2}{l_1 y y_1} = \frac{(y + y_2)^2}{l_2 y y_2} \tag{8}$$

$$(y + y_1)\sqrt{l_2 y_2} - (y + y_2)\sqrt{l_1 y_1} = 0 \tag{9}$$

$$y = \frac{y_2 \sqrt{l_1 y_1} - y_1 \sqrt{l_2 y_2}}{\sqrt{l_2 y_2} - \sqrt{l_1 y_1}} \tag{10}$$

$$y = 8 \text{ mm} . \checkmark$$

Žarišnu daljinu određujemo ovako:

$$\frac{1}{f} = \frac{(y + y_1)^2}{l_1 y y_1} \tag{11}$$

$$\frac{1}{f} = 0{,}3129 \text{ m}$$

$$f = 0{,}32 \text{ m} .$$



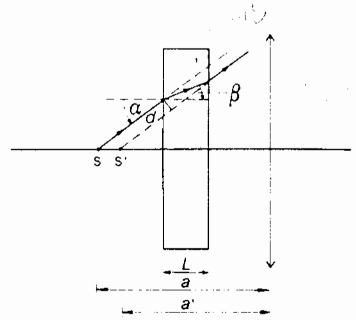
**5.13.** Točkasti izvor svjetlosti je 30 cm od tanke konvergentne leće čija jakost iznosi 5 $\text{m}^{-1}$. Za koliko će se centimetara pomaknuti slika izvora ako se između izvora i leće umetne staklena planparalelna ploča debela 15 cm, čiji indeks loma iznosi 1,57? Za male kutove upada i loma na planparalelnoj ploči, omjer tangensa kuta upada i kuta loma može se aproksimirati omjerom njihovih sinusa.

***rješenje*** Izračunajmo položaj $b$ slike izvora kada između izvora i leće nema planparalelne ploče:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = j \tag{1}$$

$$b = \frac{a}{ja - 1}$$

$$b = 60 \text{ cm} .$$




Slika 5.16.

Postavimo li planparalelnu ploču između izvora i leće čini se kao da se izvor pomaknuo iz točke $S$ u točku $S'$. Na slici 5.16. se vidi da je zraka svjetlosti na izlazu iz planparalelne ploče pomaknuta za $d$:

$$d = L(\tan\alpha - \tan\beta) . \tag{2}$$

Prividni pomak izvora jednak je:

$$a - a' = \frac{d}{\tan\alpha} = L\left(1 - \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right) \tag{3}$$

Za male kutove upada vrijedi:

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \approx \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n} \tag{4}$$

pa slijedi:

$$a - a' = L\left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{5}$$

$$a' = a - L\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$a' = 24{,}6 \text{ cm} .$$

Analogno tomu iz

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f} \tag{6}$$

izlazi:

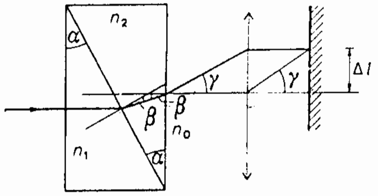
$$b' = \frac{a'}{a'j - 1} . \tag{7}$$

Slika će se pomaknuti za

$$b' - b = 47 \text{ cm} .$$

**5.14.** Planparalelna ploča sastoji se od dva staklena klina, čiji su mali kutovi jednaki 1°, a indeksi loma $n_1 = 1{,}5$ i $n_2 = 1{,}6$ (na slici su kutovi povećani zbog bolje preglednosti crteža). Okomito na njezinu površinu pada uski paralelni snop svjetlosti (sl. 5.17). Iza ploče nalazi se konvergentna leća čija je žarišna daljina 1,8 cm. U žarišnoj ravnini postavljen je zastor. Za koliko se centimetara na zastoru pomakne svijetla točka ako se ploča ukloni?

***rješenje*** Prema zakonu loma:




Slika 5.17.

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

i

$$n_2 \sin\beta' = n_0 \sin\gamma .$$

Iz slike je

$$\tan\gamma = \frac{\Delta l}{f} ,$$

pa je

$$\Delta l = f \tan\gamma \simeq f\gamma .$$

Budući da je

$$\beta' = \alpha - \beta ,$$

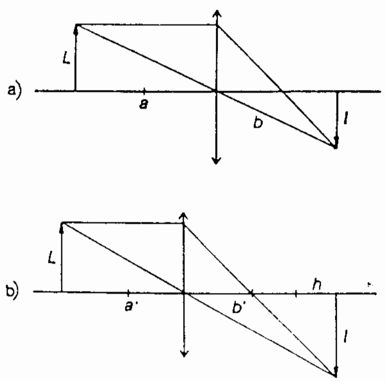
$$\sin\gamma \simeq \gamma = \alpha(n_2 - n_1) ,$$

pa je

$$\Delta l = f\alpha(n_2 - n_1) = 0{,}31 \text{ cm}.$$

**5.15.** Objektiv foto-aparata žarišne daljine 50 mm može se izoštriti na (minimalnu) udaljenost 50 cm. Ako se između objektiva i tijela aparata stavi prsten visok $h = 25$ mm i namjesti se predmet na minimalnu udaljenost, potrebno je naći odnos novog i starog (maksimalnog) povećanja objektiva.

***rješenje*** Iz jednadžbe tanke leće:




Slika 5.18.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

dobijemo za slikovnu udaljenost

$$b = \frac{af}{a-f} ,$$

a za produljeni objektiv vrijedi

$$b' = \frac{af}{a-f} + h,$$

tj. pa u tom slučaju povećanje iznosi:

$$\frac{l'}{L} = \frac{b'}{a'} ,$$



gdje je $L$ visina predmeta a $l'$ visina slike pa za omjer povećanja novog i starog objektiva imamo

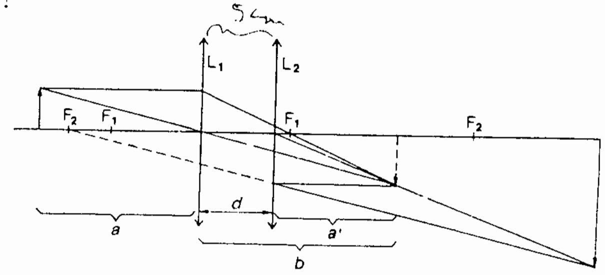
$$\frac{\frac{l}{L}}{\frac{l'}{L}} = \frac{\frac{f}{a-f}}{\frac{b'}{a'}} ,$$

što daje

$$\frac{l'}{l} = \frac{h(a-f)}{f^2} + 1 = 5{,}5 .$$

U izrazima oznake $a$, odnosno $a'$ su predmetne udaljenosti u slici 5.18.a) odnosno b).

**5.16.** Tanka leća, čija je žarišna daljina $f_1 = 10$ cm, udaljena je 5 cm od leće čija je žarišna daljina $f_2 = 15$ cm. Koliko je udaljeno žarište sustava leća od druge leće?




Slika 5.19.

***rješenje*** Iz jednadžbe tanke leće za prvu leću je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_1} ; \qquad b = \frac{af_1}{a - f_1} ,$$

a kako je razmak između leća jednak $d$, vrijedi

$$\frac{a - f_1}{af_1 - d(a - f_1)} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f_2} ,$$

pa je

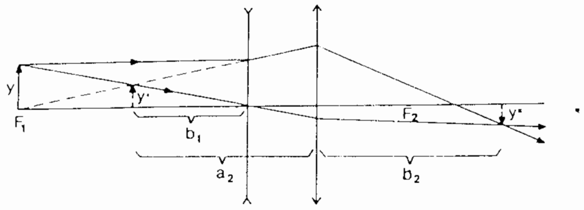
$$b' = \frac{[af_1 - d(a - f_1)]f_2}{af_1 - d(a - f_1) - (a - f_1)f_2} .$$

Žarišnu udaljenost sustava nađemo kao graničnu vrijednost, tj.

$$f_s = \lim_{a\to\infty} b' = \frac{(f_1 - d)f_2}{f_1 - d - f_2} ,$$

odnosno

$$f_s = -7{,}5 \text{ cm} .$$




Slika 5.20.

**5.17.** Predmet se nalazi 1 m ispred divergentne leće čija je jakost $J = -1\ \mathrm{m}^{-1}$. Iza divergentne leće, udaljena 30 cm, nalazi se konvergentna leća čija je žarišna daljina 40 cm. Odredite gdje je slika predmeta i kakva je? Gdje bi bila slika koju taj sustav daje od beskonačno dalekog predmeta?

***rješenje*** a) Slika predmeta koju daje prva (divergentna) leća nalazi se na udaljenosti $b_1$ od leće. Uvrštavajući u jednadžbu leće za $a_1 = 1$ m, i za $\frac{1}{f_1} = -1\ \mathrm{m}^{-1}$, dobivamo:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} = -0{,}5\ \mathrm{m}\,.$$

Ta je slika za drugu (konvergentnu) leću predmet. Uvrštavajući u jednadžbu te leće za $a_2 = 0{,}8$ m, i za $f_2 = 0{,}4$ m, dobivamo:

$$b_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = 0{,}8\ \mathrm{m}.$$

Realna slika nalazi se 80 cm iza konvergentne leće.

b) Ako je predmet beskonačno daleko ($a_1 = \infty$), tada je $b_1 = -1$ m, $a_2 = 1{,}3$ m, pa iz jednadžbe konvergentne leće

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$$

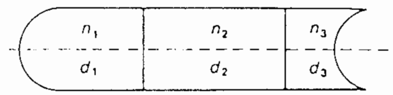
dobivamo:

$$b_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = 0{,}578\ \mathrm{m}\,.$$

Žarište sustava udaljeno je od druge (konvergentne) leće 57,8 cm.

**5.18.** Optički sustav sastoji se od plankonveksne leće polumjera zakrivljenosti $r_1 = 50$ cm i aksijalne debljine $d_1 = 5$ cm, planparalelne ploče debljine $d_2 = 7$ cm i plankonkavne leće polumjera zakrivljenosti $r_2 = 200$ cm, aksijalne debljine $d_3 = 8$ cm. Svi su dioptri postavljeni tako da planparalelna ploča dodiruje ravne plohe leća.
Predmet se nalazi ispred tjemena konveksne plohe plankonveksne leće $a_1 = 400$ cm.
Indeks loma plankonveksne leće je $n_1 = 1{,}5$, indeks loma planparalelne ploče $n_2 = 1{,}6$, a indeks loma plankonkavne leće $n_3 = 1{,}7$. Odredite položaj slike predmeta.






Slika 5.21.

***rješenje*** Svjetlosne zrake koje dolaze s predmeta prolaze najprije kroz sferni diopter. Jednadžba za sferni diopter glasi:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n_1}{b_1} = \frac{n_1 - 1}{r_1}\,. \tag{1}$$

Iz jednadžbe (1) dobiva se položaj slike

$$b_1 = 200\ \mathrm{cm}\,.$$

Slika u sfernom dioptru predstavlja virtualni predmet za ravni diopter (granična ploha između plankonveksne leće i planparalelne ploče). Jednadžba za taj ravni diopter glasi:

$$\frac{n_1}{a_2} + \frac{n_2}{b_2} = 0\,. \tag{2}$$

Znajući da jednadžba vrijedi za koordinatni sustav, koji je u odnosu prema sustavu za sferni diopter translatiran za $d_1$ udesno, dobivamo za

$$a_2 = -(b_1 - d_1) \tag{3}$$

$$a_2 = -195\ \mathrm{cm}\,,$$

odnosno

$$b_2 = 208\ \mathrm{cm}\,.$$

Slika dobivena ravnim dioptrom predstavlja predmet za sljedeći ravni diopter (granična ploha između planparalelne ploče i plankonkavne leće). Jednadžba za taj ravni diopter glasi:

$$\frac{n_2}{a_3} + \frac{n_3}{b_3} = 0\,. \tag{4}$$

Budući da je

$$a_3 = -(b_2 - d_2)$$

$$a_3 = -201\ \mathrm{cm}\,,$$

iz gornje jednadžbe dobivamo

$$b_3 = 213{,}6\ \mathrm{cm}\,.$$

Slika dobivena ravnim dioptrom jest predmet za sferni diopter čija jednadžba glasi:

$$\frac{n_3}{a_4} + \frac{1}{b} = \frac{1 - n_3}{r_2}\,. \tag{5}$$

Uvrštavanjem

$$a_4 = -(b_3 - d_3)$$

$$a_4 = -205{,}6\ \mathrm{cm}$$

dobivamo iz gornje jednadžbe (5) udaljenost slike nastale opisanim optičkim sustavom od tjemena plankonkavne leće

$$b = 209{,}6 \text{ cm} \,.$$

**5.19.** Predmet visok 1 cm udaljen je 6 cm od konvergentne leće čija jakost iznosi $25 \text{ m}^{-1}$. Iza leće, udaljeno 20 cm, nalazi se konkavno zrcalo čiji je polumjer 8 cm. Kakvu sliku vidi oko koje gleda kroz leću prema zrcalu?

***rješenje*** Slika koju daje leća je na udaljenosti $b_1$ od leće:

$$\frac{1}{b_1} = J_1 - \frac{1}{a_1} \qquad \Rightarrow \qquad b_1 = 12 \text{ cm} \,.$$

Povećanje je

$$m_1 = -\frac{b_1}{a_1} = -2 \,.$$

Ta slika pada u središte konkavnog zrcala jer je središte upravo $(20 - 8)$ cm $=$ $= 12$ cm udaljeno od leće.
Iz jednadžbe zrcala

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{2}{r}$$

dobivamo

$$\frac{1}{b_2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a_2} \,, \qquad b_2 = 8 \text{ cm} \,.$$

Povećanje je

$$m_2 = -\frac{b_2}{a_2} = -1 \,.$$

Ta je slika ponovno predmet za leću, koja će biti na udaljenosti $b_3$ od leće:

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} = J_1 \,, \qquad \frac{1}{0{,}12 \text{ m}} + \frac{1}{b_3} = 25 \text{ m}^{-1} \,, \qquad b_3 = 0{,}06 \text{ m} \,.$$

Povećanje je

$$m_3 = -\frac{b_3}{a_3} = -\frac{1}{2} \,.$$

Ukupno je povećanje

$$m = m_1 m_2 m_3$$

$$m = (-2)\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \,.$$

Oko vidi okrenutu sliku visoku 1 cm ($m = -1$) na mjestu gdje je predmet, tj. 6 cm ispred leće.

**5.20.** Dvije su tanke leće, konvergentna, jakosti $J = +10 \text{ m}^{-1}$ i divergentna, $J = -5 \text{ m}^{-1}$, slijepljene. Predmet visok 1 cm nalazi se 5 cm ispred konvergentne leće.
a) Odredite gdje je i kakva je slika predmeta? Da li bi se slika izmijenila okretanjem sustava leća tako da predmet bude ispred divergentne leće?
b) Kolika je žarišna daljina tog sustava tankih leća?



***rješenje*** a) Odredite položaj slike predmeta s obzirom na prvu leću (udaljenost $b_1$) i, zatim, smatrajte tu sliku predmetom za drugu leću. Iz jednadžbe prve leće

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} \qquad \frac{1}{f_1} = J_1$$

dobivamo

$$\frac{1}{b_1} = J_1 - \frac{1}{a_1} \,.$$

Ta je slika predmet za drugu leću, pa je $a_2 = -b_1$, što uvršteno u jednadžbu druge leće daje

$$-\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} = J_2$$

ili

$$b_2 = \frac{a_1}{a_1(J_1 + J_2) - 1} = -0{,}067 \text{ m} \,.$$

Iz

$$m_1 = \frac{y_1'}{y_1} = -\frac{b_1}{a_1} \qquad \text{i} \qquad m_2 = \frac{y_2'}{y_2} = -\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$$

dobivamo ukupno povećanje sustava

$$m = \frac{y_2'}{y_1} = m_1 m_2 = \frac{b_2}{a_1} = 1{,}33 \,.$$

Slika je uspravna, virtualna, povećana (visoka 1,33 cm) i 6,7 cm udaljena od sustava. Može se lako pokazati, a to se vidi i iz oblika formule za $b_2$, da se okretanjem sustava neće promijeniti položaj i veličina slike.
b) Uvrštavanjem za $a_1 = \infty$ u izraz za $b_2$, dobivamo žarišnu daljinu tog sustava

$$f = \frac{1}{J_1 + J_2} = 0{,}2 \text{ m} \,,$$

odnosno jakost sustava

$$J = J_1 + J_2 = 5 \text{ m}^{-1} \,.$$

Položaj slike u primjeru a) mogli bismo naći tako da napišemo jednadžbu sustava u obliku

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = j \,.$$

Uvrštavanjem za $a = 0{,}05$ m, i za $J = 5 \text{ m}^{-1}$, dobivamo položaj slike

$$b = \frac{a}{aJ - 1} = -\frac{1}{15} \text{ m} = -0{,}067 \text{ m} \,.$$

**5.21.** Kratkovidan čovjek upotrebljava korekcijske leće žarišne daljine $f_n$ (naočale) čija je jakost $J = -5 \text{ m}^{-1}$. Ako povećalo, čija je žarišna daljina $f = 10$ cm, upotrijebi tako da je, skinuvši naočale, prisloni uz oko, koliko je njezino povećanje?

***rješenje*** Vidni je kut pod kojim čovjek s naočalama gleda predmet na daljini jasnog vida (koja je po definiciji $d = 25$ cm)

$$\vartheta' = \frac{y}{d} = \frac{y}{0{,}25\ \mathrm{m}} .$$

Bez naočala to oko ne vidi jasno predmete koji su dalje od 20 cm, što se vidi iz jednadžbe sustava oka i naočala:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_{oko}} ,$$

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_{oko}} + \frac{1}{f_n}$$

$$\frac{1}{a} = -\frac{1}{f_n} \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}2\ \mathrm{m} .$$

Slika koju daje leća ne smije dakle biti dalje od 0,2 m od oka. U tom slučaju je vidni kut

$$\vartheta' = \frac{y'}{0{,}2\ \mathrm{m}} ,$$

pa je povećanje leće

$$\gamma = \frac{\vartheta'}{\vartheta}$$

$$\gamma = \frac{y'}{0{,}2\ \mathrm{m}} \cdot \frac{0{,}25\ \mathrm{m}}{y} = 1{,}25\ \frac{y'}{y} .$$

Odredivši omjer $y'/y$ iz jednadžbe leće, dobivamo:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f-b}{f} = 3$$

$$\gamma = 1{,}25\ \frac{y}{y'} = 3{,}75 .$$

To je "individualno" povećanje leće za promatrano oko. Apsolutno povećanje za tu leću i za normalno oko je

$$\gamma' = \frac{d}{f} = 2{,}5 .$$

**5.22.** Žarišna daljina objektiva mikroskopa je 3 cm, a žarišna daljina okulara 7 cm. Razmak leća je 20 cm. Predmet je udaljen od objektiva 3,9 cm.
**a)** Izračunajte linearno povećanje objektiva, kutno povećanje okulara i ukupno povećanje mikroskopa.
**b)** Kolika je optička duljina mikroskopa, tj. razmak između fokusa slike objektiva i fokusa predmeta okulara? Izrazite ukupno povećanje mikroskopa pomoću optičke duljine mikroskopa.



***rješenje*** a) Predmet je na udaljenosti $a_1 = 3{,}9$ cm od objektiva, koji daje sliku na udaljenosti $b_1$:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{f_1 a_1}{a_1 - f_1} = 13\ \mathrm{cm} .$$

Okular podesimo tako da slika koju daje objektiv padne u žarišnu ravninu okulara. Tako dobijemo virtualnu sliku u beskonačnosti. Linearno povećanje objektiva je

$$m_1 = -\frac{b_1}{a_1} = -3{,}33 .$$

Kutno povećanje okulara (leće) je

$$\gamma = \frac{d}{f_2}$$

$$\gamma = \frac{25\ \mathrm{cm}}{7\ \mathrm{cm}} = 3{,}57 .$$

Ukupno je povećanje

$$m = m_1 \gamma$$

$$m = -11{,}9 .$$

b) Optička duljina mikroskopa je

$$t = c - (f_1 + f_2)$$

$$t = 20\ \mathrm{cm} - (3+7)\ \mathrm{cm} = 10\ \mathrm{cm} .$$

Ukupno povećanje mikroskopa možemo izraziti i pomoću optičke duljine mikroskopa

$$m = m_1 \gamma = -\frac{b_1}{a_1}\frac{d}{f_2}$$

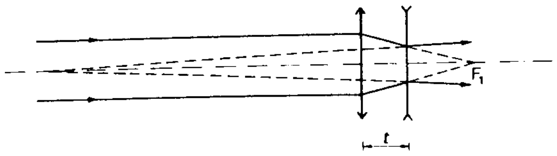
$$m = -\frac{b_1 - f_1}{f_1}\frac{d}{f_2} = -\frac{c-(f_1+f_2)}{f_1 f_2}\, d$$

$$m = -\frac{td}{f_1 f_2} = -11{,}9 .$$

**5.23.** Dalekozor se sastoji od objektiva jakosti $J_1 = +12\ \mathrm{m}^{-1}$ i divergentne leće tj. okulara čija je žarišna daljina $f_2 = -4$ cm.
**a)** Koliki je razmak između objektiva i okulara ako se slika dalekog predmeta promatra okom prilagođenim na beskonačnost?
**b)** Koliki je razmak između objektiva i okulara ako se slika promatra prilagođenim okom na minimalnu udaljenost jasnog vida ($d = 25$ cm)?

***rješenje*** a) Snop zraka svjetlosti, koji dolazi u objektiv iz vrlo dalekog predmeta, paralelan je, pa je slika predmeta koju daje objektiv, u žarištu objektiva. Ta je slika imaginarni predmet za okular. Da bi slika koju daje okular bila u beskonačnosti, mora biti žarište slike objektiva u istoj točki kao žarište predmeta okulara, paje razmak između objektiva i okulara

$$t = f_1 + f_2 = 4{,}3\ \mathrm{cm} .$$




Slika 5.22.

b) Ako je oko prilagođeno na daljinu jasnog vida, tada je (sl. 5.22):

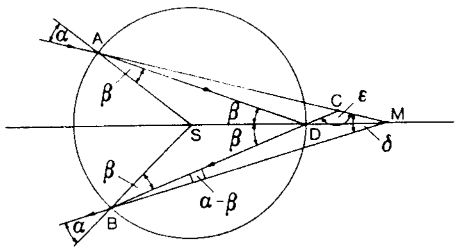
$$b_1 = f_1 ,$$
$$a_2 = -(f_1 - t) = t - f_1 ,$$
$$b_2 = -d ,$$

pa iz jednadžbe okulara dobivamo

$$\frac{1}{t - f_1} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f_2} \quad \Rightarrow \quad t = f_1 + \frac{f_2 d}{f_2 + d} = 3{,}57 \text{ cm} .$$

Kada je oko prilagođeno na daljinu jasnog vida, razmak objektiva od okulara manji je za 0,73 cm nego kada je oko prilagođeno na beskonačnost.

**5.24.** Zraka svjetlosti lomi se u kapljici vode (oblika kugle), prolazi kroz nju i nakon refleksije na unutarnjem rubu ona se vraća. Koliki treba biti kut upada svjetlosti da bi kut između upadne i izlazne zrake bio maksimalan? Indeks loma vode je 1,331.




Slika 5.23.

***rješenje*** Iz geometrijskih odnosa na slici nalazimo vezu između kutova:

Iz trokuta $\Delta BCM$: $\quad \delta = \pi - (\alpha - \beta + \varepsilon)$ (1)

Iz trokuta $\Delta ADC$: $\quad (\pi - \varepsilon) + (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) = \pi$ (2)

Iz toga proizlazi: $\quad \varepsilon = \pi - \alpha - 3\beta$ (3)

$\quad \delta = 4\beta - 2\alpha .$ (4)

Odredimo upadni kut $\alpha$ uz uvjet da kut između upadne i izlazne zrake $\delta$ bude maksimalan:

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = 0 \tag{5}$$

$$4\,\frac{d\beta}{d\alpha} - 2 = 0 \tag{6}$$



$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{2} . \tag{7}$$

Iz zakona loma izlazi:

$$\sin\alpha = n \sin\beta , \tag{8}$$
$$\cos\alpha \, d\alpha = n \cos\beta \, d\beta , \tag{9}$$
$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha}{n\cos\beta} . \tag{10}$$

Upadni kut $\alpha$ odredi se rješavanjem sustava jednadžbi:

$$2\cos\alpha = n\cos\beta \tag{11}$$

i

$$\sin\alpha = n\sin\beta ,$$

odakle se dobije

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \tag{12}$$

$$\alpha = 59°32'17'' .$$

Da bi kut $\delta$ bio maksimalan, mora biti ispunjen uvjet

$$\frac{d^2\delta}{d\alpha^2} < 0 .$$

Očito je da se za upadni kut $\alpha = 0$ dobiva najmanja vrijednost kuta $\delta$, pa nije potrebno računati $\dfrac{d^2\delta}{d\alpha^2}$.

**5.25.** Konvergentna leća od krunskog stakla i divergentna leća od flintskog stakla slijepljene su i čine akromatski sustav. Iz podataka za krunsko staklo ($n_C$ = = 1,514, $n_D$ = 1,517 i $n_F$ = 1,524) i za flintsko staklo ($n_C$ = 1,622, $n_D$ = 1,627 i $n_F$ = 1,639) odredite disperzijsku moć leća. Ako je jakost konvergentne leće 5 $m^{-1}$, kolika je jakost divergentne leće i cijelog sustava?

***rješenje*** Disperzijska se moć prozirnog materijala (stakla) definira

$$\omega = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} .$$

Nakon uvrštavanja podataka dobivamo:

za krunsko staklo $\quad \omega_1 = 0{,}019\,3$ ,

za flintsko staklo $\quad \omega_2 = 0{,}027\,1$ .

Žarišna daljina, odnosno jakost leće dana je formulom:

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) .$$

Iz

$$\frac{1}{f_C} = (n_C - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) , \qquad \frac{1}{f_D} = (n_D - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) ,$$

$$\frac{1}{f_F} = (n_F - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

dobivamo

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = (n_F - n_C)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \cdot \frac{1}{f_D}$$

$$\frac{f_C - f_F}{f_C f_F} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \cdot \frac{1}{f_D} .$$

Valne duljine Fraunhoferovih $C$, $F$ i $D$ linija iznose: 656 nm, 589 nm i 486 nm. Indeks loma za $D$ liniju $n_D$ približno je srednjak od $n_C$ i $n_F$, pa je i žarišna daljina $f_D$ približno srednjak od $f_C$ i $f_F$.

Budući da je $f_C f_F \approx f_D^2$, dobivamo

$$\omega = \frac{f_C - f_F}{f_D}$$

$$\omega = \frac{J_C - J_F}{J_D} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} .$$

Kako je za sustav slijepljenih leća

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} ,$$

a zbog akromatičnosti

$$\omega = \frac{f_C - f_F}{f_D} = 0 ,$$

dobivamo:

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \frac{1}{f_{1F}} + \frac{1}{f_{2F}} - \frac{1}{f_{1C}} - \frac{1}{f_{2C}}$$

$$\frac{f_C - f_F}{f_D^2} = \frac{f_{1C} - f_{1F}}{f_{1D}^2} + \frac{f_{2C} - f_{2F}}{f_{2D}^2}$$

$$\frac{\omega}{f_D} = \frac{\omega_1}{f_{1D}} + \frac{\omega_2}{f_{2D}} = 0$$

$$\frac{f_{2D}}{f_{1D}} = \frac{J_1}{J_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1{,}404$$

Budući da je $J_1 = 5\ \mathrm{m}^{-1}$, to je $J_2 = -\dfrac{J_1}{1{,}404} = -3{,}65\ \mathrm{m}^{-1}$, odnosno jakost sustava

$$J = J_1 + J_2 = 1{,}35\ \mathrm{m}^{-1} .$$

**5.26.** Izračunajte žarišne daljine plankonveksne leće ($r = 4{,}5$ cm) od flintskog stakla za Fraunhoferove $C$ i $F$ linije ($n_C = 1{,}621$ i $n_F = 1{,}638$). Kolika je kromatska aberacija, disperzijska moć i Abbeov broj?



***rješenje*** Iz formule za žarišnu daljinu dobivamo:

$$\frac{1}{f_C} = (n_C - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -0{,}138\ \mathrm{cm}^{-1};$$

$$f_C = -7{,}25\ \mathrm{cm}$$

$$\frac{1}{f_F} = (n_F - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -0{,}141\,8\ \mathrm{cm}^{-1};$$

$$f_F = -7{,}05\ \mathrm{cm} .$$

Kromatska aberacija leće je prema definiciji

$$\Delta f = f_C - f_F$$

$$\Delta f = 0{,}2\ \mathrm{cm} .$$

Disperzijska moć leće je

$$\omega = \frac{f_C - f_F}{f_D} .$$

Žarište za natrijevu $D$ liniju približno je u sredini između žarišta $F_F$ i $F_C$ za Fraunhoferove linije $F$ i $C$, pa je

$$f_D \approx -7{,}18\ \mathrm{cm} .$$

Disperzijska moć je

$$\omega = \frac{f_C - f_F}{f_D} = 0{,}027\,9 ,$$

a njezina recipročna vrijednost, *Abbeov broj*

$$\nu = \frac{1}{\omega} = 36 .$$

**5.27.** Bijela svjetlost upada pod kutom 38,34° na prizmu od flintskog stakla. Kut prizme je 45°. Izračunajte i nacrtajte put crvene i ljubičaste svjetlosti kroz prizmu ako je $n_c = 1{,}621$ i $n_{lj} = 1{,}651$. Kolika je kutna disperzija?

***rješenje*** Prema Snellovu zakonu dobivamo

$$\sin l_c = \frac{\sin u}{n_c} = 0{,}382\,68 , \qquad l_c = 22{,}5^\circ .$$

Iz

$$l + u' = A$$

izlazi

$$u' = A - l = 45^\circ - 22{,}5^\circ = 22{,}5^\circ .$$

Iz

$$\frac{\sin u'}{\sin l'} = \frac{1}{n_c}$$

dobivamo

$$l_c' = 38{,}34^\circ .$$

Budući da je $u = l'$ i $u' = l$, devijacija je minimalna i iznosi

$$\delta_c = u_c - l_c' - A$$

$$\delta_c = 31{,}68^\circ\ .$$

Slično dobivamo i za ljubičastu svjetlost:

$$l_{lj} = 22{,}07^\circ$$

$$u_{lj}' = 22{,}93^\circ$$

$$l_{lj}' = 40{,}04^\circ$$

$$\delta_{lj} = u_{lj} + l_{lj} - A$$

$$\delta_{lj} = 33{,}38^\circ .$$

Kutna disperzija je

$$\Delta = \delta_c - \delta_{lj} = 1{,}7^\circ\ .$$

## 5.3. Zadaci

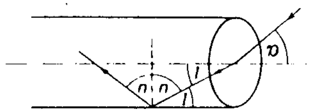
**5.1.** Zraka svjetlosti upada pod kutom 60° na površinu vode u posudi. Na dnu posude nalazi se ravno zrcalo. Koliko se puta promijeni udaljenost između upadne i izlazne zrake zamijenimo li vodu drugom tekućinom s dva puta većim indeksom loma od indeksa loma vode, a taj iznosi 4/3. Visina tekućine se ne mijenja.

Rezultat: 2,45 2,48

**5.2.** Promatrač stoji kraj bazena s vodom ($n = 4/3$) i vidi predmet na dnu bazena pod kutom 30°. Kolika je prividna dubina predmeta ako je stvarna dubina bazena 3 m?

Rezultat: $h = 0{,}64$ m

**5.3.** U vodi ($n_2 = 1{,}33$) se nalazi svjetlovod u obliku staklenog štapa ($n_1 =$ $= 1{,}52$). Snop svjetlosti upada iz vode u staklo tako da s osi štapa zatvara kut $\alpha$ (sl. 5.24). Koliki mora biti kut $\alpha$ da bi se snop širio štapom kao svjetlovodom?




Slika 5.24.

Rezultat: $\alpha < 33{,}6^\circ$

**5.4.** Prizma s kutom 50° daje minimalni kut otklona 12° ako je uronjena u vodu. Koliki je minimalni kut otklona ako tu prizmu stavimo u ulje? Indeks loma vode je 1,33, a indeks loma ulja iznosi 1,48.

Rezultat: $\delta_{min} = 5{,}14^\circ$



**5.5.** Odredite položaj i veličinu slike Sunca koja se dobiva Herschelovim konkavnim zrcalom čiji je polumjer zakrivljenosti 16 m. Udaljenost Sunca od Zemlje je $1{,}49 \cdot 10^{11}$ m, a polumjer Sunca iznosi $6{,}95 \cdot 10^{8}$ m.

Rezultat: $y' = 7{,}46$ cm

**5.6.** Slika dobivena konkavnim zrcalom četiri puta je manja od predmeta. Ako se predmet pomakne za 5 cm prema zrcalu, slika će biti dvaput manja od predmeta. Kolika je žarišna daljina zrcala?

Rezultat: $f = 2{,}5$ cm

**5.7.** Odredite žarišnu daljinu konkavnog sfernog zrcala koje je napravljeno tako da je posrebrena jedna strana tanke simetrične bikonveksne staklene leće. Polumjer zakrivljenosti plohe leće je $r = 0{,}4$ m, a indeks loma stakla $n_s = 1{,}5$.

Rezultat: $f = 0{,}1$ m

**5.8.** Na optičkoj osi konkavnog sfernog zrcala žarišne daljine 30 cm nalazi se točkasti izvor svjetlosti udaljen 40 cm od tjemena zrcala. Na koju udaljenost treba postaviti ravno zrcalo da bi se svjetlost, što je reflektira sferno zrcalo, vratilo natrag u izvor?

Rezultat: 40 cm od izvora

**5.9.** Vodoravno položeno cilindrično udubljeno zrcalo, čiji je polumjer zakrivljenosti 60 cm, napunjeno je vodom. Nađite žarišnu daljinu toga sustava. Indeks loma vode je 4/3. Dubina vode je mala u odnosu prema polumjeru zrcala.

Rezultat: $f = 22{,}5$ cm

**5.10.** Konkavno zrcalo postavljeno je horizontalno i napunjeno je alkoholom. Polumjer zakrivljenosti zrcala je 0,8 m. Najveća dubina alkohola u zrcalu je mala u odnosu prema polumjeru zakrivljenosti zrcala, a indeks loma alkohola je 1,36. Kolika je žarišna daljina takvog sustava?

Rezultat: 0,29 m

**5.11.** Dva sferna zrcala, jedno konkavno, čiji je polumjer zakrivljenosti 25 cm, a drugo konveksno, polumjera zakrivljenosti 50 cm, postavljena su jedno prema drugom tako da im se optičke osi podudaraju i da im je udaljenost tjemena 50 cm. Predmet se nalazi u sredini između zrcala. Mali zastor sprečava zrake svjetlosti da padaju izravno na konveksno zrcalo, zato slika nastaje najprije na konkavnom, a zatim na konveksnom zrcalu.

a) Gdje je slika i kakva je? b) Gdje se nalazi slika ako umjesto konveksnog upotrijebimo ravno zrcalo? (Riješite računski i grafički.)

Rezultat: a) Virtualna slika je 12,5 cm iza konkavnog sfernog zrcala.
b) Virtualna slika je 25 cm iza ravnog zrcala.

**5.12.** Stakleni štap dug 10 cm, čiji je indeks loma 1,5, obrađen je tako da je jedna strana ispupčena sferna površina, a druga je strana ravna. Koliko je slika Sunca udaljena od ravne strane štapa ako Sunčeva svjetlost dolazi sa zaobljene strane?

Rezultat: $d = 3{,}33$ cm

**5.13.** Tanka konvergentna leća od predmeta visokog 5 cm daje realnu sliku visoku 15 cm. Pomakne li se predmet za 1,5 cm u smjeru od leće, dobije se slika visoka 10 cm. Kolika je žarišna daljina leće?

Rezultat: $f = 9$ cm

**5.14.** Bikonveksna tanka leća čiji je polumjer zakrivljenosti $r_1 = 10$ cm i $r_2 = 12$ cm, stvara u vodi realnu sliku predmeta, koji je od leće udaljen 48 cm. Realna slika je udaljena od leće 96 cm. Odredite indeks loma bikonveksne leće ako je indeks loma vode $n_v = 4/3$.

Rezultat: $n_l = 1{,}56$

**5.15.** Tanka konvergentna leća žarišne daljine 0,1 m daje realnu sliku nekog predmeta udaljenog od leće 0,3 m. Tik uz tu leću postavi se tanka divergentna leća i pritom se slika istog predmeta pomakne na udaljenost 0,4 m od sustava leća. Kolika je žarišna daljina divergentne leće?

Rezultat: $f_d = -1{,}2$ m

**5.16.** Dvije tanke leće imaju zajedničku optičku os i međusobno su razmaknute 10 cm. Obje leće imaju jednake žarišne daljine 25 cm, samo što je prva leća konvergentna, a druga divergentna. Na kojoj se udaljenosti od druge leće formira slika neizmjerno dalekog predmeta na optičkoj osi?

Rezultat: $b_2 = 37{,}5$ cm

2

**5.17.** Tanka bikonveksna leća čija jakost iznosi 8 m$^{-1}$ postavljena je 2,5 cm iznad horizontalno položene ploče od pleksiglasa ($n = 3/2$), debele 20 cm. Optička je os leće okomita na ploču, a svjetlosne zrake upadaju odozgo paralelno s osi. Gdje se formira slika vrlo udaljenog predmeta na optičkoj osi sustava?

Rezultat: $b_{s\,\text{pločice}} = 5$ cm od dna

**5.18.** Pravokutnik, čija je stranica duga 2 cm, leži duž optičke osi tanke konvergentne leće, čija je žarišna daljina 6 cm. Središte te stranice udaljeno je 10 cm od leće koja daje realnu uvećanu sliku pravokutnika. Odredite povećanje stranice.

Rezultat: $m = 2{,}4$

**5.19.** Odredite najmanju moguću udaljenost između predmeta i realne slike predmeta koju stvara tanka leća žarišne daljine 20 cm.

Rezultat: $D = 80$ cm



**5.20.** Izračunajte na kojoj udaljenosti od tanke leće žarišne daljine $f$ treba postaviti izvor svjetlosti tako da se udaljenost slike izvora razlikuje $p$ % od vrijednosti žarišne daljine $f$.

Rezultat: $a_1 = \dfrac{100 + p}{p} f$

$a_2 = \dfrac{p - 100}{p} f$

**5.21.** Dvije tanke konvergentne leće žarišne daljine $f_1$ i $f_2$ međusobno su udaljene za $d$. Na kojoj će udaljenosti od druge leće biti fokusiran paralelni snop zraka koji pada na prvu leću?

Rezultat: Na žarišnoj daljini sustava, tj. na udaljenosti $f = b_2 = \dfrac{f_2(f_1 - d)}{f_1 + f_2 - d}$.

**5.22.** Odredite žarišnu daljinu plankonveksne leće od flintskog stakla ($n = 1{,}62$) polumjera zakrivljenosti $r = 4{,}5$ cm i konkavnokonveksne leće od krunskog stakla ($n = 1{,}52$) ($r_1 = 4{,}5$ cm), $r_2 = 6{,}3$ cm). Kolika je žarišna daljina sustava od te dvije leće slijepljene zajedno?

Rezultat: $f = 16{,}6$ cm

# 6. FIZIKALNA OPTIKA

## 6.1. Uvod

Interferencija svjetlosnih valova znači slaganje, superponiranje dvaju ili više valova. Da bi se to moglo ostvariti, svjetlosnim valovima mora se prenositi koherentno, skladno titranje. Iz dva koherentna izvora šire se svjetlosni valovi s elongacijama (samo iznos vektora električnog polja):

$$E_1 = E_0 \sin\omega\left(t - \frac{nx_1}{c}\right) \tag{6.1}$$

$$E_2 = E_0 \sin\omega\left(t - \frac{nx_2}{c}\right), \tag{6.2}$$

gdje je $n$ indeks loma sredstva u kojem se šire valovi. Nakon prijeđenog puta $x_1$, odnosno $x_2$, valovi interferiraju, pa (rezultirajuća) elongacija ima oblik:

$$E_A = 2E_0 \cos\frac{\omega}{2c}(nx_2 - nx_1)\sin\left[\omega t - \frac{\omega}{2}\frac{n}{c}(x_1 + x_2)\right] \tag{6.3}$$

Razlika $nx_2 - nx_1$ je optička razlika u hodu koju valovi imaju na mjestu interferencije. Na tom se mjestu javlja svjetlo ako je

$$nx_2 - nx_1 = m\lambda, \tag{6.4}$$

dok je tama ako je

$$nx_2 - nx_1 = \frac{2m+1}{2}\lambda \qquad \text{za } m = 0, 1, 2, 3 \dots \tag{6.5}$$

Oznaka $\lambda$ je valna duljina svjetlosti.
U Youngovom pokusu točkasti izvor obasjava zaslon sa dvije rupice na malom razmaku $a$. Na zastoru udaljenom $d$ od izvora vide se svijetle i tamne interferencijske pruge. Svjetlo se pojavljuje ako je razlika u hodu cjelobrojni višekratnik valnih duljina, tj.

$$\frac{ay}{d} = m\lambda, \tag{6.6}$$



gdje je $y$ udaljenost interferencijske pruge od sredine zastora. To su nelokalizirane interferencijske pruge kao i, na primjer, u pokusu s Fresnelovom biprizmom, Lloydovim zrcalom ili Fresnelovim zrcalima.
Refleksijom svjetla na tankoj ploči debljine $d$ i indeksa loma $n$ dobiju se interferencijske pojave na velikoj udaljenosti. Svjetlo je pojačano ako je ispunjen uvjet:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 u} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{6.7}$$

gdje je $u$ upadni kut svjetlosne zrake.
Newtonova stakla se sastoje od ravne staklene ploče na koju je položena plankonveksna leća tako da izbočenom stranom dodiruje ploču. Debljina $d$ između stakala iznosi:

$$d \doteq \frac{r^2}{2R}, \tag{6.8}$$

gdje je $R$ polumjer sferne granice leće, a $r$ polumjer zakrivljenosti Newtonova kolobara (lokalizirana interferencijska pojava). Kolobar je svijetao ako je debljina između stakala:

$$d_s = \frac{2m-1}{4}\lambda \qquad \text{za } m = 1, 2, 3 \dots, \tag{6.9}$$

a taman ako je

$$d_t = \frac{m}{2}\lambda \qquad \text{za } m = 0, 1, 2, 3 \dots. \tag{6.10}$$

Kod Michelsonova interferometra dobiva se maksimum svjetla, ako je ispunjeno:

$$2(l_2 - l_1)\cos u = m\lambda, \tag{6.11}$$

gdje su $l_1$ i $l_2$ udaljenosti prvog, odnosno drugog zrcala od polupropusne pločice interferometra, dok je kut $u$ upadni kut svjetlosne zrake na zrcalo. Za $m = 1$ (prvi red) taj je kut praktično $\pi/2$.
Da bi se mogle ostvariti interferencijske pojave pomoću svjetlosnih valova, moraju biti ispunjeni uvjeti koherencije. Prema prvom uvjetu koherencije, dva će koherentna valna paketa interferirati ako je razlika u hodu $\Delta$ manja od koherentne duljine $\Lambda$, duljine valnog paketa, tj.

$$\Delta < \Lambda. \tag{6.12}$$

Izvori su konačnih dimenzija. Stoga će prema drugom uvjetu koherencije doći do stacionarne interferencijske pojave ako je ispunjeno:

$$2y \sin u \ll \lambda, \tag{6.13}$$

gdje je $y$ visina izvora, kut $u$ kut otvora, a $\lambda$ valna duljina svjetlosti.
Kod Fraunhoferova ogiba na pukotini intenzitet ogibne svjetlosti $I(\alpha)$ valne duljine $\lambda$ iznosi:

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right)^2}, \tag{6.14}$$

gdje je $\alpha$ kut ogiba, $I_0$ intenzitet za $\alpha = 0$, a $d$ širina pukotine.
Kod ogiba na dvije pukotine za intenzitet difraktirane svjetlosti vrijedi izraz:

$$I_D(\alpha) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\frac{\pi d}{\lambda}\sin^2\alpha}\right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi D}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\alpha\right)}\right]^2, \tag{6.15}$$

gdje je $D$ razmak između pukotina.
Kod optičke rešetke, s nizom od $N$ ekvidistantnih pukotina, intenzitet za kut ogiba $\alpha$ je:

$$I(\alpha) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin^2\alpha}\right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right)}\right]^2, \tag{6.16}$$

gdje je $b$ širina pukotine, a $d$ konstanta rešetke.
Glavni maksimumi svjetla zadovoljavaju uvjet:

$$d\sin\alpha = m\lambda \qquad \text{za} \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{6.17}$$

Moć razlučivanja rešetke:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}, \tag{6.18}$$

a disperzija ili razvučenost spektra

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\alpha}. \tag{6.19}$$

"Prirodna" svjetlost se potpuno polarizira refleksijom ako upadni kut $u_B$ zadovoljava Brewsterov zakon koji glasi:

$$\tan u_B = \frac{n_2}{n_1}, \tag{6.20}$$



gdje je $n_1$ indeks loma sredstva u kojem se širi upadna i reflektirana svjetlost, a $n_2$ je indeks loma sredtstva u kojem se širi lomljena svjetlost.
Polaroidi su filtri koji od upadne prirodne svjetlosti propuštaju linearno polariziranu svjetlost.
Dva polaroida u nizu, čije ravnine polarizacije zatvaraju kut $\varphi$, propuštaju svjetlost čiji se intenzitet mijenja prema Malusovu zakonu ($I = I_i\cos^2\varphi$).
Ako se između dva polaroida s paralelnim ravninama polarizacije umetne treći polaroid čija ravnina polarizacije zatvara kut $\varphi$ sa druge dvije ravnine, intenzitet svjetlosti na izlazu iz niza od tri polaroida mijenja se prema izrazu:

$$I = I_i\cos^4\varphi.$$

Ako se između dva polaroida s okomito postavljenim ravninama polarizacije umetne treći polaroid čija ravnina polarizacije zatvara kut $\varphi$ s ravninom prvog polaroida u nizu, intenzitet svjetlosti na izlazu iz niza mijenja se prema izrazu:

$$I = \frac{I_i}{4}\sin^2 2\varphi.$$

## 6.2. Primjeri

6.1. Izvor koherentne svjetlosti valne duljine 500 nm, postavljen je ispred zaslona sa dva mala proreza međusobno razmaknuta 2 mm. Izvor je jednako udaljen od oba proreza. Ako je zastor udaljen 14 m, izračunajte razmak između dvije susjedne svijetle pruge na zastoru.

***rješenje*** Ovdje je riječ o Youngovom pokusu. Geometrijska razlika hoda određena je samim eksperimentalnim podacima:

$$\Delta = \frac{ay}{d}, \tag{1}$$

gdje je $a$ razmak proreza, $d$ udaljenost između zaslona s prorezima i zastora, $y$ udaljenost između točke motrenja na zastoru i središnje točke gdje je razlika hoda nula.
Razmak između svijetlih pruga interferencije u Youngovu pokusu je:

$$y_\lambda = \frac{d\lambda}{a}, \tag{2}$$

gdje je $\lambda$ valna duljina svjetlosti. Na osnovi podataka slijedi prema (2):

$$y_\lambda = \frac{14\cdot 500\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-3}}\ \mathrm{m} = 3{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

[illegible] U Youngovu pokusu natrijeva svjetlost ($\lambda$ = 589,3 nm) pokazuje 6 interferencijskih pruga u jednom centimetru. Koliko iznosi valna duljina svjetlosti koja pokazuje 8 pruga u jednom centimetru?

***rješenje*** Razmak između interferencijskih pruga je mjera njihove gustoće po jedinici duljine. Budući da se upotrebljava ista aparatura, valja sukcesivno primijeniti formulu za razmak interferencijskih pruga za natrijevu svjetlost

$$y_{Na} = \frac{d\lambda_{Na}}{a} \quad \text{i} \quad y_\lambda = \frac{d\lambda}{a} \tag{1}$$

za nepoznatu valnu duljinu $\lambda$. Postavimo omjer $\lambda/\lambda_{Na}$ iz (1):

$$\frac{\lambda}{\lambda_{Na}} = \frac{y_\lambda}{y_{Na}} . \tag{2}$$

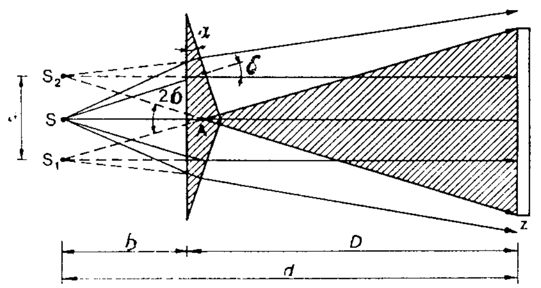
Budući da je broj pruga obratno proporcionalan razmaku, to je:

$$\lambda = \lambda_{Na}\frac{y_\lambda}{y_{Na}} = \lambda_{Na}\cdot\frac{n_{Na}}{n_\lambda} = 589{,}3\cdot\frac{6\,\text{cm}^{-1}}{8\,\text{cm}^{-1}}\,\text{nm} = 442\,\text{nm} ,$$

gdje je $n$ broj pruga na jednom centimetru duljine.

**6.3.** Interferencijske pruge, čiji razmak iznosi 0,55 mm, dobivene su pomoću Fresnelove biprizme na zastoru udaljenom 1 m od biprizme. Kolika je udaljenost izvora svjetlosti od biprizme ako je oštri kut biprizme 20′, indeks loma biprizme 1,5, a valna duljina svjetlosti 0,64 μm.

***rješenje*** Snop svjetlosti iz izvora $S$ podijeljen je biprizmom na dva snopa koja se djelomično prekrivaju, a budući da su ti valovi koherentni, na zastoru će se pojaviti interferencijske pruge. Koherentni virtuelni izvori $S_1$ i $S_2$ dobiveni biprizmom od realnog izvora $S$ prikazani su na slici 6.1. Budući da je ovaj slučaj analo-




Slika 6.1.

gan Youngovu pokusu, to za širinu interferencijskih pruga možemo primijeniti Youngovu relaciju

$$\Delta y = \frac{d\lambda}{a} , \tag{1}$$

gdje je $\Delta y$ širina interferencijskih pruga, $d$ udaljenost od izvora do zastora, a $a$ udaljenost između koherentnih izvora.

Za male oštre kutove prizme devijacija zraka kroz prizmu praktički je jednaka minimalnom kutu devijacije, tako da je devijacija kroz prizmu dana relacijom

$$\delta = (n-1)\alpha , \tag{2}$$



gdje je $n$ indeks loma prizme, a $\alpha$ oštri kut prizme. Na slici 6.1. se vidi da je $\sphericalangle S_1AS_2$ jednak $2\delta$, i da je udaljenost između virtuelnih izvora

$$a \simeq 2b\delta , \tag{3}$$

gdje je $b$ udaljenost izvora $S$ od biprizme. Označimo li sa $D$ udaljenost od biprizme do zastora, tada vrijedi

$$d = b + D . \tag{4}$$

Uvrštavanjem (3), (4) i (2) u (1) dobivamo

$$\Delta y = \frac{(b+D)\lambda}{2b(n-1)\alpha} . \tag{5}$$

Iz (5) dobivamo izraz za $b$

$$b = \frac{D\lambda}{2(n-1)\alpha(\Delta y) - \lambda} . \tag{6}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina u (6) dobivamo $b = 0{,}25$ m.

**6.4.** Izvor svjetlosti udaljen je 10 cm od spojišta Fresnelovih zrcala, a udaljenost zastora je 270 cm. Izvor daje monokromatsku svjetlost valne duljine 0,6 μm. Razmak interferencijskih pruga na zastoru je 0,29 cm. Odredite kut koji zatvaraju Fresnelova zrcala.

***rješenje*** Izvor svjetlosti u točki $I$ udaljen je za $r$ od spojišta zrcala, $I_1$ i $I_2$ su slike izvora. Interferencijska slika nastaje na zastoru Z. U točki M na zastoru intenzitet svjetlosti bit će maksimalan ako je

$$d_2 - d_1 = m\lambda . \tag{1}$$

Iz geometrije je:

$$d_1^2 = D^2 + (s-a)^2 \tag{2}$$

$$d_2^2 = D^2 + (s+a)^2 \tag{3}$$

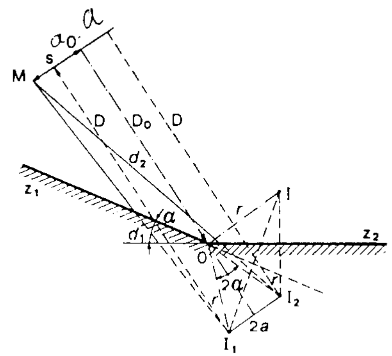
$$d_2^2 - d_1^2 = 4\,sa .$$

Možemo aproksimirati:

$$d_1 + d_2 \approx 2D \tag{4}$$

$$d_2 - d_1 \approx \frac{2sa}{D} \tag{5}$$

$$\frac{2sa}{D} = m\lambda . \tag{6}$$




Slika 6.2.

Razmak između dva susjedna maksimuma je

$$\Delta s = \frac{D\lambda}{2a} . \tag{7}$$

Zakretanjem zrcala $Z_1$ za kut $\alpha$, odbijena zraka zakrenut će se za $2\alpha$, što znači da je $\sphericalangle OI_1I_2$ jednak $2\alpha$. Možemo pisati:

$$2a = 2r\sin\alpha \tag{8}$$

$$D = D_0 + r\cos\alpha\,. \tag{9}$$

Za male kutove vrijedi:

$$a \approx r\alpha\,, \qquad D \approx D_0 + r$$

$$\Delta s = \frac{D_0 + r}{2r\alpha}\lambda \tag{10}$$

$$\alpha = \frac{D_0 + r}{2\Delta s r}\lambda \tag{11}$$

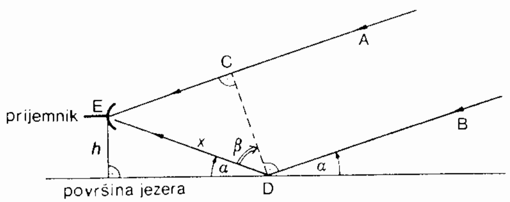
$$\alpha = 3\cdot 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$\alpha = 10'\,.$$

**6.5.** Na čvrstoj platformi smještenoj 1,5 m iznad površine jezera nalazi se mikrovalni prijamnik. Odašiljač koji emitira monokromatske valove valne duljine 25 cm, pomičan je i kontinuirano se može dizati iznad horizonta – površine jezera. Prijamnik, stoga, otkriva uzastopne minimume i maksimume intenziteta signala koje emitira udaljeni odašiljač. Odredite kut $\alpha$ iznad površine jezera na kojem bi morao biti odašiljač da bi prijamnik registrirao prvi maksimum.

(*Uputa:* uračunajte refleksiju elektromagnetskog vala od površine jezera.)

***rješenje*** Prijamnik prima izravni (zraka A) i reflektirani (zraka B) val. Geometrijsku razliku putova zrake A i B prikazuje slika 6.3.




Slika 6.3.

Prema slici 6.3. vidimo da je

$$\overline{DE} = x = \frac{h}{\sin\alpha} \tag{1}$$

i da geometrijska razlika hoda zrake A i B iznosi:

$$\Delta = \overline{DE} - \overline{CE} = x - x\cdot\sin\beta = x(1-\sin\beta)\,. \tag{2}$$

Kut $\beta$ može se odrediti s obzirom na suplementarnost kutova oko točke $D$:

$$2\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \quad \text{i} \quad \beta = 90^\circ - 2\alpha\,. \tag{3}$$



Nadalje, zraka B se na svome putu odbija od površine jezera (gušće sredstvo), pa ima skok u fazi za $\pi$ (ili $\lambda/2$). Ukupna razlika u fazi, prema tome, uključujući relaciju (1) i (2) i (3), jest:

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = k\cdot\Delta + \pi$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{h}{\sin\alpha}[1-\sin(90^\circ - 2\alpha)] + \pi\,,$$

odnosno

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = \frac{2\pi h}{\lambda\sin\alpha}(1-\cos 2\alpha) + \pi\,. \tag{4}$$

Izraz (4) može se preurediti u:

$$\varphi = \pi + \frac{2\pi h}{\lambda\sin\alpha}(2\sin^2\alpha)$$

$$\varphi = \pi + \frac{4\pi h}{\lambda}\sin\alpha\,.$$

Kada je $\alpha \approx 0$, $\varphi \approx \pi$, što će pri detekciji davati minimum signala. Dizanjem odašiljača povećava se $\alpha$, pa će prijamnik otkrivati maksimume. Prema relaciji $\varphi = 2\pi m$ $m = 1,2,3\ldots$ prvi će se maksimum javiti onda kada razlika u fazi postane $2\pi$.

Slijedi da se prvi maksimum otkriva kada kut $\alpha$ iznad površine jezera iznosi:

$$2\pi = \pi + \frac{4\pi h}{\lambda}\cdot\sin\alpha \quad \text{i} \quad \sin\alpha = \frac{\lambda}{4h}\,. \tag{5}$$

Prema podacima, najmanji $\alpha$ za prvi maksimum je

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{0{,}25}{4\cdot 1{,}5}\right) = 2{,}4^\circ\,.$$

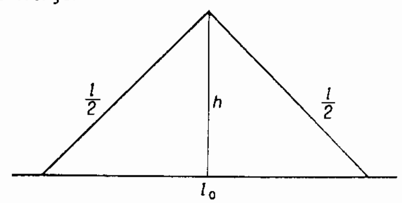
**6.6.** Prijamnik radio–valova prima istodobno dva signala od odašiljača udaljenog 500 km: jedan izravno, a drugi nakon refleksije na sloju u atmosferi. Kad je frekvencija valova 100 MHz, jakost signala prolazi kroz maksimum, minimum i dolazi do maksimuma 8 puta u minuti. S kolikom se brzinom u vertikalnom smjeru kreće reflektirajući sloj? Sloj se nalazi na visini 200 km.

***rješenje*** Brzina reflektirajućeg sloja prema slici 6.4. je:

$$v = \frac{dh}{dt}\,,$$

a kako je geometrijska razlika hoda

$$\Delta r = l - l_0 = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2} - l_0\,,$$




Slika 6.4.

dobijemo za razliku faza

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left[2\sqrt{h^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2} - l_0\right] + \pi$$

zbog refleksije

iz koje deriviranjem po vremenu dobijemo

$$\frac{d}{dt}\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{h}{\sqrt{h^2+\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}}\cdot\frac{dh}{dt} = \omega = 2\pi\nu\,,$$

odnosno

$$v = \frac{dh}{dt} = \left[\frac{4\pi}{\lambda}\frac{h}{\sqrt{h^2+\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}}\right]^{-1}\cdot 2\pi\nu = 0{,}320\ \mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

**6.7.** Odredite položaj prvog i drugog minimuma i prvog i sporednog maksimuma pri interferenciji 4 koherentna izvora svjetlosti udaljenih jedan od drugog za $\frac{\lambda}{2}$.

***rješenje*** Rezultantni je intenzitet:

$$I = I_0\frac{\sin^2 4z}{\sin^2 z}\,,$$

gdje je

$$z = \frac{\pi d\sin\vartheta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}\sin\vartheta$$

kao drugi faktor u izrazu (6.16).
Za $z = 0$ centralni maksimum $I = 16I_0$

$$z = \frac{\pi}{4}\quad \text{prvi minimum,}\quad \vartheta = 30^\circ$$

$$z = 2\frac{\pi}{4}\quad \text{drugi minimum,}\quad \vartheta = 90^\circ$$

Prvi sporedni minimum je između $z = \frac{\pi}{4}$ i $z = 2\frac{\pi}{4}$.
Maksimum izraza za $I$ dobivamo izjednačavajući prvu derivaciju s nulom:

$$\frac{dI}{dz} = 0$$

$$4\tan z = \tan 4z\,.$$

Tu jednadžbu možemo riješiti numerički ili grafički. Dobivamo da je za $z = 1{,}150\,26$, $\tan z = 2{,}236\,1$ i $\tan 4z/4 = 2{,}36$, tj. da je rješenje jednadžbe $z = 1{,}150\,2$.
Prvi sporedni maksimum za $z$ je

$$z = \frac{\pi}{2}\sin\vartheta = 1{,}150\,26\,,$$

odakle je

$$\sin\vartheta = 0{,}732\,28\,,\qquad \vartheta = 47^\circ\,.$$

Intenzitet je tog maksimuma

$$I = I_0\frac{\sin^2 4\cdot 1{,}150\,26}{\sin^2 1{,}150\,26}\ 1{,}185\,I_0\,.$$



Omjer centralnog i prvoga sporednog maksimuma je

$$\frac{I}{I_1} = 13{,}5\,.$$

**6.8.** Sustav od $N$ identičnih antena poredanih po pravcu, međusobno udaljenih za $\lambda/4$, emitira koherentne elektromagnetske valove. Fazna razlika između valova iz dviju susjednih antena je $\frac{\pi}{2}$. Kakva je rezultantna raspodjela intenziteta?

***rješenje*** Fazna razlika valova koji dolaze u neku točku prostora iz dviju susjednih antena udaljenih za $d$ je:

$$\varphi = kd\sin\vartheta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(\sin\vartheta + 1)\,.$$

Rezultantni intenzitet je prema primjeru 6.7.

$$I = I_0\frac{\sin^2\left[\frac{N\pi(1+\sin\vartheta)}{4}\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi(1+\sin\vartheta)}{4}\right]}\,.$$

Jedini jaki maksimum intenziteta je za $\varphi = 0$, tj. $= \vartheta = \frac{\pi}{2}$ i iznosi $N^2 I_0$. Gotovo je sva snaga usmjerena u tom pravcu, pogotovu ako je puno izvora, tj. ako je $N$ velik.

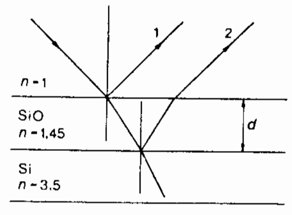
**6.9.** Na solarne ćelije često se stavlja tanki prozirni film od npr. SiO ($n = 1{,}45$) da bi se minimizirali gubici refleksijom. Time se povećava efikasnost ćelija, jer ima više svjetlosti (fotona) koji stvaraju nosače naboja u ćelijama. Za solarnu ćeliju od silicija ($n_{Si} = 3{,}5$) valja odrediti minimalnu debljinu filma koji će dati najmanje refleksije za valnu duljinu sredine vidljivoga dijela spektra, tj. $\lambda = 550$ nm.

***rješenje*** Refleksija će biti minimalna kada zrake **1** i **2** (sl. 6.5) ispunjavaju uvjet destruktivne interferencije. Važno je uočiti da i kod zrake **1** i kod zrake **2** dolazi do promjene u fazi za $\pi/2$ (za razliku od interferencije na tankom listiću u zraku). Onda je geomtrijska razlika hoda $2d$, (minimalna) optička razlika hoda $2nd$, a uvjet za minimum

$$\delta = 2nd = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

daje (za $k = 0$)

$$d = \frac{\lambda}{4n} = 94{,}8\ \mathrm{nm}\,.$$




Slika 6.5.

**6.10.** Na staklenu planparalelnu pločicu, čiji je indeks loma 1,5, upada svjetlost valne duljine $6\cdot 10^{-7}$ m, pod kutom 45°. Stupanj monokromatičnosti svjetlosti iznosi $\Delta\lambda = 5\cdot 10^{-10}$m. Pri kojoj se maksimalnoj debljini pločice još može primijetiti interferencija u reflektirajućoj svjetlosti?

***rješenje*** Za interferencijski maksimum na staklenoj tankoj planparalelnoj pločici vrijedi

$$2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda\,. \tag{1}$$

Nije li svjetlost monokromatska, kutna širina $\Delta\alpha$ $m$-tog maksimuma interferencije dobije se diferenciranjem gornjeg izraza

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\right)\Delta\alpha = \left(m+\frac{1}{2}\right)\Delta\lambda \tag{2}$$

$$\Delta\alpha = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\Delta\lambda}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\right)} \tag{3}$$

Kutni razmak $\delta\alpha$ između susjednih maksimuma kod monokromatske svjetlosti dobije se također diferenciranjem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,2d\left(\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\right)\delta\alpha = \lambda\delta m\,. \tag{4}$$

Za susjedne maksimume ($\delta m = 1$)

$$\delta\alpha = \frac{\lambda}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\right)} \tag{5}$$

Da bi se interferencija mogla primijetiti, mora biti ispunjen uvjet

$$|\Delta\alpha| < |\delta\alpha|\,, \tag{6}$$

odnosno

$$\left(m+\frac{1}{2}\right) < \frac{\lambda}{\Delta\lambda}\,,$$

iz čega se za maksimalnu debljinu pločice kod koje se još može primijetiti interferencija, dobije

$$\alpha \le \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\,, \tag{7}$$

odnosno za maksimalnu debljinu

$$d_{\text{maks.}} = 0{,}27\ \text{mm}\,.$$

**6.11.** U pokusu s Michelsonovim interferometrom pomakne se interferencijska slika za 450 pruga, ako se krak jednog zrcala produlji za 0,160 mm. Nađite valnu duljinu upadne svjetlosti.

***rješenje*** Produljenje kraka zrcala za $l = \lambda/2$ odgovara promjeni razlike u hodu za $\lambda$, tj. pomak interferencijske slike za jednu prugu. Zato se iz $l = m\,\frac{\lambda}{2}$, gdje je $m$ broj promatranih pruga u vidnom polju, dobiva traženo

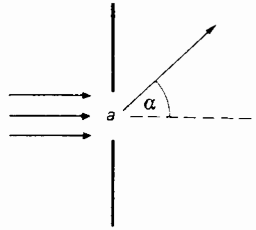
$$\lambda = \frac{2l}{m} = \frac{2\cdot 0{,}160}{450}\cdot 10^{-3}\ \text{m} = 7{,}111\cdot 10^{-7}\ \text{m}\,.$$



**6.12.** **a)** Odredite položaj minimuma i prva tri maksimuma pri Fraunhoferovom ogibu na pukotini širine $d$.
**b)** Koliki je omjer intenziteta prvoga sekundarnog i centralnog maksimuma?

***rješenje*** **a)** Raspodjela intenziteta pri ogibu na pukotini (sl. 6.6.a) dana je, kao u (6.14), izrazom

$$I = I_0\,\frac{\sin^2\left(\frac{kd\sin\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{kd\sin\alpha}{2}\right)^2} = I_0\,\frac{\sin^2 y}{y^2}$$



Slika 6.6.a.

Uvjet za minimum je:

$$\sin^2 y = 0, \qquad y = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

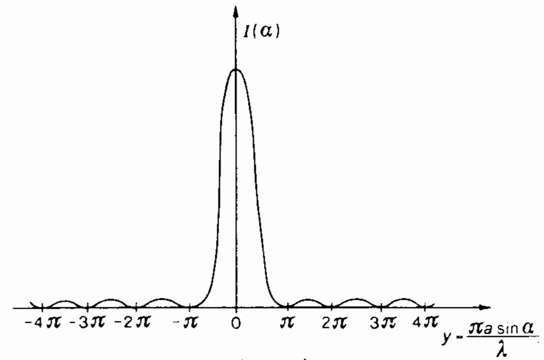
Ako je $y = 0$, primjenom l'Hopitalova pravila dobivamo $I = I_0$. To je centralni i najjači maksimum.
Položaj sekundarnih maksimuma dobivamo traženjem ekstrema funkcije, tj. izjednačavanjem derivacije s nulom:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}y} = 0$$

$$\tan y = y,$$

Rješenje te jednadžbe dobivamo tako da uvrštavamo vrijednosti oko $1{,}5\,\pi$, jer je prvi sekundarni maksimum između prvog i drugog minimuma, dakle za $y \approx 3\pi/2$.
Na taj način dobivamo:

$$y_1 = \pm 1{,}43\pi, \quad y_2 = \pm 2{,}459\pi, \quad y_3 = \pm 3{,}471\pi, \quad y_4 = \pm 4{,}478\pi, \quad \text{itd.}$$



Slika 6.6.b.

**b)** Intenzitet prvoga sekundarnog maksimuma je:

$$I_1 = I_0\,\frac{\sin^2 y_1}{y_1^2} = I_0\,\frac{\sin^2 1{,}43\pi}{(1{,}43\pi)} = 0{,}0472\,I_0.$$

Na sl. 6.6.b prikazana je raspodjela intenziteta pri Fraunhoferovu ogibu na jednoj pukotini.

**6.13.** Ravni monokromatski val duljine $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m upada okomito na ravninu pukotine širine $d = 10^{-2}$ mm. Odredite kutni položaj prvoga difrakcijskog maksimuma.

***rješenje*** Za prvi difrakcijski maksimum vrijedi

$$d \sin\alpha = 3\,\frac{\lambda}{2},$$

odnosno

$$\alpha = \arcsin\frac{3\lambda}{2d}, \qquad \alpha = 4°18'.$$

Točniji rezultat može se dobiti pomoću formule

$$I = I_0\,\frac{\sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda} d\sin\alpha\right]}{\left[\frac{\pi}{\lambda} d\sin\alpha\right]^2}$$

derivacijom po $\alpha$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = I_0\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right)\frac{\pi}{\lambda}d\cos\alpha\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right)^2}{\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right)^4} - \frac{2\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right)\frac{\pi}{\lambda}d\cos\alpha\sin^2\alpha\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right)^4}\right],$$

odakle se za ekstreme dobije

$$\tan\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha\right) = \frac{\pi}{\lambda}d\sin\alpha$$

koje se, ako se uvede oznaka

$$m = \frac{d}{\lambda}\sin\alpha,$$

može napisati u obliku

$$\tan\pi m = \pi m.$$

Rješenja ove jednadžbe jesu:

$$m_1 = 1{,}43 \qquad m_2 = 2{,}46 \qquad m_3 = 3{,}47\ldots,$$

odakle se za prvi difrakcijski maksimum dobiva

$$\alpha = \arcsin\frac{1{,}43\lambda}{d} = 4°6'.$$

**6.14.** Odredite veličinu rupice na kameri s otvorom koja na zastoru daje najoštriju sliku vrlo udaljene zvijezde koja isijava svjetlost valne duljine $\lambda$. Udaljenost rupice i zastora u kameri neka je $a$. Ako je svjetlost zvijezde vidljiva ($\lambda = 500$ nm) i $a = 10$ cm, koliki mora biti promjer rupice?

(Uputa: zbog ogiba na rupici, slika nije jednaka geometrijskom otvoru rupice.)



***rješenje*** Promjer rupice na kameri označimo sa $d$. Kada ne bi bilo ogiba, vrlo udaljena zvijezda (točkasti izvor) na zastoru dala bi sliku – mrlju, veličinom jednaku promjeru rupice $d$. Promotrimo utjecaj ogiba. Snop zraka koje dolaze usporedno od točkastog izvora ogiba se na otvoru kamere, pa nastaje svežanj snopova. Ogibom, dakle, dolazi do karakterističnog proširenja slike. Uvjet za minimum intenziteta pri ogibu glasi:

$$d\sin\Delta\alpha = m\lambda, \qquad m \neq 0, \qquad m = \pm1, \pm2, \ldots \tag{1}$$

Za $m = 1$ (prvi minimum) i $\sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$, dobiva se najmanji razlučivi kut $\Delta\alpha$ pri ogibu svjetlosti valne duljine $\lambda$:

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{d} \tag{2}$$

Međutim, za svjetlost koja dolazi iz točkastog izvora postavljenog u neizmjernosti i koja pada na kružni otvor promjera $d$, najmanji razlučivi kut dan je donekle drukčijom formulom (G. Airy):

$$\Delta\alpha = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d}. \tag{3}$$

Ako je $a$ udaljenost između otvora i zastora, proširenje slike se može izraziti trigonometrijski

$$y = a\cdot\tan\Delta\alpha = 1{,}22\cdot\frac{a\lambda}{d}. \tag{4}$$

Ukupna veličina slike – mrlje je:

$$Y = d + 2y = d + 2{,}44\,\frac{a\lambda}{d}. \tag{5}$$

Zahtjev za najoštriju sliku razumijeva i najmanji $Y$, pa iz uvjeta za minimum

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}d} = 1 - 2{,}44\,\frac{a\lambda}{d^2} = 0 \tag{6}$$

dobivamo

$$d = \sqrt{2{,}44\,\lambda a} \tag{7}$$

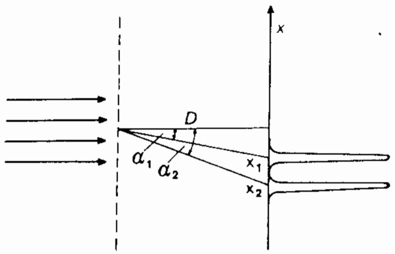
Za danu svjetlost, $\lambda = 500$ nm i aparaturu, $a = 10$ cm slijedi

$$d = \sqrt{2{,}44\cdot 500\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}\cdot 0{,}1\ \mathrm{m}} = 0{,}35\ \mathrm{mm}.$$

**6.15.** Optička rešetka koja ima 250 zareza po milimetru duljine osvijetljena je snopom bijele svjetlosti, koji pada okomito na nju. Udaljenost rešetke od zastora je 1,5 m. Kolika je širina tamne pruge na zastoru između spektra prvog i drugog reda ako je valna duljina crvene svjetlosti 760 nm, a ljubičaste 400 nm?

***rješenje*** Širinu tamne pruge možemo izračunati kao udaljenost između dvaju vrlo uskih maksimuma u spektru prvog i drugog reda (sl. 6.7). Maksimum intenziteta svjetlosti na zastoru dobije se kad je ispunjen uvjet:

$$d \sin\alpha = m\lambda \qquad (1)$$




Slika 6.7.

Vrijedi:

$$d \sin\alpha_1 = \lambda_1 \quad \text{za crvenu svjetlost} \quad (2)$$

$$d \sin\alpha_2 = 2\lambda_2 \quad \text{za ljubičastu svjetlost} \quad (3)$$

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{\lambda_1}{d}$$

$$\alpha_2 = \arcsin\frac{2\lambda_2}{d}\,.$$

Za male kutove vrijedi aproksimacija $\sin\alpha \approx \tan\alpha$. Iz geometrije je:

$$\tan\alpha = \frac{x}{D}\,, \qquad (4)$$

$$x_1 = D\tan\alpha_1\,,$$

$$x_2 = D\tan\alpha_2\,.$$

Širina tamne pruge između spektara prvog i drugog reda je:

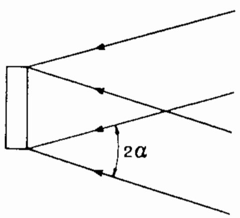
$$x_2 - x_1 = D(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1) \qquad (5)$$

$$x_2 - x_1 = 15\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}\,.$$

**6.16.** Uobičajeni je način dobivanja holografske rešetke osvjetljavanje fotografske ploče postavljene u polje interferencijskih pruga dobivenih slaganjem dvaju ravni monokromatskih i koherentnih ravnih svjetlosnih valova. Odredite konstantu rešetke ako se snima sa svjetlosti čija je valna duljina 632,8 nm (Ne, He–laser), a zrake koje se presijecaju zatvaraju kut $2\alpha = 60°$. Koliko crta ima ta rešetka po milimetru duljine?

***rješenje*** Konstanta rešetke $d$ dobiva se iz zakona o interferenciji dviju susjednih svjetlosnih zraka:

$$d\sin\alpha = \frac{\lambda}{2}\,,$$




Slika 6.8.

gdje je $\lambda$ valna duljina svjetlosti iz lasera, koje se optičkim putem dijeli na dva snopa, a $\alpha$ polovica kuta dviju zraka koje se sijeku:

$$d = \frac{\lambda}{2}\,\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{632{,}8\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}{2\cdot 0{,}5} = 6{,}328\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

$$d = 6{,}328\cdot 10^{-4}\ \mathrm{mm}\,,$$

pa je rešetka sa 1 580 crta po milimetru.

**6.17.** Optička rešetka konstante $d$ ima $N$ pukotina, svaka širine $a$. Koji uvjet mora biti ispunjen da se u ogibnoj slici rešetke ne vidi maksimum petog reda?



***rješenje*** Rezultantni intenzitet za optičku rešetku je:

$$I = I_0\,\frac{\sin^2 Nz}{\sin^2 z}\,\frac{\sin^2 y}{y^2}\,,$$

gdje je

$$z = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha \qquad y = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha\,.$$

Uvjet za glavni maksimum $m$-tog reda (sl. 6.8) je

$$d\sin\alpha = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2\ldots$$

Ako nedostaje maksimum za $n = 5$, tada je maksimum petog reda zbog interferencije na $N$ pukotina upravo na mjestu gdje je i prvi minimum ogiba na pukotini širine $a$, pa je

$$d\sin\alpha = 5\lambda\,,$$

$$a\sin\alpha = \lambda\,,$$

To je ispunjeno ako je

$$\frac{d}{a} = 5\,.$$

**6.18.** Optička rešetka ima 500 ekvidistantnih pukotina. Razmak pukotina je $10^{-5}$ m.

a) Odredite kutnu širinu centralnog i prvog maksimuma kada monokromatska svjetlost valne duljine 580 nm upada na rešetku.

b) Kolika je rezolucija rešetke?

c) Može li rešetka razdvojiti natrijev dublet?

d) Kolika je kutna disperzija rešetke?

***rješenje*** a) Intenzitet svjetlosti nakon interferencije i ogiba na rešetki je

$$I = I_0\,\frac{\sin^2 Nz}{\sin^2 z}\,\frac{\sin^2 y}{y^2}\,,$$

gdje je

$$z = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha \qquad y = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha\,.$$

Položaj glavnih maksimuma određen je uvjetom

$$d\sin\alpha = m\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Centralni se maksimum proteže od prvog minimuma na jednoj strani ($Nz = -\pi$) do prvog minimuma na drugoj strani ($Nz = \pi$), dakle na kutnoj širini

$$\Delta z = \frac{2\pi}{N}\,.$$

Budući da je

$$z = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\,,$$

to je

$$\Delta(\sin\alpha) = \frac{\lambda}{\pi d}\frac{2\pi}{N} = \frac{2\lambda}{Nd}$$

$$\Delta(\sin\alpha) = \cos\alpha\,\Delta\alpha \quad\Rightarrow\quad \Delta\alpha = \frac{2\lambda}{Nd\cos\alpha}.$$

Za centralni je maksimum ($\alpha = 0$)

$$\Delta\alpha = \frac{2\lambda}{Nd} = 2{,}36\cdot 10^{-4}.$$

Za prvi je maksimum (za spektar prvog reda)

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d} = 5{,}89\cdot 10^{-2}$$

$$\Delta\alpha = 2{,}36\cdot 10^{-4}.$$

b) Da bi rešetka razlučila valne duljine $\lambda$ i $\lambda + \Delta\lambda$, svaka kutna širina $\Delta\alpha$, mora kutni razmak među prugama biti veći od pola njihove kutne širine $\Delta\alpha$ (Rayleighov kriterij)

$$\Delta\alpha_{\min} \geq \frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\lambda}{Nd\cos\alpha}.$$

Iz

$$d\sin\alpha = m\lambda$$

izlazi

$$\Delta\alpha_{\min} = \frac{m\Delta\lambda}{d\cos\alpha}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \geq \frac{1}{Nm}.$$

Rezolucija je

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \geq Nm.$$

c) Za promatranu rešetku dobivamo

$$m = 1, \quad R = 500$$

$$m = 2, \quad R = 1\,000 \qquad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}{0{,}6\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 982.$$

Rešetka će moći razlučiti dublet tek u spektru drugoga reda.

d) Kutna disperzija rešetke definirana je ovim izrazom:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\alpha}$$

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} \doteq 10^{5}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

**6.19.** Izračunajte širine natrijevih linija u spektru koji se dobiva pomoću optičke rešetke sa 500 zareza u 1 mm. Duljina rešetke je 6 mm. Valna duljina natrijeve svjetlosti koja okomito upada na rešetku je $5{,}9\cdot 10^{-7}$ m.
(*Uputa*: širina linije je razmak između dvaju najbližih minimuma na rubu maksimuma za spektar danog reda.)



***rješenje*** Kutna raspodjela intenziteta koja nastaje zbog interferencije difraktiranih svjetlosnih valova na optičkoj rešetki jest:

$$I = I_0\,\frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \tag{1}$$

gdje je razlika faze $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$, uz karakteristično geometrijsko zaostajanje $\delta = d\sin\alpha$ između zraka koje dolaze iz susjednih pukotina. $N$ je ukupni broj pukotina u rešetki.

Najprije odredite najveći mogući red spektra koji daje rešetka:

$$d\sin\alpha = m\lambda. \tag{2}$$

Za $\lambda = 5{,}9\cdot 10^{-7}$ m i $\alpha = 90°$, slijedi

$$d = \frac{1}{500\cdot 10^{3}\ \mathrm{m}^{-1}}, \qquad m = \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{500\cdot 10^{3}\ \mathrm{m}^{-1}\cdot 5{,}9\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}} = 3{,}39 \tag{3}$$

Najveći red spektra je $m = 3$. Širina spektralne linije definira se kao kutni razmak između najbližih minimuma na rubu maksimuma u spektru danog reda, pa zato razradite formulu (1). Zahtjev za iščezavanjem (minimumom) u jednadžbi (1) nalaže:

$$\frac{N\varphi}{2} = k\pi \qquad \text{za} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

odnosno

$$d\sin\alpha = \frac{k}{N}\lambda. \tag{5}$$

Prema (5) vidimo da se minimumi javljaju za:

$$k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{ali} \qquad k \neq N, 2N, 3N, \ldots, \tag{6}$$

dok se glavni maksimumi javljaju za:

$$k = N, 2N, 3N, \ldots. \tag{7}$$

Na osnovi relacija (6) i (7) zasnivamo oznake za linije u spektru prvog, drugog i $m$-tog reda, općenito:

| | Spektar 1. reda | Spektar 2. reda | Spektar $m$-tog reda |
|---|---|---|---|
| Glavni maksimum | $k_{\text{maks.}} = N$ | $k_{\text{maks.}} = 2N$ | $k_{\text{maks.}} = mN$ |
| Lijevi minimum | $k'_{\text{min.}} = N - 1$ | $k'_{\text{min.}} = 2N - 1$ | $k'_{\text{min.}} = mN - 1$ |
| Desni minimum | $k''_{\text{min.}} = N + 1$ | $k''_{\text{min.}} = 2N + 1$ | $k''_{\text{min.}} = mN + 1$ |

Izvedimo jednadžbu za širinu spektralne linije u spektru 1. reda. Iz relacije (5) dobivamo:

$$\begin{aligned} d\sin\alpha' &= \frac{N-1}{N}\lambda \\ d\sin\alpha'' &= \frac{N+1}{N}\lambda. \end{aligned} \tag{8}$$

Oduzmemo li prvu od druge jednadžbe u (8), dobili smo

$$d(\sin\alpha'' - \sin\alpha') = \frac{2}{N}\,\lambda \tag{9}$$

Trigonometrijskim pretvorbama relaciju (9) prevodimo u:

$$d\cos\alpha = \frac{2\lambda}{N\Delta\alpha}\,, \tag{10}$$

gdje su $\alpha = \dfrac{\alpha' + \alpha''}{2}$ i $\Delta\alpha = \alpha'' - \alpha'$.

Za spektar prvog reda, $m = 1$, $d\sin\alpha = \lambda$, pa relacija (10) daje kutnu širinu spektralne linije $\Delta\alpha$

$$\Delta\alpha = \frac{2\lambda}{Nd\cos\alpha} = \frac{2\lambda}{Nd\sqrt{1-\dfrac{\lambda^2}{d^2}}} = \frac{2}{N}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{d^2}{\lambda^2}-1}}\,, \tag{11}$$

gdje smo uračunali transformaciju $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{\lambda^2}{d^2}}$. Poopćenjem relacije (11), dobivamo izraz za širinu spektralne linije u spektru $m$-tog reda:

$$\Delta\alpha = \frac{2}{N}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{d^2}{\lambda^2}-m^2}}\,. \tag{12}$$

Relacija (3) dopušta najveći red spektra $m = 3$. Izračunajmo, stoga, kutne širine primjenom relacije (12) za $m = 1$, $m = 2$ i $m = 3$,

$N = 500\,\mathrm{mm}^{-1}\cdot 6\,\mathrm{mm} = 3\,000\,\mathrm{zareza}$, $\quad d = 0{,}2\cdot10^{-5}\,\mathrm{m}$, $\quad \lambda = 5{,}9\cdot10^{-7}\,\mathrm{m}$,

| $m = 1$ | $m = 2$ | $m = 3$ |
|---|---|---|
| $\Delta\alpha_1 = 0{,}012°$ | $\Delta\alpha_2 = 0{,}014°$ | $\Delta\alpha_3 = 0{,}024°$ |

**6.20.** Na ogibnu rešetku urezano je $N$ pukotina tako da je veličina svake pukotine jednaka upravo polovici širine prethodne pukotine. Međurazmak pukotina je stalan i iznosi $d$. Izračunajte kutnu raspodjelu intenziteta za svjetlost valne duljine koja okomito (u)pada na rešetku. Napišite rješenje za poseban slučaj kada rešetka ima 50 pukotina i međurazmak $1{,}5\cdot10^{-4}$ cm, za svjetlo valne duljine 600 nm.

***rješenje*** Promatrajmo pojavu na dvije susjedne pukotine, prema slici 6.9.

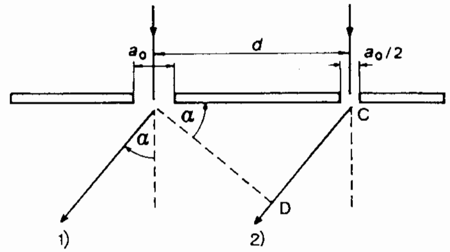
$a_0$ = širina pukotine

$d$ = međurazmak pukotina

$a_N = \dfrac{a_0}{2^{(N-1)}}$, širina $N$-te pukotine

Pod kutem $\alpha$ ogibaju se dva snopa svjetlosnih valova, (1) i (2), a ono što motrimo je interferencija tih valova. Uz interferenciju, dakako, postoji i ogib na svakoj pukotini, tako da se realno motre obje pojave.






Slika 6.9.

Neka je amplituda svjetlosti koja dolazi iz prve pukotine $A_1$, a iz druge $A_2$. Gledajući pukotine neovisno, amplitude se odnose kao

$$A_2 = \frac{1}{2}\,A_1\,, \tag{1}$$

jer je druga pukotina za polovicu manja od prve.

Kad je riječ o fazama, snopovi (1) i (2) se razlikuju. Fazna razlika između njih jest (vidi sl. 6.2)

$$\varphi = k\cdot\overline{CD} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d\sin\alpha\,, \tag{2}$$

Uvodeći eksponencijalni zapis, valovi (1) i (2) mogu se napisati kao funkcije:

$$A_1 = \frac{A_0}{2^0} = A_0 \quad \text{i} \quad A_2 = \frac{A_0}{2}\,e^{i\delta} \tag{3}$$

Ukupna se amplituda može dobiti generalizacijom relacije (3), smatrajući $A_0$ referentnom amplitudom:

$$A = A_0 + \frac{A_0}{2}\,e^{i\delta} + \frac{A_0}{4}\,e^{2i\delta} + \cdots + \frac{A_0}{2^{(N-1)}}\,e^{i(N-1)\delta}\,, \tag{4}$$

Izlučivanjem $A_0$ iz svih članova u (4), vidi se da je to silazna geometrijska progresija $\left(q = \frac{1}{2}\,e^{i\delta}\right)$, čiji zbroj iznosi:

$$A = A_0\,\frac{(1-q^N)}{(1-q)} = A_0\,\frac{\left(1-\dfrac{1}{2^N}\,e^{iN\delta}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\,e^{i\delta}\right)}\,. \tag{5}$$

Budući da je intenzitet proporcionalan kvadratu amplitude, kutnu raspodjelu dobivamo iz (5) prema relaciji:

$$I = |A|^2 = \{A\cdot A^*\}\,, \tag{6}$$

gdje je $A^*$ konjugirana vrijednost od $A$. Ispišimo relaciju (6)

$$I = A_0^2\,\frac{1-\dfrac{1}{2^N}\,e^{iN\delta}}{1-\dfrac{1}{2}\,e^{i\delta}}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{2^N}\,e^{-iN\delta}}{1-\dfrac{1}{2}\,e^{-i\delta}}\,, \tag{7}$$

gdje se drugi razlomak odnosi na $A^*$. Sređivanjem, relacija (7) postaje:

$$I = A_0^2 \frac{1 + \frac{1}{4^N} - \frac{1}{2^{(N-1)}} e^{iN\delta}}{1 + \frac{1}{4} - e^{i\delta}} \tag{8}$$

Primjenom Eulerove formule, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, dobiva se realni dio od (8), što je upravo tražena kutna raspodjela intenziteta:

$$I = |A|^2 = A_0^2 \frac{1 + \frac{1}{4^N} - \frac{1}{2^{(N-1)}} \cos N\delta}{\frac{5}{4} - \cos\delta} . \tag{9}$$

Za poseban slučaj, rješenje (9) daje raspodjelu intenziteta po kutu $\alpha$:
$\lambda = 600$ nm
$d = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ cm
$N = 50$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\alpha = \frac{2\pi}{600 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} \cdot \sin\alpha$$

$$\varphi = 5\pi \sin\alpha$$

$$N\varphi = 250\,\pi \sin\alpha .$$

$$I = A_0^2 \frac{1 + 2^{-100} - 2^{-49} \cos(250\pi \sin\alpha)}{\frac{5}{4} - \cos(5\pi \sin\alpha)} \tag{10}$$

U vrlo dobroj aproksimaciji, relacija (10) postaje

$$I = \frac{A_0^2}{\frac{5}{4} - \cos(5\pi \sin\alpha)} . \tag{11}$$

**6.21.** Pod kojim kutom mora pasti polarizirana svjetlost na staklenu ploču čiji je indeks loma $n = 1{,}52$, da bi transmisija bila 100 posto.

***rješenje*** Ako je upadni kut jednak Brewsterovu kutu i ako svjetlost pada tako da je ravnina polarizacije (ravnina titranja električnog vektora) u ravnini padanja, nema reflektirane zrake, koeficijent je refleksije za paralelnu komponentu

$$\varrho_{\parallel} = \frac{\tan^2(u - l)}{\tan^2(u + l)}$$

nula jer je $u + l = 90°$. Dakle,

$$u_B + l = 90°$$

$$\frac{\sin u_B}{\sin l} = \frac{\sin u_B}{\sin(90° - u_B)} = \tan u_B = n$$

$$u_B = 56{,}3° .$$



**6.22.** Odredite koeficijent refleksije svjetlosti koja pada na površinu stakla pod kutom kod kojeg dolazi do totalne polarizacije svjetlosti. Indeks loma svjetlosti u staklu $n = 1{,}54$.

***rješenje*** Koeficijent refleksije definira se kao

$$k_r = \frac{I_r}{I_0} ,$$

gdje je $I_r$ intenzitet reflektirane svjetlosti, a $I_0$ intenzitet upadne svjetlosti. U reflektiranoj svjetlosti električni vektor titra okomito na ravninu polarizacije:

$$I_r = I_{\perp} . \tag{1}$$

Do totalne polarizacije svjetlosti dolazi kod:

$$\tan u = n \tag{2}$$

$$u = \mathrm{arctg}\, n$$

$$u = 57°$$

$$u + l = 90°$$

pa je

$$l = 33° .$$

$$I_{\perp} = \frac{I_0}{2} \frac{\sin^2(u - l)}{\sin^2(u + l)} \tag{3}$$

$$I_{\perp} = 0{,}083\, I_0$$

$$k_r = 0{,}083 .$$

**6.23.** Dva polaroida postavljena su tako da su im ravnine polarizacije pod pravim kutom. Između njih je postavljen treći polaroid tako da njegova ravnina polarizacije s ravninom polarizacije prvog zatvara kut 30°. Ako se zanemare gubici, koliki će biti intenzitet svjetlosti koja je prošla kroz takav sustav ako je na ulazu svjetlost bila nepolarizirana i intenziteta $I_0$?

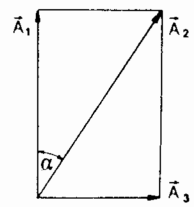
***rješenje*** Amplitude intenziteta svjetlosti nako prolaženja kroz polaroide (sl. 6.10) jesu:

$$A_2 = A_1 \cos\alpha \tag{1}$$

$$A_3 = A_2 \sin\alpha \tag{2}$$

$$A_3 = A_1 \sin\alpha \cos\alpha \tag{3}$$

$$A_3 = \frac{A_1}{2} \sin 2\alpha \tag{4}$$



Slika 6.10.

Intenziteti svjetlosti $I$ nakon prolaženja kroz polaroide jesu:

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \tag{5}$$

$$I_2 = I_1 \cos^2\alpha = \frac{I_0}{2} \cos^2\alpha \tag{6}$$

$$I_3 = I_2 \cos^2(90^\circ - \alpha) \tag{7}$$

$$I_3 = \frac{I_0}{2}\cos^2\alpha\cos^2(90^\circ-\alpha) = \frac{I_0}{8}\sin^2 2\alpha \tag{8}$$

$$I_3 = 0{,}093\,75\, I_0 \,.$$

**6.24.** Prirodna svjetlost prolazi kroz sustav od $n$ identičnih polarizatora koji su postavljeni jedan iza drugog tako da je kut između glavnih ravnina dvaju susjednih polarizatora 45°. Koeficijent transmisije svakog polarizatora je 0,8 kada na njega pada linearno polarizirana svjetlost. Koliko polarizatora treba upotrijebiti da bi se prolazom kroz taj sustav intenzitet svjetlosti smanjio sto puta?

***rješenje*** Prirodna svjetlost je nepolarizirana i ponaša se kao dva polarizirana vala jednakog intenziteta koji su polarizirani jedan prema drugome pod pravim kutom. Možemo pretpostaviti da se smjer jednog vala podudara s glavnom ravninom prvog polarizatora, tako da bi intenzitet propuštene polarizirane svjetlosti u slučaju da nema apsorpcije bio $\frac{I_0}{2}$. Označimo li sa $\tau$ koeficijent transmisije polarizatora, tada će intenzitet svjetlosti $I_1$ nakon prolaza kroz prvi polarizator biti

$$I_1 = \frac{I_0}{2}\cdot\tau\,.$$

Nakon prolaza kroz drugi polarizator intenzitet svjetlosti $I_2$ bit će po Malusovu zakonu jednak

$$I_2 = \frac{I_0}{2}\cdot\tau^2\cos^2\phi\,,$$

gdje je $\phi$ kut između glavnih ravnina dvaju susjednih polarizatora. Nakon prolaza kroz $n$ polarizatora intenzitet svjetlosti $I_n$ bit će jednak

$$I_n = \frac{I_0}{2}\cdot\tau^n(\cos^2\phi)^{(n-1)}\,.$$

Gornji se izraz može napisati ovako:

$$(\tau\cos^2\phi)^{(n-1)} = \frac{2}{\tau}\cdot\frac{I_n}{I_0}$$

Logaritmiranjem gornjeg izraza dobiva se izraz za $n$

$$n = 1 + \frac{\ln\left(\frac{2}{\tau}\cdot\frac{I}{I_0}\right)}{\ln(\tau\cos^2\phi)}\,.$$

Uvrštavanjem zadanih veličina dobiva se $n = 1 + 4 = 5$.

**6.25.** Zraka nepolarizirane svjetlosti upada na Nicolovu prizmu, nakon koje slijedi još jedna čija je ravnina titranja zakrenuta 60° prema prvoj. Pretpostavite da se u svakoj prizmi izgubi na refleksiji i prigušenju 5% upadne svjetlosti. Odredite za koji se ukupni faktor smanji intenzitet upadne svjetlosti.



***rješenje*** Nakon prolaženja kroz prvu prizmu intenzitet $I_1$ zrake svjetlosti iznosi

$$I_1 = \frac{I_0}{2}(1-k)\,,$$

gdje $I_0$ označava intenzitet upadne zrake, a $k$ faktor prigušenja. Prolaženjem kroz drugu prizmu imamo

$$I_2 = I_1\cos^2\alpha(1-k)$$

$$I_2 = \frac{I_0}{2}(1-k)^2\cos^2\alpha\,,$$

pa je

$$\frac{I_0}{I_2} = 8{,}86\,.$$

**6.26.** Odredite debljinu $\lambda/4$-kvarcne pločice (s različitim indeksima loma za dvije okomite ravnine polarizacije svjetlosti $n_1 = 1{,}54$ i $n_2 = 1{,}55$) obasjane svjetlošću valne duljine 0,6 μm.

***rješenje*** Iz linearno polarizirane svjetlosti može se dobiti kružno polarizirana svjetlost pomoću kristala dvolomca koji je takve debljine da se dva okomita linearno polarizirana vala koji su u fazi ispred kristala na izlazu razlikuju u fazi za $\frac{\pi}{2}$. Takav kristal je $\lambda/4$-pločica.

Kako su indeksi loma $n_2 > n_1$, to je valna duljina svjetlosti $\lambda_1 > \lambda_2$. Debljina pločice $d$ mora biti takva da sadrži $N$ valnih duljina $\lambda_1$ i $N + 1/4$ valnih duljina $\lambda_2$ da bi fazna razlika bila $\pi/2$.

$$d = N\lambda_1 - \left(N + \frac{1}{4}\right)\lambda_2 \tag{1}$$

$$\lambda_0 = n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2\,, \tag{2}$$

$\lambda_0$ je valna duljina svjetlosti u vakuumu

$$N(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{4} \tag{3}$$

$$N = \frac{\lambda_2}{4(\lambda_1-\lambda_2)}$$

$$d = N\lambda_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4(\lambda_1-\lambda_2)}$$

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_2-n_1)} \tag{4}$$

$$d = 15\,\mu\text{m}\,.$$

## 6.3. Zadaci

**6.1.** U Youngovu pokusu dvije su pukotine obasjane monokromatskom svjetlošću duljine 500 nm. Prekrije li se jedna pukotina tankom folijom čiji je indeks loma 1,60, nulti se maksimum pomakne na mjesto prijašnjeg petnaestog maksimuma. Kolika je debljina folije?

Rezultat: $1{,}25 \cdot 10^{-5}$ m

**6.2.** Youngovim je pokusom ustanovljeno ovo: kada je na put jednog snopa svjetlosti valne duljine 589 nm stavljena posuda plina duga 15 cm, peta svijetla pruga bit će na mjestu dvadesete svijetle pruge ako je u posudi zrak čiji je indeks loma 1,000 28. Odredite indeks loma plina.

Rezultat: $n = 1{,}000\,34$

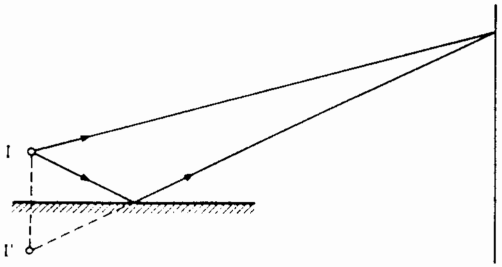
**6.3.** Dva ravna zrcala čine kut 176°. Točkasti izvor svjetlosti valne duljine $5{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm udaljen je 20 cm od oba zrcala. Metar od spojišta zrcala nalazi se zastor. Izvor svjetlosti je zaklonjen tako da svjetlost ne pada izravno na zastor. Nađite razmak interferencijskih pruga na zastoru.

Rezultat: $s = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm

**6.4.** Interferencijske pruge, čiji je razmak 2,9 mm, dobivene su pomoću Fresnelovih zrcala na zastoru udaljenom 2,7 m od zrcala. Koliki je kut između Fresnelovih zrcala ako je izvor svjetlosti udaljen 0,1 m od zajedničkog brida zrcala, a valna duljina upotrijebljene svijetlosti je 0,6 μm?

Rezultat: 10′

**6.5.** Pri Lloydovu pokusu svjetlost iz izvora interferira sa svjetlošću odbijenom od zrcala čija je ravnina okomita na zastor (sl. 6.11). Izvor je udaljen




Slika 6.11.

1 m od zastora i pri nekom položaju daje na zastoru širinu pruge 0,25 mm. Kada se izvor pomakne 0,6 mm od ravnine zrcala, širina linije se smanji 1,5 puta. Kolika je valna duljina svjetlosti?

Rezultat: $6 \cdot 10^{-7}$ m



**6.6.** Na tanki sloj ulja ($n$ = 1,2) razlivenog na vodi ($n$ = 1,33) upada bijela svjetlost pod kutom 45° i djelomično se reflektira s gornje i kontaktne površine. Pri kojoj će minimalnoj debljini sloja ulja crvena svjetlost biti maksimalno pojačana ($\lambda$ = 630 nm)?

Rezultat: $d = 3{,}25 \cdot 10^{-7}$ m

**6.7.** Svjetlost valne duljine 590 nm pada pod kutom 45° na tanku opnu od sapunice čiji je indeks loma 1,35. Opna se prema jednom kraju sužava tako da plohe opne čine klin s malim kutem. Koliki je kut između ploha opne ako se na opni pojavljuju interferencijske pruge široke 4 mm?

Rezultat: $6{,}4 \cdot 10^{-5}$ rad

**6.8.** Plastična folija debljine 0,3μm, čiji je indeks loma 1,59, nalazi se u zraku i osvijetljena je zrakama bijele svjetlosti koje na nju padaju okomito. Za koju valnu duljinu vidljivoga dijela spektra će interferencija u reflektiranoj svjetlosti biti destruktivna?

Rezultat: 477 nm

**6.9.** Primijećeno je da se peti svjetli Newtonov kolobar u reflektiranoj svjetlosti kad su leća i ploča u zraku, podudara sa šestim svjetlim kolobarom kad se sve stavi u nepoznatu tekućinu. Koliki je indeks loma tekućine?

Rezultat: 1,222

**6.10.** Prostor između plankonveksne i plankonkavne leće u uređaju za dobivanje Newtonovih kolobara ispunjen je nekom tekućinom. Odredite indeks loma tekućine ako je polumjer zakrivljenosti plankonveksne leće 10 m, polumjer zakrivljenosti plankonkavne leće 20 m, a valna duljina svjetlosti 0,589 μm!

Rezultat: 1,36

**6.11.** Pri ogibu natrijeve svjetlosti na jednoj pukotini kutna širina glavnog difrakcijskog maksimuma je 30°. Pod kojim se ogibnim kutom opaža treći minimum?

Rezultat: $\alpha = 50{,}93°$

**6.12.** Intenzitet središnjeg maksimuma pri difrakciji na jednoj pukotini iznosi $I_0$. Koliki je omjer između intenziteta sljedećih triju maksimuma i $I_0$?

Rezultat: 0,047; 0,017; 0,008

**6.13.** Monokromatska svjetlost pada okomito na optičku rešetku. Maksimum spektra 3. reda vidi se pod kutom 41°20'. Izračunajte: **a)** konstantu rešetke u jedinicama valne duljine upadajuće svjetlosti, **b)** ako je valna duljina 600 nm, izračunajte broj zareza po milimetru duljine rešetke.

Rezultat: $d = 4{,}543\,\lambda$; $\frac{1}{d} = 367$ mm$^{-1}$

**6.14.** Svjetlost električnog izboja iz plinom ispunjene cijevi pada okomito na optičku rešetku. Kolika je konstanta rešetke ako se maksimumi za dvije valne duljine od 656,3 nm i 410,2 nm vide pod jednakim kutom 40°.

Rezultat: ($m_1 = 5$ i $m_2 = 8$) $d = 5{,}1 \cdot 10^{-6}$ m

**6.15.** Svjetlost koja se sastoji od dva monokromatska zračenja valnih duljina $\lambda_1 = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm i $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ cm pada okomito na optičku rešetku. Prekrivanje $m$-tog reda spektra svjetlosti valne duljine $\lambda_1$ i $(m+1)$ reda spektra svjetlosti valne duljine $\lambda_2$ događa se pod ogibnim kutom 45°. Nađite konstantu optičke rešetke.

Rezultat: $d = 2{,}12 \cdot 10^{-4}$ cm

**6.16.** Na ogibnu rešetku koja ima 50 linija u 1 mm okomito pada paralelni snop bijele svjetlosti. Rubne valne duljine bijele svjetlosti jesu 380 i 780 nm. Koliko je kutno razlučivanje koje daje ta rešetka za kraj spektra drugog reda i početak spektra trećeg reda?

Rezultat: 1,204°

**6.17.** Indeksi loma dvolomca za natrijevu svjetlost ($\lambda = 589$ nm) jesu za redovnu zraku $n_1 = 1{,}73$ i za izvanrednu zraku $n_2 = 1{,}53$. Kolika je optička razlika puta i razlika u fazi kada te dvije zrake iziđu iz pločice dvolomca čija je debljina 4,42 μm?

Rezultat: $\delta = 884$ nm, $\Delta\varphi = \pi$

**6.18.** Snop polarizirane svjetlosti upada na prvi polaroid tako da zatvara kut 20° sa smjerom polarizacije polaroida. Iza njega nalazi se drugi polaroid čiji smjer polarizacije zatvara kut 90° s upadnom zrakom. Koliki je intenzitet zrake nakon prolaženja kroz polaroid? ?

Rezultat: $I = 0{,}103\, I_0$

**6.19.** Karakteristike uređaja za mjerenje brzine svjetlosti Foucaultovom metodom jesu: rotirajuće zrcalo ima 9 000 okretaja u minuti, udaljenost od rotirajućeg zrcala do fiksnog zrcala iznosi 5 m, a udaljenost od pukotine do rotirajućeg zrcala je 21 m. Kada se prostor između rotirajućeg i fiksnog zrcala mjesto zrakom ispuni vodom, slika pukotine pomakne se 0,41 mm. Kolika je brzina svjetlosti u vodi i koliki je indeks loma vode ako je brzina svjetlosti u zraku $3 \cdot 10^8$ m/s?

Rezultat: $c = 2{,}29 \cdot 10^8$ m/s; $n = 1{,}31$

**6.20.** Pokusom je utvrđeno da u vodenoj otopini šećera čija je koncentracija 1 g/cm$^3$ dolazi do zakretanja ravnine polarizacije linearno polariziranoga elektromagnetskog vala za +66,5° po centimetru puta vala. Koliko se šećera nalazi u otopini kojom je ispunjena cijev duga 30 cm, promjera 2 cm, ako se ravnina polarizacije linearno polariziranoga elektromagnetskog vala uzdužnim prolazom kroz cijev zakrenula za 39,7°?

Rezultat: $m = 1{,}876$ g

# 7. FOTOMETRIJA

## 7.1. Uvod

Fotometrija u užem smislu bavi se mjerenjem svjetlosnih veličina iz područja elektromagnetskog zračenja na koje je oko osjetljivo.
Iz *točkastog izvora* stiže u oko dio svjetlosnog toka $d\Phi$ tako da je

$$d\Phi = I\, d\omega\,,$$

gdje je $I$ svjetlosna jakost izvora u promatranom smjeru, a $d\omega$ prostorni kut, širina snopa svjetlosti koji stiže u oko. Ako se oko odmiče od točkastog izvora svjetlosti, uhvaćeni se tok svjetlosti smanjuje s kvadratom udaljenosti.
Uz poznatu kutnu raspodjelu svjetlosne jakosti izvora računamo ukupni *svjetlosni tok*:

$$\Phi = \oint_{4\pi} I\, d\omega\,.$$

Svjetlost se može rastaviti na svjetlosne boje. U intervalu $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ valnih duljina *svjetlosna jakost* je

$$d\, I = i(\lambda)\, d\lambda\,.$$

gdje je $i(\lambda)$ funkcija razdiobe svjetlosne jakosti.
U Međunarodnom sustavu mjernih jedinica osnovna je fotometrijska jedinica *kandela.*
"Kandela je svjetlosna jakost u danom pravcu izvora koji emitira monokromatsko zračenje frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ Hz i čija je energetska jakost u tom pravcu 1/638 W po steradijanu."
Svjetlosni tok osvjetljava površinu. Osvjetljenje $E$ površine $dS$ definiramo:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{d\Phi}{dS_0}\cos\beta = \frac{I_1}{r^2}\cos\beta\,,$$

gdje je $dS_0$ površina normalnog presjeka svjetlosnog čunja na mjestu gdje se nalazi djelić površine $dS$, dok je kut upadanja označen $\beta$. Ovdje je $r$ udaljenost koju prođe središnja zraka snopa. Posljednja jednakost u napisanom izrazu je prvi Lambertov kosinusni zakon.

S ***plošnog izvora*** svjetlosti s dijela površine $dA$ odašilje se u smjer, koji s normalom na površinu zatvara kut $\alpha$, svjetlosni tok $d^2\Phi$. Njegova je vrijednost:

$$d^2\Phi = L(\alpha,\varphi)\cdot dA\cdot d\omega\cdot\cos\alpha\,,$$

gdje je $\varphi$ meridijalni kut, a $L(\alpha,\varphi)$ je sjaj ili *luminancija*, ili gustoća svjetlosne jakosti u određenom smjeru promatranja.

Element $dA$ šalje svjetlosni tok u poluprostor:

$$d\Phi = dA\int_{\alpha=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} L(\alpha,\varphi)\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot d\alpha\cdot d\varphi\,.$$

*Svijetljenje površine*, svjetlosna odzračnost (engl. luminous exitance) definirano je sa:

$$M = \frac{d\Phi}{dA} = \int_{\alpha=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} L(\alpha,\varphi)\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot d\alpha\cdot d\varphi\,.$$

Difuzni izvori imaju konstantnu luminanciju, tj.:

$$L(\alpha,\varphi) = L_0\,,$$

pa svjetlosna jakost $dI$ koja izlazi iz $dA$:

$$dI = dI_0\cos\alpha\,,$$

gdje je $dI_0$ svjetlosna jakost u smjeru normale na $dA$. To je ***drugi Lambertov kosinusni*** zakon.

Svijetljenje površine prema spomenutom Lambertovu zakonu povezano je s luminancijom:

$$M = \pi L_0\,.$$

Luminancija je ovisna o spektralnom sastavu zračenja koje odašilje izvor, pa je u valnom području $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ dana izrazom:

$$dL = l(\lambda)\,d\lambda\,,$$

gdje je $l(\lambda)$ funkcija razdiobe luminancije.



Svakoj fotometrijskoj veličini pripada odgovarajuća energijska veličina. Neke fotometrijske i energijske veličine nalaze se u tablici.

| Fotometrijske veličine | | | Znak | Mjerne jedinice | Naziv jedinica |
|---|---|---|---|---|---|
| SNOP | | množina svjetlosti (količina svjetlosti, svjetlosna energija) | $Q$ | lm s | lumensekunda |
| SNOP | | svjetlosni tok | $\Phi$ | lm | lumen |
| IZVOR | TOČKASTI | svjetlosna jakost (intenzitet svjetlosti) | $I$ | cd | kandela |
| IZVOR | PLOŠNI | svijetljenje površine (svjetlosna egzitancija) | $M$ | $\frac{\text{lm}}{\text{m}^2}$ | lumen po četvornom metru |
| IZVOR | PLOŠNI | sjaj (luminancija) | $L$ | $\frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$ | kandela po četvornom metru |
| OSVIJETLJENA PLOHA | | osvjetljenje (rasvjeta, iluminancija) | $E$ | lx | luks |
| OSVIJETLJENA PLOHA | | osvjetljenost (ekspozicija) | $H$ | lx s | lukssekunda |

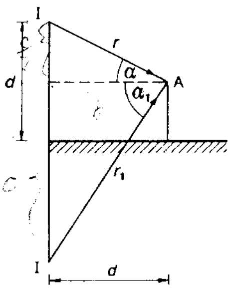
| Energijske veličine | | | Znak | Mjerne jedinice | Naziv jedinica |
|---|---|---|---|---|---|
| SNOP | | energija zračenja | $Q_e$ | J | džul |
| SNOP | | snaga zračenja (tok zračenja) | $P$ | W | vat |
| IZVOR | TOČKASTI | jakost zračenja (intenzitet radijacije) | $I$ | $\frac{\text{W}}{\text{sr}}$ | vat po steradijanu |
| IZVOR | PLOŠNI | odzračnost | $M_e$ | $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ | vat po četvornom metru |
| IZVOR | PLOŠNI | gustoća zračenja (radijancija) | $L_e$ | $\frac{\text{W}}{\text{sr}\cdot\text{m}^2}$ | vat po steradijanu i četvornom metru |
| OZRAČENA PLOHA | | ozračenje (iradijancija) | $E_e$ | $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ | vat po četvornom metru |
| OZRAČENA PLOHA | | ozračenost | $H_e$ | $\frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ | džul po četvornom metru |

## 7.2. Primjeri

**7.1.** Na udaljenosti $d$ od horizontalnoga ravnog zrcala nalazi se točkasti izvor svjetlosti. Okomito na zrcalo postavljen je zastor na udaljenosti $d$ od izvora svjetlosti. Koliko se puta promijeni osvjetljenje $E$ točke zastora udaljene $d/2$ od zrcala ako zrcalo pokrijemo?

***rješenje*** Ako se svjetlost odbija od zrcala, osvjetljenje u točki $A$ zastora je:

$$E_1 = \frac{I\cos\alpha}{r^2} + \frac{I\cos\alpha_1}{r_1^2}\,, \tag{1}$$




Slika 7.1.

a kada se zrcalo pokrije osvjetljenje točke A je:

$$E_2 = \frac{I\cos\alpha}{r^2} \tag{2}$$

Vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{d}{r} \quad \text{i} \quad \cos\alpha_1 = \frac{d}{r_1} \tag{3}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} = \frac{r_1}{r}$$

$$r = \frac{d\sqrt{5}}{2}\,, \qquad r_1 = \frac{d\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{1+\left(\frac{r}{r_1}\right)^3} = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{5}{13}}\right)^3} = 0{,}8 \tag{4}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = 0{,}8\,.$$

**7.2.** Na optičkoj osi konveksnoga sfernog zrcala, čiji je polumjer zakrivljenosti $r$, nalazi se točkasti izvor svjetlosti na udaljenosti $r/2$. Odredite osvjetljenje površine okomite na optičku os na udaljenosti $r$ od zrcala ako je osvjetljenje površine na udaljenosti $2r$ jednako 100 lx (koeficijent refleksije zrcala je 1).

***rješenje*** Na površinu padaju svjetlosne zrake iz izvora $S$ i svjetlosne zrake koje se odbijaju od zrcala, koje kao da izlaze iz izvora $S'$.
Jednadžba za sferno zrcalo daje položaj slike, tj. izvora $S'$:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{-r} \qquad a = \frac{r}{2} \quad \text{i} \quad b = \frac{-r}{4} \tag{1}$$

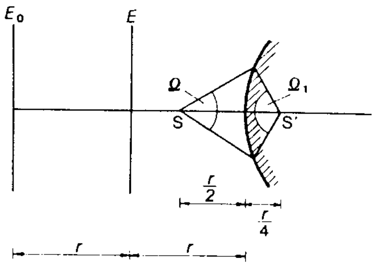
Osvjetljenje površine na udaljenosti $2r$:

$$E_0 = 100\ \text{lx}\,.$$

$$E_0 = \frac{I}{(2r-a)^2} + \frac{I_1}{(2r+b)^2} = \frac{4I}{9r^2} + \frac{16\,I_1}{81\,r^2} \tag{2}$$

$I$ je svjetlosna jakost izvora $S$, a $I_1$ svjetlosna jakost izvora $S'$.






Slika 7.2.

Osvjetljenje površine na udaljenosti $r$:

$$E = \frac{I}{(r-a)^2} + \frac{I_1}{(r+b)^2} = \frac{4I}{r^2} + \frac{16\,I_1}{25\,r^2} \tag{3}$$

Svjetlosni tok koji dolazi na zrcalu je sačuvan (koeficijent refleksije je 1), pa vrijedi:

$$I\Omega = I_1\Omega_1\,, \tag{4}$$

gdje su $\Omega$, $\Omega_1$ prostorni kutovi.
Za male kutove vrijedi: $\Omega a^2 = \Omega_1 b^2$, pa slijedi:

$$I_1 = \frac{\Omega}{\Omega_1}I = \frac{1}{4}I\,. \tag{6}$$

Osvjetljenja jesu:

$$E = \frac{104}{25^2}I \quad \text{i} \quad E_0 = \frac{40}{81^2}I \tag{7}$$

$$\frac{E}{E_0} = 8{,}4$$

$$E = 840\ \text{lx}\,.$$

**7.3.** Izvor svjetlosti oblika kugle, promjera $d = 10$ mm, udaljen je $l = 1$ m od zastora. U najbližoj točki zastora osvjetljenje je $E$. Lećom žarišne daljine $f = 21$ cm, otvora polumjera zakrivljenosti $r = 1{,}5$ cm, na zastoru se dobije uvećana slika izvora. Odredite osvjetljenje slike.

***rješenje*** Osvjetljenje zastora bez leće je:

$$E = \frac{I}{l^2} \tag{1}$$

Stavimo li leću, osvjetljenje je:

$$E_1 = \frac{\Phi}{\frac{\pi D_1^2}{4}} \tag{2}$$

gdje je $\Phi$ svjetlosni tok, a $D_1$ promjer slike na zastoru.
Vrijedi:

$$D_1 = \frac{b}{a}\,d\,, \tag{3}$$

gdje je $d$ promjer izvora.
Svjetlosni tok je:

$$\Phi = E' \frac{\pi D^2}{4} . \tag{4}$$

gdje je $E'$ osvjetljenje leće, a $D$ je promjer leće, pa je

$$\Phi = \frac{I}{a^2} \frac{\pi D^2}{4} . \tag{5}$$

Za osvjetljenje slike dobivamo:

$$E_1 = \frac{\frac{I}{a^2}\frac{\pi D^2}{4}}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{bd}{a}\right)^2} = \frac{I D^2}{b^2 d^2} = \frac{l^2 D^2}{b^2 d^2} E . \tag{6}$$

Jednadžba leće daje $b$:

$$\frac{1}{l-b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} ,$$

pa je:

$$b = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - lf}$$

$$b = 70 \text{ cm} .$$

Osvjetljenje je:

$$E_1 = 18{,}4\ E .$$

**7.4.** Zvijezda poput Sunca vidi se golim okom još do udaljenosti 50 svjetlosnih godina. Ako bi se na udaljenost 1 000 km od površine Zemlje nalazio umjetni satelit oblika reflektirajuće kugle, koliki bi mu trebao biti najmanji promjer, da bi ga se moglo vidjeti noću sa Zemlje?

***rješenje*** Od ukupne Sunčeve svjetlosti koja pada na satelit dio koji se reflektira proporcionalan je:

$$\frac{a^2\pi}{4\pi R_s^2} = \frac{a^2}{4R_s^2} ,$$

gdje je $a$ polumjer satelita, a $R_s = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ m je srednja udaljenost Sunca od Zemlje. Da bi satelit bio sjajan kao zvijezda poput Sunca, mora biti zadovoljen uvjet

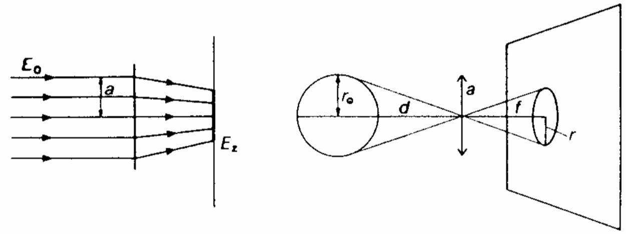
$$\frac{h^2}{d^2} = \frac{a^2}{4R_s^2} ,$$

gdje je $h$ udaljenost satelita od površine Zemlje, a $d$ udaljenost zvijezde od Zemlje. Promjer satelita iznosi

$$2a = \frac{4h}{d} R_s = 1{,}26 \text{ m} .$$

**7.5.** Na zastoru udaljenom 10 cm od leće dobije se slika Sunca. Promjer leće je 4 cm, Sunce je udaljeno $1{,}5 \cdot 10^8$ km, a njegov je polumjer $7 \cdot 10^5$ km. Valja izračunati ozračenje $E_z$ na zastoru ako je ozračenje $E_0$ koje pada na leću jednako 0,14 W/cm$^2$.






Slika 7.3.

***rješenje*** Kako je ulazna snaga

$$P_0 = E_0 S_0 = E_0 a^2 \pi$$

ujedno snaga koja pada na zastor ($P_0 = P_z$)

$$P_z = E_z S_z = E_z r^2 \pi ,$$

iz sličnih trokuta dobijemo ($r_0$ je polumjer Sunca)

$$r = r_0 \frac{f}{d} ,$$

odnosno, ozračenje na zastoru jest:

$$E_z = E_0 \cdot \frac{a^2 d^2}{r_0^2 f^2} = 257{,}14 \text{ W cm}^{-2} .$$

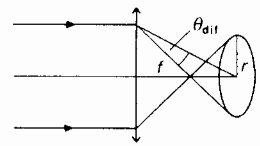
**7.6.** Kada se napravi račun prema ranijem primjeru, ali za svjetlost zvijezda (udaljenost mnogo veća od $d$!) dobije se besmislen rezultat za promjer slike (uzeti npr. $d_z = 4 \cdot 10^{13}$ km). Zato se izraz za kut pod kojim se vidi zvijezda modificira zbog valne prirode svjetlosti, zbog difrakcije $\theta_{dif} = \lambda/a$. Valja izračunati ozračenje na zastoru za istu leću kao u ranijem zadatku ako je snaga koju zrači zvijezda jednaka snazi Sunca (za valnu duljinu valja uzeti sredinu vidljivoga dijela spektra).

***rješenje*** Prema slici 7.4. vidimo da je zbog difrakcije

$$\theta_{dif} \simeq \frac{r}{f} = \frac{\lambda}{a} ,$$

a iz sličnih trokuta (prema prethodnom zadatku)

$$r : f = r_z : d_z .$$




Slika 7.4.

Također je

$$P_z = P_s = E_0 \cdot S = E_0 \cdot 4\pi d^2 ,$$

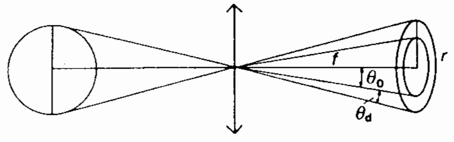
pa je uz iste uvjete kao i prije ($E_z$ je odzračnost zvijezde)

$$E_F = E_z \cdot \frac{S_0}{S_F} = \left(\frac{P_s}{4\pi d_z^2}\right) \cdot \left(\frac{a^2\pi}{r^2\pi}\right) = I_0 \left(\frac{d}{d_z}\right)^2 \cdot \frac{a^4}{f^2\lambda^2} ,$$

odnosno

$$E_F = 155{,}56 \text{ W cm}^{-2} .$$

**7.7.** Račun primjera 7.6. vrijedi za zvijezde no daje loš rezultat za Sunce. Valja pokazati da rješenje prema slici daje za oba slučaja dobar rezultat, uzevši u obzir podatke iz dva prethodna zadatka.




Slika 7.5.

***rješenje*** Iz slike vidimo da je

$$r \simeq f(\theta_0 + \theta_d)\,,$$

gdje je $\theta_0$ kut pod kojim se vidi izvor zračenja, a $\theta_d$ je kut zbog difrakcije. Kako je Sunce ($r_0$ je polumjer Sunca)

$$\theta_0 = \frac{r_0}{d} = 4{,}7\cdot 10^{-3}\,,$$

a za zvijezdu

$$\theta_d = \frac{\lambda}{a} = 2{,}3\cdot 10^{-5}\,,$$

dobijemo za "sunčani" slučaj

$$r \simeq f(\theta_0 + \theta_d) = f\theta_0\left(1 + \frac{\theta_d}{\theta_0}\right) \simeq f\theta_0\,,$$

jer je

$$\frac{\theta_d}{\theta_0} \simeq 5\cdot 10^{-3}\,.$$

Dalje sve računamo kao u prvom zadatku. Međutim, kada se Sunce odmakne (i "postane zvijezda"), imamo

$$\theta_0 = \frac{r_0}{d_z} \simeq 1{,}75\cdot 10^{-8}\,,$$

a izraz za $r$ postaje

$$r \simeq f\theta_d\,,$$

pa sve računamo prema drugom zadatku.

**7.8.** Na visini 2 m iznad ravne površine nalaze se dva točkasta izvora svjetlosti, međusobno udaljena 1 m. Svaki od njih daje svjetlosni tok 300 lm. Koliko je osvjetljenje površine u točkama točno ispod izvora svjetlosti i na sredini između njih?

***rješenje*** Iz izraza za svjetlosni tok

$$\Phi = 4\pi I$$

vidimo da izvori svjetlosti imaju istu svjetlosnu jakost, pa će osvjetljenje u točkama A i B biti jednako. Osvjetljenju u točki A izvor 1 pridonosi sa $E_1$,

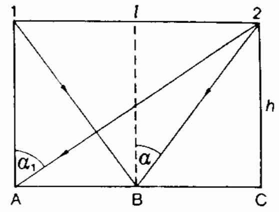


a izvor 2 pridonosi sa $E_2$:

$$E_1 = \frac{I}{h^2} \qquad E_2 = \frac{I\cos\alpha_1}{r_2^2}\,,$$

gdje je

$$r_2^2 = h^2 + l^2 \qquad \cos\alpha_1 = \frac{h}{r_2}\,,$$




Slika 7.6.

tako da za osvjetljenje u točkama A i B dobijemo:

$$E_A = E_B = \frac{\Phi}{4\pi}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{h}{(h^2+l^2)^{3/2}}\right) = 10{,}2\,\mathrm{lx}$$

Osvjetljenje u točki C jednako je

$$E_c = E_1' + E_2' \qquad E_1' = E_2' = \frac{I\cos\alpha_2}{r_1^2}\,,$$

gdje je

$$r_1^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \qquad \cos\alpha_2 = \frac{h}{r_1}\,,$$

pa se za osvjetljenje u točki C dobije

$$E_C = \frac{2Ih}{\left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} = 10{,}9\,\mathrm{lx}\,.$$

**7.9.** Točkasti izvor svjetlosti nalazi se iznad središta okruglog stola, na visini 1 m. Svjetlosna jakost izvora ovisi o kutu tako da je osvjetljenje na stolu posvuda jednako, 100 lx. Odredite funkcionalni oblik ovisnosti svjetlosne jakosti o kutu i vrijednost te jakosti za kut 20°.

***rješenje*** Iz općeg izraza za osvjetljenje, koje ovisi o kutu i udaljenosti

$$E = \frac{I_0}{r^2}\cos\theta = \frac{I_0(\theta)}{r^2}\cos\theta$$

dobijemo

$$E_0 = \frac{I_0(0)}{r_0^2}\cos 0 = \frac{I_0(0)}{r_0^2}\,,$$

i

$$E_1 = \frac{I_1(\theta)}{r_0^2}\cos\theta = \frac{I_0(0)}{r_0^2}\,,$$

pa je

$$I_1(\theta) = I_0(0)f(\theta)\,.$$

Zato je

$$\frac{I_0(0)f(\theta)}{r_1^2}\cos\theta = \frac{I_0(0)}{r_0^2}$$

i, konačno

$$f(\theta) = \frac{r_1^2}{r_0^2}\cdot\frac{1}{\cos\theta} = \frac{r_0^2}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{r_0^2}\cdot\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos^3\theta}\,.$$

Iz zadanih podataka dobijemo

$$E(\theta) = \frac{I_0(0)}{r^2\cos^2\theta}\,; \qquad E(0) = \frac{I_0(0)}{r_0^2} = 100\ \mathrm{lx}\,,$$

pa je

$$I_0(0) = 100\ \mathrm{cd}$$

i

$$I(20) = 120{,}52\ \mathrm{cd}\,.$$

**7.10.** Žarulja (220 V, 60 W) u kuglastom balonu od mliječnog (opal) stakla polumjera 6,5 cm osvjetljava savršeno difuznu reflektirajuću površinu, udaljenu 1 m. Koliki je sjaj tj. luminancija balona? Koliko je osvjetljenje (iluminancija površine uz pretpostavku da svjetlost pada okomito i da je svjetlosna jakost žarulje u tom smjeru 60 cd? Pod pretpostavkom da za plohu vrijedi drugi Lambertov zakon, koliko je svjetljenje i sjaj te plohe?

***rješenje*** Sjaj (luminancija) savršeno difuznog širokog izvora svjetlosti je

$$L = \frac{I}{A\cos\vartheta} = \frac{I}{A_n}\,,$$

gdje je $A_n$ projekcija površine izvora na ravninu okomitu na smjer gledanja

$$A_n = r^2\pi = 1{,}33\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2\,.$$

Dakle, sjaj balona je:

$$L = \frac{I}{A_n} = 4\,511\ \mathrm{cd\,m^{-2}}\,.$$

Osvjetljenje površine je:

$$E = \frac{I}{r^2} = 60\ \mathrm{lx}\,.$$

Svijetljenje te površine

$$M = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A} = \pi L_0$$

jednako je osvjetljenju (savršeno difuzna površina), dakle $M = 60\ \mathrm{lm\,m^{-2}}$. Odavde je sjaj te površine

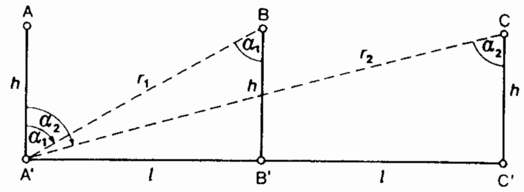
$$L_0 = \frac{M}{\pi} = 19{,}1\ \mathrm{cd\,m^{-2}}\,.$$

**7.11.** Na tri rasvjetna stupa poredana u nizu i međusobno udaljena 20 m, nalaze se, na visini 4 m od pločnika, jednake žarulje, koje svijetle izotropno tokom od 15 000 lm. Odredite osvjetljenje (rasvjetu) u podnožju prvoga rasvjetnog stupa. Ocijenite na istome mjestu doprinos žarulje na drugom i trećem stupu.

***rješenje*** Jakost svjetlosnog izvora $I$ je u slučaju izotropnog svjetlosnog toka $\Phi$ određen relacijom

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}\,.$$






Slika 7.7.

Osvjetljenju (rasvjeti) u točki A' (sl. 7.7) pridonose sve tri žarulje:

$$E = \frac{I}{h^2} + \frac{I\cos\alpha_1}{r_1^2} + \frac{I\cos\alpha_2}{r_2^2}\,. \tag{1}$$

Kosinuse kutova pišemo kao

$$\cos\alpha_1 = \frac{h}{r_1} \qquad \cos\alpha_2 = \frac{h}{r_2}\,,$$

pa je:

$$E = \frac{I}{h^2} + \frac{Ih}{r_1^3} + \frac{Ih}{r_2^3} \tag{2}$$

ili

$$E = \frac{\Phi}{4\pi}\,h\left[\frac{1}{h^3} + \frac{1}{(l^2+h^2)^{3/2}} + \frac{1}{(4l^2+h^2)^{3/2}}\right] = 75\ \mathrm{lx}\,. \tag{3}$$

Relativni doprinos žarulje na stupovima B i C određujemo omjerom prema doprinosu žarulje A, jer očito vrijedi:

$$(l^2+h^2)^{3/2} \gg h^3 \quad \text{i} \quad (4l^2+h^2)^{3/2} \gg h^2\,.$$

Konačno, relativni će doprinos žarulje B biti

$$\frac{h^3}{(l^2+h^2)^{3/2}} = 7{,}5\cdot 10^{-3} = 0{,}75\%\,,$$

a žarulje A

$$\frac{h^3}{(4l^2+h^2)^{3/2}} = 0{,}1\%\,.$$

**7.12.** Projektor zrači u prostor oblikujući svjetlosni čunj s otvorom $2\vartheta = 40°$. Svjetlosni tok unutar tog čunja iznosi 80 000 lm. Odredite svjetlosnu jakost izvora.

***rješenje*** Svjetlosna jakost definirana je omjerom svjetlosnog toka i veličine prostornog kuta koji je definiran zadanim svjetlosnim čunjem:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}\,.$$

Prostorni kut odredit ćemo integralom

$$\Delta\Omega = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{20°}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$

$$\Delta\Omega = 2\pi(1-\cos 20°) = 4\pi\sin^2 10°\,,$$

pa je konačno

$$I = 2{,}1 \cdot 10^3 \text{ cd} .$$

**7.13.** Površina presvučena kalijem nalazi se 75 cm od žarulje čija je snaga 100 W. Pretpostavimo da je snaga $P$ koju zrači žarulja 5% njezine ukupne snage. Neka je svaki atom kalija okrugla pločica čiji je promjer 0,1 nm, valja odrediti vrijeme potrebno da pojedini atom apsorbira energiju zračenja $Q_e = 2$ eV jednaku izlaznom radu (prema valnoj prirodi svjetlosti.)

***rješenje*** Snaga zračenja je 5 W, a snagu koju prima površina kugle polumjera 75 cm (ozračenje) je

$$E_e = \frac{P}{S} = 0{,}707 \text{ Wm}^{-2} .$$

Snaga koju primi pojedini atom je

$$P_a = E_e S_a = E_e \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = 5{,}56 \cdot 10^{-21} \text{ W} .$$

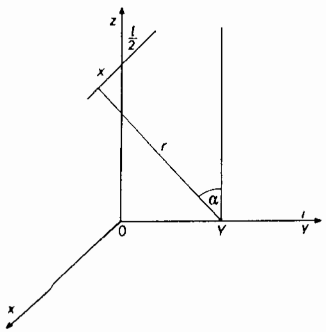
Vrijeme potrebno za apsorpciju $Q_e = 2$ eV je

$$t = \frac{Q_e}{P_a} = 57{,}6 \text{ s} .$$

Pretpostavljeno je bilo da se sva energija apsorbira. Taj opis apsorpcije svjetlosti daje rezultat koji treba usporediti s eksperimentalnim koji je manji od $10^{-9}$ s.

**7.14.** Na koju visinu treba postaviti neonsku cijev svjetlosne jakosti 100 cd, dugu 2 m, koja se može postaviti uzduž hodnika širine 4 m sredinom hodnika, da bi rasvjeta (osvjetljenje) na podu tik uza zid bila maksimalna? Kolika je ta maksimalna rasvjeta?

***rješenje*** Točka na podu tik uza zid s maksimalnom rasvjetom leži u istoj vertikalnoj ravnini u kojoj se nalazi polovište neonske cijevi. U koordinatnom sustavu odabranom kao na slici to je točka s koordinatama $x = 0$ m, $y = Y = 2$ m i $z = 0$ m.




Slika 7.8.



Osvjetljenje u toj točki je funkcija visine $z$ na kojoj se nalazi neonska cijev. Da bismo izračunali osvjetljenje u toj točki, uočimo doprinos osvjetljenju od infinitezimalnog djelića neonske cijevi.

$$dE = \frac{I}{l} \frac{dx}{r^2} \cdot \cos\alpha \tag{1}$$

gdje je $I$ intenzitet neonske cijevi, a $l$ duljina cijevi. Budući da vrijedi

$$\cos\alpha = \frac{z}{r} \tag{2}$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} , \tag{3}$$

to nakon uvrštavanja (2) i (3) u (1) slijedi

$$dE = \frac{I}{l} \frac{z\, dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} . \tag{4}$$

Integriranjem infinitezimalnih doprinosa te imajući na umu da je podintegralna funkcija parna, dobiva se za osvjetljenje

$$E = \frac{2Iz}{l} \int_0^{l/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} . \tag{5}$$

Ako vrijedi

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 (a^2 + x^2)^{1/2}} , \tag{6}$$

uvrštavanjem (6) u (5) dobivamo

$$E = \frac{2Iz}{(Y^2 + z^2)(l^2 + 4Y^2 + 4z^2)^{1/2}} . \tag{7}$$

Maksimum funkcije dane relacijom (7) dobije se iz uvjeta da je derivacija po varijabli $z$ jednaka nuli, što daje jednadžbu

$$8z^2 + (4Y^2 + l^2)z^2 - 4Y^4 - l^2 Y^2 = 0 \tag{8}$$

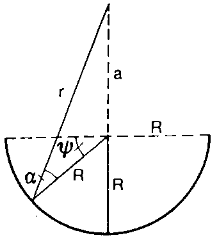
Supstitucijom $z^2 = u$ i uvrštavanjem zadanih veličina u (8) dobiva se kvadratna jednadžba

$$2u^2 + 5u - 20 = 0 .$$

Samo pozitivno rješenje jednadžbe (8), $u = 2{,}15$ daje fizikalno rješenje za visinu neonske cijevi za koju je rasvjeta maksimalna, $z_{maks.} = 1{,}47$ m. Maksimalna rasvjeta dobije se uvrštavanjem gornje vrijednosti u relaciju (7) i iznosi 8,94 lx.

**7.15.** Izvor svjetlosti, čiji je intenzitet 50 cd, smješten je na visini $(1 + \sqrt{3})$ m iznad najniže točke polukugle polumjera 1 m. Odredite točke na polukugli koje imaju maksimalnu rasvjetu (osvjetljenje) i kolika je ta rasvjeta (osvjetljenje)?

***rješenje*** Zbog azimutne simetrije sve točke na kružnici baze kalote dobivene presjekom horizontalne ravnine i polukugle imaju jednaku rasvjetu. Rasvjeta ili osvjetljenje je funkcija središnjeg kuta $\psi$, prikazanog na slici 7.9., i dana je relacijom




Slika 7.9.

$$E(\psi) = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\alpha \,, \tag{1}$$

gdje je $\alpha$ kut između upadne zrake i normale na polukuglu. Primjenom kosinusova poučka na trokut ABC dobivamo

$$r^2 = a^2 + R^2 + 2aR\sin\psi \tag{2}$$

$$a^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha \,. \tag{3}$$

Uvrštavanjem relacija (2) i (3) u (1) slijedi

$$E(\psi) = I \cdot \frac{R + a\sin\psi}{(a^2 + R^2 + 2aR\sin\psi)^{3/2}} \tag{4}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina u izraz (4) dobiva se

$$E(\psi) = 50 \cdot \frac{1 + \sqrt{3}\cdot\sin\psi}{(4 + 2\sqrt{3}\cdot\sin\psi)^{3/2}} \,. \tag{5}$$

Maksimalno osvjetljenje dobiva se iz uvjeta

$$\frac{\mathrm{d}E(\psi)}{\mathrm{d}\psi} = 0 \,. \tag{6}$$

Iz (5) i (6) slijedi

$$(1 - \sqrt{3}\cdot\sin\psi) = 0 \,,$$

odnosno

$$\psi_{\text{maks.}} = 35{,}26^\circ \,.$$

Dakle, točke na polukugli koje imaju maksimalnu rasvjetu leže na prstenu čiji je središnji kut $35{,}26^\circ$. Maksimalna rasvjeta dobije se uvrštavanjem $\psi_{\text{maks.}}$ u relaciju (5) i iznosi $E_{\text{maks.}} = 6{,}8$ lx.

## 7.3. Zadaci

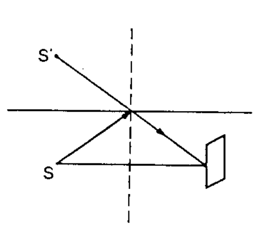
**7.1.** Točkasti izvor svjetlosti nalazi se 2 m iznad horizontalne ravnine stola. Osvjetljenje stola u točki koja se nalazi točno ispod izvora svjetlosti je $2\cdot10^5$ lx. U kojim će točkama stola osvjetljenje biti $15\cdot10^4$ lx?

Rezultat: na kružnici polumjera $r = 0{,}916$ m

**7.2.** Metar ispod površine vode ($n = 1{,}33$) nalazi se točkasti izvor svjetlosti jakosti 100 cd. Odredite osvjetljenje površine malene pločice u vodi smještene na najmanjoj udaljenosti od izvora kod koje površinu vode možemo smatrati idealnim ravnim zrcalom (sl. 7.10).

Rezultat: $E = 27{,}4$ lx






Slika 7.10.

**7.3.** Izvor svjetlosti postavljen je 15 m iznad trga. U nekoj točki trga osvjetljenje horizontalne ravnine je $E_1 = 10$ lx, a osvjetljenje vertikalne ravnine je $E_2 = 20$ lx. Kolika je svjetlosna jakost izvora?

Rezultat: $I = 25\,156$ cd

**7.4.** Svjetiljka, čija je svjetlosna jakost 100 cd, visi 2 m iznad sredine stola promjera 3 m. Zamijenimo je drugom svjetiljkom čija je svjetlosna jakost 25 cd, i primaknemo je stolu po vertikalnoj osi tako da osvjetljenje sredine stola bude dvaput veće od osvjetljenja (koje je dala) prve svjetiljke. Odredite omjer osvjetljenja na rubu stola od prve i druge svjetiljke u opisanim uvjetima.

Rezultat: $\frac{E_1}{E_2} = 3{,}3$

**7.5.** Snaga zračenja točkastog izvora monokromatske svjetlosti valne duljine $5\cdot10^{-7}$ m je 10 W. Na kojoj maksimalnoj udaljenosti čovjek može primjetiti taj izvor, ako njegovo oko reagira na svjetlosni tok od 60 ili više fotona u sekundi? Promjer zjenice oka je 0,5 cm.

Rezultat: $d = 8{,}1\cdot10^5$ m

# 8. KVANTNA PRIRODA SVJETLOSTI

## 8.1. Uvod

Toplinsko je zračenje emisija elektromagnetskih valova pobuđenih molekula i atoma. Na nižim temperaturama najintenzivnije je infracrveno zračenje. Spektri zračenja su kontinuirani i pri visokim temperaturama sežu do ultraljubičastog područja.
Idealno crno tijelo apsorbira sve upadno zračenje. Ukupna jakost zračenja $I$ određena je zbrajanjem emisijske moći (spektralne gustoće zračenja) crnog tijela po svim valnim duljinama:

$$I = \int_0^\infty f(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda\,, \tag{8.1}$$

gdje je $T$ temperatura tijela.
Rješenje integrala jest Stefan–Boltzmannov zakon,

$$I = \sigma T^4\,, \tag{8.2}$$

gdje je $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$. Ukupna snaga zračenja površine $S$ crnog tijela

$$P_{\mathrm{ct}} = S\sigma T^4\,. \tag{8.3}$$

Za realna tijela jakost zračenja iznosi

$$I_{\mathrm{r}} = \varepsilon\sigma T^4\,. \tag{8.4}$$

gdje je $\varepsilon$ manje od jedinicie $(0 < \varepsilon < 1)$.
Valna duljina $\lambda_{\mathrm{m}}$, za koju je energija zračenja crnog tijela maksimalna, definirana je Wienovim zakonom:

$$\lambda_{\mathrm{m}} T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\ K}\,. \tag{8.5}$$



Spektralna gustoća zračenja crnog tijela definirana je Planckovim zakonom

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \tag{8.6}$$

ili

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2}\,\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kt}} - 1}\,, \tag{8.7}$$

gdje je $c$ brzina svjetlosti, $\nu$ frekvencija zračenja (vidi zadatak 8.1), Boltzmannova konstanta $k = 1{,}380\,66 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{JK^{-1}}$, a Planckova konstanta $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$.
Energija fotona definirana je produktom

$$E = h\nu\,.$$

Fotoelektrični efekt je izbacivanje elektrona iz substance pod utjecajem elektromagnetskog zračenja.
Einsteinova relacija za fotoelektrični efekt je:

$$\frac{mv^2}{2} \le h\nu - W_i\,, \tag{8.8}$$

gdje je $W_i$ izlazni rad elektrona, $m$ masa elektrona, $v$ brzina oslobođenog elektrona, $\nu$ frekvencija upadnog zračenja. Relacija (8.8) može se pisati i pomoću granične frekvencije $\nu_g$, tj.:

$$\frac{mv^2}{2} \le h(\nu - \nu_g)\,. \tag{8.9}$$

Sudar fotona frekvencije $\nu$ s mirnim elektronom (Comptonov efekt) odvija se uz zadovoljenje dvaju zakona očuvanja. To je zakon očuvanja energije

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \tag{8.10}$$

i zakon očuvanja količine gibanja:

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - \frac{2h\nu\nu'}{c^2}\cos\vartheta\,, \tag{8.11}$$

gdje je $m_0$ masa mirovanja elektrona, $\nu'$ frekvencija fotona nakon sudara, $m$ mase elektrona u gibanju $(m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2})$, i $\vartheta$ je kut skretanja ili kut raspršenja fotona.

## 8.2. Primjeri

**8.1.** Izrazite Planckovu formulu za spektralnu gustoću zračenja pomoću frekvencije i izračunajte frekvenciju $\nu_{maks.}$ za koju ta funkcija ima maksimum.

***rješenje*** Spektralna gustoća zračenja izražena pomoću valne duljine je

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} .$$

Budući da je

$$f(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda = f(\nu, T)\,\mathrm{d}\nu$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

to je

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kt}} - 1} .$$

Funkcija $f(\nu, T)$ ima maksimum kada je

$$\frac{\partial f(\nu, T)}{\partial \nu} = 0 .$$

Odavde je

$$\nu_{\mathrm{maks.}} = 5{,}886 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{Hz} \cdot T \cdot \mathrm{K}^{-1} .$$

Iz Wienova zakona

$$\lambda_{maks.} T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K\,m}$$

dobivamo produkt valne duljine $\lambda_{\mathrm{maks.}}$ za koju funkcija $f(\lambda, T)$ ima maksimum i frekvencije $\nu_{\mathrm{maks.}}$ za koju funkcija $f(\nu, T)$ ima maksimum

$$\nu_{\mathrm{maks.}} \cdot \lambda_{\mathrm{maks.}} = 1{,}71 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Uočite da taj produkt nije jednak brzini svjetlosti. Zašto?

**8.2.** Metalna žica promjera 0,02 cm grije se električnom strujom do temperature 3 000 K. Odredite nakon koliko vremena će temperatura žice pasti na 800 K, uz pretpostavku da žica zrači kao crno tijelo. Gustoća materijala žice je $\varrho = 19 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, a specifični toplinski kapacitet $c = 154{,}66\ \mathrm{J/(kg\,K)}$.

***rješenje*** Jakost zračenja crnog tijela dana je Stefan–Boltzmannovim zakonom:

$$I = \sigma T^4 .$$

Snaga koju žica gubi zračenjem je:

$$P = \sigma S T^4 = \sigma \pi l\,\mathrm{d} T^4 ,$$

gdje je površina $S = \pi l d$.
Zbog gubitka energije tijelo se ohladi:

$$P\,\mathrm{d}t = -mc\,\mathrm{d}T$$



$$\frac{\sigma \pi l d}{mc}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}T}{T^4}$$

Integriranjem prethodnog dobijemo vrijeme $t$

$$\int_0^t \frac{\sigma \pi l d}{mc}\,\mathrm{d}t = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T^4}$$

$$t = \frac{mc}{3\sigma \pi l d}\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right)$$

$$m = \varrho V = \pi \frac{d^2}{4} l \varrho$$

$$t = 1{,}65\ \mathrm{s} .$$

**8.3.** Za koliko će se stupnjeva promijeniti početna temperatura apsolutno crnog tijela koja je u početku iznosila 2 000 K, ako se vrijednost valne duljine, koja odgovara maksimumu jakosti zračenja, poveća 0,5 μm?

***rješenje*** Iz Wienova zakona $\lambda_m T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K} = b$ može se odrediti promjena temperature $\Delta T$:

$$\lambda_{m1} T_1 = b$$

$$\lambda_{m2} T_2 = b .$$

Promjena valne duljine:

$$\Delta\lambda = b\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

$$T_2 = \frac{T_1}{1 + \dfrac{\Delta\lambda T_1}{b}}$$

$$T_2 = 1\,487\ \mathrm{K} .$$

Promjena temperature iznosi:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 512{,}8\ \mathrm{K} .$$

**8.4.** Kada se neka površina obasja svjetlošću valne duljine $\lambda_1 = 589$ nm, oslobađaju se elektroni za čije je zaustavljanje potreban napon $U_{g1} = 0{,}2$ V.
a) Koliki je izlazni rad i granična frekvencija fotoefekta za materijal zadane površine?
b) Koliki je napon zaustavljanja ako se površina osvijetli zračenjem valne duljine $\lambda_2 = 405$ nm?

***rješenje*** a) Kinetička energija fotoelektrona dobiva se iz napona zaustavljanja:

$$\frac{mv^2}{2} = eU_{g1} .$$

Iz Einsteinove relacije za fotoefekt određuje se izlazni rad i granična frekvencija:

$$h\nu_1 = h\,\frac{c}{\lambda_1}$$

$$h\nu_1 = W_i + \frac{mv^2}{2}\,,$$

$$W_i = 1{,}9\ \mathrm{eV} = 3{,}05 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\,,$$

$$\nu_g = \frac{W_i}{h}$$

$$\nu_g = 4{,}6 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}\,.$$

b) Za valnu duljinu $\lambda_2$ vrijedi relacija

$$\frac{hc}{\lambda_2} = W_i + eU_{g2}\,,$$

gdje je napon zaustavljanja $U_{g2}$. Budući da je

$$\frac{hc}{\lambda_1} = W_i + eU_{g1}\,,$$

dobivamo

$$U_{g2} = U_{g1} + \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$U_{g2} = 1{,}16\ \mathrm{V}\,.$$

**8.5.** Odredite maksimalnu brzinu fotoelektrona, koji s površine srebra izlijeće ozračen

a) ultraljubičastim zračenjem valne duljine $\lambda_1 = 0{,}155\ \mu\mathrm{m}$,

b) $\gamma$–zračenjem valne duljine $\lambda_1 = 2{,}7\ \mathrm{pm}$.

***rješenje*** a) Brzinu izbačenog elektrona $v_1$ određujemo iz relacije

$$\frac{hc}{\lambda_1} = W_i + \frac{mv_1^2}{2}\,,$$

gdje je $W_i = 4{,}7$ eV izlazni rad za srebro, jer je energija fotona $\frac{hc}{\lambda_1} = 8$ eV. Rezultat je:

$$v_1 = 1{,}08 \cdot 10^6\ \mathrm{ms}^{-1}\,.$$

b) Budući da je riječ o energiji fotona

$$\frac{hc}{\lambda_2} = 0{,}46\ \mathrm{MeV}\,,$$

izlazni rad možemo zanemariti, a moramo primijeniti relativističku relaciju

$$\frac{hc}{\lambda_2} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\,,$$

gdje je $\beta = \frac{v_2}{c}$. Račun daje

$$\beta = 0{,}85\,,$$

odnosno

$$v_2 = 2{,}55 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s}^{-1}\,.$$



**8.6.** Izotropni izvor fotona, koji u svakoj sekundi emitira $10^4$ fotona valne duljine 0,25 μm, nalazi se 30 cm iznad tjemena cinčane polukugle polumjera 10 cm. Koliku će maksimalnu kinetičku energiju dobiti elektroni cinka u 10 s?

***rješenje*** Ukupna kinetička energija $E$ koju dobiju elektroni cinka dana je relacijom

$$E_u = n\,E_k\,, \tag{1}$$

gdje je $n$ broj fotona koji padnu na polukuglu, a $E_k$ je kinetička energija elektrona cinka nakon fotoefekta. $E_k$ je dana relacijom

$$E_k = \frac{hc}{\lambda} - W_i\,, \tag{2}$$

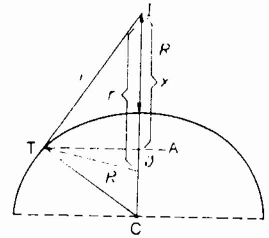
gdje je $h$ Planckova konstanta, $c$ brzina svjetlosti, $\lambda$ valna duljina fotona, a $W_i$ izlazni rad elektrona cinka.

Broj fotona koji padnu na polukuglu proporcionalan je prostornom kutu ($\Delta\Omega$) u koji su emitirani ti fotoni, pa vrijedi

$$n = \frac{I}{4\pi}\,\Delta\Omega\,t\,, \tag{3}$$

gdje je $I$ svjetlosna jakost izvora, a $t$ vrijeme obasjavanja. Uvidom u sliku 8.1. može se izračunati prostorni kut $\Delta\Omega$, tako da vrijedi

$$\Delta\Omega = \frac{P_{\mathrm{kalota}}}{r^2} = \frac{2r\pi \cdot v}{r^2} = \frac{2\pi v}{r}\,. \tag{4}$$




Slika 8.1.

Visina kalote $v$ može se izraziti pomoću udaljenosti $x$ izvora od ravne plohe kalote relacijom

$$v = r - x\,. \tag{5}$$

Iz sličnosti trokuta TCJ i trokuta ITA slijedi

$$\frac{x}{r} = \frac{r}{R+a}\,, \tag{6}$$

gdje je $a$ udaljenost tjemena polukugle od izvora. Primjenom Pitagorina poučka na trokut TCI dobivamo

$$r = \sqrt{a^2 + 2aR}\,. \tag{7}$$

Korištenjem relacija (1) – (7) dobivamo

$$E_u = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{a^2+2aR}}{R+a}\right)\cdot\left(\frac{hc}{\lambda} - W_i\right)t \tag{8}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina u relaciju (8) dobivamo

$$E_u = 3{,}1 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}\,.$$

**8.7.** Svjetlosni snop snage 8 W pada okomito na površinu. Površina reflektira 50% upadnog zračenja, a 50% apsorbira. Odredite silu kojom svjetlosni snop djeluje na površinu.

Ako je valna duljina svjetlosti $5 \cdot 10^{-5}$ cm, a površina poprečnog presjeka snopa 10 cm$^2$, odredite broj fotona u 1 cm$^3$ snopa svjetlosti.

***rješenje*** Prema drugom Newtonovom zakonu sila je:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}, \tag{1}$$

Promjena količine gibanja fotona pri apsorpciji je $\Delta p = p$, dok je pri refleksiji $\Delta p = 2p$.
Količina gibanja fotona je:

$$p = \frac{E}{c}, \tag{2}$$

a snaga je:

$$P = \frac{E}{\Delta t}. \tag{3}$$

Budući da se 50% upadnog zračenja apsorbira, to je

$$F_1 = 0{,}5\,\frac{P}{c}, \tag{4}$$

a kako se 50% reflektira, to je

$$F_2 = 0{,}5\,\frac{2P}{c}. \tag{5}$$

Jakost svjetlosnog zračenja $I$ je:

$$I = \frac{P}{S}, \tag{6}$$

gdje je $S$ površina. Energiju svjetlosnog snopa možemo izraziti pomoću energije fotona $h\nu$ i broja fotona $N$, pa je jakost svjetlosnog zračenja $I$:

$$I = \frac{Nh\nu}{S\Delta t}. \tag{7}$$

Broj fotona $n$ u jedinici volumena je:

$$n = \frac{N}{S\Delta t\, c}. \tag{8}$$

Korištenjem relacije (6) i (7) može se napisati da je:

$$n = \frac{P}{h\nu Sc}, \tag{9}$$

ili

$$n = \frac{P\lambda}{hSc^2} \tag{10}$$

$$n = 6{,}7 \cdot 10^7\ \mathrm{cm}^{-3}.$$

**8.8.** Frekvencija zračenja atoma, zbog njihova gibanja brzinom $v$ promijeni se za $\Delta\nu = v\nu_0/c$, gdje je $\nu_0$ frekvencija zračenja atoma u miru (Dopplerov efekt). Odredite temperaturu atoma neona ako se zna da je frekvencija crvene linije $\nu_0 = 4{,}8 \cdot 10^{14}$ Hz, a njezina širina $\Delta\nu = 1{,}6 \cdot 10^9$ Hz.



***rješenje*** Prema molekularno kinetičkoj teoriji, srednja kinetička energija kao funkcija temperature i srednje brzine jest

$$\overline{E}_k = \frac{3}{2}kT,$$

$$\overline{E}_k = \frac{m\overline{v^2}}{2}.$$

Budući da je $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$ a $\dfrac{k}{m} = \dfrac{R}{M}$ dobijemo:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

gdje je $M$ molarna masa plina, a $R$ univerzalna plinska konstanta. Kako je

$$\Delta\nu = \frac{2}{c}\sqrt{\overline{v_x^2}} \cdot \nu_0,$$

i

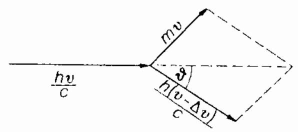
$$\sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{1}{3}\,\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{RT}{M}},$$

temperatura je

$$T = \frac{Mc^2}{4R}\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2 \simeq 700\ \mathrm{K}.$$

**8.9.** U Comptonovu efektu kvant rentgenskog zračenja nalijeće na mirni elektron. Kvant zračenja se odbija od elektrona pod kutom u odnosu na pravac upada, prenoseći dio svoje količine gibanja i energije na elektron. Utvrdite zakonitost po kojoj se mijenja valna duljina kvanta zračenja zbog sraza s elektronom.

***rješenje*** Na slici 8.2. vidi se vektor količine gibanja kvanta $p_1 = h\nu/c$ prije sraza. Nakon sraza s mirnim elektronom količina gibanja kvanta je $p_2 = \dfrac{h(\nu - \Delta\nu)}{c}$, a elektrona $p_e = mv$. Vektor promijenjene količine gibanja kvanta zatvara kut $\vartheta$ svojim prvotnim smjerom.



Slika 8.2.

Količina gibanja kvanta zračenja prije sraza mora biti jednaka zbroju količina gibanja elektrona i kvanta zračenja poslije sraza. Prema slici 8.2. vrijedi:

$$m^2v^2 = \frac{h^2\nu^2}{c^2} + \frac{h^2(\nu - \Delta\nu)^2}{c^2} - 2\,\frac{h\nu}{c}\,\frac{h(\nu - \Delta\nu)}{c}\cos\vartheta. \tag{1}$$

Supstitucijom dobivamo:

$$m^2v^2 = \frac{m_e^2v^2}{1 - \beta^2},$$

$\beta = \dfrac{v}{c}$, a dijeljenjem izraza (1) sa $m_e^2c^2$ dobivamo:

$$\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \left(\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)^2 \left[2(1 - \cos\vartheta) - 2\,\frac{\Delta\nu}{\nu}(1 - \cos\vartheta) + \left(\frac{h\Delta\nu}{m_ec^2}\right)^2\right].$$

Prema trigonometrijskim formulama:

$$\cos\vartheta = \cos^2\frac{\vartheta}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

pa jednadžbu možemo pisati:

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 4\left(\frac{h\nu}{m_e c^2}\right)^2\left(1-\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \left(\frac{h\Delta\nu}{m_e c^2}\right)^2. \tag{2}$$

Srazom kvanta rentgenske zrake elektron dobiva kinetičku energiju $mc^2 - m_e c^2$, a ta energija mora biti jednaka gubitku energije kvanta zrake:

$$mc^2 - m_e c^2 = h\nu - h(\nu - \Delta\nu). \tag{3}$$

Dijeljenjem jednadžbe sa $m_e c^2$ dobivamo:

$$\frac{m}{m_e} - 1 = \frac{h\Delta\nu}{m_e c^2}.$$

ili

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{h\Delta\nu}{m_e c^2}. \tag{4}$$

Kvadriranjem izraza (4) slijedi:

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{2h\Delta\nu}{m_e c^2} + \left(\frac{h\Delta\nu}{m_e c^2}\right)^2. \tag{5}$$

Izjednače li se desne strane u jednadžbama (2) i (5), dobivamo:

$$\Delta\nu = \frac{2h\nu^2}{m_e c^2}\left(1-\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)\sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

odnosno:

$$\frac{c\Delta\nu}{\nu(\nu-\Delta\nu)} = \frac{2h}{m_e c}\sin^2\frac{\vartheta}{2}. \tag{6}$$

Budući da je

$$\Delta\lambda = \left(\frac{c\Delta\nu}{\nu(\nu-\Delta\nu)} = \right)\frac{c}{\nu-\Delta\nu} - \frac{c}{\nu},$$

to je promjena tražene valne duljine rentgenske zrake poslije sraza iz (6):

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c}\sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

**8.10.** Foton energije $E = 0{,}75$ MeV rasprši se na slobodnom i mirnom elektronu pod kutom $\vartheta = 60°$. Odredite energiju raspršenog elektrona i smjer raspršenja.

***rješenje*** Energiju raspršenog fotona $E'$, naći ćemo pomoću relacije (vidi primjer 8.9)

$$\lambda' - \lambda = \frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E} = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\vartheta)$$



koja za energiju raspršenog fotona daje

$$E' = \frac{E}{\frac{E}{m_e c^2}(1-\cos\vartheta)+1} = 0{,}43\ \text{MeV}.$$

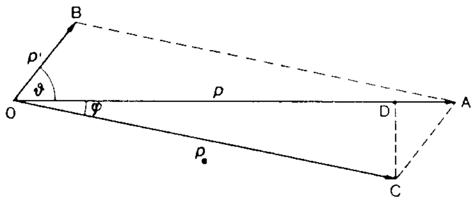
Zakon očuvanja energije određuje energiju raspršenog elektrona kao razliku početne i konačne energije fotona:

$$E_e = E - E' = 0{,}32\ \text{MeV}.$$

Kut raspršenja elektrona može se odrediti primjenom zakona o očuvanju količine gibanja

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + \vec{p}_e.$$

Prema slici 8.3. vrijedi:




Slika 8.3.

$$\tan\varphi = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CA}\sin\vartheta}{\overline{OA} - \overline{CA}\cos\vartheta}$$

ili

$$\tan\varphi = \frac{\sin\vartheta}{\frac{p}{p'} - \cos\vartheta},$$

odnosno

$$\tan\varphi = \frac{\sin\vartheta}{\frac{E}{E'} - \cos\vartheta} = 0{,}7,$$

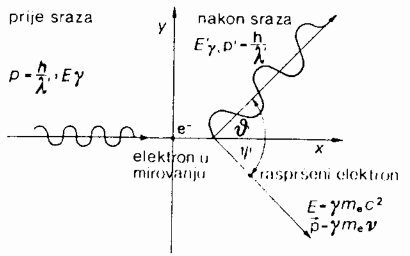
i konačno

$$\varphi = 35°.$$

**8.11.** Odredite energiju koja se u procesu Comptonova raspršenja predaje elektronu i manifestira kao njegova kinetička energija:
**a)** ako je kut raspršenja mali, $\vartheta \approx 0$,
**b)** ako je kut raspršenja $\vartheta = \pi$, (raspršenje fotona unatrag).

***rješenje*** U procesu Comptonova elastičnog raspršenja fotona na elektronu u mirovanju, promjena u valnoj duljini fotona u konačnom i početnom stanju, prema slici 8.4:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\vartheta), \tag{1}$$




Slika 8.4.

gdje je $\vartheta$ kut raspršenja i $\lambda_C = \dfrac{h}{m_e c}$ Comptonova valna duljina elektrona.

Znajući da je $E_\gamma = \dfrac{hc}{\lambda}$ i $E'_\gamma = \dfrac{hc}{\lambda'}$, jednadžba (1) se može prevesti u oblik:

$$\frac{hc}{E'_\gamma} - \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\vartheta)\,, \tag{2}$$

odnosno

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta)\,, \tag{3}$$

Iz jednadžbe (3) jednostavno se dobiva relacija

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \dfrac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta)} \tag{4}$$

koja veže energiju fotona prije i poslije sraza s elektronom.
Razlika energije fotona prije i poslije sraza jest kinetička energija elektrona $E'_k$:

$$E_\gamma - E'_\gamma = E'_k\,. \tag{5}$$

Na osnovi relacije (4) slijedi:

$$E_\gamma - \frac{E_\gamma}{1 + \dfrac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta)} = E'_k\,. \tag{6}$$

Sređivanjem relacije (6) dobiva se kinetička energija predana elektronu prilikom sraza:

$$E'_k = \frac{E_\gamma^2}{m_e c^2} = \frac{1 - \cos\vartheta}{1 + \dfrac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta)}\,. \tag{7}$$

Polazeći od relacije (7) možemo analizirati postavljene karakteristične slučajeve:
a) U slučaju raspršenja pri malim kutovima, $\vartheta \approx 0$, prema relacijama (4) i (7) slijedi:

$$E_\gamma \approx E'_\gamma \quad \text{i} \quad E'_k \approx 0\,. \tag{8}$$

b) U slučaju raspršenja unatrag, $\vartheta = \pi$, relacija (7) postaje

$$E'_k = \frac{E_\gamma^2}{m_e c^2} \cdot \frac{2}{1 + \dfrac{2E_\gamma}{m_e c^2}} = \frac{2E_\gamma^2}{m_e c^2 + 2E_\gamma}\,. \tag{9}$$



Relacija (9) izriče najveću kinetičku energiju koja se predaje elektronu u procesu Comptonova raspršenja. Spomenuta se relacija u literaturi zove komptonski rub (Compton edge). Spektar odbojnih elektrona se npr. u scintilacijskim detektorima vidi kao kontinuum strujnih impulsa do najviše amplitude, što odgovara comptonskom rubu.

**8.12.** Izračunajte promjenu valne duljine fotona energija $E$ koji se centralno sudara s mirnim elektronom i odbije natrag ($\vartheta = 180°$).

***rješenje*** Foton energije $E$ i količine gibanja $p = E/c$ sudara se s mirnim elektronom energije $m_0 c^2$ i količine gibanja jednake nuli. Nakon sudara foton ima energiju $E'$ i količinu gibanja $p' = E'/c$, dok je energija elektrona $E_e = mc^2$ i količina gibanja elektrona

$$p_e = \sqrt{\frac{E_e^2}{c^2} + m_0^2 c^2}\,.$$

Primjenom zakona očuvanja energije i količine gibanja dobivamo:

$$\frac{E}{c} = p_e - \frac{E'}{c} = \sqrt{\frac{E_e^2}{c^2} + m_0^2 c^2} - \frac{E'}{c}$$

$$E + m_0 c^2 = E' + mc^2\,,$$

odakle je:

$$\left(\frac{E}{c} + \frac{E'}{c}\right)^2 = \frac{E_e^2}{c^2} + m_0^2 c^2$$

$$E_e^2 = (E + E')^2 + m_0^2 c^4$$

$$E_e^2 = m^2 c^4 = (E - E' + m_0 c^2)^2$$

$$2EE' = m_0 c^2 (E - E')$$

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{2}{m_0 c^2}$$

$$\frac{c}{h\nu'} - \frac{c}{h\nu} = \frac{2}{m_0 c}$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c}$$

$$\lambda' - \lambda = 4{,}9 \cdot 10^{-12}\ \text{m}\,.$$

**8.13.** Foton energije $4 \cdot 10^{-14}$ J raspršuje se na mirnom elektronu. Nađite kut između smjera odbijenog elektrona i raspršenog fotona ako se valna duljina fotona promijenila za $1{,}5 \cdot 10^{-12}$ m.

***rješenje*** Kut između smjera odbijenog elektrona i raspršenog fotona jednak je zbroju kutova raspršenja fotona $\vartheta$ i raspršenja elektrona $\varphi$

$$\alpha = \vartheta + \varphi\,. \tag{1}$$

Kut $\vartheta$ odredit ćemo iz relacije za promjenu valne duljine kod Comptonova efekta

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\vartheta)\,, \tag{2}$$

gdje je $\Delta\lambda$ promjena valne duljine, a $\lambda_C$ Comptonova valna duljina. Iz relacije (2) slijedi:

$$\vartheta = \arccos\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_C}\right) . \tag{3}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina dobivamo $\vartheta = 67{,}56°$. Kut raspršenja elektrona $\varphi$ dobit ćemo primjenom zakona očuvanja količine gibanja. Označimo li količinu gibanja fotona prije sudara sa $p$, količinu gibanja fotona poslije sudara sa $p'$, a količinu gibanja elektrona nakon sudara sa $P$, zakon očuvanja količine gibanja glasi:

$$\begin{aligned} p &= p' \cos\vartheta + P \cos\varphi \\ p' \sin\vartheta &= P \sin\varphi . \end{aligned} \tag{4}$$

Slijedi da je $p = h/\lambda$, a $p' = h/\lambda'$, gdje je $h$ Planckova konstanta, iz (4) izlazi

$$\tan\varphi = \frac{\lambda \sin\vartheta}{\lambda' - \lambda\cos\vartheta} . \tag{5}$$

Budući da je $\lambda = (hc)/E$, a $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, gdje je $c$ brzina svjetlosti, a $E$ energija fotona prije sudara, iz relacije (5) uvrštavanjem zadanih veličina dobivamo:

$$\tan\varphi = 1{,}0044 , \qquad \text{odnosno} \qquad \varphi = 45{,}13° .$$

Iz relacije (1) dobiva se za traženi kut $\alpha$

$$\alpha = 112{,}7° .$$

## 8.3. Zadaci

**8.1.** Izračunajte omjer spektralne gustoće zračenja Sunca za valne duljine 500 nm i 2 000 nm.

Rezultat: $\dfrac{f(\lambda_1, T)}{f(\lambda_2, T)} = 20$

**8.2.** Kolika je maksimalna energija i brzina elektrona koje iz metala izbacuje $\gamma$–zračenje frekvencije $1{,}23 \cdot 10^{20}$ Hz?

Rezultat: $E_k = 0{,}51$ MeV $= 8{,}15 \cdot 10^{-14}$ J,
$v = 0{,}866\, c = 2{,}6 \cdot 10^{18}$ m s$^{-1}$

**8.3.** Crno tijelo zrači na frekvenciji $5{,}3 \cdot 10^{14}$ Hz. Pri snazi zračenja 36,5 W, struja na fotokatodi na koju pada to zračenje iznosi 7,57 mA, a pri snazi 19,3 W, iznosi 0,81 mA. Površina crnog tijela je $4{,}4 \cdot 10^{-5}$ m$^2$. Na osnovi Planckova zakona zračenja za crno tijelo iz danih podataka izračunajte Planckovu konstantu ako je $e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$.

Rezultat: $h \approx 6{,}57 \cdot 10^{-34}$ J s



**8.4.** Bakrena kuglica čiji je promjer 2 cm, nalazi se u evakuiranoj posudi čije stijenke imaju temperaturu 0 K. Početna temperatura kuglice je 400 K. Uz pretpostavku da je površina kuglice apsolutno crna, odredite u kojem će se vremenu temperatura kuglice smanjiti na 100 K. Specifični toplinski kapacitet bakra je 390 J/kg K, a gustoća bakra je 8 900 kg/m$^3$.

Rezultat: $t = 66\,956$ s

**8.5.** Površinu metalne ploče obasjamo svjetlošću valne duljine 0,35 μm, a zatim svjetlošću čija je valna duljina 0,54 μm. Mjerenjem je utvrđeno da je maksimalna brzina izbijenih elektrona dva puta veća u prvom slučaju nego u drugom. Koliki je izlazni rad metala od kojeg je ploča napravljena?

Rezultat: $W_i = 3{,}01 \cdot 10^{-19}$ J

**8.6.** Monokromatska svjetlost valne duljine 300 nm pada okomito na površinu 4 cm$^2$. Ako je jakost zračenja $15 \cdot 10^{-2}$ W/m$^2$, potrebno je odrediti učestalost udaranja fotona na površinu.

Rezultat: $9{,}05 \cdot 10^{13}$ s$^{-1}$

**8.7.** Elektroni izbačeni iz katode ubrzavaju se u električnom polju između katode i anode, između kojih je spojena baterija napona 150 V. Kolika je brzina elektrona koji padaju na anodu?

Rezultat: $v = 7{,}26 \cdot 10^6$ m s$^{-1}$, odnosno $v = 0{,}024\, c$

**8.8.** Kolika je brzina elektrona koji padaju na anodu rentgenske cijevi ako je napon na cijevi $10^5$ V? (Koristite se relativističkom formulom.)

Rezultat: $v = 0{,}55\, c$

**8.9.** Laserski snop iz He–Cd lasera, čija je valna duljina 325 nm, izbacuje elektrone iz cezijeve fotokatode koji se zaustavljaju naponom 1,91 V. Koliki je izlazni rad za cezij?

Rezultat: $W_i = 1{,}91$ eV

**8.10.** Najveća valna duljina svjetlosti koja uzrokuje fotoelektrični efekt na natriju iznosi 545 nm. Izračunajte potencijal potreban za zaustavljanje fotoelektrona iz natrija obasjanog zračenjem valne duljine 200 nm.

Rezultat: $U_z = 3{,}927$ V

**8.11.** Svjetlost valne duljine 450 nm pada na dvije fotoosjetljive pločice od različitog materijala. Za prvu je fotoosjetljivu pločicu granična valna duljina za fotoefekt 600 nm. Izlazni rad elektrona za drugu pločicu je dvaput veći nego za prvu pločicu. Valja odrediti zaustavni napon za oba materijala.

Rezultat: $U_z = 0{,}691$ V

**8.12.** Kolika je maksimalna energija i brzina elektrona koje iz metala izbacuje $\gamma$–zračenje frekvencije $1{,}23 \cdot 10^{20}$ Hz?

Rezultat: $E_k = 0{,}51$ MeV; $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ m s$^{-1}$

**8.13.** Izračunajte najveću energiju koju foton iz $\gamma$–raspada $^{137}Cs$, energije $E_\gamma = 662$ keV, može predati elektronu u elastičnom srazu. Prije sraza elektron miruje.

Rezultat: $E_k' = 477{,}65$ keV

**8.14.** U Comptonovu raspršenju fotona frekvencije $1{,}2 \cdot 10^{18}$ Hz na ugljiku, elektron na kojem se foton raspršio dobiva energiju 0,85 eV. Koliko stupnjeva iznosi kut raspršenja fotona?

Rezultat: $\vartheta = 10{,}72°$

**8.15.** U Comptonovu raspršenju razlika u frekvenciji fotona prije i poslije raspršenja iznosi $1{,}233 \cdot 10^{20}$ Hz. Odredite brzinu elektrona nakon raspršenja.

Rezultat: $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ m s$^{-1}$

**8.16.** Obasjamo li neku tvar monokromatskim zračenjem, maksimalna kinetička energija Comptonovih elektrona je 0,44 MeV. Odredite valnu duljinu upadnog zračenja.

Rezultat: $\lambda = 2 \cdot 10^{-12}$ m

**8.17.** Valna duljina elektromagnetskog zračenja raspršenog na slobodnom elektronu triput je veća pri raspršenju za kut 120° nego za kut 30°. Odredite valnu duljinu elektromagnetskog zračenja.

Rezultat: $\lambda = 1{,}332 \cdot 10^{-12}$ m

**8.18.** Na miran elektron nalijeće foton čija je frekvencija $3 \cdot 10^{19}$ Hz i raspprši se pod kutom 60° u odnosu prema smjeru svoga kretanja. Pod kojim se kutom i s kojom kinetičkom energijom elektron raspprši?

Rezultat: $\alpha = 54{,}40°$; $E_k = 2{,}15 \cdot 10^{-15}$ J

**8.19.** Energija Comptonova raspršenog fotona, pod kutom 90°, iznosi 0,4 MeV. Odredite energiju fotona prije raspršenja.

Rezultat: $E = 1{,}85$ MeV

# 9. ELEKTRIČNA VODLJIVOST PLINOVA — ELEKTRONI I IONI

## 9.1. Uvod

Plinovi na normalnom tlaku pri sobnoj temperaturi i suhom zraku dobri su izolatori. Međutim, zbog kozmičkog zračenja i zbog zračenja radioaktivnih elemenata, molekule plina se mogu pobuditi ili ionizirati. Nastale nabijene čestice (ioni i elektroni) u električnom polju vode električnu struju. Prestane li teći struja nakon prestanka djelovanja vanjskog uzroka, tada je riječ o nesamostalnom električnom izboju. Samostalni se izboj, međutim, ne prekida zbog formiranja novih iona što ih uzrokuju unutrašnji procesi u plinu.
Između dvaju sudara s molekulama plina elektroni primaju energiju

$$W = eE\overline{\lambda}\,,$$

gdje je $e$ naboj elektrona, $E$ jakost električnog polja, a $\overline{\lambda}$ srednji slobodni put elektrona.
U slabom električnom polju gustoća struje proporcionalna je jakosti električnog polja

$$j \sim E\,.$$

U jačem električnom polju postiže se gustoća struje zasićenja, tj.

$$j_s = n_0 q l\,,$$

gdje je $n_0$ broj ionskih parova u jedinici vremena i u jedinici volumena, a $l$ udaljenost između ravnih paralelnih elektroda. Ako je električno polje jače od spomenutoga, dolazi do električnog proboja.
J. J. Thomson je odredio specifični naboj elektrona $e/m$, mjereći otklon elektrona u homogenom električnom i magnetskom polju:

$$\frac{e}{m} = 1{,}759 \cdot 10^{11} \text{ A s kg}^{-1}\,.$$

Masa elektrona je 1 837 puta manja od mase vodikova atoma. Elektron je subatomska čestica.
Naboj elektrona izmjerio je Millikan metodom "kapljice ulja"

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{A\,s}\,,$$

pa je masa mirovanja elektrona

$$m_0 = 9{,}107 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}\,.$$

## 9.2. Primjeri

**9.1.** Koliko ionskih parova $n_0$ u jedinici vremena i jedinici volumena formira vanjski izvor ionizacije između ravnih paralelnih elektroda, međusobno udaljenih 0,05 m, ako je površina svake elektrode 0,04 m$^2$, a jakost struje zasićenja $2 \cdot 10^{-8}$ A?

***rješenje*** Tražena gustoća ionskih parova je

$$n_0 = \frac{j_s}{ql}\,,$$

gdje je $j_s$ gustoća struje zasićenja, a $l$ udaljenost između elektroda. Uz poznatu jakost struje zasićenja $I_s$ i površine elektroda $S$ dobivamo:

$$n_0 = \frac{I_s}{qSl}$$

$$n_0 = \frac{2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{A}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{A\,s} \cdot 4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^2} \cdot 0{,}05\ \mathrm{m}}$$

$$n_0 = 6{,}25 \cdot 10^{13}\ \mathrm{s^{-1}\,m^{-3}}\,.$$

**9.2.** Između otklonskih pločica katodne cijevi ulazi elektron poznate brzine $v_x = 2{,}65 \cdot 10^7\ \mathrm{ms^{-1}}$. Duljina pločica $l = 2$ cm, a razmak između pločica $d = 0{,}5$ cm. Razlika potencijala između pločica je $V = 100$ V. Ekran je od drugog kraja pločica udaljen za $D = 20$ cm. Odredite otklon svijetle mrlje $y$ što su je izazvali elektroni na ekranu.

***rješenje*** Električno polje $E = V/d$, a akceleracija koju dobiva elektron u smjeru osi $y$

$$a_y = \frac{eE}{m}\,.$$

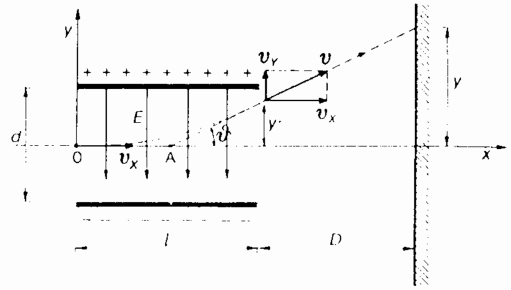
Brzina u smjeru osi $x$ ostaje stalna. Elektron stiže na drugi kraj pločica u vremenu

$$t = \frac{l}{v_x}\,.$$

Pritom se brzina u smjeru osi $y$ poveća na

$$v_y = a_y t\,,$$






Slika 9.1.

pa je otklon elektrona u tom smjeru

$$y' = \frac{1}{2}\,a_y t^2\,.$$

Tome odgovarajući vektor brzine $\vec{v}$ čini kut $\vartheta$ sa osi $x$, pa je

$$\tan\vartheta = \frac{v_y}{v_x}\,.$$

Od drugog kraja pločica do ekrana elektron putuje po dijelu pravca koji siječe os $x$ u točki A koja leži na udaljenosti $l/2$ od ishodišta koordinatnog sustava, pa je

$$\tan\vartheta = \frac{y}{D + \frac{l}{2}}\,.$$

Za zadane vrijednosti fizikalnih veličina, električno polje je

$$E = \frac{V}{d} = \frac{10^2\ \mathrm{V}}{5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 2 \cdot 10^4\ \mathrm{V\,m^{-1}}\,,$$

a akceleracija

$$a_y = \frac{eE}{m} = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{A\,s} \cdot 2 \cdot 10^4\ \mathrm{V\,m^{-1}}}{9{,}107 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}$$

$$a_y = 3{,}51 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

Vrijeme koje je potrebno da elektron prođe put jednak duljini pločica

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}{2{,}65 \cdot 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}} = 7{,}55 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{s}\,,$$

pa je brzina

$$v_y = a_y t = 3{,}51 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 7{,}55 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{s}\,,$$

$$v_y = 2{,}65 \cdot 10^6\ \mathrm{m\,s^{-1}}\,,$$

a otklon

$$y' = \frac{1}{2}\,a_y t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}51 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (7{,}55 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{s})^2$$

$$y' = 10^{-3}\ \mathrm{m}\,.$$

Kako je

$$\tan\vartheta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2{,}65 \cdot 10^6\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{2{,}65 \cdot 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

$$\tan\vartheta = 0{,}10\ ,$$

vrijednost otklona elektrona na ekranu glasi:

$$y = \left(D + \frac{l}{2}\right)\tan\vartheta = (20\ \mathrm{cm} + 1\ \mathrm{cm}) \cdot 0{,}10\ \mathrm{cm}$$

$$y = 2{,}1\ \mathrm{cm}\ .$$

## 9.3. Zadaci

**9.1.** Srednji slobodni put elektrona u zraku uz normalne uvjete je $5 \cdot 10^{-6}$ m. Odredite jakost električnog polja pri kojoj se elektronom može ionizirati molekulu nekog od plinova u zraku, ako je njezina energija ionizacije 15 eV.

Rezultat: $3 \cdot 10^6\ \mathrm{V\,m^{-1}}$

**9.2.** Objasnite zbog čega pri smanjenju tlaka zraka u izbojnoj cijevi elektroni ioniziraju molekule pri nižim naponima?

Rezultat: Elektorni u električnom polju između dva sudara s molekulama zraka primaju energiju proporcionalnu srednjem slobodnom putu. Srednji slobodni put se povećava smanjenjem tlaka plina.

**9.3.** Ravne paralelne elektrode u ionizacijskoj komori udaljene su međusobno 0,1 m, a površina svake je 0,01 m$^2$. Odredite struju zasićenja ako vanjski izvor ionizacije formira svake sekunde u jedinici volumena $10^9$ ionskih parova.

Rezultat: $I_s = 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ A

**9.4.** U Wehneltovoj cijevi elektroni se ubrzavaju pri razlici potencijala 2 kV. Tako ubrzani elektroni ulete u homogeno magnetsko polje gdje se nastave gibati kružnom stazom čiji je polumjer 0,1 m. Koliko je pritom magnetska indukcija?

Rezultat: $B = 1{,}508 \cdot 10^{-3}$ T

**9.5.** U Millikanovu pokusu, ako nema električnog polja, nabijena kapljica ulja prijeđe put $l$ = 1 mm za $t$ = 28 s. Uz prisutnost električnog polja kapljica miruje. Odredite promjer kapljice ako je koeficijent viskoznosti zraka $\eta = 1{,}80 \cdot 10^{-5}$ kg/m s, gustoća ulja $\varrho = 800$ kg/m$^3$, a gustoća zraka $\varrho' = 1{,}3$ kg/m$^3$.

Rezultat: $d = 6\sqrt{\dfrac{\eta l}{2gt(\varrho - \varrho')}}$

$d = 1{,}2\ \mu\mathrm{m}$

# 10. STRUKTURA ATOMA

## 10.1. Uvod

Diskretne spektralne linije rezultat su elektromagnetske emisije iz atoma razrijeđenih plinova i para metala pobuđenih najčešće u električnom polju. Vodikov atom emitira serije spektralnih linija određenih valnih duljina. Empirijska formula glasi:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)\ , \qquad (10.1)$$

gdje je Rydbergova konstanta $R = 1{,}097 \cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$. Znak $k = 1, 2, 3 \ldots$, a pripadne vrijednosti $n = k+1, k+2, k+3 \ldots$.

Valne duljine spektralnih linija mogu se teorijski izračunati pomoću Bohrova modela atoma. Pomoću tog modela može se riješiti svaki slučaj kada se u električnom polju atomske jezgre giba samo jedan elektron.

Elektron se giba kružnicom čiji je polumjer $r$, a brzina gibanja $v$, pa je ukupna energija tog elektrona

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\ , \qquad (10.2)$$

gdje je $Z$ redni broj elementa, $m$ masa elektrona, a $e$ naboj elektrona.

Dopušteni polumjeri kružnice jesu:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2}\, n^2 \qquad \text{za } n = 1, 2, 3 \ldots\ , \qquad (10.3)$$

gdje je Planckova konstanta $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J s. Pritom energija elektrona na stazi polumjera $r_n$ glasi:

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\,\frac{1}{n^2}\ . \qquad (10.4)$$

Ako elektron padne s razine energije $E_n$ na razinu energije $E_k$, atom izbaci kvant svjetlosti:

$$h\nu = E_n - E_k\,, \tag{10.5}$$

odnosno

$$h\nu = \frac{Z^2 m e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)\,. \tag{10.6}$$

Za vodikov atom uz zamjenu $\nu\lambda = c$ ($c$ je brzina svjetlosti), dobivamo:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m e^4}{8h^3 c\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)\,. \tag{10.7}$$

Prvi faktor u izrazu (10.7) je

$$R_\infty = \frac{m e^4}{8h^3 c\varepsilon_0^2}$$

ili točnije

$$R_H = \frac{R_\infty}{1 + \dfrac{1}{1\,838}} = 10\,967\,775{,}9\ \mathrm{m}^{-1}\,.$$

To je Rydbergova konstanta kao u empirijskom izrazu (10.1).
Bohrov model atoma uvodi glavni kvantni broj $n$ čije su vrijednosti:

$$n = 1, 2, 3 \ldots\,.$$

Orbitalni kvantni broj:

$$l = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Magnetski kvantni broj može dobiti vrijednosti:

$$m = l, l-1, \ldots 0, -1 \ldots -l.$$

Kvantni broj spina ima dvije vrijednosti:

$$s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\,.$$

Paulijevo načelo isključenja određuje skupno vladanje fermiona, čestica sa polucijelim spinom. Prema tom načelu, unutar jednog sustava ne mogu biti dva fermiona koji bi se podudarali u svim svojim kvantnim brojevima. To se načelo primjenjuje na elektrone u atomu i time se fizikalno objašnjava periodički sustav elemenata.



Bozoni su čestice s kvantnim brojem spina

$$s = 0, \ldots\,,$$

dok fotoni imaju kvantni broj spina

$$s = 1\,.$$

Rentgensko zračenje nastaje pri udaranju brzih elektrona o neki materijal. Ta je pojava suprotna fotoelektričnom efektu. Energija nastalih fotona $h\nu$ u najpovoljnijem je slučaju jednaka potrošenoj kinetičkoj energiji elektrona $E_k$, pa vrijedi:

$$E_k \geq h\nu - W\,,$$

gdje je izlazni rad $W$ zanemarivo malen. Elektroni ubrzani na razlici potencijala $U$ emitiraju rentgensko zračenje kontinuiranog spektra, energije

$$h\nu \leq eU\,,$$

pa odavde i valna duljina nastalog rentgenskog zračenja

$$\lambda \geq \frac{hc}{eU}\,.$$

Moseleyev zakon određuje karakteristični spektar rentgenskog zračenja.
Rentgenske zrake pokazuju difrakcijske pojave na kristalnoj rešetki. Razlika puta između dvije zrake što se reflektiraju sa susjednih Braggovih ravnina daje difrakcijski maksimum zračenja ako je:

$$2d\sin\vartheta = n\lambda \qquad n = 1, 2, 3 \ldots\,,$$

gdje je $\vartheta$ kut što ga zatvara zraka i Braggova ravnina.
Prema de Broglieu valovima materije pripada frekvencija prema formuli:

$$mc^2 = h\nu\,,$$

gdje je $mc^2$ ukupna energija čestice, dok valna duljina $\lambda$ valova materije ovisi o količini gibanja čestice mase $m$ koja se giba brzinom $v$, tj.

$$mv = \frac{h}{\lambda}\,.$$

## 10.2. Primjeri

**10.1.** Odredite vrijeme za koje bi elektron koji kruži orbitom polumjera $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm oko jezgre atoma vodika, pao na tu jezgru ako bi pritom kruženju zračio energiju u skladu s klasičnom teorijom:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|\ddot{\vec{r}}|^2 . \qquad (1)$$

Ovdje je $\ddot{\vec{r}}$ ubrzanje elektrona, koje se sve vrijeme podudara sa centripetalnim ubrzanjem. Masa elektrona je $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

***rješenje*** Kako je energija:

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}, \qquad \text{to je} \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{e}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\dot{r} . \qquad (2)$$

Iz osnovnog zakona za silu vrijedi:

$$m\ddot{r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2},$$

pa je

$$\ddot{r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m r^2} .$$

Prema (1) i (2) slijedi:

$$\frac{e^2}{2\cdot 4\pi\varepsilon_0 r^2}\dot{r} = -\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 3c^3}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 m^2 r^4},$$

odnosno

$$\dot{r} = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 c^3 m^2}\frac{1}{r^2} .$$

Integracijom

$$\int_{r_0}^{0} r^2\,dr = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 c^3 m^2}\int_0^T dt$$

dobivamo traženo vrijeme

$$T = \frac{r_0^3 c^3 m^2 (4\pi\varepsilon_0)^2}{4e^4}$$

$$T = 1{,}3 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s} .$$

**10.2.** Pomoću Bohrova modela:
a) Izračunajte prve četiri energijske razine dvostruko ioniziranog atoma litija ${}_3\mathrm{Li}^{++}$.
b) Kolike su valne duljine linija $K_\alpha$ $K_\beta$ i $K_\gamma$ u tom atomu?



***rješenje*** a) Atomi u kojima samo jedan elektron kruži oko jezgre slični su vodikovu atomu pa se za njih može izravno primijeniti Bohrov model. Takvi su atomi H, $He^+$, $Li^{++}$ ...
Iz prvoga Bohrova postulata

$$L = mvr_n = n\frac{h}{2\pi} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

i zakona kružnog gibanja

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dobili smo kinetičku energiju elektrona

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r} .$$

Potencijalna energija elektrona i jezgre je

$$E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

pa je ukupna energija

$$E_n = E_k + E_p = -\frac{Z^2 me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$$

ili, kad uvrstimo numeričke vrijednosti

$$E_1 = -122{,}4\ \mathrm{eV}, \qquad E_2 = \frac{E_1}{4} = -30{,}6\ \mathrm{eV}, \qquad E_3 = -13{,}6\ \mathrm{eV}\ \text{itd.}$$

Energija ionizacije jednaka je po iznosu energiji osnovnog stanja i za atom $Li^{++}$ iznosi $E_i = 122{,}4$ eV.

b) K-serija nastaje prijelazom elektrona iz viših razina u osnovnu. Valna duljina može se računati pomoću formule

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R_\infty\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

gdje je $n = 1$, a $m = 2$ za $K_\alpha$, $m = 3$ za $K_\beta$ i $m = 4$ za $K_\gamma$-liniju. Rydbergova konstanta je:

$$R_\infty = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

$$R_\infty = 1{,}09737 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1} .$$

Uzme li se u obzir i masa jezgre $M$, tada Rydbergova konstanta poprima nešto manju vrijednost

$$R = \frac{mM}{m+M}\cdot\frac{e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} .$$

Za ionizirani atom ${}_3\mathrm{Li}^{++}$ ta je korekcija zanemariva. Uvrštavanjem dobivamo:

$$\lambda_{K_\alpha} = 13{,}5\ \mathrm{nm},$$

$$\lambda_{K_\beta} = 11{,}4\ \mathrm{nm},$$

$$\lambda_{K_\gamma} = 10{,}8\ \mathrm{nm} .$$

**10.3.** U Bohrovu modelu atoma vodika elektron prelazi iz stanja $n = 2$ u stanje $n = 1$ emitirajući pritom foton u $+x$ smjeru. Budući da foton pritom ima određenu količinu gibanja, tada se atom mora gibati u $-x$ smjeru. Pomoću zakona očuvanja energija i količine gibanja odredite brzinu atoma.

***rješenje*** Energija atoma vodika u stanju $n = 2$ je:

$$E_2 = \frac{E_1}{n^2} = \frac{-13{,}6\,\mathrm{eV}}{4} = -3{,}4\,\mathrm{eV}\,.$$

Promjena energije je:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -3{,}4\,\mathrm{eV} + 13{,}6\,\mathrm{eV} = 10{,}2\,\mathrm{eV}\,.$$

Zakon očuvanja energije daje:

$$\frac{Mv^2}{2} + E_\gamma = \Delta E$$

gdje je $M$ masa vodikova atoma, $v$ brzina vodikova atoma

$$E_\gamma = h\nu\,.$$

Iz zakona očuvanja količine gibanja izlazi:

$$Mv = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}\,, \qquad E_\gamma = Mvc$$

$$\frac{Mv^2}{2} + Mvc = \Delta E$$

$$v^2 + 2cv - \frac{2\Delta E}{M} = 0$$

$$v = -c \pm \sqrt{c^2 + \frac{2\Delta E}{M}}\,.$$

Primjenom aproksimacije

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

brzina atoma vodika je:

$$v \approx c\left(-1 + 1 + \frac{\Delta E}{Mc^2}\right) = \frac{\Delta E}{Mc} = 325\,\mathrm{cm\,s^{-1}}\,.$$

**10.4.** Pokažite da se orbitalni i spinski moment vrtnje, $\vec{L}$ i $\vec{L}_s$, mogu povezati u relacije:

a) $\vec{L}\cdot\vec{L}_s = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - L_s^2)$.

b) $\vec{L}\cdot\vec{L}_s = \frac{\hbar^2}{2}\,[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$.



***rješenje*** a) Orbitalni, spinski i ukupni moment vrtnje vektori su definirani u kvantnoj mehanici relacijama:

$$|\vec{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)} \qquad |\vec{L}_s| = \hbar\sqrt{s(s+1)} \qquad |\vec{J}| = \hbar\sqrt{j(j+1)}\,. \tag{1}$$

Računajmo $\vec{L}\cdot\vec{L}_s$ produkt:

$$\vec{L}\cdot\vec{L}_s = L\,L_s \cos\sphericalangle(\vec{L},\vec{L}_s) \tag{2}$$

$$\vec{L} + \vec{L}_s = \vec{J}\,. \tag{3}$$

Kvadrirajući (3) dobivamo jednadžbu za kut između $\vec{L}$ i $\vec{L}_s$ vektora:

$$L^2 + L_s^2 + 2LL_s\cos\sphericalangle(\vec{L},\vec{L}_s) = J^2$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{L},\vec{L}_s) = \frac{J^2 - L^2 - L_s^2}{2LL_s}\,. \tag{4}$$

Zamjenom (4) u (2) dokazuje se pretpostavljena veza

$$\vec{L}\cdot\vec{L}_s = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - L_s^2)\,. \tag{5}$$

b) Uvrštavanjem izraza iz relacije (1) izravno u relaciju (5) dobiva se tražena veza:

$$\vec{L}\cdot\vec{L}_s = \frac{1}{2}\,[\hbar^2\cdot j(j+1) - \hbar^2\cdot l(l+1) - \hbar^2\cdot s(s+1)] \tag{6}$$

$$\vec{L}\cdot\vec{L}_s = \frac{\hbar^2}{2}\,[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]\,. \tag{7}$$

**10.5.** Kruženje elektrona oko jezgre u atomu možemo shvatiti kao kružnu strujnu petlju.

a) Kolika je ta ekvivalentna struja ako je atom vodika u osnovnom i prvom pobuđenom stanju?

b) Koliko je magnetsko polje u središtu kružnice, tj. tamo gdje je jezgra proton?

***rješenje*** a) Prema Bohrovu modelu atoma vodika elektron kruži oko jezgre kružnicom polumjera

$$r_n = n^2\,\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}\,.$$

Pritom je brzina elektrona

$$v_n = \frac{e^2}{2n\varepsilon_0 h}\,.$$

Ekvivalentna je struja

$$I_n = ef_n = \frac{ev_n}{2r_n\pi} = \frac{m_e e^5}{4n^3\varepsilon_0^2 h^3}\,.$$

Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti dobivamo za osnovno stanje ($n = 1$)

$$I_1 = 1{,}05\,\mathrm{mA}$$

i za prvo pobuđeno stanje ($n = 2$)

$$I_2 = 0{,}13 \text{ mA} .$$

b) Magnetsko polje, odnosno indukcija u središtu kružne petlje polumjera $r$ je

$$B = \mu_0 \frac{I}{2r\pi} .$$

Uvrštavanjem $I_n$ i $r_n$ dobivamo

$$B_n = \mu_0 \frac{\pi m_e e^7}{8\varepsilon_0^3 h^5 n^5} .$$

Tako dobivamo:

$$B_1 = 12{,}4 \text{ T}$$

$$B_2 = 0{,}39 \text{ T} .$$

**10.6.** U Stern–Gerlachovu pokusu snop neutralnih atoma srebra ($_{47}$Ag) razdvaja se u nehomogenome magnetskom polju na dva snopa. Odredite razliku dodatne potencijalne energije atoma jednog i drugog snopa ako je vanjsko magnetsko polje indukcije $B = 1$ T.

***rješenje*** Atom srebra ima 47 elektrona. Magnetski efekti zbog gibanja 46 elektrona međusobno se poništavaju i magnetski dipolni moment atoma srebra uzrokovan je magnetskim momentom 47-og elektrona koji se nalazi u stanju 4s. Budući da je za s-stanje $l = 0$, i orbitalni magnetski moment tog elektrona također je nula, pa je magnetski moment atoma srebra $\mu_s$ uzrokovan spinom njegova valentnog 4s-elektrona. Potencijalna magnetska energija je

$$E_p = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = \mu B \cos\vartheta .$$

Ako je magnetsko polje u smjeru osi $z$, a projekcija vlastitog magnetskog momenta spina $\mu_{sz}$, tada je:

$$E_p = \mu_{sz} B_z .$$

Projekcija vlastitog (spinskog) magnetskog momenta elektrona je

$$\mu_{sz} = -2\, m_s \mu_B ,$$

gdje je Bohrov magneton

$$\mu_B = \frac{eh}{2m_e} = 5{,}79 \cdot 10^{-5} \text{ eVT}^{-1}$$

$$\mu_B = 9{,}27 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1} .$$

Spinski kvantni broj $m_s$ može poprimiti dvije vrijednosti:

$$m_s = \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad m_s = -\frac{1}{2} .$$

U Stern-Gerlachovu pokusu u jednom su snopu atomi čiji valentni elektroni imaju spinski kvantni broj $m_s = \frac{1}{2}$, a u drugom $m_s = -\frac{1}{2}$.



Magnetska potencijalna energija atoma u jednom snopu je

$$E_{p1} = 2m_s\mu_B B_z = 5{,}7 \cdot 10^{-5} \text{ eV} ,$$

a u drugom snopu

$$E_{p2} = 2m_s\mu_B B_z = -5{,}79 \cdot 10^{-5} \text{ eV} ,$$

pa je razlika potencijalnih energija atoma jednog i drugog snopa

$$\Delta E_p = 2E_p = 1{,}16 \cdot 10^{-4} \text{ eV} .$$

**10.7.** Zamislite da je elektron zatvoren u kocku čija je stranica $a = 10^{-10}$ m. Kolika je najmanja kinetička energija koju može imati elektron u takvoj kocki?

***rješenje*** Kinetička energija

$$E_K = \frac{p^2}{2m} ,$$

a $p = \hbar k$ prema de Broglievoj hipotezi, pa je

$$E_K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} ,$$

gdje je $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Najmanja kinetička energija odgovara najvećoj valnoj duljini elektronskog vala u kocki, $\lambda = \frac{a}{2}$.

$$E_K^{\text{min.}} \approx \frac{2h^2}{ma^2} = 9{,}64 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 602{,}5 \text{ eV} .$$

**10.8.** Granica Balmerove serije za vodik je 364,6 nm. Izračunajte atomski broj i utvrdite element koji bi proizveo X-zračenje prijelazom u nižu ljusku do najmanje valne duljine od 0,1 nm.

***rješenje*** Granica Balmerove serije za $n = \infty$ je:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) , \tag{1}$$

što omogućuje određivanje konstante $R$:

$$R = \frac{4}{\lambda} = \frac{4}{364{,}6 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} . \tag{2}$$

Zahtjev za najmanjom valnom duljinom upućuje da je riječ o K-fotonu X-zračenja. Valna duljina K-serije određena je Moseleyevom jednadžbom:

$$\frac{1}{\lambda_X} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) . \tag{3}$$

Rubna valna duljina, odnosno najmanja (najveća) valna duljina (frekvencija) X-zračenja nalaže uvjet da je $n = \infty$, pa je iz jednadžbe (3)

$$(Z-1)^2 = \frac{1}{R\lambda_X} . \tag{4}$$

Uvrštenjem $R$ iz (2) dobivamo

$$(Z-1)^2 = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1} \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 911{,}57\,, \tag{5}$$

pa slijedi atomski broj elementa galija

$$(Z-1) = 30{,}19 \qquad Z = 31{,}19$$

$$Z = 31\,.$$

**10.9.** Želite li uočiti objekt veličine $2{,}5 \cdot 10^{-10}$ m, izračunajte kolika je najmanja energija fotona za to potrebna? Što bismo dobili ako bi umjesto fotona upotrijebili elektrone?

***rješenje*** Valna duljina bi trebala biti reda veličine (ili manja) od objekta, odnosno

$$E_{\text{min.}} = h f_{\text{min.}}$$

$$E_{\text{min.}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{maks.}}} = \frac{12{,}4 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{eV\ m}}{2{,}5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 4{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{eV}\,.$$

Minimalna energija elektrona može se odrediti iz de Broglieve relacije za valnu duljinu elektrona

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}\,.$$

Slijedi

$$E_{\text{min.}} = \frac{h^2}{2m\lambda^2_{\text{maks.}}}$$

$$E_{\text{min.}} = 24{,}1\ \mathrm{eV}\,.$$

**10.10.** H. Mosley je našao da se frekvencije za serije K i L rentgenskog zračenja mogu odrediti uz pomoć izraza $f^{1/2} = A(Z - Z_0)$, gdje je $Z$ redni broj elementa mete (antikatode), a $A$ i $Z_0$ su konstante ovisne o vrsti prijelaza u atomima mete. Uz pomoć jednostavnog Bohrovog modela atoma, odredite vrijednost konstante $A$ za serije $K_\alpha$ i $L_\alpha$ prijelaza.

***rješenje*** Za vodikov atom vrijedi da je frekvencija prijelaza određena izrazom:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = RZ^{*2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

ili

$$f^{1/2} = \left[\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) cR\right]^{1/2} Z^*\,,$$

gdje su $n$ i $m$ glavni kvantni brojevi donjeg i gornjeg kvantnog stanja elektrona u vodikovu atomu, $R$ Rydbergova konstanta. $Z^*$ je efektivni pozitivni naboj koji osjeća elektron. On odgovara razlici $Z - Z_0$ u Moseyevoj relaciji, a u vodikovu



atomu jednak je 1. Za prijelaze $K_\alpha$ i $L_\alpha$ vrijedi da je $n = 1$, $m = 2$; $n = 2$, $m = 3$, pa je:

$$f_{K_\alpha}^{1/2} = \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2}\right) cR\right]^{1/2} Z^* = \left(\frac{3}{4}cR\right)^{1/2} Z^* = 4{,}97 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}^{1/2} \cdot Z^*$$

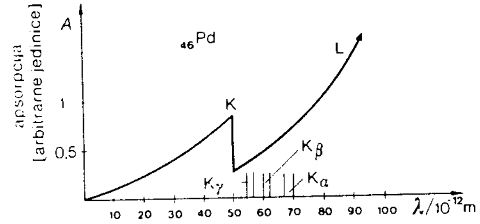
$$f_{L_\alpha}^{1/2} = \left[\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) cR\right]^{1/2} Z^* = \left(\frac{5}{36}cR\right)^{1/2} Z^* = 2{,}14 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}^{1/2} \cdot Z^*\,.$$

Dakle

$$A_{K_\alpha} = 4{,}97 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}^{1/2}$$

$$A_{L_\alpha} = 2{,}14 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}^{1/2}\,.$$

**10.11.** Spektroskopijom karakterističnog spektra X-zračenja utvrđena je fina struktura apsorpcijskih spektara za razne elemente: materijal u obliku tanke folije izlaže se kontinuiranom rentgenskom zračenju koje se nakon prolaska kroz foliju analizira Braggovim spektrometrom. Očitanja s folijom i bez nje na svakoj valnoj duljini upadnog zračenja omogućuju grafički prikaz apsorpcije zračenja u ovisnosti o valnoj duljini. Na slici 10.1. prikazan je apsorpcijski spektar elementa $_{46}$Pd, i to onaj njegov dio gdje se vidi K-apsorpcijski rub.
**a)** Objasnite kako nastaje oblik spektra prikazan na slici? Kako apsorpcija zračenja kvalitativno ovisi o valnoj duljini?
**b)** Izračunajte K-ionizacijski potencijal za $_{46}$Pd prema slici 10.1.




Slika 10.1.

***rješenje*** a) Objašnjenje oblika spektra izvire iz naše slike o strukturi atomskih staza i kvantno/korpuskularnoj naravi X-zračenja. Na vrlo uskom području valnih duljina, energija upadajućeg fotona, $E_X = hc/\lambda_X$, je tek nešto veća od ukupne energije elektrona u K-stazi i zato dovoljna da izbaci elektron iz K-staze. Foton se pritom apsorbira i atom prelazi u više energijsko stanje. Ta se pojava eksperimentalno manifestira tako da je u apsorpcijskom spektru za spomenuto područje valnih duljina apsorpcija veoma visoka. Ako se valna duljina i dalje povećava, energija X-fotona postaje manja od ionizacijske energije K-staze, pa se transmisija X-zračenja povećava i apsorpcija nužno opada. Na slici se to vidi kao oštri, diskretno-kvantni pad u krivulji apsorpcije. Kvantitativno to odgovara granici K-serije u Moseyleyevoj formuli:

$$\nu_K = cR(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty}\right) = R(Z-1)^2\,. \tag{1}$$

Analizom parova $(A, \lambda)$ iz slike se, zanemarenjem apsorpcijskih rubova, može izvesti da se apsorpcija mijenja sa $\lambda^3$, gdje je $\lambda$ valna duljina upadnog X--zračenja.

b) Apsorpcijski K-rub računamo na osnovi grafički evaluiranog podatka, $\lambda_K = 50$ pm (prema slici):

$$E_K = h\nu_K = h\frac{c}{\lambda_K} = 4{,}135\,6 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\,\frac{3 \cdot 10^8\,\text{m s}^{-1}}{50 \cdot 10^{-12}\,\text{m}} = 24{,}816\,\text{keV} \quad (2)$$

Dakle, K-ionizacijski potencijal za element paladij ($Z = 46$) jest 24,816 keV.

**10.12.** Comptonov pomak u valnoj duljini želimo mjeriti Braggovim X-spektrometrom. Koju najmanju debljinu $D$ kristalne pločice valja uzeti da bi se fotone, raspršene pod kutom 80° od upadnog smjera X-zraka, moglo analizirati? Raspršeni foton upada na kristalne ravnine pločice pod kutom 30°. Valna duljina X-zračenja je 0,075 nm.

(*Uputa*: Moć razlučivanja spektrometra određuje najmanju debljinu pločice.)

***rješenje*** Moć razlučivanja spektrometra, u analogiji s optičkom rešetkom, jest:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m\,N \quad (1)$$

gdje je $m$ red spektra, a $N$ ukupni broj mrežnih ravnina u kristalnoj pločici. Red spektra, $m$ može se izračunati iz Braggova uvjeta za maksimume prilikom ogiba rentgenskih zraka:

$$2d\sin\varphi = m\lambda \qquad m = \frac{2d\sin\varphi}{\lambda}, \quad (2)$$

gdje je $d$ razmak atomskih ravnina u kristalu. Pomak u valnoj duljini raspršenog fotona određen je Comptonovom relacijom:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\vartheta)\,. \quad (3)$$

Povezivanjem (1), (2) i (3) dobivamo:

$$m\,N = \frac{2d\sin\varphi}{\lambda}\cdot N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\frac{h}{m_e c}(1 - \cos\vartheta)}\,. \quad (4)$$

Budući da je $N = \dfrac{D}{d}$, to će najmanja tražena debljina $D$ pločice biti, prema (4):

$$D = \frac{\lambda^2}{2\frac{h}{m_e c}\sin\varphi(1 - \cos\vartheta)}\,. \quad (5)$$

Uvrštenjem podataka, dobivamo $D$:

$$\lambda = 0{,}075\,\text{nm}$$

$$\frac{h}{m_e c} = 2{,}426 \cdot 10^{-12}\,\text{m}$$

$$\varphi = 30^\circ \qquad D = \frac{0{,}075^2 \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 2{,}426 \cdot 10^{-12} \cdot \sin 30^\circ \cdot (1 - \cos 80^\circ)}\,\text{m}$$

$$\vartheta = 80^\circ \qquad D = 2{,}8 \cdot 10^{-9}\,\text{m}\,.$$



## 10.3. Zadaci

**10.1.** Pretpostavimo da foton energije 2,55 eV pogađa atom vodika koji se nalazi u prvom pobuđenom stanju. Koji je glavni kvantni broj višega pobuđenog stanja u koji prelazi atom vodika, ako se foton apsorbirao u atomu?

Rezultat: $n = 4$

**10.2.** Atomi vodika, koji se nalaze u osnovnom energetskom stanju, pobuđuju se ultraljubičastim zračenjem, zbog čega emitiraju šest spektralnih linija. Izračunajte valnu duljinu ultraljubičastog zračenja u jedinicama Rydbergove konstante $R_H$ i u nanometrima.

(*Uputa*: Primijenite jednostavni Bohrov model atoma vodika.)

Rezultat: $\lambda = \dfrac{16}{15\,R_H} = 97{,}2$ nm

**10.3.** Odredite koliko se puta poveća polumjer putanje elektrona vodikova atoma ako mu se u osnovnom stanju dovede energija 12,09 eV.

Rezultat: 9 puta

**10.4.** Prosječno vrijeme života elektrona atoma vodika u $n$-tom stanju reda je veličine $10^{-8}$ s. Koliko se puta elektron okrene oko jezgre prije prijelaza u osnovno stanje ako je:
a) $n = 2$, b) $n = 15$.

Rezultat: a) $N = 8{,}19 \cdot 10^6$ puta
b) $N = 1{,}94 \cdot 10^4$ puta

**10.5.** Izračunajte polumjer $n$-te staze elektrona u atomu vodika ako je poznato da pri prijelazu na niže energijsko stanje $m = 2$ emitira foton valne duljine 0,487 μm.

Rezultat: $r_n = 8{,}4 \cdot 10^{-10}$ m

**10.6.** Izračunajte kružnu frekvenciju elektrona u vodikovu atomu u osnovnom i u prvom pobuđenom stanju.

Rezultat: $\omega_1 = 4{,}11 \cdot 10^{16}\,\text{s}^{-1}$
$\omega_2 = 5{,}14 \cdot 10^{15}\,\text{s}^{-1}$

**10.7.** Pri prijelazu u pobuđeno energijsko stanje 10,19 eV vodikov atom emitira foton valne duljine 489 nm. Odredite energiju vezanja polaznog stanja i glavne kvantne brojeve baznog i konačnog stanja.

Rezultat: $E = 0{,}87$ eV; $m = 4$; $n = 2$

**10.8.** Svjetlost iz vodikom punjene cijevi pada okomito na optičku rešetku. Konstanta rešetke jest $5 \cdot 10^{-4}$ cm. Kojem prijelazu elektrona odgovara spektralna linija koja se pomoću rešetke u spektru petog reda vidi pod kutom 41°

Rezultat: $\underset{(n=3)}{M} \longrightarrow \underset{(n=2)}{L}$

**10.9.** Kolika je razlika potencijala potrebna za ubrzanje elektrona iz mirovanja da bi nakon ubrzanja imao valnu duljinu 10 pm?

Rezultat: $U = 1{,}5 \cdot 10^4$ V

**10.10.** Kolika je minimalna kinetička energija u primjeru 10.7. ako se u kocki nalazi $N$ elektrona čiji su spinovi paralelni?

Rezultat: $E_{\mathrm{k,min.}} = 9{,}64 \cdot 10^{-17}\ N^{\frac{5}{3}}$ J

**10.11.** U Franck–Hertzovu pokusu (1914. god.) mjerena je strujnonaponska karakteristika cijevi ispunjene živinim parama. Pokus je pokazao niz strujnih maksimuma za niz napona koji su se međusobno razlikovali za 4,88 V. Odredite valnu duljinu zračenja koju je emitirala živina para u cijevi.

Rezultat: $\lambda = 254$ nm

**10.12.** Televizijska cijev radi s ubrzavajućim potencijalom od 20 kV. Kolika je minimalna valna duljina rentgenskog zračenja koje emitira TV?

Rezultat: $\lambda_{\mathrm{min.}} = 0{,}62 \cdot 10^{-10}$ m

**10.13.** Kvantnim skokom elektrona iz L–staze u K–stazu, emitira se rentgensko zračenje valne duljine 0,0788 nm. Koji je to atom?

Rezultat: $_{40}$Zr (cirkonij)

**10.14.** Rezultati eksperimentalnog određivanja $K_\alpha$–linija u spektru X-zračenja različitih elemenata

$$\lambda(\mathrm{Fe}):\ 1{,}94 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \qquad \lambda(\mathrm{Co}):\ 1{,}79 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

$$\lambda(\mathrm{Ni}):\ 1{,}66 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \qquad \lambda(\mathrm{Cu}):\ 1{,}54 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\,.$$

Uz pomoć Moseleyeve relacije odredite redni broj svakog od navedenih elemenata.

Rezultat: $Z(\mathrm{Fe}) = 26$; $Z(\mathrm{Co}) = 27$
$Z(\mathrm{Ni}) = 28$; $Z(\mathrm{Cu}) = 29$

**10.15.** Energija vezanja elektrona u K–ljusci atoma molibdena je 20 keV. Valna duljina molibdenove $K_\alpha$–linije je 72,5 pF. Kolika je energija vezanja elektrona u L–ljusci istog atoma?

Rezultat: $E_{bL} = 2{,}853$ keV

**10.16.** Difrakcija $K_\alpha$–rentgenskih zraka iz bakra na nekom kristalu dobiva se pod kutom $\vartheta = 15{,}1°$ ($\vartheta$ je kut između upadnih zraka i Braggove kristalne ravnine). Koliki je razmak Braggovih ravnina?

Rezultat: $d = 0{,}3$ nm

**10.17.** Neki element obasjan monoenergijskim X–zračenjem emitirao je elektrone energije: 24 keV, 100 keV, 110 keV i 115 keV. Ako bi taj element bio upotrijebljen kao antikatoda (elektroda–meta) u rentgenskoj cijevi, kolika bi bila karakteristična valna duljina $K_\alpha$–linije?

Rezultat: $1{,}63 \cdot 10^{-11}$ m

# 11. ATOMSKA JEZGRA

## 11.1. Uvod

Atomska jezgra je sastavljena od $A$ nukleona: $Z$ protona i $A - Z$ neutrona. Ovdje je $A$ maseni broj. Naboj jezgre je $Ze$, gdje je $e = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C (naboj protona).
Atomske mase iskazuju se u atomskim jedinicama mase $u$:

$$u = \frac{1}{12}\,\mathrm{m}\left({}^{12}_{6}\mathrm{C}\right) = 1{,}660\,54 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Maseni ekvivalent energije jedne atomske jedinice mase

$$m_u c^2 = 931{,}478\ \mathrm{MeV}\,.$$

Masa mirovanja protona, neutrona i atoma vodika:

$$m_\mathrm{p} = 1{,}007\,28\,\mathrm{u}\,, \qquad m_\mathrm{n} = 1{,}008\,67\,\mathrm{u}\,, \qquad m_\mathrm{H} = 1{,}007\,825\,\mathrm{u}\,.$$

Defekt mase $\Delta m$ razlika je ukupne mase protona i neutrona $Zm_\mathrm{p} + Nm_\mathrm{n}$ i mase nuklida $m_\mathrm{A}$, tj.

$$\Delta m = Zm_\mathrm{p} + Nm_\mathrm{n} - m_\mathrm{A}\,, \tag{11.1}$$

pa je energija vezanja $E_\mathrm{b}$

$$E_\mathrm{b} = [Zm_\mathrm{p} + (A - Z)m_\mathrm{n} - m_\mathrm{A}]c^2\,. \tag{11.2}$$

Kako se u tablicama nalaze mase izotopa, a ne mase samih jezgara, za račun energije vezanja prikladnije je upotrijebiti relaciju

$$E_\mathrm{B} = [Zm_\mathrm{H} + (A - Z)m_\mathrm{n} - m_\mathrm{X}]c^2\,, \tag{11.3}$$

gdje $m_\mathrm{X}$ označava masu izotpa ${}^A_Z X$. Relacija (11.3) sadrži malu pogrešku zbog zanemarivanja relativno male vrijednosti energije vezanja elektrona.

Pretvorbu elemenata (radioaktivnost) uzrokuju $\alpha$ i $\beta$ raspad, koji gotovo uvijek prati $\gamma$ emisija.
$\alpha$–čestice su jezgre atoma helija ${}_2^4$He i nastaju pri $\alpha$–raspadu. Općenito je

$$ {}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z-2}^{A-4}\mathrm{Y} + {}_2^4\mathrm{He} \,. \tag{11.4} $$

$\beta$–čestice su brzi elektroni ${}_{-1}^{0}$e. Raspad jezgre uz emisiju $\beta$–čestice prikazuje se jednadžbom

$$ {}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z+1}^{\;\;A}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e \,, \tag{11.5} $$

gdje je $\overline{\nu}_e$ antineutrino. Pri $\beta^+$–raspadu jedan proton u jezgri prelazi u neutron, a iz jezgre izlazi pozitron $\mathrm{e}^+$ i neutrino $\nu$ prikazano jednadžbom

$$ {}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z-1}^{\;\;A}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^+ + \nu_e \,. \tag{11.6} $$

Uhvat elektrona prikazuje se jednadžbom

$$ {}_Z^A\mathrm{X} + e^- \to {}_{Z-1}^{\;\;A}\mathrm{Y} + \nu_e \,. \tag{11.7} $$

Slobodni neutron raspada se prema jednadžbi

$$ {}_0^1\mathrm{n} \to {}_1^1\mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e \,. \tag{11.8} $$

$\gamma$–raspad je emisija elektromagnetskog zračenja iz pobuđene jezgre prema jednadžbi

$$ {}_Z^A\mathrm{X}^* \to {}_Z^A\mathrm{X} + \gamma \,. \tag{11.9} $$

*Aktivnost uzorka* može se iskazati brzinom kojom se raspada radioaktivni materijal uzorka, tj.

$$ A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N \,, \tag{11.10} $$

gdje je $N$ broj neraspadnutih jezgara, a $\lambda$ konstanta raspada, karakteristična veličina za svaki radioaktivni raspad. Zakon radioaktivnog raspada glasi:

$$ N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \,, \tag{11.11} $$

gdje je $N_0$ početni broj jezgri, dakle u času $t = 0$, a $N$ je broj preostalih neraspadnutih jezgara nakon vremena $t$. Mjerna jedinica za aktivnost je bekerel

$$ \left[-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right] = \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Bq} \,. $$

Vrijeme poluraspada

$$ T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} \,. $$



Srednje vrijeme života

$$ \tau = \frac{1}{\lambda} \,. $$

*Nuklearna reakcija* je međudjelovanje jezgre s elementarnom česticom ili drugom jezgrom koje vodi pretvorbi jezgre. Opća jednadžba nuklearne reakcije jest

$$ \mathrm{a} + \mathrm{X} \to \mathrm{Y} + \mathrm{b} \tag{11.12} $$

ili kraće

$$ \mathrm{X(a, b)Y} \,, \tag{11.13} $$

gdje je X znak za jezgru metu, a je upadna čestica, Y i b su reakcijom nastala jezgra i oslobođena čestica.
*Energija* koja se oslobodi ili apsorbira u nuklearnoj reakciji ili tzv. $Q$–vrijednost reakcije

$$ Q = (m_\mathrm{X} + m_\mathrm{a})c^2 - (m_\mathrm{Y} + m_\mathrm{b})c^2 \,. \tag{11.14} $$

*Udarni presjek* $\sigma$ je vjerojatnost nuklearne reakcije

$$ \sigma = \frac{\Delta N}{n N \Delta x} \,, \tag{11.15} $$

Ovdje je $\Delta N$ broj reakcija (odnosno izlaznih čestica b), $N$ je broj upadnih čestica koje prođu kroz metu, ako je debljina mete $\Delta x$ a $n$ broj jezgara po jedinici volumena radioaktivnog uzorka $a$. Mjerna jedinica udarnog presjeka je četvorni metar $\mathrm{m}^2$.
*Fisija* je proces cijepanja jezgre na dva približno jednaka fragmenta uz oslobađanje energije, a *fuzija* je spajanje lakih jezgara u težu uz oslobađanje energije.
Čestica i antičestica međusobno se anihiliraju, tj. međudjelovanjem iščezavaju uz pojavu drugih čestica u skladu s zakonima očuvanja. Proces suprotan anihilaciji jest *nastajanje para čestica-antičestica*.

## 11.2. Primjeri

**11.1.** Mjerenje aktivnosti uzorka radioaktivnog izotopa ${}_6^{14}$C pokazalo je da postoji $10^5$ raspada u sekundi. Vrijeme poluraspada je 5 568 godina. Odredite masu uzorka.

***rješenje*** Aktivnost radioaktivnog izvora je

$$ A = \lambda N \tag{1} $$

$$ \lambda = \frac{\ln 2}{T} \,. \tag{2} $$

Broj atoma u uzorku je

$$N = \frac{N_A m}{M}, \tag{3}$$

gdje je $N_A$ Avogadrov broj, $m$ masa uzorka, $M$ molna masa izotopa 14 g mol$^{-1}$. Odgovarajućom supstitucijom u (1), za aktivnost dobivamo

$$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{N_A m}{M}, \tag{4}$$

odakle izračunamo masu uzorka

$$m = \frac{M T_{1/2} A}{M_A \ln 2} \tag{5}$$

$$m = \frac{14 \text{ g mol}^{-1} \cdot 5\,568 \text{ god.} \cdot 365 \cdot 86\,400 \text{ s god.}^{-1} \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}}{6{,}025 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 0{,}693}$$

$$m = 5{,}9 \cdot 10^{-7} \text{ g}.$$

**11.2.** Kolika je aktivnost 1 g uzorka $^{226}_{88}$Ra, čije vrijeme poluraspada $T_{1/2}$ iznosi 1 662 godine?

***rješenje*** Aktivnost je definirana izrazom

$$A = \lambda N$$

gdje je $\lambda$ konstanta radioaktivnog raspadanja, a $N$ broj atoma u uzorku

$$N = \frac{N_A m}{M},$$

gdje je $N_A$ Avogadrova konstanta, $m$ zadana masa uzorka, a $M$ molarna masa radija, dakle 226 g mol$^{-1}$.

$$N = \frac{6{,}025 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 1 \text{ g}}{226 \text{ g mol}^{-1}}$$

$$N = 2{,}666 \cdot 10^{21}.$$

Konstantu raspada odredit ćemo iz definicijske relacije

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$\lambda = \frac{0{,}693}{1\,622 \text{ god.}} \cdot \frac{1 \text{ god.}}{365 \text{ d}} \cdot \frac{1 \text{ d}}{86\,400 \text{ s}}$$

$$\lambda = 1{,}355 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1},$$

pa je aktivnost

$$A = 1{,}355 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \cdot 2{,}666 \cdot 10^{21}$$

$$A = 3{,}612 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$$



**11.3.** Snop od $10^8$ termičkih neutrona brzine 2 200 m/s širi se vakuumom i prolazi 11 m prije udara u metu. Ako je vrijeme poluraspada slobodnih neutrona 12 min, odredite koliko će se slobodnih neutrona spontano raspasti prije nego stignu do mete.

***rješenje*** Zakon radioaktivnog raspada omogućuje izračunati broj neraspadnutih neutrona u vremenu $t$:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Vrijeme u kojem će elektroni stići do mete izračunat ćemo

$$t = \frac{d}{v} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Broj neutrona koji će se raspasti izračunat ćemo iz razlike:

$$\Delta N = N_0 - N$$

$$\Delta N = N_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

Budući da je

$$\lambda t = \frac{t \ln 2}{T_{1/2}}$$

i primjenom aproksimacije

$$e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t$$

slijedi

$$N = N_0 \lambda t = N_0 \frac{t \ln 2}{T_{1/2}},$$

pa je broj neutrona

$$N = 481.$$

**11.4.** Radioaktivni nuklid A (vrijeme poluraspada $T_1$) raspada se u radioaktivni nuklid B (vrijeme poluraspada $T_2$). Ako je u početnom trenutku broj jezgri izotopa A jednak $N_{10}$, a broj jezgri nuklida B zanemariv, koliki će biti broj jezgri nuklida B nakon vremena $t$?

***rješenje*** Aktivnost nuklida A je

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

Svake sekunde raspadne se dakle $\lambda_1 N_1$ jezgara A, i nastane toliko jezgara B. Međutim i nuklid B se raspada, pa je njegova aktivnost

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2$$

$$dN_2 + \lambda_2 N_2 \, dt = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} \, dt$$

$$\frac{d(N_2 e^{\lambda_2 t})}{e^{\lambda_2 t}} = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} \, dt$$

$$d(N_2 e^{\lambda_2 t}) = \lambda_1 N_{10} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \, dt$$

$$\int_0^{N_2} \mathrm{d}(N_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}) = \lambda_1 N_{10} \int_0^t \mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\, \mathrm{d}t$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right) .$$

**11.5.** Izotopska zastupljenost uranovih izotopa u Zemljinoj kori, u našem vremenu, jest 0,72% ($^{235}_{92}$U) i 99,2745% ($^{238}_{92}$U). Pretpostavljajući da njihov omjer u početku nije mogao biti veći od jedinice, izračunajte najveću starost Zemljine kore. Vrijeme poluživota za $^{235}_{92}$U je $7{,}038 \cdot 10^8$ god. te $4{,}468 \cdot 10^9$ god. za $^{238}_{92}$U.

***rješenje*** Omjer izotopske zastupljenosti u Zemljinoj kori u sadašnjem trenu jest:

$$\frac{^{238}_{92}\mathrm{U}}{^{235}_{92}\mathrm{U}} = 137{,}88 . \tag{1}$$

Koncentracija atoma za $^{238}_{92}$U evoluirala je prema zakonu:

$$N_8 = N_{08}\mathrm{e}^{-\lambda_8 t} = N_{08}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_8} t} , \tag{2}$$

gdje se $N_8$ odnosi na sadašnju koncentraciju, a $N_{08}$ na početnu, prisutnu u $t = 0$, kada je prema zadatku započela i dob Zemljine kore. Vrijeme $T_8$ je odgovarajući poluživot jezgre.
Iz (2) imamo:

$$\frac{N_8}{N_{08}} = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_8} t} . \tag{3}$$

Analogijom pridolazi:

$$\frac{N_5}{N_{05}} = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_5} t} . \tag{4}$$

Dijeljenjem (3) i (4) stvaramo omjer:

$$\frac{N_8}{N_5} \cdot \frac{N_{05}}{N_{08}} = \mathrm{e}^{\ln 2 \left(\frac{1}{T_5} - \frac{1}{T_8}\right) t} \tag{5}$$

Postulirajući za početno stanje da je $N_{05}/N_{08} = 1$, i koristeći se relacijom (1), slijedi jednadžba za najveće vrijeme $t_{\text{maks.}}$:

$$137{,}88 \cdot 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{10^9}\left(\frac{1}{0{,}7038\ \text{god.}} - \frac{1}{4{,}468\ \text{god.}}\right) t_{\text{maks.}}} \tag{6}$$

Rješavajući (6), dobivamo:

$$4{,}926\,4 = \frac{0{,}693}{10^9\ \text{god.}} \cdot 1{,}197 t_{\text{maks.}}$$

odnosno

$$t_{\text{maks.}} = 5{,}94 \cdot 10^9\ \text{god.}$$

**11.6.** U reaktoru se konstantnom toku neutrona izloži neki izotop. Neutronskom aktivacijom proizvodi se konstantnom brzinom $n$ atoma radioaktivnog izotopa u sekundi, čija je konstanta radioaktivnog raspada $\lambda$. Valja odrediti ovisnost broja radioaktivnih atoma o vremenu ozračivanja neutronima. Zanemarite neutronsku aktivaciju radioaktivnog izotopa.



***rješenje*** Brzina kojom se mijenja broj radioaktivnih atoma $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ određena je istovremenim povećanjem broja radioaktivnih atoma zbog aktivacije u reaktoru i smanjenjem zbog radioaktivnog raspada tih istih atoma, dakle

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = n - \lambda N . \tag{1}$$

Diferencijalna jednadžba (1) može se riješiti separacijom varijabli te integracijom uz pretpostavku početnih uvjeta $N(t = 0) = 0$.

$$\int_0^N \frac{\mathrm{d}N}{n - \lambda N} = \int_0^t \mathrm{d}t . \tag{2}$$

Integracija daje

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{n}{n - N} , \tag{3}$$

odnosno

$$N(t) = \frac{n}{\lambda} - \frac{n}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{4}$$

Jednadžba (4) pokazuje da se nakon dovoljno dugog vremena uspostavlja ravnoteža između broja neostvarenih i raspadnutih atoma. Ona se uspostavi kad broj radioaktivnih atoma dosegne razinu $N(t) = \frac{n}{\lambda}$.

**11.7.** Radioaktivni izotop X raspada se u drugi također radioaktivni izotop Y. Potrebno je odrediti broj atoma izotopa Y ako je poznat početni broj atoma oba izotopa, $N_{x_0}$ i $N_{Y_0}$.

***rješenje*** Izotop X raspada se po zakonu:

$$\frac{\mathrm{d}N_x}{\mathrm{d}t} = -\lambda_x N_x = -\lambda_x N_{x_0}\mathrm{e}^{-\lambda_x t} . \tag{1}$$

Ovdje $\lambda_x$ označava konstantu radioaktivnog raspada izotopa X. Za svaku raspadnutu jezgru izotopa X stvori se jedna jezgra izotopa Y, dakle Y se stvara brzinom $\lambda_x N_x$. Istodobno se Y raspada brzinom $\lambda_y N_y$

$$\frac{\mathrm{d}N_y}{\mathrm{d}t} = \lambda_x N_x - \lambda_y N_y = \lambda_x N_{x_0}\mathrm{e}^{-\lambda_x t} - \lambda_y N_y . \tag{2}$$

Množenjem jednadžbe (2) sa $\mathrm{e}^{x_y t}\,\mathrm{d}t$ dobivamo

$$\mathrm{e}^{x_y t}\,\mathrm{d}N_y + \lambda_y N_y \mathrm{e}^{\lambda_y t} = \lambda_x N_{x_0}\mathrm{e}^{(\lambda_y - \lambda_x)t}\,\mathrm{d}t . \tag{3}$$

Integracija jednadžbe (3) daje

$$N_y \mathrm{e}^{\lambda_y t} = \frac{\lambda_x N_{x_0}}{\lambda_y - \lambda_x}\mathrm{e}^{(\lambda_y - \lambda_x)t} + C . \tag{4}$$

Konstantu $C$ odredit ćemo uz pomoć početnih uvjeta za $t = 0$, $N_y = N_{y_0}$:

$$C = N_{y_0} - \frac{\lambda_x N_{x_0}}{\lambda_y - \lambda_x}$$

te je konačno broj nastalih atoma izotopa Y

$$N_y = \left(N_{y_0} - \frac{\lambda_x N_{x_0}}{\lambda_y - \lambda_x}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_y t} + \left(\frac{\lambda_x N_{x_0}}{\lambda_y - \lambda_x}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_x t} .$$

**11.8.** Kolika je debljina olova $d$ koja intenzitet $\gamma$-zračenja energije 0,66 MeV smanji deset puta. Omjer koeficijenta atenuacije i gustoće olova za tu energiju je $\mu/\varrho = 0,1\ \mathrm{cm^2 g}$, a gustoća olova je $\varrho = 11\,300\ \mathrm{kg/m^3}$. Koliki je srednji slobodni put tih fotona u olovu?

***rješenje*** Atenuacija $\gamma$-zračenja u materijalu je eksponencijalna funkcija

$$I = I_0 e^{-\mu d} . \tag{1}$$

Obično se umjesto linearnog koeficijenta atenuacije $\mu$ (izražava se u $\mathrm{cm^{-1}}$) u tablicama navodi maseni atenuacijski koeficijent $\mu/\varrho$ (jedinica $\mathrm{cm^2 g^{-1}}$). Atenuacijski koeficijenti ovise o energiji upadnog fotona i o rednom broju elemenata u materijalu. U našem je primjeru debljina olova

$$d = \frac{1}{\mu} \ln \frac{I_0}{I}$$

$$d = \frac{1}{\mu} \ln 10 = 2{,}04\ \mathrm{cm} .$$

Koeficijent $\mu$ možemo shvatiti i kao vjerojatnost interakcije fotona podijeljenu s duljinom puta, pa je srednji slobodni put fotona u materijalu

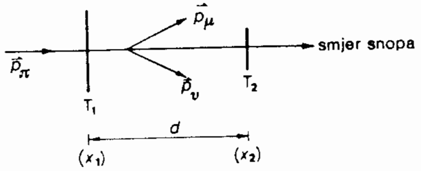
$$\lambda = \frac{1}{\mu} = 0{,}88\ \mathrm{cm} .$$

Debljina olova 2,04 cm odgovara, dakle, debljini $\mu d = 2{,}3$ srednjega slobodnog puta.

**11.9.** U pionski pobuđenim reakcijama na lakim jezgrama, pionski se snop prije ulaska u metu prati teleskopskim brojačima $T_1$ i $T_2$ koji su razmaknuti na udaljenosti $d$ u smjeru širenja snopa. Pion je čestica konačnog života (srednji život $T = 2{,}603 \cdot 10^{-8}$ s), pa na brojač $T_2$ pada manji broj piona. Izračunajte relativni gubitak u pionskome snopu između brojača $T_1$ i $T_2$, ako je količina gibanja piona 170 MeV/$c$ i udaljenost $d = 50$ cm. (Masa mirovanja piona $m_\pi = 139{,}56\ \mathrm{MeV}/c^2$.)

***rješenje*** Riječ je o raspadu piona

$$\pi^{\pm} \xrightarrow{26{,}03\ \mathrm{ns}} \mu^{\pm} + \overline{\nu}_\mu , \tag{1}$$




Slika 11.1.

u geometriji prema slici 11.1. Raspad piona određen je jednadžbom radioaktivnog raspada

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}$$
$$N(t) = N(0) e^{-t/T} , \tag{2}$$

gdje je $T = \dfrac{1}{\lambda}$ srednji život piona. Relativni se gubitak u snopu, zbog raspada piona, zbiva u vremenskom intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$, te primjenom (2) dobivamo:

$$\frac{N(t_1) - N(t_2)}{N(t_1)} = \frac{e^{-\frac{t_1}{T}} - e^{-\frac{t_2}{T}}}{e^{-\frac{t_1}{T}}} = 1 - e^{-\frac{(t_2 - t_1)}{T}} . \tag{3}$$



Valja, dakle, odrediti vremensku razliku $\Delta t = t_2 - t_1$. Kinetička energija piona je usporediva s njegovom masom mirovanja, pa valja računati relativistički:

$$E_\pi = \gamma m_\pi c^2 \qquad p_\pi = \gamma m_\pi v_\pi \qquad \text{uz} \qquad \gamma = \left(1 - \frac{v_\pi^2}{c^2}\right)^{-1/2} . \tag{4}$$

Vremenskoj razlici $\Delta t = t_2 - t_1$ odgovara razmak $d = x_2 - x_1$ prema relaciji

$$\Delta t = \frac{d}{v_\pi} , \tag{5}$$

gdje $v_\pi$ određujemo iz jednadžbe (4):

$$p_\pi = \gamma m_\pi v_\pi = \frac{E_\pi}{c^2} v_\pi \qquad \text{i} \qquad v_\pi = \frac{p_\pi c^2}{E_\pi} . \tag{6}$$

Uvrštenjem (6) u (5) dobivamo vrijeme $\Delta t$,

$$\Delta t = d \cdot \frac{E_\pi}{p_\pi c^2} , \tag{7}$$

u kojemu se pioni raspadaju na udaljenosti $d$, ali u vremenu laboratorijskog sustava. Odgovarajuće vrijeme u sustavu piona iznosit će:

$$\Delta t_{\mathrm{LAB}} = \gamma \cdot \Delta t_\pi , \tag{8}$$

odnosno

$$\Delta t_\pi = \Delta t_{\mathrm{LAB}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_\pi^2}{c^2}} .$$

Iz relacije (6) dobiva se

$$\frac{v_\pi^2}{c^2} = \frac{p_\pi^2 c^2}{E_\pi^2} , \tag{9}$$

pa zamjenom u (9) i sređivanjem dobivamo:

$$\Delta t_\pi = \Delta t_{\mathrm{LAB}} \cdot \sqrt{1 - \frac{p_\pi^2 c^2}{E_\pi^2}} = \frac{\Delta t_{\mathrm{LAB}}}{E_\pi} \cdot \sqrt{E_\pi^2 - p_\pi^2 c^2}$$

$$\Delta t_\pi = \frac{\Delta t_{\mathrm{LAB}}}{E_\pi} \cdot m_\pi c^2 . \tag{10}$$

Laboratorijsko vrijeme $\Delta t_{\mathrm{LAB}}$ izračunano je u relaciji (7), pa zamjenom dobivamo vrijeme raspada u vlastitome sustavu piona:

$$\Delta t_\pi = d \cdot \frac{E_\pi}{p_\pi c^2} \cdot \frac{1}{E_\pi} \cdot m_\pi c^2 = d \, \frac{m_\pi}{p_\pi} . \tag{11}$$

Uvrštenjem $\Delta t_\pi$ u jednadžbu (3) dobiva se konačna relacija za gubitak piona:

$$\frac{\Delta N}{N} = 1 - e^{-\frac{\Delta t_\pi}{T}} = 1 - e^{-\frac{d m_\pi}{T p_\pi}} \tag{12}$$

Uvrštenjem vrijednosti zadanih veličina dobiva se

$$\frac{\Delta N}{N} = 1 - e^{-\frac{0{,}50\ \mathrm{m} \cdot 139{,}56\ \frac{\mathrm{MeV}}{c^2}}{2{,}608 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s} \cdot 170\ \frac{\mathrm{MeV}}{c}}} = 0{,}0511 .$$

**11.10.** Nađite vezu između atomske jedinice mase u i jedinice energije MeV.

***rješenje***

$$\frac{\text{MeV}}{c^2} = \frac{10^6 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{A V s}}{9{,}00 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2\text{s}^{-2}} = \frac{1{,}60}{9{,}00} \cdot 10^{-29}\ \frac{\text{V A s}^3}{\text{m}^2}$$

$$\frac{\text{MeV}}{c^2} = \frac{1{,}60}{9{,}00} \cdot 10^{-29}\ \text{kg}\ \frac{1\ \text{mol}\ ^{12}\text{C}}{0{,}012\ \text{kg}} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 12\ \text{u}}{1\ \text{mol}\ ^{12}\text{C}}$$

$$\frac{\text{MeV}}{c^2} = \frac{1{,}60 \cdot 6{,}02 \cdot 12}{9{,}00 \cdot 12} \cdot 10^{-3}\ \text{u}$$

$$\frac{\text{MeV}}{c^2} = 1{,}07 \cdot 10^{-3}\ \text{u}\,.$$

**11.11.** Prva nuklearna reakcija izazvana umjetno ubrzanim protonima u Cockroft-ovu i Waltonovu pokusu teče prema shemi:

$$^1_1\text{H} + \frac{0{,}3\ \text{MeV}}{c^2} + {}^7_3\text{Li} = {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} + \frac{E}{c^2}\,. \qquad (1)$$

Kinetička energija upadnog protona iznosi 0,3 MeV.
Izračunajte koliku su energiju raspodijelile dvije $\alpha$–čestice, nastale u raspadu?

***rješenje***

| | |
|---|---|
| masa Li–atoma | 7,016 00 u |
| masa H–atoma | 1,007 83 u |
| masa 0,3 MeV/$c^2$ | 0,000 32 u |
| ukupna masa | 8,024 15 u |

Da bismo dobili traženu energiju $E$, s lijeve strane u (1) potrebno je od ukupne mase odbiti masu dvaju atoma helija, tj. $2 \cdot 4{,}002\,60\ \text{u} = 8{,}005\,20\ \text{u}$. Prema tome je

$$\frac{E}{c^2} = 0{,}018\,95\ \text{u}\,,$$

pa je

$$E = \frac{0{,}018\,94}{1{,}07 \cdot 10^{-3}}\ \text{MeV} = 17{,}7\ \text{MeV}$$

prema vezi

$$\frac{\text{MeV}}{c^2} = 1{,}07 \cdot 10^{-3}\ \text{u}\,.$$

**11.12.** K–zahvat nastaje kada jezgra zahvati jedan elektron iz K–ljuske vanjskog elektronskog omotača; pritom se jedan od protona u jezgri pretvara u neutron. Izračunajte atomsku masu radioaktivnog izotopa $^{41}_{20}$Ca koji se raspada elektronskim zahvatom uz oslobađanje energije 0,427 MeV.

***rješenje***

$$^{41}_{20}\text{Ca} + \text{e} \rightarrow {}^{41}_{19}\text{K} + \nu$$

$$m\left(^{41}_{20}\text{Ca}\right) = m_{J\text{Ca}} + 20\, m_e$$

$$m\left(^{41}_{19}\text{K}\right) = m_{J\text{K}} + 19\, m_e = 40{,}961\,83\ \text{u}\,.$$



Oslobođena energija od 0,427 MeV odgovara promjeni mase

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = 4{,}58 \cdot 10^{-4}\ \text{u}$$

$$m(^{41}_{20}\text{Ca}) = m(^{41}_{19}\text{K}) + \Delta m = 40{,}961\,83\ \text{u} + 4{,}58 \cdot 10^{-4}\ \text{u}$$

$$m(^{41}_{20}\text{Ca}) = 40{,}962\,26\ \text{u}\,.$$

**11.13.** $\beta$–raspadom izotopa $^{32}_{15}$P zrače se elektroni maksimalne energije 1,71 MeV. Izračunajte indukciju magnetskog polja $B$ koja će, djelujući okomito na snop elektrona, zakriviti njihovu stazu u kružnicu polumjera $r = 0{,}1$ m.

***rješenje*** Kinetička energija $\beta$-čestice 1,71 MeV veća je od energije mirovanja elektrona $E_0 = 0{,}511$ MeV. Zato valja računati relativistički:

$$E_{\text{kin.}} = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] \qquad (1)$$

$$E_{\text{kin.}} = 1{,}71\ \text{MeV} \qquad (2)$$

$$E_{\text{kin.}} = 2{,}74 \cdot 10^{-13}\ \text{J}\,.$$

Uvrštenjem u relaciju (1) zadanih podataka, dobivamo jednadžbu za određivanje brzine elektrona:

$$\frac{2{,}74 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2\text{s}^{-2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \qquad (3)$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 0{,}947 \quad \text{i} \quad v = 2{,}92 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}\,. \qquad (4)$$

Zakrivljenost staze sadržana je u formuli za ciklotronsku rezonanciju:

$$Bev = m\,\frac{v^2}{r}\,. \qquad (5)$$

Iz (5) slijedi magnetska indukcija $B$:

$$B = \frac{m_0}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{r} \qquad (6)$$

$$B = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}947}} \cdot \frac{2{,}92 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{0{,}1\ \text{m}}$$

$$B = \frac{26{,}60 \cdot 10^{-23}\ \text{kg m s}^{-1}}{1{,}6 \cdot 10^{-20} \cdot \sqrt{0{,}053}\ \text{A s m}}$$

$$B = 72 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{A m}} = 0{,}72\ \frac{\text{N}}{\text{A m}}$$

$$B = 0{,}072\ \text{T}\,.$$

**11.14.** Izračunajte defekt mase $\Delta m$ i pripadnu energiju vezanja za jezgru helijeva atoma ${}^4_2\text{He}$.

***rješenje*** Energija vezanja atoma ${}^A_Z m$ izražena je u formuli:

$$E = c^2\left[Z\,{}^1_1\text{H} + (A-Z)\,{}^1_0\text{n} - {}^A_Z m\right] \qquad (1)$$

Izraz u zagradi zove se defekt mase $\Delta m$, tj.

$$E = c^2 \Delta m\,. \qquad (2)$$

$Z$ je broj protona, a $(A-Z)$ broj neutrona.

| | |
|---|---|
| Masa helijeva atoma | ${}^4_2\text{He} = 4{,}002\,60$ u , |
| vodikova atoma | ${}^1_1\text{H} = 1{,}007\,825$ u, te |
| masa neutrona | ${}^1_0\text{n} = 1{,}008\,665$ u . |

Te vrijednosti daju prema (1) defekt mase

$$\Delta m = 0{,}030\,38\ \text{u}\,. = 5{,}04308 \cdot 10^{-25}$$

Prema (2) dobivamo energiju vezanja:

$$E = c^2\Delta m$$

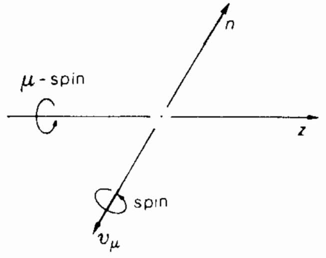
$$E = \frac{0{,}030\,38}{1{,}07\cdot 10^{-3}}\ \text{MeV} = 28{,}39\ \text{MeV}\,.$$

**11.15.** Osnovni proces u nuklearnim reakcijama mionskog uhvata iz K–staze mezoatoma je

$$\mu^- + \text{p} \rightarrow \text{n} + \nu_\mu\,,$$

u kojem je izračen $\mu$–tip neutrina. Pretpostavimo li da se uhvat događa na slobodnom protonu iz mirovanja i da je proton u početnom stanju u mirovanju, izračunajte kako se u konačnom stanju dijeli energija između neutrona i neutrina?

***rješenje*** Uhvat iz mirovanja znači da je $|\vec{p}_\mu| = 0$. Kinematiku konačnog stanja prikazuje slika 11.2, a ukupna energija konačnog stanja jest:




Slika 11.2.

$$E_0 = E_\text{n} + E_\nu \qquad (1)$$

Zakoni očuvanja energije i impulsa daju:

$$m_\mu c^2 + m_\text{p} c^2 = E_\nu + \sqrt{p_\text{n}^2 c^2 + m_\text{n}^2 c^4} \qquad (2)$$

$$p_\nu = p_\text{n} \qquad (3)$$

Neutrino je eluzivna (ne ostavlja trag u detektorima) čestica ($m_\nu \cong 0$), pa je

$$E_\nu^2 = p_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4 \qquad E_\nu = p_\nu c \quad (4)$$



Uvrštenjem (3) i (4) u relaciju (2) dobivamo jednadžbu

$$c^2(m_\mu + m_\text{p}) = E_\nu + \sqrt{E_\nu^2 + m_\text{n}^2 c^4} \qquad (5)$$

a sređivanjem po $E_\nu$, postiže se:

$$E_\nu = \frac{c^2(m_\mu + m_\text{p})^2 - m_\text{n}^2 c^2}{2(m_\mu + m_\text{p})} = \frac{c^2[(m_\mu + m_\text{p})^2 - m_\text{n}^2]}{2(m_\mu + m_\text{p})} \qquad (6)$$

Uvrštenjem masa mirovanja miona, protona i neutrona (MeV$/c^2$):

$$E = \frac{c^2[(105{,}66 + 938{,}3)^2 - 939{,}6^2]}{2(105{,}66 + 938{,}3)}\,\frac{\text{MeV}}{c^2} = 99{,}144\ \text{MeV} \qquad (7)$$

Iz jednadžbe (1), znajući da je $E_0 = 105{,}66$ MeV upravo jednaka energiji mirovanja miona, slijedi energija koju odnosi neutron:

$$E_\text{n} = E_0 - E_\nu = (105{,}66 - 99{,}144)\ \text{MeV}$$

$$E_\text{n} = = 6{,}516\ \text{MeV}\,.$$

**11.16.** Pri mjerenjima apsorpcije piona na lakoj jezgri ${}^3_2\text{He}$ otkrivena je i jednostavna reakcija

$$\pi^- + {}^3\text{He} \rightarrow \text{d} + \text{n}$$

koja je zbog dvije čestice u konačnom stanju veoma prikladna u analizi podataka u području pionske apsorpcije.
Izračunajte $Q$–vrijednost reakcije za impuls piona $p_\pi = 220$ MeV$/c$. (Masa mirovanja piona je $m_\pi = 139{,}56$ MeV$/c^2$).

***rješenje*** U reakciji pion u letu pogađa jezgru helija, unoseći u jezgru ukupnu energiju:

$$E_\pi = \sqrt{p_\pi^2 c^2 + m_\pi^2 c^4} = \sqrt{220^2\ \text{MeV}^2 + 139{,}56^2\ \text{MeV}^2} = 260{,}53\ \text{MeV}. \qquad (1)$$

U tom procesu, jesgra helija se cijepa, a izlazne čestice, deuteron i neutron, mogu se mjeriti na koincidentan način. $Q$–vrijednost reakcije u laboratorijskom sustavu je:

$$Q = \Big[\underbrace{(m_\pi + m_{{}^3_2\text{He}})}_{\text{mase u početnom stanju}} - \underbrace{({}^2_1\text{H} + {}^1_0\text{n})}_{\text{mase u konačnom stanju}}\Big]c^2 + \underbrace{E_k}_{\text{ulazna kinetička energija}} \qquad (2)$$

$$Q = (m_\pi + m_{{}^3_2\text{He}})c^2 + E_k - ({}^2_1\text{H} + {}^1_0 n)\,c^2 \qquad (3)$$

Vrijednosti članova jesu:

$$m_\pi = 139{,}56\ \text{MeV}/c^2$$

$$m_{{}^3_2\text{He}} = 3{,}016\ \text{u} = 3{,}016\ \text{u}\cdot 931{,}5\ \text{MeV}/\text{u}c^2 = 2\,809{,}4\ \text{MeV}/c^2$$

$$E_k = E_\pi - m_\pi c^2 = (260{,}53 - 139{,}56)\ \text{MeV} = 120{,}97\ \text{MeV}$$

$${}^2_1\text{H} = 2{,}014\ \text{u} = 2{,}014\ \text{u}\cdot 931{,}5\ \text{MeV}/\text{u}c^2 = 1\,876{,}04\ \text{MeV}/c^2$$

$${}^1_0\text{n} = 1{,}008\,665\ \text{u} = 939{,}57\ \text{MeV}/c^2\,.$$

$Q$-vrijednost je, dakle, uvrštavanjem u (3):

$$Q = 254{,}32\ \mathrm{MeV}\,.$$

**11.17.** Odredite približnu gustoću atomske jezgre uz pomoć relacije za polumjer jezgre $r = r_0 A^{1/3}$, gdje je $A$ atomski broj, a $r_0 \approx 1{,}2 \cdot 10^{-15}$m polumjer jednog nukleona.

***rješenje*** Izraz za polumjer jezgre temelji se na pretpostavci o konstantnoj gustoći jezgre, koja vrijedi samo približno. Uz pretpostavku da je masa nukleona

$$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}\,,$$

dakle vrijednost mase atomske jedinice mase, gustoća jezgre iznosi

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{A \cdot m_n}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = 2{,}6 \cdot 10^{17}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}\,.$$

**11.18.** Pretpostavlja se da se energija u Suncu oslobađa nuklearnom reakcijom u kojoj od 4 protona nastaje $\alpha$–čestica uz oslobađanje 2 pozitrona, 2 neutrina i dva $\gamma$–fotona (tzv. protonsko–protonski lanac).
**a)** Kolika je $Q$–vrijednost te reakcije?
**b)** Izračunajte kolika se energija oslobodi po 1 kg utrošenog vodika? Ukupna snaga Sunca je $3{,}7 \cdot 10^{26}$W.
**c)** Koliko se vodika svake sekunde na Suncu pretvara u helij? (Masa mirovanja atoma helija je 4,002 603 u, atoma vodika 1,007 825 u i masa elektrona $5{,}486 \cdot 10^{-3}$ u).

***rješenje*** a) Reakcija protonsko–protonskog lanca može se pisati kao ukupna reakcija za četiri protona ovako:

$$4\mathrm{p} \longrightarrow \alpha + 2\mathrm{e}^+ + 2\nu + 2\gamma\,.$$

ili

$$4\,{}^1_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^- + 2\mathrm{e}^+ + 2\nu + 2\gamma\,.$$

Masa mirovanja neutrina $\nu$ i $\gamma$–fotona je nula, masa mirovanja pozitrona $\mathrm{e}^+$ jednaka je masi mirovanja elektrona $\mathrm{e}^-$. $Q$–vrijednost reakcije je

$$Q = [4m_\mathrm{H} - m_\mathrm{He} - 4m_e]c^2 = 3{,}96 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$$

$$Q = 24{,}75\ \mathrm{MeV}\,.$$

b) U masi vodika 1 kg ima $N$ vodikovih jezgri koje izračunamo pomoću Avogadrove konstante i poznatih vrijednosti za $m$ i $M$:

$$N = \frac{m}{M} N_\mathrm{A} = 6 \cdot 10^{26}\,.$$

Ako se u nuklearnim procesima protonsko–protonskog lanca utroši 1 kg vodika, to znači da se dogodi $N' = \frac{6}{4} \cdot 10^{26}$ reakcija, te je ukupno oslobođena energija

$$E = Q \cdot N'$$

$$E = 24{,}75 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{26}$$

$$E = 5{,}948 \cdot 10^{14}\ \mathrm{J}$$

$$E \approx 6 \cdot 10^{14}\ \mathrm{J}\,.$$



c) Budući da je ukupna snaga Sunca $P = 3{,}7 \cdot 10^{26}$ W, utrošena masa vodika u svakoj sekundi je

$$m = \frac{P}{NQ}$$

$$m = \frac{3{,}7 \cdot 10^{26}\ \mathrm{J\,s^{-1}}}{6 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg^{-1}} \cdot 3{,}96 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}}$$

$$m = = 6 \cdot 10^{11}\ \mathrm{kg\,s^{-1}}\,.$$

**11.19.** Da bi došlo do fuzije, potrebno je da jezgre svladaju odbojni kulonski potencijal i dođu međusobno u doseg nuklearnih sila. Ocijenite potrebnu temperaturu plazme deuterija dovoljnu da dođe do fuzije, pretpostavite li da je $2 \cdot 10^{-15}$ m doseg nuklearnih sila.

***rješenje*** Temperatura se može procijeniti izjednačavanjem kinetičke energije jezgara deuterija

$$E_k \approx kT$$

i potencijalne energije njihovih naboja

$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Rezultat iznosi $T \approx 8 \cdot 10^9$ K.

**11.20.** Pri sudaru s jezgrom vodika (protonom) neutroni prosječno izgube 50% vlastite kinetičke energije. Koliko je prosječno sudara potrebno da neutron energije 2 MeV postane termalni neutron energije 0,04 eV?

***rješenje*** Nakon $N$ sudara za omjer konačne i početne energije neutrona vrijedi

$$\frac{E_\text{kon.}}{E_\text{poč.}} = 0{,}5\ N\,.$$

Uvrštavanjem vrijednosti energija daje za broj sudara $N$ približno vrijednost

$$N \approx 26\,.$$

**11.21.** Prosječna iskoristiva energija fisije jezgre $^{235}$U iznosi 185 MeV. Radi li reaktor snagom 100 MW, za koliko se vremena potroši 1 kg urana?

***rješenje*** Broj fisija atoma urana u jednoj sekundi $n$ odredit ćemo iz relacije

$$P = n_f \cdot E_f\,, \tag{1}$$

gdje je $P$ snaga reaktora, a $E_f$ iskoristiva energija jedne fisije. Za snagu 100 MW, na temelju relacije (1) bit će potreban broj fisija jezgri fisija urana $^{235}$U u sekundi

$$n_f = \frac{100 \cdot 10^6\ \mathrm{Js^{-1}}}{185\ \mathrm{MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J\,MeV^{-1}}}$$

$$n_f = = 3{,}38 \cdot 10^{18}\ \mathrm{s^{-1}}\,.$$

Kako je broj atoma u kilogramu urana određen relacijom

$$N = \frac{N_A m}{M},$$

gdje je $N_A$ Avogadrova konstanta, $m$ zadana masa, a $M$ molarna masa urana, izračunat ćemo taj broj iz poznatih veličina

$$N = \frac{6{,}025 \cdot 10^{26}\ \text{kmol}^{-1} \cdot 1\ \text{kg}}{235\ \text{kg kmol}^{-1}}$$

$$N = 2{,}56 \cdot 10^{24}\,.$$

Kilogram urana u reaktoru snage 100 MW utrošit će se dakle u vremenu

$$t = \frac{2{,}56 \cdot 10^{24}}{3{,}38 \cdot 10^{18}\ \text{s}^{-1}} = 7{,}58 \cdot 10^{5}\ \text{s}$$

$$t = 8{,}78\ \text{dana}\,.$$

## 11.3. Zadaci

**11.1.** Kolika je maksimalna energija elektrona emitiranog $\beta$–raspadom tricija $^3_1$H? ($m_{^3\text{H}} = 3{,}016\,05$ u; $m_{^3\text{He}} = 3{,}016\,030$ u)

Rezultat: 18,6 keV

**11.2.** Kolika je masa $^{235}$U koji se raspao fisijom, ako je fisijom te mase oslobođena energija $3{,}24 \cdot 10^{16}$ J?

Rezultat: 395 kg

**11.3.** Točkasti izvor $^{137}$Cs aktivnosti 74 MBq nalazi se u betonskom štitu. Koliki je tok $\gamma$–zraka na površini štita, 19,6 cm daleko od izvora? Koeficijent atenuacije $\gamma$–zraka u betonu je $\mu = 0{,}185\ \text{cm}^{-1}$.

Rezultat: $\Phi = 4{,}08 \cdot 10^5\ \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

**11.4.** Radioaktivni izvor u maglenoj komori emitira elektrone energije 10 keV. Kolika mora biti (magnetska) indukcija magnetskog polja u maglenoj komori da bi polumjer kružne putanje elektrona bio 10 cm?

Rezultat: 0,003 4 T

**11.5.** Snop od $10^9$ termalnih neutrona brzine 2 200 m/s prolazi kroz vakuum put od 22 m prije nego što udari u metu. Koliko će se neutrona spontano raspasti na putu do mete ako je vrijeme poluraspada slobodnog neutrona 12 min?

Rezultat: 9 627



**11.6.** Dok je organizam (biljka, životinja, čovjek) živ, specifična aktivnost radioaktivnog izotopa $^{14}_{6}$C u njemu je stalno oko 250 Bq/kg. Kada organizam prestane živjeti, više ne uzima ugljik iz prirode te se količina $^{14}$C, zbog radioaktivnog raspada, vremenom smanjuje. Odredite koliko je star drveni predmet čija je sadašnja specifična aktivnost 190 Bq/kg? Vrijeme poluraspada $^{14}$C je 5 570 godina.

Rezultat: $t = 2\,200$ godina

**11.7.** Odredite starost uzorka drva, ako je poznato da je aktivnost jednog grama ugljika dobivenog izgaranjem tog uzorka $1{,}48 \cdot 10^5$ Bq. Pretpostavite da je omjer broja jezgara izotopa $^{12}$C i $^{14}$C u Zemljinoj atmosferi konstantan već tisućama godina i da iznosi $10^6$. Vrijeme poluraspada izotopa $^{14}$C je 5 568 godina.

Rezultat: 2 342 godine

**11.8.** Radioaktivni element, čije je vrijeme poluraspada 100 dana, emitira $\beta$–čestice srednje kinetičke energije $8 \cdot 10^{-14}$ J. $\beta$–čestice apsorbira uređaj koji pretvara njihovu kinetičku energiju u električnu s efikasnošću 5%. Koliku je količinu tvari (množinu) tog elementa potrebno staviti u uređaj da bi generirana električna snaga bila 5 W?

Rezultat: 0,026 mol

**11.9.** Kad su neutroni slobodne čestice, njihovo vrijeme poluraspada je 12,8 minuta. Odredite udaljenost za koju će snop neutrona energije 5 eV izgubiti polovinu neutrona.

Rezultat: 23 800 km

**11.10.** Kolika se energija oslobađa fuzijom dviju jezgara deuterija u jezgru helija? ($m_{\text{d}} = 2{,}014\,102$ u; $m_{\text{He}} = 4{,}002\,603$ u)

Rezultat: 23,8 MeV

**11.11.** $Q$–vrijednost neke nuklearne reakcije definirana je kao razlika konačnog i početnog stanja kinetičkih energija sudionika u reakciji. Kada se jezgra $^6_3$Li bombardira s deuteronima energije 4 MeV, opaža se formiranje dviju $\alpha$–čestica, svake s energijom 13,2 MeV. Odredite $Q$–vrijednost za tu reakciju.

Rezultat: 22,4 MeV

**11.12.** Izračunajte $Q$–vrijednost za ove reakcije:
a) $^{16}_{8}\text{O} + \gamma = p + ^{15}_{7}\text{N}$ b) $^{150}_{62}\text{Sm} + p = \alpha + ^{147}_{61}\text{Pm}$
ako je poznato: $m_{\text{p}} = 1{,}007\,825$ u; $m_\alpha = 4{,}002\,603$ u; $m_{\text{O}} = 15{,}994\,915$ u; $m_{\text{N}} = 15{,}000\,108$ u; $m_{\text{Sm}} = 149{,}917\,267$ u; $m_{\text{Pm}} = 146{,}915\,108$ u; $m_{\text{u}}c^2 = 931{,}5$ MeV

Rezultat: a) $Q = -12{,}13$ MeV
b) $Q = 6{,}88$ MeV

**11.13.** Odredite ukupnu kinetičku energiju produkata fotofisije (fisije izazvane fotonom) urana $^{235}U$ jednim fotonom energije 6 MeV, ako su produkti $^{90}_{36}Kr$, $^{142}_{56}Ba$ i 3 neutrona. Poznate su mase: $m_{^{235}U} = 235{,}043\,915$ u; $m_{^{90}Kr} = 89{,}919\,72$ u; $m_{^{142}Ba} = 141{,}916\,35$ u; $m_n = 1{,}008\,665$ u

Rezultat: 175,4 MeV

**11.14.** Odredite energiju deuterija $^2_1H$, tricija $^3_1H$ i berilija $^9_4Be$ ako je poznat dekrement mase ($\Delta = M - A$) za te tri jezgre za koje vrijedi:

$$\Delta_{^2_1H} = 0{,}014\ 10\ \mathrm{u}$$

$$\Delta_{^3_1H} = 0{,}016\ 05\ \mathrm{u}$$

$$\Delta_{^9_4Be} = 0{,}012\ 19\ \mathrm{u}\,.$$

Rezultat: 2,2 MeV; 8,48 MeV; 58,16 MeV

**11.15.** Apsorpcijom sporog neutrona jezgra $^{235}_{92}U$ raspada se na dvije srednje teške jezgre (fisioni fragmenti) i nekoliko neutrona uz oslobađanje energije. Kolika se energija oslobodi ako pri fisiji nastanu jezgre $^{139}La$ i $^{95}Mo$ i dva neutrona? ($m_n = 1{,}008\,665$ u, $m(^{235}U) = 235{,}043\,9$ u, $m(^{139}La) = 138{,}906\,1$ u, $m(^{95}Mo) = 94{,}905\,84$ u)

Rezultat: $Q = 209$ MeV

## TABLICA 1.

### VAŽNIJE FIZIKALNE KONSTANTE

| Konstante | Znak i vrijednost | Veza s drugim i s osnovnim jedinicama |
|---|---|---|
| srednja vrijednost akceleracije slobodnog pada | $g_n = 9{,}80665$ m s$^{-2}$ | |
| približna vrijednost akceleracije slobodnog pada | $g = 9{,}81$ m s$^{-2}$ | |
| gravitacijska konstanta | $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m$^3$kg$^{-1}$s$^{-2}$ | |
| plinska konstanta | $R = 8{,}314$ J K$^{-1}$ mol$^{-1}$ | |
| Avogadrova konstanta | $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ mol$^{-1}$ | |
| molarni volumen plinova | $V_0 = 22{,}414$ L | |
| Boltzmannova konstanta | $k = 1{,}3807 \cdot 10^{-23}$ JK$^{-1}$ | |
| permitivnost vakuuma | $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F m$^{-1}$ | |
| permeabilnost vakuuma | $\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ H m$^{-1}$ | A s V$^{-1}$m$^{-1}$ |
| brzina svjetlosti u vakuumu | $c = 299\,792\,458$ m s$^{-1}$ | V s A$^{-1}$m$^{-1}$ |
| Planckova konstanta | $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J s | |
| Stefan-Boltzmannova konstanta | $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Wm$^{-2}$K$^{-4}$ | J m$^{-2}$s$^{-1}$K$^{-4}$ |
| Wienova konstanta | $b = 0{,}002\,89$ m K | |
| naboj elektrona | $e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C | |
| masa mirovanja elektrona | $m_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg | $5{,}486 \cdot 10^{-4}$ u |
| masa mirovanja protona | $m_p = 1{,}672\,6 \cdot 10^{-27}$ kg | 1,007 28 u |
| masa mirovanja neutrona | $m_n = 1{,}674\,9 \cdot 10^{-27}$ kg | 1,008 66 u |
| Rydbergova konstanta | $R = 10\,973\,732$ m$^{-1}$ | |
| atomska jedinica mase | $u = 1{,}660\,53 \cdot 10^{-27}$ kg | |
| energijski ekvivalent atomske masene jedinice | $\Delta E_u = 931{,}5$ MeV | 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J |

## TABLICA 2.

### ZNAKOVI FIZIKALNIH VELIČINA I NJIHOVIH MJERNIH JEDINICA

| Fizička veličina | Znak | Jedinica | Znak jedinice | Veza s drugim i s osnovnim jedinicama |
|---|---|---|---|---|
| duljina, pređeni put | $l, L$ | metar | m | |
| masa | $m$ | kilogram | kg | |
| vrijeme | $t$ | sekunda | s | |
| ploština | $A, (S)$ | | m$^2$ | |
| obujam | $V$ | | m$^3$ | |
| gustoća | $\varrho$ | | kg m$^{-3}$ | |
| linearna gustoća | $\varrho_l, \mu$ | | kg m$^{-1}$ | |
| brzina | $v, c, u, w$ | | m s$^{-1}$ | |

| Fizička veličina | Znak | Jedinica | Znak jedinice | Veza s drugim i s osnovnim jedinicama |
|---|---|---|---|---|
| ubrzanje, akceleracija | $a, g$ | | $\mathrm{m\,s^{-2}}$ | |
| kutna brzina | $\omega$ | | $\mathrm{s^{-1}}$, $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ | |
| kutno ubrzanje | $\alpha$ | | $\mathrm{s^{-2}}$, $\mathrm{rad\,s^{-2}}$ | |
| frekvencija | $f$ | herc | Hz | $\mathrm{s^{-1}}$ |
| kružna frekvencija | $\omega$ | | $\mathrm{s^{-1}}$, $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ | |
| period titranja, titrajno vrijeme | $T$ | sekunda | s | |
| sila | $F$ | njutn | N | $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ |
| težina | $G, (P, W)$ | | N | |
| tlak | $p$ | paskal | Pa | $\mathrm{N\,m^{-2}}$ |
| rad | $W, (A)$ | džul | J | $\mathrm{kg\,m^2 s^{-2}}$ |
| energija | $E$ | | J | |
| potencijalna energija | $E_p, U$ | | J | |
| kinetička energija | $E_k, (K, T)$ | | J | |
| snaga | $P$ | vat | W | $\mathrm{J\,s^{-1}}$ |
| količina gibanja | $p$ | | $\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ | |
| moment sile | $M$ | | N m | |
| moment inercije | $I$ | | $\mathrm{kg\,m^2}$ | |
| moment količine gibanja | $L$ | | $\mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}$ | |
| modul elastičnosti | $E$ | | Pa | |
| napetost površine | $\gamma, \sigma$ | | $\mathrm{N\,m^{-1}}$, $\mathrm{J\,m^{-2}}$ | |
| viskoznost | $\eta$ | | Pa s | $\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$ |
| molarna masa | $M$ | | $\mathrm{kg\,mol^{-1}}$ | |
| termodinamička temperatura | $T$ | kelvin | K | |
| Celzijeva temperatura | $t$ | Celzijev stupanj | °C | |
| toplina | $Q$ | džul | J | |
| toplinski kapacitet | $C$ | | $\mathrm{J\,K^{-1}}$ | |
| specifični toplinski kapacitet | $c, c_p c_V$ | | $\mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$ | |
| molarni toplinski kapacitet | $C, C_p, C_V$ | | $\mathrm{J\,K^{-1}mol^{-1}}$ | |
| količina električnog naboja | $Q, q, e$ | kulon | C | A s |
| jakost električnog polja | $E$ | | $\mathrm{V\,m^{-1}}$ | $\mathrm{N\,C^{-1}}$ |
| površinska gustoća naboja | $\sigma$ | | $\mathrm{C\,m^{-2}}$ | $\mathrm{A\,s\,m^{-2}}$ |
| električni potencijal | $V, \varphi$ | volt | V | $\mathrm{J\,A^{-1}s^{-1}}$ |
| električni pomak | $D$ | | $\mathrm{A\,s\,m^{-2}}$ | |
| permitivnost vakuuma | $\varepsilon_0$ | | $\mathrm{F\,m^{-1}}$ | $\mathrm{A\,s\,V^{-1}m^{-1}}$ |
| relativna permitivnost | $\varepsilon_r$ | | | |
| dielektrična konstanta (permitivnost) | $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ | | $\mathrm{F\,m^{-1}}$ | $\mathrm{A\,s\,V^{-1}m^{-1}}$ |
| kapacitet | $C$ | farad | F | $\mathrm{C\,V^{-1} = A\,s\,V^{-1}}$ |
| jakost električne struje | $I$ | amper | A | |
| napon, razlika električnih potencijala | $U$ | volt | V | |
| gustoća struje | $J$ | | $\mathrm{A\,m^{-2}}$ | |
| električni otpor | $R$ | om | $\Omega$ | $\mathrm{V\,A^{-1}}$ |
| otpornost | $\varrho$ | | $\Omega$ m | |
| vodljivost | $G$ | simens | S | $\mathrm{A\,V^{-1}}$ |
| provodnost | $\kappa, \sigma$ | | $\mathrm{S\,m^{-1}}$ | $\Omega^{-1}\mathrm{m^{-1}}$ |

| Fizička veličina | Znak | Jedinica | Znak jedinice | Veza s drugim i s osnovnim jedinicama |
|---|---|---|---|---|
| temperaturni koeficijent električnog otpora | $\alpha$ | | $\mathrm{K^{-1}}$ | |
| magnetski tok | $\Phi$ | veber | Wb | V s |
| magnetska indukcija | $B$ | tesla | T | $\mathrm{V\,s\,m^{-2}}$ |
| jakost magnegskog polja | $H$ | | $\mathrm{A\,m^{-1}}$ | |
| induktivnost | $L$ | henri | H | $\mathrm{V\,s\,A^{-1}}$ |
| permeabilnost vakuuma | $\mu_0$ | | $\mathrm{H\,m^{-1}}$ | $\mathrm{V\,s\,A^{-1}m^{-1}}$ |
| relativna permeabilnost | $\mu_r$ | | | |
| permeabilnost | $\mu = \mu_0 \mu_r$ | | $\mathrm{H\,m^{-1}}$ | |
| radijus | $r$ | | m | |
| kut | $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \ldots$ | stupanj (minuta, sekunda); radijan | °, ′, ″; rad | |
| prostorni kut | $A, \Omega, \Theta, \ldots$ | steradijan | sr | |
| svjetlosni tok | $\Phi$ | lumen | lm | |
| svjetlosna jakost | $I$ | kandela | cd | |
| osvjetljenje (iluminancija), rasvjeta | $E$ | luks | lx | |
| žarišna daljina | $f$ | | m | |
| jakost leće | $D$ | recipročni metar | $\mathrm{m^{-1}}$ | |
| indeks loma | $n$ | | | |
| vrijeme poluraspada | $T_{1/2}$ | | s | |
| konstanta raspada | $\lambda$ | | $\mathrm{s^{-1}}$ | |
| aktivnost | $A$ | bekerel | Bq | |
| svjetlosna energija | $Q$ | | J | |
| svjetlosna egzitancija (svijetljenje površine) | $M$ | | lm s | |
| energija zračenja | $Q, W$ | | J | |
| snaga zračenja | $P, \Phi$ | | W | |
| odzračnost | $M$ | | $\mathrm{W\,m^{-2}}$ | |
| jakost zračenja | $I$ | | $\mathrm{W\,sr^{-1}}$ | |
| gustoća zračenja, radijancija | $L_e$ | | $\mathrm{W\,sr^{-1}m^{-2}}$ | |
| osvjetljenost | $H$ | | lx s | |
| sjaj (luminancija) | $L$ | | $\mathrm{cd\,m^{-2}}$ | |
| ozračenje (iradijancija) | $E_e$ | | $\mathrm{W\,m^{-2}}$ | |
| ozračenost | $H_e$ | | $\mathrm{J\,m^{-2}}$ | |

## TABLICA 3.

### RELATIVNE PERMITIVNOSTI NEKIH MATERIJALA

| | | | |
|---|---|---|---|
| etanol | 24,0 | staklo | 7,0 |
| parafin | 2,0 | tinjac | 7,0 |
| petrolej | 2,0 | voda | 81,0 |
| porculan | 6,0 | zrak (pri normalnom tlaku) | 1,000 6 |

## TABLICA 4.

### VRIJEME POLURASPADA $T_{1/2}$ NEKIH RADIOAKTIVNIH IZOTOPA

| | | |
|---|---|---|
| Aktinij (izotop $^{227}Ac$) | 21,8 | god. |
| Radij (izotop $^{226}Ra$) | 1600,0 | god. |
| Radon (izotop $^{222}Rn$) | 3,825 | dan |
| Kobalt (izotop $^{60}Co$) | 5,3 | god. |
| Klor (izotop $^{38}Cl$) | 37,4 | min. |
| Fosfor (izotop $^{32}P$) | 14,3 | dan |
| Stroncij (izotop $^{90}Sr$) | 28,6 | god. |
| Natrij (izotop $^{24}Na$) | 15,02 | h |
| Ugljik (izotop $^{14}C$) | 5730 | god. |

## TABLICA 5.

### VALNE DULJINE BALMEROVE SERIJE U SPEKTRU VODIKOVOG ATOMA
($n_D = 2$)

| Gornji nivo $n_G$ | Valna duljina (mjereno u zraku) $\lambda/10^{-10}$m |
|---|---|
| 3 | 6562,80 |
| 4 | 4861,33 |
| 5 | 4340,47 |
| 6 | 4101,74 |
| 7 | 3970,07 |
| 8 | 3889,05 |

## TABLICA 6.

### KEMIJSKI ELEMENTI

| Znak kemijskog elementa | Hrvatsko ime | Redni broj | Relativna atomska masa |
|---|---|---|---|
| Ac | aktinij | 89 | 227,028 |
| Ag | srebro | 47 | 107,868 |
| Al | aluminij | 13 | 26,982 |
| Am | americij | 95 | 243 |
| Ar | argon | 18 | 39,948 |
| As | arsen | 33 | 74,922 |
| At | astat | 85 | 210 |
| Au | zlato | 79 | 196,967 |
| B | bor | 5 | 10,811 |
| Ba | barij | 56 | 137,327 |
| Be | berilij | 4 | 9,012 |
| Bi | bizmut | 83 | 208,980 |
| Bk | berkelij | 97 | 247 |
| Br | brom | 35 | 79,904 |
| C | ugljik | 6 | 12,011 |
| Ca | kalcij | 20 | 40,078 |
| Cd | kadmij | 48 | 112,411 |
| Ce | cerij | 58 | 140,115 |
| Cf | kalifornij | 98 | 251 |
| Cl | klor | 17 | 35,453 |
| Cm | kirij | 96 | 247 |
| Co | kobalt | 27 | 58,933 |
| Cr | krom | 24 | 51,996 |
| Cs | cezij | 55 | 132,905 |
| Cu | bakar | 29 | 63,546 |
| Dy | disprozij | 66 | 162,50 |
| Er | erbij | 68 | 167,26 |
| Es | ajnštajnij | 99 | 254 |
| Eu | europij | 63 | 151,965 |
| F | fluor | 9 | 18,998 |
| Fe | željezo | 26 | 55,847 |
| Fm | fermij | 100 | 257 |
| Fr | francij | 87 | 223 |
| Ga | galij | 31 | 69,723 |
| Gd | gadolinij | 64 | 157,25 |
| Ge | germanij | 32 | 72,61 |
| H | vodik | 1 | 1,008 |
| He | helij | 2 | 4,003 |
| Hf | hafnij | 72 | 178,49 |
| Hg | živa | 80 | 200,59 |
| Ho | holmij | 67 | 164,930 |
| In | indij | 49 | 114,82 |
| Ir | iridij | 77 | 192,22 |
| I | jod | 53 | 126,904 |
| K | kalij | 19 | 39,098 |
| Kr | kripton | 36 | 83,80 |
| Ku | kurčatovij | 104 | 260 |
| La | lantan | 57 | 138,906 |
| Li | litij | 3 | 6,941 |
| Lr | lorencij | 103 | 256 |
| Lu | lutecij | 71 | 174,967 |
| Md | mendeljevij | 101 | 258 |
| Mg | magnezij | 12 | 24,305 |
| Mn | mangan | 25 | 54,938 |
| Mo | molibden | 42 | 95,94 |

| Znak kemijskog elementa | Hrvatsko ime | Redni broj | Relativna atomska masa |
|---|---|---|---|
| N | dušik | 7 | 14,007 |
| Na | natrij | 11 | 22,989 |
| Nb | niobij | 41 | 92,906 |
| Nd | neodimij | 60 | 144,24 |
| Ne | neon | 10 | 20,179 |
| Ni | nikal | 28 | 58,69 |
| No | nobelij | 102 | 259 |
| Np | neptunij | 93 | 237,048 |
| O | kisik | 8 | 15,999 |
| Os | osmij | 76 | 190,2 |
| P | fosfor | 15 | 30,974 |
| Pa | protaktinij | 91 | 231,036 |
| Pb | olovo | 82 | 207,2 |
| Pd | paladij | 46 | 106,42 |
| Pm | prometij | 61 | 145 |
| Po | polonij | 84 | 209 |
| Pr | praseodimij | 59 | 140,908 |
| Pt | platina | 78 | 195,08 |
| Pu | plutonij | 94 | 244 |
| Ra | radij | 88 | 226,025 |
| Rb | rubidij | 37 | 85,468 |
| Re | renij | 75 | 186,207 |
| Rh | rodij | 45 | 102,906 |
| Rn | radon | 86 | 222 |
| Ru | rutenij | 44 | 101,07 |
| S | sumpor | 16 | 32,06 |
| Sb | antimon | 51 | 121,75 |
| Sc | skandij | 21 | 44,956 |
| Se | selen | 34 | 78,96 |
| Si | silicij | 14 | 28,086 |
| Sm | samarij | 62 | 150,36 |
| Sn | kositar | 50 | 118,710 |
| Sr | stroncij | 38 | 87,62 |
| Ta | tantal | 73 | 180,948 |
| Tb | terbij | 65 | 158,925 |
| Tc | tehnecij | 43 | 98 |
| Te | telur | 52 | 127,60 |
| Th | torij | 90 | 232,038 |
| Ti | titan | 22 | 47,88 |
| Tl | talij | 81 | 204,383 |
| Tm | tulij | 69 | 168,934 |
| U | uran | 92 | 238,029 |
| V | vanadij | 23 | 50,942 |
| W | volfram | 74 | 183,85 |
| Xe | ksenon | 54 | 131,29 |
| Y | itrij | 39 | 88,906 |
| Yb | iterbij | 70 | 173,04 |
| Zn | cink | 30 | 65,39 |
| Zr | cirkonij | 40 | 91,224 |

# TABLICA 7.

## ENERGIJA VEZANJA JEZGARA

| Izotop | Masa / u | Defekt mase / u | Energija vezanja / MeV | Energija vezanja po nukleonu / MeV |
|---|---|---|---|---|
| $_1H^2$ | 2,01410 | 0,00238 | 2,22 | 1,11 |
| $_1H^3$ | 3,01605 | 0,00910 | 8,46 | 2,82 |
| $_2He^3$ | 3,01603 | 0,00827 | 7,72 | 2,57 |
| $_2He^4$ | 4,00260 | 0,03039 | 28,39 | 7,10 |
| $_3Li^7$ | 7,01600 | 0,04213 | 39,22 | 5,60 |
| $_6C^{12}$ | 12,00000 | 0,09858 | 91,76 | 7,64 |
| $_7N^{14}$ | 14,00307 | 0,11236 | 104,57 | 7,47 |
| $_8O^{16}$ | 15,99491 | 0,13661 | 127,20 | 7,97 |
| $_{13}Al^{27}$ | 26,98154 | 0,2415 | 224,8 | 8,33 |
| $_{24}Cr^{52}$ | 51,94051 | 0,4866 | 453,0 | 8,71 |
| $_{82}Pb^{208}$ | 207,97663 | 1,7578 | 1636 | 7,87 |
| $_{92}U^{235}$ | 235,04393 | 1,915 | 1784 | 7,60 |
| $_{92}U^{238}$ | 238,05078 | 1,936 | 1803 | 7,58 |

## TABLICA 8.

### PREGLED ELEMENTARNIH ČESTICA

| | Čestica | Znak | Energija mase mirovanja $mc^2$ | Naboj u jedinicama $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C $q/e$ |
|---|---|---|---|---|
| PRENOSIOCI MEĐUDJELOVANJA (baždarski bozoni) | 8 gluona | G | 0 | 0 |
| | W-čestica, anti-W-čestica | $W^{\pm}$ | 80,2 GeV | $\pm 1$ |
| | Z-bozon | Z | 91,2 GeV | 0 |
| | foton | $\gamma$ | 0 | 0 |
| LEPTONI | elektron, pozitron | $e^{\mp}$ | 0,511 MeV | $\mp 1$ |
| | elektronski neutrino, elektronski antineutrino | $\nu_e$, $\overline{\nu}_e$ | < 17 eV | 0 |
| | mion, antimion | $\mu^{\mp}$ | 105,66 MeV | $\mp 1$ |
| | mionski neutrino, mionski antineutrino | $\nu_\mu$, $\overline{\nu}_\mu$ | < 0,27 MeV | 0 |
| | $\tau$-leptoni anti $\tau$-leptoni | $\tau^{\mp}$ | 1784 MeV | $\mp 1$ |
| | $\tau$-neutrino anti $\tau$-neutrino | $\nu_\tau$, $\overline{\nu}_\tau$ | < 35 MeV | 0 |
| KVARKOVI | gornji (up) | u, $\overline{\mathrm{u}}$ | 5,6 MeV | $\pm \frac{2}{3}$ |
| | donji (down) | d, $\overline{\mathrm{d}}$ | 9,9 MeV | $\mp \frac{1}{3}$ |
| | strani (strange) | s, $\overline{\mathrm{s}}$ | 199 MeV | $\mp \frac{1}{3}$ |
| | čarobni (charm) | c, $\overline{\mathrm{c}}$ | 1,50 GeV | $\pm \frac{2}{3}$ |
| | lijepi (beauty) | b, $\overline{\mathrm{b}}$ | ≈ 5 GeV | $\mp \frac{1}{3}$ |
| | vršni (top) | t, $\overline{\mathrm{t}}$ | ? | $\mp \frac{2}{3}$ |

*Napomena:* Mase kvarkova su zapravo strujne kvarkovske mase.



## LITERATURA


J.A. Cronin, D.F. Greenberg, V.L. Telegdi, *UNIVERSITY OF CHICAGO GRADUATE PROBLEMS IN PHYSICS WITH SOLUTIONS*, Addison-Wesley, 1967.

A.G. Čertov, A.A. Voroljev, M.F. Fedorov, *ZADAČNIK PO FIZIKE*, Višaja škola, Moskva, 1973.

J.A. Edminister, *ELECTROMAGNETICS*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1979.

A. Halpern, *3000 SOLVED PROBLEMS IN PHYSICS*, Schaum's Solved Problems Series, McGraw-Hill, New York, 1988.

E. Hecht, *THEORY AND PROBLEMS OF OPTICS*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1975.

V. Henč-Bartolić, P. Kulišić, *VALOVI I OPTIKA*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

S. Kozel, E. Rashba, S. Slavatinskii, *COLLECTED PROBLEMS IN PHYSICS*, Mir Publishers, Moscow, 1986.

K. F. Riley, *PROBLEMS FOR PHYSICS STUDENTS*, Cambridge, Universita Press, Cambridge, 1982.

D.I. Saharov, *ZBORNIK ZADAČ PO FIZIKE*, 12. izd., Prosvješčenije, Moskva, 1973.

Đ. Veselić, M. Baće, *ZADACI IZ FIZIKE IV*, ETF, Zagreb, 1971.

I. Supek, *TEORIJSKA FIZIKA I STRUKTURA MATERIJE*, II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1963.

V. S. Wolkenstein, *PROBLEMS IN GENERAL PHYSICS*, 2. izdanje, treći tisak, Mir Publishers, Moscow, 1990.

F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young, *UNIVERSITY PHYSICS*, Addison-Wesley Pub. Co., 1976.

*CRC HANDBOOK OF CHEMISTRY AND PHYSICS*, 58th EDITION, B-270, (1977-1978) — CRC Press, Inc.

*REVIEW OF PARTICLE PROPERTIES*, Physics Letters, B, 239, 1990.