4. Minimizacija Booleovih izraza (2)

Sadržaj predavanja

- **Quine-McCluskeyeva metoda**
- minimizacija višeizlazne funkcije
- Quine-McCluskey za višeizlazne funkcije

Quine-McCluskeyeva metoda

- tablična metoda prikladna za minimizaciju funkcija većeg broja varijabli:
  - može se svesti na manipuliranje *indeksima* standardnih članova
  - numerički postupak
    ~ pogodan za programsku implementaciju
- W. V. Quine, 1952;
  poboljšanje: E. J. McCluskey, 1956

Quine-McCluskeyeva metoda

- potpuno specificirana funkcija
u obliku sume standardnih produkata
- postupak u *dvije* faze:
  - prva faza
~ nalaženje *primarnih implikanata* (→ potpune sume):
najveća zaokruženja u K-tablicama
  - druga faza
~ određivanje optimalnog (*minimalnog*) skupa
primarnih implikanata (→ minimalne sume)

Quine-McCluskeyeva metoda

- prva faza:
  - svrstavanje minterma u *klase* prema broju jedinica
  - uspoređivanje elemenata *susjednih* klasa
    ~ kombiniranje elemenata koji se mogu simplificirati (T9)

    $$A \cdot \varphi + \overline{A} \cdot \varphi = \varphi \quad (*)$$

    - dobiveni produkti
      ~ klasa u novoj tablici
    - elementi koji nisu kombinirani
      ~ *primarni implikanti*
  - ponavljanje prethodnog koraka
    za elemente koji su izgubili istu varijablu
  - postupak se zaustavlja
    ~ nema više kandidata za kombiniranje

Quine-McCluskeyeva metoda

- dodaci za numerički postupak:
  - klase su susjedne
  - elementi se razlikuju za 2^k, k = 0, 1, 2, ...
  - element u višoj klasi mora biti veći
  - eliminira se varijabla 2^k

Quine-McCluskeyeva metoda

Primjer: $z = f(A, B, C, D) = \sum (1,3,5,6,9,11,12,13,14,15)$

- prva faza

	A	B	C	D
	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

1	1	✓
2	3	✓
	5	✓
	6	✓
	9	✓
	12	✓
3	11	✓
	13	✓
	14	✓
4	15	✓

1	1,3	(2)	✓
	1,5	(4)	✓
	1,9	(8)	✓
2	3,11	(8)	✓
	5,13	(8)	✓
	6,14	(8)	
	9,11	(2)	✓
	9,13	(4)	✓
	12,13	(1)	✓
	12,14	(2)	✓
3	11,15	(4)	✓
	13,15	(2)	✓
	14,15	(1)	✓

1	1,3,9,11	(2,8)
	1,5,9,13	(4,8)
	1,9,3,11	(8,2)
	1,9,5,13	(8,4)
2	9,11,13,15	(2,4)
	12,14,13,15	(2,1)
	12,13,14,15	(1,2)
	9,13,11,15	(4,2)

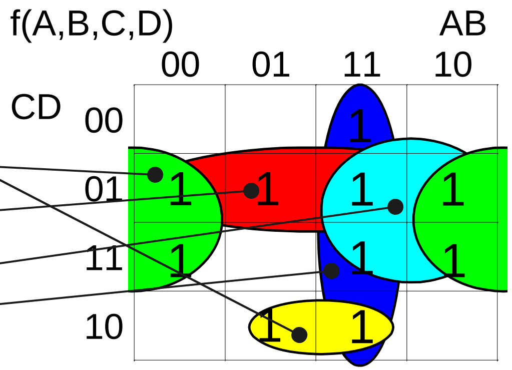
Quine-McCluskeyeva metoda

- rezultat prve faze: $z = f(A,B,C,D)$

$$= \sum(1,3,5,6,9,11,12,13,14,15)$$

- primarni članovi

6,14 (8)	$\equiv$	$BC\overline{D}$	=	a
1,3,9,11 (2,8)	$\equiv$	$\overline{B}D$	=	b
1,5,9,13 (4,8)	$\equiv$	$\overline{C}D$	=	c
9,11,13,15 (2,4)	$\equiv$	AD	=	d
12,13,14,15 (1,2)	$\equiv$	AB	=	e



Quine-McCluskeyeva metoda

- druga faza:
  - formiranje tablice primarnih implikanata
    i označavanje prekrivanja minterma
  - nalaženje *bitnih* primarnih implikanata,
    koji *jedini prekrivaju pojedini minterm*
    ~ označiti minterme koje taj član pokriva
  - bitni primarni implikanti ulaze u minimalnu sumu
  - preostale minterme prekriti *minimalnim* podskupom
    preostalih primarnih implikanata
    ~ prednost:
    primarni implikanti s manjim brojem literala

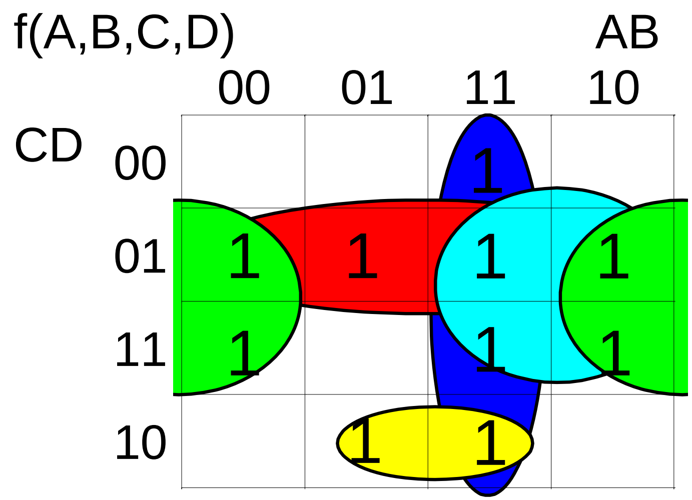
Quine-McCluskeyeva metoda

- druga faza:

		1	3	5	6	9	11	12	13	14	15
$BC\overline{D}$	a				X					X	
$\overline{B}D$	b	X	X			X	X				
$\overline{C}D$	c	X		X		X			X		
AD	d					X	X		X		X
AB	e							X	X	X	X
		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

$$z = a + b + c + e$$

$$= BC\overline{D} + \overline{B}D + \overline{C}D + AB$$



Quine-McCluskeyeva metoda

- druga faza:
  - nakon nalaženja bitnih primarnih članova ~ moguća pojava *cikličke* tablice:
    - *Pyne-McCluskeyev pristup*: preostale primarne implikante tretirati kao logičke varijable i izgraditi funkciju F

      F = (suma pi koji prekrivaju m_{i1})$\cdot$
      (suma pi koji prekrivaju m_{i2})$\cdot$ …
      = ... = suma produkata
    - uzeti produkt s minimalnim brojem primarnih implikanata

Quine-McCluskeyeva metoda

- minimizacija *nepotpuno specificiranih funkcija* u obliku sume produkata: $f = \sum_i m_i + \sum_j d_j$
  ~ modifikacija osnovnog postupka
  uvođenjem "vektora redundancija"

- postupak:
  - početna tablica
    ~ *mintermi* i *nespecificirane kombinacije*
  - svaki produktni član dobiva oznaku redundantnosti:
    d = 0 : produkt *nije* zanemariv
    ~ simplifikacija je uključila barem jedan m_i
    d = 1 : produkt je zanemariv ($\rightarrow$ redundancija!)
    ~ nastao kombiniranjem *samo* d_i

Quine-McCluskeyeva metoda

- prva faza:
  - kombiniranje produkata kao u osnovnom postupku, uz *evidenciju redundantnosti*
    $d = d_{i1} \cdot d_{i2}$: produkt zanemariv samo ako je nastao simplifikacijom zanemarivih produkata
  - *priprema* druge faze
    ~ izbor pi_i koji *nisu zanemarivi* ($d = 0$):
    - tablica za izbor minimalne sume
      ~ upis samo pi_i koji *nisu zanemarivi*
    - stupci tablice
      ~ m_i (X ne treba prekriti)
- druga faza postupka
  ~ identična osnovnom postupku

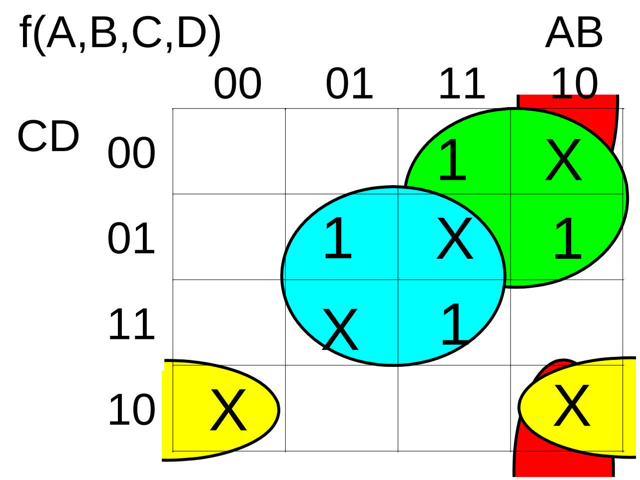
Quine-McCluskeyeva metoda

Primjer: $f(A,B,C,D)=\sum m(5,9,12,15)+\sum d(2,7,8,10,13)$

	ABCD	d	
2	0010	1	✓
8	1000	1	✓
5	0101	0	✓
9	1001	0	✓
10	1010	1	✓
12	1100	0	✓
7	0111	1	✓
13	1101	1	✓
15	1111	0	✓

	ABCD	d	
2,10	-010	1	
8,9	100-	0	✓
8,10	10-0	1	
8,12	1-00	0	✓
5,7	01-1	0	✓
5,13	-101	0	✓
9,13	1-01	0	✓
12,13	110-	0	✓
7,15	-111	0	✓
13,15	11-1	0	✓

	ABCD	d
8,9,12,13	1-0-	0
8,12,9,13	1-0-	0
5,7,13,15	-1-1	0
5,13,7,15	-1-1	0



potrebni pi$_i$ (d=0): $\{A\overline{C}, BD\}$

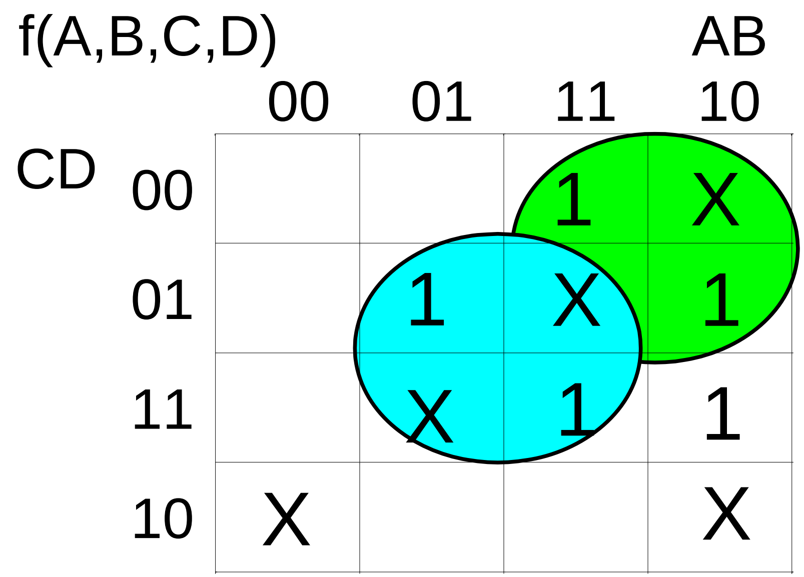
nepotrebni pi$_i$ (d=1): $\{\overline{B}C\overline{D}, A\overline{B}\overline{D}\}$

Quine-McCluskeyeva metoda

- druga faza :

		5	9	12	15
$A\overline{C}$	a		X	X	
BD	b	X			X
		✓	✓	✓	✓

$$f = A\overline{C} + BD$$



Sadržaj predavanja

- Quine-McCluskeyeva metoda
- **minimizacija višeizlazne funkcije**
- Quine-McCluskey za višeizlazne funkcije

Minimizacija višeizlazne funkcije

- *višeizlazna funkcija*
  ~ skup Booleovih funkcija nad istim skupom varijabli:
  definira "višeizlazni sklop"
  (engl. multiple-output circuit)

Primjer : pretvorba 3-bitovnog broja u (3-bitovni) Grayev kod

b2	b1	b0	g2	g1	g0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

$$g_2 = \varphi_2(b_2, b_1, b_0)$$
$$g_1 = \varphi_1(b_2, b_1, b_0)$$
$$g_0 = \varphi_0(b_2, b_1, b_0)$$

Minimizacija višeizlazne funkcije

- minimizacija višeizlazne funkcije
  ~ mogućnosti:
  - zasebna minimizacija komponentnih funkcija f_i
  - *združena* minimizacija *svih* komponentnih funkcija višeizlazne funkcije (f_1, …, f_n)
    ~ povoljnije rješenje?
- minimizirana višeizlazna funkcija:
  - *višestruko* korištenje pojedinih produktnih članova
    ~ ušteda sklopovlja višeizlaznog sklopa
  - prilagodba (prethodnih) postupaka minimizacije
    ~ *istovremena* minimizacija komponentnih funkcija

Minimizacija višeizlazne funkcije

Primjer :

$$f_0 = AC + AB = pi_1 + pi_2,$$
$$= AC + AB\overline{C} = pi_1 + m_6$$

$f_0(A,B,C)$

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1			1	1

$$f_1 = \overline{A}B + B\overline{C} = pi_3 + pi_4$$
$$= \overline{A}B + AB\overline{C} = pi_3 + m_6$$

$f_1(A,B,C)$

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	
1		1		

- višeizlazna funkcija $\{f_0, f_1\}$ ima povoljnije rješenje (pi_1, pi_3, m_6) u odnosu na zasebnu minimizaciju f_0 i f_1 što daje (pi_1, pi_2, pi_3, pi_4)

Minimizacija višeizlazne funkcije

- *konceptualizacija* postupka višeizlazne minimizacije:
  - *višeizlazni primarni implikant* pi_i *nije nužno* primarni implikant pojedinih funkcija:

    $$pi_1, pi_2 \Rightarrow f_0$$

    $$pi_3, pi_4 \Rightarrow f_1$$

    $$m_6 = pi_5 \Rightarrow f_0 \cdot f_1$$

  - združena minimizacija n funkcija $f_1 \div f_n$:
    - odrediti $pi_i \ \forall \ f_i$
    - odrediti $pi_i \ \forall$ kombinaciju f_i: produkti 2 i više f_i

Minimizacija višeizlazne funkcije

Primjer: $f(A, B, C, D) = \{f_1, f_2, f_3\}$

f_1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11			1	1
10	1			

f_2

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11			1	
10	1			

f_3

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10				

Minimizacija višeizlazne funkcije

Primjer: $f(A, B, C, D) = \{f_1, f_2, f_3\}$

f_1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11			1	1
10	1			

f_2

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11			1	
10	1			

f_3

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10				

$f_1 f_2$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11			1	
10	1			

$f_1 f_3$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11			1	
10				

$f_2 f_3$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11			1	
10				

Minimizacija višeizlazne funkcije

Primjer: $\underline{f}(A, B, C, D) = \{f_1, f_2, f_3\}$

formiranje kombinacija funkcija

f_1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11			1	1
10	1			

f

f_2

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11			1	
10	1			

f_3

h

g

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10				

f_1f_2

c

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11			1	
10	1			

f_1f_3

d

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11			1	
10				

f_2f_3

e

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11			1	
10				

$f_1f_2f_3$

b

a

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11			1	
10				

$$f_1 = c + d + f$$

$$f_2 = b + c + e$$

$$f_3 = b/d + e/h + g$$

čitanje primarnih implikanata

Minimizacija višeizlazne funkcije

- izbor *minimalnog skupa* višeizlaznih pi_i koji će prekrivati *sve tri* funkcije f_1, f_2, f_3:
  - povoljan izbor
    ~ pi_i koji se javljaju u max broju f_i:
    max zajedničko korištenje produkata
  - početi od $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$
  - izabrani složeniji pi_i javljaju se u "nižim" K tablicama kao zalihosti X
- komentar rješenja primjera:
  - *h* (f_3) ne doprinosi prekrivanju
  - f_2 ne daje p_i
  - *a* je nepotreban, jer ga prekrivaju *f*, *e*, *h*
  - f_3 ima opcije (*b* ili *d*, te *e* ili *h*)

Sadržaj predavanja

- Quine-McCluskeyeva metoda
- minimizacija višeizlazne funkcije
- **Quine-McCluskey za višeizlazne funkcije**

Quine-McCluskey za višeizlazne funkcije

- sustavna metoda nalaženja minimalne sume
  ~ npr. modifikacija Quine-McCluskeyeve metode
  - prva faza
    ~ nalaženje skupa svih *višeizlaznih* primarnih implikanata (potpune sume)
    - prekrivanje komponentnih funkcija s pi_i
      ~ *vektor prekrivanja*
  - druga faza
    ~ nalaženje *minimalnog* skupa *višeizlaznih* primarnih implikanata (minimalne sume)

Quine-McCluskey za višeizlazne funkcije

- prva faza
  ~ utvrđivanje potpune sume:
  - raspodjela m_i *svih* f_i u indeksne grupe
    ~ broj 1
  - paziti na pripadnost m_i pojedinoj f_i
    ~ vektor prekrivanja!
  - označiti produkt (~ *nije* pi_i !) iz prethodne tablice jedino ako se u narednoj pojavljuje isti uzorak f_i, $\forall i$
  - $<f_1 f_2 \ldots f_n> = <00\ldots0>$ ("sve nule")
    nije valjani implikant

Quine-McCluskey za višeizlazne funkcije

Primjer : $f_1 = \sum(0,1,2,4,5,11,15),\ f_2 = \sum(0,2,4,13,15),\ f_3 = \sum(0,1,3,4,5,7,13,15)$

		$f_1f_2f_3$	
0	0000	111	✓
1	0001	101	✓
2	0010	110	✓
4	0100	111	✓
3	0011	001	✓
5	0101	101	✓
7	0111	001	✓
11	1011	100	✓
13	1101	011	✓
15	1111	111	

		$f_1f_2f_3$	
0,1	000-	101	✓
0,2	00-0	110	
0,4	0-00	111	
1,3	00-1	001	✓
1,5	0-01	101	✓
4,5	010-	101	✓
3,7	0-11	001	✓
5,7	01-1	001	✓
5,13	-101	001	✓
7,15	-111	001	✓
11,15	1-11	100	
13,15	11-1	011	

		$f_1f_2f_3$
0,1,4,5	0-0-	101
1,3,5,7	0--1	001
5,7,13,15	-1-1	001

a:	15	(111)	e:	13,15	(011)
c:	0, 2	(110)	d:	0, 1, 4, 5	(101)
b:	0, 4	(111)	g:	1, 3, 5, 7	(001)
f:	11,15	(100)	h:	5, 7,13,15	(001)

Quine-McCluskey za višeizlazne funkcije

- druga faza:

	f_1							f_2					f_3							
	0	1	2	4	5	11	15	0	2	4	13	15	0	1	3	4	5	7	13	15
a							x					x								x
b	x			x				x		x			x			x				
c	x		x					x	x											
d	x	x		x	x								x	x		x	x			
e											x	x							x	x
f						x	x													
g														x	x		x	x		
h																	x	x	x	x

  - rezultat:
    - bitni primarni implikanti: b, c, d, e, f, g
    - dobiveno je *potpuno prekrivanje*

Literatura

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 4: Minimizacija logičkih funkcija.

- Quine-McCluskeyeva metoda: str. 147-151
- minimizacija višeizlazne funkcije: str. 151-157
- Quine-McCluskey za višeizlazne funkcije: str. 157-159

Zadaci za vježbu (1)

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 4: Minimizacija logičkih funkcija.

- Quine-McCluskeyeva metoda: 4.12, 4.13, 4.15, 4.17
- minimizacija višeizlazne funkcije: 4.22-4.24
- Quine-McCluskey za višeizlazne funkcije: ponoviti 4.23, 4.24

Zadaci za vježbu (2)

M. Čupić: *Digitalna elektronika i digitalna logika. Zbirka riješenih zadataka*, Cjelina 4: Minimizacija logičkih funkcija.

- Quine-McCluskeyeva metoda:
  - riješeni zadaci: 4.8e, 4.9-4.12, 4.17-4.19, 4.23
  - zadaci za vježbu: 5, 11, 12 (str.165-166)
- Quine-McCluskey za višeizlazne funkcije:
  - riješeni zadaci: 4.19, 4.23,
  - zadaci za vježbu: 9, 13 (str.165-166)