3. Osnove digitalne logike

Sadržaj predavanja

- **logika sudova**
  - **logika sudova i digitalni sklopovi**
  - **logički kombinatori**
  - **simboli za logičke kombinatore**
- Booleova algebra
- Booleove funkcije
- Booleove funkcije dviju varijabli
- Booleove funkcije tri i više varijabli
- nepotpuno specificirane funkcije

Logika sudova i digitalni sklopovi

- digitalni sustav
  ~ sve funkcije (obrade podataka) temeljene na malom skupu "osnovnih logičkih funkcija"
- sklopovi koji ostvaruju osnovne logičke funkcije
  ~ osnovni *logički* sklopovi:
  obrađuju "logičke varijable"
- *elektroničke* izvedbe osnovnih logičkih sklopova:

  "Električke veličine koje odgovaraju logičkim varijablama održavaju se unutar unaprijed definiranih i fiksnih granica (na ulazu i na izlazu)."

Logika sudova i digitalni sklopovi

- "logičke varijable", "osnovne logičke funkcije"
  ~ terminologija logike sudova
- *logika sudova*, *propozicijska logika*
  (engl. propositional logic)
  ~ "kombiniranje" *elementarnih* sudova
  radi dobivanja novih *složenih* sudova,
  bez obzira na suvislost samih sudova
- osnovni *kombinatori* sudova
  ~ "osnovni logički veznici"

Logika sudova i digitalni sklopovi

- sudovi (tvrdnje, iskazi):
  - jednostavne rečenice
  - istiniti ili neistiniti

Primjer:

sud A: "Nema ulja (u motoru)."

sud B: "Temperatura (motora) je previsoka."

Logički kombinatori

- osnovni logički veznici:
  ~ "kombinatori" I, ILI
- vrijednost složenog suda
  ~ istinit ili neistinit

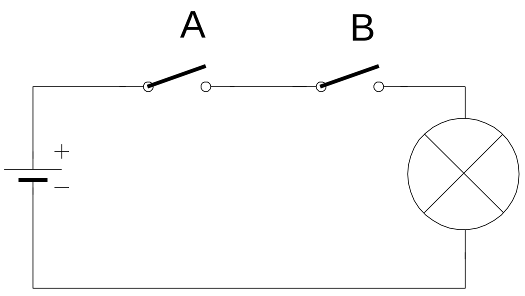
Primjer:

f = A ILI B = "Nema ulja (u motoru)."
ILI "Temperatura (motora) je previsoka."

f = A I B = "Nema ulja (u motoru)."
I "Temperatura (motora) je previsoka."

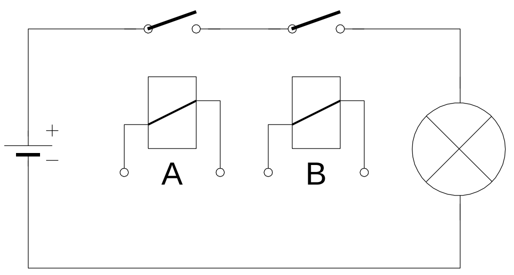
Logički kombinatori

- izvedba kombinatora I
  - (mehanički) kontakt:



A	≡	<sklopka A uključena>
B	≡	<sklopka B uključena>
f	≡	<žarulja svijetli>

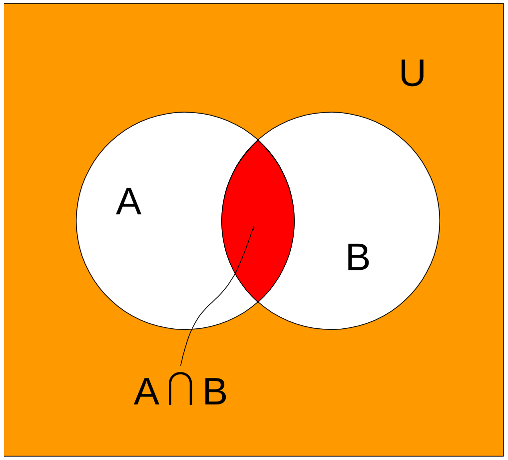
  - izvedba relejima:
    struja = pobuda releja
    (informacija se prenosi strujom)



Interpretacija kombiniranja

- algoritamski:

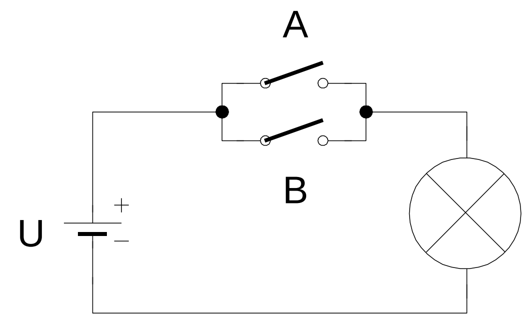
  ako (A istinit) ***i*** (B istinit)
  onda f istinit
  inače f neistinit



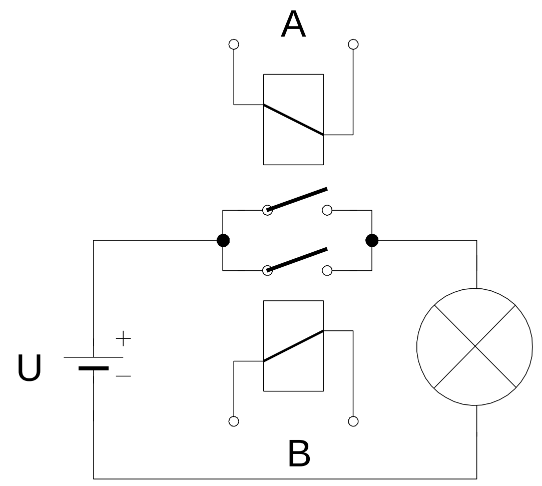
- "logički produkt"
  ~ *konjunkcija*
  - "računarska" notacija: $f = A \cdot B = AB$
  - simbolička logika: $f = A \wedge B$
  - teorija skupova: $f = A \bigcap B$

Logički kombinatori

- izvedba kombinatora ILI
  - (mehanički) kontakt:



A	≡	<sklopka A uključena>
B	≡	<sklopka B uključena>
f	≡	<žarulja svijetli>

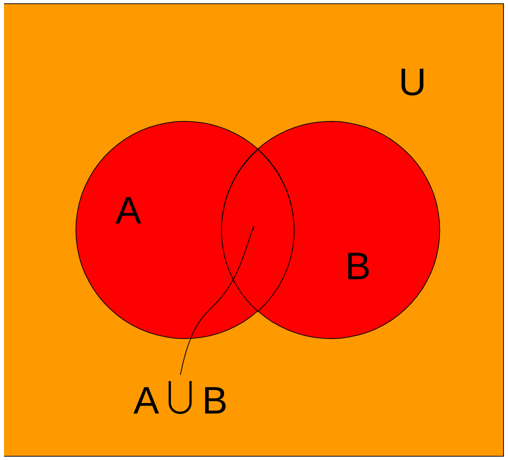


  - izvedba relejima:
    struja = pobuda releja
    (informacija se prenosi strujom)

Interpretacija kombiniranja

- algoritamski

  ako (A istinit) ***ili*** (B istinit) *(ili oba!)*
  onda f istinit
  inače f neistinit



- "logička suma"
  ~ disjunkcija
  - "računarska" notacija: $f = A + B$
  - simbolička logika: $f = A \vee B$
  - teorija skupova: $f = A \cup B$

Tablice istinitosti (kombinacija)

- *tablica kombinacija, tablica istinitosti* (engl. truth table) ~ prikaz djelovanja kombinatora:
  konačni broj mogućih kombinacija vrijednosti istinitosti elementarnih sudova
- oznake: T ~ istina, ⊥ ~ neistina
- definiraju odnos ulaza i izlaza digitalnog sustava

funkcija I (konjunkcija)

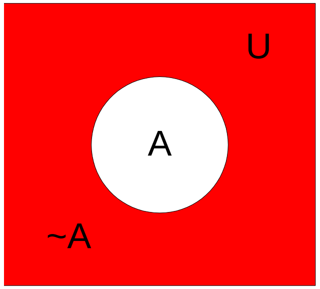
A	B	f
⊥	⊥	⊥
⊥	T	⊥
T	⊥	⊥
T	T	T

funkcija ILI (*inkluzivna* disjunkcija)

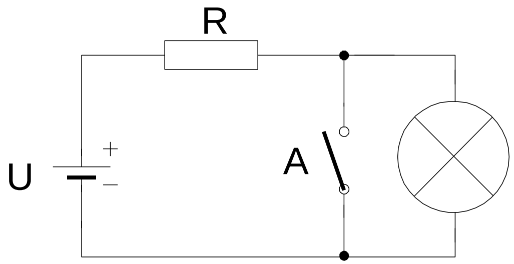
A	B	f
⊥	⊥	⊥
⊥	T	T
T	⊥	T
T	T	T

Logička negacija

- *logička funkcija NE, komplement, inverzija*
- *nije* kombinator (ali je korisni operator ☺)
- algoritamski



ako (A istinit)
onda f neistinit
inače f istinit



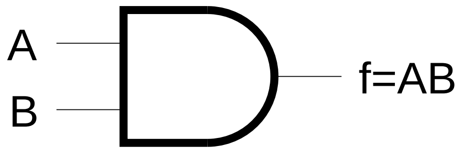
- logički izraz
  - "računarska" notacija: $f = \overline{A}$
  - simbolička logika: $f = \neg A$
  - teorija skupova: $f = A^C$

funkcija NE
(negacija)

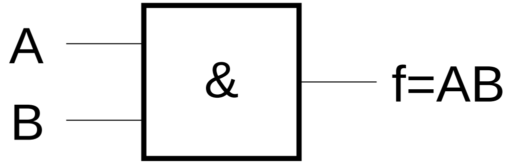
A	f
$\perp$	T
T	$\perp$

Simboli za logičke kombinatore

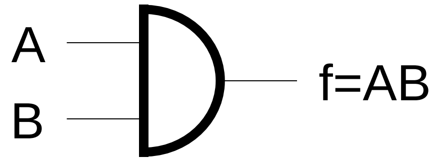
- simboli za kombinator I:
  - američki vojni standard Mil-STD-806B



  - međunarodni standard IEC/ISO, DIN 40900, ANSI/IEEE 91-1984

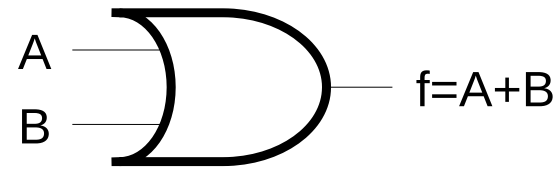


  - stari standard DIN

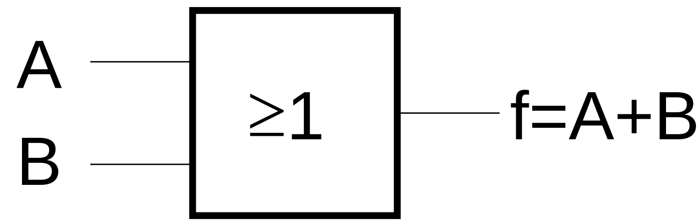


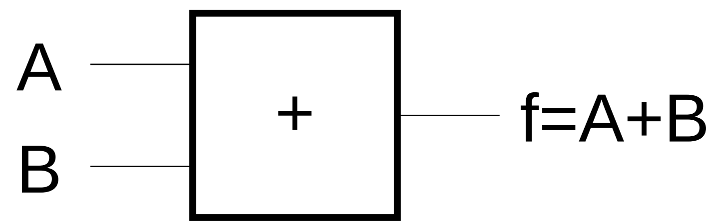
Simboli za logičke kombinatore

- simboli za kombinator ILI:
  - američki vojni standard Mil-STD-806B

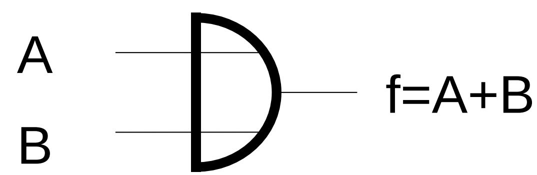


  - međunarodni standard IEC/ISO, DIN 40900, ANSI/IEEE 91-1984



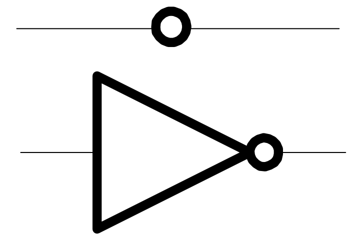


  - stari standard DIN

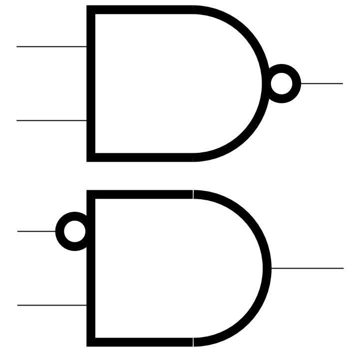


Simbol za logičku negaciju

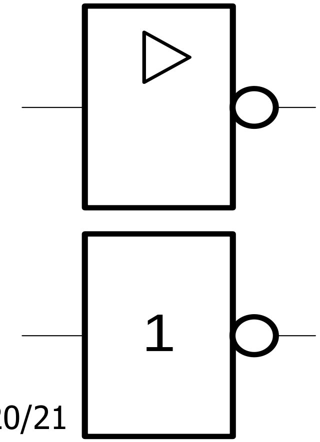
- simboli za operator NE:
  - američki vojni standard Mil-STD-806B



  - kombiniranje s drugim operatorima



  - međunarodni standard IEC/ISO



Sadržaj predavanja

- logika sudova
- **Booleova algebra**
  - **Huntingtonovi postulati**
  - **teoremi Booleove algebre**
  - **dvočlana Booleova algebra**
  - **teorija skupova kao Booleova algebra**
- Booleove funkcije
- Booleove funkcije dviju varijabli
- Booleove funkcije tri i više varijabli
- nepotpuno specificirane funkcije

Booleova algebra

- osnovni matematički aparat korišten
  u analizi i projektiranju digitalnih sklopova:
  - G. Boole:
    formalizam za proučavanje "zakona prosuđivanja":
    "An Investigation of the Laws of Thought", 1854
  - C. E. Shannon:
    primjena Booleove algebre
    (u analizi relejnih elektromehaničkih sklopova):
    "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits",
    1938

Booleova algebra

- izgradnja konzistentnog matematičkog sustava na aksiomatski način
- algebra se definira postavljanjem skupa tvrdnji
- formalna definicija:
  - konačni skup objekata: K
  - dvije *binarne* operacije: +, ·
  - skup osnovnih postulata (aksioma) ~ *aksiomatizacija*

Booleova algebra

- aksiomatizacija s dobrim svojstvima:
  - E. V. Huntington:
    "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic", 1904
    ~ aksiomatizacija s *minimalnim* brojem postulata:
    - konzistentnost:
      niti jedan postulat iz skupa ne proturječi nekom drugom iz istog skupa
    - nezavisnost:
      niti se jedan postulat ne da dokazati putem ostalih

Huntingtonovi postulati

P1: Postoji skup K objekata ili elemenata podložnih relaciji ekvivalencije, oznakom "=", koja zadovoljava princip supstitucije.

ekvivalencija:

- refleksivnost: $(\forall a \in K)(a = a)$
- simetričnost: $(\forall a, b \in K)(b = a \text{ uvijek kada je } a = b)$
- tranzitivnost: $(\forall a, b, c \in K)(a = b \text{ i } b = c \text{ implicira } a = c)$

Huntingtonovi postulati

P2: Definiraju se dva operatora kombiniranja "+" i "·" koji su zatvoreni s obzirom na K:

P2a: $(\forall a, b \in K)(a + b \in K)$

P2b: $(\forall a, b \in K)(a \cdot b \in K)$

P3: Za operatore kombiniranja postoji *neutralni element*:

P3a: $(\exists 0 \in K)(\forall a \in K \mid a + 0 = a)$

P3b: $(\exists 1 \in K)(\forall a \in K \mid a \cdot 1 = a)$

Huntingtonovi postulati

P4: Vrijedi zakon *komutacije*:

P4a: $(\forall a, b \in K)(a + b = b + a)$

P4b: $(\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a)$

P5: Vrijedi zakon *distribucije*:

P5a: $(\forall a, b, c \in K)(a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c))$

P5b: $(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c))$

Huntingtonovi postulati

P6: Postoji *inverzni* element – "komplement":

$$(\forall a \in K)(\exists \overline{a} \in K \mid (a + \overline{a} = 1)$$
$$(a \cdot \overline{a} = 0))$$

P7: Skup K sadrži *barem dva* različita elementa:

$$(\exists \texttt{ barem } a, b \in K \quad | \quad a \neq b)$$

Huntingtonovi postulati

- "operabilni" postulati
  ~ direktno korištenje u manipulacijama logičkih izraza
  - P3 (neutralni element)
  - P4 (komutativnost)
  - P5 (distributivnost)
  - P6 (inverzni element)

Huntingtonovi postulati

- inverzni element (komplement)
  ~ interpretacija kao rezultat operacije komplementiranja
- interpretacija "+" i "·" u uobičajenom smislu aritmetičkih operatora?
  ~ P5a i P6 ne vrijede!
- *dualnost* (metateorem o dualnosti):

  "Zamjenom operatora i neutralnih elemenata u nekom postulatu dobiva se njegov par, ako takav postoji."

Huntingtonovi postulati

- prioriteti operatora:
  - komplement, "—"
  - konjunkcija, "·"
  - inkluzivna disjunkcija, "+"
- zagrade mijenjaju redoslijed obavljanja operacija

Teoremi Booleove algebre

T1: dominacija

T1a: $(\forall a \in K)(a+1=1)$

T1b: $(\forall a \in K)(a \cdot 0=0)$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
(a+1) &= (a+1)\cdot 1 && (P3b)\\
&= (a+1)\cdot(a+\overline{a}) && (P6)\\
&= a+(1\cdot\overline{a}) && (P5a)\\
&= a+\overline{a} && (P3b)\\
&= 1 && (P6)\\
& && \overline{}\\
& && (Q.E.D.)
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

T2: idempotencija

T2a: $(\forall a \in K)(a + a = a)$

T2b: $(\forall a \in K)(a \cdot a = a)$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
(a + a) &= (a + a) \cdot 1 && (P3b) \\
&= (a + a) \cdot (a + \overline{a}) && (P6) \\
&= a + (a \cdot \overline{a}) && (P5a) \\
&= a + 0 && (P6) \\
&= a && (P3a) \\
& && \overline{(Q.E.D.)}
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

T3: involucija

$$(\forall a \in K)(a = \overline{(\overline{a})})$$

Dokaz: bez dokaza

Teoremi Booleove algebre

T4:

T4a: $(\forall a,b \in K)(a+\bar{a}b = a+b)$

T4b: $(\forall a,b \in K)(a\cdot(\bar{a}+b) = a\cdot b)$

Dokaz:

$$\begin{aligned}(a+\bar{a}b) &= (a+\bar{a})\cdot(a+b) && (P5a)\\ &= 1\cdot(a+b) && (P6)\\ &= a+b && (P3b)\\ & && \overline{}\\ & && (Q.E.D.)\end{aligned}$$

Teoremi Booleove algebre

T5: apsorpcija

T5a: $(\forall a,b \in K)(a + ab = a)$

T5b: $(\forall a,b \in K)(a \cdot (a + b) = a)$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
(a + ab) &= a \cdot 1 + ab && (P3b) \\
&= a \cdot (1 + b) && (P5b) \\
&= a \cdot 1 && (T1) \\
&= a && (P3b) \\
& && \overline{} \\
& && (Q.E.D.)
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

L6: $$(\forall a,b,c \in K)(a \cdot ((a+b)+c) = ((a+b)+c) \cdot a) = a)$$

Dokaz:

$$a \cdot ((a+b)+c) = a \cdot (a+b) + a \cdot c \qquad (P5)$$

$$= a + a \cdot c \qquad (T5)$$

$$= a \qquad (T5)$$

$$= ((a+b)+c) \cdot a$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$(Q.E.D.)$$

Teoremi Booleove algebre

T7: asocijativnost

T7a: $(\forall a,b,c \in K)((a+b)+c = a+(b+c))$

T7b: $(\forall a,b,c \in K)((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$

Dokaz: indirektan

- ako tvrdnja teorema vrijedi, lijeva i desna strana su jednake, pa vrijedi idempotencija (T2):

$$
\begin{aligned}
z &= ((a+b)+c) \cdot (a+(b+c)) && (P5b) \\
&= ((a+b)+c) \cdot a + ((a+b)+c) \cdot (b+c) && (T6) \\
&= a + ((a+b)+c) \cdot (b+c) && (P5b) \\
&= a + (((a+b)+c) \cdot b + ((a+b)+c) \cdot c) && (P4, P6) \\
&= a + (b + ((a+b)+c) \cdot c) && (T5) \\
&= a + (b+c) && \overline{(Q.E.D.)}
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

T8: de Morganovi zakoni

T8a: $(\forall a,b \in K)(\overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b})$

T8b: $(\forall a,b \in K)(\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b})$

Dokaz: indirektan

- ispitivanjem ispravnosti komplementa (P6)

Teoremi Booleove algebre

Dokaz T8:

$$
\begin{aligned}
(a+b)+\overline{a}\cdot\overline{b} &= ((a+b)+\overline{a})\cdot((a+b)+\overline{b}) && (P5a)\\
&= (\overline{a}+(a+b))\cdot(\overline{b}+(b+a)) && (P4)\\
&= 1\cdot 1 && (T5, T1)\\
&= 1 && (T1)\\
(a+b)\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b}) &= a\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})+b\cdot(\overline{b}\cdot\overline{a}) && (P5b, P4b)\\
&= 0+0 && (T7, P6, T1)\\
&= 0 && (T2)
\end{aligned}
$$

Dokaz T8 (nastavak):

- oba zahtjeva P6 su zadovoljena:

  $(a+b)$ je jedinstveni komplement od $(\overline{a}\cdot\overline{b})$

$$a+b=\overline{\overline{a}\cdot\overline{b}}\rightarrow\overline{a+b}=\overline{a}\cdot\overline{b}$$

$$a\rightarrow\overline{a},b\rightarrow\overline{b}$$

$$\overline{\overline{a}+\overline{b}}=\overline{\overline{a}}\cdot\overline{\overline{b}}$$

$$=a\cdot b \qquad (T3)$$

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a\cdot b}\rightarrow\overline{a\cdot b}=\overline{a}+\overline{b}$$

$$\overline{(Q.E.D.)}$$

Teoremi Booleove algebre

Poopćenje de Morganovih zakona:

$$(\forall a,b,\ldots,z \in K)(\overline{a+b+\ldots+z} = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\ldots\cdot\bar{z})$$

$$(\forall a,b,\ldots,z \in K)(\overline{a\cdot b\cdot\ldots\cdot z} = \bar{a}+\bar{b}+\ldots+\bar{z})$$

Dokaz:

- putem asocijativnosti (T7)

$$\overline{a+b+c} = \overline{a+(b+c)} = \bar{a}\cdot\overline{b+c} = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$$

Teoremi Booleove algebre

T9: simplifikacija

T9a: $(\forall a,b \in K)(a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a)$

T9b: $(\forall a,b \in K)((a+b)\cdot(a+\overline{b}) = a)$

Dokaz:

- primjenom distributivnosti (P5) i neutralnog elementa (P3)

Dvočlana Booleova algebra

- najjednostavnija Booleova algebra: $K = K_2 = \{0,1\}$
  ~ 0 i 1 nemaju numerička nego *logička* značenja

$$
\begin{array}{lll}
a=1 & 1+0=1,\ 1\cdot 1=1 & (P3) \\
 & 0+1=1 & (P4) \\
 & 1+\overline{1}=1,\ 1\cdot\overline{1}=0,\ \overline{1}=0 & (P6) \\
 & 1+1=1 & (T1) \\
a=0 & 0+0=0,\ 0\cdot 1=0 & (P3) \\
 & 0+\overline{0}=1,\ 0\cdot\overline{0}=0,\ \overline{0}=1 & (P6) \\
 & 0\cdot 0=0 & (T1)
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ ekvivalentni *termi* (izrazi)
za 1 odnosno 0: $\overline{1}=0,\ \overline{0}=1$

$$1\cdot 1=1+0=0+1=1+1=1$$

$$0+0=0\cdot 1=1\cdot 0=0\cdot 0=0$$

Teorija skupova kao Booleova algebra

- teorija skupova
  ~ izomorfna dvočlanoj Booleovoj algebri:

  pridruživanje:

  $$\left\langle K, \cdot, +, \bar{\ }, 0, 1 \right\rangle \leftrightarrow \left\langle S, \cap, \cup, \sim, \phi, U \right\rangle$$

  $$K = \{0,1\} \leftrightarrow S = \{\phi, U\}$$

  ϕ : prazni skup

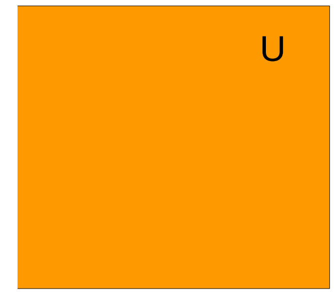
  U : univerzalni skup

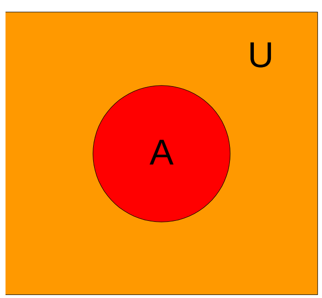
- definicija operacija:

  $$x \in A \cap B, x \in A \cup B, x \in \sim A$$

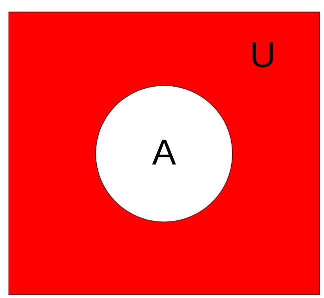
Teorija skupova kao Booleova algebra

- *Vennov dijagram*
  ~ prikaz skupa skupom točaka
  - univerzalni skup U:
    kvadrat, pravokutnik ili slični lik
  - skup:
    lik (obično krug) unutar U

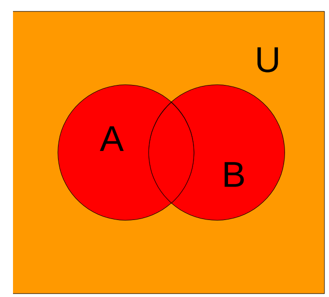




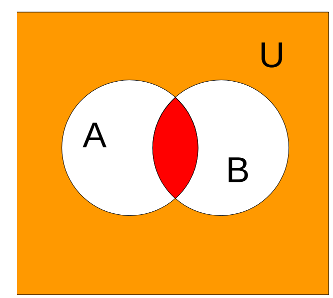
A



~A



A∪B



A∩B

Teorija skupova kao Booleova algebra

- postulati u skupovnom obliku:

(P3)
$$A \cup \phi = A$$
$$A \cap U = A$$

(P4)
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(P5)
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(P6)
$$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \phi$$

Sadržaj predavanja

- logika sudova
- Booleova algebra
- **Booleove funkcije**
  - **definicija**
  - **kanonski oblici**
  - **Shannonov teorem ekspanzije**
  - **komplementarna i dualna funkcija**
- Booleove funkcije dviju varijabli
- Booleove funkcije tri i više varijabli
- nepotpuno specificirane funkcije

Booleove funkcije

- logika sudova
  ~ izražavanje složenog
  suda kombiniranjem elementarnih sudova
  operatorima povezivanja (I, ILI)
- Booleova funkcija formalno:
  "neko pridruživanje funkcijskih vrijednosti (0 ili 1) za svaku kombinaciju vrijednosti argumenata (varijabli)"
- funkcija od *n* varijabli:

  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow 2^n$ mogućih kombinacija
- izražavanje ("definiranje") Booleove funkcije
  ~ tablica kombinacija (2^n redaka),
  analogno osnovnim logičkim funkcijama I, ILI, NE

Booleove funkcije

- upisivanje funkcije u tablicu

Primjer: $f(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

```
ako je  A=1 "ili" B=1
        onda f=1
        inače f=0
```

$\Rightarrow$ *isključena* kombinacija A=1, B=1

isključivo ILI, ekskluzivna disjunkcija, EX-ILI

Booleove funkcije

- definicija:

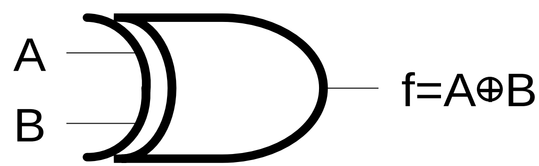
$$f(A,B)=\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}$$

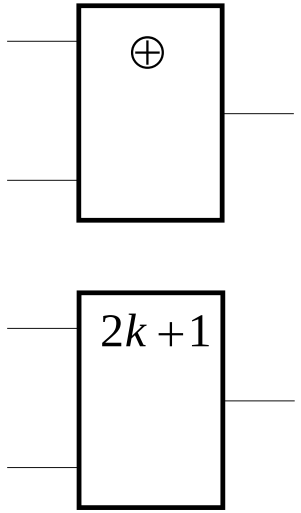
A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- notacija:

$$f(A,B)=A\oplus B$$

- simbol:
  - suma *mod* 2 (zbrajanje 2 bita, *bez* prijenosa)
  - 1 za neparni broj 1 na ulazima





Kanonski oblici

- čitanje funkcije iz tablice:
  - za f = 1:

    $$(A=0)\cdot(B=1)+(A=1)\cdot(B=0)$$

    dakle

    $$(\overline{A}=1)\cdot(B=1)+(A=1)\cdot(\overline{B}=1)$$

    $$\Rightarrow f=\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}$$

  - za f = 0:

    $$\overline{(A=0)\cdot(B=0)+(A=1)\cdot(B=1)}$$

    $$\overline{(A=0)\cdot(B=0)}\cdot\overline{(A=1)\cdot(B=1)}=\left[\overline{(A=0)}+\overline{(B=0)}\right]\cdot\left[\overline{(A=1)}+\overline{(B=1)}\right]$$

    $$=\left[(A=1)+(B=1)\right]\cdot\left[(A=0)+(B=0)\right]$$

    $$\Rightarrow f=(A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})$$

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Kanonski oblici

- čitanje općenite funkcije iz tablice:
  - za f = 1:

$$f = \alpha_0 \cdot (\bar{A} \cdot \bar{B}) + \alpha_1 \cdot (\bar{A} \cdot B) + \alpha_2 \cdot (A \cdot \bar{B}) + \alpha_3 \cdot (A \cdot B)$$
$$= \alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1 + \alpha_2 \cdot P_2 + \alpha_3 \cdot P_3$$

A	B	f
0	0	α_0
0	1	α_1
1	0	α_2
1	1	α_3

  - za tablicu iz primjera (EX-ILI):

$$\alpha_0 = \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$
$$\overline{}$$
$$f = P_1 + P_2$$

  - općenito za funkciju od n varijabli:

$$f = \alpha_0 \cdot P_0 + \ldots + \alpha_{2^n - 1} \cdot P_{2^n - 1} = \sum_{i=0}^{2^n - 1} \alpha_i \cdot P_i, \quad \alpha_i \in \{0,1\}$$

Kanonski oblici

- čitanje općenite funkcije iz tablice:
  - za f = 1:

    oblik $$f = \alpha_0 \cdot P_0 + \ldots + \alpha_{2^n - 1} \cdot P_{2^n - 1} = \sum_{i=0}^{2^n - 1} \alpha_i \cdot P_i, \quad \alpha_i \in \{0,1\}$$

    kanonski, standardni oblik:
    potpuni disjunktivni normalni oblik

Kanonski oblici

- čitanje općenite funkcije iz tablice – definicije:
  - *literal* : varijabla ili komplement
  - *produkt* : niz literala povezanih operacijom I
  - *suma* : niz literala povezanih operacijom ILI
  - *normalni član* : produkt/suma u kojoj se niti jedan literal ne pojavljuje više od jednog puta
  - *standardni produkt* : normalni produkt koji sadrži toliko literala koliko funkcija ima varijabli:
    - *kanonski produkt*, P_i ili *minterm*, m_i
    - u tablici kombinacija odgovara mu *samo jedna* 1
  - *standardna suma produkata* : kanonski oblik funkcije

Kanonski oblici

- čitanje općenite funkcije iz tablice:

A	B	f
0	0	α_0
0	1	α_1
1	0	α_2
1	1	α_3

  - za f = 0:

$$f = \left[\alpha_0 + (A + B)\right] \cdot \left[\alpha_1 + (A + \bar{B})\right] \cdot \left[\alpha_2 + (\bar{A} + B)\right] \cdot \left[\alpha_3 + (\bar{A} + \bar{B})\right]$$

$$= (\alpha_0 + S_0) \cdot (\alpha_1 + S_1) \cdot (\alpha_2 + S_2) \cdot (\alpha_3 + S_3)$$

  - za tablicu iz Primjera (EX-ILI):

$$\alpha_0 = \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$f = S_0 \cdot S_3$$

  - općenito za funkciju od n varijabli:

$$f = (\alpha_0 + S_0) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{2^n - 1} + S_{2^n - 1}) = \prod_{i=0}^{2^n - 1} (\alpha_i + S_i)$$

Kanonski oblici

- čitanje općenite funkcije iz tablice:
  - za f = 0:
    oblik $$f = (\alpha_0 + S_0) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{2^n - 1} + S_{2^n - 1}) = \prod_{i=0}^{2^n - 1} (\alpha_i + S_i)$$
  - također *kanonski*, standardni oblik:
    potpuni konjunktivni normalni oblik
  - oznake:
    S_i: *kanonske sume* ili *makstermi*, M_i

Kanonski oblici

- mintermi i makstermi:

x	y	z	minterm	m_i	x	y	z	maksterm	M_i
0	0	0	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	m_0	0	0	0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	m_1	0	0	1	$x + y + \bar{z}$	M_1
0	1	0	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	m_2	0	1	0	$x + \bar{y} + z$	M_2
0	1	1	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	m_3	0	1	1	$x + \bar{y} + \bar{z}$	M_3
1	0	0	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	m_4	1	0	0	$\bar{x} + y + z$	M_4
1	0	1	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	m_5	1	0	1	$\bar{x} + y + \bar{z}$	M_5
1	1	0	$x \cdot y \cdot \bar{z}$	m_6	1	1	0	$\bar{x} + \bar{y} + z$	M_6
1	1	1	$x \cdot y \cdot z$	m_7	1	1	1	$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	M_7

Kanonski oblici

- standardni (kanonski) oblici su ekvivalentni:
  - npr. za EX-ILI:

$$
\begin{aligned}
f &= (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B}) \\
&= A\cdot\overline{A}+\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{B} \\
&= 0+\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}+0 \\
&= \overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}
\end{aligned}
$$

  - izbor standardnog oblika za prikaz:
    - mali broj 1 u definiciji funkcije
      ~ kanonska suma standardnih *produkata*
    - mali broj 0 u definiciji funkcije
      ~ kanonski produkt standardnih *suma*
    - *manji broj članova* (terma)
      ~ brže/jednostavnije čitanje iz tablice!

Kanonski oblici

- drugi prikazi:
  - varijabla ~ 1, komplement ~ 0
    - standardni članovi = *vektori* (*n*-torke)
      ~ *n-bitni brojevi* !
    - interpretacija Booleove funkcije:
      f : $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
    - *skraćeno pisanje funkcije*
      ~ indeksi minterma/maksterma

$$f = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = \Sigma(1,2) = \Pi(0,3)$$

Shannonov teorem ekspanzije

- pretvorba nekanonskog oblika Booleove funkcije u kanonski oblik:
  - *suma produkata*
    ~ svaki produkt koji nije kanonski logički "množiti" s 1
    $1 = x + \bar{x}$, x: varijabla koja nedostaje

Primjer:

$$
\begin{aligned}
f &= \bar{A} + \bar{B} \cdot C \\
&= \bar{A} \cdot (B + \bar{B}) \cdot (C + \bar{C}) + (A + \bar{A}) \cdot \bar{B} C \\
&= \ldots \\
&= \bar{A} B C + \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C
\end{aligned}
$$

Shannonov teorem ekspanzije

- pretvorba nekanonskog oblika Booleove funkcije u kanonski oblik:
  - *produkt suma*
    ~ svakoj sumi koja nije kanonska logički "pribrojiti" 0

$$x \cdot \overline{x} = 0$$

Primjer:

$$
\begin{aligned}
f &= (A + C) \cdot (B + \overline{C}) \\
&= (A + B \cdot \overline{B} + C) \cdot (A \cdot \overline{A} + B + \overline{C}) \\
&= \ldots \\
&= (A + B + C) \cdot (A + \overline{B} + C) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C})
\end{aligned}
$$

Komplementarna i dualna funkcija

- *komplementarna* funkcija:
  ~ funkcija kojoj su vrijednosti komplementarne onima izvorne funkcije ($0 \to 1$, $1 \to 0$)

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \cdot P_i \qquad \rightarrow \qquad \overline{f} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \overline{\alpha}_i \cdot P_i$$

$$= \prod_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i + S_i) \qquad \qquad = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\overline{\alpha}_i + S_i)$$

vrijedi: $f = \sum_{i \in I_P} P_i \quad \rightarrow \quad \overline{f} = \sum_{j \in \{2^n\} - I_P} P_j = \prod_{i \in I_P} S_i$

Komplementarna i dualna funkcija

Primjer: komplementarna funkcija

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= P_1 + P_3 + P_4 + P_6 + P_7 \\
&= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(A,B,C) &= \overline{\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC} \\
&= \overline{\bar{A}\bar{B}C} \cdot \overline{\bar{A}BC} \cdot \overline{A\bar{B}\bar{C}} \cdot \overline{AB\bar{C}} \cdot \overline{ABC} \\
&= (A + B + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \\
&= S_1 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 \cdot S_7 \\
&= \ldots \\
&= \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}C = \bar{A}(B + \bar{B})\bar{C} + A\bar{B}C = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C \\
&= P_0 + P_2 + P_5
\end{aligned}
$$

Komplementarna i dualna funkcija

- *dualna* funkcija:
  ~ funkcija koja se dobiva zamjenom operatora (+,·) i konstanti (0, 1) izvorne funkcije

$$f = f(A, B, C, \ldots, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1) \rightarrow f_D = f_D(A, B, C, \ldots, \cdot, +, \bar{\ }, 1, 0)$$

vrijedi: $(f_D)_D = f$

Komplementarna i dualna funkcija

Primjer: dualna funkcija

$$f(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC = P_1 + P_3 + P_4 + P_6 + P_7$$

$$\begin{aligned} f_D(A,B,C) &= (\overline{A} + \overline{B} + C) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (A + B + C) \\ &= \ldots \\ &= AC + \overline{A}B\overline{C} \\ &= \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + ABC \\ &= P_2 + P_5 + P_7 \end{aligned}$$

Komplementarna i dualna funkcija

- izražavanje de Morganovih zakona (= komplement funkcije) dualnom funkcijom:
  - de Morgan: $\overline{f} = \overline{f(A,B,C,\ldots,+,\cdot,\bar{\ },0,1)}$

    $= f(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\ldots,\cdot,+,\bar{\ },1,0)$
  - komplement funkcije (još jednom):

    $$\overline{f}(A,B,C,\ldots) = f_D(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\ldots)$$
  - postupak komplementiranja:
    - komplementirati varijable
    - izvesti dualnu funkciju
- primjena komplementarne funkcije ~ pojednostavljivanje Booleovih izraza

Sadržaj predavanja

- logika sudova
- Booleova algebra
- Booleove funkcije
- **Booleove funkcije dviju varijabli**
  - **klasifikacija**
  - **osnovne i univerzalne funkcije**
- Booleove funkcije tri i više varijabli
- nepotpuno specificirane funkcije

Booleove funkcije dviju varijabli

- kombinacije varijabli
  ~ uzeti u obzir *sve moguće* kombinacije vrijednosti 0 i 1 koje varijable mogu poprimiti:
  - broj kombinacija: $r = 2^n$
  - svakoj kombinaciji moguće pridružiti *dvije* vrijednosti: 0 ili 1
  - broj mogućih Booleovih funkcija od *n* varijabli: $r = 2^{2^n}$

n	2^n	2^{2^n}
1	2	4
2	4	16
3	8	256
4	16	64K = 65.536
5	32	4G = 4.294.967.296

Booleove funkcije dviju varijabli

- moguće funkcije *jedne* varijable:

A	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_0, f_3: konstante (nularne funkcije)
$f_0=0$
$f_3=1$

f_1, f_2: unarne funkcije
$f_1=A$: varijabla
$f_2=\overline{A}$: komplement

Booleove funkcije dviju varijabli

- moguće funkcije *dvije* varijable:

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

➔ *klase* funkcija od dvije varijable

1. konstante: f_0, f_{15}
2. funkcije pojedinačne varijable: f_3, f_5, f_{10}, f_{12}
3. konjunkcije literala: f_1, f_2, f_4, f_8
4. disjunkcije literala: $f_7, f_{11}, f_{13}, f_{14}$
5. ekvivalencija i ekskluzivna disjunkcija: f_6, f_9

Booleove funkcije dviju varijabli

- moguće funkcije dvije varijable:

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

	$f_0 = 0$	konstanta
(*)	$f_1 = AB$	I
(*)	$f_2 = A\overline{B}$	inhibicija
	$f_3 = A$	identitet
	$f_4 = \overline{A}B$	inhibicija
	$f_5 = B$	identitet
(*)	$f_6 = \overline{A}B + A\overline{B}$	EX-ILI
(*)	$f_7 = A + B$	ILI
(*)	$f_8 = \overline{A + B}$	NILI
(*)	$f_9 = \overline{A}\,\overline{B} + AB$	ekvivalencija
(*)	$f_{10} = \overline{B}$	komplement
(*)	$f_{11} = A + \overline{B} = (B \Rightarrow A)$	implikacija
	$f_{12} = \overline{A}$	komplement
	$f_{13} = \overline{A} + B = (A \Rightarrow B)$	implikacija
(*)	$f_{14} = \overline{AB}$	NI
	$f_{15} = 1$	konstanta

*** - različite netrivijalne funkcije**

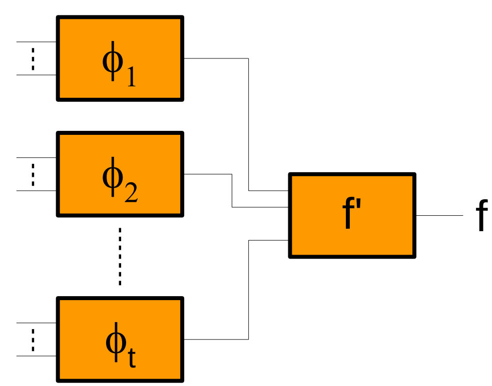
Booleove funkcije dviju varijabli

- međusobno komplementarne funkcije:
  - I i NI
  - ILI i NILI
  - INHIBICIJA i IMPLIKACIJA
  - ISKLJUČIVO ILI i EKVIVALENCIJA
- međusobno dualne funkcije:
  - I i ILI
  - NI i NILI
  - INHIBICIJA i IMPLIKACIJA
  - ISKLJUČIVO ILI i EKVIVALENCIJA

Osnovne i univerzalne funkcije

- zapažanje:
  - nagli porast broja mogućih funkcija
    ~ hipereksponencijalni zakon
  - za $n \geq 3$ već nema smisla pisati tablicu!
    - ograničiti se na $f(x_1, x_2)$
    - pronaći one $f(x_1, x_2)$ kojima će se moći ostvariti sve ostale funkcije većeg broja varijabli
      ~ "univerzalne" funkcije?
  - izražavanje $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kao *kompozicija* izvjesnog broja φ_i, $i << n$

$$f = f'(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t)$$



Osnovne i univerzalne funkcije

- potreba za ograničavanjem broja različitih Booleovih funkcija, odnosno *sklopova* koji ih ostvaruju:
  - razlozi tehničko-proizvodne prirode:
    - standardizacija funkcija/sklopova
    - *masovna* proizvodnja *samo nekih* logičkih sklopova (engl. economy of scale)
  - samo definiranim (malim!) skupom funkcija (sklopova) ostvariti *sve* (preostale) funkcije (sklopove)

Osnovne i univerzalne funkcije

- *potpuni sustav funkcija*:

  "skup Booleovih funkcija naziva se *funkcijski potpuni* sustav ako se iz funkcija takvog skupa, korištenjem superpozicije i zamjene, može dobiti svaka Booleova funkcija"

  - "superpozicija" ~ primjena funkcije
  - "zamjena" ~ promjena mjesta varijabli (i načina dekompozicije složene Booleove funkcije)

- elementi potpunog sustava funkcija ~ *osnovne* (*primitivne*) funkcije

Osnovne i univerzalne funkcije

- potpuni sustav funkcija:
  - želja: *minimalni* potpuni sustav,
    ekonomski najopravdaniji!
  - provjera potpunosti sustava funkcija: izražavanje {I, ILI, NE}
  - {I, ILI, NE} također jedan potpuni sustav, jedino *nije* minimalan!

Osnovne i univerzalne funkcije

- neki potpuni sustavi funkcija:

{I, NE}: $\{f_1, f_{10}\}, \{f_1, f_{12}\}$

{ILI, NE}: $\{f_7, f_{10}\}, \{f_7, f_{12}\}$

$\Rightarrow$ nije potrebno {I, ILI, NE}!

provjera za {I, NE}: de Morganom za ILI

$$ILI\,(A,B) = ILI\,(NE\,(NE\,(A)), NE\,(NE\,(B)))$$
$$= NE\,(I\,(NE\,(A), NE\,(B)))$$

$$A+B = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$$

Osnovne i univerzalne funkcije

- neki (drugi) potpuni sustavi funkcija:

{EX-ILI, I, 1}: $\{f_1, f_6, f_{15}\}$

$$EX - ILI(A,B) = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$EX\text{-}ILI(A,1) = \overline{A}$$

$$EX\text{-}ILI(EX\text{-}ILI(A,B),I(A,B)) = ILI(A,B)$$

{EX-NILI, I, 1}: $\{f_1, f_9, f_{15}\}$

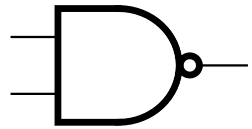
{inhibicija, 1}: $\{f_2, f_{15}\}$

{implikacija, 1}: $\{f_0, f_{11}\}$

Osnovne i univerzalne funkcije

- posebno značajni potpuni sustavi funkcija:
  oni koji sadrže *samo jednu* funkciju!

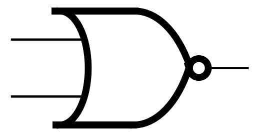
{NI} : $\{f_{14}\}$



$$\overline{A \cdot A} = \overline{A}$$

$$\overline{\overline{A \cdot B}} = A \cdot B$$

{NILI} : $\{f_{8}\}$



$$\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$$

- *univerzalne funkcije* : NI, NILI
  - minimalni potpuni skup funkcija
  - minimalni broj različitih sklopova
  - *invertor* (NI = *NE* ∘I, NILI = *NE* ∘ILI)
    ~ dodatno pojačanje signala

$$\overline{A + A} = \overline{A}$$

$$\overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B$$

$$\overline{\overline{A + B}} = A + B$$

Osnovne i univerzalne funkcije

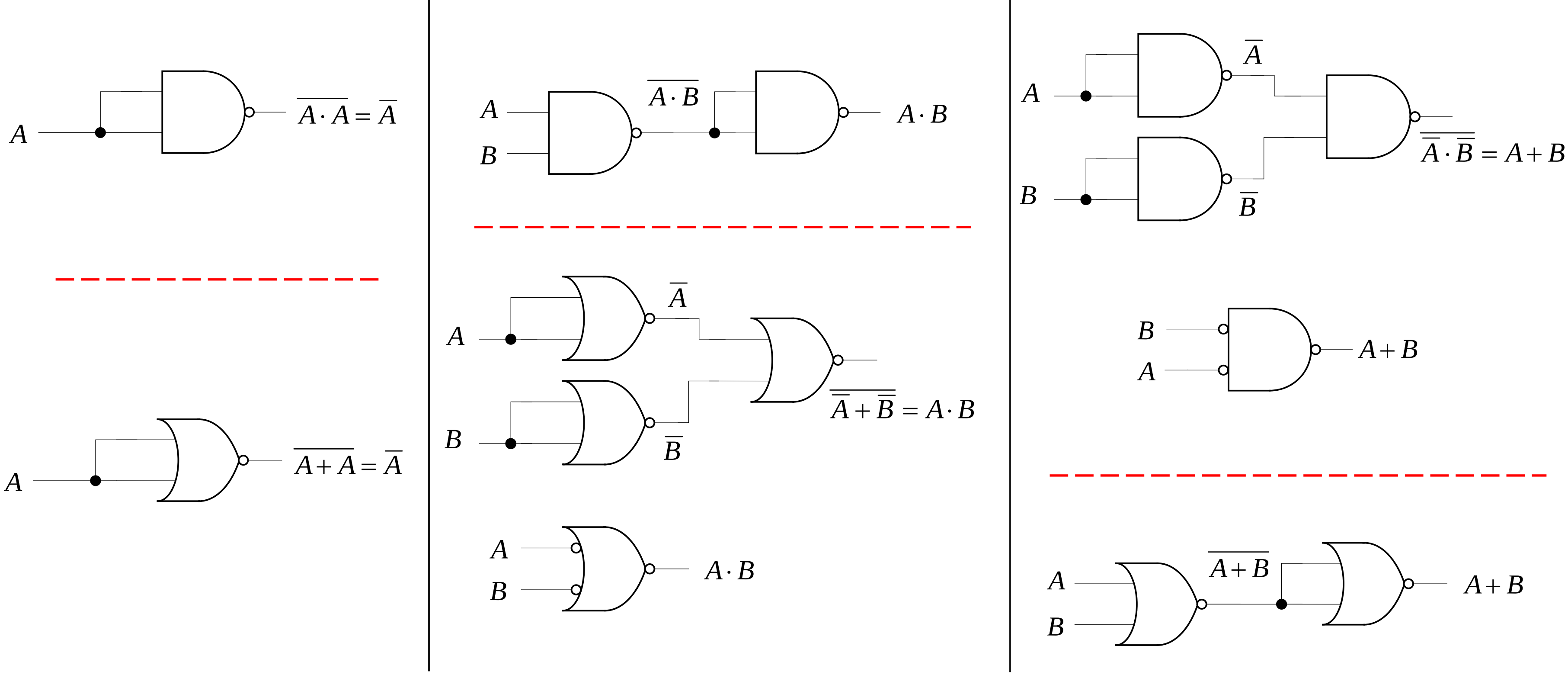
Primjer: ostvarivanje {I, ILI, NE} korištenjem {NI}

$$
\begin{aligned}
I(A,B) &= NE(NE(I(A,B))) \\
&= NE(NI(A,B)) \\
&= NE(I(NI(A,B),NI(A,B))) \\
&= NI(NI(A,B),NI(A,B)) \\
NE(A) &= NE(I(A,A)) \\
&= NI(A,A) \\
ILI(A,B) &= ILI(NE(NE(A)),NE(NE(B))) \\
&= NE(I(NE(A),NE(B))) \\
&= NI(NI(A,A),NI(B,B))
\end{aligned}
$$

Osnovne i univerzalne funkcije

Primjer : ostvarivanje {I, ILI, NE} korištenjem
{NI} i {NILI}

NE | I | ILI

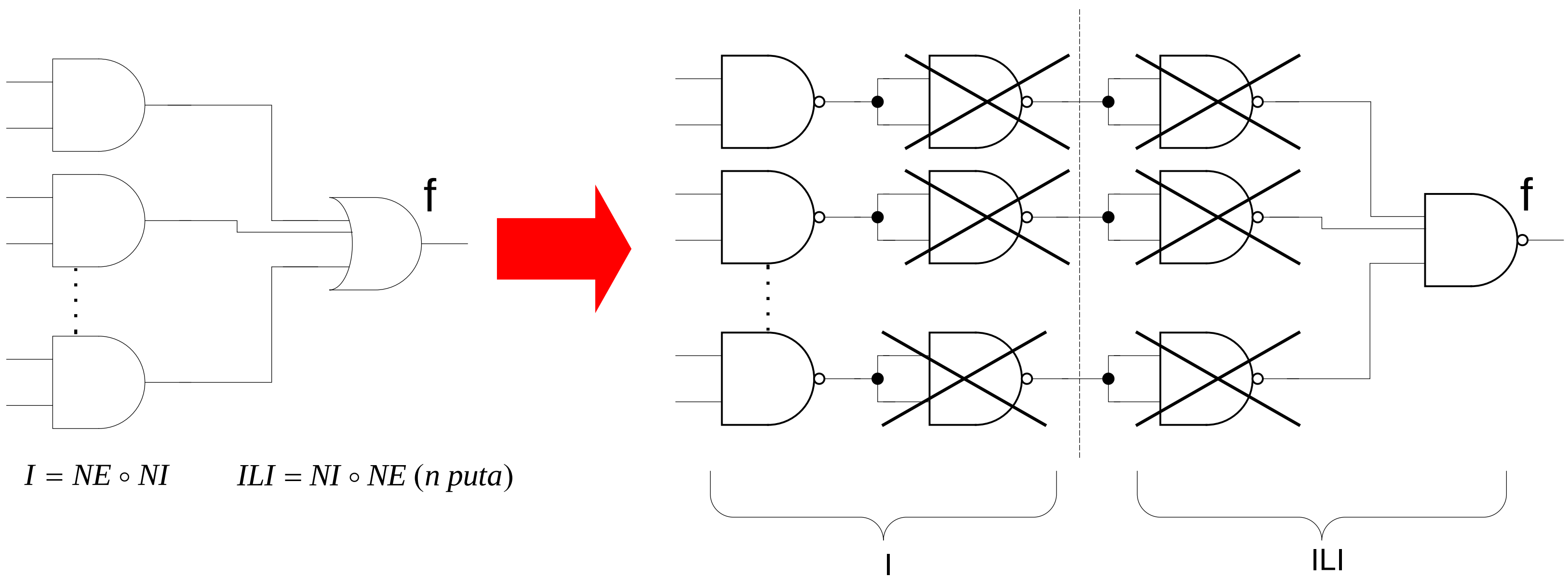


Osnovne i univerzalne funkcije

- zapažanje:
  - {I, ILI, NE} povoljno pri formuliranju problema/rješenja ~ konceptualno blisko
  - {NI}, {NILI} povoljno pri ostvarenju digitalnog sklopa ~ blisko električkoj izvedbi
  - potreba za transformacijom izraza kojim je definirana Booleova funkcija
- metode transformacije:
  - metoda supstitucije
  - algebarska metoda

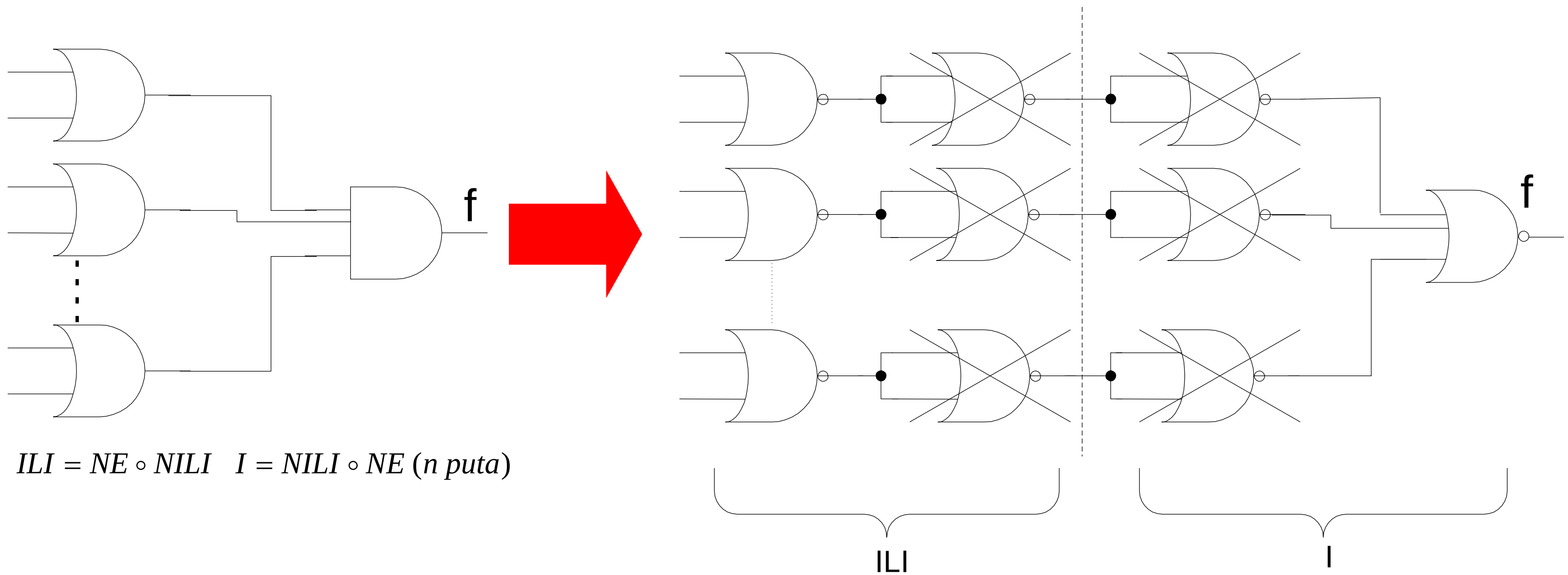
Osnovne i univerzalne funkcije

- *metoda supstitucije*
  za funkcije u obliku *sume produkata*:
  - zamijeniti osnovne funkcije univerzalnima:
    NE → NI∘NI, I → NE∘NI, ILI → NI∘NE
  - primijeniti T3 (involucija)
    ~ eliminirati dvostruku primjenu funkcija NE



Osnovne i univerzalne funkcije

- *metoda supstitucije*
  za funkcije u obliku *produkta suma*:
  - zamijeniti osnovne funkcije univerzalnima:
    NE → NILI◦NILI, ILI → NE◦NILI, I → NILI◦NE
  - primijeniti T3 (involucija)
    ~ eliminirati dvostruku primjenu funkcija NE



$ILI = NE \circ NILI \quad I = NILI \circ NE \ (n\ puta)$

Osnovne i univerzalne funkcije

- *algebarska metoda*
  za funkcije u obliku *sume produkata*:
  - primijeniti T3 (involucija) na pojedine produkte izraza kojim je definirana Booleova funkcija
  - primijeniti T8 (de Morganov zakon) na takav izraz

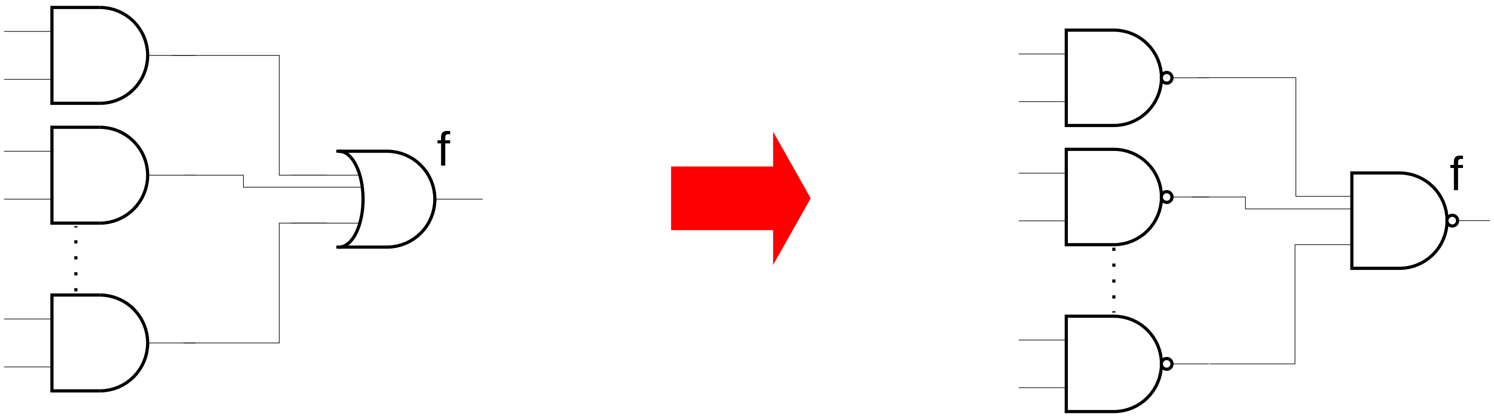
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i P_i$$

$$= \overline{\overline{\alpha_0 P_0}} + \overline{\overline{\alpha_1 P_1}} + \ldots + \overline{\overline{\alpha_{2^n-1} P_{2^n-1}}}$$

$$= \overline{\overline{\alpha_0 P_0} \cdot \overline{\alpha_1 P_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\alpha_{2^n-1} P_{2^n-1}}}$$

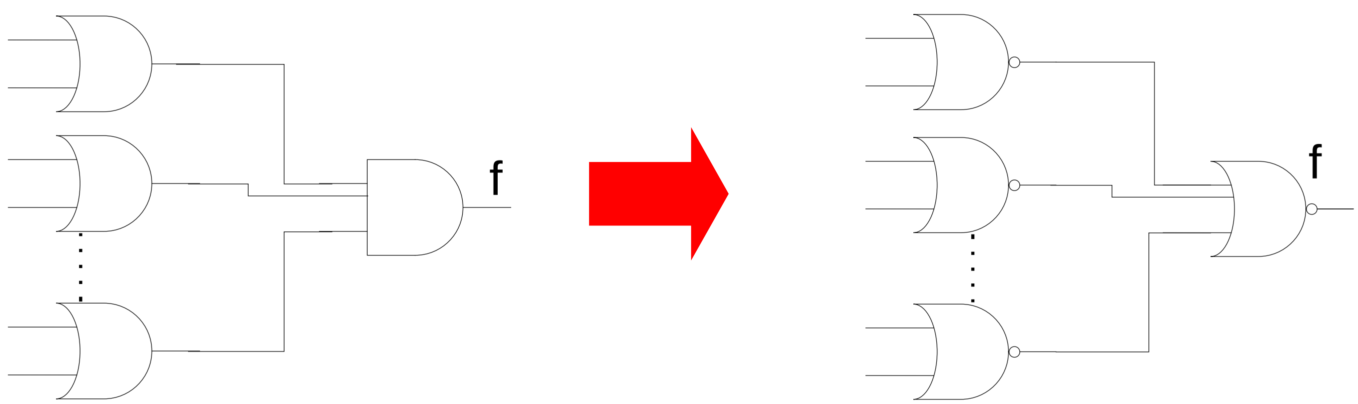
Osnovne i univerzalne funkcije

- algoritam transformacije
  za funkcije u obliku *sume produkata*:
  - svaki produkt (funkcija I) prikazati kao funkciju NI; NI pojedinačne varijable reducira se na komplement
  - na dobivene NI članove primijeniti "izlazni" NI član
- *dvorazinska* logička shema



Osnovne i univerzalne funkcije

- algoritam transformacije
  za funkcije u obliku *produkta suma*:
  - svaku sumu (funkcija ILI) prikazati funkcijom NILI;
    NILI pojedinačne varijable reducira se na komplement
  - na dobivene NILI članove primijeniti "izlazni" NILI član
- također dvorazinska logička shema



Osnovne i univerzalne funkcije

Primjer:

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{B}C$$

$$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{\overline{A}\,\overline{B}C}}$$

Primjer:

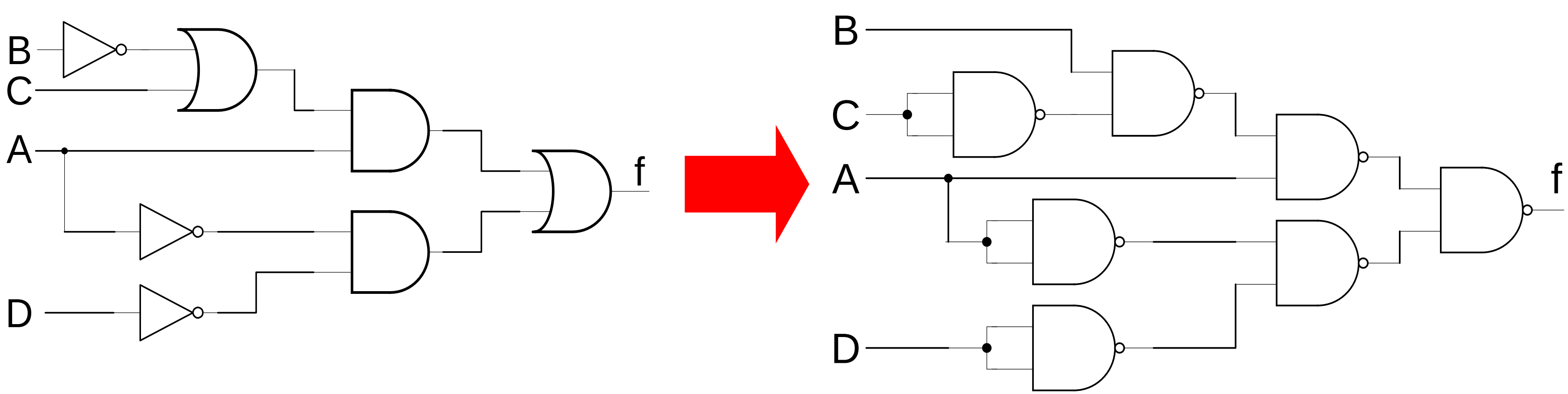
$$f = (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$= \overline{\overline{A+B} + \overline{\overline{A}+\overline{B}+C}}$$

Osnovne i univerzalne funkcije

- transformacija funkcije koja *nije* u obliku sume produkata ili produkta suma
  ~ *višerazinska* logička shema

Primjer : $$f = A\cdot(\overline{B}+C)+\overline{A}\,\overline{D} = \overline{\overline{A\cdot(\overline{B}+C)}\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{D}}} = \overline{\overline{A\cdot\overline{B\overline{C}}}\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{D}}}$$



Sadržaj predavanja

- logika sudova
- Booleova algebra
- Booleove funkcije
- Booleove funkcije dviju varijabli
- **Booleove funkcije tri i više varijabli**
- nepotpuno specificirane funkcije

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje (poznatih) funkcija 2 varijable na više njih:
  - generiranje složenijih funkcija
    opetovanom primjenom funkcija manjeg broja varijabli
  - standardizacija funkcijskih implementacija
    ~ standardizacija logičkih sklopova:
    ekonomičnost!
  - treba zadovoljiti:
    - komutativnost (~ "zamjena")
    - asocijativnost (~ "superpozicija")

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije I: moguće je!
  - asocijativnost:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases} f(f(\ldots(f(x_1,x_2),x_3)\ldots),x_n) \\ f(x_1,f(x_2,\ldots,f(x_{n-1},x_n),\ldots)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n &= (\ldots((x_1\cdot x_2)\cdot x_3)\ldots)\cdot x_n) \\ &= (x_1\cdot(x_2\cdot\ldots\cdot(x_{n-1}\cdot x_n)\ldots)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_n &= (\ldots((x_1+x_2)+x_3)\ldots)+x_n) \\ &= (x_1+(x_2+\ldots+(x_{n-1}+x_n)\ldots)) \end{aligned}$$

  - komutativnost: "izmiješati" varijable

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije EX-ILI: promjena definicije!

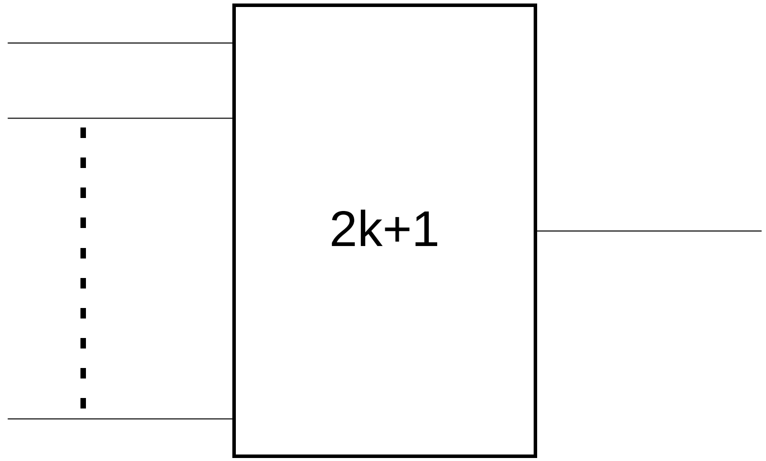
  Primjer: asocijativnost po stupcima tablice

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	C	$A \oplus B \oplus C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije EX-ILI:
  promjena definicije (drugačija semantika)!
  - EX-ILI(A, B) = A "ili" B, ali ne oba!
  - EX-ILI(A, B, C) = *neparan* broj 1
    ~ oznaka: 2k+1

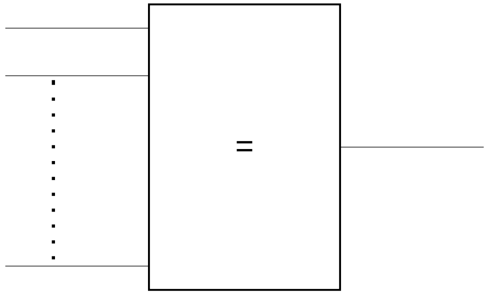


Booleove funkcije tri i više varijabli

- svojstva funkcije EX-ILI:
  1. komutativnost
  2. asocijativnost
  3. distributivnost
  4. $A \oplus 0 = A$
  5. $A \oplus 1 = \overline{A}$
  6. $A \oplus A = 0$
  7. $A \oplus \overline{A} = 1$
  8. $A \oplus B = \overline{A} \oplus \overline{B}$
- važnost EX-ILI:
  - izvedba aritmetičkih sklopova
  - izvedba sklopova za zaštita podataka od pogrešaka (prilikom prijenosa, pohranjivanja)
  - izvedba sklopova za generiranje pseudo-slučajnih nizova (pri kodiranju i kriptiranju podataka)

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije EX-NILI:
  - n = 2: "ekvivalencija" dvije varijable
  - n = 3: neparni paritet (2k+1)
  - n = 4: komplement neparnog pariteta
  - utvrđena definicija: *logički identitet* svih varijabli!



$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n + x_1 x_2 \ldots x_n$$

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje univerzalnih funkcija NI, NILI: ne ide!
  ~ slijediti definiciju funkcija

$$NI \equiv NE \circ I \Leftrightarrow NI(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv NE(I(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
$$= \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$
$$= \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots + \overline{x}_n$$

$$NILI \equiv NE \circ ILI \Leftrightarrow NILI(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv NE(ILI(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
$$= \overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$
$$= \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n$$

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje univerzalnih funkcija NI, NILI: ne ide!
  - asocijativnost ne vrijedi!

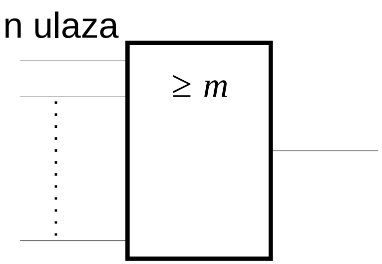
$$NI(A,B,C) = \overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

$$\neq \begin{cases} NI(NI(A,B),C) = \overline{\overline{AB}C} = AB + \overline{C} \\ NI(A,NI(B,C)) = \overline{A\overline{BC}} = \overline{A} + BC \end{cases}$$

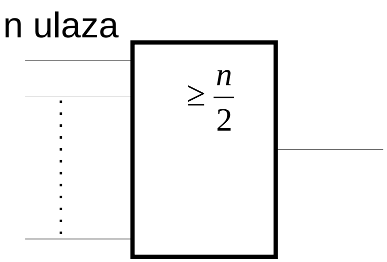
  - zato se držati definicije
    (NI = NE◦I, NILI = NE◦ILI)
  - uočiti
    ~ NI i NILI su međusobno dualne

Booleove funkcije tri i više varijabli

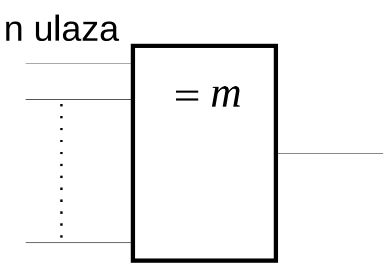
- druge (složene) Booleove funkcije:
  - logički prag [threshold f.]:
    $\geq m$ varijabli u 1, $m < n$



  - majoritet [majority f.]:
    većinska f, f. glasanja
    $> n/2$ varijabli u 1



  - "samo m":
    upravo m varijabli u 1, $m < n$



Sadržaj predavanja

- logika sudova
- Booleova algebra
- Booleove funkcije
- Booleove funkcije dviju varijabli
- Booleove funkcije tri i više varijabli
- **nepotpuno specificirane funkcije**

Nepotpuno specificirane funkcije

- u nekim se primjenama *ne* pojavljuju *sve* ulazne kombinacije:
  - nije važna vrijednost funkcije (engl. don't care)
  - u tablicu definicije upisuje se "X"

Primjer: funkcija koja ispituje je li dekadska znamenka prikazana BCD (8421) kodom neparna

- koristi se *samo 10* ulaznih kombinacija, preostalih 6 su X

Nepotpuno specificirane funkcije

Primjer (nastavak):

$A = a_3a_2a_1a_0$: dekadska znamenka

$f = \Sigma m(1, 3, 5, 7, 9) + \Sigma d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$

$= \Pi M(0, 2, 4, 6, 8) \cdot \Pi d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$

	a_3	a_2	a_1	a_0	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
	1	0	1	0	X
	1	0	1	1	X
	1	1	0	0	X
	1	1	0	1	X
	1	1	1	0	X
	1	1	1	1	X

Literatura

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 3: Osnove digitalne logike.

- logika sudova: str. 79-89
- Booleova algebra: str. 89-96
- Booleove funkcije: str. 96-105
- Booleove funkcije dviju varijabli: str. 105-111, 115-120
- Booleove funkcije tri i više varijabli: str. 112-115

Zadaci za vježbu

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 3: Osnove digitalne logike.

- Booleove funkcije: 3.5-3.14
- Booleove funkcije dviju varijabli: 3.15-3.20
- Booleove funkcije tri i više varijabli: 3.21-3.23, 3.25

Zadaci za vježbu

M. Čupić: *Digitalna elektronika i digitalna logika. Zbirka riješenih zadataka*, Cjelina 3: Booleova algebra.

- riješeni zadaci: 3.1 – 3.3
- riješeni zadaci: 3.4 – 3.15
  (bez modeliranja jezikom VHDL)
- zadaci za vježbu: 1 – 22 (str. 112-114)