2. Brojevni sustavi i kodovi

Sadržaj predavanja

- **tipovi i prikaz podataka**
- brojevni sustavi
- binarna aritmetika
- modul i komplementi brojeva
- binarno množenje
- binarno kodiranje znamenki i simbola
- kodovi za zaštitu podataka

Tipovi i prikaz podataka

- prikaz podataka u digitalnom obliku
  ~ niz bitova, *bitovni vektor*
- podaci se pohranjuju u *registre*:
  - *ograničena* veličina
  - obično *n* bitova

B_{n-1}	B_{n-2}	...	B_1	B_0

- značenja bitovnog vektora:
  - broj
  - znak/simbol
  - specijalni znakovi:
    upravljački, *instrukcije*, ...

OP. KOD	ADRESA

Tipovi i prikaz podataka

- *bitovni vektor* ~ "tipiziran":
  - pripada nekom *tipu podataka* (engl. data type)
  - nametanje *discipline manipuliranja* s podacima
- osnovni tipovi podataka:
  - brojevi: prirodni, cijeli, realni, ...
  - znak/simbol: pojedine abecede (~ *znakovni kodovi*)
  - specijalni znakovi ~ posebno značenje:
    logičke varijable, (procesorske) instrukcije
- značenje bitovnog vektora
  ~ utvrđeno *interpretacijom*, *kontekstom obrade*

Tipovi i prikaz podataka

- zapis podataka (~ zapis bitovnog vektora): utvrđeni oblik = *format*
  - organizacija niza bitova (grupe bitova ~ *polja*)
  - značenje pojedinih bitova/grupa bitova
- najjednostavniji (numerički) zapis: prirodni binarni brojevi
  - vrijednost bita u broju = pozicija (mjesto) bita u binarnom vektoru
- posve općenito: pridruživanje značenja binarnom vektoru = *kôd*
  - broj
  - nešto drugo (~ simbol)

Sadržaj predavanja

- tipovi i prikaz podataka
- **brojevni sustavi**
  - **pozicijski brojevni sustavi**
  - **pretvorba iz jednog sustava u drugi sustav**
  - **oktalni i heksadekadski sustav**
- binarna aritmetika
- modul i komplementi brojeva
- binarno množenje
- binarno kodiranje znamenki i simbola
- kodovi za zaštitu podataka

Pozicijski brojevni sustavi

- *pozicija* (mjesto) znamenke određuje njenu težinu
  ~ faktor kojim se znamenka množi
- *težina*
  ~ potencija *baze* brojevnog sustava
- dekadski sustav:

$$234_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

- baza sustava
  ~ broj znamenki brojevnog sustava,
  može općenito biti bilo koji cijeli broj

Pozicijski brojevni sustavi

- prikaz *n*-znamenkastih *cijelih* brojeva:

$$N_B = a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot B^1 + a_0 \cdot B^0$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot B^i$$

$$= a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$$

B: *baza* ili *korijen* brojevnog sustava

a_i: koeficijent uz *i*-tu potenciju (težinu);
a_i = {0, 1, …., B-1}, i = 0, 1, …., n-1
~ znamenke

Prikaz razlomljenih brojeva

- princip prikaza kao za cijele brojeve:
  težine znamenki iza zareza ~ *negativne* potencije baze

$$n_B = a_{-1} \cdot B^{-1} + a_{-2} \cdot B^{-2} + \cdots + a_{-(m-1)} \cdot B^{-m+1} + a_{-m} \cdot B^{-m}$$

$$= \sum_{i=-m}^{-1} a_i \cdot B^i$$

$$= 0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-(m-1)} a_{-m}$$

Miješani ili racionalni brojevi

- prikaz s *fiksnim zarezom* (engl. fixed-point notation) ~"miješani" ili racionalni brojevi = cijeli broj + razlomljeni broj

$$N = N_B + n_B$$

$$= \sum_{i=-m}^{n-1} a_i \cdot B^i$$

$$= a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-(m-1)} a_{-m}$$

- pretvorba:
  - posebno cjelobrojni dio broja
  - posebno razlomljeni dio broja

Neki brojevni sustavi

baza B	brojevni sustav	znamenke sustava (B)
2	binarni	0,1
3	ternarni	0,1,2
8	oktalni	0,1,2,3,4,5,6,7
10	dekadski	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
16	heksadekadski	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

dekadski	binarni	oktalni	heksadekadski
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Pretvorba brojeva u različitim sustavima

- pretvorba *cijelog* dekadskog broja u neki drugi sustav ~ uzastopno dijeljenje bazom tog sustava
  - ostaci dijeljenja s bazom ~ znamenke
  - ostatak prvog dijeljenja ~ najmanje značajna znamenka

Primjer: $N_{10} = d_{r-1}d_{r-2}\cdots d_1 d_0 \rightarrow N_2 = b_{s-1}b_{s-2}\cdots b_1 b_0$

$$
\begin{aligned}
N_{10} &= b_{s-1}\cdot 2^{s-1} + b_{s-2}\cdot 2^{s-2} + \cdots + b_1\cdot 2^1 + b_0\cdot 2^0 \\
&= 2\cdot\left(b_{s-1}\cdot 2^{s-2} + b_{s-2}\cdot 2^{s-3} + \cdots + b_1\cdot 2^0\right) + b_0 \\
&= 2\cdot A_1 + b_0
\end{aligned}
$$

Pretvorba dekadskog broja u binarni

Primjer: $345_{10} \rightarrow ?_2$

$$\begin{array}{rl}
345:2=172 & 1 \\
172:2=86 & 0 \\
86:2=43 & 0 \\
43:2=21 & 1 \\
21:2=10 & 1 \\
10:2=5 & 0 \\
5:2=2 & 1 \\
2:2=1 & 0 \\
1:2=0 & 1
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 345_{10} = 101011001_2$$

Pretvorba dekadskog broja u ternarni

Primjer: $345_{10} \rightarrow ?_3$

$$345 : 3 = 115 \qquad 0$$
$$115 : 3 = 38 \qquad 1$$
$$38 : 3 = 12 \qquad 2$$
$$12 : 3 = 4 \qquad 0$$
$$4 : 3 = 1 \qquad 1$$
$$1 : 3 = 0 \qquad 1$$

$$\Rightarrow \qquad 345_{10} = 110210_3$$

Pretvorba dekadskog broja u heksadekadski

Primjer: $345_{10} \rightarrow ?_{16}$

$$
\begin{array}{rl}
345:16=21 & 9 \\
21:16=1 & 5 \\
1:16=0 & 1
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \qquad 345_{10} = 159_{16}$$

Pretvorba binarnog broja u dekadski

- "direktna" pretvorba:
  - odrediti dekadski zapis težina (~ potencija baze) izvornog sustava
  - pomnožiti vrijednost svake znamenke s odgovarajućom težinom
  - sumirati

Primjer: $10010_2 \rightarrow ?_{10}$

$$10010_2 = 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0$$
$$= 1*16 + 1*2 = 18$$

$$\Rightarrow 10010_2 = 18_{10}$$

Rekurzivno množenje i pribrajanje

- računanje težina, množenjem znamenkama, pribrajanje ~ ∀ znamenku: Hornerova shema
  - posmak za 1 mjesto ~ množenje s 2
  - pribrajanje ~ "normiranje" na niže brojno mjesto

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 2^{s-1} & 2^{s-2} & 2^{s-3} & 2^{s-4} & 2^{s-5} & \cdots & 2^{1} & 2^{0} \\
 & b_{s-1} & b_{s-2} & b_{s-3} & b_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_{1} & b_{0} \\
\hline
= & \multicolumn{2}{c}{(2\cdot b_{s-1}+b_{s-2})} & b_{s-3} & b_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_{1} & b_{0} \\
 & & s_{s-2} & b_{s-3} & b_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_{1} & b_{0} \\
= & & \multicolumn{2}{c}{(2\cdot s_{s-2}+b_{s-3})} & b_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_{1} & b_{0} \\
 & & & s_{s-3} & b_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_{1} & b_{0} \\
= & & & \multicolumn{2}{c}{(2\cdot s_{s-3}+b_{s-4})} & b_{s-5} & \cdots & b_{1} & b_{0} \\
 & & & & s_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_{1} & b_{0} \\
 & & & & \multicolumn{2}{c}{(2\cdot s_{s-4}+b_{s-5})} & \cdots & b_{1} & b_{0} \\
 & & & \cdots & & & \cdots & b_{1} & b_{0}
\end{array}
$$

Rekurzivno množenje i pribrajanje

- *Hornerova* shema:
  - osnovni korak: $s_{s-1} = a_{s-1}$
  - korak rekurzije: $s_{i-1} = 2 \cdot s_i + a_{i-1}$

$$
\begin{aligned}
N_2 &= b_{s-1} \cdot 2^{s-1} + b_{s-2} \cdot 2^{s-2} + \cdots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot (\ldots (2 \cdot ((2 \cdot b_{s-1}) + b_{s-2}) + b_{s-3}) + \ldots) + b_1) + b_0 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot (\ldots (2 \cdot ((2 \cdot a_{s-1} + b_{s-2}) + b_{s-3}) + \ldots) + b_1)) + b_0 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot (\ldots (2 \cdot ((2 \cdot a_{s-2} + b_{s-3}) + b_{s-4}) + \ldots) + b_1)) + b_0 \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Rekurzivno množenje i pribrajanje

- algoritam:
  - osnovni korak: $s_{s-1} = a_{s-1}$
  - korak rekurzije: $s_{i-1} = 2 \cdot s_i + a_{i-1}$

$$
\begin{aligned}
s_{s-1} &= a_{s-1} \\
s_{s-2} &= 2 \cdot s_{s-1} + a_{s-2} \\
&= 2 \cdot a_{s-1} + a_{s-2} \\
s_{s-3} &= 2 \cdot s_{s-2} + a_{s-3} \\
&= 2^2 \cdot a_{s-1} + 2^1 \cdot a_{s-2} + a_{s-3} \\
s_{s-s} &= 2^{s-1} \cdot a_{s-1} + \cdots + 2^{s-s} \cdot a_{s-s} \\
&= \sum_{0}^{s-1} a_i \cdot 2^i
\end{aligned}
$$

Rekurzivno množenje i pribrajanje

Primjer: $1101_2 = ?_{10}$

1	1	0	1
-	2	6	12
1	3	6	13

$$\left(\left(\left(1 \cdot 2\right) + 1\right) \cdot 2 + 0\right) \cdot 2 + 1 = 13$$

Rekurzivno množenje i pribrajanje

Primjer: $10011101_2 \rightarrow ?_{10}$

$$\left(\left(\left(1\cdot 2\cdot 2\cdot 2 \;+\; 1\right)\cdot 2+1\right)\cdot 2+1\right)\cdot 2\cdot 2+1=$$

$$\left(\left(9\cdot 2 \;+\; 1\right)\cdot 2 \;+\; 1\right)\cdot 2\cdot 2+1=$$

$$\left(19\cdot 2 \;+\; 1\right)\cdot 2\cdot 2+1=$$

$$39\cdot 2\cdot 2+1=157_{10}$$

- postupak vrijedi za *cijele* brojeve

Oktalni i heksadekadski sustav

- pozicijski brojevni sustavi, baza 8 odnosno 16
- baza = potencija broja 2
  ~ jednostavna pretvorba u binarni sustav
- veća baza
  ~ manji broj znamenaka za zapis broja
- *oktalni* sustav:
  - znamenke 0-7
  - prikaz nizom od 3 bita

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Oktalni i heksadekadski sustav

$$\textit{Primjer}: 101111011001100_2 \rightarrow ?_8$$

101	111	011	001	100
5	7	3	1	4

$101111011001100_2 = 57314_8$

$$\textit{Primjer}: 765432_8 \rightarrow ?_2$$

7	6	5	4	3	2
111	110	101	100	011	010

$765432_8 = 111110101100011010_2$

Heksadekadski sustav

- baza sustava 16:
  znamenke 0 - "15", tj. 0-9, A, B,..., F
- znamenka ~ 4 bita = 1/2 okteta
- vrlo rasprostranjen brojevni sustav:
  - sažeti zapis binarnog:
    2 "heksa" znamenke ~ 1 oktet
  - jednostavna pretvorba

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Heksadekadski sustav

Primjer : $0101111000111001 1100_2 \rightarrow ?_{16}$

0101	1110	0011	1001	1100
5	E	3	9	C

$01011110001110011100_2 = 5E39C_{16}$

Primjer : $76A4C2_{16} \rightarrow ?_2$

7	6	A	4	C	2
0111	0110	1010	0100	1100	0010

$76A4C2_{16} = 011101101010010011000010_2$

Sadržaj predavanja

- tipovi i prikaz podataka
- brojevni sustavi
- **binarna aritmetika**
  - **binarno zbrajanje**
  - **binarno oduzimanje**
- modul i komplementi brojeva
- binarno množenje
- binarno kodiranje znamenki i simbola
- kodovi za zaštitu podataka

Binarna aritmetika

- binarna aritmetika
  ~ aritmetičke operacije u binarnom sustavu
  (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje):
  - specifičnosti u odnosu na dekadsku aritmetiku
  - binarno zbrajanje
    ~ osnovna operacija u digitalnim sustavima (računalima)

Binarna aritmetika

- binarno zbrajanje
  - najjednostavnije
    ~ zbrajanje *dviju* binarnih znamenki:
    suma *mod 2* : operator ⊕

0	0	1	1
+0	+1	+0	+1
0	1	1	1 | 0

C: prijenos

S: suma

b \ a	0	1
0	0	1
1	1	10

  - rezultat: 2_{10} = **1**0_2
    ~ pojava *prijenosa* (engl. carry) na višu bitovnu poziciju
  - oznake:
    S : suma, zbroj ; C : prijenos

Binarna aritmetika

- binarno zbrajanje dvaju binarnih *brojeva* :
  - općenito *n*-bitni binarni *brojevi* : $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_i\ldots a_1a_0$
  - prijenos pribrojiti *višoj* bitovnoj poziciji
    ~ zbrajanje *triju* binarnih znamenki

		3	7	8	
	+		2	7	
1.		3	9	5	: S
	+		1		: C
2.		3	0	5	: S
	+	1			: C
		4	0	5	

	1	0	1	1	1	1	0	1	0	
$\oplus$					1	1	0	1	1	
	1	0	1	1	0	0	0	0	1	S_1
$\oplus$				1	1		1			C_1
	1	0	1	0	1	0	1	0	1	S_2
$\oplus$			1							C_2
	1	0	0	0	1	0	1	0	1	S_3
$\oplus$		1								C_4
	1	1	0	0	1	0	1	0	1	

Binarna aritmetika

- binarno zbrajanje dvaju binarnih *brojeva* :
  - *n*-bitni binarni *brojevi*
    ~ općenito promatrati *i*-ti bit

    $S_i = A_i \oplus B_i \oplus C_{i-1}$

    $C_i = ?$
  - posebna tablica zbrajanja

    Primjer : prethodni

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,0 \\ +\quad 1\,1\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \end{array}$$

?

A_i	B_i	C_{i-1}	S_i	C_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Binarna aritmetika

- binarno oduzimanje dvaju binarnih *znamenki* :
  - diferencija = minuend – suptrahend

minuend	0	1	1	0
suptrahend	–0	–0	–1	–1
	0	1	0	1 | 1

C: posudba

D: diferencija

b \ a	0	1
0	0	1
1	11	0

Binarna aritmetika

- binarno oduzimanje dvaju binarnih *brojeva* :
  - *n*-bitni binarni *brojevi*
    ~ općenito promatrati *i*-ti bit
  - diferencija = suma !!!

    $D_i = A_i \oplus B_i \oplus C_{i-1}$

    $C_i = ?$
  - posebna tablica oduzimanja
  - stvarna izvedba
    ~ pribrajanje komplementa broja
    (vidi kasnije)

A_i	B_i	C_{i-1}	D_i	C_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Sadržaj predavanja

- tipovi i prikaz podataka
- brojevni sustavi
- binarna aritmetika
- **modul i komplementi brojeva**
  - **prikaz brojeva u modulu**
  - **komplementi brojeva**
  - **zbrajanje i oduzimanje komplementom**
- binarno množenje
- binarno kodiranje znamenki i simbola
- kodovi za zaštitu podataka

Prikaz brojeva u modulu

- digitalni sustavi (računala):
  - pohranjivanje brojeva u *registrima*

D_{n-1}	D_{n-2}	D_{n-3}	......	D_2	D_1	D_0

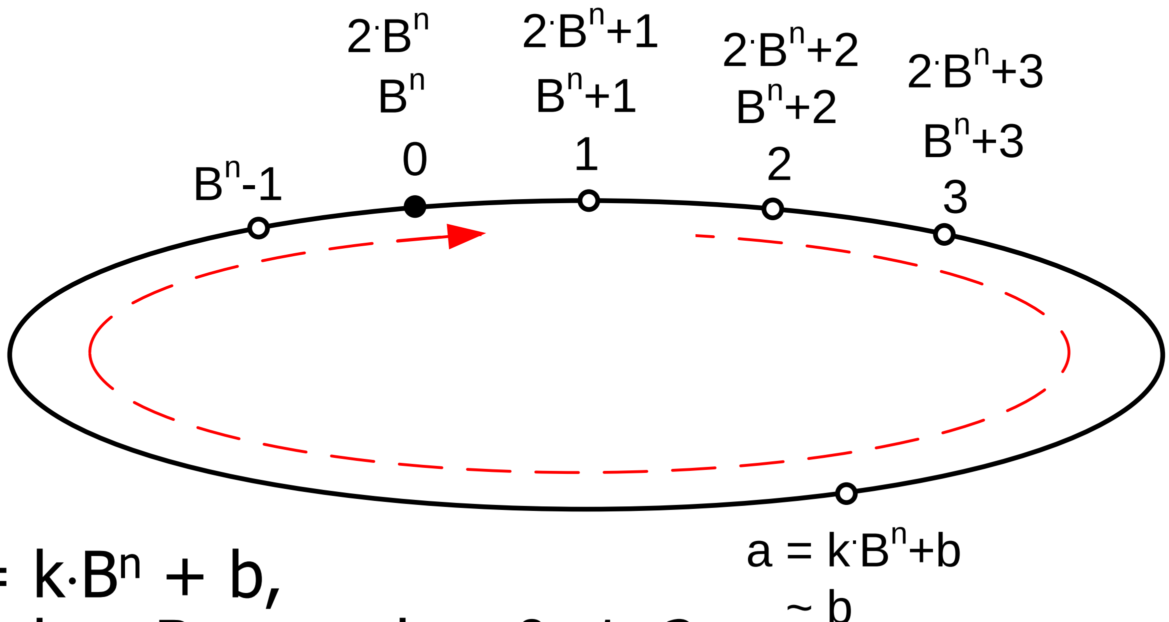
  - ograničeni broj mjesta
    ~ *n*-znamenkasti brojevi
  - broj mogućih *n*-znamenkastih brojeva kod baze B:

    B^n = m : *modul* ~ broj stanja registra,
    "kapacitet" registra od n mjesta

    $W = B^n - 1$: najveći *n*-znamenkasti broj

Prikaz brojeva u modulu

- prikaz *n*-znamenkastih brojeva:
  - ograničenje na brojeve < m = B^n
  - grafički prikaz ~"brojna kružnica"



  - uočiti: $a = k \cdot B^n + b$,
    $b < B^n = m, k = 0, 1, 2, \ldots$

$$b = a \pmod{m}$$

Prikaz brojeva u modulu

- prikaz *n*-znamenkastih brojeva:
  - interpretacija relacije

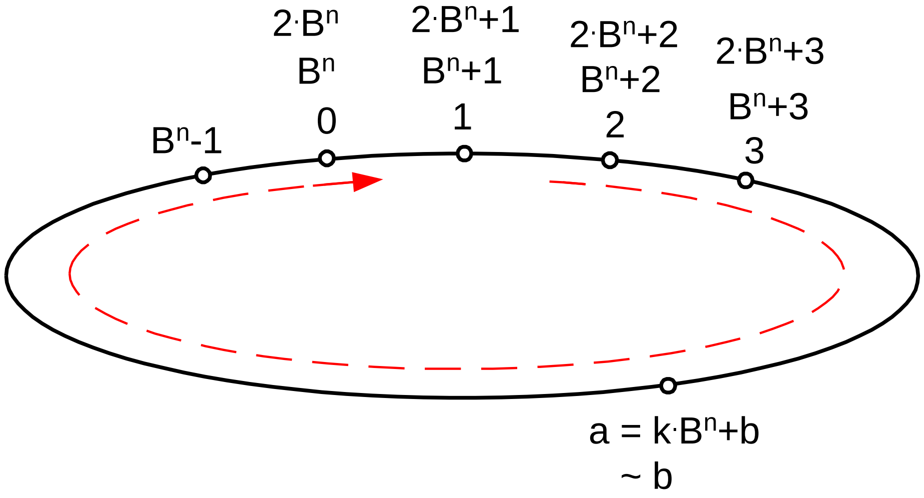
    b = a (mod m)

    "b je ostatak dijeljenja broja a s modulom m"

    Primjeri :

    23 mod 17 = 6

    35 mod 16 = 3



Modulo-aritmetika

- umjesto jednakosti relacija *kongruencije*, $\equiv$
  - npr. za m = 10:

    $$1 \equiv 1 \equiv 11 \equiv -9 \equiv 21 \equiv -19 \equiv \dots$$

  - općenito:

    $$a \equiv a + k \cdot 10, \quad k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Primjer: zbrajanje i oduzimanje mod 10:

$$4+5 \equiv 9 \equiv 19 \equiv -1 \equiv \dots \qquad 5-4 \equiv 1 \equiv 11 \equiv -9 \equiv \dots$$

$$5+5 \equiv 0 \equiv 10 \equiv -10 \equiv \dots \qquad 5-5 \equiv 0 \equiv 10 \equiv -10 \equiv \dots$$

$$6+5 \equiv 1 \equiv 11 \equiv -9 \equiv \dots \qquad 5-6 \equiv 9 \equiv 19 \equiv -1 \equiv \dots$$

Modulo-aritmetika

- zapis proizvoljnog izraza:
  radi jasnoće se na kraju izraza piše (mod *m*)

  npr. $5 \equiv 15 \pmod{10}$

- algebarski izrazi, npr:

  $$a \equiv b + 2 \pmod{10}$$

  jednadžbu zadovoljavaju:

  $a = b + 2,\ b - 8,\ b + 12,\ b - 18,\ \ldots$

Komplementi brojeva

- komplementi brojeva:
  - u odnosu na *modul* brojevnog sustava $m = B^n$
    ~ određen brojem mjesta n za prikaz brojeva u registru
  - u odnosu na *najveći n-znamenkasti broj* $W = B^n - 1$
- značaj komplementa brojeva:
  - pojednostavljivanje obavljanja aritmetičkih operacija
  - npr. korištenje *istog* sklopovlja
    za obavljanje zbrajanja i oduzimanja

Komplementi brojeva

- $\forall\ a,\ 0 \le a < m,\ \exists$ *komplement* $\bar{a}$:

$$a + \bar{a} = m$$

- komplement srodan pojmu *suprotnog* broja ($-a$):

$$a + (-a) = 0$$

$$a + \bar{a} \equiv 0 \pmod{m}$$

Komplementi brojeva

- korist od komplementa:
  - oduzimanje pretvara u zbrajanje!

$$a-b=a-b+0\equiv(a-b)+\left(b+\overline{b}\right)$$

$$=a+(-b+b)+\overline{b}=a+\overline{b}$$

$$a-b\equiv a+\overline{b}$$

  - omogućuje korištenje *istog* sklopovlja za zbrajanje *i* oduzimanje

Komplementi brojeva

- *B-komplement*

~ komplement u odnosu na $m = B^n$:

$$\overline{N}_B \equiv B^n - N = m - N = W - N + 1$$

B = 10: *10-komplement*

n= 2: $\overline{(35)}_{10} = 10^2 - 35 = 65$

n= 3: $\overline{(35)}_{10} = 10^3 - 35 = 965$

- B = 2: *2-komplement*

$$\overline{(010101)}_2 = 2^6 - 010101 = 1000000 - 010101 = 101011$$

- vrijedi: komplement komplementa je sam broj

$$\overline{\overline{N}}_B = \left(\overline{B^n - N}\right)_B = B^n - \left(B^n - N\right) = N$$

Komplementi brojeva

- praktični algoritam za dobivanje 2-komplementa:

  "Počev od najmanje značajnog bita broja, invertirati svaki bit nakon prve 1."

  Primjer:

  00010110 → **111010**10

  00100101 → **1101101**1

Komplementi brojeva

- (B-1)-komplement
  ~ komplement u odnosu na W

$$\overline{N} \equiv B^n - N - 1 = \overline{N}_B - 1 = W - N$$

  - B = 10: *9-komplement*

n = 2: $\overline{(35)} = 10^2 - 35 - 10^0 = 64 = \left(10^2 - 10^0\right) - 35 = 99 - 35$

n = 3: $\overline{(35)} = 10^3 - 35 - 10^0 = 964 = \left(10^3 - 10^0\right) - 35 = 999 - 35$

  - B = 2: 1-komplement

$$\overline{(010101)} = 2^6 - 010101 - 1 = 111111 - 010101 = 101010$$

Komplementi brojeva

- dobivanje (B-1)-komplementa:
  - *svaku znamenku* broja oduzeti od W = B – 1
  - dobivanje 1-komplementa
    ~ *komplementiranje* (inverzija) pojedinih bitova:
    vrlo jednostavna sklopovska izvedba!
- dobivanje 2-komplementa iz 1-komplementa:

$$\overline{B_2} = \overline{B_1} + 1$$

- u odnosu na B-komplement je kod (B-1)-komplementa znamenka najmanje težine umanjena za 1

Oduzimanje komplementom

- razlika D = M – S za *binarne* brojeve:
  ~ računanjem komplementa:
  - 1-komplement ~ komplement svih pojedinačnih bitova
  - 2-komplement ~ 1-komplement + 1
- potreban sklop koji podržava:
  - zbrajanje
  - komplementiranje (inverziju) svih bitova u broju
- u nastavku:
  oduzimanje komplementom u *proizvoljnoj* bazi B

Oduzimanje B-komplementom

- oduzimanje B-komplementom:
računanje $M+\overline{S}_B$ sklopom!
$$M+\overline{S}_B = M + \left(B^n - S\right) = \left(M - S\right) + B^n = D + B^n$$
$$D = \left(M+\overline{S}_B\right) - B^n$$
$$D \equiv M + \overline{S}_B$$
- dva slučaja:
  - M > S $\Rightarrow$ D > 0
  - M < S $\Rightarrow$ D < 0

Oduzimanje B-komplementom

- $M > S \;\Rightarrow\; D > 0$

$$M + \bar{S}_B = M + B^n - S = D + B^n = D + W + 1 > W$$

  - $M + \bar{S}_B > W$: *preljev* (engl. overflow)
    ~ zanemaruje se!
  - sadržaj registra: $M + \bar{S}_B - B^n \equiv M + \bar{S}_B$
  - znamenka najviše težine B^n *nije upisana*
    ~ bila bi n+1 znamenka!
  - preljev narušava jednakost, ali ne i kongruenciju!
  - sadržaj registra je upravo traženi rezultat:

$$\left(M + \bar{S}_B\right) - B^n = \left(D + B^n\right) - B^n = D$$

Oduzimanje B-komplementom

Primjer: B = 2, n = 8 (8-bitno "binarno" računalo)

$$W = B^n - 1 = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$$

D = 3 – 2 $\Rightarrow$ M = 3, S = 2

$$\bar{S}_B = B^n - S = 256 - 2 = 254$$

$$M + \bar{S}_B = 3 + 254 = 257 > W$$

preljev!

$$257 \equiv 1$$

broj u registru!

Oduzimanje B-komplementom

- registri: A = 3, B = 2

$A: 00000011 \quad B: 00000010 \quad \overline{B}_2 = 11111110$

$$
\begin{array}{rl}
A+\overline{B}_2: & 00000011 \\
+ & 11111110 \\
\hline
1 & 00000001
\end{array}
$$

traženi rezultat

ne stane u registar – preljev!

složenost operacije:
2 x zbrajanje
1 x inverzija bitova

Oduzimanje B-komplementom

- $M < S \;\Rightarrow\; D < 0$

$$M + \overline{S}_B = D + B^n = D + W + 1 \leq W$$

- $M + \overline{S}_B \leq W$: *nema* preljeva
- sadržaj registra: $M + \overline{S}_B$
- oduzimanje B^n od rezultata:
  - oduzeti komplement
  - negativni predznak

$$\begin{aligned} D &= \left(M + \overline{S}_B\right) - B^n \\ &= -\left(B^n - \left(M + \overline{S}_B\right)\right) \\ &= -\left(B^n - X\right) \\ &= -\overline{X}_B \\ &= -\overline{\left(M + \overline{S}_B\right)}_B \end{aligned}$$

Oduzimanje B-komplementom

- registri: A = 2, B = 3

$$A:00000010 \quad B:00000011 \quad \overline{B}_2 = 11111101$$

$$A+\overline{B}_2: \quad \begin{array}{r} 00000010 \\ +\ 11111101 \\ \hline 11111111 \end{array}$$

novi sadržaj registra A

$$-\left(\overline{11111111}\right)_2 = -00000001$$

traženi rezultat

složenost operacije:
3 x zbrajanje
2 x inverzija bitova

Oduzimanje B-komplementom

- *algoritam* oduzimanja B-komplementom:
  - pribrojiti minuendu komplement suptrahenda
  - ako se pojavi preljev, to je rezultat
  - ako nema preljeva, još jednom komplementirati te promijeniti predznak

Operacije nad brojevima s predznakom

- prikaz negativnih brojeva:
  - predznak i veličina
  - predznak i 1-komplement
  - predznak i 2-komplement
- *zapis brojeva s predznakom*:
  - veličina broja ~ iznos
  - *predznak*
    ~ još jedan bit: najznačajniji (najlijeviji) bit
  - tipično:

    0 : "+"

    1 : "-"

D_n	D_{n-1}	D_{n-2}	......	D_2	D_1	D_0

bit predznaka

Prikaz brojeva s predznakom

- prikaz brojeva *predznakom* i *veličinom*:
  - odvojeno manipuliranje predznaka i veličine
  - relativno složeno izvođenje računskih operacija
  - problem "negativne nule"

Primjer: prikaz jednim oktetom

$$+63 = \boxed{0}0111111 \qquad -63 = \boxed{1}0111111$$

$$+114 = \boxed{0}1110010 \qquad -114 = \boxed{1}1110010$$

$$+0 = \boxed{0}0000000 \qquad -0 = \boxed{1}0000000$$

Prikaz brojeva s predznakom

- prikaz brojeva *predznakom* i *1-komplementom*:
  - slično prikazu predznakom i 2-komplementom ~ komplementiranje predznaka i veličine *zajedno*
  - (također!) problem "negativne nule"

Primjer: prikaz jednim oktetom

$$+63 = 00111111 \qquad -63 = 11000000$$

$$+114 = 01110010 \qquad -114 = 10001101$$

$$+0 = 00000000 \qquad -0 = 11111111$$

Prikaz brojeva s predznakom

- prikaz brojeva *predznakom* i *2-komplementom*:
  - pozitivni brojevi: predznak i veličina
  - negativni brojevi: predznak i 2-komplement
  - komplementiranje predznaka i veličine zajedno
  - *nema* problema "negativne nule"
    ~ nula je *jedinstvena*!

Primjer: prikaz jednim oktetom

$$+63 = \boxed{0}0111111 \qquad -63 = \boxed{1}1000001$$

$$+114 = \boxed{0}1110010 \qquad -114 = \boxed{1}0001110$$

$$+0 = \boxed{0}0000000 \qquad -0 = \boxed{0}0000000$$

Usporedba 1 i 2 komplementa

- prikaz predznakom i 2-komplementom praktičniji!
  - *nema* "negativne nule"
  - *asimetrični raspon* pozitivnih i negativnih brojeva ~ nula je "pozitivna"

broj	predznak i veličina	2-komplement	1-komplement
-8	-	1000	-
-7	1111	1001	1000
-6	1110	1010	1001
-5	1101	1011	1010
-4	1100	1100	1011
3	1011	1101	1100
-2	1010	1110	1101
-1	1001	1111	1110
0	0000 ili 1000	0000	0000 ili 1111
1	0001	0001	0001
2	0010	0010	0010
3	0011	0011	0011
4	0100	0100	0100
5	0101	0101	0101
6	0110	0110	0110
7	0111	0111	0111

Aritmetički preljev

- zbrajanje u 2-komplementu
  ~ moguća pojava *aritmetičkog* preljeva
  (engl. arithmetic overflow) zbog "nedostatka" 1 bita
  - pribrojnici istog predznaka (+ ili –),
    a predznak rezultata se razlikuje (– ili +)
  - suma premašuje broj mjesta veličine (n -1)
  - potreba detekcije aritmetičkog preljeva

Primjer: 7 + 4

	0111	+7
+	0100	+4
	1011	-5

POGREŠNO

	00111	+7
+	00100	+4
	01011	+1
		1

Aritmetički preljev

- oduzimanje u 2-komplementu:
  - kod dobivanja suptrahenda 2-komplementa moguća promjena predznaka!
  - 2-komplement suptrahenda pribrojiti minuendu

Primjer:

```
      1011            1001
  -   1001        -   1011
  --------        --------
      1011            1001
  +   0111        +   0101
  --------        --------
  1   0010            1110
```

preljev se zanemaruje

nema preljeva! (rezultat je negativan: 1 na najznačajnijem mjestu)

Sadržaj predavanja

- tipovi i prikaz podataka
- brojevni sustavi
- binarna aritmetika
- modul i komplementi brojeva
- **binarno množenje**
- binarno kodiranje znamenki i simbola
- kodovi za zaštitu podataka

Binarno množenje

- *binarno množenje*
  ~ prema pravilima za dekadsko množenje:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & \multicolumn{3}{c}{\text{multiplikand}} & & \multicolumn{3}{c}{\text{multiplikator}} \\
 & & & 1 & 1 & 0 & \times & 0 & 1 & 0 \\
\cline{4-10}
 & & & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{4}{l}{\left.\right\} \text{parcijalni}} \\
 & & 1 & 1 & 0 & & \multicolumn{4}{l}{\quad \text{produkti}} \\
+ & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
\cline{1-6}
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \multicolumn{4}{l}{\text{produkt}}
\end{array}
$$

Binarno množenje

- mogućnosti ostvarivanja binarnog množenja:
  - uzastopna zbrajanja
  - parcijalna množenja s 2 (~ "posmak") i zbrajanje

$$M = m_3 m_2 m_1 m_0 \rightarrow \text{multiplikand}$$
$$N = n_3 n_2 n_1 n_0 \qquad \rightarrow \text{multiplikator}$$

$$\begin{aligned} M \times N &= M \cdot \left(n_3 \cdot 2^3 + n_2 \cdot 2^2 + n_1 \cdot 2^1 + n_0 \cdot 2^0\right) \\ &= M \cdot n_3 \cdot 2^3 + M \cdot n_2 \cdot 2^2 + M \cdot n_1 \cdot 2^1 + M \cdot n_0 \cdot 2^0 \\ &= \sum_{i=0}^{3} M \cdot n_i \cdot 2^i \end{aligned}$$

  - efikasnije primjenom *Hornerove sheme*:

$$M \times N = \left(\left(M \cdot n_3 \cdot 2 + M \cdot n_2\right) \cdot 2 + M \cdot n_1\right) \cdot 2 + M \cdot n_0 , n_i \in \{0,1\}$$

Binarno množenje

Primjer: množenje 4-bitnih brojeva Hornerovom shemom

$$M = 1011_2 \equiv 11_{10}$$

$$N = 1001_2 \equiv 9_{10}$$

$$P = M \times N = 01100011_2 \equiv 99_{10}$$

$n_0 = 1$ →				1	0	1	1
				1	0	1	
$n_1 = 0$ →			0	0	0	0	
			0	1	0		
$n_2 = 0$ →		0	0	0	0		
		0	0	1			
$n_3 = 1$ →	1	0	1	1			
produkt:	1	1	0	0	0	1	1

$$P = M \times N = \big((M \cdot n_3 \cdot 2 + M \cdot n_2) \cdot 2 + M \cdot n_1\big) \cdot 2 + M \cdot n_0, n_i \in \{0,1\}$$

$$= \Big\langle \big\langle \langle \mathbf{1011}0 + 0000 \rangle 0 + 0000 \big\rangle 0 + 1011 \Big\rangle$$

$$= \Big\langle \big\langle \langle \mathbf{101100} \rangle + 0000 \big\rangle 0 + 1011 \Big\rangle$$

$$= \langle \mathbf{101100}0 \rangle + 1011$$

$$= 1100011$$

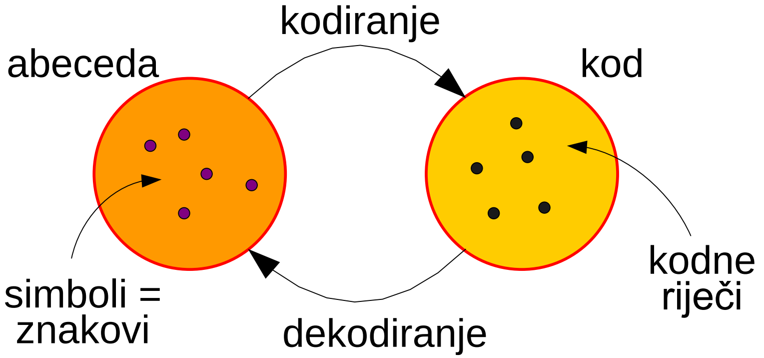
označava da se podatak unutar zagrade posmiče za jedno mjesto ulijevo, odnosno na desnoj strani se dopisuje bit 0

Sadržaj predavanja

- tipovi i prikaz podataka
- brojevni sustavi
- binarna aritmetika
- modul i komplementi brojeva
- binarno množenje
- **binarno kodiranje znamenki i simbola**
  - **dekadski kodovi**
  - **znakovni kodovi**
  - **Grayev kod**
- kodovi za zaštitu podataka

Binarno kodiranje znamenki i simbola

- princip kodiranja binarnim riječima:
  - izražavanje simbola/znakova u *binarnom* obliku, radi dalje obrade digitalnim sklopom ~ binarno *kodiranje*
  - *kôd* : skup kodnih riječi s pridruženim značenjima
  - *kodna riječ* : niz bitova kojem se pridaje neko značenje
  - *abeceda* : skup svih simbola prikazanih kodnim riječima
  - *znakovi* : elementi abecede



Binarno kodiranje znamenki i simbola

- princip kodiranja binarnim riječima:
  - broj simbola = broj različitih prikaza
    $\rightarrow$ broj bitova kodnih riječi

K simbola: $n \geq \text{ld}\ K$ [bit], $\text{ld}\ x = \log_2 x$

$2^n \geq K$

  - n bitova: $N = 2^n$ mogućih kombinacija

pridruživanje kodne riječi prvom simbolu	N načina
pridruživanje kodne riječi drugom simbolu	N-1 način
pridruživanje kodne riječi trećem simbolu	N-2 načina
…	…
pridruživanje kodne riječi K-tom simbolu	N-(K-1)

$$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \cdots \cdot (N-(K-1)) = \frac{N!}{(N-K)!} = V_N^{(K)}$$

Binarno kodiranje znamenki i simbola

- dekadski kodovi
  ~ binarni prikaz dekadskih znamenki
  - n ≥ 4 bita; $2^3 < 10 < 2^4$
  - n = 4 bita
    ~ 16 kombinacija
  - broj 4-bitnih kodova
    ~ mogući broj kodiranja: $V_{16}^{(10)} = \frac{16!}{6!} = 29{,}059 \cdot 10^{9}$
  - odabrati kodove s povoljnim svojstvima!

Dekadski kodovi

- svojstva dekadskih kodova:
  - aditivnost
    ~ veza između kodne riječi
    i prikazane dekadske znamenke
  - samokomplementarnost
    (engl. self-complementing)
    ~ veza kodnih riječi po parovima

Dekadski kodovi

- težinski kod:
  - zbroj težina = vrijednost prikazane znamenke

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot w_i + D$$

N	:	dekadski ekvivalent
w_i	:	i-ta težina
a_i	:	koeficijent za i-tu težinu
D	:	konstanta pomaka

Dekadski kodovi

- samokomplementirajući kod:
  ~ 9-komplement dekadskog broja
  zamjenom 0 i 1 u kodnoj riječi:
  - korisno kod binarno-dekadske aritmetike
  - težinski je kod samokomplementirajući ako:

$$\sum_i w_i = 9$$

Dekadski kodovi

- kod 8421,
  BCD (engl. Binary Coded Decimal)
  - prvih 10 binarnih brojeva
  - težine: 8, 4, 2, 1
  - neupotrijebljene kombinacije: 1010÷1111

	2^3	2^2	2^1	2^0
	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
	1	0	1	0
	1	0	1	1
	1	1	0	0
	1	1	0	1
	1	1	1	0
	1	1	1	1

Dekadski kodovi

- kod 2421 (Aikenov kod)
  - težinski kod
    ~ težine: 2, 4, 2, 1
  - samokomplementirajući kod:
    0-9, 1-8, 2-7, 3-6, 4-5
  - prvih i zadnjih pet
    4-bitnih brojeva
  - neupotrijebljene kombinacije:
    0101÷1010

	2	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
	0	1	0	1
	0	1	1	0
	0	1	1	1
	1	0	0	0
	1	0	0	1
	1	0	1	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0
9	1	1	1	1

Dekadski kodovi

- kod XS-3 (Stibitzov kod)
  - kod 8421,
    s "prekoračenjem" (ekscesom) od 3
  - uz D = 3
    ~ težinski kod
  - ne postoji 0000:
    detekcije prekida kod prijenosa
  - neupotrijebljene kombinacije:
    0000÷0010, 1101÷1111
  - simetrična tablica koda
    ~ samokomplementirajući kod!

	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1
	0	0	0	0
	0	0	0	1
	0	0	1	0
0	0	0	1	1
1	0	1	0	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	0	1
7	1	0	1	0
8	1	0	1	1
9	1	1	0	0
	1	1	0	1
	1	1	1	0
	1	1	1	1

Dekadski kodovi

- bikvinarni kod
  - težinski 7-bitni kod (2+5=7)
  - kodne riječi s dvije 1:
    - otkrivanje pogrešaka
    - ne ako je pogreška *samokompenzirajuća*
  - velika zalihost: ~ 10 od 128 mogućih kombinacija

	5	0	4	3	2	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	1	0	0
8	1	0	0	1	0	0	0
9	1	0	1	0	0	0	0

Znakovni kodovi

- prikaz skupa znakova:
  - prikaz slova i znamenki:
    - "grafički"
      ~ "alfa-numerički" znakovi, interpunkcije, simboli, ...
    - *upravljački* znakovi
- standardizirani znakovni kodovi:
  npr. 7-bitni (128 kombinacija) ASCII:
  ISO IS 646, ITU-T/CCITT No. 5

Znakovni kodovi

- kod ASCII (engl. American Standard Code for Information Interchange):

' ': 20_H, CR : $0D_H$, LF : $0A_H$

'0' – '9': $30\text{-}39_H$

'A' - 'Z' : $41\text{-}5A_H$

'a' – 'z' : $61\text{-}7A_H$

Primjer:

A = 100 0001 = 41_H

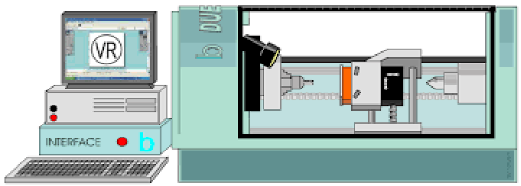
a = 110 0001 = 61_H

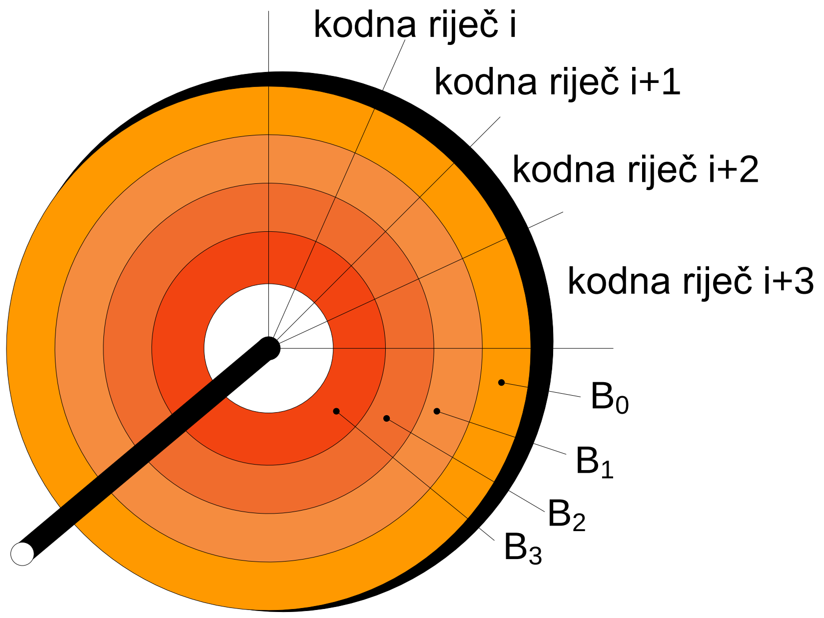
* = 010 1010 = $2A_H$

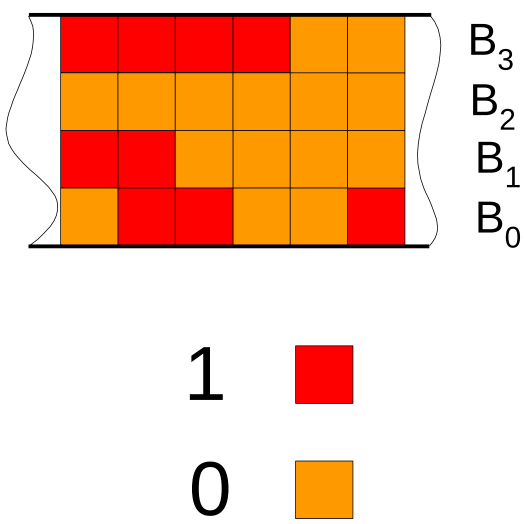
					0	0	0	0	1	1	1	1
					0	0	1	1	0	0	1	1
					0	1	0	1	0	1	0	1
					0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	NUL	DLE	SP	0	3	P	3	p
0	0	0	1	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0	0	1	0	2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0	0	1	1	3	ETX	DC3	#/£	3	C	S	c	s
0	1	0	0	4	EOT	DC4	¤/$	4	D	T	d	t
0	1	0	1	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0	1	1	0	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0	1	1	1	7	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1	0	0	0	8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1	0	0	1	9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1	0	1	0	10	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1	0	1	1	11	VT	ESC	+	;	K	3	k	3
1	1	0	0	12	FF	IS4	,	<	L	3	l	3
1	1	0	1	13	CR	IS3	–	=	M	3	m	3
1	1	1	0	14	SO	IS2	.	>	N	3	n	3
1	1	1	1	15	SI	IS1	/	?	O	_	o	DEL

Grayev kod

- kod s *minimalnom* promjenom
  - ograničavanje pogreški pri slijednoj promjeni npr. direktno očitavanje položaja
  - susjedne kodne riječi ~ razlika u samo 1 bitu

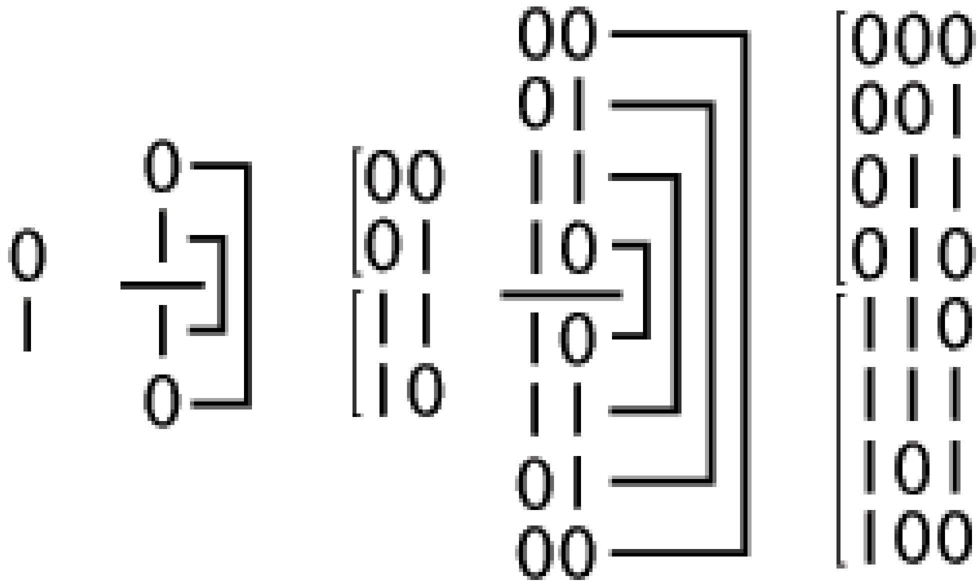






Grayev kod

- izgradnja koda:
  ~ *zrcaljenje* u jednom bitovnom mjestu: *reflektirani* kod



Grayev kod

- svojstva Grayevog koda:
  - susjedne kodne riječi
    ~ razlika u samo jednom bitu
    ("jedinična distanca")
  - izgradnja koda:
    ~ zrcaljenje
    u jednom bitovnom mjestu:
    reflektirani kod
  - netežinski kod
  - binarni, ali i "dekadski"
    ~ XS-3 Grayev kod

	0	0	0	0
	0	0	0	1
	0	0	1	1
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0
2	0	1	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	0	0
5	1	1	0	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	0
9	1	0	1	0
	1	0	1	1
	1	0	0	1
	1	0	0	0

dekadski Grayev kod

binarni Grayev kod

Sadržaj predavanja

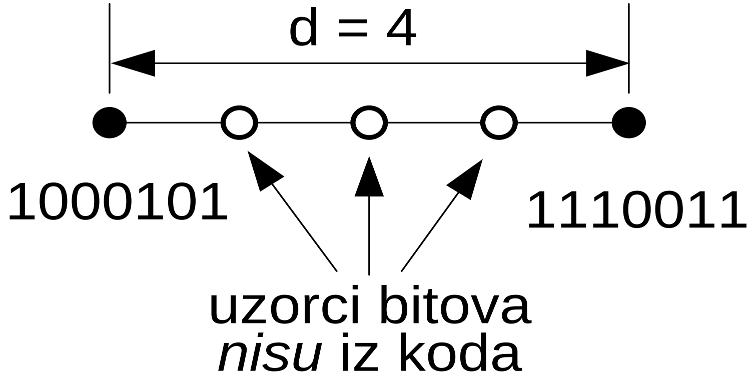
- tipovi i prikaz podataka
- brojevni sustavi
- binarna aritmetika
- modul i komplementi brojeva
- binarno množenje
- binarno kodiranje znamenki i simbola
- **kodovi za zaštitu podataka**
  - **princip otkrivanja i ispravljanja pogrešaka, distanca i zalihost**
  - **paritet, jednostruko i višestruko ispitivanje pariteta**
  - **Hammingovi kodovi**

Kodovi za zaštitu podataka

- prijenos podataka, pohranjivanje podataka
  ~ utjecaj smetnji: moguća pojava pogreške
  - pogreška
    ~ neželjena promjena jednog/više bitova u kodnoj riječi
    - *jednostruka* pogreška
      ~ promjena vrijednosti jednog bita
      ($0 \rightarrow 1$ ili $1 \rightarrow 0$)
    - *višestruka* pogreška ~ više bitova
  - rezultat djelovanja pogrešaka
    ~ neispravna, ali i *ispravna* kodna riječ!
  - dobivena kodna riječ ispravna
    ~ *otkriti* da je došlo do pogreške!!!

Kodovi za zaštitu podataka

- princip otkrivanja (i ispravljanja) pogrešaka
  ~ razlika kodnih riječi u > 1 bita
- *distanca* kodnih riječi (R. W. Hamming)
  ~ "udaljenost" dviju kodnih riječi:
  - najmanji broj bitova u kojima se dvije kodne riječi razlikuju
  - broj bitova koje treba promijeniti da se jedna kodna riječ pretvori u drugu
    ~ pogreška ostaje neotkrivena !!!



Kodovi za zaštitu podataka

- računanje distance kodnih riječi
  - broj različitih bitovnih mjesta dviju kodnih riječi:

    $c = a \oplus b$ (zbrajanje po bitovima, *nema* prijenosa!)

    d = aritmetička suma "1" u c
  - formalno:

    $c = a \oplus b = (a_{n-1} \oplus b_{n-1}, a_{n-2} \oplus b_{n-2}, \ldots, a_0 \oplus b_0)$

    $d = |c| = |a \oplus b|$

    $|x|$: težina kodne riječi (engl. weight),
    broj jedinica u kodnoj riječi

Kodovi za zaštitu podataka

- *minimalna distanca* koda d_{min}
  ~ *najmanji* razmak između dvije kodne riječi:
  - kod 8421: $d_{min} = 1$
  - bikvinarni kod: $d_{min} = 2$
  - Grayev kod: $d_{min} = d = 1$
- kod pruža zaštitu od t pogrešaka

  $t=d_{min}-1$

  $d_{min} \geq (t+1)$

Primjer: $d_{min} = 2$
~ otkrivanje *jednostruke* pogreške

Kodovi za zaštitu podataka

- kodovi s $d_{min} > 1$
  ~ postoji *zalihost* (*redundancija*), R:
  snaga zaštite, višak informacije

n : duljina kodne riječi
$k<n$: broj informacijskih bitova
$r=n-k$: broj zaštitnih bitova

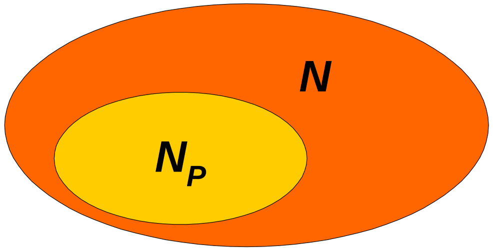
$$R = \frac{r}{n} \qquad R = 1 - \frac{ldN_p}{ldN} \qquad (ldX = \log_2 X)$$

ukupni broj kodnih riječi

$$N_p = 2^k < 2^n = N$$

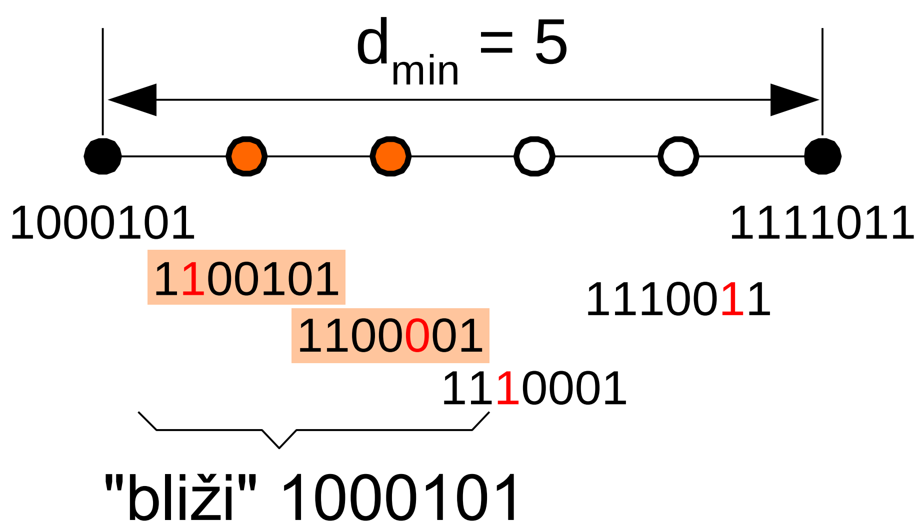
ukupan broj mogućih kombinacija od n bitova

- veći broj bitova od minimalno potrebnih za prikaz informacije; npr. bikvinarni kod
- kodna riječ = bitovi + zaštitni bitovi
- sistematski kodovi
  ~ zaštitni bitovi nakon informacijskih



Kodovi za zaštitu podataka

- dvije skupine zaštitnih kodova:
  - s mogućnošću otkrivanja pogrešaka ~ EDC (engl. Error Detecting Codes):
    $d_{min} \geq t + 1$ za otkrivanje t pogrešaka
  - s mogućnošću ispravljanja pogrešaka ~ ECC (engl. Error Correcting Codes):
    $d_{min} \geq 2 \cdot t + 1$ za ispravljanje t pogrešaka



Kodovi za zaštitu podataka

- geometrijski prikaz kodnih riječi/koda ~ kubusi u n-dimenzijskom prostoru
  - 0-kubus ~ točka
  - 1-kubus ~ dužina
  - 2-kubus ~ kvadrat
  - 3-kubus ~ kocka
  - n-kubus ~ "hiperkocka"

Kodovi za zaštitu podataka

- geometrijski prikaz kodnih riječi/koda

  Primjer: n-kubus $\rightarrow$ 3-kubus

  1. za 2^n uzoraka: $d_{min} = 1$
  2. za {100, 011}: $d_{min} = 3$

     otkriva 2 pogreške:

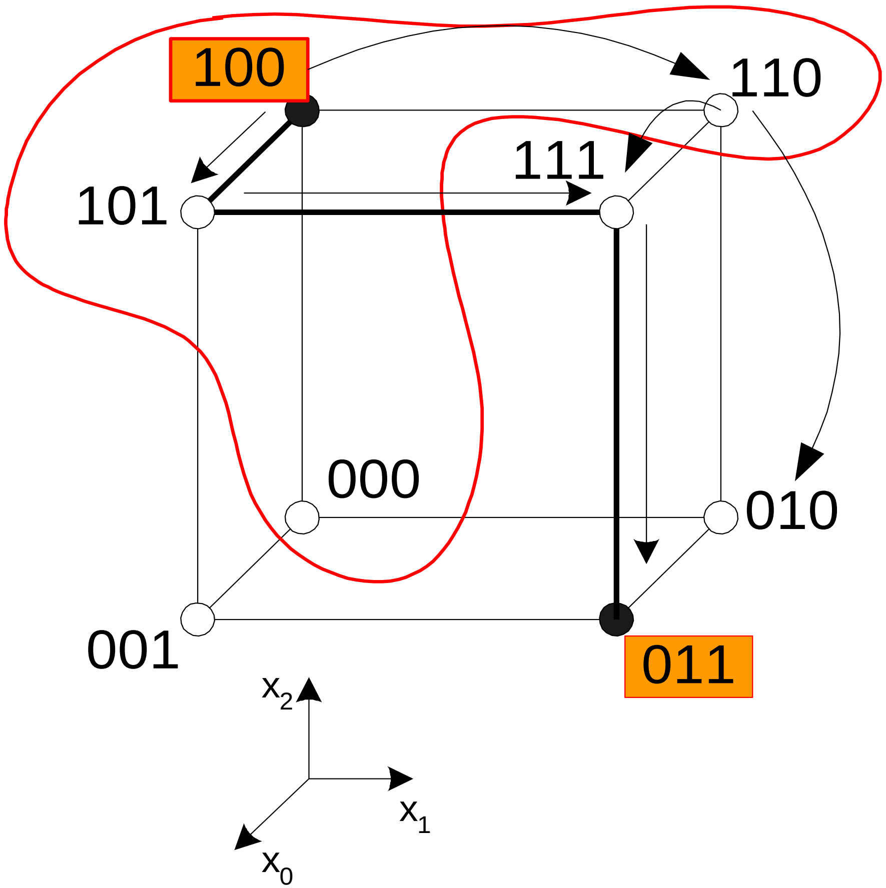
     010, 111, 001

     110, 101, 000

     ispravlja 1 pogrešku:

     110, 101, 000

     001, 111, 010



Paritet, jednostruko i višestruko ispitivanje

- *paritet* ~ najjednostavniji način zaštite
  - dodati *paritetni bit*
    ~ tipično osmi bit riječi iz ASCII koda:

    $\boldsymbol{p}\, b_6 b_5 b_4\; b_3 b_2 b_1 b_0$
  - nova kodna riječ mora imati paran/neparan broj jedinica
    ~ paran/neparan paritet

ZNAK		PARITET	
		PARNI	NEPARNI
A	100 0001	0 100 0001	1 100 0001
a	110 0001	1 110 0001	0 110 0001
*	010 1010	1 010 1010	0 010 1010

  - "vertikalna" (poprečna) paritetna zaštita
    (engl. Vertical Redundancy Check, VRC)
    ~ otkrivanje neparnih pogrešaka

Paritet, jednostruko i višestruko ispitivanje

- višestruko ispitivanje pariteta:
  - zahtjev: povećati moć zaštite!
    - veći broj paritetnih ispitivanja
      ~ "nezavisna" (ortogonalna)
    - veći broj zaštitnih bitova
      ~ veća zalihost
  - više mogućnosti:
    - dvodimenzijski kod
    - Hammingov kod

Paritet, jednostruko i višestruko ispitivanje

- *dvodimenzijski kod*
  ~ 2D matrica informacijskih bitova ("pravokutni" kod)
- uzdužna i poprečna paritetna zaštita:
  - kodna riječ ← paritetni bit
  - cijelom bloku kodnih riječi ←
    paritetna riječ, BCC (engl. Block Check Character)
    ~ "horizontalna" (uzdužna) paritetna zaštita
    (engl. Longitudinal Redundancy Check, LRC)
  - ispravljanje jednostruke pogreške

Paritet, jednostruko i višestruko ispitivanje

Primjer: zaštita dvodimenzijskim kodom kodnih riječi iz ASCII koda

parni VRC i LRC

A	a	*	*BCC*
0	1	1	x
1	1	0	0
0	1	1	0
0	0	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

$$R = \frac{m+n+1}{(m+1)(n+1)}$$

(n: broj riječi, m: broj bitova u riječi)

~ prevelika zalihost za relativno ograničenu moć zaštite!

Hammingov kod

- sustavni mehanizam za izgradnju *niza* kodova za ispravljanje pogrešaka
  ~ R.W. Hamming, 1950.
- princip
  ~ višestruko (nezavisno) paritetno ispitivanje
- bolja efikasnost kodiranja
  ~ *manja zalihost* (usp. dvodimenzijski kod)
- naročito popularan *Hammingov kod* za ispravljanje *jednostruke pogreške*
  ~ tipična primjena: pohranjivanje podataka (memorijski sklopovi)

Hammingov kod

- nezavisna paritetna ispitivanja
  ~ ne mogu se dobiti kombinacijom preostalih
- princip izgradnje kodne riječi:
  - "nezavisna" (ortogonalna) ispitivanja
  - "nezavisni" (ortogonalni) smještaj zaštitnih bitova
- "nezavisna" (ortogonalna) ispitivanja:
  - svaki zaštitni bit "pokriva" (= štiti) drugi podskup bitova podatka
  - svaki bit podatka zaštićen s više zaštitnih bitova

Hammingov kod

- "nezavisni" (ortogonalni) smještaj zaštitnih bitova:
  - postaviti ih na mjesta koja se *ne mogu* dobiti kombinacijama drugih zaštitnih bitova: 2^i

1	**2**	3	**4**	5	6	7
C0	**C1**	k1	**C2**	k2	k3	k4

  - svaki zaštitni bit C_i "pokriva" svoje pozicije ~ one bitove čiji redni broj pozicije sadrži 2^i

	1	**2**	3	**4**	5	6	7
C2:	C0	C1		C2			
C1:	C0	C1		C2			
C0:	C0	C1		C2			

Hammingov kod

- preostala mjesta redom "popunjavati" bitovima (korisnih) podataka k_i

	1	**2**	3	**4**	5	6	7
C2:	C0	C1		C2	k2	k3	k4
C1:	C0	C1	k1	C2		k3	k4
C0:	C0	C1	k1	C2	k2		k4

- paritetna zaštita provodi se za grupu podatkovnih bitova $\{k_i\}$ i pripadni zaštitni bit C_i
  ~ *višestruka* "nezavisna" (ortogonalna) ispitivanja:

  $\{C_0, k_1, k_2, k_4\}$; $\{C_1, k_1, k_3, k_4\}$; $\{C_2, k_2, k_3, k_4\}$

Hammingov kod

- svaki zaštitni bit C_i "pokriva" pozicije u čijem se rednom broju pojavljuje 2^i:

POZICIJA	nema pogreške	1	2	3	4	5	6	7
C_2	0	0	0	0	1	1	1	1
C_1	0	0	1	1	0	0	1	1
C_0	0	1	0	1	0	1	0	1
		C_0	C_1	k_1	C_2	k_2	k_3	k_4

Hammingov kod

Primjer: računanje paritetne zaštite Hammingovog koda

- podatkovna kodna riječ: 0101_2

- *parni* paritet:
  {**0**, 1, 0, 1};
  {**1**, 0, 0, 1};
  {**0**, 0, 1, 1}

	1	**2**	3	**4**	5	6	7
C2:	C0	C1		**0**	1	0	1
C1:	C0	**1**	0	C2		0	1
C0:	**0**	C1	0	C2	1		1

- *neparni* paritet:
  {**1**, 1, 0, 1};
  {**0**, 0, 0, 1};
  {**1**, 0, 1, 1}

	1	**2**	3	**4**	5	6	7
C2:	C0	C1		**1**	1	0	1
C1:	C0	**0**	0	C2		0	1
C0:	**1**	C1	0	C2	1		1

Hammingov kod

- povoljna redundancija Hammmingovog koda ~ odnos zaštitnih i informacijskih bitova:
  - jednostruka pogreška na jednom od *n* mjesta
  - bez pogrešaka

$$2^r \geq k + r + 1\,, \quad n = k + r$$

BROJ INFORMACIJSKIH BITOVA k (≤)	BROJ ZAŠTITNIH BITOVA r	DULJINA KODNE RIJEČI n = k + r
1	2	3
4	3	7
11	4	15
26	5	31
57	6	63
120	7	127

- oznaka koda: (n, k)

Hammingov kod

Primjer: Hammingov kod za zaštitu ASCII znakova

- $k = 7 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow n = k + r = 11$
  ~ Hammingov kod (11,7)

1	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11
C0	**C1**	k1	**C2**	k2	k3	k4	**C3**	k5	k6	k7

- uzorak "pokrivanja" zaštitnih bitova

	1	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11
C0:	C0	C1	k1	C2	k2		k4	C3	k5		k7
C1:	C0	C1	k1	C2		k3	k4	C3		k6	k7
C2:	C0	C1		C2	k2	k3	k4	C3			
C3:	C0	C1		C2				C3	k5	k6	k7

Hammingov kod

Primjer: efikasnost zaštite Hammingovim kodom

- poruka sastavljena od 100 ASCII (7-bitnih!) znakova
- zaštita dvodimenzijskim kodom:

$$\left.\begin{aligned} k &= 100 \cdot 7 = 700 \\ r &= 100 \cdot 1 + 8 = 108 \\ n &= k + r = 808 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R = \frac{r}{n} = \frac{108}{808} = 13{,}36\%$$

- zaštita Hammingovim kodom:

$$\left.\begin{aligned} & k = 100 \cdot 7 = 700 \\ & 2^{9} = 512 < 700 < 1024 = 2^{10} \\ & \quad \Rightarrow r = 10 \\ & n = k + r = 710 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R = \frac{r}{n} = \frac{10}{710} = 1{,}4\%$$

Hammingov kod

- izračunavanje zaštitnih bitova za *parni* paritet

POZICIJA	nema pogreške	1	2	3	4	5	6	7
C_2	0	0	0	0	1	1	1	1
C_1	0	0	1	1	0	0	1	1
C_0	0	1	0	1	0	1	0	1
		C_0	C_1	k_1	C_2	k_2	k_3	k_4

$$C_0 \oplus k_1 \oplus k_2 \oplus k_4 = 0 \quad \rightarrow \quad C_0 = k_1 \oplus k_2 \oplus k_4$$
$$C_1 \oplus k_1 \oplus k_3 \oplus k_4 = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = k_1 \oplus k_3 \oplus k_4$$
$$C_2 \oplus k_2 \oplus k_3 \oplus k_4 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = k_2 \oplus k_3 \oplus k_4$$

Hammingov kod

- izračunavanje zaštitnih bitova za *neparni* paritet

POZICIJA	nema pogreške	1	2	3	4	5	6	7
C_2	0	0	0	0	1	1	1	1
C_1	0	0	1	1	0	0	1	1
C_0	0	1	0	1	0	1	0	1
		C_0	C_1	k_1	C_2	k_2	k_3	k_4

$$C_0 \oplus k_1 \oplus k_2 \oplus k_4 \oplus 1 = 0 \quad \rightarrow \quad C_0 = k_1 \oplus k_2 \oplus k_4 \oplus 1$$

$$C_1 \oplus k_1 \oplus k_3 \oplus k_4 \oplus 1 = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = k_1 \oplus k_3 \oplus k_4 \oplus 1$$

$$C_2 \oplus k_2 \oplus k_3 \oplus k_4 \oplus 1 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = k_2 \oplus k_3 \oplus k_4 \oplus 1$$

Hammingov kod

Primjer: zaštita ASCII znaka A (41_H)

$$n = 11,\ k = n - r = 7 \Rightarrow r = 4$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_0	C_1	k_1	C_2	k_2	k_3	k_4	C_3	k_5	k_6	k_7

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
1	0	0	0	0	0	1

$C_0 = k_1 \oplus k_2 \oplus k_4 \oplus k_5 \oplus k_7 \rightarrow C_0 = 0$

$C_1 = k_1 \oplus k_3 \oplus k_4 \oplus k_6 \oplus k_7 \rightarrow C_1 = 0$

$C_2 = k_2 \oplus k_3 \oplus k_4 \rightarrow C_2 = 0$

$C_3 = k_5 \oplus k_6 \oplus k_7 \rightarrow C_3 = 1$

$\Rightarrow$ 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1

		k_1		k_2	k_3	k_4		k_5	k_6	k_7
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
C_0	C_1		C_2				C_3			

$X = C_3\, C_2\, C_1\, C_0 = 1\,0\,1\,0$

$Y = C_3'\, C_2'\, C_1'\, C_0' = 1\,0\,0\,0$

mjesto pogreške: $X \oplus Y = 0010_2 = 2_{10}$

Hammingov kod

- *sindrom*
  ~ uzorak zaštitnih bitova ($X \oplus Y$) koji ukazuje na mjesto pojave pogreške

Primjer:

sindrom = 2 ~ drugi bit kodne riječi je pogrešan!

		k_1		k_2	k_3	k_4		k_5	k_6	k_7
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
C_0	C_1		C_2				C_3			

sindrom = 0 ~ nema pogreške!

Hammingov kod

- Hammingov kod za ispravljanje jednostruke pogreške:
  - distanca d = 3
  - kod za ispravljanje "nezavisnih pogrešaka" ~ rezultat djelovanja "bijelog šuma"
  - efikasan kod, jer je R mali

Literatura

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 2: Digitalni podaci: tipovi, operacije, algoritmi.

- tipovi i prikaz podataka: str. 31
- brojevni sustavi: str. 31-42
- binarna aritmetika: str. 42-45
- modul i komplementi brojeva: str. 45-56
- binarno množenje: str. 56-57
- binarno kodiranje znamenki i simbola: str. 57-64
- kodovi za zaštitu podataka: str. 64-75

Zadaci za vježbu (1)

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 2: Digitalni podaci: tipovi, operacije, algoritmi.

- binarno kodiranje znamenku i simbola: 2.8, 2.11-2.14
- kodovi za zaštitu podataka: 2.15-2.19
- brojevni sustavi: 2.1-2.7
- modul i komplementi brojeva: 2.9-2.10

Zadaci za vježbu (2)

M. Čupić: *Digitalna elektronika i digitalna logika. Zbirka riješenih zadataka*, Cjelina 1: Zaštitno kodiranje. Brojevni sustavi. Dekadski kodovi; Cjelina 8: Digitalna aitmetika.

- pretvorba brojeva u različitim sustavima:
  - riješeni zadaci: 1.12 – 1.14 (samo cjelobrojni dio)
  - zadaci za vježbu: 1, 7-9 (str. 23)
- digitalna aritmetika:
  - riješeni zadaci: 8.1-8.6
  - zadaci za vježbu: 1, 7-9 (str. 23)
- modul i komplementi brojeva:
  - zadaci za vježbu: 1-4, 7-8 (str. 280-281)
- znakovni kodovi:
  - riješeni zadaci: 1.15 – 1.19
- kodovi za zaštitu podataka:
  - riješeni zadaci: 1.1 – 1.11
  - zadaci za vježbu: 2-6 (str.23)