2. Brojevni sustavi i kodovi (1)

Sadržaj predavanja

- **tipovi i prikaz podataka**
- brojevni sustavi
- binarna aritmetika
- modul i komplementi brojeva
- binarno množenje

Tipovi i prikaz podataka

- prikaz podataka u digitalnom obliku
  ~ niz bitova, *bitovni vektor*
- značenja bitovnog vektora:
  - broj
  - znak/simbol
  - specijalni znakovi:
    upravljački, *instrukcije*, …

Tipovi i prikaz podataka

- *bitovni vektor* ~ "tipiziran":
  - pripada nekom *tipu podataka* (engl. data type)
  - nametanje *discipline manipuliranja* s podacima
- osnovni tipovi podataka:
  - brojevi: prirodni, cijeli, realni, …
  - znak/simbol: pojedine abecede (~ *znakovni kodovi*)
  - specijalni znakovi ~ posebno značenje: logičke varijable
- značenje bitovnog vektora ~ utvrđeno *interpretacijom*, *kontekstom obrade*

Tipovi i prikaz podataka

- zapis podataka (~ zapis bitovnog vektora): utvrđeni oblik = *format*
  - organizacija niza bitova (grupe bitova ~ *polja*)
  - značenje pojedinih bitova/grupa bitova
- najjednostavniji zapis: prirodni binarni brojevi
  - vrijednost bita u broju = pozicija bita u binarnom vektoru
- posve općenito: pridruživanje značenja binarnom vektoru = *kôd*
  - broj
  - nešto drugo (~ simbol)

Sadržaj predavanja

- tipovi i prikaz podataka
- **brojevni sustavi**
  - **pozicijski brojevni sustavi**
  - **pretvorba iz jednog sustava u drugi sustav**
  - **oktalni i heksadekadski sustav**
- binarna aritmetika
- modul i komplementi brojeva
- binarno množenje

Pozicijski brojevni sustavi

- pozicija znamenke određuje njenu težinu
  - faktor kojim se znamenka množi
- težina - potencija *baze* brojevnog sustava
- dekadski sustav:

$$234 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

- baza sustava može općenito biti bilo koji cijeli broj

Pozicijski brojevni sustavi

- prikaz *n*-znamenkastih *cijelih* brojeva:

$$N_B = a_{n-1} \cdot B^{n-1} + a_{n-2} \cdot B^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot B^1 + a_0 \cdot B^0$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot B^i$$

$$= a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$$

B: *baza* ili *korijen* brojevnog sustava

a_i: koeficijent uz *i*-tu potenciju (težinu);
a_i = {0, 1, …., B-1}, i = 0, 1, …., n-1
~ znamenke

Prikaz razlomljenih brojeva

- princip prikaza kao za cijele brojeve:
  težine znamenki iza zareza ~ *negativne* potencije baze

$$
\begin{aligned}
n_B &= a_{-1} \cdot B^{-1} + a_{-2} \cdot B^{-2} + \cdots + a_{-(m-1)} \cdot B^{-m+1} + a_{-m} \cdot B^{-m} \\
&= \sum_{i=-m}^{-1} a_i \cdot B^i \\
&= 0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-(m-1)} a_{-m}
\end{aligned}
$$

Miješani ili racionalni brojevi

- prikaz s *fiksnim zarezom* (engl. fixed-point notation) ~"miješani" ili racionalni brojevi = cijeli broj + razlomljeni broj

$$N = N_B + n_B$$

$$= \sum_{i=-m}^{n-1} a_i \cdot B^i$$

$$= a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-(m-1)} a_{-m}$$

- pretvorba:
  - posebno cjelobrojni dio broja
  - posebno razlomljeni dio broja

Neki brojevni sustavi

baza B	brojevni sustav	znamenke sustava (B)
2	binarni	0,1
3	ternarni	0,1,2
8	oktalni	0,1,2,3,4,5,6,7
10	dekadski	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
16	heksadekadski	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

dekadski	binarni	oktalni	heksadekadski
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Pretvorba brojeva u različitim sustavima

- pretvorba *cijelog* dekadskog broja u neki drugi sustav ~ uzastopno dijeljenje bazom tog sustava
  - ostaci dijeljenja s bazom ~ znamenke
  - ostatak prvog dijeljenja ~ najmanje značajna znamenka

Primjer: $N_{10} \rightarrow N_2 = b_{s-1} b_{s-2} \cdots b_1 b_0$

$$\begin{aligned} N_{10} &= b_{s-1} \cdot 2^{s-1} + b_{s-2} \cdot 2^{s-2} + \cdots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0 \\ &= 2 \cdot \left(b_{s-1} \cdot 2^{s-2} + b_{s-2} \cdot 2^{s-3} + \cdots + b_1 \cdot 2^0 \right) + b_0 \\ &= 2 \cdot A_1 + b_0 \end{aligned}$$

Pretvorba dekadskog broja u binarni

Primjer: $345_{10} \to ?_2$

$$
\begin{array}{rr}
345:2=172 & 1 \\
172:2=86 & 0 \\
86:2=43 & 0 \\
43:2=21 & 1 \\
21:2=10 & 1 \\
10:2=5 & 0 \\
5:2=2 & 1 \\
2:2=1 & 0 \\
1:2=0 & 1
\end{array}
\;\Big\uparrow
$$

$$\Rightarrow \quad 345_{10} = 101011001_2$$

Pretvorba dekadskog broja u ternarni

Primjer: $345_{10} \rightarrow ?_3$

$345 : 3 = 115$	0
$115 : 3 = 38$	1
$38 : 3 = 12$	2
$12 : 3 = 4$	0
$4 : 3 = 1$	1
$1 : 3 = 0$	1

$$\Rightarrow \qquad 345_{10} = 110210_3$$

Pretvorba dekadskog broja u heksadekadski

Primjer: $345_{10} \rightarrow ?_{16}$

$345:16=21$	9
$21:16=1$	5
$1:16=0$	1

$$\Rightarrow \qquad 345_{10}=159_{16}$$

Pretvorba binarnog broja u dekadski

- "direktna" pretvorba:
  - odrediti dekadski zapis težina (~ potencija baze) izvornog sustava
  - pomnožiti vrijednost svake znamenke s odgovarajućom težinom
  - sumirati

Primjer: $10010_2 \rightarrow ?_{10}$

$$10010_2 = 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0$$
$$= 1*16 + 1*2 = 18$$

$$\Rightarrow 10010_2 = 18_{10}$$

Rekurzivno množenje i pribrajanje

- računanje težina, množenjem znamenkama, pribrajanje ~ ∀ znamenku:
  - posmak za 1 mjesto ~ množenje s 2
  - pribrajanje ~ "normiranje" na niže brojno mjesto

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 2^{s-1} & 2^{s-2} & 2^{s-3} & 2^{s-4} & 2^{s-5} & \cdots & 2^{1} & 2^{0} \\
 & b_{s-1} & b_{s-2} & b_{s-3} & b_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_1 & b_0 \\
\hline
= & \multicolumn{2}{c}{(2\cdot b_{s-1}+b_{s-2})} & b_{s-3} & b_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_1 & b_0 \\
 & & s_{s-2} & b_{s-3} & b_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_1 & b_0 \\
= & & \multicolumn{2}{c}{(2\cdot s_{s-2}+b_{s-3})} & b_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_1 & b_0 \\
 & & & s_{s-3} & b_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_1 & b_0 \\
= & & & \multicolumn{2}{c}{(2\cdot s_{s-3}+b_{s-4})} & b_{s-5} & \cdots & b_1 & b_0 \\
 & & & & s_{s-4} & b_{s-5} & \cdots & b_1 & b_0 \\
 & & & & \multicolumn{2}{c}{(2\cdot s_{s-4}+b_{s-5})} & \cdots & b_1 & b_0 \\
 & & & \cdots & & & \cdots & b_1 & b_0
\end{array}
$$

Rekurzivno množenje i pribrajanje

- Hornerova shema:
  - osnovni korak: $s_{s-1} = a_{s-1}$
  - korak rekurzije: $s_{i-1} = 2 \cdot s_i + a_{i-1}$

$$
\begin{aligned}
s_{s-1} &= a_{s-1} \\
s_{s-2} &= 2 \cdot s_{s-1} + a_{s-2} \\
&= 2 \cdot a_{s-1} + a_{s-2} \\
s_{s-3} &= 2 \cdot s_{s-2} + a_{s-3} \\
&= 2^2 \cdot a_{s-1} + 2^1 \cdot a_{s-2} + a_{s-3} \\
s_{s-s} &= 2^{s-1} \cdot a_{s-1} + \cdots + 2^{s-s} \cdot a_{s-s} \\
&= \sum_{0}^{s-1} a_i \cdot 2^i
\end{aligned}
$$

1	1	0	1
-	2	6	12
1	3	6	13

Rekurzivno množenje i pribrajanje

Primjer: $10011101_2 \rightarrow ?_{10}$

$$\left(\left(\left(1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1\right) \cdot 2 + 1\right) \cdot 2 + 1\right) \cdot 2 \cdot 2 + 1 =$$
$$\left(\left(9 \cdot 2 + 1\right) \cdot 2 + 1\right) \cdot 2 \cdot 2 + 1 =$$
$$\left(19 \cdot 2 + 1\right) \cdot 2 \cdot 2 + 1 =$$
$$39 \cdot 2 \cdot 2 + 1 = 157_{10}$$

- postupak vrijedi za *cijele* brojeve

Oktalni i heksadekadski sustav

- pozicijski brojevni sustavi, baza 8 odnosno 16
- baza = potencija broja 2
  ~ jednostavna pretvorba u binarni sustav
- veća baza
  ~ manji broj znamenaka za zapis broja
- *oktalni* sustav:
  - znamenke 0-7
  - prikaz nizom od 3 bita

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Oktalni i heksadekadski sustav

$$\mathit{Primjer}: 101111011001100_2 \rightarrow ?_8$$

101	111	011	001	100
5	7	3	1	4

$$101111011001100_2 = 57314_8$$

$$\mathit{Primjer}: 765432_8 \rightarrow ?_2$$

7	6	5	4	3	2
111	110	101	100	011	010

$$765432_8 = 111110101100011010_2$$

Heksadekadski sustav

- baza sustava 16:
  znamenke 0 - "15", tj. 0-9, A, B,..., F
- znamenka ~ 4 bita = 1/2 okteta
- vrlo rasprostranjen brojevni sustav:
  - sažeti zapis binarnog:
    2 heksa znamenke ~ 1 oktet
  - jednostavna pretvorba

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	0100
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Heksadekadski sustav

$Primjer: 01011110001110011100_2 \rightarrow ?_{16}$

0101 1110 0011 1001 1100
5 E 3 9 C

$01011110001110011100_2 = 5E39C_{16}$

$Primjer: 76A4C2_{16} \rightarrow ?_2$

7 6 A 4 C 2
0111 0110 1010 0100 1100 0010

$76A4C2_{16} = 011101101010010011000010_2$

Sadržaj predavanja

- tipovi i prikaz podataka
- brojevni sustavi
- **binarna aritmetika**
  - **binarno zbrajanje**
  - **binarno oduzimanje**
- modul i komplementi brojeva
- binarno množenje

Binarna aritmetika

- binarna aritmetika
  ~ aritmetičke operacije u binarnom sustavu (zbrajanje, oduzimanje, množenje, ...)
  - specifičnosti u odnosu na dekadsku aritmetiku
  - binarno zbrajanje
    ~ osnovna operacija u digitalnim sustavima (računalima)

Binarna aritmetika

- binarno zbrajanje
  - najjednostavnije
    ~ zbrajanje *dviju* binarnih znamenki:
    suma *mod 2* : operator ⊕

$$\begin{array}{r} 0 \\ +0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +1 \\ \hline 1\,|\,0 \end{array}$$

C: prijenos

S: suma

b \ a	0	1
0	0	1
1	1	10

  - rezultat: 2_{10} = **1**0_2
    ~ pojava *prijenosa* (engl. carry) na višu bitovnu poziciju
  - oznake:
    S : suma, zbroj ; C : prijenos

Binarna aritmetika

- binarno zbrajanje dvaju binarnih *brojeva* :
  - općenito *n*-bitni binarni *brojevi*
  - prijenos pribrojiti višoj bitovnoj poziciji
    ~ zbrajanje *triju* binarnih znamenki

$$
\begin{array}{rccccl}
 & & 3 & 7 & 8 & \\
 & + & & 2 & 7 & \\
\hline
1. & & 3 & 9 & 5 & :S \\
 & + & & 1 & & :C \\
\hline
2. & & 3 & 0 & 5 & :S \\
 & + & 1 & & & :C \\
\hline
 & & 4 & 0 & 5 &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccccccccccl}
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
\oplus & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S_1 \\
\oplus & & & & & 1 & 1 & & 1 & & & C_1 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & S_2 \\
\oplus & & & & 1 & & & & & & & C_2 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & S_3 \\
\oplus & & & 1 & & & & & & & & C_4 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Binarna aritmetika

- binarno zbrajanje dvaju binarnih *brojeva* :
  - *n*-bitni binarni *brojevi*
    ~ općenito promatrati *i*-ti bit

    $S_i = A_i \oplus B_i \oplus C_{i-1}$

    $C_i = ?$
  - posebna tablica zbrajanja

    Primjer : prethodni

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\
+ \qquad\qquad 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
\hline
1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1
\end{array}
$$

?

A_i	B_i	C_{i-1}	S_i	C_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Binarna aritmetika

- binarno oduzimanje dvaju binarnih *znamenki* :
  - diferencija = minuend – suptrahend

minuend	0	1	1	0
suptrahend	−0	−0	−1	−1
	0	1	0	1 | 1

C: posudba

D: diferencija

b \ a	0	1
0	0	1
1	11	0

Binarna aritmetika

- binarno oduzimanje dvaju binarnih *brojeva* :
  - *n*-bitni binarni *brojevi*
    ~ općenito promatrati *i*-ti bit
  - diferencija = suma !!!

    $D_i = A_i \oplus B_i \oplus C_{i-1}$

    $C_i = ?$
  - posebna tablica oduzimanja
  - stvarna izvedba
    ~ pribrajanje komplementa broja
    (vidi kasnije)

A_i	B_i	C_{i-1}	D_i	C_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Sadržaj predavanja

- tipovi i prikaz podataka
- brojevni sustavi
- binarna aritmetika
- **modul i komplementi brojeva**
  - **prikaz brojeva u modulu**
  - **komplementi brojeva**
  - **zbrajanje i oduzimanje komplementom**
- binarno množenje

Prikaz brojeva u modulu

- digitalni sustavi (računala):
  - pohranjivanje brojeva u *registrima*

D_{n-1}	D_{n-2}	D_{n-3}	······	D_2	D_1	D_0

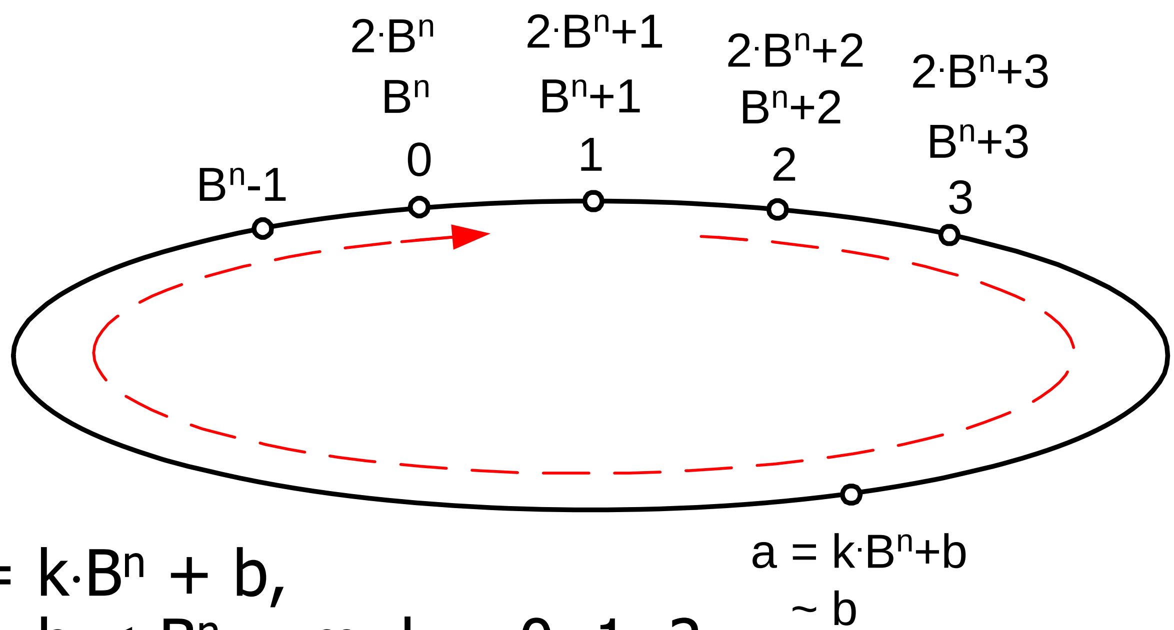
  - ograničeni broj mjesta
    ~ *n*-znamenkasti brojevi
  - broj mogućih *n*-znamenkastih brojeva
    kod baze B:

    $B^n = m$: *modul* ~ broj stanja registra,
    "kapacitet" registra od n mjesta

    $W = B^n - 1$: najveći *n*-znamenkasti broj

Prikaz brojeva u modulu

- prikaz *n*-znamenkastih brojeva:
  - ograničenje na brojeve < m = B^n
  - grafički prikaz ~"brojna kružnica"



- uočiti: $a = k \cdot B^n + b$,
  $b < B^n = m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$b = a \pmod{m}$$

Prikaz brojeva u modulu

- prikaz *n*-znamenkastih brojeva:
  - interpretacija relacije

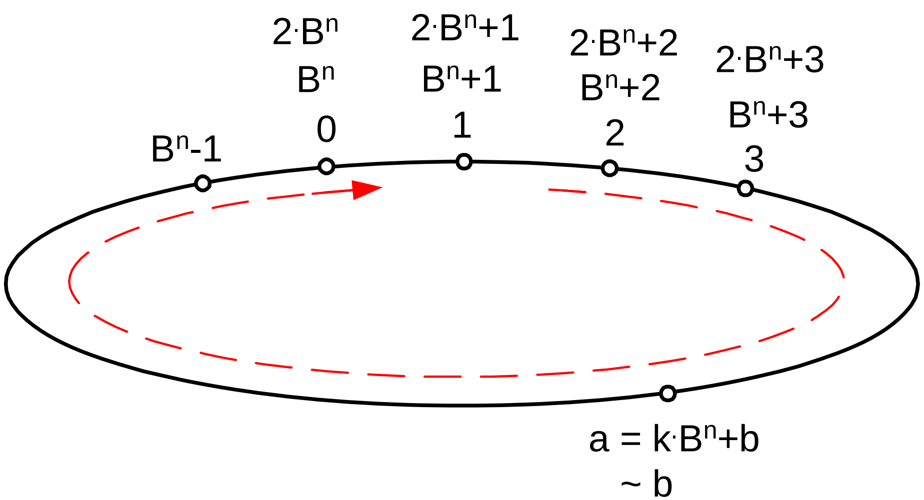
    b = a (mod m)

    "b je ostatak dijeljenja broja a s modulom m"

    Primjeri :

    23 mod 17 = 6

    35 mod 16 = 3



Modulo-aritmetika

- umjesto jednakosti relacija *kongruencije,* $\equiv$
  - npr. za m = 10:

    $$1 \equiv 1 \equiv 11 \equiv -9 \equiv 21 \equiv -19 \equiv \dots$$

  - općenito:

    $$a \equiv a + k \cdot 10, \quad k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Primjer: zbrajanje i oduzimanje mod 10:

$$4 + 5 \equiv 9 \equiv 19 \equiv -1 \equiv \dots \qquad 5 - 4 \equiv 1 \equiv 11 \equiv -9 \equiv \dots$$

$$5 + 5 \equiv 0 \equiv 10 \equiv -10 \equiv \dots \qquad 5 - 5 \equiv 0 \equiv 10 \equiv -10 \equiv \dots$$

$$6 + 5 \equiv 1 \equiv 11 \equiv -9 \equiv \dots \qquad 5 - 6 \equiv 9 \equiv 19 \equiv -1 \equiv \dots$$

Modulo-aritmetika

- zapis proizvoljnog izraza:
  radi jasnoće se na kraju izraza piše (mod *m*)

  npr. $5 \equiv 15 \pmod{10}$

- algebarski izrazi, npr:

  $$a \equiv b + 2 \pmod{10}$$

  jednadžbu zadovoljavaju:

  $$a = b + 2,\ b - 8,\ b + 12,\ b - 18,\ \ldots$$

Komplementi brojeva

- komplementi brojeva:
  - u odnosu na modul brojevnog sustava $m = B^n$
    ~ u odnosu na broj mjesta n za prikaz brojeva u registru
  - u odnosu na najveći n-znamenkasti broj $W = B^n - 1$
- značaj komplementa brojeva:
  - pojednostavljivanje obavljanja aritmetičkih operacija
  - npr. korištenje istog sklopovlja
    za obavljanje zbrajanja i oduzimanja

Komplementi brojeva

- $\forall\ a,\ 0 \leq a < m,\ \exists$ *komplement* $\overline{a}$:

$$a + \overline{a} = m$$

- komplement srodan pojmu *suprotnog* broja ($-a$):

$$a + (-a) = 0$$

$$a + \overline{a} \equiv 0 \pmod{m}$$

Komplementi brojeva

- korist od komplementa:
  - oduzimanje pretvara u zbrajanje!

$$a-b=a-b+0\equiv a-b+\left(b+\overline{b}\right)=a+\overline{b}$$

$$a-b\equiv a+\overline{b}$$

  - omogućuje korištenje istog sklopovlja za zbrajanje *i* oduzimanje

Komplementi brojeva

- *B-komplement*
  - ~ komplement u odnosu na $m = B^n$:

$$\overline{N}_B \equiv B^n - N = m - N = W - N + 1$$

B = 10: *10-komplement*

n= 2: $\overline{(35)}_{10} = 10^2 - 35 = 65$

n= 3: $\overline{(35)}_{10} = 10^3 - 35 = 965$

- B = 2: *2-komplement*

$$\overline{(010101)}_2 = 2^6 - 010101 = 1000000 - 010101 = 101011$$

- vrijedi: komplement komplementa je sam broj

$$\overline{\overline{N}}_B = \left(\overline{B^n - N}\right)_B = B^n - \left(B^n - N\right) = N$$

Komplementi brojeva

- praktični algoritam za dobivanje 2-komplementa:

  "Počev od najmanje značajnog bita broja, invertirati svaki bit nakon prve 1."

  Primjer:

  $00010110 \rightarrow$ 11101010

  $00100101 \rightarrow$ 11011011

Komplementi brojeva

- (B-1)-komplement
  ~ komplement u odnosu na W

$$\overline{N} \equiv B^n - N - 1 = \overline{N}_B - 1 = W - N$$

  - B = 10: *9-komplement*

    n = 2: $\overline{(35)} = 10^2 - 35 - 10^0 = 64 = \left(10^2 - 10^0\right) - 35 = 99 - 35$

    n = 3: $\overline{(35)} = 10^3 - 35 - 10^0 = 964 = \left(10^3 - 10^0\right) - 35 = 999 - 35$

  - B = 2: 1-komplement

$$\overline{(010101)} = 2^6 - 010101 - 1 = 111111 - 010101 = 101010$$

Komplementi brojeva

- dobivanje (B-1)-komplementa:
  - *svaku znamenku* broja oduzeti od W = B – 1
  - dobivanje 1-komplementa
    ~ *komplementiranje* (inverzija) pojedinih bitova:
    vrlo jednostavna sklopovska izvedba!
- dobivanje 2-komplementa iz 1-komplementa:

$$\overline{B_2} = \overline{B_1} + 1$$

- u odnosu na B-komplement je kod (B-1)-komplementa znamenka najmanje težine umanjena za 1

Oduzimanje komplementom

- razlika D = M – S za *binarne* brojeve:
  ~ računanjem komplementa:
  - 1-komplement ~ komplement svih pojedinačnih bitova
  - 2-komplement ~ 1-komplement + 1
- potreban sklop koji podržava:
  - zbrajanje
  - komplementiranje (inverziju) svih bitova u broju
- u nastavku:
  oduzimanje komplementom u *proizvoljnoj* bazi B

Oduzimanje B-komplementom

- oduzimanje B-komplementom:
  računanje $M + \overline{S}_B$ sklopom!

  $$M + \overline{S}_B = M + \left(B^n - S\right) = \left(M - S\right) + B^n = D + B^n$$

  $$D = \left(M + \overline{S}_B\right) - B^n$$

  $$D \equiv M + \overline{S}_B$$

- dva slučaja:
  - M > S $\Rightarrow$ D > 0
  - M < S $\Rightarrow$ D < 0

Oduzimanje B-komplementom

- $M > S \;\Rightarrow\; D > 0$

$$M + \overline{S}_B = M + B^n - S = D + B^n = D + W + 1 > W$$

  - $M + \overline{S}_B > W$: *preljev* (engl. overflow)
    ~ zanemaruje se!
  - sadržaj registra: $M + \overline{S}_B - B^n \equiv M + \overline{S}_B$
  - znamenka najviše težine B^n *nije upisana*
    ~ bila bi n+1 znamenka!
  - preljev narušava jednakost, ali ne i kongruenciju!
  - sadržaj registra je upravo traženi rezultat:

$$\left(M + \overline{S}_B\right) - B^n = \left(D + B^n\right) - B^n = D$$

Oduzimanje B-komplementom

Primjer: B = 2, n = 8 (8-bitno binarno računalo)

$$W = B^n - 1 = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$$

D = 3 – 2 $\Rightarrow$ M = 3, S = 2

$$\overline{S}_B = B^n - S = 256 - 2 = 254$$

$$M + \overline{S}_B = 3 + 254 = 257 > W$$

preljev!

$$257 \equiv 1$$

broj u registru!

Oduzimanje B-komplementom

- registri: A = 3, B = 2

A: 00000011   B: 00000010 $\overline{B}_2 = 11111110$

$A + \overline{B}_2$:

$$
\begin{array}{r}
\boxed{00000011} \\
+\ \boxed{11111110} \\
\hline
1\ \boxed{00000001}
\end{array}
$$

traženi rezultat

ne stane u registar – preljev!

složenost operacije:
2 x zbrajanje
1 x inverzija bitova

Oduzimanje B-komplementom

- $M < S \;\Rightarrow\; D < 0$

$$M + \overline{S}_B = D + B^n = D + W + 1 \le W$$

  - $M + \overline{S}_B \le W$: *nema* preljeva
  - sadržaj registra: $M + \overline{S}_B$
  - oduzimanje B^n od rezultata: $D = \left(M + \overline{S}_B\right) - B^n$
    - oduzeti komplement
    - negativni predznak

$$\begin{aligned} D &= \left(M + \overline{S}_B\right) - B^n \\ &= -\left(B^n - \left(M + \overline{S}_B\right)\right) \\ &= -\left(B^n - X\right) \\ &= -\overline{X}_B \\ &= -\overline{\left(M + \overline{S}_B\right)}_B \end{aligned}$$

Oduzimanje B-komplementom

- registri: A = 2, B = 3

A: 00000010   B: 00000011 $\overline{B}_2 = 11111101$

$$
\begin{aligned}
A + \overline{B}_2: \quad & \left|\overline{\underline{00000010}}\right| \\
+ & \left|\overline{11111101}\right| \\
\hline
& \left|\overline{\underline{\underline{11111111}}}\right| \longleftarrow
\end{aligned}
$$

novi sadržaj registra A

$$-\overline{(11111111)}_2 = -00000001$$

traženi rezultat

složenost operacije:
3 x zbrajanje
2 x inverzija bitova

Oduzimanje B-komplementom

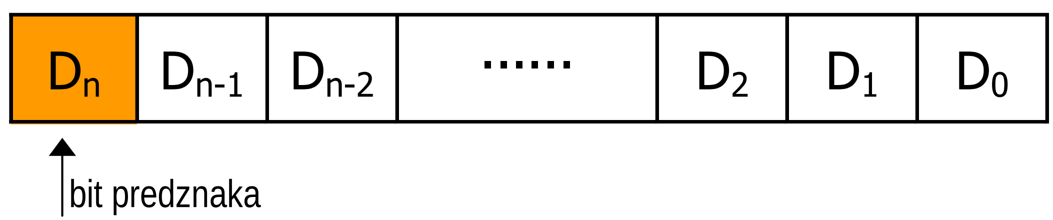
- *algoritam* oduzimanja B-komplementom:
  - pribrojiti minuendu komplement suptrahenda
  - ako se pojavi preljev, to je rezultat
  - ako nema preljeva, još jednom komplementirati te promijeniti predznak

Operacije nad brojevima s predznakom

- prikaz negativnih brojeva:
  - predznak i veličina
  - predznak i 2-komplement
  - predznak i 1-komplement
- *zapis brojeva s predznakom*:
  - veličina broja ~ iznos
  - *predznak*
    ~ još jedan bit: najznačajniji (najlijeviji) bit
  - tipično:

    0 : "+"

    1 : "-"



Prikaz brojeva s predznakom

- prikaz brojeva *predznakom* i *veličinom*:
  - odvojeno manipuliranje predznaka i veličine
  - relativno složeno izvođenje računskih operacija
  - problem "negativne nule"

Primjer: prikaz jednim oktetom

$$+63 = 00111111 \qquad -63 = 10111111$$

$$+114 = 01110010 \qquad -114 = 11110010$$

$$+0 = 00000000 \qquad -0 = 10000000$$

Prikaz brojeva s predznakom

- prikaz brojeva *predznakom* i *2-komplementom*:
  - pozitivni brojevi: predznak i veličina
  - negativni brojevi: predznak i 2-komplement
  - komplementiranje predznaka i veličine zajedno
  - *nema* problema "negativne nule"
    ~ nula je *jedinstvena* !

Primjer: prikaz jednim oktetom

$$+63 = 00111111 \qquad -63 = 11000001$$

$$+114 = 01110010 \qquad -114 = 10001110$$

$$+0 = 00000000 \qquad -0 = 00000000$$

Prikaz brojeva s predznakom

- prikaz brojeva *predznakom* i *1-komplementom*:
  - slično prikazu predznakom i 2-komplementom ~ komplementiranje predznaka i veličine *zajedno*
  - (također!) problem "negativne nule"

Primjer: prikaz jednim oktetom

$$+63 = 00111111 \qquad -63 = 11000000$$

$$+114 = 01110010 \qquad -114 = 10001101$$

$$+0 = 00000000 \qquad -0 = 11111111$$

Usporedba 1 i 2 komplementa

- prikaz predznakom i 2-komplementom praktičniji!
  - *nema* "negativne nule"
  - asimetrični raspon pozitivnih i negativnih brojeva ~ nula je "pozitivna"

broj	predznak i veličina	2-komplement	1-komplement
-8	-	1000	-
-7	1111	1001	1000
-6	1110	1010	1001
-5	1101	1011	1010
-4	1100	1100	1011
3	1011	1101	1100
-2	1010	1110	1101
-1	1001	1111	1110
0	0000 ili 1000	0000	0000 ili 1111
1	0001	0001	0001
2	0010	0010	0010
3	0011	0011	0011
4	0100	0100	0100
5	0101	0101	0101
6	0110	0110	0110
7	0111	0111	0111

Aritmetički preljev

- zbrajanje u 2-komplementu
  ~ moguća pojava *aritmetičkog* preljeva
  (engl. arithmetic overflow) zbog "nedostatka" 1 bita
  - pribrojnici istog predznaka (+ ili –),
    a predznak rezultata se razlikuje (– ili +)
  - suma premašuje broj mjesta veličine (n-1)
  - potreba detekcije aritmetičkog preljeva

Primjer: 7 + 4

	0111	+7
+	0100	+4
	1011	-5

POGREŠNO

	00111	+7
+	00100	+4
	01011	+11

Aritmetički preljev

- oduzimanje u 2-komplementu
  - kod dobivanja suptrahenda 2-komplementa moguća promjena predznaka!
  - 2-komplement suptrahenda pribrojiti minuendu

Primjer:

$$\begin{array}{rr} & 1011 \\ - & 1001 \\ \hline & 1011 \\ + & 0111 \\ \hline 1 & 0010 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1001 \\ - & 1011 \\ \hline & 1001 \\ + & 0101 \\ \hline & 1110 \end{array}$$

preljev se zanemaruje

nema preljeva!
(rezultat je negativan:
1 na najznačajnijem mjestu)

Sadržaj predavanja

- tipovi i prikaz podataka
- brojevni sustavi
- binarna aritmetika
- modul i komplementi brojeva
- **binarno množenje**

Binarno množenje

- *binarno množenje*
  ~ prema pravilima za dekadsko množenje:

			multiplikand				multiplikator
			1	1	0	×	0 1 0
			0	0	0		parcijalni
		1	1	0			produkti
+	0	0	0				
	0	1	1	0	0		produkt

Binarno množenje

- mogućnosti ostvarivanja binarnog množenja:
  - uzastopna zbrajanja
  - parcijalna množenja s 2 (~ "posmak") i zbrajanje

$M = m_3 m_2 m_1 m_0 \rightarrow$ multiplikand

$N = n_3 n_2 n_1 n_0 \quad \rightarrow$ multiplikator

$$M \times N = M \cdot \left(n_3 \cdot 2^3 + n_2 \cdot 2^2 + n_1 \cdot 2^1 + n_0 \cdot 2^0\right)$$
$$= M \cdot n_3 \cdot 2^3 + M \cdot n_2 \cdot 2^2 + M \cdot n_1 \cdot 2^1 + M \cdot n_0 \cdot 2^0$$
$$= \sum_{i=0}^{3} M \cdot n_i \cdot 2^i$$

  - efikasnije primjenom *Hornerove sheme*:

$$M \times N = \left(\left(M \cdot n_3 \cdot 2 + M \cdot n_2\right) \cdot 2 + M \cdot n_1\right) \cdot 2 + M \cdot n_0, n_i \in \{0,1\}$$

Binarno množenje

Primjer: množenje 4-bitnih brojeva

$$M = 1011_2 \equiv 11_{10}$$

$$\underline{N = 1001_2 \equiv 9_{10}}$$

$$P = M \times N = 01100011_2 \equiv 99_{10}$$

$$P = M \times N = \left(\left(M \cdot n_3 \cdot 2 + M \cdot n_2\right) \cdot 2 + M \cdot n_1\right) \cdot 2 + M \cdot n_0,\ n_i \in \{0,1\}$$

$n_0 = 1$ →				1	0	1	1
				1	0	1	
$n_1 = 0$ →			0	0	0	0	
			0	1	0		
$n_2 = 0$ →		0	0	0	0		
		0	0	1			
$n_3 = 1$ →	1	0	1	1			
produkt:	1	1	0	0	0	1	1

Literatura

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 2: Digitalni podaci: tipovi, operacije, algoritmi

- tipovi i prikaz podataka
- brojevni sustavi: str. 31-42
- binarna aritmetika: str. 42-45
- modul i komplementi brojeva: str. 45-56
- binarno množenje: str. 56-57