4. Minimizacija Booleovih izraza

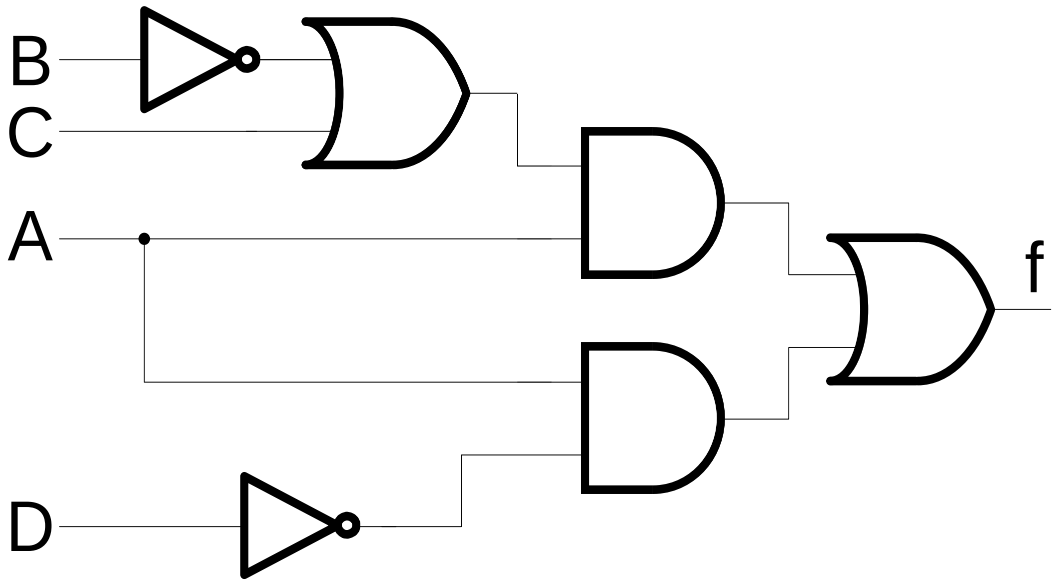
Sadržaj predavanja

- **minimum Booleove funkcije**
- K tablice
- minimizacija K tablicama
- vremenski hazard
- implikanti i minimalna suma
- minimizacija višeizlazne funkcije
- Quine-McCluskeyeva metoda

Minimum Booleove funkcije

- podsjetiti se:
  - Booleova funkcija je *opis* digitalnog sklopa:
    - operator ⇔ osnovni logički sklop
    - izraz koji utvrđuje Booleovu funkciju ⇔ sklop

Primjer: $f = A \cdot (\overline{B} + C) + A \cdot \overline{D}$



Minimum Booleove funkcije

- želja:
  - pojednostavljivanje sklopa
    ~ najjednostavniji sklop pokazuje niz pogodnosti:
    - tehnički razlozi
      ~ potrošnja, disipacija, ...
    - ekonomski razlozi
      ~ cijena sklopova, prostor na pločici, ...
  - pojednostavljivanje sklopa ⇔ pojednostavljivanje izraza
    ~ postići *minimalno* ostvarenje dane Booleove funkcije:
    - "jednostavan" sklop = ?
      ~ kriteriji jednostavnosti
    - mjere složenosti sklopa?

Minimum Booleove funkcije

- kriteriji jednostavnosti *kontradiktorni* ~ uobičajeno u inženjerskoj praksi!
  - najjeftinije ostvarenje ~ min broj standardnih sklopova ili izvoda/kućišta standardnih *modula* (komponenti)
    - eventualni porast broja razina logike ~ zapis "funkcije višeg reda"
    - *faktorizacija* ~ dekompozicija u češće korištene komponentne funkcije $\longrightarrow$ $f = A\cdot(\overline{B}+C)+A\cdot\overline{D}$
    - vrijeme propagacije signala *nije minimalno*!
  - najveća brzina rada sklopa ~ *funkcija drugog reda*: dvije razine logike (ILI-I, NI-NI, ...) $\longrightarrow$ $f = A\cdot\overline{B}+A\cdot C+A\cdot\overline{D}$

Minimum Booleove funkcije

- mjere složenosti digitalnog sklopa:
  - brzina rada ~ broj razina "logike"
  - broj utrošenih primitivnih sklopova:
    - bez ograničenja
    - izvedba *u dvije razine*
  - broj utrošenih primitivnih sklopova
    + ukupan broj ulaza u logičke sklopove
    - bez ograničenja
    - izvedba *u dvije razine*

Minimum Booleove funkcije

- *minimizacija* (engl. minimization) izraza koji prikazuje Booleovu funkciju
  ~ pronaći onaj izraz koji minimizira odabranu mjeru složenosti:

"za zadanu funkciju od *n* varijabli iz skupa 2^{2^n} njih, odrediti onaj izraz, unutar velikog broja ekvivalentnih, koji će zadovoljiti neke od kriterija jednostavnosti"

Minimum Booleove funkcije

- standardni postupak minimizacije
  ~ primjena na funkcije drugog reda:

  "Neki se izraz drugog reda u obliku sume produkata smatra minimalnim – *minimiziranim* – ako ne postoji:

  - niti jedan drugi ekvivalentni izraz s manje produkata,
  - niti jedan drugi ekvivalentni izraz s istim brojem produkata, ali manjim brojem literala."

  literal = {varijabla | komplement}

Minimum Booleove funkcije

- sintaksne manipulacije Booleovog izraza radi postizanja minimalnog izraza
  ~ *algebarska minimizacija*:
  - transformacija funkcije zamjenom jednog njenog oblika (izraza) drugim, uzastopnom primjenom postulata i teorema Booleove algebre
  - *ne postoji* sustavan postupak koji vodi do minimuma

Minimum Booleove funkcije

Primjer: $f(A,B,C) = B\overline{C}(\overline{C} + \overline{C}A) + (\overline{A} + \overline{C})(\overline{A}B + \overline{A}C)$

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= B\overline{C}(\overline{C} + \overline{C}A) + (\overline{A} + \overline{C})(\overline{A}B + \overline{A}C) \\
&= B\overline{C} \cdot \overline{C} \cdot (1 + A) + (\overline{A} + \overline{C}) \cdot \overline{A} \cdot (B + C) \\
&= B \cdot (\overline{C} \cdot \overline{C}) \cdot (1 + A) + \overline{A} \cdot (\overline{A} + \overline{C}) \cdot (B + C) \\
&= B\overline{C} \cdot 1 + \overline{A} \cdot (B + C) \\
&= B\overline{C} + \overline{A}B + \overline{A}C \\
&= B\overline{C} + \underline{\overline{A}B \cdot (C + \overline{C})} + \overline{A}C \\
&= B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}C \\
&= (B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}) + (\overline{A}BC + \overline{A}C) \\
&= B\overline{C}(1 + \overline{A}) + \overline{A}C(B + 1) \\
&= B\overline{C} \cdot 1 + \overline{A}C \cdot 1 \\
&= \overline{A}C + B\overline{C}
\end{aligned}
$$

Sadržaj predavanja

- minimum Booleove funkcije
- **K tablice**
- minimizacija K tablicama
- vremenski hazard
- minimizacija višeizlazne funkcije
- Quine-McCluskeyeva metoda

K tablice

- grafički prikaz Booleovih funkcija:
  - tablica u 2-dimenzijskom obliku
  - polja
    ~ standardni članovi (produkti/sume)
  - "razlika" grafički susjednih polja u samo jednoj varijabli!

A	B	f
0	0	α_0
0	1	α_1
1	0	α_2
1	1	α_3

$\Rightarrow$

f(A,B)

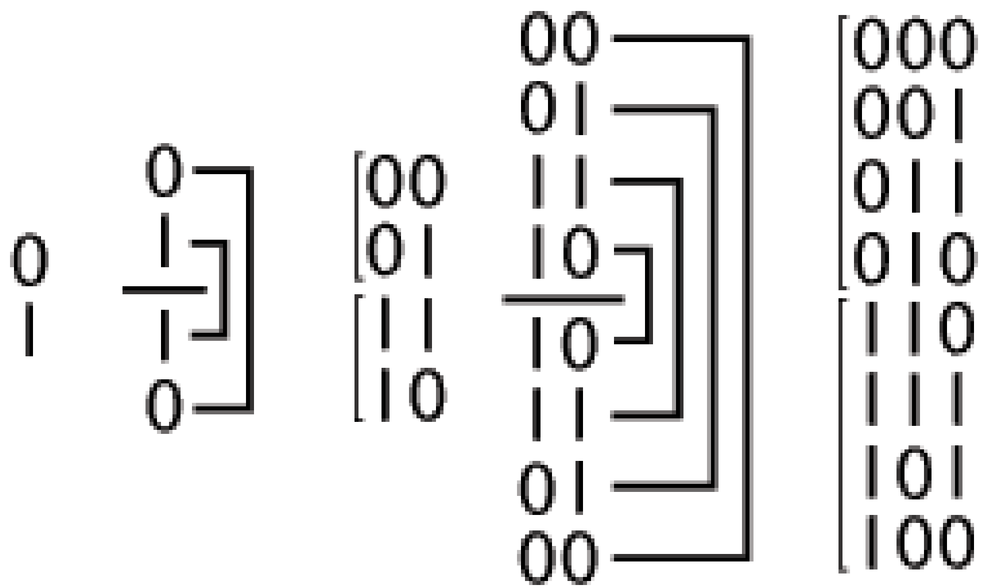
B \ A	0	1
0	α_0	α_2
1	α_1	α_3

K tablice

- *K-tablice* (Karnaughove tablice), M. Karnaugh, 1953:
  - grafičke strukture s 2^n polja za prikaz $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - označavanje polja
    ~ "pravokutne koordinate", Grayev kod ($d_{min} = 1$)
  - minimizacija
    ~ "grupiranje" polja:
      temeljeno na ljudskoj sposobnosti raspoznavanja uzoraka (1 i 0)
  - K-tablice za $n > 2$ varijable
    ~ simetrija oko jedne stranice, superpozicija
  - praktična primjena: $n \leq 6$

K tablice

- podsjetnik: Grayev kod



K tablice

- izgradnja K tablice:

f(A,B)

B \ A	0	1
0	0	2
1	1	3

f(A,B,C)

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

f(A,B,C,D,E)

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

f(A,B,C,D,E)

DE \ ABC	000	010	110	100	001	011	111	101
00	0	8	24	16	4	12	28	20
01	1	9	25	17	5	13	29	21
11	3	11	27	19	7	15	31	23
10	2	10	26	18	6	14	30	22

K tablice

- *susjednost* polja:

f(A,B,C,D) AB

CD	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

$$13 = 1101 \equiv AB\overline{C}D \quad \rightarrow \quad \begin{array}{lcl} 12 = 1100 \equiv AB\overline{C}\,\overline{D} & : & D \equiv 2^0 \\ 15 = 1111 \equiv ABCD & : & C \equiv 2^1 \\ 09 = 1001 \equiv A\overline{B}\,\overline{C}D & : & B \equiv 2^2 \\ 05 = 0101 \equiv \overline{A}B\overline{C}D & : & A \equiv 2^3 \end{array}$$

K tablice

- upisivanje funkcija u K-tablice:
  - funkcija u obliku sume minterma, Σm_i:
    1 za svaki m_i
  - funkcija u obliku produkta maksterma, ΠM_i:
    0 za svaki M_i, ostalo su 1 (1 se pišu, 0 se *ne* pišu!)
  - *nepotpuno specificirane funkcije*
    (engl. incompletely specified functions):
    - parcijalne funkcije
    - neke kombinacije argumenata se *ne pojavljuju*
      ~ funkcijska vrijednost *nije specificirana*,
      X (engl. don't care)
    - X se interpretiraju onako
      kako najbolje odgovara pri minimizaciji ($\rightarrow$ "joker") !

K tablice

Primjer: $z = f\left(A, B, C, D\right)$

$$= \sum m\left(4,5,13,14,15\right) + \sum d\left(1,3,7,8,12\right)$$

f(A,B,C,D) AB

CD	00	01	11	10
00		1	x	x
01	x	1	1	
11	x	x	1	
10			1	

K tablice

- prikaz "složene" Booleove funkcije
  ~ osnovne operacije nad Booleovim funkcijama:
  - jednostavno dobivanje rješenja *kombiniranjem* pripadnih K tablica
  - kombiniranje K tablica
    ~ kombiniranje *pojedinih polja* K-tablica funkcija

K tablice

$$Primjer: \quad h = f \oplus g = \overline{f} \cdot g + f \cdot \overline{g}$$

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10			1	1

g(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00		1	1	1
01		1	1	
11			1	
10		1	1	

h(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01	1			
11	1	1		
10		1		1

Sadržaj predavanja

- minimum Booleove funkcije
- K tablice
- **minimizacija K tablicama**
- vremenski hazard
- implikanti i minimalna suma
- minimizacija višeizlazne funkcije
- Quine-McCluskeyeva metoda

Minimizacija K tablicama

- postupak minimizacije za funkcije u obliku *sume produkata*:
  - "zaokruživanje" uzoraka 2^i susjednih polja s 1 ~ "eliminiranje" *i* varijabli
    - par polja: 1 varijabla (T9: simplifikacija)

$$f(a,b,c,\ldots) = a \cdot \varphi(b,c,\ldots) + \overline{a} \cdot \varphi(b,c,\ldots)$$
$$= (a + \overline{a}) \cdot \varphi$$
$$= \varphi$$

    - četvorka polja: 2 varijable
    - osmorka polja: 3 varijable
    - itd. (ako ide ☺)

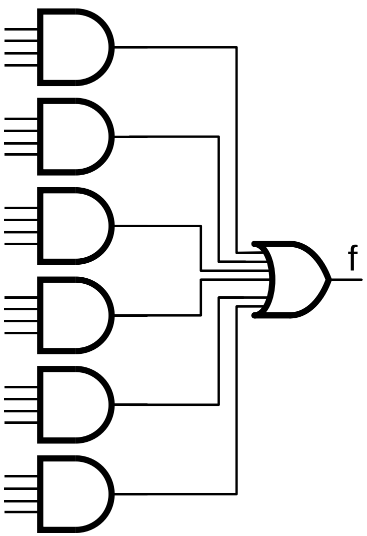
Minimizacija K tablicama

- postupak minimizacije za funkcije u obliku sume produkata:
  - "zaokruženje"
    ~ produkt, ali više *nije standardni*
  - inkluzivna disjunkcija zaokruženja
    ~ suma produkata (= funkcija drugog reda)
  - težnja
    ~ pronaći *minimalnu* sumu:
    - što manji broj zaokruženja
      ~ manji broj I sklopova = manji broj ulaza u ILI sklop
    - što veći broj 1 u zaokruženju
      ~ I sklop s manjim brojem ulaza

Minimizacija K tablicama

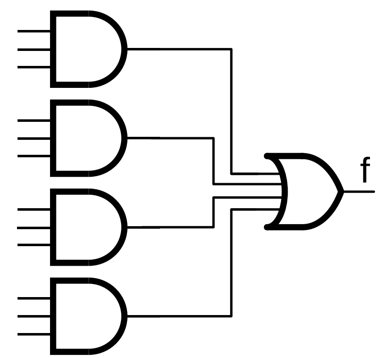
Primjer: $f(A,B,C,D)=\sum m(5,6,9,10,13,14)$

$$f(A,B,C,D)= \\ =\sum m(5,6,9,10,13,14) \quad \Rightarrow \quad f(A,B,C,D)= \\ =B\overline{C}D+A\overline{C}D+BC\overline{D}+AC\overline{D}$$



f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11				
10		1	1	1



Minimizacija K tablicama

- postupak minimizacije *nepotpuno specificirane funkcije* u obliku sume produkata:
  - nužno je prekriti sve 1,
    ali ne i sve X
  - X se interpretira kao 1 (X = 1)
    samo ako se time može proširiti zaokruženje (→ *joker*!)
  - veće zaokruženje
    ~ jednostavniji Booleov izraz = jednostavniji sklop!

Minimizacija K tablicama

Primjer: $f = \sum m(2,5,15) + \sum d(0,1,3,4,7,9,13,14)$

$$f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + ABCD$$

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00	X	X		
01	X	1	X	X
11	X	X	1	
10	1		X	

$$f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + BD$$

Minimizacija K-tablicama

- *preljevanje* zaokruženja preko rubova:

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01	1			1
11				
10				

$$f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D$$
$$= \overline{B}\,\overline{C}D$$

Minimizacija K tablicama

- minimizacija funkcije u obliku *produkta maksterma*
  - isti postupak, samo se zaokružuju 0
  - rezultat je produkt suma
  - "čitanje" zaokruženja 0 kao sume produkata ~ *komplement* funkcije

Minimizacija K tablicama

Primjer: $f = \prod M(5,7,15)$

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

$$f(A,B,C,D) = \left(A+\overline{B}+\overline{D}\right)\cdot\left(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}\right)$$

$$= \ldots$$

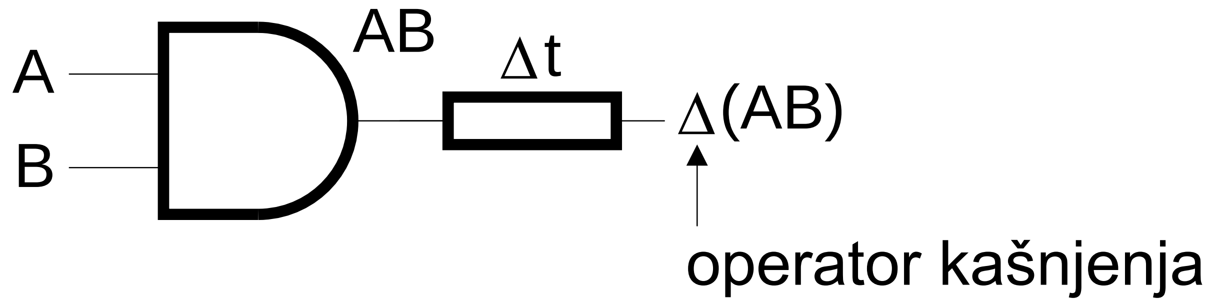
$$= A\overline{C}+\overline{B}+\overline{D}$$

Sadržaj predavanja

- minimum Booleove funkcije
- K tablice
- minimizacija K tablicama
- **vremenski hazard**
- implikanti i minimalna suma
- minimizacija višeizlazne funkcije
- Quine-McCluskeyeva metoda

Vremenski hazard

- zapažanje:
  - *stvarni* (kombinacijski) sklopovi posjeduju svojstveno kašnjenje (t_d)!
  - promatrati ostvarenu logičku funkciju + t_d



  - *moguće* neočekivano ponašanje sklopa u *prijelaznoj pojavi*

Vremenski hazard

- *vremenski hazard*
  ~ neželjeni impulsi kao rezultat:
  - kašnjenja stvarnih sklopova
  - konkretnog dizajna složenijeg sklopa
    ~ struktura sklopa izražena kombinacijom jednostavnijih sklopova (komponenti)

Vremenski hazard

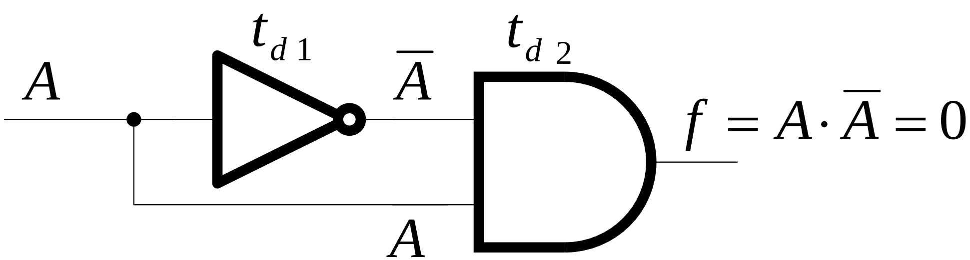
- *hazard* (rizik):

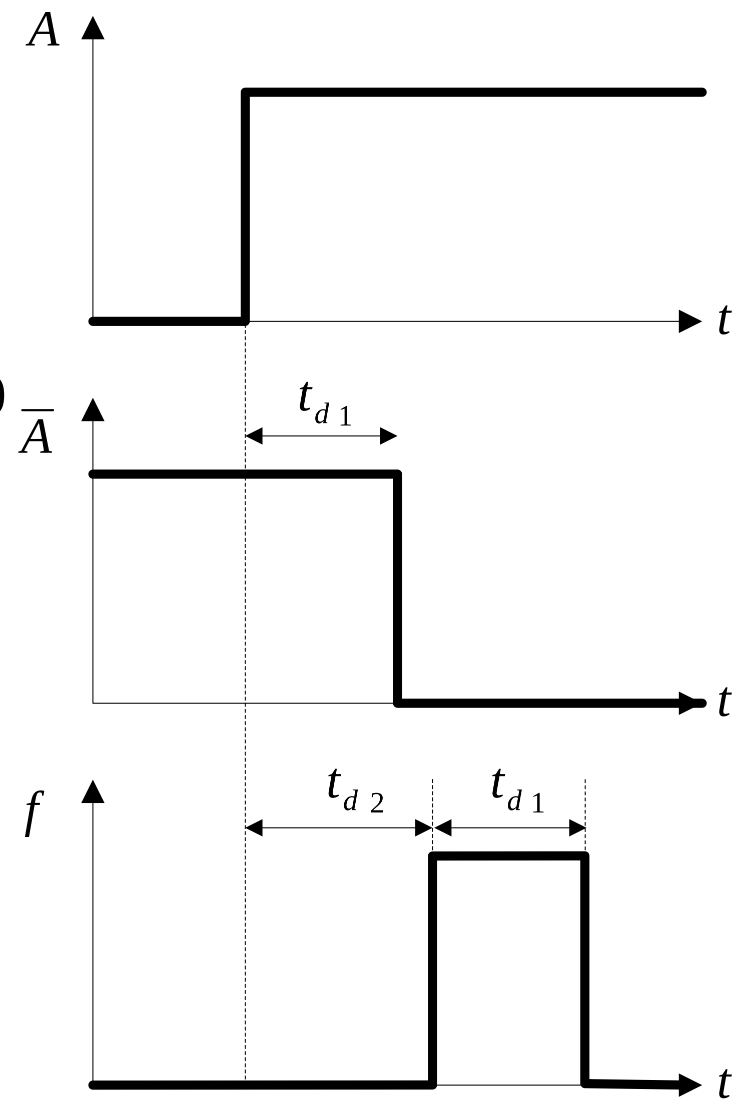
  pojava privremenog krivog impulsa koji u određenim slučajevima *može* prouzrokovati pogrešan rad sklopa:

  - *statički 0-hazard* :
    ~ izlaz statički u 0, a za prijelazne pojave generira se 1
  - *statički 1-hazard* :
    ~ izlaz statički u 1, a za prijelazne pojave generira se 0
  - *dinamički hazard* :
    ~ generiranje ≥ 1 impulsa pri promjeni stanja na izlazu

Vremenski hazard

Primjer: statički 0-hazard



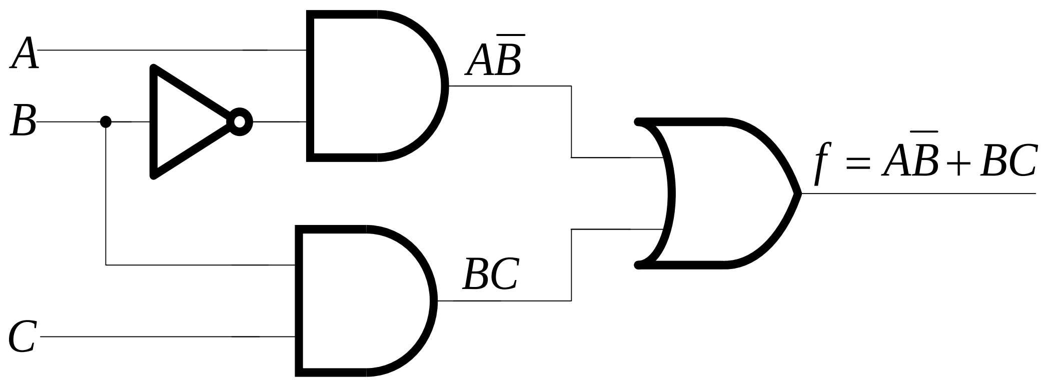


Vremenski hazard

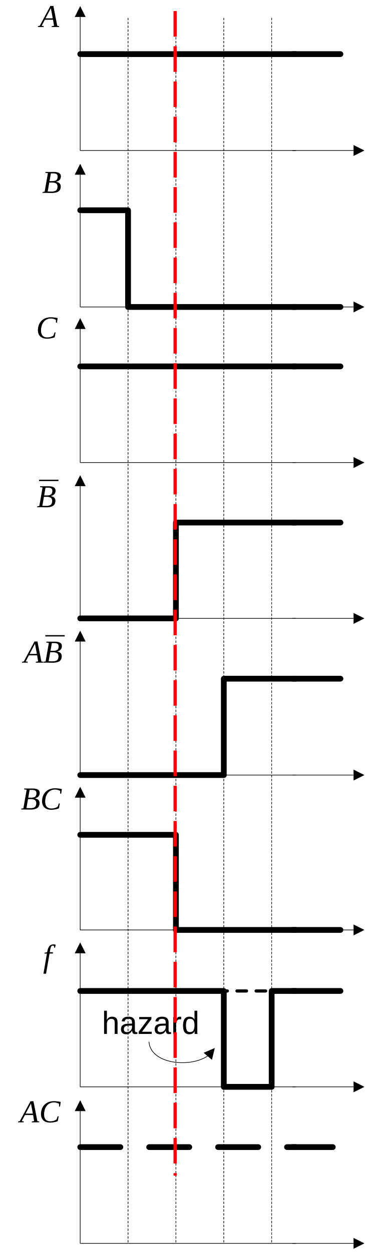
- *logički hazard*:
  - rezultat *logičke implementacije* funkcije, odnosno *minimizacije* Booleovog izraza!
  - *statički logički hazard*:
    ~ tipična pojava kad dva logička signala koji imaju suprotne vrijednosti (A i $\overline{A}$) poprimaju *istu* vrijednost *za vrijeme prijelaznog stanja*:
    - razmatrati ih kao *različite* signale!
    - dodati redundantni član (produkt/sumu)
  - standardno rješenje
    ~ izbjeći očitanje signala za prijelazne pojave:
    - *impulsi sinkronizacije*
      ~ usporavanje rada sustava!

Vremenski hazard

Primjer: $f = A\overline{B} + BC$

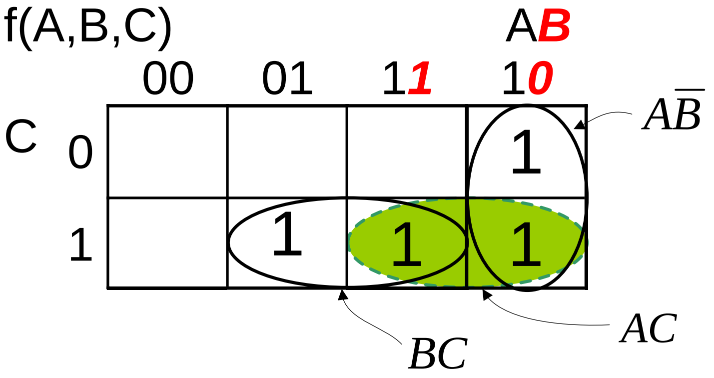


- B mijenja stanje iz 1 u 0:
  $(A, B, C):(1,1,1) \rightarrow (1,0,1)$
- I sklop BC više ne daje 1 ILI sklopu, a I sklop $A\overline{B}$ treba t_d vremena da ga generira

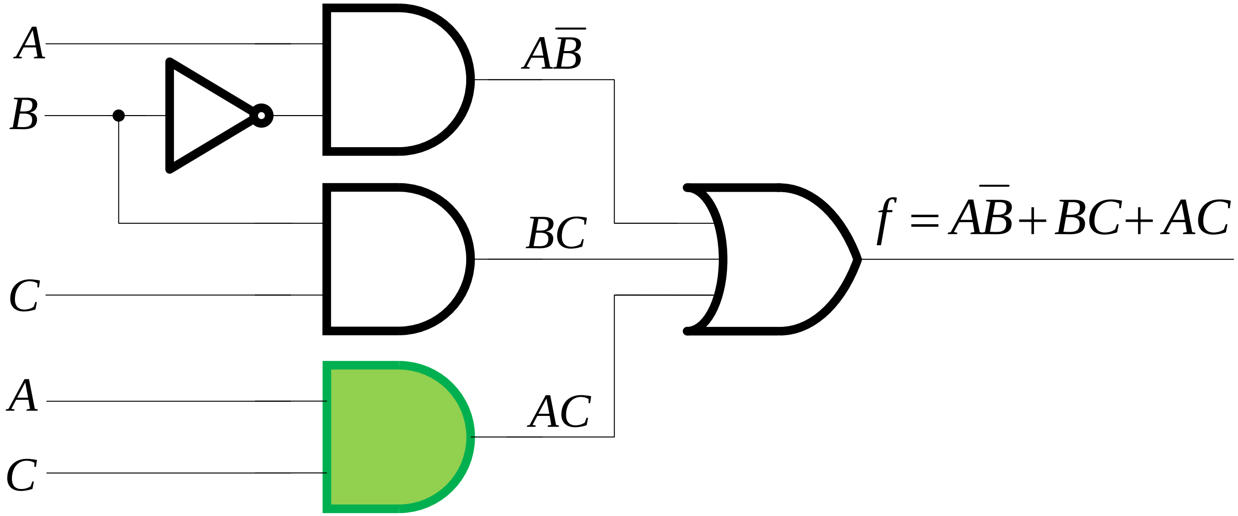


Vremenski hazard

- rješenje
  ~ "olabaviti" minimizaciju
  dodavanjem redundantnog
  I sklopa koji daje 1
  ILI sklopu AC
  kada su $(A,C)=(1,1)$:



$$f = A\overline{B} + BC \Rightarrow f = A\overline{B} + BC + AC$$



Sadržaj predavanja

- minimum Booleove funkcije
- K tablice
- minimizacija K tablicama
- vremenski hazard
- **implikanti i minimalna suma**
- minimizacija višeizlazne funkcije
- Quine-McCluskeyeva metoda

Implikanti i minimalna suma

- neke definicije:
  - *implikant*, i_i:
    - produkt u zapisu funkcije kao sume produkata
    - "implicira" f = 1

$$f = B\overline{C}D + BCD + A\overline{C}D$$

$$i_1 = B\overline{C}D, i_2 = BCD, i_3 = A\overline{C}D$$

  - *primarni implikant* (*primarni član*), pi_i:
    ~ implikant koji se *ne može* kombinirati
    u drugi implikant s manjim brojem literala

$$f = B\overline{C}D + BCD + A\overline{C}D = BD + A\overline{C}D$$

$$pi_1 = BD,\ pi_2 = A\overline{C}D$$

Implikanti i minimalna suma

- *prekrivanje* (više) minterma nekim (primarnim) implikantom
  ~ (primarni) implikant nastao je kombiniranjem tih minterma te ih može *zamijeniti* u izrazu za funkciju
- *bitni primarni implikant*
  ~ primarni implikant koji *jedini prekriva* (engl. cover) neki m_i

Implikanti i minimalna suma

- *potpuna suma* (engl. complete sum)
  ~ suma *svih primarnih* implikanata funkcije, Σpi_i
- *minimalna suma* $\equiv$ minimalno prekrivanje
  ~ suma primarnih implikanata koja prekriva (sadrži) *sve minterme* funkcije uz *minimalni* broj članova: *minimizirani* izraz za funkciju!

  minimalna suma $= A\overline{C}D + BD$

Implikanti i minimalna suma

Primjer: sustavno utvrđivanje minimalne sume

- početi od funkcije zadane u *kanonskom* obliku

$$
\begin{aligned}
f &= f(A,B,C,D) \\
&= B\overline{C}D + BCD + A\overline{C}D \\
&= \left(A+\overline{A}\right)\cdot B\overline{C}D + \left(A+\overline{A}\right)\cdot BCD + A\cdot\left(B+\overline{B}\right)\cdot\overline{C}D \\
&= AB\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D + ABCD + \overline{A}BCD + AB\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D \\
&= AB\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D + ABCD + \overline{A}BCD + A\overline{B}\,\overline{C}D \\
&= \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}\,\overline{C}D + AB\overline{C}D + ABCD \\
&= m_5 + m_7 + m_9 + m_{13} + m_{15} \\
&= \sum(5,7,9,13,15)
\end{aligned}
$$

Implikanti i minimalna suma

implikanti = mintermi_funkcije (produkti_s_4_literala)
∪ produkti_s_3_literala
∪ produkti_s_2_literala
∪ ...

mintermi_funkcije $= \{m_5, m_7, m_9, m_{13}, m_{15}\}$
$= \{\overline{A}B\overline{C}D, \overline{A}BCD, A\overline{B}\overline{C}D, AB\overline{C}D, ABCD\}$

produkti_s_3_literala
~ međusobno kombinirati minterme

produkti_s_2_literala
~ međusobno kombinirati produkte_s_3_literala

itd. ...

Implikanti i minimalna suma

produkti_s_3_literala
~ međusobno kombinirati minterme_funkcije:

$$f = \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}D + AB\overline{C}D + ABCD$$

$$\overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD = \overline{A}B \cdot \left(\overline{C} + C\right) \cdot D = \overline{A}BD$$

$$\overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D = \left(\overline{A} + A\right) \cdot B\overline{C}D = B\overline{C}D$$

$$\overline{A}BCD + ABCD = \left(\overline{A} + A\right) \cdot BCD = BCD$$

$$A\overline{B}\overline{C}D + AB\overline{C}D = A \cdot \left(\overline{B} + B\right) \cdot \overline{C}D = A\overline{C}D$$

$$AB\overline{C}D + ABCD = AB \cdot \left(\overline{C} + C\right) \cdot D = ABD$$

produkti_s_3_literala: $\left\{\overline{A}BD, B\overline{C}D, BCD, A\overline{C}D, ABD\right\}$

Implikanti i minimalna suma

produkti_s_2_literala

~ međusobno kombinirati produkte_s_3_literala:

$$\left\{\overline{A}BD, B\overline{C}D, BCD, A\overline{C}D, ABD\right\}$$

$$\overline{A}BD + ABD = \left(\overline{A} + A\right) \cdot BD = BD$$

$$B\overline{C}D + BCD = B \cdot \left(\overline{C} + C\right) \cdot D = BD$$

produkt_s_2_literala: $\left\{BD\right\}$

$$\text{implikanti} = \left\{\overline{A}B\overline{C}D, \overline{A}BCD, A\overline{B}\overline{C}D, AB\overline{C}D, ABCD\right\}$$

$$\cup \left\{\overline{A}BD, B\overline{C}D, BCD, A\overline{C}D, ABD\right\}$$

$$\cup \left\{BD\right\}$$

$$\text{primarni\_implikanti} = \left\{BD, A\overline{C}D\right\}$$

$$\text{potpuna\_suma} = BD + A\overline{C}D$$

Implikanti i minimalna suma

- *prekrivanje* minterma primarnim implikantima
  ~ *tablica prekrivanja*

	m_5	m_7	m_9	m_{13}	m_{15}
	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$
$A\bar{C}D$			$\times$	$\times$	
BD	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$

- *bitni* primarni implikant
  ~ npr. $A\bar{C}D$ *jedini prekriva* m_9

	m_5	m_7	m_9	m_{13}	m_{15}
	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$
$A\bar{C}D$			$\times$	$\times$	
BD	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$

Sadržaj predavanja

- minimum Booleove funkcije
- K tablice
- minimizacija K tablicama
- vremenski hazard
- implikanti i minimalna suma
- **minimizacija višeizlazne funkcije**
- Quine-McCluskeyeva metoda

Minimizacija višeizlazne funkcije

- *višeizlazna funkcija*
  ~ skup Booleovih funkcija nad istim skupom varijabli:
  definira "višeizlazni sklop"
  (engl. multiple-output circuit)

Primjer : pretvorba 3-bitovnog broja u (3-bitovni) Grayev kod

$$g_2 = \varphi_2(b_2, b_1, b_0)$$
$$g_1 = \varphi_1(b_2, b_1, b_0)$$
$$g_0 = \varphi_0(b_2, b_1, b_0)$$

Minimizacija višeizlazne funkcije

Primjer : (nastavak)

b2	b1	b0	g2	g1	g0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

$$g_2 = \varphi_2(b_2, b_1, b_0) = \sum(4,5,6,7) = b_2$$

$$g_1 = \varphi_1(b_2, b_1, b_0) = \sum(2,3,4,5) = \overline{b_2}b_1 + b_2\overline{b_1}$$

$$g_0 = \varphi_0(b_2, b_1, b_0) = \sum(1,2,5,6) = \overline{b_1}b_0 + b_1\overline{b_0}$$

- zapažanje:
  - 5 *različitih* produkata (nema *istih* produkata)

Minimizacija višeizlazne funkcije

- minimizacija višeizlazne funkcije
  ~ mogućnosti:
  - zasebna minimizacija komponentnih funkcija f_i
  - *združena* minimizacija *svih* komponentnih funkcija višeizlazne funkcije (f_1, …, f_n)
    ~ povoljnije rješenje?
- minimizirana višeizlazna funkcija:
  - *višestruko* korištenje pojedinih produktnih članova
    ~ ušteda sklopovlja višeizlaznog sklopa
  - prilagodba (prethodnih) postupaka minimizacije
    ~ *istovremena* minimizacija komponentnih funkcija

Minimizacija višeizlazne funkcije

Primjer :

$$f_0 = AC + AB = pi_i + \boxed{pi_2}$$

$$= AC + AB\overline{C} = pi_i + m_6$$

$f_0(A,B,C)$

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1			1	1

$$f_1 = \overline{A}B + B\overline{C} = pi_3 + \boxed{pi_4}$$

$$= \overline{A}B + AB\overline{C} = pi_3 + m_6$$

$f_1(A,B,C)$

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	
1		1		

- višeizlazna funkcija $\{f_0, f_1\}$ ima povoljnije rješenje (pi_1, pi_3, m_6) u odnosu na zasebnu minimizaciju f_0 i f_1 što daje (pi_1, pi_2, pi_3, pi_4)

Minimizacija višeizlazne funkcije

- *konceptualizacija* postupka višeizlazne minimizacije:
  - *višeizlazni primarni implikant* pi_i *nije nužno* primarni implikant pojedinih funkcija:

$$pi_1, pi_2 \Rightarrow f_0$$
$$pi_3, pi_4 \Rightarrow f_1$$
$$m_6 = pi_5 \Rightarrow f_0 \cdot f_1$$

  - združena minimizacija *n* funkcija $f_1 \div f_n$:
    - odrediti pi_i za svaku f_i posebno
    - odrediti pi_i za svaku *kombinaciju* f_i ~ produkti 2 i više f_i

Minimizacija višeizlazne funkcije

Primjer: $f(A, B, C, D) = \{f_1, f_2, f_3\}$

f_1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11			1	1
10	1			

f_2

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11			1	
10	1			

f_3

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10				

Minimizacija višeizlazne funkcije

Primjer: $f(A, B, C, D) = \{f_1, f_2, f_3\}$

f_1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11			1	1
10	1			

f_2

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11			1	
10	1			

f_3

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10				

f_1f_2

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11			1	
10	1			

f_1f_3

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11			1	
10				

f_2f_3

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11			1	
10				

Minimizacija višeizlazne funkcije

Primjer: $f(A, B, C, D) = \{f_1, f_2, f_3\}$

formiranje kombinacija funkcija

f_1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11			1	1
10	1			

f

f_2

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11			1	
10	1			

f_3

h

g

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10				

f_1f_2

c

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11			1	
10	1			

f_1f_3

d

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11			1	
10				

f_2f_3

e

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11			1	
10				

$f_1f_2f_3$

b

a

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11			1	
10				

$$f_1 = c + d + f$$
$$f_2 = b + c + e$$
$$f_3 = b/d + e + g$$

čitanje primarnih implikanata

Minimizacija višeizlazne funkcije

- izbor *minimalnog skupa* višeizlaznih pi_i koji će prekrivati *sve tri* funkcije f_1, f_2, f_3:
  - povoljan izbor
    ~ pi_i koji se javljaju u max broju f_i:
    max zajedničko korištenje produkata
  - početi od $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$
  - izabrani složeniji pi_i javljaju se u "nižim" K tablicama kao zalihosti X
- komentar rješenja primjera:
  - *h* (f_3) ne doprinosi prekrivanju
  - f_2 ne daje p_i
  - *a* je nepotreban, jer ga prekrivaju *f*, *e*, *h*
  - f_3 ima opcije (*b* ili *d*)

Sadržaj predavanja

- minimum Booleove funkcije
- K tablice
- minimizacija K tablicama
- vremenski hazard
- implikanti i minimalna suma
- minimizacija višeizlazne funkcije
- **Quine-McCluskeyeva metoda**
  - **minimizacija potpuno specificirane funkcije**
  - **minimizacija nepotpuno specificirane funkcije**

Quine-McCluskeyeva metoda

- tablična metoda prikladna za minimizaciju funkcija većeg broja varijabli:
  - može se provesti i manipuliranjem *indeksima* standardnih članova
  - numerički postupak
    ~ pogodan za programsku implementaciju
- W. V. Quine, 1952;
  poboljšanje: E. J. McCluskey, 1956

Quine-McCluskeyeva metoda

- potpuno specificirana funkcija
  u obliku sume standardnih produkata
- postupak u *dvije* faze:
  - prva faza
    ~ nalaženje *primarnih implikanata* (~ potpune sume):
    najveća zaokruženja u K-tablicama
  - druga faza
    ~ određivanje optimalnog (*minimalnog*) skupa
    primarnih implikanata (~ minimalne sume)

Quine-McCluskeyeva metoda

- *prva faza*: nalaženje potpune sume
  - svrstavanje minterma u *klase* prema broju jedinica
  - uspoređivanje elemenata *susjednih* klasa
    ~ kombiniranje elemenata koji se mogu simplificirati (T9)
    $$A \cdot \varphi + \overline{A} \cdot \varphi = \varphi \quad (*)$$
    - dobiveni produkti (s *manjim brojem* literala)
      ~ klasa u novoj tablici
    - elementi koji nisu kombinirani
      ~ *primarni implikanti*
  - ponavljanje prethodnog koraka
    za elemente koji su izgubili istu varijablu
  - postupak se zaustavlja kad nema više kandidata za kombiniranje

Quine-McCluskeyeva metoda

- dodaci za *numerički* postupak, korištenjem *indeksa* minterma:
  - klase su susjedne
  - elementi za kombiniranje se razlikuju za 2^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$
  - element u višoj klasi mora biti veći
  - eliminira se literal 2^k

Quine-McCluskeyeva metoda

Primjer: $z = f(A, B, C, D) = \sum (1,3,5,6,9,11,12,13,14,15)$

- prva faza

	A	B	C	D
	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

1	1	✓
2	3	✓
	5	✓
	6	✓
	9	✓
	12	✓
3	11	✓
	13	✓
	14	✓
4	15	✓

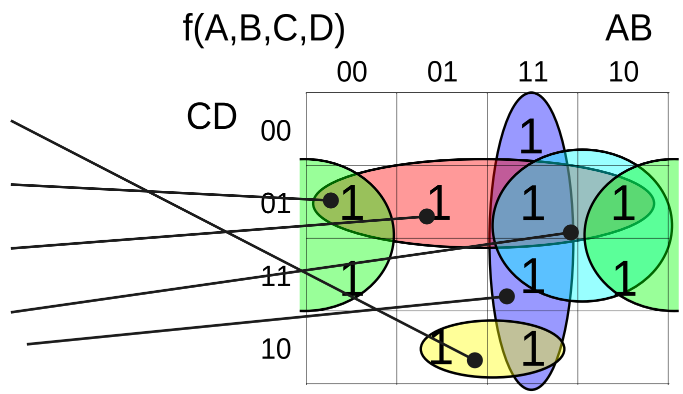
1	1,3	(2)	✓
	1,5	(4)	✓
	1,9	(8)	✓
2	3,11	(8)	✓
	5,13	(8)	✓
	6,14	(8)	
	9,11	(2)	✓
	9,13	(4)	✓
	12,13	(1)	✓
	12,14	(2)	✓
3	11,15	(4)	✓
	13,15	(2)	✓
	14,15	(1)	✓

1	1,3,9,11	(2,8)
	1,5,9,13	(4,8)
	1,9,3,11	(8,2)
	1,9,5,13	(8,4)
2	9,11,13,15	(2,4)
	12,14,13,15	(2,1)
	12,13,14,15	(1,2)
	9,13,11,15	(4,2)

Quine-McCluskeyeva metoda

- rezultat prve faze: $z = f(A,B,C,D)$
  $$= \sum(1,3,5,6,9,11,12,13,14,15)$$
- primarni članovi
  ~ *potpuna suma*

6,14 (8)	$\equiv$	$BC\overline{D}$	=	a
1,3,9,11 (2,8)	$\equiv$	$\overline{B}D$	=	b
1,5,9,13 (4,8)	$\equiv$	$\overline{C}D$	=	c
9,11,13,15 (2,4)	$\equiv$	AD	=	d
12,13,14,15 (1,2)	$\equiv$	AB	=	e



$$z = f(A,B,C,D)$$
$$= BC\overline{D} + \overline{B}D + \overline{C}D + AD + AB$$
$$= 6{,}14(8) +$$
$$+ 1{,}3{,}9{,}11(2{,}8) + 1{,}5{,}9{,}13(4{,}8) + 9{,}11{,}13{,}15(2{,}4) + 12{,}13{,}14{,}15(1{,}2)$$

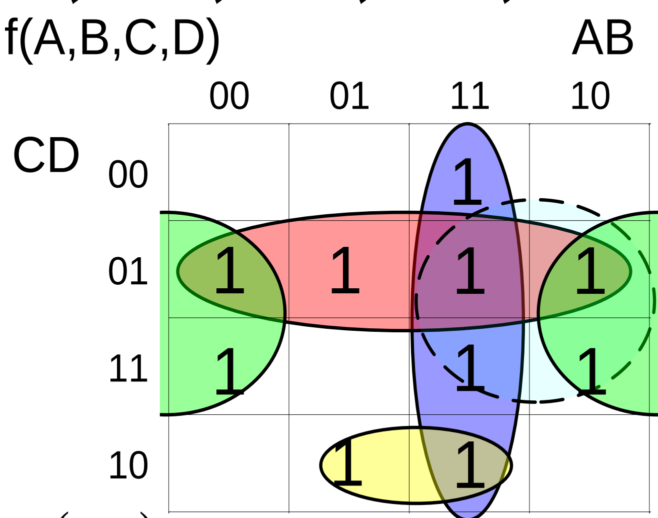
Quine-McCluskeyeva metoda

- *druga faza*: nalaženje minimalne sume
  - formiranje tablice primarnih implikanata i označavanje prekrivanja minterma
  - nalaženje *bitnih* primarnih implikanata, koji *jedini prekrivaju pojedini minterm* ~ označiti minterme koje taj član pokriva
  - bitni primarni implikanti ulaze u minimalnu sumu
  - preostale minterme prekriti *minimalnim* podskupom preostalih primarnih implikanata ~ prednost: primarni implikanti s manjim brojem literala

Quine-McCluskeyeva metoda

- tablica prekrivanja:

		1	3	5	6	9	11	12	13	14	15
$BC\overline{D}$	a				X					X	
$\overline{B}D$	b	X	X			X	X				
$\overline{C}D$	c	X		X		X			X		
AD	d					X	X		X		X
AB	e							X	X	X	X
		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓



minimalna suma:

$$\begin{aligned} z &= a + b + c + e \\ &= BC\overline{D} + \overline{B}D + \overline{C}D + AB \\ &= 6{,}14(8) + \\ &\quad + 1{,}3{,}9{,}11(2{,}8) + 1{,}5{,}9{,}13(4{,}8) + 12{,}13{,}14{,}15(1{,}2) \end{aligned}$$

Quine-McCluskeyeva metoda

- nakon nalaženja bitnih primarnih članova moguća pojava *cikličke* tablice
  ~ svaki *preostali* minterm prekriven je *istim brojem preostalih* primarnih implikanata;
  Pyne-McCluskeyev pristup (Petrickov postupak):
  - preostale primarne implikante tretirati kao logičke varijable i izgraditi funkciju *P*

    $P =$ (suma pi koji prekrivaju m_{i1})·
    (suma pi koji prekrivaju m_{i2})· …
    = … = suma produkata

  - uzeti produkt s *minimalnim* brojem primarnih implikanata

Quine-McCluskeyeva metoda

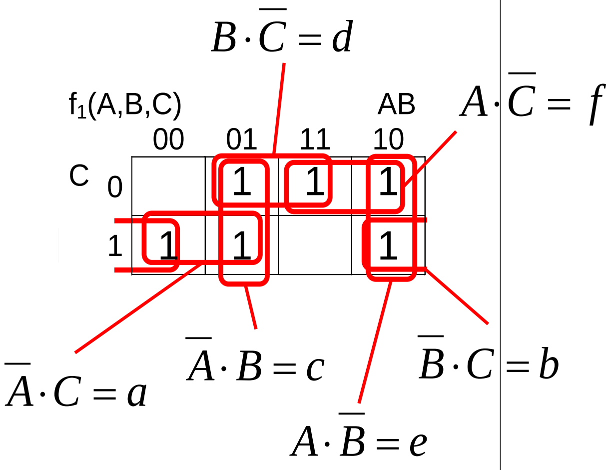
- Petrickov postupak (algoritam):
    1. ukloniti bitne primarne implikante i pripadne minterme
    2. unijeti *pokrate* za preostale primarne implikante
    3. formirati logičku funkciju *P* (čije su varijable te pokrate) koja je istinita kada su prekriveni svi stupci (mintermi); *P* je *produkt suma* primarnih implikanata koje prekrivaju pojedini minterm (stupac)
    4. *P* izraziti kao *sumu produkata* (primjenjujući konjunkciju - logičko I i apsorpciju $X + XY = X$) te je *minimizirati*; svaki produkt u dobivenoj sumi *P* je moguće rješenje
    5. odabrati produkte s *najmanjim brojem varijabli*; svaki takav produkt predstavlja moguće rješenje s *minimalnim* brojem primarnih implikanata
    6. odabrati preostale produkte, ili produkte koji odgovaraju najmanjem ukupnim brojem literala

Quine-McCluskeyeva metoda

Primjer : $f(A,B,C)=\Sigma m(1,2,3,4,5,6)$

- rezultat prve faze = potpuna suma (koraci 1 i 2)

		1	2	3	4	5	6
a	1,3(2)	×		×			
b	1,5(4)	×				×	
c	2,3(1)		×	×			
d	2,6(4)		×				×
e	4,5(1)				×	×	
f	4,6(2)				×		×



- korak 3:

$$P=(a+b)(c+d)(a+c)(e+f)(b+e)(d+f)$$

Quine-McCluskeyeva metoda

- korak 4:

$$
\begin{aligned}
P &= (a+b)(c+d)(a+c)(e+f)(b+e)(d+f) \\
&= \big[(a+b)(a+c)\big]\big[(d+c)(d+f)\big]\big[(e+b)(e+f)\big] \\
&= (a+bc)(d+cf)(e+bf) \\
&= (ad+acf+bcd+bcf)(e+bf) \\
&= ade + abdf + acef + abcf + bcde + bcdf + bcef + bcf
\end{aligned}
$$

- korak 5:
produkti s minimalnim brojem varijabli su ade i bcf, što daje *dva* rješenja:

$$f(A,B,C) = ade = \overline{A}C + B\overline{C} + A\overline{B}$$

$f_1(A,B,C)$

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

$$f(A,B,C) = bcf = \overline{B}C + A\overline{C} + \overline{A}B$$

$f_1(A,B,C)$

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

Quine-McCluskeyeva metoda

- minimizacija *nepotpuno specificiranih funkcija* u obliku sume produkata: $f = \sum_i m_i + \sum_j d_j$
  ~ modifikacija osnovnog postupka
  uvođenjem "vektora redundancija"
- postupak:
  - početna tablica
    ~ *mintermi* i *nespecificirane kombinacije*
  - svaki produktni član dobiva oznaku redundantnosti:
    d = 0 : produkt *nije* zanemariv
    ~ simplifikacija je uključila barem jedan m_i
    d = 1 : produkt je zanemariv ($\rightarrow$ redundancija!)
    ~ nastao kombiniranjem *samo* d_i

Quine-McCluskeyeva metoda

- *prva faza*:
  - kombiniranje produkata kao u osnovnom postupku, uz *evidenciju redundantnosti*
    $d = d_{i1} \cdot d_{i2}$: produkt zanemariv samo ako je nastao simplifikacijom zanemarivih produkata
  - *priprema* druge faze
    ~ izbor pi_i koji *nisu zanemarivi* ($d = 0$):
    - tablica prekrivanja (odabir minimalne sume)
      ~ upis samo pi_i koji *nisu zanemarivi*
    - stupci tablice
      ~ *samo* m_i (X ne treba prekriti)
- *druga faza*:
  ~ identična osnovnom postupku

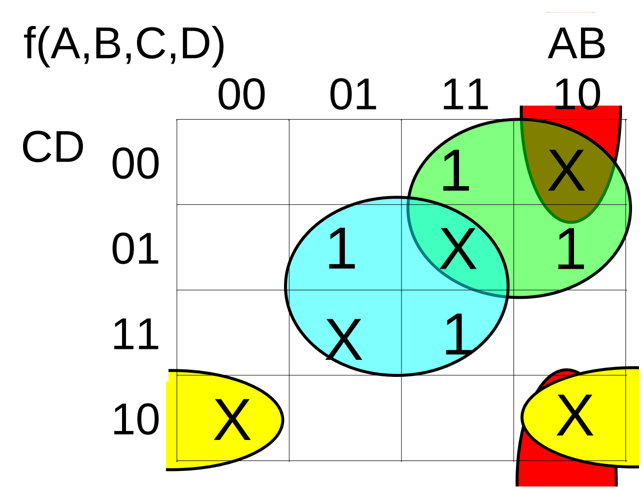
Quine-McCluskeyeva metoda

Primjer: $f(A,B,C,D)=\sum m(5,9,12,15)+\sum d(2,7,8,10,13)$

	ABCD	d	
2	0010	1	✓
8	1000	1	✓
5	0101	0	✓
9	1001	0	✓
10	1010	1	✓
12	1100	0	✓
7	0111	1	✓
13	1101	1	✓
15	1111	0	✓

	ABCD	d	
2,10	-010	1	
8,9	100-	0	✓
8,10	10-0	1	
8,12	1-00	0	✓
5,7	01-1	0	✓
5,13	-101	0	✓
9,13	1-01	0	✓
12,13	110-	0	✓
7,15	-111	0	✓
13,15	11-1	0	✓

	ABCD	d
8,9,12,13	1-0-	0
8,12,9,13	1-0-	0
5,7,13,15	-1-1	0
5,13,7,15	-1-1	0



potrebni pi_i ($d=0$): $\left\{A\overline{C}, BD\right\}$

nepotrebni pi_i ($d=1$): $\left\{\overline{B}C\overline{D}, A\overline{B}\,\overline{D}\right\}$

Quine-McCluskeyeva metoda

- druga faza :

		5	9	12	15
$A\overline{C}$	**a**		X	X	
BD	**b**	X			X
		✓	✓	✓	✓

$$f = A\overline{C} + BD$$

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	X
01		1	X	1
11		X	1	
10	X			X

Literatura

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 4: Minimizacija logičkih funkcija.

- minimum Booleove funkcije: str. 129-133
- K tablice,
  minimizacija K tablicama: str. 133-147
- vremenski hazard: str. 123-125, 159-160
- Quine-McCluskeyeva metoda: str. 147-151
- minimizacija višeizlazne funkcije: str. 151-157

Zadaci za vježbu (1)

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 4: Minimizacija logičkih funkcija.

- minimum Booleove funkcije: 4.1-4.2, 4.14,
- K tablice,
  minimizacija K tablicama: 4.3-4.11, 4.16
- vremenski hazard: 4.18-4.21
- Quine-McCluskeyeva metoda: 4.12, 4.13, 4.15, 4.17
- minimizacija višeizlazne funkcije: 4.22-4.24

Zadaci za vježbu (2)

M. Čupić: *Digitalna elektronika i digitalna logika. Zbirka riješenih zadataka*, Cjelina 4: Minimizacija logičkih funkcija.

- minimum Booleove funkcije:
  - riješeni zadaci: 4.8a-c, 4.26, 4.27
  - zadaci za vježbu: 1-3, 7 (str.165-166)
- minimizacija K tablicama:
  - riješeni zadaci: 4.1-4.7, 4.8d, 4.13-4.16, 4.20-4.24
  - zadaci za vježbu: 4, 6, 8 (str.165-166)
- vremenski hazard:
  - riješeni zadaci: 4.5, 4.10
- Quine-McCluskeyeva metoda:
  - riješeni zadaci: 4.8e, 4.9-4.12, 4.17-4.19, 4.23
  - zadaci za vježbu: 5, 11, 12 (str.165-166)