

Realiziranje funkcija pomoću *NOR* i *NAND* operatora

Tin Franovic (tin.franovic@gmail.com)

Uvod

Svaku funkciju možemo prikazati pomoću dovoljnog broja *NOR* ili *NAND* sklopova. Koja je praktična korisnost toga? Ukoliko proizvodimo velik broj sklopova koji obavljaju istu logičku funkciju, mnogo nam je jednostavnije i isplativije naručivati velike količine *NOR* ili *NAND* sklopova nego da posebno naručujemo *NOT*, *OR* ili *AND* sklopove prema potrebi.

U nastavku ćemo pokazati kako se proizvoljna funkcija može prikazati koristeći samo *NOR* ili *NAND* operatore.

Osnovna pravila

Osnovna pravila koja nam omogućavaju pretvorbu proizvoljne funkcije u oblik izražen isključivo pomoću *NOR* ili *NAND* operatora zovu se ***De Morganova pravila***.

Stoga, da se prisjetimo:

Negacija konjunkcije

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \quad (1)$$

Negacija disjunkcije

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \quad (2)$$

Dvostruka negacija

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (3)$$

Koristeći navedena pravila, možemo prikazati i sljedeće funkcije:

A+B

$$A + B = \text{prema (3)} = \overline{\overline{A + B}} = \text{prema (2)} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

A · B

$$A \cdot B = \text{prema (3)} = \overline{\overline{A \cdot B}} = \text{prema (1)} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

Način funkcioniranja sklopova

Sklopovi NOR i NAND su višeznačni, odnosno nije specificirano koliki je minimalan i maksimalan broj varijabli koje se na njih mogu istovremeno dovesti. Stoga, moguće je realizirati ovakve funkcije:

$$\overline{A} = \text{NOR}(A) = \text{NAND}(A)$$

$$\overline{A + B} = \text{NOR}(A, B)$$

$$\overline{A \cdot B} = \text{NAND}(A, B)$$

$$\overline{A + B + C} = \text{NOR}(A, B, C)$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C} = \text{NAND}(A, B, C)$$

Nadovezivanjem sklopova moguće je izvesti još više različitih funkcija.

Primjerice:

$$A = \overline{\overline{A}} = \text{NOR}(\text{NOR}(A)) = \text{NAND}(\text{NAND}(A))$$

$$\overline{\overline{A + B + \overline{\overline{A + B}}}} = \text{NOR}(\text{NOR}(A), \text{NOR}(B, \text{NOR}(A, B)))$$

Važno je primjetiti sljedeća 3 pravila koja će nam uvelike koristiti prilikom pretvaranja proizvoljne funkcije u oblik pogodan za realizaciju isključivo NOR ili NAND sklopovima:

- broj crta koje označavaju negaciju odgovara broju NOR ili NAND operatora
- svaki operator obuhvaća onaj “dio” funkcije koji obuhvaća i negacija
- na mjestu gdje se u prikazu funkcije nalazio operator OR ili AND, u prikazu pomoću NOR ili NAND operatora nalazi se zarez.

Pretvaranje proizvoljne funkcije u traženi oblik

Prvi korak kod pretvaranja jest minimizacija početne funkcije. To se može učiniti *algebarski*, *K-tablicama* ili *Quine-McCluskey* metodom. U zadacima će najčešće to biti izvedivo jednostavnom algebarskom minimizacijom.

S obzirom da se traženi oblik može sastojati ili od isključivo **NOR** operatora ili isključivo **NAND** operatora, razlikujemo 2 osnovna slučaja kod pretvaranja.

1. Kod pretvaranja funkcije u oblik pogodan za realizaciju **NOR** sklopovima, nastojimo dvostrukim negacijama “razbiti” sve **AND** operacije.
2. Kod pretvaranja funkcije u oblik pogodan za realizaciju **NAND** sklopovima, nastojimo dvostrukim negacijama “razbiti” sve **OR** operacije.

Kasnije ćemo pokazati da su postupci gotovo istovjetni.

Primjer 1.

Pretvorba funkcije $f = A \cdot B$ u oblik koji koristi isključivo **NOR** operatore.

$$A \cdot B = \text{prema (3)} = \overline{\overline{A \cdot B}} = \text{prema (1)} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

Time smo dobili što smo htjeli, odnosno umjesto **AND** operatora imamo **OR** operator, što smo postigli dvostrukom negacijom i korištenjem De Morganovih pravila.

Sad nam samo preostaje zamijeniti takav zapis funkcije **NOR** operatorom koristeći 3 pravila spomenuta u prošlom odjeljku.

$$\overline{\overline{A} + \overline{B}} = \text{NOR}(\text{NOR}(A), \text{NOR}(B))$$

Primjer 2.

Pretvorba funkcije $f = A + B$ u oblik koji koristi isključivo **NAND** operatore.

$$A + B = \text{prema (3)} = \overline{\overline{A + B}} = \text{prema (2)} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

Time smo dobili što smo htjeli, odnosno umjesto **OR** operatora imamo **AND** operator, što smo postigli dvostrukom negacijom i korištenjem De Morganovih pravila.

Sad nam samo preostaje zamijeniti takav zapis funkcije **NAND** operatorom koristeći 3 pravila spomenuta u prošlom odjeljku.

$$\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \text{NAND}(\text{NAND}(A), \text{NAND}(B))$$

Primjer 3.

Pretvorba funkcije $f = A + B$ u oblik koji koristi isključivo NOR operatore.

U ovom slučaju nemamo što “razbiti”, odnosno funkcija nema niti jedan AND operator koji bi trebali pretvoriti u OR, pa nam sve dosadašnje tehnike padaju u vodu.

No, rješenje problema je vrlo jednostavno.

$$A + B = \text{prema (3)} = \overline{\overline{A + B}}$$

Samim time smo dobili oblik pogodan za korištenje NOR operatora kao što smo i dosad radili. Jedina malo zbunjujuća stvar je to da imamo 2 negacije koje obuhvaćaju isti “dio” funkcije. Ništa zato, to samo znači da će “vanjski” NOR imati samo jedan argument u kojem će se nalaziti drugi NOR operator sa argumentima prema pravilima koja smo dosad koristili.

$$\overline{\overline{A + B}} = \text{NOR}(\text{NOR}(A, B))$$

Analogni je slučaj pretvorbe funkcije $f = A \cdot B$ u oblik koji koristi isključivo NAND operatore.

Zaključak

Navedeni koraci, pravila i primjeri služe kao osnova kod pretvaranja bilo koje složenije funkcije u oblik pogodan za realizaciju NOR ili NAND operatorima. Stoga je vrlo važno da svaki od koraka dobro razumijete i nećete imati problema sa pretvaranjem bilo koje funkcije u traženi oblik.

Kao metoda provjere uvijek vam ostaje izrada tablice istinitosti za zadanu funkciju, te provjera daje li vaša funkcija zapisana u zadanom obliku jednak rezultat.

U nastavku su prikazana dva malo složenija primjera pretvorbe funkcija, koji vam mogu poslužiti za provjeru usvojenog znanja.

Sretno!

Dodatak 1

Primjer 1.

Funkciju $((\overline{\overline{C} \cdot A}) + B) \cdot \overline{C}$ prikažite korištenjem samo NOR operatora. Za prikaz koristite prefiksnu notaciju (npr. funkciju $A \cdot B$ treba prikazati kao: $\text{NOR}(\text{NOR}(A), \text{NOR}(B))$).

Rješenje.

$$\begin{aligned} ((\overline{\overline{C} \cdot A}) + B) \cdot \overline{C} &= (\overline{A} + B + C) \cdot \overline{C} \\ &= \overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} \\ &= \overline{C} \cdot (\overline{A} + B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{C} \cdot (\overline{A} + B) &= \overline{\overline{\overline{C} \cdot (\overline{A} + B)}} \\
&= \overline{C + \overline{(\overline{A} + B)}} \\
&= \overline{C + A \cdot \overline{B}} \\
&= \overline{C + \overline{\overline{A \cdot B}}} \\
&= \overline{C + \overline{\overline{A}} + \overline{B}} \\
&= \text{NOR}(C, \text{NOR}(\text{NOR}(A), B))
\end{aligned}$$

Alternativno rješenje.

$$\begin{aligned}
(\overline{(\overline{C} \cdot A)} + B) \cdot \overline{C} &= (\overline{A} + B + C) \cdot \overline{C} \\
&= \overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} &= \overline{\overline{\overline{\overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C}}}} \\
&= \overline{\overline{\overline{\overline{A} \cdot \overline{C}} + \overline{\overline{B \cdot \overline{C}}}}} \\
&= \overline{\overline{A + \overline{C} + \overline{B} + C}} \\
&= \text{NOR}(\text{NOR}(\text{NOR}(A, C), \text{NOR}(\text{NOR}(B), C)))
\end{aligned}$$

Primjer 2.

Funkciju $(\overline{(\overline{C} \cdot A)} + B) \cdot \overline{C}$ prikažite korištenjem samo NAND operatora. Za prikaz koristite prefiksnu notaciju (npr. funkciju $A + B$ treba prikazati kao: $\text{NAND}(\text{NAND}(A), \text{NAND}(B))$).

Rješenje.

$$\begin{aligned}
(\overline{(\overline{C} \cdot A)} + B) \cdot \overline{C} &= (\overline{A} + B + C) \cdot \overline{C} \\
&= \overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} \\
&= \overline{C} \cdot (\overline{A} + B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{C} \cdot (\overline{A} + B) &= \overline{\overline{\overline{\overline{C} \cdot (\overline{A} + B)}}} \\
&= \overline{\overline{\overline{\overline{C} \cdot \overline{(\overline{A} + B)}}}} \\
&= \overline{\overline{\overline{C} \cdot A \cdot \overline{B}}} \\
&= \text{NAND}(\text{NAND}(\text{NAND}(C), \text{NAND}(A, \text{NAND}(B))))
\end{aligned}$$

Alternativno rješenje.

$$\begin{aligned}((\overline{\overline{C} \cdot A}) + B) \cdot \overline{C} &= (\overline{A} + B + C) \cdot \overline{C} \\ &= \overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} &= \overline{\overline{\overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C}}} \\ &= \overline{(A + C) \cdot (\overline{B} + C)} \\ &= \overline{\overline{A + C} \cdot \overline{\overline{B} + C}} \\ &= \overline{\overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}} \\ &= \text{NAND}(\text{NAND}(\text{NAND}(A), \text{NAND}(C)), \text{NAND}(B, \text{NAND}(C)))\end{aligned}$$