4. Minimizacija Booleovih izraza (1)

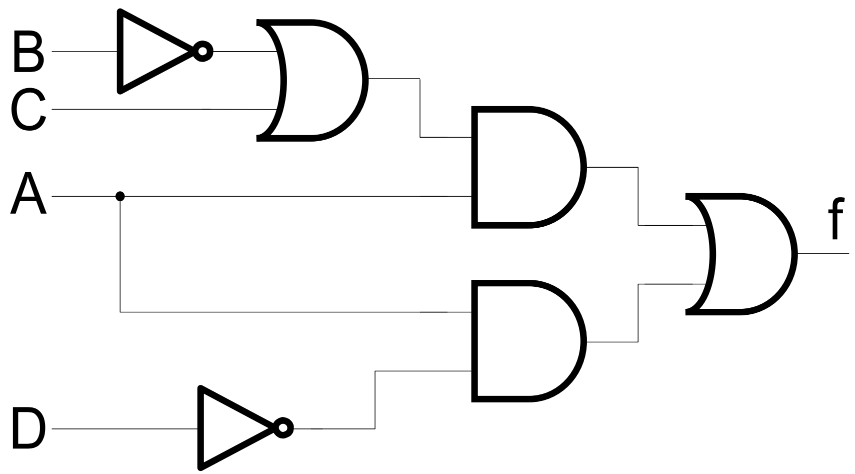
Sadržaj predavanja

- **minimum Booleove funkcije**
- K tablice
- minimizacija K tablicama
- vremenski hazard

Minimum Booleove funkcije

- podsjetiti se:
  - Booleova funkcija je *opis* digitalnog sklopa:
    - operator ⇔ osnovni logički sklop
    - izraz koji utvrđuje Booleovu funkciju ⇔ sklop

Primjer: $f = A \cdot (\overline{B} + C) + A\overline{D}$



Minimum Booleove funkcije

- želja:
  - postići minimalno ostvarenje dane Booleove funkcije:
    - najjednostavniji sklop
      ~ niz pogodnosti
    - "jednostavan" sklop = ?
      ~ kriteriji jednostavnosti
    - mjere složenosti sklopa?
  - pojednostavljivanje izraza
    ~ pojednostavljivanje sklopa:
    - tehnički razlozi
      ~ potrošnja, disipacija, …
    - ekonomski razlozi
      ~ cijena sklopova, prostor na pločici, …

Minimum Booleove funkcije

- mjere složenosti digitalnog sklopa:
  - brzina rada ~ broj razina "logike"
  - broj utrošenih primitivnih sklopova
    - bez ograničenja
    - izvedba *u dvije razine*
  - broj utrošenih primitivnih sklopova
+ ukupan broj ulaza u logičke sklopove
    - bez ograničenja
    - izvedba *u dvije razine*

Minimum Booleove funkcije

- *minimizacija* (engl. minimization)
  ~ pronaći izraz koji minimizira
  odabranu mjeru složenosti:

"za zadanu funkciju od n varijabli iz skupa 2^{2^n} njih, odrediti onaj izraz, unutar velikog broja ekvivalentnih, koji će zadovoljiti neke od kriterija jednostavnosti"

Minimum Booleove funkcije

- kriteriji jednostavnosti *kontradiktorni* ~ uobičajeno u inženjerskoj praksi!
  - najveća brzina rada sklopa ~ *funkcija drugog reda*: dvije razine logike (ILI-I, NI-NI, ...)
  - najjeftinije ostvarenje ~ min broj standardnih sklopova ili izvoda/kućišta standardnih *modula*
    - eventualni porast broja razina logike ~ zapis "funkcija višeg reda"
    - *faktorizacija* ~ dekompozicija u češće korištene komponentne funkcije
    - vrijeme propagacije signala *nije minimalno*!

Minimum Booleove funkcije

- standardni postupak minimizacije
  ~ primjena na funkcije drugog reda:

  "Neki se izraz drugog reda u obliku sume produkata smatra minimalnim – *minimiziranim* – ako ne postoji:

  - niti jedan drugi ekvivalentni izraz s manje produkata,
  - niti jedan drugi ekvivalentni izraz s istim brojem produkata, ali manjim brojem literala."

  literal = {varijabla | komplement}

Minimum Booleove funkcije

- neke definicije (1):
  - *implikant*, i_i:
    - produkt u zapisu funkcije kao sume produkata
    - "implicira" f = 1

$$f = B\overline{C}D + BCD + A\overline{C}D$$

$$i_1 = B\overline{C}D, i_2 = BCD, i_3 = A\overline{C}D$$

  - *primarni implikant* (*primarni član*), pi_i:
    ~ implikant koji se *ne može* kombinirati u drugi implikant s manjim brojem literala

$$f = B\overline{C}D + BCD + A\overline{C}D = BD + A\overline{C}D$$

$$pi_1 = BD, pi_2 = A\overline{C}D$$

Minimum Booleove funkcije

- neke definicije (2):
  - *bitni primarni implikant*
    ~ primarni implikant koji *jedini prekriva* (engl. cover) neki m_i
  - *potpuna suma* (engl. complete sum)
    ~ suma *svih* primarnih implikanata funkcije, Σpi_i
  - *minimalna suma* ≡ minimalno prekrivanje
    ~ suma primarnih implikanata koja prekriva (sadrži) *sve minterme* funkcije uz *minimalni* broj članova

Minimum Booleove funkcije

- sintaksne manipulacije Booleovog izraza
  ~ *algebarska minimizacija*:
  - transformacija funkcije zamjenom jednog njenog oblika (izraza) drugim, uzastopnom primjenom postulata i teorema Booleove algebre
  - *ne postoji* sustavan postupak koji vodi do minimuma

Minimum Booleove funkcije

Primjer: $f(A,B,C) = B\overline{C}(\overline{C} + \overline{C}A) + (\overline{A} + \overline{C})(\overline{A}B + \overline{A}C)$

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= B\overline{C}(\overline{C} + \overline{C}A) + (\overline{A} + \overline{C})(\overline{A}B + \overline{A}C) \\
&= B\overline{C} \cdot \overline{C} \cdot (1 + A) + \overline{A} \cdot (\overline{A} + \overline{C})(B + C) \\
&= B\overline{C} + \overline{A} \cdot (B + C) \\
&= B\overline{C} + \overline{A}B + \overline{A}C \\
&= B\overline{C} + \overline{A}B \cdot (C + \overline{C}) + \overline{A}C \\
&= (B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}) + (\overline{A}C + \overline{A}BC) \\
&= \overline{A}C(1 + B) + B\overline{C}(1 + \overline{A}) \\
&= \overline{A}C \cdot 1 + B\overline{C} \cdot 1 \\
&= \overline{A}C + B\overline{C}
\end{aligned}
$$

Sadržaj predavanja

- minimum Booleove funkcije
- **K tablice**
- minimizacija K tablicama
- vremenski hazard

K tablice

- grafički prikaz Booleovih funkcija:
  - tablica u 2-dimenzijskom obliku
  - polja
    ~ standardni članovi (produkti/sume)
  - "razlika" grafički susjednih polja u samo jednoj varijabli!

A	B	f
0	0	α_0
0	1	α_1
1	0	α_2
1	1	α_3

$\Rightarrow$

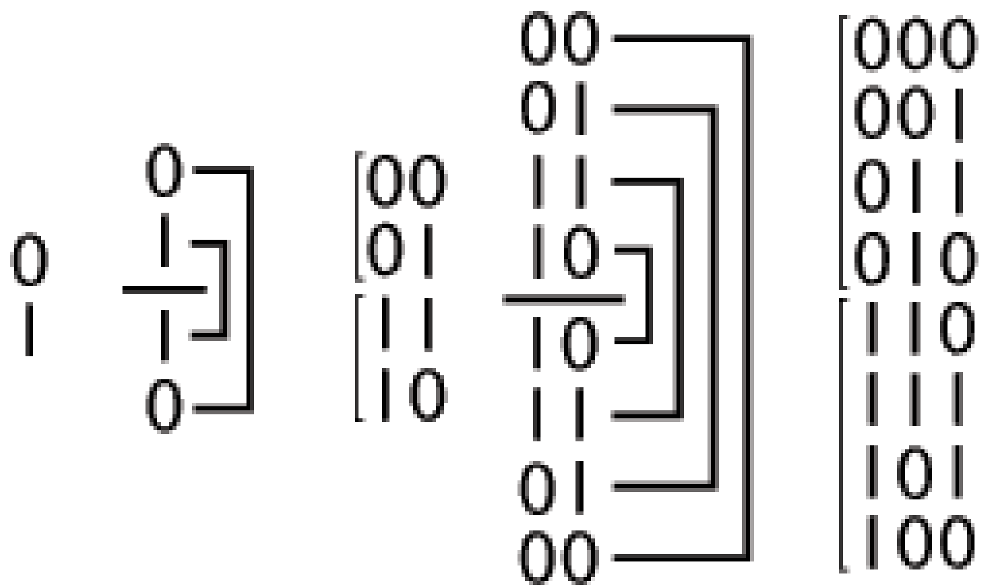
f(A,B)		A = 0	A = 1
B	0	α_0	α_2
	1	α_1	α_3

K tablice

- *K-tablice* (Karnaughove tablice), M. Karnaugh, 1953:
  - grafičke strukture s 2^n polja za prikaz $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - označavanje polja
    ~ "pravokutne koordinate", Grayev kod ($d_{min} = 1$)
  - minimizacija
    ~ "grupiranje" polja:
    temeljeno na ljudskoj sposobnosti raspoznavanja uzoraka (1 i 0)
  - K-tablice za $n > 2$ varijable
    ~ simetrija oko jedne stranice, superpozicija
  - praktična primjena: $n \leq 6$

K tablice

- podsjetnik: Grayev kod



K tablice

- izgradnja K tablice:

f(A,B)

B \ A	0	1
0	0	2
1	1	3

f(A,B,C)

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

f(A,B,C,D,E)

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

f(A,B,C,D,E)

DE \ ABC	000	010	110	100	001	011	111	101
00	0	8	24	16	4	12	28	20
01	1	9	25	17	5	13	29	21
11	3	11	27	19	7	15	31	23
10	2	10	26	18	6	14	30	22

K tablice

- *susjednost* polja:

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

$$13 = 1101 \equiv AB\overline{C}D \quad \rightarrow \quad \begin{array}{lcl} 12 = 1100 \equiv AB\overline{C}\overline{D} & : & D \equiv 2^0 \\ 15 = 1111 \equiv ABCD & : & C \equiv 2^1 \\ 09 = 1001 \equiv A\overline{B}\overline{C}D & : & B \equiv 2^2 \\ 05 = 0101 \equiv \overline{A}B\overline{C}D & : & A \equiv 2^3 \end{array}$$

K tablice

- upisivanje funkcija u K-tablice:
  - funkcija u obliku sume minterma, Σm_i:
    1 za svaki m_i
  - funkcija u obliku produkta maksterma, ΠM_i:
    0 za svaki M_i, ostalo su 1 (0 se ne pišu!)
  - *nepotpuno specificirane funkcije*
    (engl. incompletely specified functions):
    - parcijalne funkcije
    - neke kombinacije argumenata se *ne pojavljuju*:
      - funkcijska vrijednost *nije specificirana*, X (engl. don't care)
      - X se interpretiraju onako
        kako najbolje odgovara pri minimizaciji (joker)!

K tablice

Primjer: $z = f(A, B, C, D)$

$$= \sum m(4,5,13,14,15) + \sum d(1,3,7,8,12)$$

f(A,B,C,D) AB

CD	00	01	11	10
00		1	x	x
01	x	1	1	
11	x	x	1	
10			1	

K tablice

- prikaz "složene" Booleove funkcije
  ~ osnovne operacije nad Booleovim funkcijama:
  - jednostavno dobivanje rješenja
    kombiniranjem pripadnih K tablica
  - kombiniranje K tablica
    ~ kombiniranje *pojedinih polja* K-tablica funkcija

K tablice

Primjer: h = f ⊕ g

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10			1	1

g(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00		1	1	1
01		1	1	
11			1	
10		1	1	

h(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01	1			
11	1	1		
10		1		1

Sadržaj predavanja

- minimum Booleove funkcije
- K tablice
- **minimizacija K tablicama**
- vremenski hazard

Minimizacija K tablicama

- postupak minimizacije za funkcije u obliku *sume produkata*:
  - "zaokruživanje" uzoraka 2^i susjednih polja s 1 ~ "eliminiranje" *i* varijabli
    - par polja: 1 varijabla (T9: simplifikacija)

$$f(a,b,c,\ldots) = a\cdot\varphi(b,c,\ldots) + \overline{a}\cdot\varphi(b,c,\ldots)$$
$$= (a+\overline{a})\cdot\varphi$$
$$= \varphi$$

    - četvorka polja: 2 varijable
    - osmorka polja: 3 varijable
    - itd. (ako ide ☺)

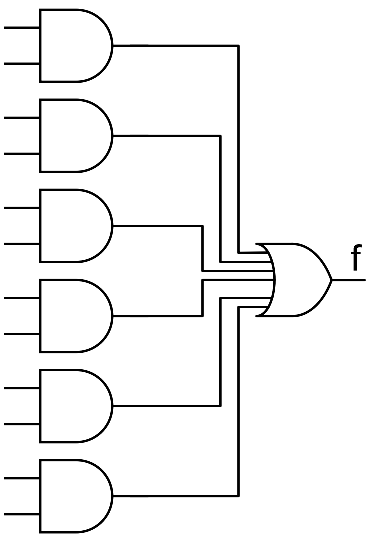
Minimizacija K tablicama

- postupak minimizacije za funkcije u obliku sume produkata :
  - "zaokruženje"
    ~ produkt, ali više *nije standardni*
  - inkluzivna disjunkcija zaokruženja
    ~ suma produkata (= funkcija drugog reda)
  - težnja:
    - što veći broj 1 u zaokruženju
      ~ I sklop s manjim brojem ulaza
    - što manji broj zaokruženja
      ~ manji broj I sklopova = manji broj ulaza u ILI sklop

Minimizacija K tablicama

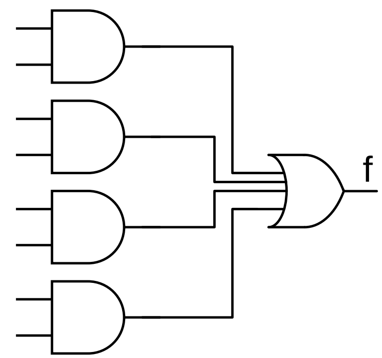
Primjer: $f(A,B,C,D)=\sum m(5,6,9,10,13,14)$

$$f(A,B,C,D)=\sum m(5,6,9,10,13,14) \quad \Rightarrow \quad f(A,B,C,D)=$$
$$=B\overline{C}D+A\overline{C}D+BC\overline{D}+AC\overline{D}$$



f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11				
10		1	1	1



Minimizacija K tablicama

- postupak minimizacije *nepotpuno specificirane funkcije* u obliku sume produkata:
  - nužno je pokriti sve 1,
    ali ne i sve X
  - X se interpretira kao 1 (X = 1)
    samo ako se time može proširiti zaokruženje
  - veće zaokruženje
    ~ jednostavniji Booleov izraz = jednostavniji sklop!

Minimizacija K tablicama

Primjer: $f = \sum m(2,5,15) + \sum d(0,1,3,4,7,9,13,14)$

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00	X	X		
01	X	1	X	X
11	X	X	1	
10	1		X	

$$f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + BD$$

Minimizacija K-tablicama

- *preljevanje* zaokruženja preko rubova:

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01	1			1
11				
10				

$$f(A,B,C,D) = \overline{B}\,\overline{C}D$$

Minimizacija K tablicama

- minimizacija funkcije u obliku *produkta maksterma*
  - isti postupak, samo se zaokružuju 0
  - rezultat je produkt suma
  - "čitanje" zaokruženja 0 kao sume produkata
    ~ komplement funkcije

Minimizacija K tablicama

Primjer: $f = \prod M(5,7,15)$

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

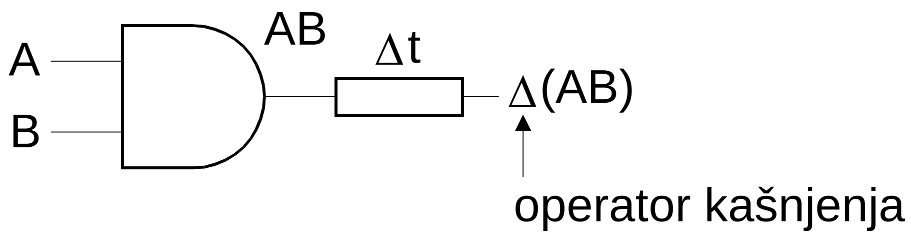
$$f(A,B,C,D) = \left(A + \overline{B} + \overline{D}\right) \cdot \left(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D}\right)$$

Sadržaj predavanja

- minimum Booleove funkcije
- K tablice
- minimizacija K tablicama
- **vremenski hazard**

Vremenski hazard

- zapažanje:
  - *stvarni* (kombinacijski) sklopovi
    ~ svojstveno kašnjenje (t_d)!
  - promatrati ostvarenu logičku funkciju + t_d



  - *moguće* neočekivano ponašanje sklopa
    u *prijelaznoj pojavi*

Vremenski hazard

- *vremenski hazard*
  ~ neželjeni impulsi kao rezultat:
  - kašnjenja stvarnih sklopova
  - konkretnog dizajna složenijeg sklopa
    ~ struktura sklopa izražena kombinacijom jednostavnijih sklopova

Vremenski hazard

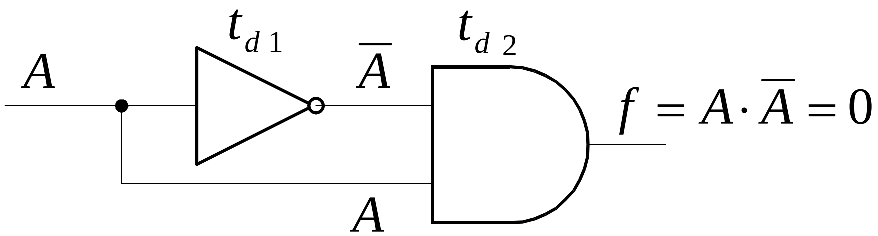
- *hazard* (rizik):

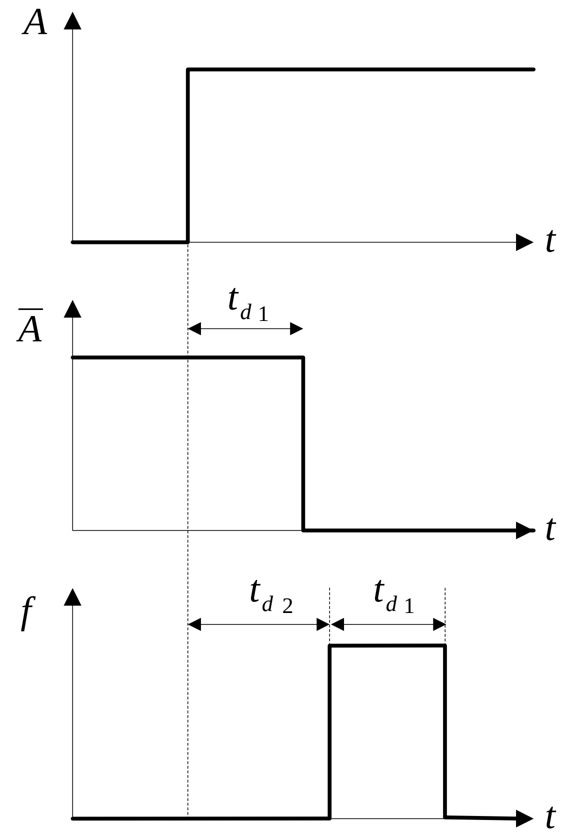
  pojava privremenog krivog impulsa koji u određenim slučajevima *može* prouzrokovati pogrešan rad sklopa:

  - *statički 0-hazard* :
    ~ izlaz statički u 0, a za prijelazne pojave generira se 1
  - *statički 1-hazard* :
    ~ izlaz statički u 1, a za prijelazne pojave generira se 0
  - *dinamički hazard* :
    ~ generiranje ≥ 1 impulsa pri promjeni stanja na izlazu

Vremenski hazard

Primjer: statički 0-hazard



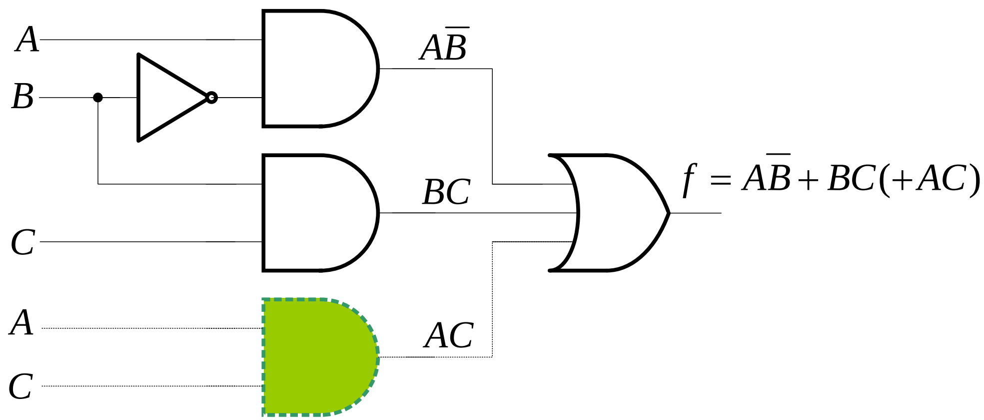


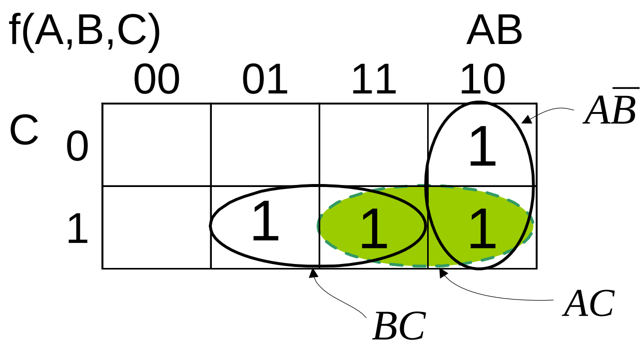
Vremenski hazard

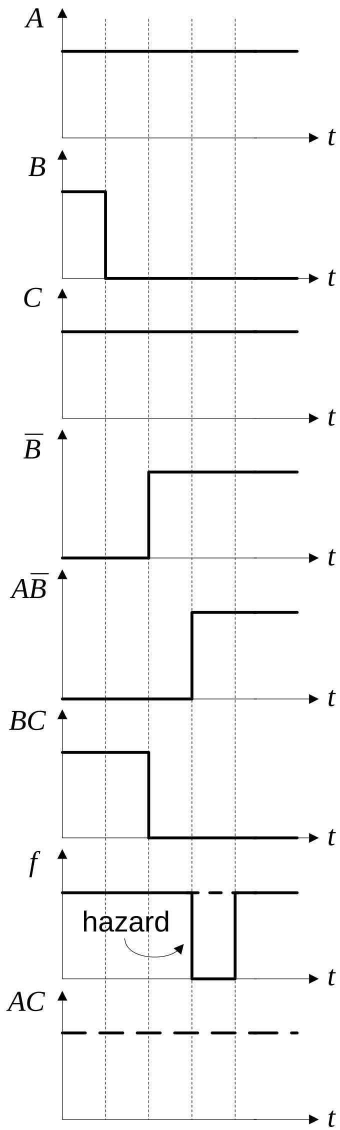
- *logički hazard*:
  - rezultat logičke implementacije funkcije
    ~ minimizacija Booleovog izraza!
  - *statički logički hazard*:
    ~ tipična pojava kad dva logička signala
    koji imaju suprotne vrijednosti (A i $\overline{A}$) poprimaju
    istu vrijednost *za vrijeme prijelaznog stanja*:
    - razmatrati ih kao *različite* signale!
    - dodati redundantni član (produkt/sumu)
  - standardno rješenje
    ~ izbjeći očitanje signala za prijelazne pojave:
    - *impulsi sinkronizacije*
      ~ usporavanje rada sustava!

Vremenski hazard

Primjer: $f = A\overline{B} + BC(+AC)$







Literatura

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 4: Minimizacija logičkih funkcija.

- minimum Booleove funkcije: str. 129-133
- K tablice,
  minimizacija K tablicama: str. 133-147
- vremenski hazard: str. 123-125, 159-160

Zadaci za vježbu (1)

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 4: Minimizacija logičkih funkcija.

- minimum Booleove funkcije: 4.1-4.2, 4.14,
- K tablice,
  minimizacija K tablicama: 4.3-4.11, 4.16
- vremenski hazard: 4.18-4.21

Zadaci za vježbu (2)

M. Čupić: *Digitalna elektronika i digitalna logika. Zbirka riješenih zadataka*, Cjelina 4: Minimizacija logičkih funkcija.

- minimum Booleove funkcije:
  - riješeni zadaci: 4.8a-c, 4.26, 4.27
  - zadaci za vježbu: 1-3, 7 (str.165-166)
- minimizacija K tablicama:
  - riješeni zadaci: 4.1-4.7, 4.8d, 4.13-4.16, 4.20-4.24
  - zadaci za vježbu: 4, 6, 8 (str.165-166)
- vremenski hazard:
  - riješeni zadaci: 4.5, 4.10