3. Osnove digitalne logike (1)

Sadržaj predavanja

- **logika sudova**
  - **logika sudova i digitalni sklopovi**
  - **logički kombinatori**
  - **simboli za logičke kombinatore**
- Booleova algebra

Logika sudova i digitalni sklopovi

- digitalni sustav
  ~ sve funkcije temeljene na
  malom skupu "osnovnih logičkih funkcija"
- sklopovi koji ostvaruju osnovne logičke funkcije
  ~ osnovni logički sklopovi:
  obrađuju "logičke varijable"
- elektroničke izvedbe osnovnih logičkih sklopova:

  "Električke veličine koje odgovaraju logičkim varijablama održavaju se unutar unaprijed definiranih i fiksnih granica (na ulazu i na izlazu)."

Logika sudova i digitalni sklopovi

- "logičke varijable", "osnovne logičke funkcije"
  ~ terminologija logike sudova
- *logika sudova, propozicijska logika*
  (engl. propositional logic)
  ~ "kombiniranje" *elementarnih* sudova
  radi dobivanja novih *složenih* sudova,
  bez obzira na suvislost samih sudova
- osnovni *kombinatori* sudova
  ~ "osnovni logički veznici"

Logika sudova i digitalni sklopovi

- sudovi (tvrdnje, iskazi):
  - jednostavne rečenice
  - istiniti ili neistiniti

Primjer:

sud A: "Nema ulja (u motoru)."

sud B: "Temperatura (motora) je previsoka."

Logički kombinatori

- osnovni logički veznici:
  ~ "kombinatori" I, ILI
- vrijednost složenog suda
  ~ istinit ili neistinit

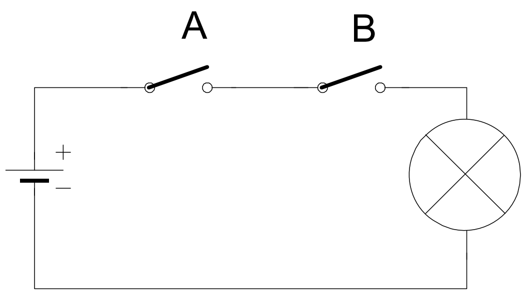
Primjer:

f = A ILI B = "Nema ulja (u motoru)."
ILI "Temperatura (motora) je previsoka."

f = A I B = "Nema ulja (u motoru)."
I "Temperatura (motora) je previsoka."

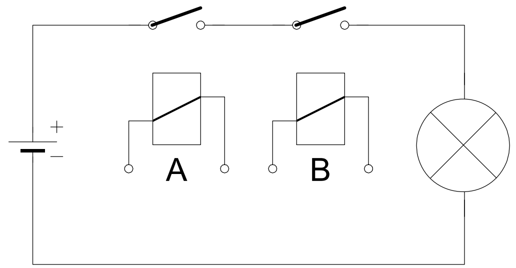
Logički kombinatori

- izvedba kombinatora I
  - (mehanički) kontakt:



A	≡	<sklopka A uključena>
B	≡	<sklopka B uključena>
f	≡	<žarulja svijetli>

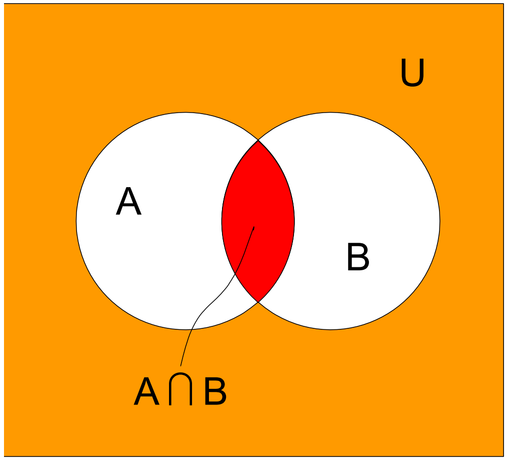
  - izvedba relejima:
    struja = pobuda releja



Interpretacija kombiniranja

- algoritamski:

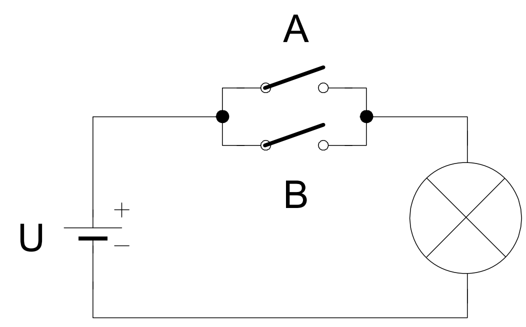
  ako (A istinit) ***i*** (B istinit)
  onda f istinit
  inače f neistinit



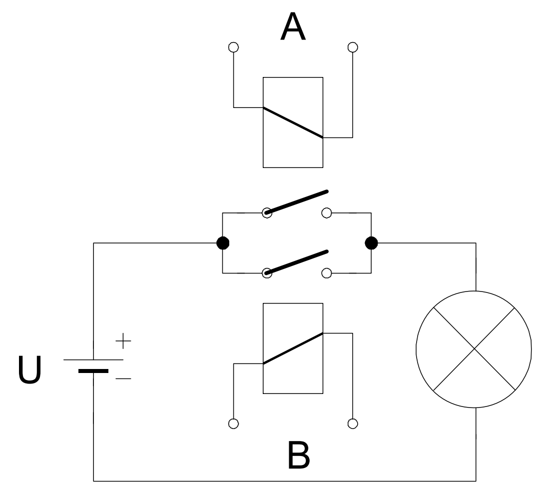
- "logički produkt"
  ~ *konjunkcija*
  - "računarska" notacija: $f = A \cdot B = AB$
  - simbolička logika: $f = A \wedge B$
  - teorija skupova: $f = A \bigcap B$

Logički kombinatori

- izvedba kombinatora ILI
  - (mehanički) kontakt:



A	≡	<sklopka A uključena>
B	≡	<sklopka B uključena>
f	≡	<žarulja svijetli>

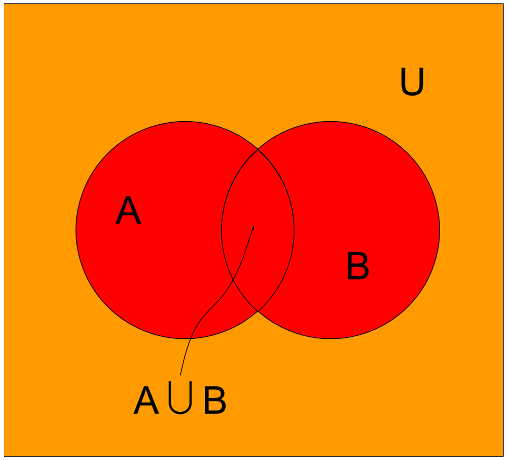


  - izvedba relejima:
    struja = pobuda releja

Interpretacija kombiniranja

- algoritamski

  ako (A istinit) ***ili*** (B istinit) *(ili oba!)*
  onda f istinit
  inače f neistinit



- "logička suma"
  ~ disjunkcija
  - "računarska" notacija: $f = A + B$
  - simbolička logika: $f = A \vee B$
  - teorija skupova: $f = A \cup B$

Tablice istinitosti (kombinacija)

- *tablica kombinacija, tablica istinitosti* (engl. truth table) ~ prikaz djelovanja kombinatora:
  konačni broj mogućih kombinacija
  vrijednosti istinitosti elementarnih sudova
- oznake: T ~ istina, ⊥ ~ neistina
- definiraju odnos ulaza i izlaza digitalnog sustava

funkcija I
(konjunkcija)

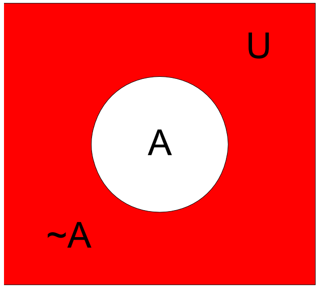
A	B	f
⊥	⊥	⊥
⊥	T	⊥
T	⊥	⊥
T	T	T

funkcija ILI
(inkluzivna disjunkcija)

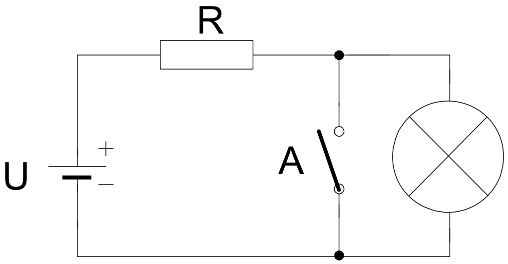
A	B	f
⊥	⊥	⊥
⊥	T	T
T	⊥	T
T	T	T

Logička negacija

- *logička funkcija NE, komplement, inverzija*
- *nije* kombinator (ali je korisni operator ☺)
- algoritamski



ako (A istinit)
  onda f neistinit
  inače f istinit



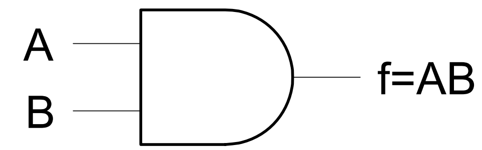
- logički izraz
  - "računarska" notacija: $f = \overline{A}$
  - simbolička logika: $f = \neg A$
  - teorija skupova: $f = A^C$

funkcija NE
(negacija)

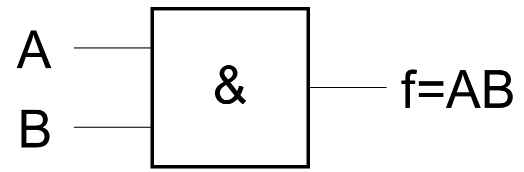
A	f
⊥	T
T	⊥

Simboli za logičke kombinatore

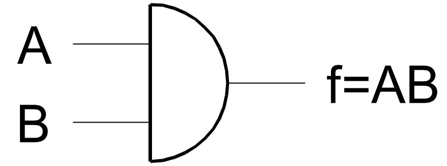
- simboli za kombinator I:
  - američki vojni standard Mil-STD-806B



  - međunarodni standard IEC/ISO, DIN 40900, ANSI/IEEE 91-1984

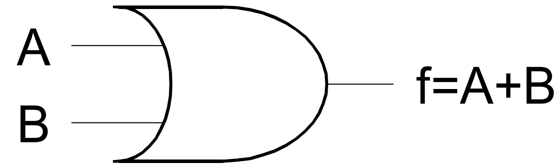


  - stari standard DIN

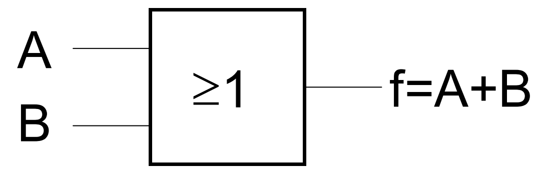


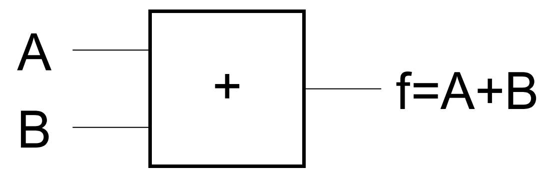
Simboli za logičke kombinatore

- simboli za kombinator ILI:
  - američki vojni standard Mil-STD-806B

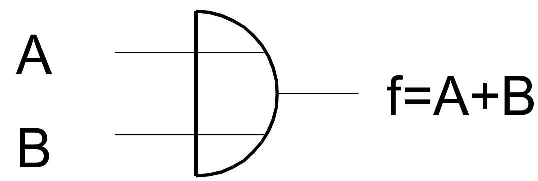


  - međunarodni standard IEC/ISO, DIN 40900, ANSI/IEEE 91-1984



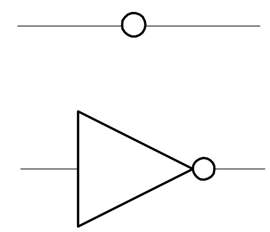


  - stari standard DIN

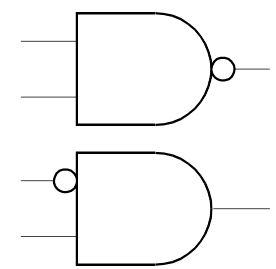


Simbol za logičku negaciju

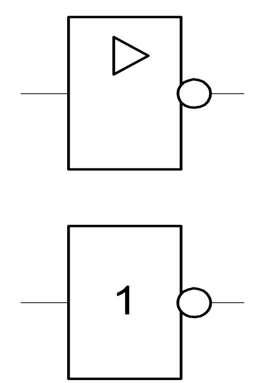
- simboli za operator NE:
  - američki vojni standard Mil-STD-806B



  - kombiniranje s drugim operatorima



  - međunarodni standard IEC/ISO



Sadržaj predavanja

- logika sudova
- **Booleova algebra**
  - **Huntingtonovi postulati**
  - **teoremi Booleove algebre**
  - **dvočlana Booleova algebra**
  - **teorija skupova kao Booleova algebra**

Booleova algebra

- osnovni matematički aparat korišten
  u analizi i projektiranju digitalnih sklopova:
  - G. Boole:
    formalizam za proučavanje "zakona prosuđivanja":
    "An Investigation of the Laws of Thought", 1854
  - C. E. Shannon:
    primjena Booleove algebre
    (u analizi relejnih elektromehaničkih sklopova):
    "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits", 1938

Booleova algebra

- izgradnja konzistentnog matematičkog sustava na aksiomatski način
- algebra se definira postavljanjem skupa tvrdnji
- formalna definicija:
  - konačni skup objekata: K
  - dvije *binarne* operacije: +, ·
  - skup osnovnih postulata (aksioma) ~ *aksiomatizacija*

Booleova algebra

- aksiomatizacija s dobrim svojstvima:
  - E. V. Huntington:
    "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic", 1904:
    ~ aksiomatizacija s *minimalnim* brojem postulata
    - konzistentnost:
      niti jedan postulat iz skupa ne proturječi nekom drugom iz istog skupa
    - nezavisnost:
      niti jedan se postulat ne da dokazati pomoću ostalih

Huntingtonovi postulati

P1: Postoji skup K objekata ili elemenata podložnih relaciji ekvivalencije, oznakom "=", koja zadovoljava princip supstitucije.

ekvivalencija:

- refleksivnost: $(\forall a \in K)(a = a)$
- simetričnost: $(\forall a, b \in K)(b = a \text{ uvijek kada je } a = b)$
- tranzitivnost: $(\forall a, b, c \in K)(a = b \text{ i } b = c \text{ implicira } a = c)$

Huntingtonovi postulati

P2: Definiraju se dva operatora kombiniranja "+" i "·" koji su zatvoreni s obzirom na K:

P2a: $(\forall a, b \in K)(a + b \in K)$

P2b: $(\forall a, b \in K)(a \cdot b \in K)$

P3: Za operatore kombiniranja postoji *neutralni element*:

P3a: $(\exists 0 \in K)(\forall a \in K \mid a + 0 = a)$

P3b: $(\exists 1 \in K)(\forall a \in K \mid a \cdot 1 = a)$

Huntingtonovi postulati

P4: Vrijedi zakon *komutacije*:

P4a: $(\forall a, b \in K)(a + b = b + a)$

P4b: $(\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a)$

P5: Vrijedi zakon *distribucije*:

P5a: $(\forall a, b, c \in K)(a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c))$

P5b: $(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c))$

Huntingtonovi postulati

P6: Postoji *inverzni* element – "komplement":

$$(\forall a \in K)(\exists \overline{a} \in K \mid (a + \overline{a} = 1)$$
$$(a \cdot \overline{a} = 0))$$

P7: Skup K sadrži *barem dva* različita elementa:

$$(\exists \texttt{ barem } a, b \in K \quad \mid \quad a \neq b)$$

Huntingtonovi postulati

- "operabilni" postulati
  ~ direktno korištenje u manipulacijama logičkih izraza
  - P3 (neutralni element)
  - P4 (komutativnost)
  - P5 (distributivnost)
  - P6 (inverzni element)

Huntingtonovi postulati

- inverzni element (komplement)
  ~ interpretacija kao rezultat operacije
    komplementiranja
- interpretacija "+" i "·" u uobičajenom smislu aritmetičkih operatora?
  ~ P5a i P6 ne vrijede!
- dualnost (metateorem o dualnosti):

  "Zamjenom operatora i neutralnih elemenata u nekom postulatu dobiva se njegov par, ako takav postoji."

Huntingtonovi postulati

- prioriteti operatora:
  - komplement, "—"
  - konjunkcija, "·"
  - inkluzivna disjunkcija, "+"
- zagrade mijenjaju redoslijed obavljanja operacija

Teoremi Booleove algebre

T1: dominacija

T1a: $(\forall a \in K)(a + 1 = 1)$

T1b: $(\forall a \in K)(a \cdot 0 = 0)$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
(a+1) &= (a+1)\cdot 1 && (P3b)\\
&= (a+1)\cdot(a+\overline{a}) && (P6)\\
&= a + (1\cdot \overline{a}) && (P5a)\\
&= a + \overline{a} && (P3b)\\
&= 1 && (P6)\\
& && \overline{(Q.E.D.)}
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

T2: idempotencija

T2a: $(\forall a \in K)(a + a = a)$

T2b: $(\forall a \in K)(a \cdot a = a)$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
(a + a) &= (a + a) \cdot 1 && (P3b) \\
&= (a + a) \cdot (a + \overline{a}) && (P6) \\
&= a + (a \cdot \overline{a}) && (P5a) \\
&= a + 0 && (P6) \\
&= a && (P3a) \\
& && \overline{} \\
& && (Q.E.D.)
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

T3: involucija

$$(\forall a \in K)(a = \overline{(\overline{a})})$$

Dokaz: bez dokaza

Teoremi Booleove algebre

T4:

T4a: $(\forall a,b \in K)(a + \overline{a}b = a + b)$

T4b: $(\forall a,b \in K)(a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b)$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\left(a + \overline{a}b\right) &= (a + \overline{a}) \cdot (a + b) && (P5a) \\
&= 1 \cdot (a + b) && (P6) \\
&= a + b && (P3b)
\end{aligned}$$

$(Q.E.D.)$

Teoremi Booleove algebre

T5: apsorpcija

T5a: $(\forall a,b \in K)(a + ab = a)$

T5b: $(\forall a,b \in K)(a \cdot (a + b) = a)$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
(a+ab) &= a \cdot 1 + ab && (P3b)\\
&= a \cdot (1+b) && (P5b)\\
&= a \cdot 1 && (T1)\\
&= a && (P3b)\\
& && \overline{}\\
& && (Q.E.D.)
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

L6: $$(\forall a,b,c \in K)(a\cdot((a+b)+c)=((a+b)+c)\cdot a)=a)$$

Dokaz:

$$a\cdot((a+b)+c)=a\cdot(a+b)+a\cdot c \qquad (P5)$$

$$=a+a\cdot c \qquad (T5)$$

$$=a \qquad (T5)$$

$$=((a+b)+c)\cdot a$$

$$\overline{(Q.E.D.)}$$

Teoremi Booleove algebre

T7: asocijativnost

T7a: $(\forall a,b,c \in K)((a+b)+c = a+(b+c))$

T7b: $(\forall a,b,c \in K)((a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c))$

Dokaz: indirektan

- ako tvrdnja teorema vrijedi, lijeva i desna strana su jednake, pa vrijedi idempotencija (T2):

$$
\begin{aligned}
z &= ((a+b)+c)\cdot(a+(b+c)) && (P5b)\\
&= ((a+b)+c)\cdot a + ((a+b)+c)\cdot(b+c) && (T6)\\
&= a + ((a+b)+c)\cdot(b+c) && (P5b)\\
&= a + (((a+b)+c)\cdot b + ((a+b)+c)\cdot c) && (P4, P6)\\
&= a + (b + ((a+b)+c)\cdot c) && (T5)\\
&= a + (b+c) && \overline{(Q.E.D.)}
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

T8: de Morganovi zakoni

T8a: $(\forall a, b \in K)(\overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b})$

T8b: $(\forall a, b \in K)(\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b})$

Dokaz: indirektan

- ispitivanjem ispravnosti komplementa (P6)

Teoremi Booleove algebre

Dokaz T8:

$$(a+b)+\overline{a}\cdot\overline{b}=((a+b)+\overline{a})\cdot((a+b)+\overline{b}) \quad (P5a)$$

$$=(\overline{a}+(a+b))\cdot(\overline{b}+(a+b)) \quad (P4)$$

$$=1\cdot 1 \quad (T5, T1)$$

$$=1 \quad (T1)$$

$$(a+b)\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})=a\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})+b\cdot(\overline{b}\cdot\overline{a}) \quad (P5b, P4b)$$

$$=0+0 \quad (T7, P6, T1)$$

$$=0 \quad (T2)$$

Teoremi Booleove algebre

Dokaz T8 (nastavak):

- oba zahtjeva P6 su zadovoljena:

  $(a+b)$ je jedinstveni komplement od $(\bar{a} \cdot \bar{b})$

$$a+b=\overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} \rightarrow \overline{a+b}=\bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$a \rightarrow \bar{a}, b \rightarrow \bar{b}$$

$$\overline{\bar{a}+\bar{b}}=\bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{b}}$$

$$=a \cdot b \qquad (T3)$$

$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a \cdot b} \rightarrow \overline{a \cdot b}=\bar{a}+\bar{b}$$

$$\overline{}$$
$$(Q.E.D.)$$

Teoremi Booleove algebre

Poopćenje de Morganovih zakona:

$$(\forall a,b,\dots,z \in K)(\overline{a+b+\dots+z} = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\dots\cdot\overline{z})$$

$$(\forall a,b,\dots,z \in K)(\overline{a\cdot b\cdot\dots\cdot z} = \overline{a}+\overline{b}+\dots+\overline{z})$$

Dokaz:

- putem asocijativnosti (T7)

$$\overline{a+b+c} = \overline{a+(b+c)} = \overline{a}\cdot\overline{b+c} = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$$

Teoremi Booleove algebre

T9: simplifikacija

T9a: $(\forall a,b \in K)(a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a)$

T9b: $(\forall a,b \in K)((a+b) \cdot (a+\overline{b}) = a)$

Dokaz:

- primjenom distributivnosti (P5) i neutralnog elementa (P3)

Dvočlana Booleova algebra

- najjednostavnija Booleova algebra: $K = K_2 = \{0,1\}$
  ~ 0 i 1 nemaju numerička nego *logička* značenja

$$
\begin{array}{lll}
a=1 & 1+0=1,\ 1\cdot 1=1 & (P3)\\
 & 0+1=1 & (P4)\\
 & 1+\overline{1}=1,\ 1\cdot\overline{1}=0,\ \overline{1}=0 & (P6)\\
 & 1+1=1 & (T1)\\
a=0 & 0+0=0,\ 0\cdot 1=0 & (P3)\\
 & 0+\overline{0}=1,\ 0\cdot\overline{0}=0,\ \overline{0}=1 & (P6)\\
 & 0\cdot 0=0 & (T1)
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ ekvivalentni *termi* (izrazi)
za 1 odnosno 0: $\overline{1}=0,\ \overline{0}=1$

$$1\cdot 1=1+0=0+1=1+1=1$$

$$0+0=0\cdot 1=1\cdot 0=0\cdot 0=0$$

Teorija skupova kao Booleova algebra

- teorija skupova
  ~ izomorfna dvočlanoj Booleovoj algebri:

  pridruživanje:

$$\left\langle K, \cdot, +, \bar{\ }, 0, 1 \right\rangle \leftrightarrow \left\langle S, \cap, \cup, \sim, \phi, U \right\rangle$$

$$K = \{0,1\} \leftrightarrow S = \{\phi, U\}$$

$$\phi: \quad \text{prazni skup}$$

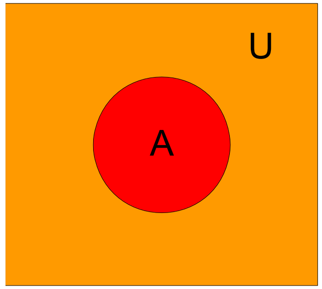
$$U: \quad \text{univerzalni skup}$$

- definicija operacija:

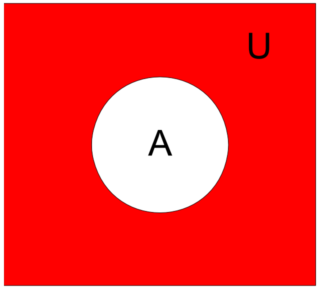
$$x \in A \cap B, x \in A \cup B, x \in \sim A$$

Teorija skupova kao Booleova algebra

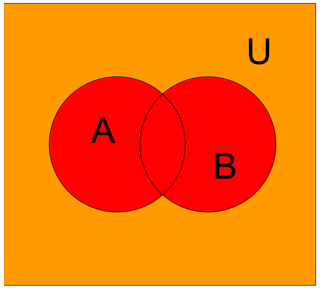
- Vennov dijagram
  ~ prikaz skupa skupom točaka
  - univerzalni skup U:
    kvadrat, pravokutnik ili slični lik
  - skup:
    lik (obično krug) unutar U



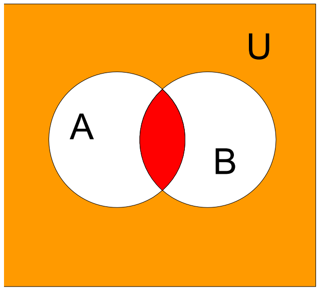
A



~A



A∪B



A∩B

Teorija skupova kao Booleova algebra

- postulati u skupovnom obliku:

(P3)
$$A \cup \phi = A$$
$$A \cap U = A$$

(P4)
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(P5)
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(P6)
$$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \phi$$

Literatura

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 3: Osnove digitalne logike.

- logika sudova: str. 79-89
- Booleova algebra: str. 89-96

Zadaci za vježbu

M. Čupić: *Digitalna elektronika i digitalna logika. Zbirka riješenih zadataka*, Cjelina 3: Booleova algebra.

- riješeni zadaci: 3.1 – 3.3