3. Osnove digitalne logike (2)

Sadržaj predavanja

- **Booleove funkcije**
  - **definicija**
  - **kanonski oblici**
  - **Shannonov teorem ekspanzije**
  - **komplementarna i dualna funkcija**
- Booleove funkcije dviju varijabli
- Booleove funkcije tri i više varijabli
- nepotpuno specificirane funkcije

Booleove funkcije

- logika sudova
  ~ izražavanje složenog
  suda kombiniranjem elementarnih sudova
  operatorima povezivanja (I, ILI)
- Booleova funkcija formalno:
  "neko pridruživanje funkcijskih vrijednosti (0 ili 1) za svaku kombinaciju vrijednosti argumenata (varijabli)"
- funkcija od n varijabli:

  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow 2^n$ mogućih kombinacija
- izražavanje Booleove funkcije
  ~ tablica kombinacija (2^n redaka),
  analogno osnovnim logičkim funkcijama I, ILI, NE

Booleove funkcije

- upisivanje funkcije u tablicu

Primjer: $f(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

```
ako je  A=1 "ili" B=1
        onda f=1
        inače f=0
```

$\Rightarrow$ *isključena* kombinacija A=1, B=1

isključivo ILI, *ekskluzivna disjunkcija*, EX-ILI

Booleove funkcije

- definicija:

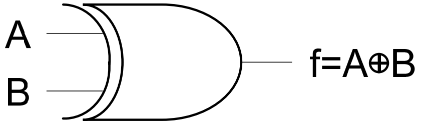
$$f(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

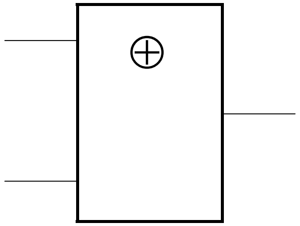
A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

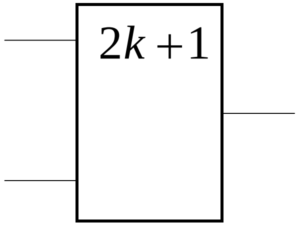
- notacija:

$$f(A,B) = A \oplus B$$

- simbol:
  - suma mod 2
  - 1 za neparni broj 1 na ulazima







Kanonski oblici

- čitanje funkcije iz tablice:
  - za f = 1:

$$(A=0)\cdot(B=1)+(A=1)\cdot(B=0)$$

dakle

$$(\overline{A}=1)\cdot(B=1)+(A=1)\cdot(\overline{B}=1)$$

$$\Rightarrow f=\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}$$

  - za f = 0:

$$\overline{(A=0)\cdot(B=0)+(A=1)\cdot(B=1)}$$

$$\overline{(A=0)\cdot(B=0)}\cdot\overline{(A=1)\cdot(B=1)}=\left[\overline{(A=0)}+\overline{(B=0)}\right]\cdot\left[\overline{(A=1)}+\overline{(B=1)}\right]$$

$$=\left[(A=1)+(B=1)\right]\cdot\left[(A=0)+(B=0)\right]$$

$$\Rightarrow f=(A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})$$

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Kanonski oblici

- čitanje općenite funkcije iz tablice:

A	B	f
0	0	α_0
0	1	α_1
1	0	α_2
1	1	α_3

  - za f = 1:

$$f = \alpha_0 \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B}) + \alpha_1 \cdot (\overline{A} \cdot B) + \alpha_2 \cdot (A \cdot \overline{B}) + \alpha_3 \cdot (A \cdot B)$$
$$= \alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1 + \alpha_2 \cdot P_2 + \alpha_3 \cdot P_3$$

  - za tablicu iz primjera (EX-ILI):

$$\alpha_0 = \alpha_3 = 0$$
$$\underline{\alpha_1 = \alpha_2 = 1}$$
$$f = P_1 + P_2$$

  - općenito za funkciju od n varijabli:

$$f = \alpha_0 \cdot P_0 + \ldots + \alpha_{2^n-1} \cdot P_{2^n-1} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \cdot P_i, \quad \alpha_i \in \{0,1\}$$

Kanonski oblici

- čitanje općenite funkcije iz tablice:
  - za f = 1:

    oblik $$f = \alpha_0 \cdot P_0 + \ldots + \alpha_{2^n-1} \cdot P_{2^n-1} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \cdot P_i, \quad \alpha_i \in \{0,1\}$$

    kanonski, standardni oblik:
    potpuni disjunktivni normalni oblik

Kanonski oblici

- čitanje općenite funkcije iz tablice – definicije:
  - *literal* : varijabla ili komplement
  - *produkt* : niz literala povezanih operacijom I
  - *suma* : niz literala povezanih operacijom ILI
  - *normalni član* : produkt/suma u kojoj se niti jedan literal ne pojavljuje više od jednog puta
  - *standardni produkt* : normalni produkt koji sadrži toliko literala koliko funkcija ima varijabli:
    - *kanonski produkt*, P_i ili *minterm*, m_i
    - u tablici kombinacija odgovara mu *samo jedna* 1
  - *standardna suma produkata* : kanonski oblik funkcije

Kanonski oblici

- čitanje općenite funkcije iz tablice:

A	B	f
0	0	α_0
0	1	α_1
1	0	α_2
1	1	α_3

  - za f = 0:

$$f = \left[\alpha_0 + (A + B)\right] \cdot \left[\alpha_1 + (A + \bar{B})\right] \cdot \left[\alpha_2 + (\bar{A} + B)\right] \cdot \left[\alpha_3 + (\bar{A} + \bar{B})\right]$$

$$= (\alpha_0 + S_0) \cdot (\alpha_1 + S_1) \cdot (\alpha_2 + S_2) \cdot (\alpha_3 + S_3)$$

  - za tablicu iz Primjera (EX-ILI):

$$\alpha_0 = \alpha_3 = 0$$

$$\underline{\alpha_1 = \alpha_2 = 1}$$

$$f = S_0 \cdot S_3$$

  - općenito za funkciju od n varijabli:

$$f = (\alpha_0 + S_0) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{2^n-1} + S_{2^n-1}) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i + S_i)$$

Kanonski oblici

- čitanje općenite funkcije iz tablice:
  - za f = 0:
    oblik $$f = (\alpha_0 + S_0) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{2^n-1} + S_{2^n-1}) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i + S_i)$$
  - također *kanonski*, standardni oblik:
    potpuni konjunktivni normalni oblik
  - oznake:
    S_i: *kanonske sume* ili *makstermi*, M_i

Kanonski oblici

- mintermi i makstermi:

x	y	z	minterm	m_i	x	y	z	maksterm	M_i
0	0	0	$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$	m_0	0	0	0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z$	m_1	0	0	1	$x+y+\bar{z}$	M_1
0	1	0	$\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}$	m_2	0	1	0	$x+\bar{y}+z$	M_2
0	1	1	$\bar{x}\cdot y\cdot z$	m_3	0	1	1	$x+\bar{y}+\bar{z}$	M_3
1	0	0	$x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$	m_4	1	0	0	$\bar{x}+y+z$	M_4
1	0	1	$x\cdot\bar{y}\cdot z$	m_5	1	0	1	$\bar{x}+y+\bar{z}$	M_5
1	1	0	$x\cdot y\cdot\bar{z}$	m_6	1	1	0	$\bar{x}+\bar{y}+z$	M_6
1	1	1	$x\cdot y\cdot z$	m_7	1	1	1	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$	M_7

Kanonski oblici

- standardni (kanonski) oblici su ekvivalentni:
  - npr. za EX-ILI:

$$
\begin{aligned}
f &= (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B}) \\
&= A\cdot\overline{A}+\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{B} \\
&= 0+\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}+0 \\
&= \overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}
\end{aligned}
$$

  - izbor standardnog oblika za prikaz:
    - mali broj 1 u definiciji funkcije
      ~ kanonska suma standardnih *produkata*
    - mali broj 0 u definiciji funkcije
      ~ kanonski produkt standardnih *suma*
    - *manji broj članova* (terma)
      ~ brže/jednostavnije čitanje iz tablice!

Kanonski oblici

- drugi prikazi:
  - varijabla ~ 1, komplement ~ 0
    - standardni članovi = *vektori* (*n*-torke) ~ *n-bitni brojevi* !
    - interpretacija Booleove funkcije: $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
    - *skraćeno pisanje funkcije*

    ~ indeksi minterma/maksterma

$$f = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = \Sigma(1,2) = \Pi(0,3)$$

Shannonov teorem ekspanzije

- pretvorba nekanonskog oblika Booleove funkcije u kanonski oblik:
  - *suma produkata*
    ~ svaki produkt koji nije kanonski logički "množiti" s 1
    $1 = x + \bar{x}$, x: varijabla koja nedostaje

Primjer:

$$f = \bar{A} + \bar{B} \cdot C$$
$$= \bar{A}(B + \bar{B})(C + \bar{C}) + (A + \bar{A}) \cdot \bar{B}C$$
$$= \ldots$$
$$= \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

Shannonov teorem ekspanzije

- pretvorba nekanonskog oblika Booleove funkcije u kanonski oblik:
  - *produkt suma*
    ~ svakoj sumi koja nije kanonska logički "pribrojiti" 0

$$x \cdot \overline{x} = 0$$

Primjer:

$$\begin{aligned} f &= (A+C)\cdot(B+\overline{C}) \\ &= (A+B\cdot\overline{B}+C)\cdot(A\cdot\overline{A}+B+\overline{C}) \\ &= \ldots \\ &= (A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C}) \end{aligned}$$

Komplementarna i dualna funkcija

- *komplementarna* funkcija :
  ~ funkcija kojoj su vrijednosti komplementarne onima izvorne funkcije ($0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$)

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \cdot P_i \qquad\qquad \overline{f} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \overline{\alpha}_i \cdot P_i$$

$$= \prod_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i + S_i) \quad \rightarrow \quad = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\overline{\alpha}_i + S_i)$$

vrijedi: $f = \sum_{i \in I_P} P_i \quad \rightarrow \quad \overline{f} = \sum_{j \in \{2^n\} - I_P} P_j = \prod_{i \in I_P} S_i$

Primjer: komplementarna funkcija

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= P_1 + P_3 + P_4 + P_6 + P_7 \\
&= \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(A,B,C) &= \overline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC} \\
&= \overline{\overline{A}\,\overline{B}C} \cdot \overline{\overline{A}BC} \cdot \overline{A\overline{B}\,\overline{C}} \cdot \overline{AB\overline{C}} \cdot \overline{ABC} \\
&= (A + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) \\
&= S_1 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 \cdot S_7 \\
&= \ldots \\
&= \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{B}C = \overline{A}(B + \overline{B})\overline{C} + A\overline{B}C = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C \\
&= P_0 + P_2 + P_5
\end{aligned}
$$

Komplementarna i dualna funkcija

- *dualna* funkcija:
  ~ funkcija koja se dobiva zamjenom operatora (+,·) i konstanti (0, 1) izvorne funkcije

$$f = f(A, B, C, \ldots, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1) \rightarrow f_D = f_D(A, B, C, \ldots, \cdot, +, \bar{\ }, 1, 0)$$

vrijedi: $(f_D)_D = f$

Komplementarna i dualna funkcija

Primjer: dualna funkcija

$$f(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC = P_1 + P_3 + P_4 + P_6 + P_7$$

$$\begin{aligned} f_D(A,B,C) &= (\overline{A} + \overline{B} + C)\cdot(\overline{A} + B + C)\cdot(A + \overline{B} + \overline{C})\cdot(A + B + \overline{C})\cdot(A + B + C) \\ &= \ldots \\ &= AC + \overline{A}B\overline{C} \\ &= \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + ABC \\ &= P_2 + P_5 + P_7 \end{aligned}$$

Komplementarna i dualna funkcija

- izražavanje de Morganovih zakona (= komplement funkcije) dualnom funkcijom:
  - de Morgan: $\overline{f} = \overline{f(A, B, C, \ldots, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)}$

    $= f(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots, \cdot, +, \bar{\ }, 1, 0)$
  - komplement funkcije (još jednom):

    $$\overline{f}(A, B, C, \ldots) = f_D(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots)$$
  - postupak komplementiranja:
    - komplementirati varijable
    - izvesti dualnu funkciju
- primjena komplementarne funkcije ~ pojednostavljivanje Booleovih izraza

Sadržaj predavanja

- Booleove funkcije
- **Booleove funkcije dviju varijabli**
  - **klasifikacija**
  - **osnovne i univerzalne funkcije**
- Booleove funkcije tri i više varijabli
- nepotpuno specificirane funkcije

Booleove funkcije dviju varijabli

- kombinacije varijabli
  ~ uzeti u obzir *sve moguće* kombinacije vrijednosti 0 i 1 koje varijable mogu poprimiti:
  - broj kombinacija: $r = 2^n$
  - svakoj kombinaciji moguće pridružiti *dvije* vrijednosti: 0 ili 1
  - broj mogućih Booleovih funkcija od *n* varijabli:

n	2^n	2^{2^n}
1	2	4
2	4	16
3	8	256
4	16	64K = 65.536
5	32	4G = 4.294.967.296

Booleove funkcije dviju varijabli

- moguće funkcije jedne varijable:

A	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_0, f_3: konstante (nularne funkcije)

$f_0=0$

$f_3=1$

f_1, f_2: unarne funkcije

$f_1=A$: varijabla

$f_2=\overline{A}$: komplement

Booleove funkcije dviju varijabli

- moguće funkcije dvije varijable:

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

➔ *klase* funkcija od dvije varijable

1. konstante: f_0, f_{15}
2. funkcije pojedinačne varijable: f_3, f_5, f_{10}, f_{12}
3. konjunkcije literala: f_1, f_2, f_4, f_8
4. disjunkcije literala: $f_7, f_{11}, f_{13}, f_{14}$
5. ekvivalencija i ekskluzivna disjunkcija: f_6, f_9

Booleove funkcije dviju varijabli

- moguće funkcije dvije varijable:

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

	$f_0 = 0$	konstanta
(*)	$f_1 = AB$	I
(*)	$f_2 = A\overline{B}$	inhibicija
	$f_3 = A$	identitet
	$f_4 = \overline{A}B$	inhibicija
	$f_5 = B$	identitet
(*)	$f_6 = \overline{A}B + A\overline{B}$	EX-ILI
(*)	$f_7 = A + B$	ILI
(*)	$f_8 = \overline{A + B}$	NILI
(*)	$f_9 = \overline{A}\,\overline{B} + AB$	ekvivalencija
(*)	$f_{10} = \overline{B}$	komplement
(*)	$f_{11} = A + \overline{B} = (B \Rightarrow A)$	implikacija
	$f_{12} = \overline{A}$	komplement
	$f_{13} = \overline{A} + B = (A \Rightarrow B)$	implikacija
(*)	$f_{14} = \overline{AB}$	NI
	$f_{15} = 1$	konstanta

*** - različite netrivijalne funkcije**

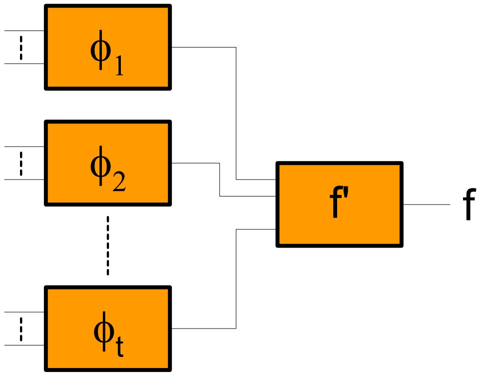
Booleove funkcije dviju varijabli

- međusobno komplementarne funkcije:
  - I i NI
  - ILI i NILI
  - INHIBICIJA i IMPLIKACIJA
  - ISKLJUČIVO ILI i EKVIVALENCIJA
- međusobno dualne funkcije:
  - I i ILI
  - NI i NILI
  - INHIBICIJA i IMPLIKACIJA
  - ISKLJUČIVO ILI i EKVIVALENCIJA

Osnovne i univerzalne funkcije

- zapažanje:
  - nagli porast broja mogućih funkcija
    ~ hipereksponencijalni zakon
  - za $n \geq 3$ već nema smisla pisati tablicu!
    - ograničiti se na $f(x_1, x_2)$
    - pronaći one $f(x_1, x_2)$ kojima će se moći ostvariti sve ostale funkcije
      ~ "univerzalne" funkcije?
    - izražavanje $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kao *kompozicija* izvjesnog broja $f(x_1, x_2)$

$$f = f'(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t)$$



Osnovne i univerzalne funkcije

- potreba za ograničavanjem broja različitih Booleovih funkcija, odnosno *sklopova* koji ih ostvaruju:
  - razlozi tehničko-proizvodne prirode
    - standardizacija funkcija/sklopova
    - *masovna* proizvodnja *samo nekih* logičkih sklopova (engl. economy of scale)
  - samo definiranim (malim!) skupom funkcija (sklopova) ostvariti *sve* (preostale) funkcije (sklopove)

Osnovne i univerzalne funkcije

- *potpuni sustav funkcija* :

  "skup Booleovih funkcija naziva se *funkcijski potpuni* sustav ako se iz funkcija takvog skupa, korištenjem superpozicije i zamjene, može dobiti svaka Booleova funkcija"

  - superpozicija ~ primjena funkcije
  - zamjena ~ promjena mjesta varijabli (i načina dekompozicije složene Booleove funkcije)

- elementi potpunog sustava funkcija ~ *osnovne* (*primitivne*) funkcije

Osnovne i univerzalne funkcije

- potpuni sustav funkcija:
  - želja: *minimalni* potpuni sustav,
    ekonomski najopravdaniji!
  - provjera potpunosti sustava funkcija: izražavanje {I, ILI, NE}
  - {I, ILI, NE} također jedan potpuni sustav, jedino *nije* minimalan!

Osnovne i univerzalne funkcije

- neki potpuni sustavi funkcija:

{I,NE}: $\{f_1, f_{10}\}$, $\{f_1, f_{12}\}$
{ILI,NE}: $\{f_7, f_{10}\}$, $\{f_7, f_{12}\}$

$\Rightarrow$ nije potrebno {I, ILI, NE}!

provjera za {I, NE}: de Morganom za ILI

$$ILI\ (A,B) = ILI\ (NE\ (NE\ (A)), NE\ (NE\ (B)))$$
$$= NE\ (I\ (NE\ (A), NE\ (B)))$$

$$A + B = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$$

Osnovne i univerzalne funkcije

- neki (drugi) potpuni sustavi funkcija:

{EX-ILI, I, 1}: $\{f_1, f_6, f_{15}\}$

$$EX-ILI(A,B) = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$EX\text{-}ILI(A,1) = \overline{A}$$

$$EX\text{-}ILI(EX\text{-}ILI(A,B), I(A,B)) = ILI(A,B)$$

{EX-NILI, I, 1} : $\{f_1 , f_9 , f_{15}\}$

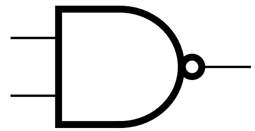
{inhibicija, 1} : $\{f_2 , f_{15}\}$

{implikacija, 0} : $\{f_{11} , f_0\}$

Osnovne i univerzalne funkcije

- posebno značajni potpuni sustavi funkcija:
  oni koji sadrže *samo jednu* funkciju!

  {NI} : { f_{14} }

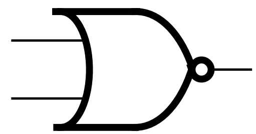
  

  $\overline{A\cdot A} = \overline{A}$

  $\overline{\overline{AB}} = AB$

  $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A+B$

  {NILI} : { f_8 }

  $\overline{A+A} = \overline{A}$

  $\overline{\overline{A}+\overline{B}} = AB$

  $\overline{\overline{A+B}} = A+B$

- *univerzalne funkcije* : NI, NILI
  - minimalni potpuni skup funkcija
  - minimalni broj različitih sklopova
  - *invertor* (NI = *NE*∘I, NILI = *NE*∘ILI)
    ~ dodatno pojačanje signala

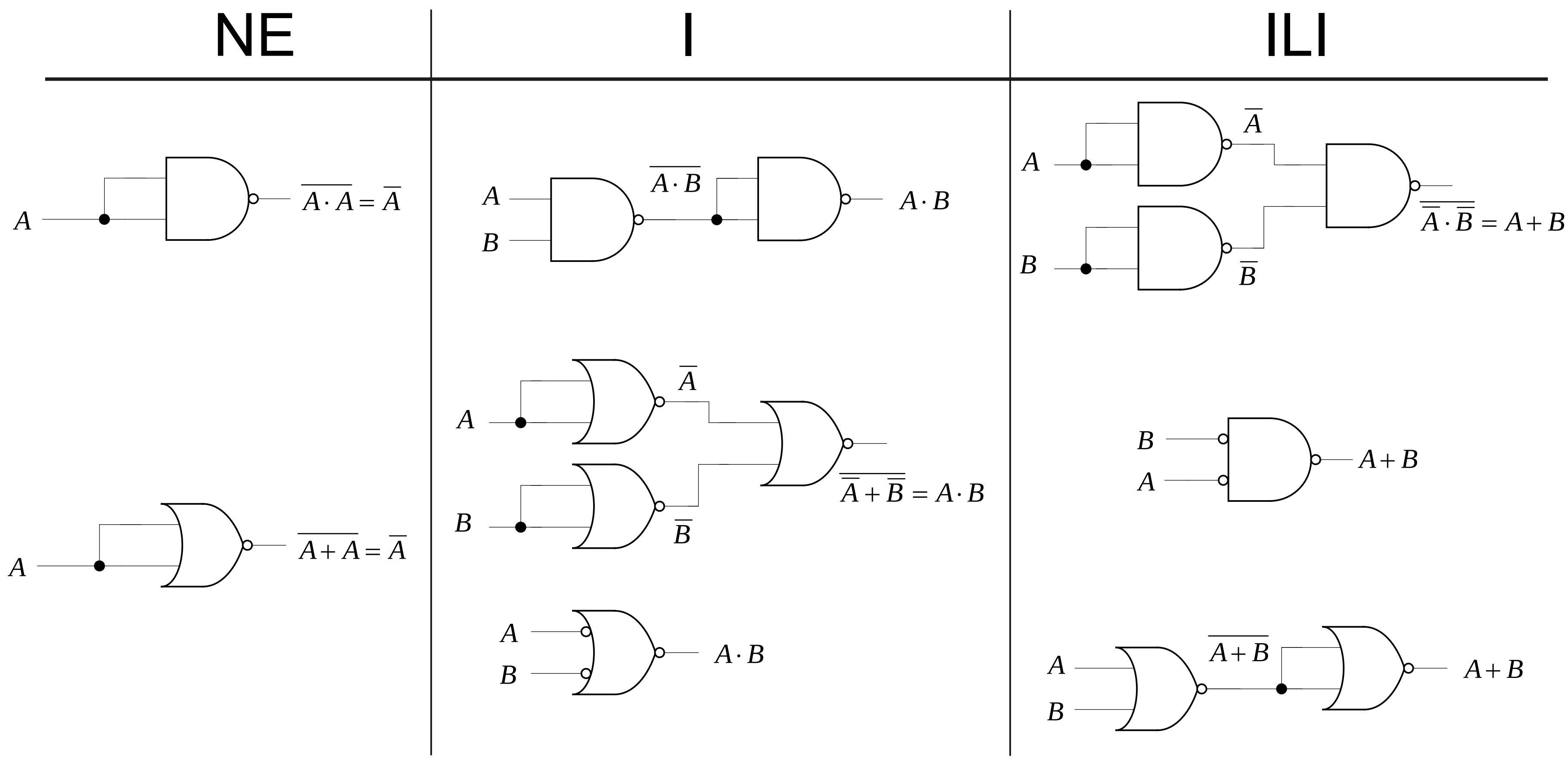
Osnovne i univerzalne funkcije

Primjer: ostvarivanje {I, ILI, NE} korištenjem {NI}

$$
\begin{aligned}
I(A,B) &= NE(NE(I(A,B))) \\
&= NE(NI(A,B)) \\
&= NE(I(NI(A,B),NI(A,B))) \\
&= NI(NI(A,B),NI(A,B)) \\
NE(A) &= NE(I(A,A)) \\
&= NI(A,A) \\
ILI(A,B) &= ILI(NE(NE(A)),NE(NE(B))) \\
&= NE(I(NE(A),NE(B))) \\
&= NI(NI(A,A),NI(B,B))
\end{aligned}
$$

Osnovne i univerzalne funkcije

Primjer : ostvarivanje {I, ILI, NE} korištenjem {NI} i {NILI}

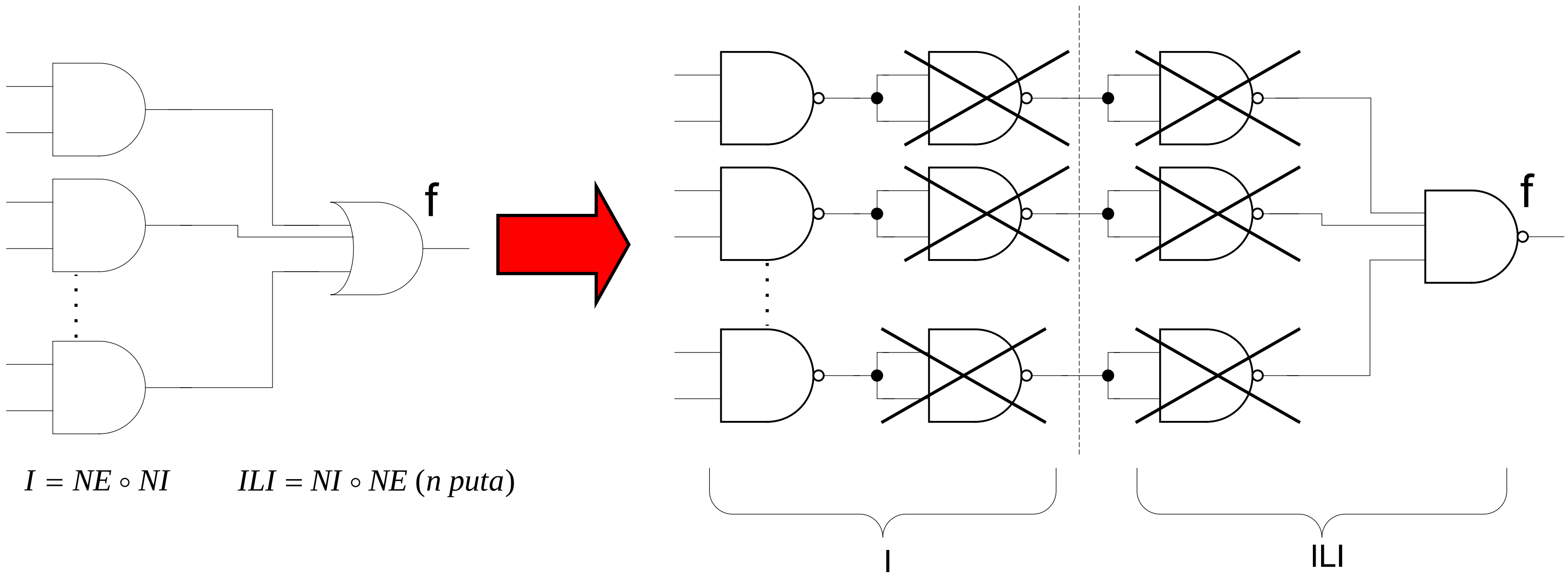


Osnovne i univerzalne funkcije

- zapažanje:
  - {I, ILI, NE} povoljno pri formuliranju problema/rješenja ~ konceptualno blisko
  - {NI, NILI} povoljno pri ostvarenju digitalnog sklopa ~ blisko električkoj izvedbi
  - potreba za transformacijom izraza kojim je definirana Booleova funkcija
- metode transformacije:
  - metoda supstitucije
  - algebarska metoda

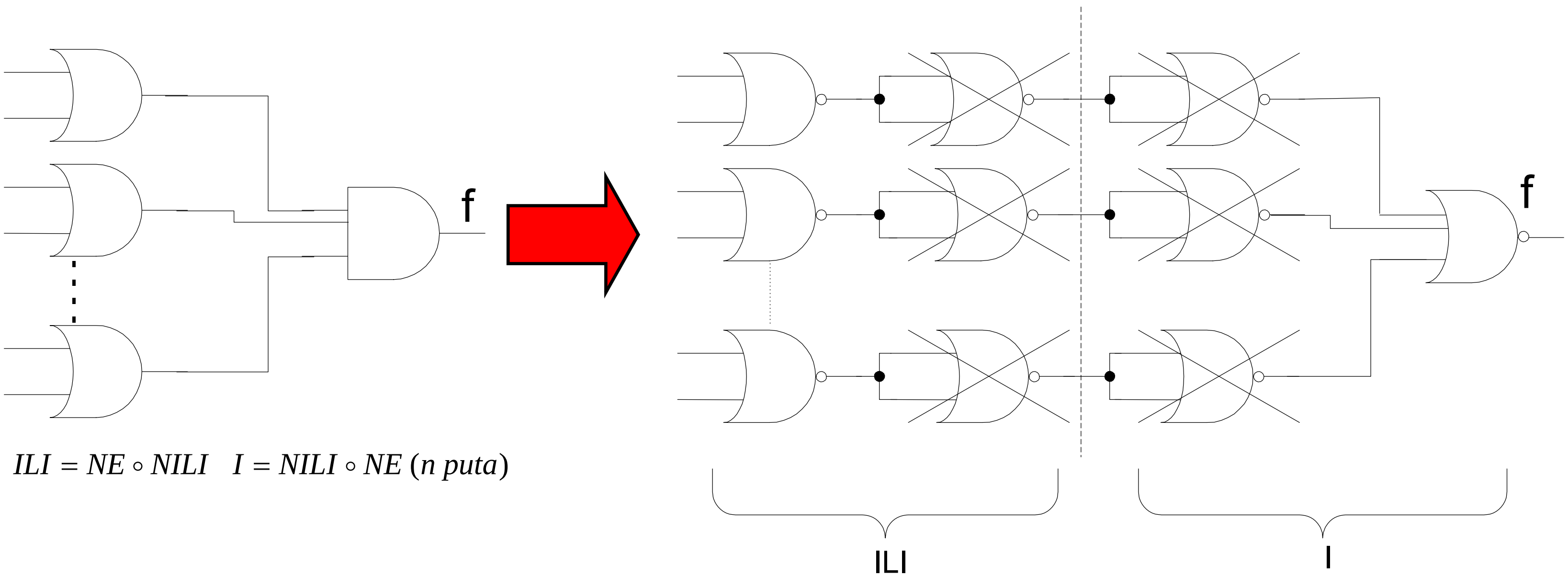
Osnovne i univerzalne funkcije

- *metoda supstitucije*
  za funkcije u obliku *sume produkata*:
  - zamijeniti osnovne funkcije univerzalnima:
    NE → NI∘NI, I → NE∘NI, ILI → NI∘NE
  - primijeniti T3 (involucija)
    ~ eliminirati dvostruku primjenu funkcija NE



Osnovne i univerzalne funkcije

- metoda supstitucije
  za funkcije u obliku *produkta suma*:
  - zamijeniti osnovne funkcije univerzalnima:
    NE → NILI∘NILI, ILI → NE∘NILI, I → NILI∘NE
  - primijeniti T3 (involucija)
    ~ eliminirati dvostruku primjenu funkcija NE



Osnovne i univerzalne funkcije

- *algebarska metoda*
  za funkcije u obliku *sume produkata*:
  - primijeniti T3 (involucija) na izraz kojim je definirana Booleova funkcija
  - primijeniti T8 (de Morganov zakon)

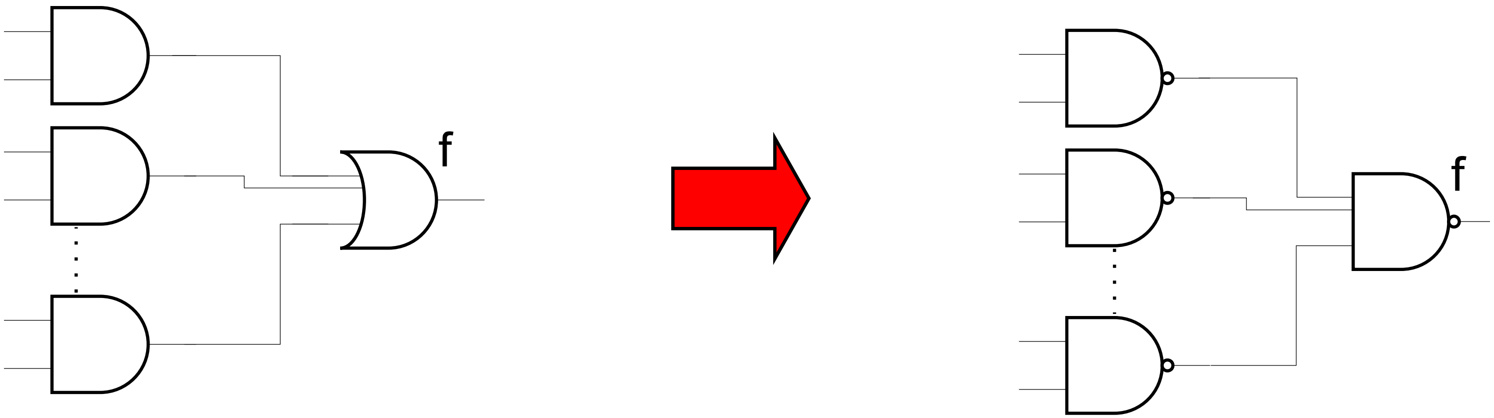
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i P_i$$

$$= \overline{\overline{\alpha_0 P_0}} + \overline{\overline{\alpha_1 P_1}} + \ldots + \overline{\overline{\alpha_{2^n-1} P_{2^n-1}}}$$

$$= \overline{\overline{\alpha_0 P_0} \cdot \overline{\alpha_1 P_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\alpha_{2^n-1} P_{2^n-1}}}$$

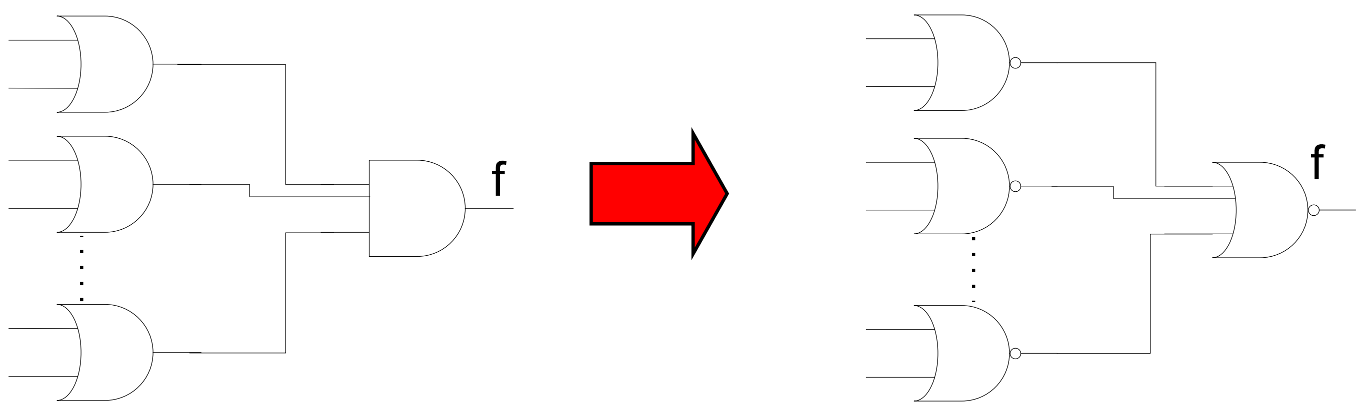
Osnovne i univerzalne funkcije

- algoritam transformacije
  za funkcije u obliku *sume produkata*:
  - svaki produkt (funkcija I) prikazati kao funkciju NI; NI pojedinačne varijable reducira se na komplement
  - na dobivene NI članove primijeniti "izlazni" NI član
- *dvorazinska* logička shema



Osnovne i univerzalne funkcije

- algoritam transformacije
  za funkcije u obliku *produkta suma*:
  - svaku sumu (funkcija ILI) prikazati funkcijom NILI;
    NILI pojedinačne varijable reducira se na komplement
  - na dobivene NILI članove primijeniti "izlazni" NILI član
- također dvorazinska logička shema



Osnovne i univerzalne funkcije

Primjer:

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{B}C$$

$$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{\overline{A}\,\overline{B}C}}$$

Primjer:

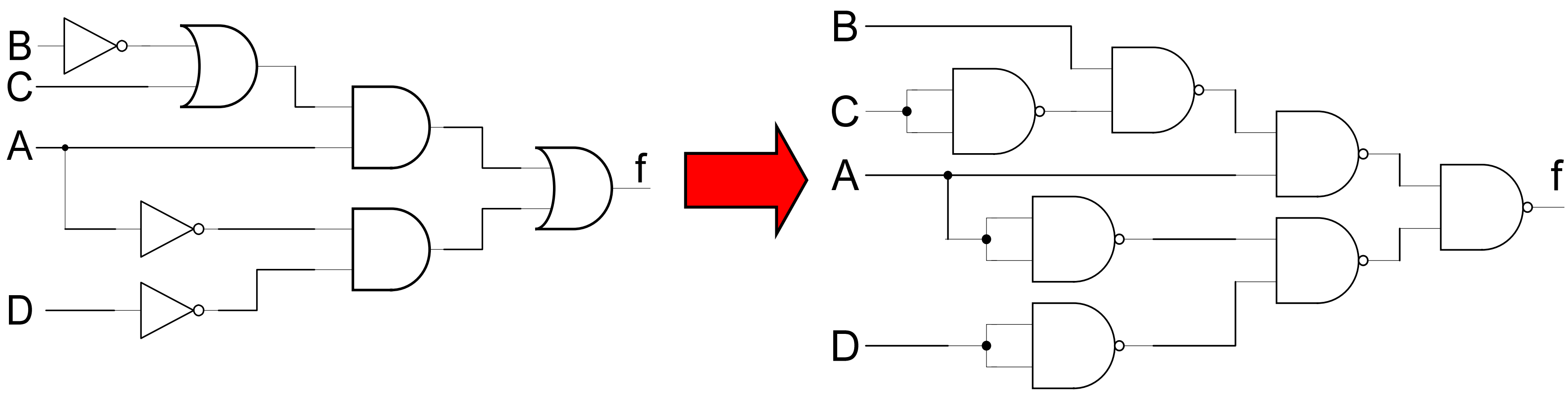
$$f = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C)$$

$$= \overline{\overline{A + B} + \overline{\overline{A} + \overline{B} + C}}$$

Osnovne i univerzalne funkcije

- transformacija funkcije koja *nije* u obliku sume produkata ili produkta suma ~ *višerazinska* logička shema

Primjer : $f = A\cdot(\overline{B}+C)+\overline{A}\,\overline{D} = \overline{\overline{A\cdot(\overline{B}+C)}\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{D}}} = \overline{\overline{A\cdot\overline{B\overline{C}}}\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{D}}}$



Sadržaj predavanja

- Booleove funkcije
- Booleove funkcije dviju varijabli
- **Booleove funkcije tri i više varijabli**
- nepotpuno specificirane funkcije

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcija na više varijabli:
  - generiranje složenijih funkcija
    opetovanom primjenom funkcija manjeg broja varijabli
  - standardizacija funkcijskih implementacija
    ~ standardizacija logičkih sklopova:
    ekonomičnost!
  - treba zadovoljiti:
    - komutativnost (~ "zamjena")
    - asocijativnost (~ "superpozicija")

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije I: moguće je!
  - asocijativnost:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases} f(f(\dots(f(x_1,x_2),x_3)\dots),x_n) \\ f(x_1,f(x_2,\dots,f(x_{n-1},x_n),\dots)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n &= (\dots((x_1\cdot x_2)\cdot x_3)\dots)\cdot x_n) \\ &= (x_1\cdot(x_2\cdot\ldots\cdot(x_{n-1}\cdot x_n)\dots)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_n &= (\dots((x_1+x_2)+x_3)\dots)+x_n) \\ &= (x_1+(x_2+\ldots+(x_{n-1}+x_n)\dots)) \end{aligned}$$

  - komutativnost: "izmiješati" varijable

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije EX-ILI: promjena definicije!

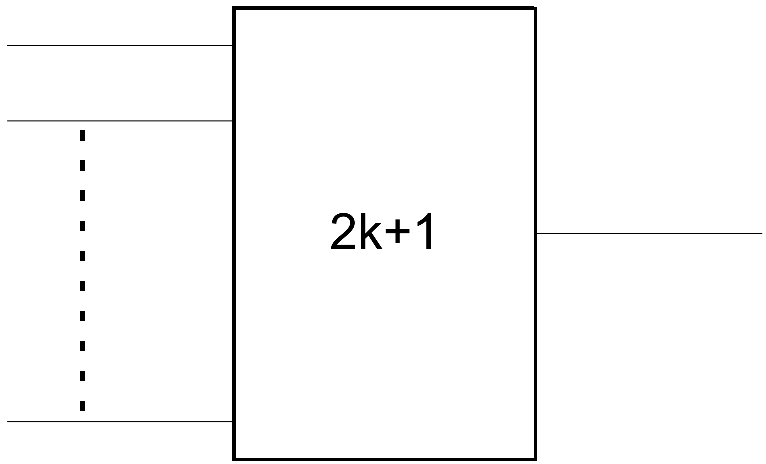
  Primjer: asocijativnost po stupcima tablice

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	C	$A \oplus B \oplus C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije EX-ILI: promjena definicije!
  - EX-ILI(A, B) = A "ili" B, ali ne oba!
  - EX-ILI(A, B, C) = neparan broj 1
    ~ oznaka: 2k+1

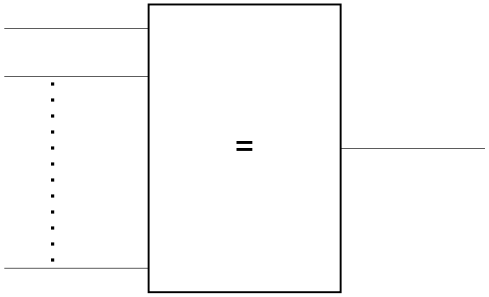


Booleove funkcije tri i više varijabli

- svojstva funkcije EX-ILI:
  1. komutativnost
  2. asocijativnost
  3. distributivnost
  4. $A \oplus 0 = A$
  5. $A \oplus 1 = \overline{A}$
  6. $A \oplus A = 0$
  7. $A \oplus \overline{A} = 1$
  8. $A \oplus B = \overline{A} \oplus \overline{B}$
- važnost EX-ILI:
  - aritmetički sklopovi
  - zaštita poruka od pogrešaka prilikom prijenosa
  - generiranje pseudo-slučajnih nizova (kodiranje, kriptiranje)

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije EX-NILI:
  - n = 2: "ekvivalencija" dvije varijable
  - n = 3: neparni paritet (2k+1)
  - n = 4: komplement neparnog pariteta
  - definicija: logički identitet svih varijabli !



$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2...\bar{x}_n + x_1x_2...x_n$$

Booleove funkcije tri i više varijabli

- proširivanje univerzalnih funkcija NI, NILI: ne ide!
  ~ slijediti definiciju funkcija

$$
\begin{aligned}
NI \equiv NE \circ I \Leftrightarrow NI(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\equiv NE(I(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \\
&= \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \\
&= \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots + \overline{x}_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
NILI \equiv NE \circ ILI \Leftrightarrow NILI(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\equiv NE(ILI(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \\
&= \overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \\
&= \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n
\end{aligned}
$$

Booleove funkcije tri i više varijabli

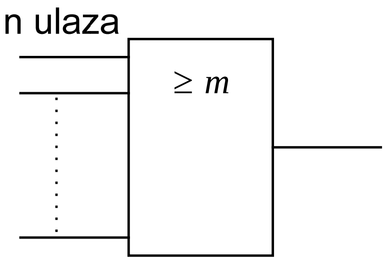
- proširivanje univerzalnih funkcija NI, NILI: ne ide!
  - asocijativnost ne vrijedi!

$$NI(A,B,C) = \overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \neq \begin{cases} NI(NI(A,B),C) = \overline{\overline{AB}C} = AB + \overline{C} \\ NI(A,NI(B,C)) = \overline{A\overline{BC}} = \overline{A} + BC \end{cases}$$

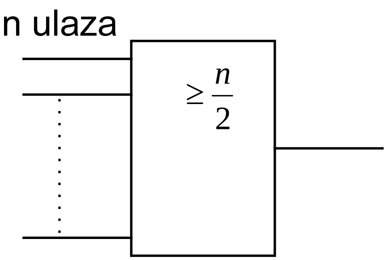
  - zato se držati definicije
    (NI = NE∘I, NILI = NE∘ILI)
  - uočiti
    ~ NI i NILI su međusobno dualne

Booleove funkcije tri i više varijabli

- druge (složene) Booleove funkcije:
  - logički prag [threshold f.]:
    $\geq$ m ulaza u 1, m < n

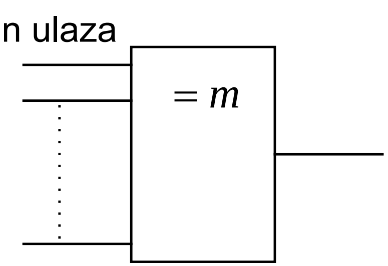


  - majoritet [majority f.]:
    većinska f, f. glasanja
    > n/2 ulaza u 1



  - "samo m":

    upravo m ulaza u 1, m < n



Sadržaj predavanja

- Booleove funkcije
- Booleove funkcije dviju varijabli
- Booleove funkcije tri i više varijabli
- **nepotpuno specificirane funkcije**

Nepotpuno specificirane funkcije

- u nekim primjenama se *ne* pojavljuju *sve* ulazne kombinacije:
  - nije važna vrijednost funkcije (engl. don't care)
  - u tablicu kombinacija upisuje se "X"

Primjer: funkcija koja ispituje je li dekadska znamenka prikazana BCD (8421) kodom neparna

- koristi se *samo 10* ulaznih kombinacija, preostalih 6 su X

Nepotpuno specificirane funkcije

Primjer (nastavak):

$A = a_3a_2a_1a_0$: dekadska znamenka

$f = \Sigma m(1, 3, 5, 7, 9) + \Sigma d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$

$= \Pi M(0, 2, 4, 6, 8) \cdot \Pi d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$

	a_3	a_2	a_1	a_0	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
	1	0	1	0	X
	1	0	1	1	X
	1	1	0	0	X
	1	1	0	1	X
	1	1	1	0	X
	1	1	1	1	X

Literatura

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 3: Osnove digitalne logike.

- Booleove funkcije: str. 96-105
- Booleove funkcije dviju varijabli: str. 105-111, 115-120
- Booleove funkcije tri i više varijabli: str. 112-115

Zadaci za vježbu (1)

U. Peruško, V. Glavinić: *Digitalni sustavi*, Poglavlje 3: Osnove digitalne logike.

- Booleove funkcije: 3.5-3.14
- Booleove funkcije dviju varijabli: 3.15-3.20
- Booleove funkcije tri i više varijabli: 3.21-3.23, 3.25

Zadaci za vježbu (2)

M. Čupić: *Digitalna elektronika i digitalna logika. Zbirka riješenih zadataka*, Cjelina 3: Booleova algebra.

- riješeni zadaci: 3.4 – 3.15
  (bez modeliranja jezikom VHDL)
- zadaci za vježbu: 1 – 22 (str. 112-114)