3. Osnove digitalne logike

Osnove digitalne logike

- logika sudova
- Booleova algebra
- kanonski oblik Booleovih funkcija
- skupine osnovnih logičkih funkcija
- univerzalne funkcije
- nepotpuno specificirane funkcije

Logika sudova

- digitalni sustav
  ~ sve funkcije temeljene na
  malom skupu "osnovnih logičkih funkcija"
- sklopovi koji ostvaruju osnovne logičke funkcije
  ~ osnovni logički sklopovi :
  obrađuju "logičke varijable"
- elektroničke izvedbe osnovnih logičkih sklopova:
- "Električke veličine koje odgovaraju logičkim varijablama održavaju se unutar unaprijed definiranih i fiksnih granica (na ulazu i na izlazu)."

Logika sudova

- "logičke varijable", "osnovne logičke funkcije"
  ~ terminologija logike sudova
- *logika sudova*, *propozicijska logika*
  (engl. propositional logic)
  ~ "kombiniranje" *elementarnih* sudova
  radi dobivanja novih *složenih* sudova,
  bez obzira na suvislost samih sudova
- osnovni *kombinatori* sudova
  ~ "osnovni logički veznici"

Logika sudova (propozicijska logika)

- sudovi (tvrdnje, iskazi):
  - jednostavne rečenice
  - istiniti ili neistiniti

Primjer:

sud A: "Nema ulja (u motoru)."

sud B: "Temperatura (motora) je previsoka."

Logika sudova

- osnovni logički veznici:
  ~ "kombinatori" I, ILI
- vrijednost složenog suda
  ~ istinit ili neistinit

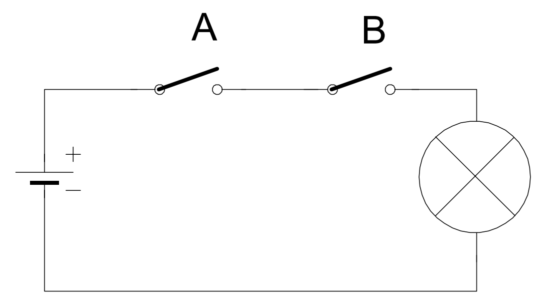
Primjer:

f = A ILI B = "Nema ulja (u motoru)."
ILI "Temperatura (motora) je previsoka."

f = A I B = "Nema ulja (u motoru)."
I "Temperatura (motora) je previsoka."

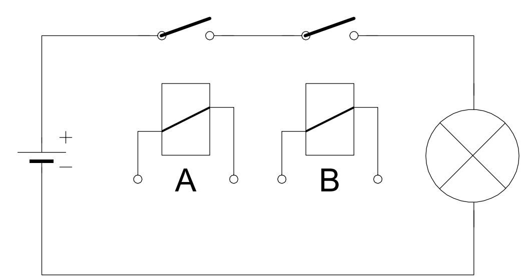
Logički kombinatori

- izvedba kombinatora I
  - (mehanički) kontakt:



A ≡ <sklopka A uključena>
B ≡ <sklopka B uključena>
f ≡ <žarulja svijetli>

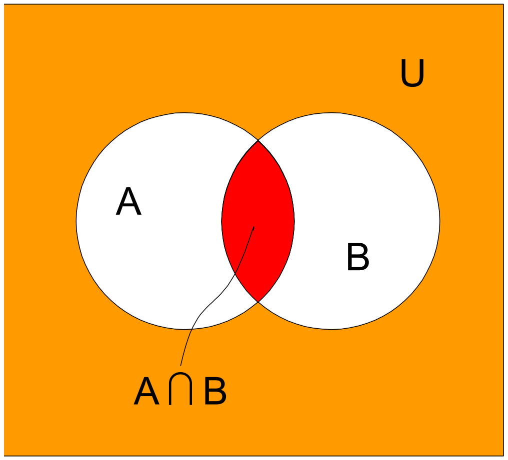
  - izvedba relejima:
    struja = pobuda releja



Interpretacija kombiniranja

- algoritamski:

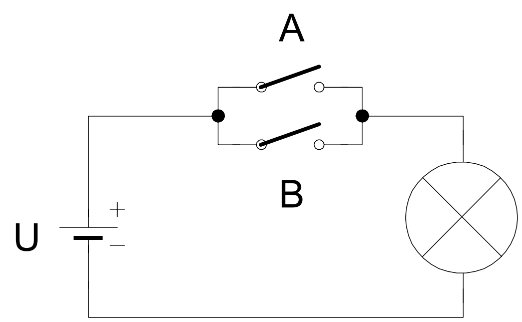
  ako (A istinit) ***i*** (B istinit)
  onda f istinit
  inače f neistinit



- "logički produkt"
  ~ *konjunkcija*
  - "računarska" notacija: $f = A \cdot B = AB$
  - simbolička logika: $f = A \wedge B$
  - teorija skupova: $f = A \bigcap B$

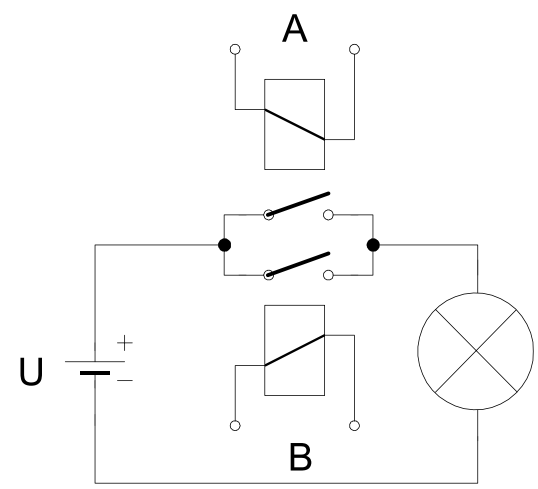
Logički kombinatori

- izvedba kombinatora ILI
  - (mehanički) kontakt:



A ≡ <sklopka A uključena>
B ≡ <sklopka B uključena>
f ≡ <žarulja svijetli>

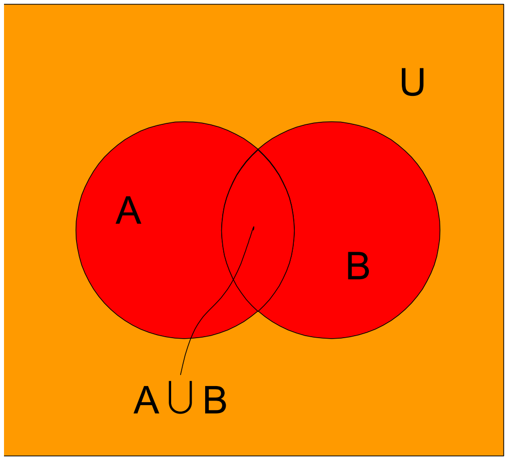
  - izvedba relejima:
    struja = pobuda releja



Interpretacija kombiniranja

- algoritamski

  ako (A istinit) ***ili*** (B istinit) *(ili oba!)*
  onda f istinit
  inače f neistinit



- "logička suma"
  ~ disjunkcija
  - "računarska" notacija: $f = A + B$
  - simbolička logika: $f = A \vee B$
  - teorija skupova: $f = A \bigcup B$

Tablice istinitosti (kombinacija)

- *tablica kombinacija, tablica istinitosti* (engl. truth table) ~ prikaz djelovanja kombinatora:
  konačni broj mogućih kombinacija
  vrijednosti istinitosti elementarnih sudova
- oznake: T ~ istina, ⊥ ~ neistina
- definiraju odnos ulaza i izlaza digitalnog sustava

funkcija I
(konjunkcija)

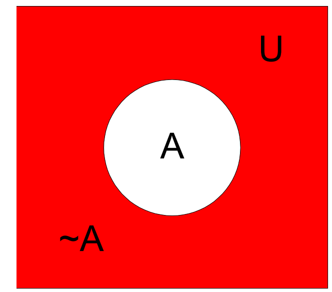
A	B	f
⊥	⊥	⊥
⊥	T	⊥
T	⊥	⊥
T	T	T

funkcija ILI
(inkluzivna disjunkcija)

A	B	f
⊥	⊥	⊥
⊥	T	T
T	⊥	T
T	T	T

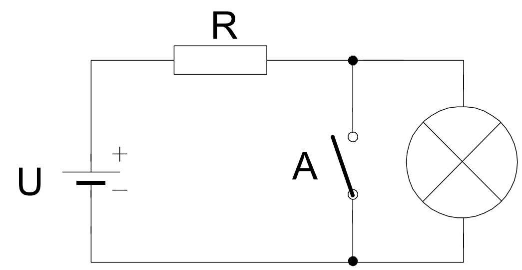
Logička negacija

- *logička funkcija NE, komplement, inverzija*
- *nije* kombinator
  - složeni sud od jedne logičke varijable



- algoritamski

  ako (A istinit) ***i*** (B istinit)
  onda f istinit
  inače f neistinit



- logički izraz
  - "računarska" notacija: $f = \overline{A}$
  - simbolička logika: $f = \neg A$
  - teorija skupova: $f = A^C$

funkcija NE
(negacija)

A	f
⊥	T
T	⊥

Booleova algebra

- osnovni matematički aparat korišten u analizi i projektiranju digitalnih sklopova:
  - G. Boole:
    formalizam za proučavanje "zakona prosuđivanja":
    "An Investigation of the Laws of Thought", 1854
  - C. E. Shannon:
    primjena Booleove algebre:
    "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits", 1938
    - efikasna primijena za analizu relejnih elektromehaničkih sklopova

Booleova algebra

- izgradnja konzistentnog matematičkog sustava na aksiomatski način
- algebra se definra postavljanjem skupa tvrdnji
- formalna definicija:
  - konačni skup objekata: K
  - dvije *binarne* operacije: +, ·
  - skup osnovnih postulata (aksioma) ~ *aksiomatizacija*

Booleova algebra

- aksiomatizacija s dobrim svojstvima:
  - E. V. Huntington:
    "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic", 1904:
  - zadatak reduciranje Booleove algebre na minimalni broj postulata
    - konzistentnost:
      niti jedan postulat iz skupa ne proturječi nekom drugom iz istog skupa
    - nezavisnost:
      niti jedan se postulat ne da dokazati pomoću ostalih
- skup $\{K,+,\cdot,\bar{\ }\}$ je Booleva algebra ako vrijede ...

Huntingtonovi postulati

- P1: Postoji skup K objekata ili elemenata podložnih relaciji ekvivalencije, oznakom "=", koja zadovoljava princip supstitucije.
- ekvivalencija:
  - refleksivnost: $(\forall a \in K)(a = a)$
  - simetričnost: $(\forall a, b \in K)(b = a \text{ uvijek kada je } a = b)$
  - tranzitivnost: $(\forall a, b, c \in K)(a = b \text{ i } b = c \text{ implicira } a = c)$

Huntingtonovi postulati

P2: Definiraju se dva operatora kombiniranja "+" i "·" koji su zatvoreni s obzirom na K:

P2a: $(\forall a,b \in K)(a+b \in K)$

P2b: $(\forall a,b \in K)(a \cdot b \in K)$

P3: Za operatore kombiniranja postoji *neutralni element*:

P3a: $(\exists 0 \in K)(\forall a \in K \mid a+0=a)$

P3b: $(\exists 1 \in K)(\forall a \in K \mid a \cdot 1=a)$

Huntingtonovi postulati

P4: Vrijedi zakon *komutacije*:

P4a: $(\forall a, b \in K)(a + b = b + a)$

P4b: $(\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a)$

P5: Vrijedi zakon *distribucije*:

P5a: $(\forall a, b, c \in K)(a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c))$

P5b: $(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c))$

Huntingtonovi postulati

P6: Postoji *inverzni* element – "komplement":

$$(\forall a \in K)(\exists \overline{a} \in K \quad | \quad (a + \overline{a} = 1); (a \cdot \overline{a} = 0))$$

P7: Skup K sadrži *barem dva* različita elementa:

$$(\exists \text{ barem } a, b \in K \quad | \quad a \neq b)$$

Huntingtonovi postulati

- "operabilni" postulati
  ~ direktno korištenje u manipulacijama logičkih izraza
  - P3 (neutralni element)
  - P4 (komutativnost)
  - P5 (distributivnost)
  - P6 (inverzni element)

Huntingtonovi postulati

- inverzni element (komplement)
  ~ interpretacija kao rezultat operacije komplementiranja
- interpretacija "+" i "·" u uobičajenom smislu aritmetičkih operatora?
  ~ P5a i P6 ne vrijede!
- dualnost (metateorem o dualnosti):

  "Zamjenom operatora i neutralnih elemenata u nekom postulatu dobiva se njegov par, ako takav postoji."

Huntingtonovi postulati

- prioriteti operatora:
  - komplement
  - konjunkcija
  - inkluzivna disjunkcija
- zagrade mijenjaju redoslijed obavljanja operacija
  - preporuča se uporaba radi izbjegavanja krivih interpretacija

Teoremi Booleove algebre

T1: dominacija

T1a: $(\forall a \in K)(a+1=1)$

T1b: $(\forall a \in K)(a \cdot 0=0)$

Dokaz:

$(a+1)=(a+1)\cdot 1$	$(P3b)$	$(\exists 1 \in K)(\forall a \in K \mid a \cdot 1 = a)$
$=(a+1)\cdot(a+\overline{a})$	$(P6)$	$(\forall a \in K)(\exists \overline{a} \in K \mid (a+\overline{a}=1);(a\cdot\overline{a}=0))$
$=a+(1\cdot\overline{a})$	$(P5a)$	$(\forall a,b,c \in K)(a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c))$
$=a+\overline{a}$	$(P3b)$	$(\exists 1 \in K)(\forall a \in K \mid a \cdot 1 = a)$
$=1$	$(P6)$	$(\forall a \in K)(\exists \overline{a} \in K \mid (a+\overline{a}=1);(a\cdot\overline{a}=0))$

$\overline{}$
$(Q.E.D.)$ (lat. quod erat demonstrandum)

Teoremi Booleove algebre

T2: idempotencija

T2a: $(\forall a \in K)(a + a = a)$

T2b: $(\forall a \in K)(a \cdot a = a)$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
(a + a) &= (a + a) \cdot 1 && (P3b) \quad (\exists 1 \in K)(\forall a \in K \mid a \cdot 1 = a) \\
&= (a + a) \cdot (a + \overline{a}) && (P6) \quad (\forall a \in K)(\exists \overline{a} \in K \mid (a + \overline{a} = 1); (a \cdot \overline{a} = 0)) \\
&= a + (a \cdot \overline{a}) && (P5a) \quad (\forall a, b, c \in K)(a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)) \\
&= a + 0 && (P6) \quad (\forall a \in K)(\exists \overline{a} \in K \mid (a + \overline{a} = 1); (a \cdot \overline{a} = 0)) \\
&= a && (P3a) \quad (\exists 0 \in K)(\forall a \in K \mid a + 0 = a)
\end{aligned}
$$

$\overline{}$

$(Q.E.D.)$

Teoremi Booleove algebre

T3: involucija

$$(\forall a \in K)(a = \overline{(\overline{a})})$$

Dokaz: …

Teoremi Booleove algebre

T4:

T4a: $(\forall a,b \in K)(a+\overline{a}b = a+b)$

T4b: $(\forall a,b \in K)(a\cdot(\overline{a}+b) = a\cdot b)$

Dokaz:

$$\left(a+\overline{a}b\right) = (a+\overline{a})\cdot(a+b) \qquad (P5a) \quad (\forall a,b,c \in K)(a+(b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c))$$

$$= 1\cdot(a+b) \qquad (P6) \quad (\forall a \in K)(\exists \overline{a} \in K \mid (a+\overline{a}=1);(a\cdot\overline{a}=0))$$

$$= a+b \qquad (P3b) \quad (\exists 1 \in K)(\forall a \in K \mid a\cdot 1 = a)$$

$$\overline{}$$

$(Q.E.D.)$

Teoremi Booleove algebre

T5: apsorpcija

T5a: $(\forall a, b \in K)(a + ab = a)$

T5b: $(\forall a, b \in K)(a \cdot (a + b) = a)$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
(a + ab) &= a \cdot 1 + ab && (P3b) \\
&= a \cdot (1 + b) && (P5b) \\
&= a \cdot 1 && (T1) \\
&= a && (P3b) \\
& && \overline{\qquad\qquad} \\
& && (Q.E.D.)
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

L6:

$$(\forall a,b,c \in K)(a \cdot ((a+b)+c) = ((a+b)+c) \cdot a) = a)$$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
a \cdot ((a+b)+c) &= a \cdot (a+b) + a \cdot c && (P5) \\
&= a + a \cdot c && (T5) \\
&= a && (T5) \\
&= ((a+b)+c) \cdot a && \\
& && \overline{(Q.E.D.)}
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

T7: asocijativnost

T7a: $(\forall a,b,c \in K)((a+b)+c = a+(b+c))$

T7b: $(\forall a,b,c \in K)((a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b \cdot c))$

Dokaz: indirektan

- ako tvrdnja teorema vrijedi, lijeva i desna strana su jednake, pa vrijedi idempotencija (T2):

$$\begin{aligned}
z &= ((a+b)+c)\cdot(a+(b+c)) && (P5b)\\
&= ((a+b)+c)\cdot a + ((a+b)+c)\cdot(b+c) && (T6)\\
&= a + ((a+b)+c)\cdot(b+c) && (P5b)\\
&= a + (((a+b)+c)\cdot b + ((a+b)+c)\cdot c) && (P4, P6)\\
&= a + (b + ((a+b)+c)\cdot c) && (T5)\\
&= a + (b+c) && \overline{(Q.E.D.)}
\end{aligned}$$

Teoremi Booleove algebre

T8: de Morganovi zakoni

T8a: $(\forall a,b \in K)(\overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b})$

T8b: $(\forall a,b \in K)(\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b})$

Dokaz: indirektan

- ispitivanjem ispravnosti komplementa (P6)

$$(\forall a \in K)(\exists \overline{a} \in K \quad | \quad (a+\overline{a}=1);(a \cdot \overline{a}=0))$$

Teoremi Booleove algebre

Dokaz T8:

$$
\begin{aligned}
(a+b)+\overline{a}\cdot\overline{b} &= ((a+b)+\overline{a})\cdot((a+b)+\overline{b}) && (P5a)\\
&= (\overline{a}+(a+b))\cdot(\overline{b}+(a+b)) && (P4)\\
&= 1\cdot 1 && (T5, T1)\\
&= 1 && (T1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b}) &= a\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})+b\cdot(\overline{b}\cdot\overline{a}) && (P5b, P4b)\\
&= 0+0 && (T7, P6, T1)\\
&= 0 && (T2)
\end{aligned}
$$

Teoremi Booleove algebre

- Dokaz T8 (nastavak):
- oba zahtjeva P6 su zadovoljena:

$(a+b)$ je jedinstveni komplement od $(\overline{a}\cdot\overline{b})$

$$a+b=\overline{\overline{a}\cdot\overline{b}} \rightarrow \overline{a+b}=\overline{a}\cdot\overline{b}$$

$$a \rightarrow \overline{a}, b \rightarrow \overline{b}$$

$$\overline{\overline{a}+\overline{b}}=\overline{\overline{a}}\cdot\overline{\overline{b}}$$

$$=a\cdot b \qquad (T3)$$

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a\cdot b} \rightarrow \overline{a\cdot b}=\overline{a}+\overline{b}$$

$$\overline{(Q.E.D.)}$$

Teoremi Booleove algebre

Poopćenje de Morganovih zakona:

$$(\forall a, b, \ldots, z \in K)(\overline{a + b + \ldots + z} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \ldots \cdot \overline{z})$$

$$(\forall a, b, \ldots, z \in K)(\overline{a \cdot b \cdot \ldots \cdot z} = \overline{a} + \overline{b} + \ldots + \overline{z})$$

Dokaz:

- putem asocijativnosti (T7)

$$\overline{a + b + c} = \overline{a + (b + c)} = \overline{a} \cdot \overline{b + c} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$$

Teoremi Booleove algebre

T9: simplifikacija

T9a: $(\forall a,b \in K)(a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a)$

T9b: $(\forall a,b \in K)((a+b) \cdot (a+\overline{b}) = a)$

Dokaz:

- primjenom distributivnosti (P5) i neutralnog elementa (P3)

Dvočlana Booleova algebra

- najjednostavnija Booleova algebra

$K = K_2 = \{0,1\}$ 0 i 1 nemaju numerička nego logička značenja

$$
\begin{array}{lll}
a = 1 & 1+0=1,\ 1\cdot 1 = 1 & (P3) \\
 & 0+1=1 & (P4) \\
 & 1+\overline{1}=1,\ 1\cdot\overline{1}=0,\ \overline{1}=0 & (P6) \\
 & 1+1=1 & (T1) \\
a = 0 & 0+0=0,\ 0\cdot 1 = 0 & (P3) \\
 & 0+\overline{0}=1,\ 0\cdot\overline{0}=0,\ \overline{0}=1 & (P6) \\
 & 0\cdot 0=0 & (T1)
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ ekvivalentni termi (izrazi) za 1 odnosno 0:

$$\overline{1}=0,\ \overline{0}=1$$

$$1\cdot 1=1+0=0+1=1+1=1$$

$$0+0=0\cdot 1=1\cdot 0=0\cdot 0=0$$

Dvočlana Booleova algebra

- teorija skupova
  ~ izomorfna dvočlanoj Booleovoj algebri:

  pridruživanje:

  $$\left\langle K,\cdot,+,\bar{\ },0,1\right\rangle \leftrightarrow \left\langle S,\bigcap,\bigcup,\sim,\phi,U\right\rangle$$

  $$K=\{0,1\}\leftrightarrow S=\{\phi,U\}$$

  ϕ : prazni skup

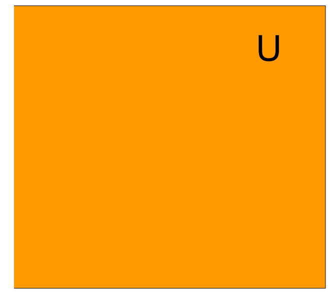
  U : univerzalni skup

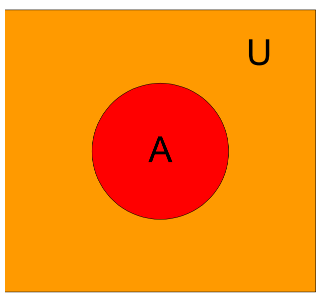
- definicija operacija:

  $$x\in A\bigcap B,\, x\in A\bigcup B,\, x\in\sim A$$

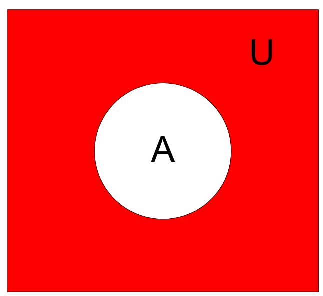
Teorija skupova kao Booleova algebra

- Vennov dijagram
  ~ prikaz skupa skupom točaka
  - univerzalni skup U:
    kvadrat, pravokutnik ili slični lik
  - skup:
    lik (obično krug) unutar U

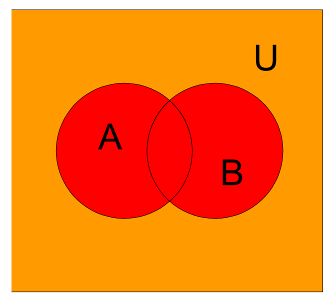




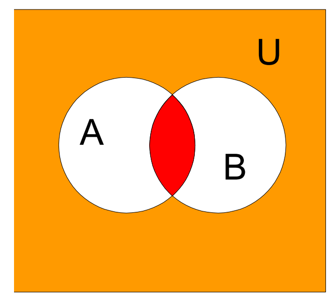
A



~A



$A \cup B$



$A \cap B$

Teorija skupova kao Booleova algebra

- postulati u skupovnom obliku:

(P3) $A \bigcup \phi = A$

$A \bigcap U = A$

(P4) $A \bigcup B = B \bigcup A$

$A \bigcap U = B \bigcap A$

(P5) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$

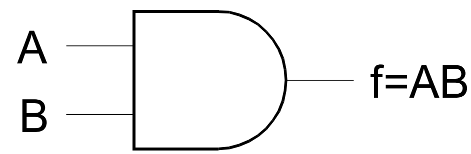
$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$

(P6) $A \bigcup \overline{A} = U$

$A \bigcap \overline{A} = \phi$

Logički kombinatori

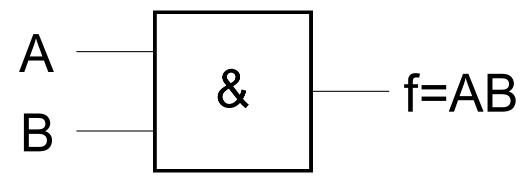
- simboli za kombinator I:
  - američki vojni standard Mil-STD-806B



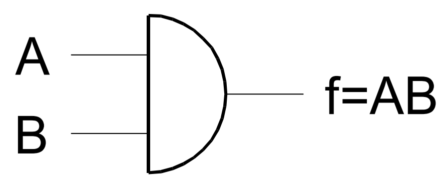
  - međunarodni standard IEC/ISO

    DIN 40900

    ANSI/IEEE 91-1984

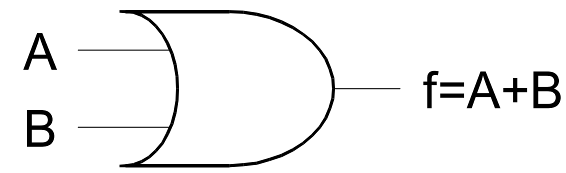


  - stari standard DIN

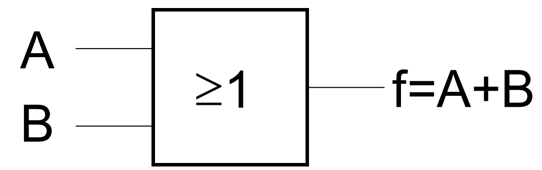


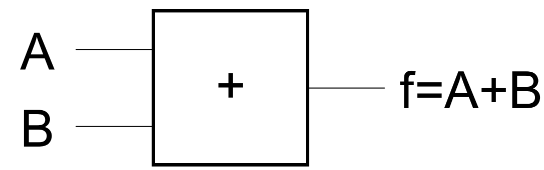
Logički kombinatori

- simboli za kombinator ILI:
  - američki vojni standard Mil-STD-806B

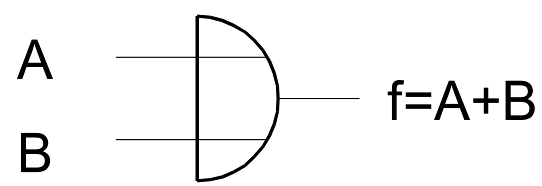


  - međunarodni standard IEC/ISO
    DIN 40900
    ANSI/IEEE 91-1984



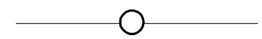


  - stari standard DIN

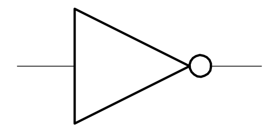


Negacija

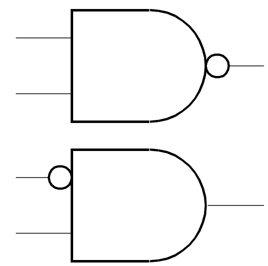
- simboli za operator NE:



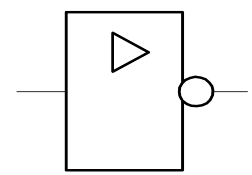
  - američki vojni standard Mil-STD-806B

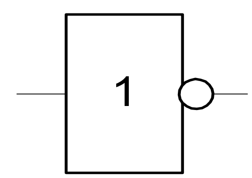


  - kombiniranje s drugim operatorima



  - međunarodni standard IEC/ISO





Booleove funkcije

- logika sudova
  ~ izražavanje složenog suda kombiniranjem elementarnih sudova operatorima povezivanja (I, ILI)
- Booleova funkcija formalno:
  ~ "neko pridruživanje funkcijskih vrijednosti (0 ili 1) za svaku kombinaciju vrijednosti argumenata (varijabli)"
- funkcija od n varijabli:

  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow 2^n$ mogućih kombinacija
- izražavanje Booleove funkcije
  ~ tablica kombinacija (2^n redaka), analogno osnovnim logičkim funkcijama I, ILI, NE

Booleove funkcije

- upisivanje funkcije u tablicu

Primjer: $f(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

ako je A=1 **"ili"** B=1
onda f=1
inače f=0

$\Rightarrow$ *isključena* kombinacija A=1, B=1
isključivo ILI, *ekskluzivna disjunkcija*, EX-ILI

Booleove funkcije

- definicija:

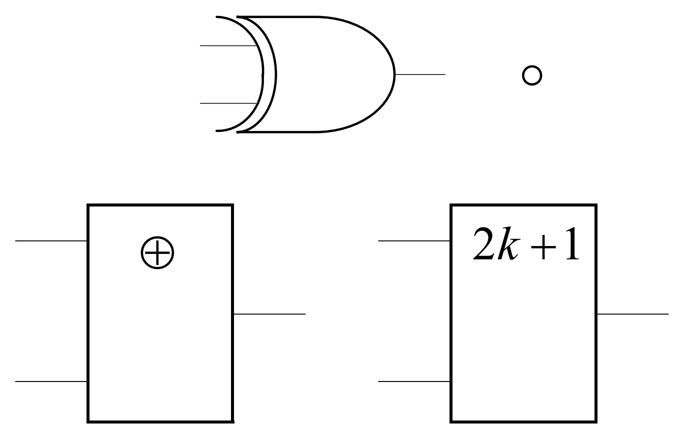
$$f(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- notacija:

$$f(A,B) = A \oplus B$$

- simbol:
  - suma mod 2
  - 1 za neparni broj 1 na ulazima



Booleove funkcije

- čitanje funkcije iz tablice:
  - za f = 1:

    $$(A=0)\cdot(B=1)+(A=1)\cdot(B=0)$$

  - dakle

    $$\frac{(\overline{A}=1)\cdot(B=1)+(A=1)\cdot(\overline{B}=1)}{f=\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}}$$

  - za f = 0:

    $$\overline{(A=0)\cdot(B=0)+(A=1)\cdot(B=1)}$$

    $$\overline{(A=0)\cdot(B=0)}\cdot\overline{(A=1)\cdot(B=1)}=\left[\overline{(A=0)}+\overline{(B=0)}\right]\cdot\left[\overline{(A=1)}+\overline{(B=1)}\right]$$

    $$=\left[(A=1)+(B=1)\right]\cdot\left[(A=0)+(B=0)\right]$$

    $$f=(A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})$$

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Booleove funkcije

- čitanje općenite funkcije iz tablice:

A	B	f
0	0	α_0
0	1	α_1
1	0	α_2
1	1	α_3

  - za f = 1:

$$f = \alpha_0 \cdot (\bar{A} \cdot \bar{B}) + \alpha_1 \cdot (\bar{A} \cdot B) + \alpha_2 \cdot (A \cdot \bar{B}) + \alpha_3 \cdot (A \cdot B)$$
$$= \alpha_0 \cdot P_0 + \alpha_1 \cdot P_1 + \alpha_2 \cdot P_2 + \alpha_3 \cdot P_3$$

  - za tablicu iz primjera (EX-ILI):

$$\alpha_0 = \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$
$$f = P_1 + P_2$$

  - općenito za funkciju od n varijabli:

$$f = \alpha_0 \cdot P_0 + \ldots + \alpha_{2^n - 1} \cdot P_{2^n - 1} = \sum_{i=0}^{2^n - 1} \alpha_i \cdot P_i, \quad \alpha_i \in \{0,1\}$$

Booleove funkcije

- čitanje općenite funkcije iz tablice:
  - za f = 1:

    oblik $$f = \alpha_0 \cdot P_0 + \ldots + \alpha_{2^n-1} \cdot P_{2^n-1} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \cdot P_i, \qquad \alpha_i \in \{0,1\}$$

    kanonski, standardni oblik:
    potpuni disjunktivni normalni oblik

Booleove funkcije

- čitanje općenite funkcije iz tablice – definicije:
  - *literal* : varijabla ili komplement
  - *produkt* : niz literala povezanih operacijom I
  - *suma* : niz literala povezanih operacijom ILI
  - *normalni član* : produkt/suma u kojoj se niti jedan literal ne pojavljuje više od jednog puta
  - *standardni produkt* : normalni produkt koji sadrži toliko literala koliko funkcija ima varijabli:
    - *kanonski produkt*, P_i ili *minterm*, m_i
    - u tablici kombinacija odgovara mu *samo jedna* 1
  - *standardna suma produkata* : kanonski oblik funkcije

Booleove funkcije

A	B	f
0	0	α_0
0	1	α_1
1	0	α_2
1	1	α_3

- Booleove funkcije:
  čitanje općenite funkcije iz tablice
  - za f = 0:

$$f = \left[\alpha_0 + (A+B)\right] \cdot \left[\alpha_1 + (A+\bar{B})\right] \cdot \left[\alpha_2 + (\bar{A}+B)\right] \cdot \left[\alpha_3 + (\bar{A}+\bar{B})\right]$$

$$= (\alpha_0 + S_0) \cdot (\alpha_1 + S_1) \cdot (\alpha_2 + S_2) \cdot (\alpha_3 + S_3)$$

  - za tablicu iz Primjera (EX-ILI):

$$\alpha_0 = \alpha_3 = 0$$

$$\underline{\alpha_1 = \alpha_2 = 1}$$

$$f = S_0 \cdot S_3$$

  - općenito za funkciju od n varijabli:

$$f = (\alpha_0 + S_0) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{2^n-1} + S_{2^n-1}) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i + S_i)$$

Booleove funkcije

- čitanje općenite funkcije iz tablice:
  - za f = 0:
    oblik $$f = (\alpha_0 + S_0) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{2^n-1} + S_{2^n-1}) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i + S_i)$$
  - također *kanonski*, standardni oblik:
    potpuni konjunktivni normalni oblik
  - oznake:
    S_i: *kanonske sume* ili *makstermi*, M_i

Booleove funkcije

- standardni (kanonski) oblici su ekvivalentni:
  - npr. za EX-ILI:

$$
\begin{aligned}
f &= (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B}) \\
&= A\cdot\overline{A}+\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{B} \\
&= 0+\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}+0 \\
&= \overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}
\end{aligned}
$$

  - izbor standardnog oblika za prikaz:
    - mali broj 1 u definiciji funkcije ~ kanonska suma standardnih *produkata*
    - mali broj 0 u definiciji funkcije ~ kanonski produkt standardnih *suma*
    - *manji broj članova* (terma) ~ brže/jednostavnije čitanje iz tablice!

Booleove funkcije

- drugi prikazi:
  - varijabla ~ 1, komplement ~ 0
    - standardni članovi = *vektori* (*n*-torke) ~ *n-bitni brojevi* !
    - interpretacija Booleove funkcije: $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
    - *skraćeno pisanje funkcije*

    ~ indeksi minterma/maksterma

$$f = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = \Sigma(1,2) = \Pi(0,3)$$

Booleove funkcije

- pretvorba nekanonskog oblika Booleove funkcije u kanonski oblik

  ~ Shannonov teorem ekspanzije:

  - *suma produkata*

    ~logički "množiti"
    svaki produkt koji nije kanonski s 1 tj. članom

    $$x + \overline{x} = 1, \qquad \text{x: varijabla koja nedostaje}$$

Primjer:

$$f = \overline{A} + \overline{B} \cdot C$$

$$= \overline{A}(B + \overline{B})(C + \overline{C}) + (A + \overline{A}) \cdot \overline{B}C$$

$$= \ldots$$

$$= \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

Booleove funkcije

- nekanonski oblici Booleovih funkcija: pretvorba u kanonski oblik
  - *produkt suma* :
    svaku sumu koja nije kanonska logički "zbrojiti" s 0 tj. članom

$$x \cdot \overline{x} = 0, \qquad \text{x : varijabla koja nedostaje}$$

Primjer:

$$\begin{aligned} f &= (A+C)\cdot(B+\overline{C}) \\ &= (A+B\cdot\overline{B}+C)\cdot(A\cdot\overline{A}+B+\overline{C}) \\ &= \ldots \\ &= (A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C}) \end{aligned}$$

Booleove funkcije

- *komplementarna* funkcija :
  ~ funkcija kojoj su vrijednosti komplementarne onima izvorne funkcije (0 → 1, 1 → 0)

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \cdot P_i \qquad \to \qquad \overline{f} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \overline{\alpha}_i \cdot P_i$$

$$= \prod_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i + S_i) \qquad \qquad = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\overline{\alpha}_i + S_i)$$

vrijedi:

$$f = \sum_{i \in I_P} P_i \quad \to \quad \overline{f} = \sum_{j \in \{2^n\} - I_P} P_j = \prod_{i \in I_P} S_i$$

Mintermi i makstremi

x	y	z	Minterm	Oznaka
0	0	0	$x'y'z'$	m_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2
0	1	1	$x'yz$	m_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4
1	0	1	$xy'z$	m_5
1	1	0	xyz'	m_6
1	1	1	xyz	m_7

x	y	z	Maksterm	Oznaka
0	0	0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$x+y+z'$	M_1
0	1	0	$x+y'+z$	M_2
0	1	1	$x+y'+z'$	M_3
1	0	0	$x'+y+z$	M_4
1	0	1	$x'+y+z'$	M_5
1	1	0	$x'+y'+z$	M_6
1	1	1	$x'+y'+z'$	M_7

Booleove funkcije

Primjer: komplementarna funkcija

$$f(A,B,C) = P_1 + P_3 + P_4 + P_6 + P_7$$
$$= \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

$$\overline{f}(A,B,C) = \overline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC}$$
$$= \overline{\overline{A}\,\overline{B}C} \cdot \overline{\overline{A}BC} \cdot \overline{A\overline{B}\,\overline{C}} \cdot \overline{AB\overline{C}} \cdot \overline{ABC}$$
$$= (A + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$
$$= S_1 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 \cdot S_7$$
$$= \ldots$$
$$= \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{B}C = \overline{A}(B + \overline{B})\overline{C} + A\overline{B}C = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$$
$$= P_0 + P_2 + P_5$$

Booleove funkcije

- dualna funkcija:
  ~ funkcija koja se dobiva zamjenom operatora (+,·) i konstanti (0, 1) izvorne funkcije
  - primjena teoreama o dualnosti

$$f = f(A, B, C, \ldots, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1) \rightarrow f_D = f_D(A, B, C, \ldots, \cdot, +, \bar{\ }, 1, 0)$$

vrijedi:

$$(f_D)_D = f$$

Booleove funkcije

Primjer: - dualna funkcija

$$f(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC = P_0 + P_1 + P_3 + P_4 + P_6$$

$$\begin{aligned} f_D(A,B,C) &= (\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+B+C) \\ &= \ldots \\ &= AC + \overline{A}B\overline{C} \\ &= \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + ABC \\ &= P_2 + P_5 + P_7 \end{aligned}$$

Booleove funkcije

- komplementarna i dualna funkcija
  - izražavanje de Morganovih zakona (= komplement funkcije) dualnom funkcijom:
    - de Morgan: $\overline{f} = f(A, B, C, \ldots, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$

      $= f(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots, \cdot, +, \overline{}, 1, 0)$
    - komplement funkcije (još jednom):

      $$\overline{f}(A, B, C, \ldots) = f_D(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots)$$
    - postupak komplementiranja:
      - komplementirati varijable
      - izvesti dualnu funkciju
  - primjena komplementarne funkcije

    ~ pojednostavljivanje Booleovih izraza

Booleove funkcije

- kombinacije varijabli
  ~ uzeti u obzir *sve moguće* kombinacije vrijednosti 0 i 1 koje varijable mogu poprimiti:
  - broj kombinacija: $r = 2^n$
  - svakoj kombinaciji moguće pridružiti *dvije* vrijednosti: 0 ili 1

Booleove funkcije dvije i više varijabli

- moguće funkcije jedne varijable:

A	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_0, f_3: konstante (nularne funkcije)

$f_0=0$

$f_3=1$

f_1, f_2: unarne funkcije

$f_1=A$: varijabla

$f_2=\overline{A}$: komplement

Booleove funkcije

- moguće funkcije dvije varijable:

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

➔ *klase* funkcija od dvije varijable

1. konstante: f_0, f_{15}
2. funkcije pojedinačne varijable: f_3, f_5, f_{10}, f_{12}
3. konjunkcije literala: f_1, f_2, f_4, f_8
4. disjunkcije literala: $f_7, f_{11}, f_{13}, f_{14}$
5. ekvivalencija i ekskluzivna disjunkcija: f_6, f_9

Booleove funkcije

- moguće funkcije dvije varijable:

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0 = 0$ konstanta

(*) $f_1 = AB$ I

(*) $f_2 = A\overline{B}$ inhibicija

$f_3 = A$ identitet

$f_4 = \overline{A}B$ inhibicija

$f_5 = B$ identitet

(*) $f_6 = \overline{A}B + A\overline{B}$ EX-ILI

(*) $f_7 = A + B$ ILI

(*) $f_8 = \overline{A + B}$ NILI

(*) $f_9 = \overline{A}\,\overline{B} + AB$ ekvivalencija

(*) $f_{10} = \overline{B}$ komplement

(*) $f_{11} = A + \overline{B} = (B \Rightarrow A)$ implikacija

$f_{12} = \overline{A}$ komplement

$f_{13} = \overline{A} + B = (A \Rightarrow B)$ implikacija

(*) $f_{14} = \overline{AB}$ NI

$f_{15} = 1$ konstanta

*** - različite netrivijalne funkcije**

Vježba

- koje su funkcije međusobno komplementarne?
  - I i NI,
  - ILI i NILI,
  - INHIBICIJA i IMPLIKACIJA,
  - ISKLJUČIVO ILI i EKVIVALENCIJA.
- koje su funkcije međusobno dualne?
  - I i ILI,
  - NI i NILI,
  - INHIBICIJA I IMPLIKACIJA,
  - ISKLJUČIVO ILI i EKVIVALENCIJA.

Booleove funkcije

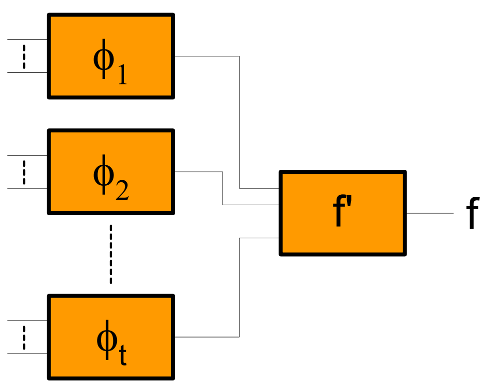
- uzeti u obzir *sve moguće* kombinacije vrijednosti 0 i 1 koje varijable mogu poprimiti:
  - broj kombinacija: 2^n
  - svakoj komb. moguće pridružiti *dvije* vrijednosti: 0 ili 1
  - broj mogućih Booleovih funkcija od n varijabli:

n	2^n	2^{2^n}
1	2	4
2	4	16
3	8	256
4	16	64K = 65.536
5	32	4G = 4.294.967.296

Osnovne i univerzalne funkcije

- zapažanje:
  - nagli porast broja mogućih funkcija
    ~hipereksponencijalni zakon
  - za $n \geq 3$ već nema smisla pisati tablicu!
    - ograničiti se na $f(x_1, x_2)$
    - pronaći one $f(x_1, x_2)$ kojima će se moći ostvariti sve ostale funkcije
      ~ "univerzalne" funkcije?
    - izražavanje $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kao *kompozicija* izvjesnog broja $f(x_1, x_2)$

      $f=f'(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t)$



Osnovne i univerzalne funkcije

- potreba za ograničavanjem broja različitih Booleovih funkcija, odnosno *sklopova* koji ih ostvaruju:
  - razlozi tehničko-proizvodne prirode
    - standardizacija funkcija/sklopova
    - *masovna* proizvodnja *samo nekih* logičkih sklopova
      - (engl. economy of scale)
  - samo definiranim *(malim!)* skupom funkcija *(sklopova)* ostvariti *sve (preostale)* funkcije *(sklopove)*

Osnovne i univerzalne funkcije

- *potpuni sustav funkcija* :
  "skup Booleovih funkcija naziva se *funkcijski potpuni* sustav ako se iz funkcija takvog skupa, korištenjem superpozicije i zamjene, može dobiti svaka Booleova funkcija"
  - superpozicija ~ primjena funkcije
  - zamjena ~ promjena mjesta varijabli (i načina dekompozicije složene Booleove funkcije)
- elementi potpunog sustava funkcija:
  ~ *osnovne (primitivne)* funkcije

Osnovne i univerzalne funkcije

- potpuni sustav funkcija:
  - želja: *minimalni* potpuni sustav,
    ekonomski najopravdaniji!
  - provjera potpunosti sustava funkcija:
    izražavanje {I, ILI, NE}
    - dokazano osnovni skup Friedman i Menon 1975
  - {I, ILI, NE} također jedan potpuni sustav,
    jedino *nije* minimalan!

Osnovne i univerzalne funkcije

- neki potpuni sustavi funkcija:

{I,NE}: $\{f_1, f_{10}\}$, $\{f_1, f_{12}\}$
{ILI,NE}: $\{f_7, f_{10}\}$, $\{f_7, f_{12}\}$

$\Rightarrow$ nije potrebno {I, ILI, NE}!

- provjera za {I, NE}: de Morganom za ILI

$$ILI\ (A, B) = ILI\ (NE\ (NE\ (A)), NE\ (NE\ (B)))$$
$$= NE\ (I\ (NE\ (A), NE\ (B)))$$

$$A + B = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$$

Osnovne i univerzalne funkcije

- neki (drugi) potpuni sustavi funkcija:

{EX-ILI,I,1}: **$\{f_1, f_6, f_{15}\}$**

$$EX-ILI(A,B) = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$EX\text{-}ILI(A,1) = \overline{A}$$

$$EX\text{-}ILI(EX\text{-}ILI(A,B),I(A,B)) = ILI(A,B)$$

{EX-NILI, I, 1} : $\{f_1 , f_9 , f_{15}\}$ $1 \cdot \overline{A} = \overline{A}$

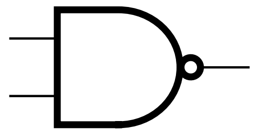
{inhibicija, 1} : $\{f_2 , f_{15}\}$ $A(\overline{A\overline{B}}) = A(\overline{A} + B) = A\overline{A} + AB = AB$

{implikacija, 0} : $\{f_{11} , f_0\}$ $\overline{(\overline{A}\overline{B})} = A + B$

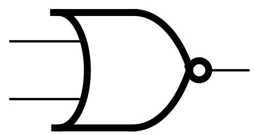
Osnovne i univerzalne funkcije

- posebno značajni potpuni sustavi funkcija:
  oni koji sadrže *samo jednu* funkciju!

{NI} : { f_{14} }



{NILI} : { f_8 }



$$\overline{A\cdot A} = \overline{A}$$

$$\overline{\overline{AB}} = AB$$

$$\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A + B$$

$$\overline{A + A} = \overline{A}$$

$$\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$$

$$\overline{\overline{A + B}} = A + B$$

- *univerzalne funkcije* : NI, NILI
  - minimalni potpuni skup funkcija
  - minimalni broj različitih sklopova
  - *invertor* (NI = *NE* • I, NILI = *NE* • ILI):
    pojačanje signala

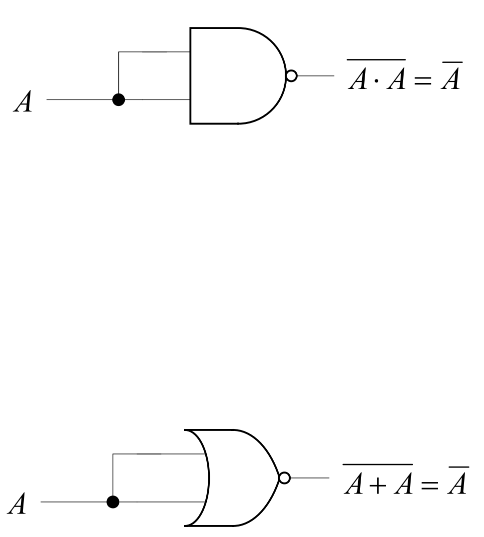
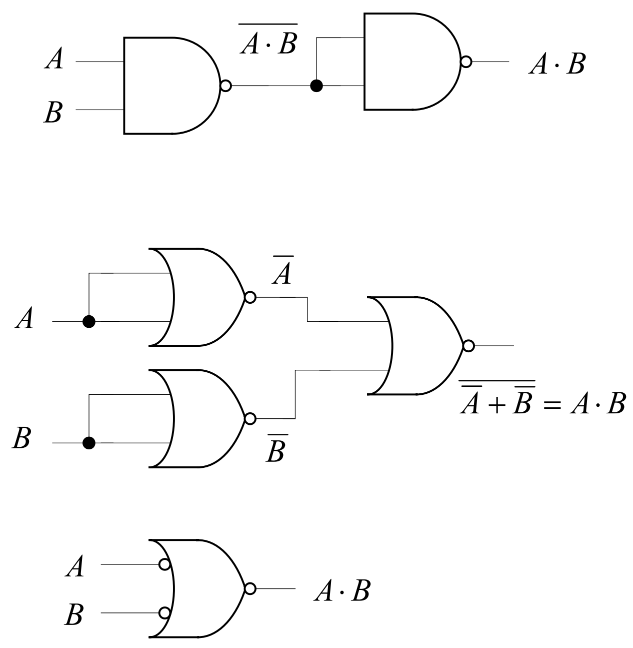
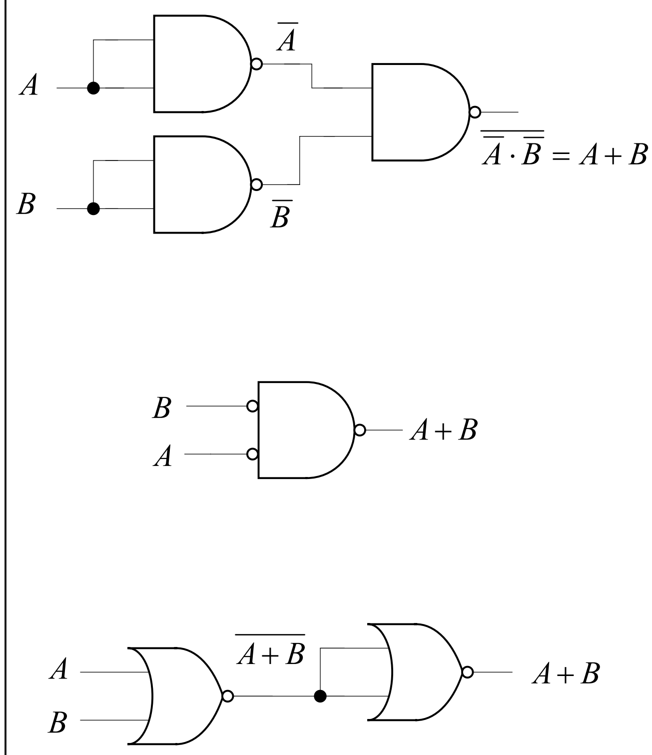
Osnovne i univerzalne funkcije

Primjer: ostvarivanje {I, ILI, NE} korištenjem {NI}

$$
\begin{aligned}
I(A,B) &= NE(NE(I(A,B))) \\
&= NE(NI(A,B)) \\
&= NE(I(NI(A,B),NI(A,B))) \\
&= NI(NI(A,B),NI(A,B)) \\
NE(A) &= NE(I(A,A)) \\
&= NI(A,A) \\
ILI(A,B) &= ILI(NE(NE(A)),NE(NE(B))) \\
&= NE(I(NE(A),NE(B))) \\
&= NI(NI(A,A),NI(B,B))
\end{aligned}
$$

Osnovne i univerzalne funkcije

Primjer : ostvarivanje {I, ILI, NE} korištenjem {NI} i {NILI}

NE	I	ILI
		

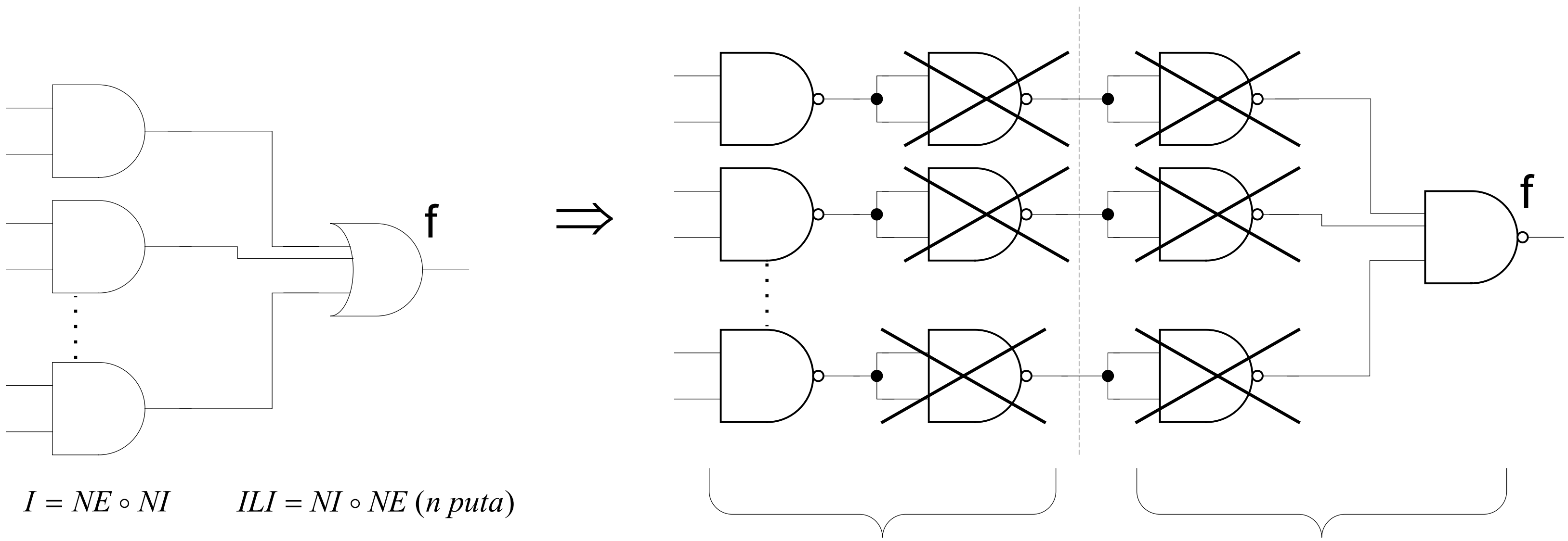
Osnovne i univerzalne funkcije

- zapažanje:
  - {I, ILI, NE} povoljno pri formuliranju problema/rješenja ~ konceptualno blisko
  - {NI, NILI} povoljno pri ostvarenju digitalnog sklopa ~ blisko električkoj izvedbi
  - potreba za transformacijom izraza kojim je definirana Booleova funkcija
- metode transformacije:
  - metoda supstitucije
  - algebarska metoda

Metoda supstitucije

- metoda supstitucije
  (funkcija u obliku *sume produkata*):
  - zamijeniti osnovne funkcije univerzalnima:

    NE $\rightarrow$ NI $\circ$ NI, I $\rightarrow$ NE $\circ$ NI, ILI $\rightarrow$ NI $\circ$ NE
  - primijeniti T3 (involucija)
    ~ eliminirati dvostruku primjenu funkcija NE



$I = NE \circ NI$ $\quad ILI = NI \circ NE\ (n\ puta)$

Metoda supstitucije

- algebarska metoda
  (funkcija u obliku *sume produkata*):
  - primijeniti T3 (involucija) na izraz kojim je definirana Booleova funkcija
  - primijeniti T8 (de Morganov zakon)

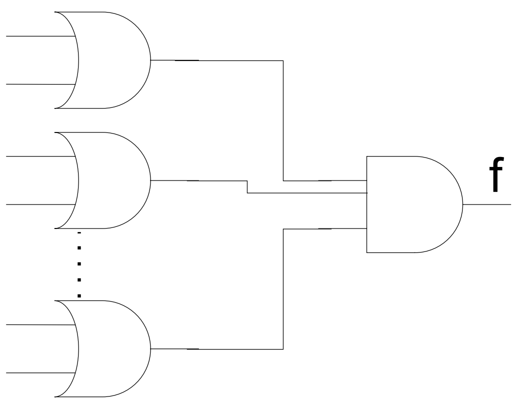
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i P_i$$

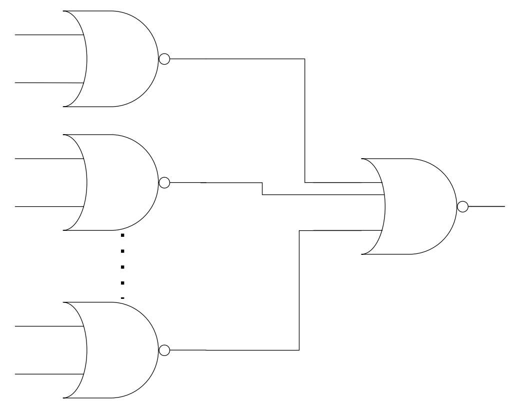
$$= \overline{\overline{\alpha_0 P_0}} + \overline{\overline{\alpha_1 P_1}} + \ldots + \overline{\overline{\alpha_{2^n-1} P_{2^n-1}}}$$

$$= \overline{\overline{\alpha_0 P_0} \cdot \overline{\alpha_1 P_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\alpha_{2^n-1} P_{2^n-1}}}$$

Osnovne i univerzalne funkcije

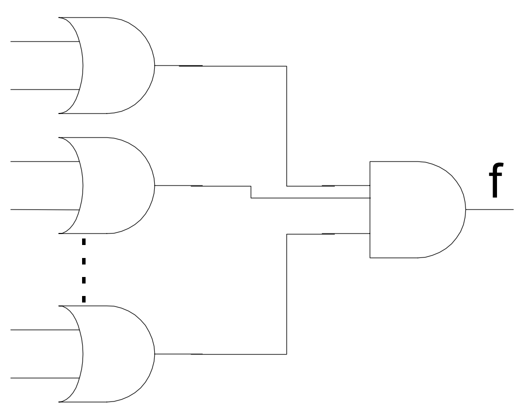
- algoritam transformacije
  (funkcija u obliku produkta suma)
  ~ prikaz funkcijom NILI
  - svaku sumu (funkcija ILI) prikazati funkcijom NILI;
    NILI pojedinačne varijable reducira se na komplement
  - na dobivene NILI članove primijeniti "izlazni" NILI član
- također dvorazinska logička shema





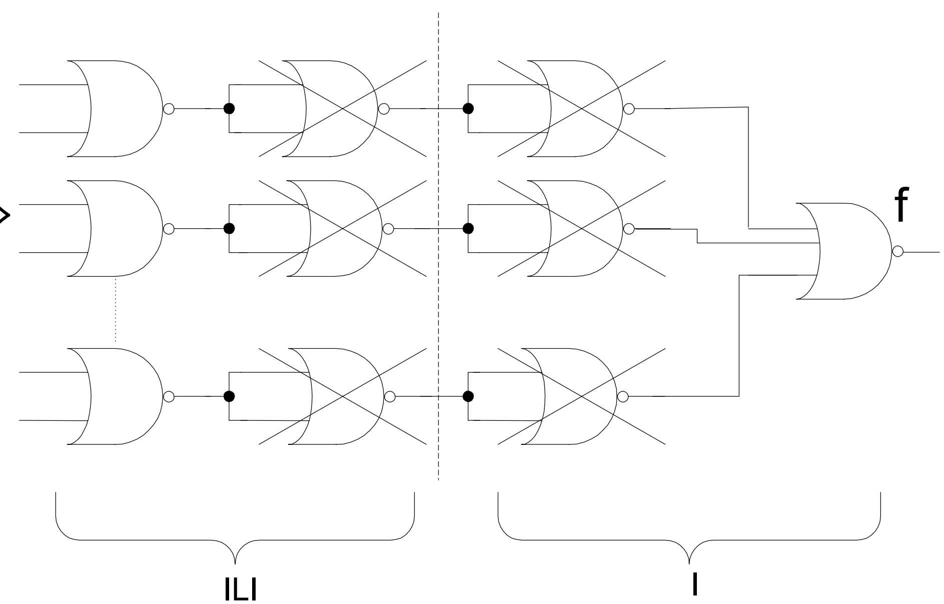
Osnovne i univerzalne funkcije

- metoda supstitucije
  (funkcija u obliku produkta suma):
  - zamijeniti osnovne funkcije univerzalnima:
  - NE $\rightarrow$ NILI $\circ$ NILI, ILI $\rightarrow$ NE $\circ$ NILI, I $\rightarrow$ NILI $\circ$ NE
  - primijeniti T3 (involucija)
    ~ eliminirati dvostruku primjenu funkcija NE



$ILI = NE \circ NILI \quad I = NILI \circ NE\ (n\ puta)$

$\Rightarrow$



Osnovne i univerzalne funkcije

- algoritam transformacije
  (funkcija u obliku produkta suma)
  ~ prikaz funkcijom NILI
  - svaku sumu (funkcija ILI) prikazati funkcijom NILI;
    NILI pojedinačne varijable reducira se na komplement
  - na dobivene NILI članove primijeniti "izlazni" NILI član
- također dvorazinska logička shema

Osnovne i univerzalne funkcije

Primjer:

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{B}\,C$$

$$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,C}}$$

Primjer:

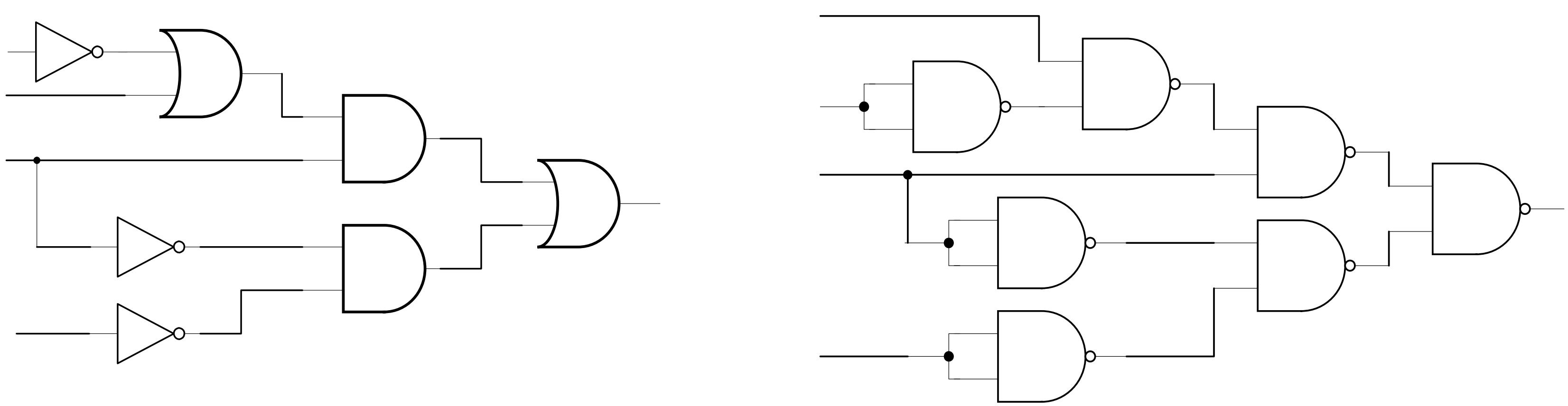
$$f = (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$= \overline{\overline{A+B} + \overline{\overline{A}+\overline{B}+C}}$$

Osnovne i univerzalne funkcije

- transformacija funkcije koja nije u obliku sume produkata ili produkta suma
  ~ višerazinska logička shema
- Primjer :

$$f = A\cdot(\overline{B}+C)+\overline{A}\,\overline{D} = \overline{\overline{A\cdot(\overline{B}+C)}\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{D}}} = \overline{\overline{A\cdot\overline{B\overline{C}}}\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{D}}}$$



Funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcija na više varijabli:
  - generiranje složenijih funkcija
    opetovanom primjenom funkcija manjeg broja varijabli
  - standardizacija funkcijskih implementacija
    ~ standardizacija logičkih sklopova:
    ekonomičnost!
  - treba zadovoljiti:
    - komutativnost (~ "zamjena")
    - asocijativnost (~ "superpozicija")

Funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije I: moguće je!
  - asocijativnost:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases} f(f(\dots(f(x_1,x_2),x_3)\dots),x_n) \\ f(x_1,f(x_2,\dots,f(x_{n-1},x_n),\dots)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n &= (\dots((x_1\cdot x_2)\cdot x_3)\dots)\cdot x_n) \\ &= (x_1\cdot(x_2\cdot\ldots\cdot(x_{n-1}\cdot x_n)\dots)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_n &= (\dots((x_1+x_2)+x_3)\dots)+x_n) \\ &= (x_1+(x_2+\ldots+(x_{n-1}+x_n)\dots)) \end{aligned}$$

  - komutativnost: "izmiješati" varijable

Funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije EX-ILI: promjena definicije!

Primjer: asocijativnost po stupcima tablice

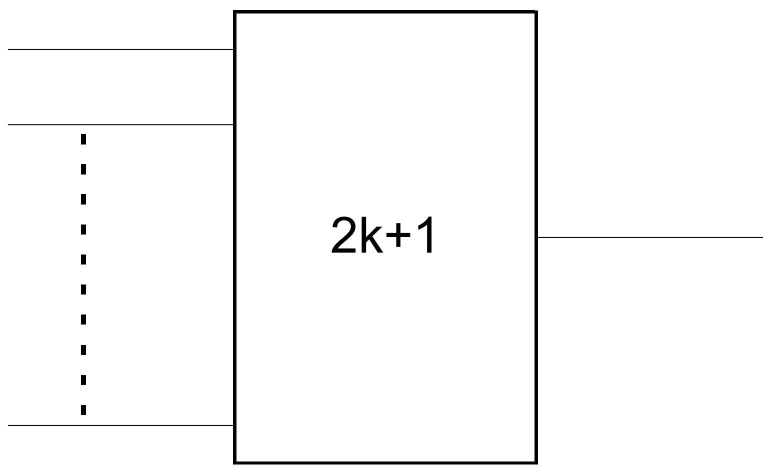
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\Rightarrow$

A	B	C	$A \oplus B \oplus C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije EX-ILI: promjena definicije!
  - EX-ILI(A, B) = A "ili" B, ali ne oba!
  - EX-ILI(A, B, C) = neparan broj 1
    ~ oznaka: 2k+1

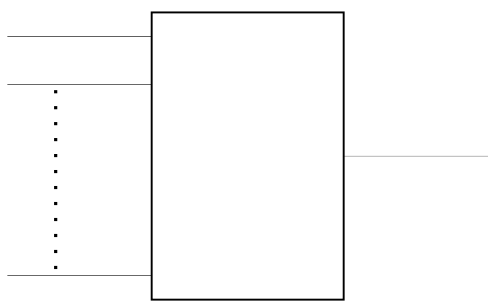


Funkcije tri i više varijabli

- svojstva funkcije EX-ILI:
  1. komutativnost
  2. asocijativnost
  3. distributivnost
  4. $A \oplus 0 = A$
  5. $A \oplus 1 = \overline{A}$
  6. $A \oplus A = 0$
  7. $A \oplus \overline{A} = 1$
  8. $A \oplus B = \overline{A} \oplus \overline{B}$
- važnost EX-ILI:
  - aritmetički sklopovi
  - zaštita poruka od pogrešaka prilikom prijenosa
  - generiranje pseudo-slučajnih nizova (kodiranje, kriptiranje)

Funkcije tri i više varijabli

- proširivanje funkcije EX-NILI:
  - n = 2: "ekvivalencija" dvije varijable
  - n = 3: neparni paritet (2k+1)
  - n = 4: komplement neparnog pariteta
  - definicija: logički identitet svih varijabli !



$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n + x_1 x_2 \ldots x_n$$

Funkcije tri i više varijabli

- proširivanje univerzalnih funkcija NI, NILI: ne ide!
  ~ slijediti definiciju funkcija

$$
\begin{aligned}
NI \equiv NE \circ I \Leftrightarrow NI(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\equiv NE(I(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \\
&= \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \\
&= \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots + \overline{x}_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
NILI \equiv NE \circ ILI \Leftrightarrow NILI(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\equiv NE(ILI(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \\
&= \overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \\
&= \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n
\end{aligned}
$$

Funkcije tri i više varijabli

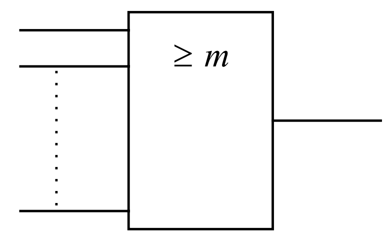
- proširivanje univerzalnih funkcija NI, NILI: ne ide!
  - asocijativnost ne vrijedi!

$$NI(A,B,C) = \overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \neq \begin{cases} NI(NI(A,B),C) = \overline{\overline{AB}C} = AB + \overline{C} \\ NI(A,NI(B,C)) = \overline{A\overline{BC}} = \overline{A} + BC \end{cases}$$

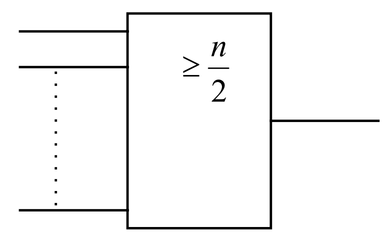
  - zato se držati definicije
    (NI = NE • I, NILI = NE • ILI)
  - uočiti
    ~ NI i NILI su međusobno dualne

Funkcije tri i više varijabli

- druge (složene) Booleove funkcije:
  - logički prag [threshold f.]:
    $\geq$ m ulaza u 1, m < n

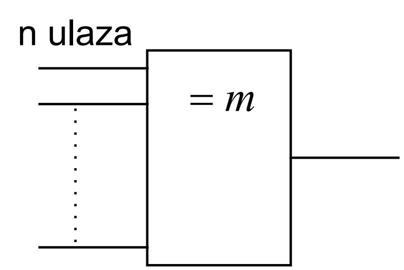


  - majoritet [majority f.]:
    većinska f, f. glasanja
    > n/2 ulaza u 1



  - "samo m":

    upravo m ulaza u 1, m < n



Nepotpuno specificirane funkcije

- u nekim primjenama:
  ~ ne pojavljuju se sve ulazne kombinacije
  - $\rightarrow$ nije važna vrijednost funkcije (engl. don't care)
  - $\rightarrow$ u tablicu kombinacija upisuje se "X"

Primjer 1 :

ostvariti funkciju koja ispituje je li dekadska znamenka prikazana u BCD (8421) kodu neparna

~ koristi se samo 10 ulaznih kombinacija

Nepotpuno specificirane funkcije

funkcija koja ispituje je li dekadska znamenka $A = a_3a_2a_1a_0$ prikazana u BCD kodu neparna

$f = \Sigma m(1, 3, 5, 7, 9) + \Sigma d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$

$= \Pi M(0, 2, 4, 6, 8) \cdot \Pi d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$

	a_3	a_2	a_1	a_0	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
	1	0	1	0	X
	1	0	1	1	X
	1	1	0	0	X
	1	1	0	1	X
	1	1	1	0	X
	1	1	1	1	X

Nepotpuno specificirane funkcije

Primjer 2 :

- Pretpostavimo da su x_1 i x_2 ulazi upravljani sklopkama koje mehanički osiguravaju da x_1 i x_2 ne mogu biti istovremeno uključeni.
- Za kombinaciju ulaznih varijabli $(x_1,x_2) = 11$ kažemo da je *"don't care condition"*, a za funkciju T da je nepotpuno specificirana.

x_1	x_2	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	–

x_1	x_2	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	X