Dokazi

10. siječnja 2021. 22:13

Diferencijalni račun

Pravila za deriviranje parametarskih f.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dt}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3}$$

Fermatov teorem = nužni uvjet za lokalni ekstrem

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval u $\mathbb{R}$ i $f: I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija.
Ako je $a \in I$ točka lokalnog ekstrema, onda je $f'(a) = 0$.

Neka je $a \in I$ točka lokalnog ekstrema, npr maksimuma. To znači da za neki $\Delta x > 0$ i svaki $x \in \langle a-\Delta x, a+\Delta x\rangle$ vrijedi:

$f(x) \leq f(a)$ – Dva slučaja

1) $x \in \langle a-\Delta x, a\rangle \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\leq 0}{<0} = \geq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^-) \geq 0$
2) $x \in \langle a, a+\Delta x\rangle \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\geq 0}{<0} = \leq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^+) \leq 0$

$\Rightarrow f'(a^-) \geq 0,\ f'(a^+) \leq 0 \Rightarrow f'(a) = 0$

Rolle

Ako je $f(a) = f(b)$, onda postoji $c \in \langle a, b\rangle$ t.d. $f'(c) = 0$

Dva slučaja:

1) $f(x) = f(a) = f(b)$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle \Rightarrow f$ konstantna u $[a,b]$, $f'(x) = 0\ \forall x$
2) $\exists x \in \langle a, b\rangle$ t.d. $f(x) \neq f(a) = f(b)$. f neprekinuta na $[a,b]$, postoji točka iz $[a,b]$ koja je minimum ili maksimum f na $[a,b]$.
   $f(x) \neq f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\ c$ iz $\langle a, b\rangle$ lok min/maks $\Rightarrow$ iz Fermata $f'(c) = 0$

Lagrange = srednja vrijednost

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekinuta, diff $\Rightarrow \exists c \in \langle a, b\rangle$ t.d. $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

$k_s = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Funkciji $y = f(x)$ i točkama $x = a, x = b$ pridružimo funkciju
$F = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$, izraz u [] zagradi je sekanta kroz $(a, f_a), (b, f_b)$

$\Rightarrow F(a) = F(b)$ i F neprekidna na $[a,b] \Rightarrow$ Rolle: $\exists c \in [a,b]$ t.d. $F'(c) = 0$.
$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, iz $F'(c) = 0$ slijedi:
$\Rightarrow 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$

f i g: $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ diff:

1) Ako je $f'(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$, onda je $f(x)$ konst. na $\langle a,b\rangle$

Iz La Grangea znamo za svaki a_1, b_1 postoji $c_1 \in [a_1, b_1]$ t.d. $f(b_1)-f(a_1)=f'(c_1)\cdot(b_1-a_1)$

Iz pretpostavke $f'(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$ slijedi $f'(c_1)=0$ pa je zato $f(a_1)=f(b_1)$ za sve $a_1, b_1 \in \langle a,b\rangle$

2) Ako je $f'(x)=g'(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)=g(x)+C$ na $\langle a,b\rangle$

$F(x)=f(x)-g(x) \;/'$

$F'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ za sve $x \in \langle a,b\rangle$

iz prvog djela dokaza ($F'(x)=0$) slijedi da je $F(x)$ konstantna funkcija

$f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ diff:

1) Ako je $f'(x)>0$ na $\langle a,b\rangle$, onda f strogo raste

Neka je $f'(x)>0$, odaberimo $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ takve da $x_1 < x_2$.

Iz La Grange znamo za svaki $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ postoji $c \in \langle a,b\rangle$ t.d.

$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\,(x_2-x_1)$.

Iz pretpostavke (x_2-x_1) je pozitivna, pa mora biti lijeva.

$\Rightarrow f(x)$ strogo raste

2) Ako je $f'(x)<0$ na $\langle a,b\rangle$, onda f strogo pada

PREPUŠTAM ČITATELJU ☺ (analogna tvrdnja)

Integralni račun

Neka su F_1 i F_2 primitivne od f na $I=\langle a,b\rangle \Rightarrow \forall x \in I$, $F_2(x)-F_1(x)=C$

$$F_1'(x)=F_2'(x)=f(x) \quad \forall x \in I \overset{\text{La Grange}}{\Longrightarrow} F_2(x)=F_1(x)+C$$

Ako je F_1 primitivna od $f \Rightarrow F_2=F_1+C$ primitivna od f

$$F_1'(x)=f(x) \Rightarrow F_2'(x)=(F_1(x)+C)'=F_1'(x)+0=f(x)$$

f neprekinuta $[a,b] \Rightarrow C \in \langle a,b\rangle$ t.d. $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$

f je neprekinuta $\Rightarrow$ postoji $m=\min\{f\}$, $M=\max\{f\}$

pravokutnik površine $m(b-a)$ je manji od $M(b-a)$, a vrijednost površine ispod f će biti između odnosno:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad /:(b-a)$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

odnosno: $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \in [m,M]$

f je neprekinuta i $f([a,b]) \in [m,M] \Rightarrow f$ prima sve vrijednosti iz $[m,M]$

$\Rightarrow \exists c \in \langle a,b\rangle$ t.d. $f(c)=\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

Konstrukcija primitivne funkcije pomoću određenog integrala

f neprekinuta na $[a,b]$, $\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow \phi$ diff na $\langle a,b\rangle$, $\phi'(x)=f(x)$

Derivirajmo ϕ po def:

$$\phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

Zapišemo kao jedan integral:

$$\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Iz teorema srednje vrijednosti:

$$\exists c \in \langle x, x+h\rangle, \ \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_x)\cdot h$$

$$\phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c_x)\cdot h}{h} = \left| \begin{matrix} h\to 0 \\ \Rightarrow c_x \to x \end{matrix} \right| = \lim_{c_x \to x} f(c_x) = f(x)$$

Newton-Leibnizova formula

f neprekinuta na $[a,b]$, $F(x)$ primitivna od $f \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Po teoremu konstrukcije primitivne f znamo $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ je primitivna od $f(x)$

$\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$

za $x = a$: $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Leftrightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a)$

za $x = b$: $\Phi(b) = F(b) - F(a)$ i $\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Za neodređeni integral vrijedi $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$ i $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

1) Iz def neodređenog integrala $F(x)$ je primitivna od $f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x) + C\right) = F'(x) + 0 = f(x)$$

2) $(f(x) + C)' = f'(x)$

$\left(\int f'(x)\,dx\right)' = f'(x)$

Metode integriranja

Metoda supstitucije u neodređenom integralu

f neprekinuta na I te $\varphi(x)$ diff takva da $\mathrm{Im}(\varphi) = I$. $\overset{t=\varphi(x)}{\Rightarrow} \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$

F primitivna od f, odnosno $\int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C$

deriviramo: $F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x) \Leftrightarrow F(\varphi(x))$ primitivna od $f(\varphi(x))\varphi'(x)$

Metoda supstitucije u određenom integralu

$f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ neprekinuta, $\varphi: [a,b] \to [\alpha,\beta]$ diff i $\varphi([a,b]) \subset [\alpha,\beta] \Rightarrow \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$

F primitivna od f: $\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = \frac{d}{dx} F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ odnosno $F(\varphi(x))$ je primitivna od $f(\varphi(x))\varphi'(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

Metoda parcijalne integracije

f i g diff na $\langle a,b\rangle \Rightarrow \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$$

desnoj strani je lijeva primitivna

Nepravi integrali

Za $a > 0$ $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{divergira za } p \le 1 \\ \text{konvergira za } p > 1 \end{cases}$

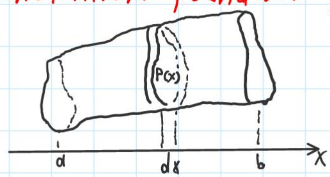
$$I=\lim_{b\to\infty}\int_a^b x^{-p}\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{b\to\infty}\left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_a^b=\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{b^{1-p}}{1-p}-\dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{za } p\neq 1\\ \lim\limits_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_a^b=\lim\limits_{b\to\infty}\ln b-\ln a=+\infty & \text{za } p=1\end{cases}$$

$$\lim_{b\to\infty} b^{1-p}=\begin{cases}+\infty & \text{za } p<1\\ 0 & \text{za } p>1\end{cases}\Rightarrow \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\text{divergira za } p\leq 1\\ \text{konvergira za } p>1\end{cases}$$

Primjena integralnog računa

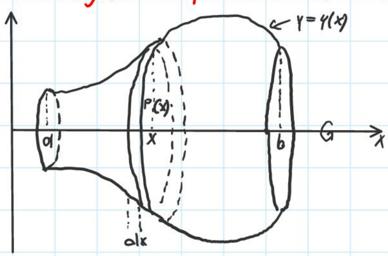
Volumen tijela sa konstantnom poznatom površinom poprečnog presjeka $P=P(x)$

$$V=\int_a^b P(x)\,dx$$



Volumen tijela nastalog rotacijom trapez oko osi Ox

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx$$



Volumen tijela nastalog rotacijom trapeza oko Oy

$$V=2\pi\int_a^b x\,y(x)\,dx$$