

Međuispit iz Matematičke analize 1

26.11.2019.

1. (8 bodova) (3b + 5b) Riješite sljedeće jednačbe u skupu \mathbb{C} :

a) $z + \frac{2}{z} = 2,$

b) $z^3(1+i)^2 = \bar{z}^2(2-2i\sqrt{3}).$

2. (8 bodova)(5b + 3b)

- a) Skup S sastoji se od prirodnih peteroznamenkastih brojeva, čije su tri znamenke identički isti parni brojevi, a preostale dvije znamenke identički isti neparni brojevi. Odredite $card(S)$.
- b) U skupu S koji se sastoji od 30 osoba ustanovljeno je da 17 osoba govori engleski jezik, 14 osoba govori francuski te 8 govori njemački. Engleski i francuski govori 10 osoba, francuski i njemački 2 osobe, engleski i njemački 3 osobe te 2 osobe ne govore niti jedan od tih jezika. Koliki je broj osoba u skupu S koje govore sva 3 strana jezika?

3. (9 bodova)(3b + 3b + 3b) Zadana je funkcija $f(x) = 3 \arcsin(2x) + \pi$.

- a) Dokažite da je kompozicija dviju strogo rastućih funkcija opet strogo rastuća funkcija.
- b) Odredite prirodnu domenu $D(f)$, sliku $Im(f)$ i skicirajte graf funkcije f .
- c) Ima li $f : D(f) \rightarrow Im(f)$ inverznu funkciju? Obrazložite. Ako ima, odredite f^{-1} i $D(f^{-1})$ te skicirajte graf od f^{-1} .

4. (8 bodova)(3b + 5b)

- a) Dokažite sljedeću tvrdnju: Ako je niz realnih brojeva (a_n) padajući i omeđen odozdo, onda je niz (a_n) konvergentan.
- b) Ispitajte konvergenciju niza (a_n) zadanog rekursivno s:

$$a_1 = 8, \quad a_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{a_n}}\right)^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ako je konvergentan, odredite mu limes.

5. (9 bodova)(3b + 3b + 3b)

- a) Postoji li

$$\lim_{x \rightarrow -1} \arctg\left(\frac{x^2}{2x+2}\right)?$$

Obrazložite.

- b) Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x-3}, & \text{ako je } x < 3, \\ \sqrt{a+x^2}, & \text{ako je } x \geq 3 \end{cases}$$

bude neprekinuta na skupu \mathbb{R} .

- c) Dokažite tvrdnju: Ako je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $x_0 \in I$, onda je i neprekinuta u x_0 .

6. (8 bodova)(3b + 2b + 3b)

- a) Koristeći definiciju derivacije, pokažite da je $(e^{3x})' = 3e^{3x}$.
- b) Pokažite da funkcije $f_1(x) = e^{3x}$ i $f_2(x) = 1 + 3 \sin(x)$ imaju istu tangentu u točki $x = 0$.
- c) Je li funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & \text{ako je } x \leq 0, \\ 1 + 3 \sin(x), & \text{ako je } x > 0 \end{cases}$$

diferencijabilna u točki $x = 0$? Obrazložite.

Napomena: Ispit se piše 120 minuta i nosi maksimalno 50 bodova. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire, pribor za pisanje i službeni podsjetnik.