4.6 MONOTONI NIZOVI

DEF

Kažemo da je niz $\mathbb{R}$ brojeva padajući niz (STROGO), ako za sve $n>m$ vrijedi $a_n \le a_m$ ($a_n < a_m$).

Kažemo da je niz a_n rastući (STROGO) ako za sve $n>m$ vrijedi $a_n \ge a_m$ ($a_n > a_m$)

Kažemo da je niz realnih brojeva monoton ako je rastući ili padajući.

* NAP: Niz a_n je rastući ako i samo ako je funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je rastuća.

Niz a_n je padajući $\Leftrightarrow$ je f-ja $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ padajuća.

PROP

Niz je rastući $\Longleftrightarrow$ $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Niz je padajući $\Longleftrightarrow$ $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Svaki konvergentan niz je omeđen

DOKAZ: $\boxed{\Longrightarrow}$ iz def. $m = n+1$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $n > m$ $\quad a_n \ge a_{n+1} \ge a_{n+2} \dots$

Teorem KRITERIJ KONVERGENCIJE ZA MONOTONE NIZOVE

Ako je niz R brojeva (a_n) monoton i omeđen, onda je konvergentan.

postoji gornja međa

Dokaz: Pretpostavimo da je a_n rastući + omeđen odozgo

$\Longrightarrow$ postoji najmanja gornja međa L tj. $a_n \leq L, \forall n \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ broj $L - \varepsilon$ nije gornja međa

$\hookrightarrow$ * ako nije gornja međa znači da: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ td $a_{n_0} > L - \varepsilon$

$\Longrightarrow$ ako je a_n rastući $\Longrightarrow \forall n \geq n_0$, $a_n \geq a_{n_0} > L - \varepsilon$

$\Longrightarrow$ $\forall$ ε-okolina od L sadrži beskonačno mnogo članova niza (a_n) tj. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ td. $\forall n > n_0 \ |a_n - L| < \varepsilon$.

DZ. -||- za padajući niz

Nap: konv $\Longrightarrow$ omeđen

konv $\not\Longrightarrow$ monoton

protumjer $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$

konv. a nije monoton

Zad. Neka je $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n(a_n+1), \ n \geq 1 \end{cases}$ Dokažite da je a_n konvergentan te mu odredite limes.

Rj:

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{1}{3} a_2 (a_2+1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right) = \frac{10}{27}$ ...

$\hookrightarrow$ $(a_n) \searrow + a_n > 0$

① Niz (a_n) je padajući

I. baza: $a_1 \geq a_2$
$1 \geq \frac{2}{3}$ ✓

II. pretp.: neka je $a_{n+1} \leq a_n$ za neki n

PT

III. korak T: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

$a_{n+2} = \frac{1}{3} a_{n+1} (a_{n+1}+1) \leq \frac{1}{3} a_n (a_n+1) = a_{n+1}$

② Niz je omeđen odozdo s 0 tj. $a_n > 0, \ \forall n$

1.) baza: $a_1 > 0$ ✓

2. pretp.: $a_n > 0$ za svaki n

3. korak T: $a_{n+1} > 0$

$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n (a_n+1) > 0$ ✓

③ Zaključak: niz je padajući + omeđen odozdo (konverg.)

④ Izračunati limes L:

$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n (a_n+1) \ / \lim_n$

$\lim_n (a_{n+1}) = \frac{1}{3} \lim_n a_n \cdot \lim_n (a_n+1)$

$\lim_n (a_{n+1}) = \frac{1}{3} \lim_n a_n (\lim_n a_n + 1)$

$L = \frac{1}{3} L \cdot (L+1) \ / \cdot 3$

$3L = L(L+1)$

$3L = L^2 + L$

$L^2 - 2L = 0$

$L_1 = 0$ $\quad$ $L_2 = 2$

$\boxed{2. \text{ ZAD.}}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{a_n + 1}} \end{cases}$$

Rj: $a_1 = 1$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad \searrow a_n$$

1. Niz je padajući $\quad a_{n+1} \leq a_n, \ \forall n$

I. baza $\quad a_2 < a_1 \quad ✓$

II. pretp. $\quad a_{n+1} < a_n$ za svaki n

III. korak $\quad \boxed{a_{n+2} \leq a_{n+1}}$

$$a_{n+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1} + 1}} <$$

$$a_{n+1} \leq a_n \quad / +1$$

$$a_{n+1} + 1 \leq a_n + 1 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\sqrt{a_{n+1} + 1} \leq \sqrt{a_n + 1} \quad /^{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n+1} + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{a_n + 1}} \quad / \cdot (-1)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1} + 1}} \leq -\frac{1}{\sqrt{a_n + 1}}$$

$$\to \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1} + 1}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{a_n + 1}}$$

2. Niz je omeđen odozdo s [0]

$a_n > 0 \ , \forall n$

1. baza $\quad a_1 = 1 > 0$

2. pretp. $\quad a_n > 0$ za neki n

3. korak $\quad T: \ a_{n+1} > 0$

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{a_n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{a_n+1} - 1}{\sqrt{a_n+1}} > 0 \ \text{//}$$

Račun LIMESA:

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{a_n+1}} \Big| \lim_n$$

$$\lim_n a_{n+1} = \lim_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n+1}}\right)$$

$$\lim_n a_{n+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\lim a_n + 1}}$$

$$L = 1 - \frac{1}{\sqrt{L+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{L+1}} = 1 - L$$

$$\frac{1}{1-L} = \sqrt{L+1} \quad /^2$$

$$\frac{1}{(1-L)^2} = L+1$$

$$(L+1)(1-L)^2 = 1$$

$$(L+1)(1-2L+L^2) = 1$$

$$L - 2L^2 + L^3 + \cancel{1} - 2L + L^2 = \cancel{1}$$

$$L^3 - L^2 - L = 0$$

$$L(L^2 - L - 1) = 0$$

$$L_1 = 0$$

$$L^2 - L - 1 = 0$$

$$L_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 1}}{2}$$

$$\boxed{L_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$