6.3. DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJE

DEF

Neka je $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval.

Kažemo da je f diferencijabilna u točki $x_0 \in I$ ako postoji $f'(x_0)$. Za funkciju f kažemo da je diferencijabilna na intervalu I ako je diferencijabilna u svakoj točki tog intervala

* postoji lijevi i desni limes $\longrightarrow$ postoji limes $\longrightarrow$ postoji derivacija

$\to$ ako u def. deriv. u točki stavimo $\boxed{\lim_{h \to 0^+}}$ dobijemo desnu derivaciju u točki $\boxed{f'_+(x_0)}$,

$\to$ ako –II– stavimo $\lim_{x \to 0^-}$ dobijemo lijevu deriv. u točki $f'_-(x_0)$.

$\Downarrow$

DEF Neka je $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval i $x_0 \in I$.

Desna i lijeva deriv. fije f u točki x_0 su definirane na slj. način

$$\boxed{f'_{\pm}(x_0) = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

ukoliko limes postoji, konačan je.

* Znači, diferencijab. dokazujemo pokazivanjem da deriv u točki $f'(x_0)$ postoji $\longrightarrow$ da postoje lijeva i desna derivacija

$\Rightarrow$ jednake $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Primjer 6.7.) Ispitajte diferenc. fije $f(x)=|x|$

→ to je apsolutna vrijednost stoga se lako dokaže da je diferenc. za $x<0$ i $x>0$. Ostaje nam prikazati za $x=0$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

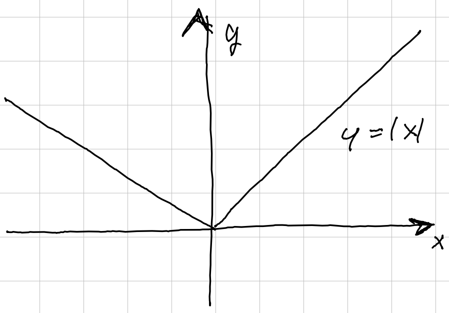
$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} \overset{h>0}{=} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \to$ nije diferencijabilna u $x_0=0$.

– $f'(0)$ ne postoji jer (...)

Kada bismo grafički prikazali, vidjeli bismo da graf nije gladak, već da ima šiljak u ishodištu.



TEOREM * pojam o neprekinutosti funkcije u točki $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Funkcija $f: I \to \mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ otvoreni interval.

Ako je f diferencijabilna funkcija u točki $x_0\in I$, onda je f neprekinuta u $x_0\in I$.

DOKAZ: Prema pretpostavci da je f diferencijab., ima limes u točki x_0.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = \lim_{h\to 0} h\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0\cdot f'(x_0)=0$$

jer je $f'(x_0)$ konačan realan broj odnosno dobijemo da je $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)) = f(x_0)$ što znači da je funkcija f neprekinuta u x_0.

Napomena: Ne vrijedi obrat teorema.

Odnosno iz neprekidnosti f-je ne slijedi da je f diferencijab. To znači da postoje neprekidne funkcije koje nisu diferencijab.

$\longrightarrow$ $f(x)=|x|$ neprekinuta u $x_0=0$ jer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$, ali iz Primjera 7) znamo da nije diferencijab. u $x_0=0$.

• Na koje sve načine funkcija nije diferencijabilna u točki?

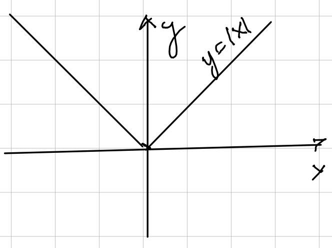
• neprekinuta f u $x_0 \longrightarrow$ ne diferencijab f u x_0

Funkcije koje jesu neprekinute, ali nisu diferencijabilne

(1.) $f(x) = |x|$

• f neprek. u $x_0=0$; $\underset{\text{desna}}{\lim\limits_{x\to 0^+} |x|} = \underset{\text{lijeva}}{\lim\limits_{x\to 0^-} |x|} = f(0) = 0$

• f nije diferencijab. u $x_0 = 0$;



$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$\longrightarrow$ lijeva i desna nisu iste $\Rightarrow$ nema diferencijacije

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \longrightarrow \nexists f'(0)$ za koji

(2.) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

• f neprekinuta u $x_0=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^2} = f(0) = 0$ ✓

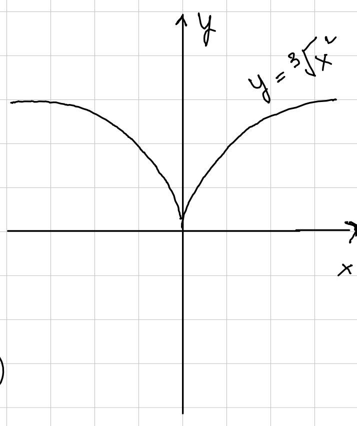
• f nije diferencijab. u $x_0=0$;

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2} - \cancel{\sqrt[3]{0^2}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^3}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h^2} - \cancel{\sqrt[3]{0^2}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^3}} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$



$f'_+(0) \neq f'_-(0)$

(3.) neprekinuta, nije diferencijabilna, ao ima tangentu

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

• f nepr. u $x_0=0$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x} = 0 \end{aligned}\right\} f(0)=0$$