

# Inverzna funkcija

$f^{-1}$  inverz  $\rightarrow f$  funkcija (inj + surj)

$f$  funkcija:  $f(x_1) = f(x_2) \mid f^{-1}$

$$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \quad f^{-1} \circ f = \text{id}$$

$$x_1 = x_2 \quad (f^{-1} \circ f(x) = x)$$

$f$  surjekcija  $f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in Y$

cijeli  $y$  mora biti slika

(za  $\forall y \in Y$  postoji  $x \in X$  koji se u njega preslikava funkcijom)

$$\Rightarrow \forall y \in Y \quad \exists x = f^{-1}(y) \text{ t.d. } f(x) = y$$

## Korolar

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  funkcije

Tada je  $g \circ f: X \rightarrow Z$  funkcija i injekcija

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

## Korolar

$f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  bijekcija

Tada je  $g \circ f: X \rightarrow Z$  bijekcija i injektivna

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Dokaz:  $f: X \rightarrow Y$  ... dalje sami

Zad.) Zadata je f-ja  $f(x) = \sqrt{2x+5}$

a) Odrediti domen i sliku od  $f$ .

b) Ako za funkciju  $f: D(f) \rightarrow \text{Im}(f)$  postoji inverz, tada odredite  $f^{-1}$ ,  $D(f^{-1})$ ,  $\text{Im}(f^{-1})$ .

a)  $D_f \rightarrow \text{svi } x$  za koje  $f$  ima  $\mathbb{R}$  vrijednja

$$\sqrt{2x+5} \geq 0$$

$$2x+5 \geq 0$$

$$x \geq \frac{-5}{2}$$

$$D_f = \left[ \frac{-5}{2}, \infty \right)$$

Slika  $\rightarrow$  treba naći: kamor  $f$  preslikava cijelu domen

$$x \geq \frac{-5}{2}$$

kada djelujemo s  $f$  na nejednakost:  
ako je rastuća lit će veća od 0

$$2x+5 \geq 0 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\sqrt{2x+5} \geq 0$$

Kod kompliciranijih f-ja krećemo od domene kako bi dobili  $f(x)$

$$\text{Im } f$$

$$b) f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x+5}$$

Je li bijekcija?

II. način  $\rightarrow$  horizontalni test

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\sqrt{2x_1+5} = \sqrt{2x_2+5} \quad |^2$$

III. teorem (prosti korolari)

$$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \quad | :2$$

$$\boxed{x_1 = x_2}$$

$$f' = ?$$

$$y = \sqrt{2x+5} \quad |^2$$

$$y^2 = 2x+5$$

$$y^2 - 5 = 2x \quad | :2$$

$$x = \frac{y^2 - 5}{2}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{y^2 - 5}{2}}$$

Odredite inverznu fiji funkciju  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

Zadano  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  ako postoji.

$f$  bijekcija?

1.  $f$  bij:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{x_2-1}$$

$$x_2-1 = x_1-1$$

$$x_2 = x_1 \quad \checkmark$$

2.  $f$  surj:  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Im}(f)$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$(x-1) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

može kad imamo 0 brojnim brojevima.  
razlomak (logično može biti  
ovisi o  $x$ )  $\rightarrow$  nikada ne može biti 0

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  je bij. i ima inverz

tražimo  $f^{-1}$

$$x = \frac{1}{y} + 1$$

$$y = \frac{1}{x-1} \quad | \cdot (x-1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{y} + 1$$

$$y(x-1) = 1$$

$$yx - y = 1 \quad | : (y)$$

$$x-1 = \frac{1}{y}$$