Zimski ispitni rok iz Matematičke analize 1

17. veljače 2020.

1. **(9 bodova)**

   (a) **(2 bod)** Ispitati istinitost sljedeće tvrdnje:
   Neka su $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ i $\arg z_1, \arg z_2 \in [0, 2\pi\rangle$, tada vrijedi
   $$\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2.$$
   Ako je tvrdnja istinita, dokazati. Ukoliko je tvrdnja neistinita opovrgnuti ju protuprimjerom.

   (b) **(3 boda)** Neka je $\arg z = \frac{5\pi}{4}$ i $|z| = \sqrt{2}$. Prikazati broj $\dfrac{1}{z+2i}$ u trigonometrijskom obliku.

   (c) **(4 boda)** Pronaći sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi
   $$z^5 = \overline{z}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. **(7 bodova)**

   (a) **(2 boda)** Pokazati da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

   (b) **(5 bodova)** U odjelu jedne firme ima 50 radnika, od čega je 21 na poziciji programera, 15 na poziciji web dizajnera i 14 na poziciji menadžera. Na koliko načina možemo odabrati tim od 10 ljudi tako da radnici svih pozicija budu zastupljeni?

3. **(8 bodova)**

   (a) **(3 boda)** Koristeći definiciju derivacije, izračunati derivaciju funkcije $f(x) = \sin(3x)$ u točki $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

   (b) **(3 boda)** Pokazati da funkcija $g(x) = \sqrt[3]{x-a}$ nije diferencijabilna u točki $x_0 = a \in \mathbb{R}$. Ima li tangentu u toj točki? Ako ima, napisati jednadžbu te tangente?

   (c) **(2 boda)** Izračunati derivaciju funkcije $h(x) = \ln^2(\operatorname{arctg}(5x))$.

4. **(8 bodova)**

   (a) **(2 boda)** Nadopuniti definiciju:
   Broj $L \in \mathbb{R}$ zovemo limes niza (a_n) ako za ________ $\varepsilon > 0$ postoji ________ takav da za svaki ________ vrijedi ________ .

   (b) **(3 boda)** Postoji li limes niza $a_n = (-1)^n \dfrac{3n^2+4n+1}{2n^2+n-5}$? Obrazložiti odgovor.

   (c) **(3 boda)** Izračunati limes
   $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+3}\right)^n.$$

OKRENITE!

5. **(8 bodova)**

   (a) **(3 boda)** Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na otvorenom intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Dokazati sljedeću tvrdnju. Ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in I$, tada je f strogo padajuća funkcija na I.

   (b) **(5 bodova)** Odrediti maksimalnu površinu pravokutnika čije su stranice paralelne s koordinatnim osima, a vrhovi pravokutnika leže na elipsi $x^2 + 16y^2 = 16$. Obrazložiti da se radi o maksimumu.

6. **(9 bodova)** Izračunati integrale:

   (a) **(3 boda)**
   $$\int x^2 e^x dx;$$

   (b) **(6 boda)**
   $$\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 1} dx.$$

7. **(7 bodova)**

   (a) **(5 boda)** Iskazati i dokazati teorem srednje vrijednosti integralnog računa.

   (b) **(2 boda)** Odrediti točku c takvu da prethodni teorem vrijedi za funkciju $f(x) = e^x$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

8. **(8 bodova)**

   (a) **(4 boda)** Izračunati površinu ravninskog lika omeđenog krivuljama:
   $$y = -2x^2 + 4x, \quad y = -2x^2 + 2x \quad \text{i} \quad y = 0.$$
   Nacrtati skicu!

   (b) **(4 boda)** Izračunati volumen rotacijskog tijela koje nastaje vrtnjom ravninskog lika omeđenog krivuljama
   $$y = -2x^2 + 2x \quad \text{i} \quad y = 0$$
   oko osi y. Nacrtati skicu!

Napomena: Ispit se piše **150 minuta**. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika sa kolegija matematička analiza 1. Nije dozvoljena uporaba kalkulatora.