Teorija iz skripte iz Matan 1 na ispitima - II ciklus nastave

• dokazi tvrdnji koje su napisane crnim slovima se ispituju na ispitima;

• dokazi tvrdnji koje su napisane crvenim slovima se NE ispituju ove godine na ispitima; međutim, njihovi iskazi, njihove varijante (npr. njen obrat po kontrapoziciji) i primjena ovih tvrdnji se ispituju na ispitima;

• iskazi definicija, tvrdnji i primjeri vezano uz definicije i tvrdnje se ispituju na ispitima;

• ako neka tvrdnja iz skripte nije navedena u ovom popisu onda se njen dokaz automatski ne ispituje na ispitima.

\# **POGLAVLJE 9 - predaje se u 8. tjednu nastave**:

• Pravila za deriviranje parametarski zadanih funkcija:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dt}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \frac{1}{\dot{x}(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3}.$$

• **Teorem 9.2.1** [Fermatov teorem = nužni uvjet za lokalni ekstrem]
Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval u $\mathbb{R}$ i $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Ako je $a \in I$ točka lokalnog ekstrema, onda je $f'(a) = 0$.

• **Teorem 9.2.2** [Rolle]
Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekinuta na $[a, b]$ i diferencijabilna na $\langle a, b\rangle$. Ako je $f(a) = f(b)$, onda postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$.

• **Teorem 9.2.3** [Lagrangeov teorem srednje vrijednosti]
Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekinuta, diferencijabilna na $\langle a, b\rangle$. Onda postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f(b)-f(a) = f'(c)(b - a)$.

• **Korolar 9.2.4** *Neka su $f, g : \langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije.*

(i) *Ako je $f'(x) = 0, \forall x \in \langle a, b\rangle$, onda je $f(x) = konst.$ na $\langle a, b\rangle$.*

(ii) *Ako je $f'(x) = g'(x), \forall x \in \langle a, b\rangle$, onda je $f(x) = g(x) + konst.$ na $\langle a, b\rangle$.*

• **Korolar 9.2.5** *Neka je $f : \langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija.*

(i) *Ako je $f'(x) > 0$ na $\langle a, b\rangle$, onda f strogo raste na $\langle a, b\rangle$.*

(ii) *Ako je $f'(x) < 0$ na $\langle a, b\rangle$, onda f strogo pada na $\langle a, b\rangle$.*

\# **POGLAVLJE 10 - predaje se u 9. tjednu nastave**: NEMA DOKAZA NITI IZVODA!

\# **POGLAVLJE 11 - predaje se u 10. tjednu nastave**:

• **Teorem 11.1.1**

(1) *Neka su F_1 i F_2 primitivne funkcije od f na intervalu $I =< a, b >$. Tada za svaki $x \in I$ vrijedi: $F_2(x) - F_1(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}$, tj. F_1 i F_2 se razlikuju za konstantu.*

(2) *Ako je F_1 primitivna funkcija od f na I, onda je i svaka funkcija oblika $F_2 = F_1+C$ takodjer primitivna funkcija od f na I.*

• **Teorem 11.3.1** [Teorem srednje vrijednosti integralnog računa]
Neka je f neprekinuta na intervalu $[a,b]$. Tada postoji $c \in < a, b >$ takav da je:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

• **Teorem 11.3.2** [Konstrukcija primitivne funkcije pomoću određenog integrala]
Neka je f neprekinuta na intervalu $[a,b]$. Tada je funkcija:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \ t \in [a,b],$$

diferencijabilna na $< a, b >$ i vrijedi $\Phi'(x) = f(x)$.
• **Teorem 11.3.3** [Newton-Leibnizova formula]
Neka je f neprekinuta na $[a,b]$, te neka je $F(x)$ bilo koja primitivna funkcija od $f(x)$ na $[a,b]$. Tada je:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

• **Teorem 11.4.1** *Za neodređeni integral vrijedi*:

$$(1) \quad \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x) \quad \text{i} \quad (2) \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

POGLAVLJE 12 - predaje se u 11. tjednu nastave:
• **Teorem 12.1.1** [Metoda supstitucije u neodređenom integralu]
Neka je f neprekinuta na I te $\varphi(x)$ neprekinuto diferencijabilna takva da je $\mathrm{Im}(\varphi) = I$. Tada uz supstituciju $t = \varphi(x)$, vrijedi:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

• **Teorem 12.1.2** [Metoda supstitucije u određenom integralu]
Neka je $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ neprekinuta, a $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ neprekinuto diferencijabilna i $\varphi([a,b]) \subset [\alpha,\beta]$. Tada vrijedi:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

• **Teorem 12.2.1** [Metoda parcijalne integracije]
Neka su f i g diferencijabilne funkcije na $< a, b >$. Tada na tom intervalu vrijedi:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

POGLAVLJE 13 - predaje se u 12. tjednu nastave:
• **Propozicija 13.2.1** [Primjer 13.5] *Za $a > 0$ vrijedi sljedeće*:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \textit{divergira za } p \le 1, \\ \textit{konvergira za } p > 1. \end{cases}$$

POGLAVLJE 14 - predaje se u 13. tjednu nastave:

• Izvod formule (14.3) koja nam daje volumen tijela s poznatom površinom poprečnog presjeka $P = P(x)$ kao na slici 14.30:

$$V = \int_a^b P(x)dx.$$

• Izvod formule (14.4) koja nam daje volumen rotacijskog tijela koje je nastalo rotacijom trapeza oko osi O_x kao na slici 14.32:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx.$$

• Izvod formule (14.5) koja nam daje volumen rotacijskog tijela koje je nastalo rotacijom trapeza oko osi O_y kao na slici 14.33:

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$