LJETNI ISPITNI ROK
13.7.2021.

Ime i prezime: ____________________________
JMBAG: __________________

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.
Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: __________________

---

1. (8 bodova)
   (a) (2 boda) Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ u kojima je broj 1 u poretku ispred broja 2?
   (b) (3 boda) Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ u kojima 1 i 2 nisu susjedni?
   (c) (3 boda) Koliko ima nepraznih podskupova skupa $\{1, 2, ..., n\}$ koji se sastoje od isključivo parnih brojeva?

2. (8 bodova)
   (a) (4 boda) Dokažite da za sve $x \in \langle 0, \pi\rangle$ i sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:
   $$\cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot ... \cdot \cos(2^{n-1}x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)}$$
   (b) (4 boda) Ispitajte istinitost sljedećih tvrdnji:
      i) $(\forall y \in \mathbb{R})\,(\exists x \in \langle 0, \pi\rangle)\,(\cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot ... \cdot \cos(2^9 x) = y)$
      ii) $(\forall x \in \langle 0, \pi\rangle)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n \in \mathbb{N})\,(|\cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot ... \cdot \cos(2^{n-1}x)| < \varepsilon)$

   Svoje odgovore obrazložite!

3. (8 bodova)
   (a) (4 boda) Koje od sljedećih tvrdji su istinite, a koje nisu?
      (T1) Svaki omeđen niz je konvergentan.
      (T2) Svaki konvergentan niz je monoton.
      (T3) Svaki konvergentan niz je omeđen.

   Istinite tvrdnje dokažite, a neistinite opovrgnite protuprimjerom.
   (b) (4 bodova) Niz $(a_n)_n$ definiran je rekurzivno sljedećim relacijama:
   $$a_1 = 1; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n}$$
   Dokažite da je niz $(a_n)_n$ konvergentan te mu odredite limes.

OKRENITE STRANICU!

4. (8 bodova) Odredite sve vrijednosti realnog parametra a za koje krivulja

$$y = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^4}{\left(\sqrt{x}+a\right)^2}$$

ima desnu kosu asimptotu te, za takve a, odredite pripadne asimptote.

5. (8 bodova) Odredite najveću moguću površinu pravokutnika upisanog u područje omeđeno pravcima $y = 1 + 2x$, $y = 0$ i krivuljom $y = \frac{1}{x^2}$ takvog da mu jedna od stranica leži na $x > -\frac{1}{2}$ dijelu osi apscisa.

6. (8 bodova)

   (a) (3 boda) Izračunajte površinu lika omeđenog krivljom $y = \arcsin(2x)$ odozdo te pravcima $y = \frac{\pi}{2}$ i $x = 0$.

   (b) (5 bodova) Promatrajmo ravninski lik koji je omeđen krivuljom $y = \frac{1}{\sqrt{x^a}}, a > 0$ te pravcima $x = 1$ i $y = 0$. Odredite sve $a > 0$ za koje tijelo dobiveno rotacijom ovog lika oko osi apscisa ima konačan, a tijelo dobiveno rotacijom oko osi ordinata beskonačan volumen.

7. (8 bodova)

   (a) (1 bod) Iskažite teorem srednje vrijednosti integralnog računa.

   (b) (4 boda) Neka je $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija te neka je funkcija $\phi : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirana s

   $$\phi(x) = \int_0^x f(t)dt$$

   Po definiciji dokažite da je ϕ diferencijabilna na $\langle 0, +\infty\rangle$ te da za svaki $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ vrijedi $\phi'(x) = f(x)$.

   (c) (3 boda) Neka je $g : \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$ strogo rastuća diferencijabilna funkcija te neka je $\psi : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirana s

   $$\psi(x) = \int_0^{g(x)} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

   Dokažite da je ψ diferencijabilna funkcija te da vrijedi

   $$\psi'(x) = g'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}g(x)^2}$$

8. (8 bodova)

   (a) (2 boda) Dokažite formulu za parcijalnu integraciju kod neodređenog integrala.

   (b) (6 bodova) Odredite sljedeći neodređeni integral:

   $$\int \sin(\ln x)dx$$

Napomena: Ispit se piše **150 minuta**. Na ispitu je dopuštena upotreba isključivo pribora za pisanje i službenog podsjetnika.