

MATEMATIČKA ANALIZA 1 - dekanski ispitni rok
15.9.2020.

1. (8 bodova)

- (a) Odredite sve kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi:

$$iz^2 + (1+i)z + 1 = 0.$$

Potom dobivena rješenja skicirati na \mathbb{C} .

- (b) Neka je $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Dokažite matematičkom idukcijom da vrijedi:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. (8 bodova) Zadana je funkcija $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- (a) Pokažite da je f neparna funkcija.
(b) Izvedite formulu za inverznu funkciju $f^{-1}(x)$.
(c) Pokažite da ako je f neparna te postoji njena inverzna funkcija f^{-1} , tada je i f^{-1} neparna.

3. (7 bodova)

- (a) Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadan je rekurzivno:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + 1}, \quad n \geq 2.$$

Dokažite da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan i odredite njegov limes.

- (b) Dokažite da ako je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton i omeđen, onda je konvergentan.

4. (8 bodova)

- (a) Dokažite po definiciji da, ako je $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, onda postoji $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
(b) Definirajte neprekinutost funkcije f u točki $x = a$.
(c) Dokažite da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}, & x > 1; \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$$

neprekinuta u $x = 1$, ali nije diferencijabilna u $x = 1$.

5. (9 bodova)

- (a) Funkcija $y = f(x)$ zadana je implicitno jednačbom

$$x^y + \arctan(2x - y) - 1 = 0.$$

Napišite jednačbu tangente na graf funkcije f u točki $T(1, 2)$.

- (b) Iskažite i dokažite Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

OKRENITE STRANICU!

6. (7 bodova) Odredite domenu i sve asimptote funkcije $f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x}$.

7. (8 bodova)

(a) Dokažite da za neprekinutu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ postoji $c \in \langle a, b \rangle$ tako da vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

(b) Vrijednost $f(c)$ iz (a) dijela zadatka zovemo srednja vrijednost funkcije f na $[a, b]$.
Odredite sve realne brojeve $b > 0$ takve da je srednja vrijednost funkcije

$$f(x) = 2 + 6x - 3x^2$$

na intervalu $[0, b]$ jednaka 4.

8. (9 bodova) Izračunajte integral

$$\int \frac{x+2}{x^3-1} dx.$$