Ljetni ispitni rok iz Matematičke analize 1

10. srpnja 2019.

---

1. (*8 bodova*)

(a) (*5b*) Odredite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju jednadžbu

$$z^2(1-i) = \bar{z}^3(\sqrt{3}+i)\,.$$

(b) (*3b*) Ispitajte istinitost sljedećih sudova. Obrazložite svoje tvrdnje.

(S1) $(\forall z \in \mathbb{C})\ (z^2 \geq 0)$;

(S2) $(\exists z \in \mathbb{C})\ (z^2 + iz - 1 = 0)$.

2. (*8 bodova*) Devet delegata, po tri iz tri različite države, sjedi oko okruglog stola. Koliko ima rasporeda u kojima svaki delegat sjedi pokraj barem jednog delegata iz druge države?

3. (*8 bodova*)

(a) (*5b*) Ispitajte istinitost sljedećih tvrdnji. Istinite tvrdnje dokažite, a lažne opovrgnite protuprimjerom.

(T1) Ako je niz realnih brojeva (a_n) konvergentan, tada je (a_n) omeđen.

(T2) Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$, tada postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(b) (*3b*) Izračunajte (ako postoji) limes

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\sqrt{n}+1}{3\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n-1}}\,.$$

4. (*8 bodova*) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana je s

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,, \end{cases}$$

gdje je $a \in \mathbb{R}$ zadani realni parametar.

(a) (*3b*) Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija f neprekinuta na $\mathbb{R}$.

(b) (*5b*) Izračunajte $f'(x)$ za sve $x \neq 0$ i odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija f diferencijabilna na $\mathbb{R}$.

Obrazložite sve svoje tvrdnje.

5. (*10 bodova*) Odredite područje definicije, ispitajte ponašanje na rubu područja definicije, odredite asimptote, intervale monotonosti i lokalne ekstreme, odredite točke infleksije i intervale konveksnosti i konkavnosti te skicirajte kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,.$$

OKRENITE

6. (*7 bodova*) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekinuta funkcija.

(a) (*5b*) Dokažite da je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

diferencijabilna na $\mathbb{R}$ te da vrijedi $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

(b) (*2b*) Neka je funkcija $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Izračunajte $\Phi'(x)$.

7. (*8 bodova*)

(a) (*5b*) Izračunajte integral

$$\int_1^3 \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}\mathrm{d}x\,.$$

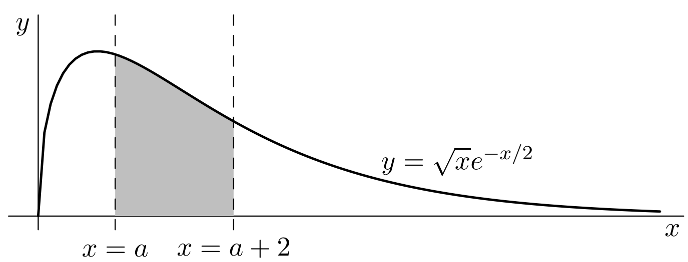
(b) (*3b*) Ispitajte konvergenciju integrala

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^4}}\mathrm{d}x\,.$$

8. (*7 bodova*) Ravninski lik koji je omeđen krivuljom $y = \sqrt{x}e^{-x/2}$ te pravcima $x = a$, $x = a + 2$ i $y = 0$ rotira oko osi x (vidi sliku).

(a) (*4b*) U ovisnosti o parametru $a > 0$ odredite volumen dobivenog rotacijskog tijela.

(b) (*3b*) Odredite $a > 0$ za koji je volumen dobivenog rotacijskog tijela maksimalan. Nije potrebno pokazivati da se radi o maksimumu.



Dozvoljeno je samo korištenje pribora za pisanje i brisanje te službenog podsjetnika za kolegij Matematička analiza 1. Vrijeme pisanja ispita je 150 minuta.