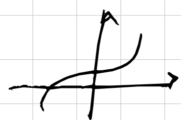
# FUNKCIJE

## 2.1. Funkcije

zapis f-je
- algebarski $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$
- grafički



- opisno
- tablično

| x | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| y | 2 | 4 | 6 |

**DEF:** FUNKCIJA je preslikavanje koje svakom elementu x skupa A pridružuje točno jedan element y skupa B.

Algebarski zapis f-je glasi:

$$f: A \to B, \; y = f(x) \qquad (x \in A \xrightarrow{f} y \in B)$$

argument f-je

A = domena  B = kodomena

Pr.)

a) $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$  $S(n) = n + 1$

b) $p: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$  $p(z) = 2z$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  $f(x) = x^2 + x + 1$

Realna f-ja jedne realne varijable

$f: A \to B$  $A, B \in \mathbb{R}$

Pitanje:) Jesu li $f$ i $g$ jednake f-je ako je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

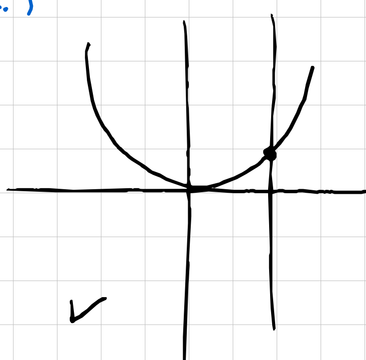
$f(x)=x^2$ i $g\ [0,\infty\rangle\to\mathbb{R}$ $g(x)=x^2$.

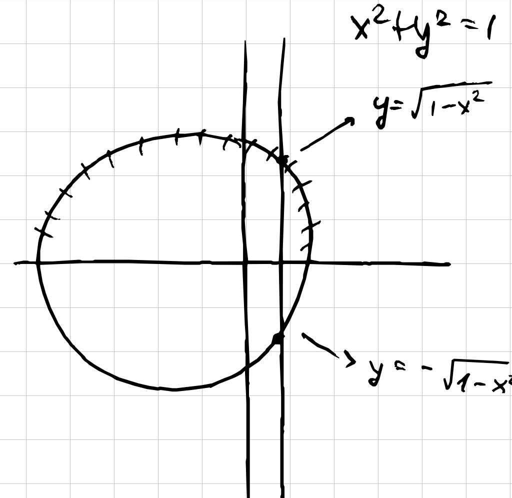
$\Rightarrow$ Ne jer im domene nisu jednake

## Graf realne f-je

$$\Gamma_f=\Gamma(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: y=f(x)\}$$

Pr.)






VERTIKALAN TEST:

Graf. f-je ima svojstvo da ga svaki pravac paralelan s osi y siječe u jednoj točci.

**Domena** ili prirodno područje definicije $D(f)$ je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koji je zakon pridruživanja dobro definiran.

**SLIKA** f-je $Im_f$ je skup svih vrijednosti iz kodomena koje f-ja poprima

$$Im_f = \{ f(x) : x \in D(f) \} \subseteq B$$

$$Im_f = \{ y \in \mathbb{R} : \exists_x \in D(f) \text{ t.d. } y = f(x) \}$$

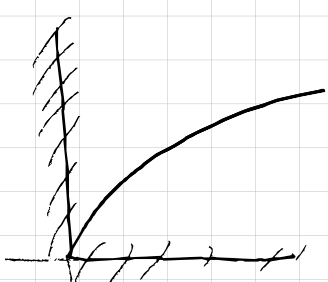
Pr.)

a) $f(x) = \sqrt{x}$

$x \geq 0$

$D(f) = [0, +\infty\rangle$

$Im(f) = [0, +\infty\rangle$

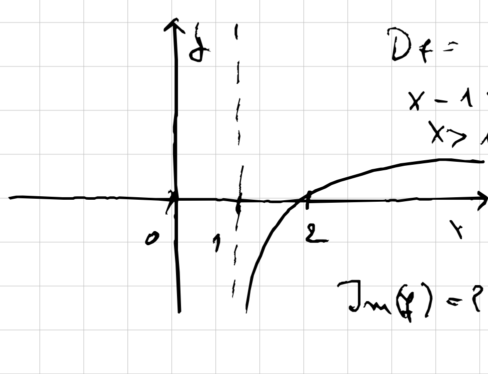


b) $f(x) = x^2 + 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$Im_f = [1, +\infty\rangle$

c) $f(x) = -\log_2(x-1)$




$D_f = \langle 1, +\infty\rangle$

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$Im(f) = ? = \mathbb{R}$

**Def.** $f : X \to Y$, $X = D(f)$  $Im(f) \subseteq Y$

① Ako fja $f$ različite originale preslikava u različite slike, onda za fju kažemo da je INJEKCIJA.

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$$

② Ako fja $f$ ima svojstva da za svaki element $y \in Y$ postoji (barem jedan) element $x \in X$ koji se u njega preslikava tj. $y = f(x)$, onda za fju $f$ kažemo da je SURJEKCIJA.

$$\forall y \in Y \;\; \exists x \in X \;\; \text{t.d.} \;\; y = f(x)$$

③ Ako je fja injekcija i surjekcija, tada je i BIJEKCIJA

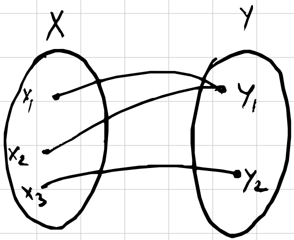
**Napomena:**

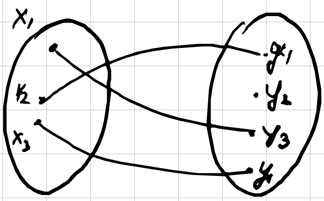
① INJEKCIJA: $\forall x_1, x_2 \in X \; (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\equiv \quad f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = x_2$$

② SURJEKCIJA $\quad Y = Im(f)$

③ BIJEKCIJA $\quad \forall y \in Y \;\; \exists! x \in X \;\; \text{t.d.} \;\; y = f(x)$




IN

Pr.) Ispitajte injektivnost i surjektivnost.

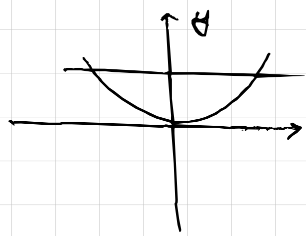
a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f_1 = x^2$

INJEKCIJA: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^2 = x_2^2$

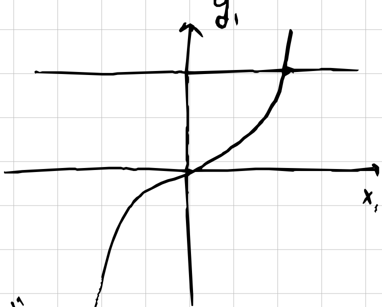
$\boxed{x_1 = \pm x_2}$ nije inj.




SURJEKCIJA: $Im(f) = \mathbb{R}$ ?

$Im f_1 = [0, +\infty\rangle \neq \mathbb{R}$ nije surjekcija

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^3$




INJEKCIJA: $f_2(x_1) = f_2(x_2)$

$x_1^3 = x_2^3 \quad / \sqrt[3]{\ }$

$x_1 = x_2$ INJEKCIJA

SURJEKCIJA: $Im(f) = \mathbb{R}$ surjekcija

$\Longrightarrow$ BIJEKCIJA

c) $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_3(x) = \sin x$

injekcija: $\sin(x_1) = \sin(x_2)$

$x_1 = x_2 + 2k\pi$ $\quad$ <u>nije injekcija</u>

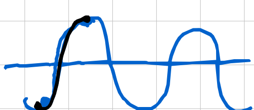
surjekcija: $Im_f \neq \mathbb{R}$

$Im_f = [-1, 1]$ $\quad$ <u>nije surj.</u>

<u>DEF</u>: Restrikcija fije $f: X \to Y$ na skup $A \subset X$ je fija $f|_A : A \to Y$ zadana s $f|_A(x) = f(x)$, $x \in A$.

Pitanje: Odredite $A, B \subseteq \mathbb{R}$ t.d. $f: A \to B$

$f(x) = \sin x$ je bijekcija.



$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ $\quad f(x) = \sin x$

BIJEKCIJA

## <u>KOMPOZICIJA F-ja</u>

Za fije $f: A \to B$ i $g: B \to C$ kažemo da su ulančane

Kompozicija fije je fija $g \circ f : A \to C$ definiramo s

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\quad \forall x \in A$

Pr.) Zadane su f-je $f: \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 1$

$g: \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log x$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ x $\qquad f \circ g : \langle 0, +\infty\rangle$

jer $Im(g) = \mathbb{R}$, a $D_f$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \log_2 (x^2 - 1)$

$g \circ f : \langle 1, \infty\rangle \to \mathbb{R}$

Pr.) F-ju $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln^3 (x^2+1)$ prikaži kao komp 3 f-je.

$f_1(x) = x^2 + 1$

$f_2(x) = \ln(x)$

$f_3(x) = x^3$

$f(x) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$

SVOJSTVA KOMP.

1. Asocijativnost $\quad f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
2. Komutativnost $\quad f \circ g \neq g \circ f$

# Inverzna funkcija

- Funkcija $id : X \to X$, $id(x) = x$ IDENTITETA

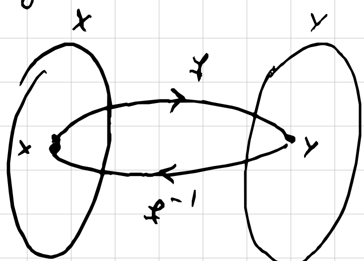
  kraća oznaka: $id_X$

- Neka je $f : X \to Y$. Kažemo da je f-ja $g\ Y \to X$ <u>inverzna funkcija</u> f-je $f$ ako vrijedi

$$g(f(x)) = x, \ \forall x \in X \quad i \quad f(g(y)) = y \ \forall y \in Y.$$

$$(g \circ f = id_X) \qquad\qquad (f \circ g = id_Y)$$

**NAP** Ako je f-ja $f : X \to Y$ ima inverznu f-ju, tada je ona jedinstvena i označavamo je s $f^{-1} : Y \to X$.



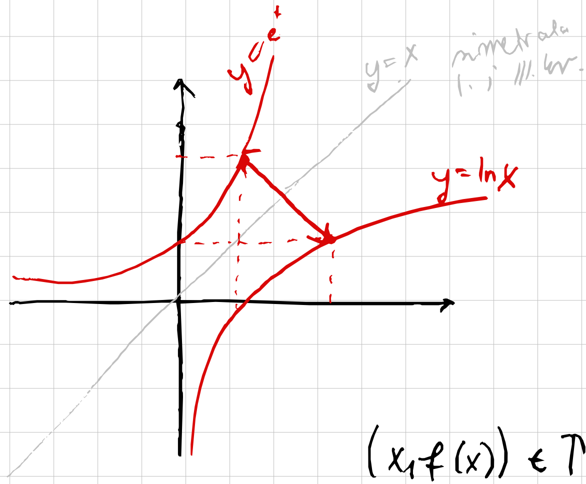

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

$$f : X \to Y \qquad\qquad f^{-1} : Y \to X$$

$$\boxed{\begin{aligned} D(f) &= X = Im(f^{-1}) \\ Im(f) &= Y = D(f^{-1}) \end{aligned}}$$




Grafovi od $f$ i $f^{-1}$ su simetrični s obzirom na pravac $y = x$

$$(x, f(x)) \in \Gamma_f \iff (y, f^{-1}(y)) \in \Gamma_{f^{-1}}$$

$\boxed{\text{Teorem}}$ Fja $f: X \to Y$ ima inverznu fju $f^{-1}: Y \to X$ ako i samo ako je $f$ bijekcija. Tada je i $f^{-1}$ bijekcija.

$\boxed{\text{Dokaz}}$ $T_1$: $f$ bijekcija $\xRightarrow{\text{(slijedi)}}$ $f$ ima inverz

$f$ bijekcija : $\forall y \in Y \; \exists! x \in X$ td $y = f(x)$

$\Downarrow$

$\exists$ inverz $f^{-1}$ : $\forall y \in Y \quad \exists! \, x \in X$ td $x = f^{-1}(x)$

$f^{-1}: Y \to X$

✓