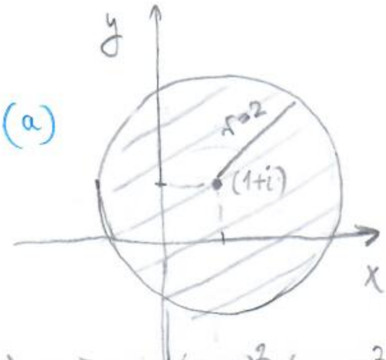
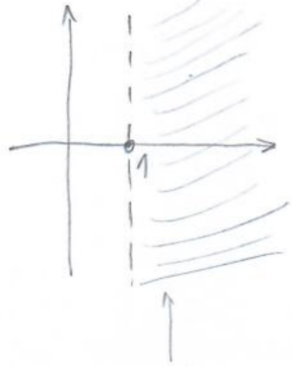
Rješenja MEĐUISPITA

MATEMATIČKA ANALIZA 1 (27.11.2018.)

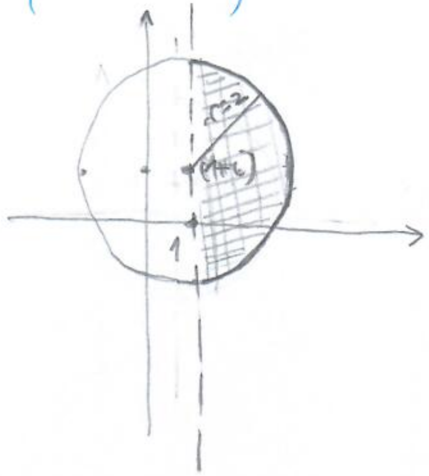
① (a)



$\cap$



$=$



kružnica $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

$|z-(1+i)|=2$

$|z-(1+i)|\leq 2$ KRUG S RUBOM radijusa 2

POLURAVNINA $x>1$ BEZ RUBA

(b) $\arg(i z^3)=\pi$

$\arg(i)+3\arg z=\pi+2k\pi$

$\varphi:=\arg z$

$\frac{\pi}{2}+3\varphi=\pi+2k\pi$

$\varphi=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \quad k=0,1,2$

$|z-i|=\sqrt{3}$

$|r\cos\varphi+i(r\sin\varphi-1)|=\sqrt{3}$

$\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi-2r\sin\varphi+1}=\sqrt{3}$

$$\underline{\underline{r^2-2r\sin\varphi-2=0}}$$

1° SLUČAJ $k=0$ $\quad \varphi_1=\frac{\pi}{6}$ DAJE $r^2-r-2=0$

JEDINO POZITIVNO RJEŠENJE JE $\underline{r_1=2}$

$z_1=2\,\mathrm{cis}\frac{\pi}{6}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i$

2° SLUČAJ $k=1$ $\quad \varphi_2=\frac{5\pi}{6}$ DAJE $r^2-r-2=0 \Longrightarrow r_1=2$

$z_2=2\,\mathrm{cis}\frac{5\pi}{6}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i$

3° SLUČAJ $k=2$ $\quad \varphi_3=\frac{3\pi}{2}$ DAJE $r^2+2r-2=0 \quad r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$

POZITIVNO RJEŠENJE JE $r_1=-1+\sqrt{3}$

$z_3=(-1+\sqrt{3})\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=(-1+\sqrt{3})(-i)=(1-\sqrt{3})i$

$$\boxed{\begin{aligned} z_1&=\sqrt{3}+i\\ z_2&=-\sqrt{3}+i\\ z_3&=(1-\sqrt{3})i \end{aligned}}$$

(2) $S=\{1,2,3,4\}$

(a) (i) $\rho=\{(1,2),(2,1)\}$

(ii) $\rho=\{(1,2),(2,3)\}$

(iii) $\rho=\{(1,2)\ (2,3)\}$

(b) $\rho=\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3)\}$

Refleksivnost $(4,4)$

SIMETRIČNOST SADA NE TREBA NIŠTA DODATI, POGLEDAJMO NAKON TRANZITIVNOSTI

TRANZITIVNOST $(1,4)$

MORAMO DODATI DA IMAMO SIMETRIČNOST: $(4,1)$

$$\rho_1=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$$

$[1]=\{1,3,4\}=[3]=[4]$

$[2]=\{2\}$

(3) 10 učenika 2. razreda

8 učenika 3. razreda

6 učenika 4. razreda

KOŠARKAŠKA EKIPA OD 5. UČENIKA

(a) MOGUĆI SLUČAJEVI DA U EKIPI BUDE JEDNAK BROJ UČENIKA 2. i 3. RAZREDA

1. učenik 2 raz, 1. učenik 3. raz, 3 učenika 4. raz $\binom{10}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{6}{3}$

2 učenika 2 raz, 2 učenika 3. razred, 1 učenik 4. raz. $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\binom{6}{1}$

NEMA UČENIKA 2. i 3. razreda $\binom{6}{5}$

Rješenje je $\binom{10}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{6}{3}+\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{1}+\binom{6}{5}$.

(b) $A=\{$skup svih košarkaških ekipa u kojima nema učenika iz 2. razreda$\}$

$B=\{$skup svih košarkaških ekipa u kojima nema učenika iz 3. razreda$\}$

$C=\{$skup svih košarkaških ekipa u kojima nema učenika iz 4. RAZREDA$\}$

$S=$ skup svih mogućih košarkaških ekipa

TRAŽIMO $|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=|S|-|A|-|B|-|C|+$
$+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$.

nastavak 3. zad.

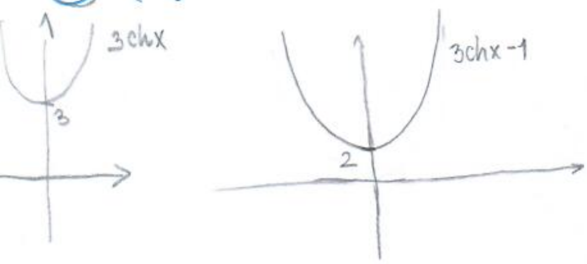
$$|S| = \binom{10+8+6}{5} = \binom{24}{5}$$

$$|A| = \binom{8+6}{5} = \binom{14}{5} \qquad |B| = \binom{10+6}{5} = \binom{16}{5} \qquad |C| = \binom{10+8}{5}$$

$$|A\cap B| = \binom{6}{5} \qquad |A\cap C| = \binom{8}{5} \qquad |B\cap C| = \binom{10}{5} \qquad |A\cap B\cap C| = 0$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = \binom{24}{5} - \binom{14}{5} - \binom{16}{5} - \binom{18}{5} + \binom{6}{5} + \binom{8}{5} + \binom{10}{5} - 0$$

4 (a) $f(x) = 3\,\mathrm{ch}x - 1$



$D(f) = \mathbb{R}$

$1 \le \mathrm{ch}x < +\infty$

$3 \le 3\,\mathrm{ch}x < +\infty$

$2 \le 3\,\mathrm{ch}x - 1 < +\infty$

$\mathrm{Im} f = [2, +\infty\rangle$

(b) $f: D(f) \to \mathbb{R}$ JE INJEKCIJA AKO

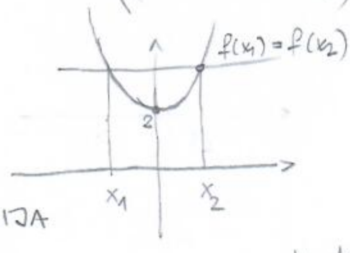
$\forall x_1, x_2 \in D(f) \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ } Definicija injekcije

(ili $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

FUNKCIJA NIJE INJEKCIJA AKO

$\exists\, x_1, x_2 \in D(f)$ t. d. $((f(x_1) = f(x_2)) \wedge (x_1 \neq x_2))$

Iz grafa je vidljivo (horizontalni test



$x_1 \neq x_2$ i $f(x_1) = f(x_2)$

PA FUNKCIJA NIJE INJEKCIJA

(c) $g: [0, +\infty\rangle \to \mathrm{Im} f$

kodomena je jednaka slici

g je surjekcija jer je $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im}\, g = K_g$

injekcija $x_1, x_2 \in [0, +\infty\rangle$

$3\,\mathrm{ch}x_1 - 1 = 3\,\mathrm{ch}x_2 - 1$

$3\,\mathrm{ch}x_1 = 3\,\mathrm{ch}x_2$

$\mathrm{ch}x_1 = \mathrm{ch}x_2$

$x_1 = x_2$ (jer je Ch injekcija na $[0, +\infty\rangle$)

DRUGO OBJAŠNJENJE za injekciju:

(f je strogo rastuća pa je injekcija)

TREĆE OBJAŠNJENJE: HORIZONTALNI TEST i GRAF...

$\Rightarrow f$ JE BIJEKCIJA

$y = 3\,\mathrm{ch}x - 1$

$y + 1 = 3\,\mathrm{ch}x$

$\mathrm{ch}x = \frac{y+1}{3}$

$x = \mathrm{arch}\frac{y+1}{3}$

$g^{-1}(y) = \mathrm{arch}\left(\frac{y+1}{3}\right)$

$D(g^{-1}) = \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f) = [2, +\infty\rangle$

$\mathrm{Im}(g^{-1}) = D(g) = [0, +\infty\rangle$

(5)

(a) Realan broj A zovemo gomilište niza (a_n) AKO SE UNUTAR SVAKE ε-OKOLINE BROJA A NALAZI BESKONAČNO MNOGO ČLANOVA NIZA (a_n).

(b) $a_1 = 2 \quad a_2 = 2-2=0 \quad a_3 = 2-0=2 \quad a_4 = 2-2=0 \quad \ldots$

To je niz $2,0,2,0,2,0,2,0,\ldots$

OVAJ NIZ IMA DVA GOMILIŠTA $A_1 = 0$, $A_2 = 2$. BUDUĆI DA IMA DVA GOMILIŠTA NEMA LIMES ODNOSNO NIJE KONVERGENTAN.

(c) (T1) SVAKO GOMILIŠTE NIZA JE LIMES TOG ISTOG NIZA

NETOČNO! protuprimjer $a_n = (-1)^n$ $1, -1$ su gomilišta a niz nema limes

(T2) LIMES NIZA JE GOMILIŠTE TOG ISTOG NIZA.

TOČNO!

OBJAŠNJENJE: Unutar svake ε-OKOLINE OD L SE NALAZI BESKONAČNO MNOGO ČLANOVA NIZA (JER IH JE IZVAN KONAČNO MNOGO) PA JE L GOMILIŠTE NIZA

(T3) AKO JE NIZ RASTUĆI I OMEĐEN ODOZGO TADA ON KONVERGIRA

TOČNO!

DOKAZ OVE TVRDNJE MOŽE SE NAĆI U POGLAVLJU 6. (dokaz TEOREMA 6.6.1)

6 (a) $f(x) = \begin{cases} ax^2+b & za \ x \geq 1 \\ \operatorname{arctg} x & za \ x < 1 \end{cases}$

UVJET NEPREKINUTOSTI

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} ax^2+b = \underbrace{a+b}_{f(1)} = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg} x$$

$$a+b = \frac{\pi}{4}$$

uvjet DIFERENCIJABILNOSTI

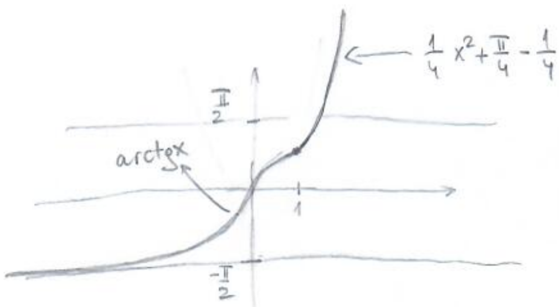
$$f'(1^+) = f'(1^-)$$

$$2ax\Big|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1}$$

$$2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} + b = \frac{\pi}{4}$$

$$b = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} & za \ x \geq 1 \\ \operatorname{arctg} x & za \ x < 1 \end{cases}$$

(b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(h)}{h}$$

$$= g(x)\,f'(x) + f(x)\,g'(x)$$

(jer su f, g diferencijabilne u x, g nepr. u x)

(c) $f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1}(y))'}$ $\quad f(x) = y = \arcsin x \quad x = \sin y$

$$f'(x) = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin x}_{\in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle})} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1.$$

$\cos\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle} > 0$

(d) $f'(x) = 2\operatorname{tg}(\ln x)\cdot(\operatorname{tg}(\ln x))' = 2\operatorname{tg}(\ln x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2(\ln x)}\cdot(\ln x)' = \dfrac{2\operatorname{tg}(\ln x)}{x\cos^2(\ln x)}.$