

SVOJSTVA REALNIH FUNKCIJA

DEF Fija je PARNA ako $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Fija je NEPARNA ako $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

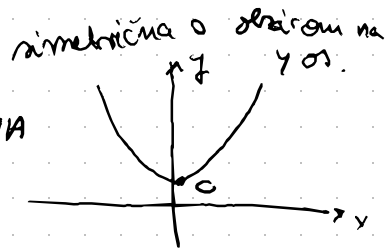
* Postoje fije koje nisu ni parne ni neparne

Primer.) Ispitajte parnost:

a) $f(x) = ax^2 + c$

$$f(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = f(x)$$

// PARNA



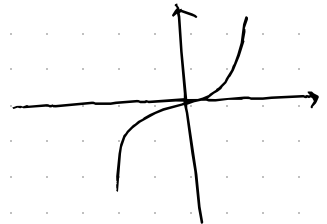
b) $f(x) = ax^3$

$$f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$$

= NEPARNA

Neparna f.

→ centralna simetrična o ishodište



c) $f(x) = \sin(2x) \Rightarrow \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$

PERIODIČNOST

Fija je periodična fija ako postoji $T > 0$ t.d. $f(x+T) = f(x) \forall x \in D_f$

T = period, najmanji period = TEMELJNI PERIOD

P.) $f(x) = \sin x \rightarrow T = 2\pi$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$f(x) = \tan x \rightarrow T = \pi$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

MONOTONOST

DEF: Funkcija je rastuća ako za $\forall x_1, x_2 \in D_f$

$$\text{iz } x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Funkcija je padajuća ako za $\forall x_1, x_2 \in D_f$ iz $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Strogo rastuća: $f(x_1) < f(x_2)$

Strogo padajuća: $f(x_1) > f(x_2)$

DEF: Monotona je ako je rastuća ili padajuća.

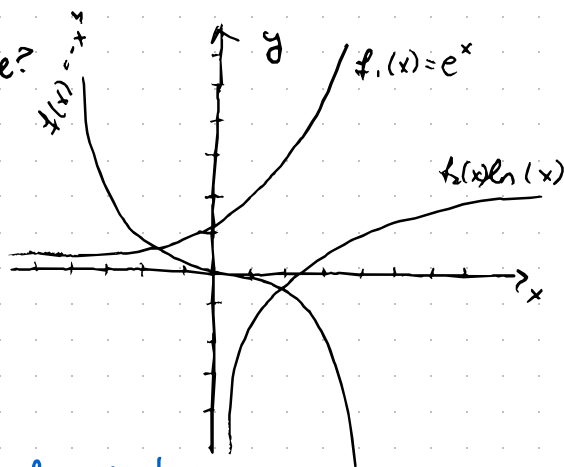
P.) Jesu li f-je monotone?

$$f_1(x) = e^x$$

$$f_2(x) = \ln x$$

$$f_3(x) = \sin x = NE$$

$$f_4(x) = -x^3$$



TEOREM Neka su f, g realne funkcije.

I.) Kada je f rastuća

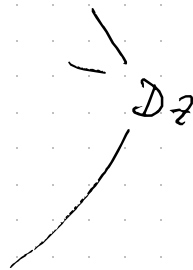
(1.1) g je rastuća — $g \circ f$ rastuća

(1.2) g je padajuća — $g \circ f$ padajuća

II.) f padajuća

(2.1) f je rastuća $g \circ f$ je padajuća

(2.2) f je padajuća $g \circ f$ je rastuća



Dokaz: 2.1.

$$f \text{ pad} \rightarrow f \downarrow \quad x_1 (x_2 \rightarrow f(x_1)) > f(x_2)$$

$$g \text{ rastuća} \rightarrow g \uparrow \quad x (x_2 \rightarrow g(x)) < g(x)$$

T: $g \circ f$ padajuća

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) \geq (g \circ f)(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \mid f$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) \mid g$$

$$g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$$

Dokažite navedene tvrdnje

a) Ako je f strogo rastuća, tada je i f^{-1} strogo rastuća

b) -1/- strogo padajuća, -1/- padajuća. $\Rightarrow \mathbb{Z}$

a) f strogo rastuća : $\forall x_1, x_2 \quad x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

T: f^{-1} strogo rastuća : $\forall y_1, y_2 \quad (y_1 < y_2 \rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2))$

Dokaz kontradikcijom: pretpostavimo suprotno
 f^{-1} nije strogo rastuća.

$\exists y_1, y_2 : (y_1 < y_2 \wedge f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2))$

$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \quad / f$

$(f \circ f^{-1})(y_1) \geq f(f^{-1}(y_2))$

$f \circ f^{-1} = \text{id}$

mutualno
inverzni

$y_1 \geq y_2$



$y_1 < y_2$

$\Rightarrow f^{-1}$ je strogo rastuća