Završni ispit iz Matematičke analize 1

3.2.2020.

1. (8 bodova) (2b + 3b + 3b)

a) Odaberite interval $[a, b]$ i točku $c \in \langle a, b\rangle$ takvu da za funkciju $f(x) = \operatorname{sh}^2(x)$ vrijedi Rolleov teorem.

b) Iskažite i dokažite Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

c) Odaberite interval $[a, b]$ i točku $c \in \langle a, b\rangle$ takvu da za funkciju $f(x) = x^2 - 3x + 5$ vrijedi Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

2. (11 bodova) Odredite područje definicije, ponašanje na rubu područja definicije i asimptote, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konkavnosti i konveksnosti, točke infleksije te nacrtajte kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}.$$

3. (7 bodova) (3b + 4b)

a) Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekinuta funkcija. Pokažite da je funkcija $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ diferencijabilna na $\langle a, b\rangle$ te vrijedi $\Phi'(x) = f(x)$, za sve $x \in \langle a, b\rangle$.

b) Izračunajte limes:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\int_3^x \sqrt{t^2+t+4}\,dt}{x^2-9}.$$

4. (8 bodova) (2b + 6b)

a) Napišite i dokažite formulu parcijalne integracije u neodređenom integralu.

b) Izračunajte integral:

$$\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})dx.$$

5. (8 bodova) (3b + 5b)

a) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

b) Izračunajte nepravi integral:

$$I = \int\limits_0^{e^2} \ln(x^2)dx.$$

6. (8 bodova) (3b + 5b)

a) Ispitajte istinost sljedeće tvrdnje i obrazložite svoj odgovor:

Površina P između grafa neparne funkcije f i osi x na intervalu $[-a, a]$ iznosi $P = 2\int\limits_0^a |\, f(x) \,|\, dx$.

b) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = \dfrac{1}{x+4}$ i pravcima $y = x + \dfrac{1}{4}$, $y = 1$.

Napomena: Ispit se piše 120 minuta i nosi maksimalno 50 bodova. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire, pribor za pisanje i službeni podsjetnik.