7.2. OSNOVNI TEOREMI

· Za realnu fju $f(x)$ promatramo odnose između njenih stacionarnih točaka s jedne strane i njenih lok. ekstrema s druge strane.

DEF $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in S$ je točka MAKSIMUMA od f ako je $f(x) \le f(a), \forall x \in S$

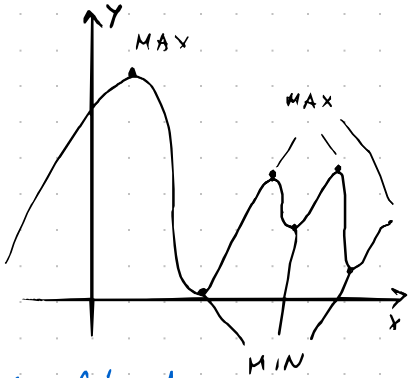
$a \in S$ je točka MINIMUMA od f ako je $f(x) \ge f(a), \forall x \in S$

Ekstremi: sve točke minimuma i maksimuma

DEF f $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval u $\mathbb{R}$

$f: I \to \mathbb{R}$ je diferencijab. fja na I

Točka $x=a$ za koju je $f'(a)=0$ se zove stacionarna točka



TM Fermatov teorem – nužan uvjet za lok. ekst.

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ (otvoreni interval u $\mathbb{R}$) i $f: I \to \mathbb{R}$ diferencijab. fija

Ako je $a \in I$ točka lok ekstrema, onda je $f'(a) = 0$.

* sjeti se: $f'(a)$ je k_t i da bi nešto bilo ekstrem, mora imat tangentu usporednu s x-osi

DOKAZ:

formule:

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h) - f(a)}{h}$ → s ovim smo radili

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ → drugi oblik

Pretpostavimo da je $a \in I$ lokalni maksimum, tj. $f(x) \le f(a), \forall x \in O(a)$ okolina od a

→ za $x \in O(a)$ td $x < a$ vrijedi $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$ jer je uvijek negativno

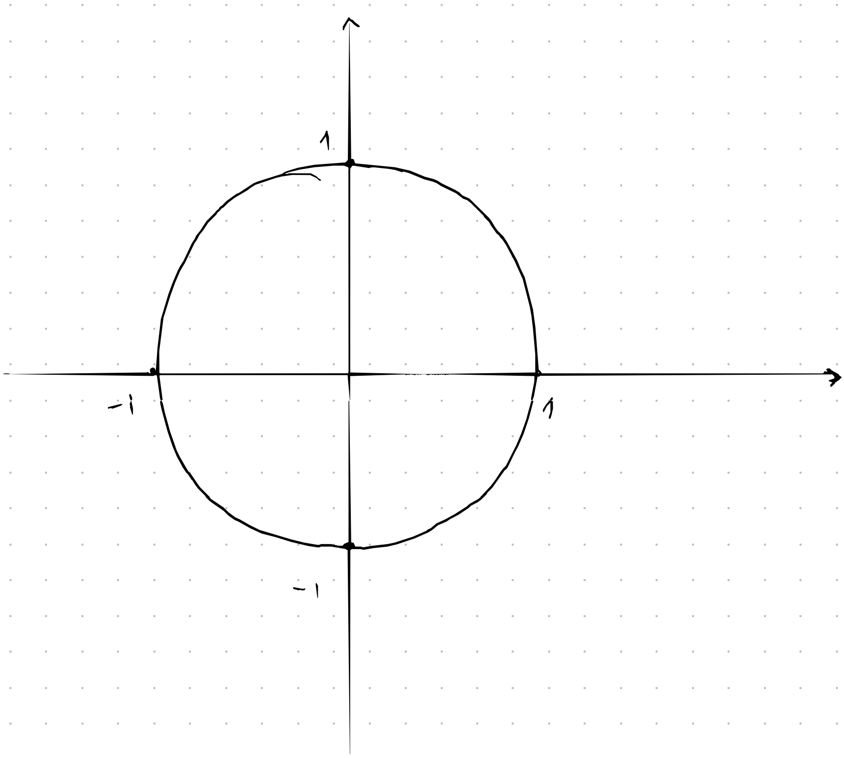
Zapravo samo ću odustat i napisat ovu gornju rečenicu

„suicide, in the matter of fact, is not AN OPTION but A SOLUTION"

~ A. Perat

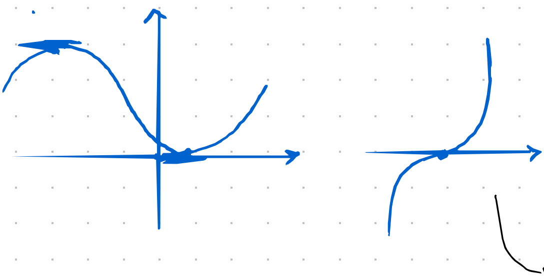
Idem

mit



$\boxed{\text{DEF}}$ $f: I \subseteq \mathbb{R}$ (otvoreni interval), $f: I \to \mathbb{R}$ je diferencijabilna

Stacionarne točke imaju $f'(a)=0$. $(a \in I)$.



* svaka točka ekstrema je i stacionarna točka, ali
  nije svaka stacionarna točka ekstrema

→ npr. ovo je točka refleksije

Nap: KRITIČNE TOČKE
= stacionarne točke + točke u kojima deriv. ne postoji

=> u šiljku fja nije diferencijabilna, a ima lokalni ekstrem

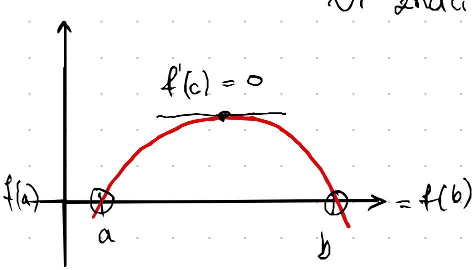
$\boxed{\text{TM}}$ **Rolleov teorem** * naći uvjete na fju $f(x)$ takve da između njene dvije nultočke uvijek postoji barem jedna stacionarna točka

Neka je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekinuta na $[a,b]$
i diferencijabilna na $\langle a,b \rangle$.

Ako je $f(a)=f(b)$, onda postoji $c \in \langle a,b \rangle$ takav da je $f'(c)=0$.

DOKAZ:

↳ znači da su na istoj visini



1. slučaj: $f(c)=f(a)=f(b)$
   ↳ fja je konstantna na $[a,b]$ pa je $f'(c)=0$ za $\forall c \in \langle a,b \rangle$

2. slučaj: $f(c) \neq f(a)=f(b)$
   ↳ fja je neprekinuta; znači postoji bar jedna točka koja je točka maks/min

DEF Lagrangeov teorem srednje vrijednosti (LTSV)

Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekinuta, diferencijabilna na $\langle a,b \rangle$. Onda postoji $c \in \langle a,b \rangle$ takav da je

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

DOKAZ:

Jednadžba sekante kroz $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$

$$\underbrace{y - y_0}_{y_0 = f(a)} = k(x - \underbrace{x_0}_{a}) \Rightarrow y - f(a) = \underbrace{k}_{\text{koeficijent sekante} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}(x-a)$$

$$\Rightarrow y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\boxed{y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)}$$

Definiramo funkciju F kao razliku f-je f i sekante:

$$F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$$

$$F(a) = f(a) - \Big[\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\underbrace{(a-a)}_{0}}_{0} + f(a)\Big] = f(a) - f(a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} + f(a)\right]$$

$$= f(b) - \left[f(b) - \cancel{f(a)} + \cancel{f(a)}\right] = f(b) - f(b) = 0$$

$$\boxed{F(a) = F(b)}$$

$\Rightarrow$ Funkcija F zadovoljava Rolleov teorem jer je $f(a) = f(b)$

$\hookrightarrow \exists\, c \in \langle a,b \rangle$ t.d. $F'(c) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]'$$

$$F'(x) = f'(x) - \Big[\underbrace{\underbrace{\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)'}_{0}(x-a)}_{0} + \underbrace{\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}_{\text{prepišemo}}\underbrace{(x-a)'}_{1-0=1} + \underbrace{f(a)'}_{0}\Big]$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\underbrace{F'(c)}_{0} = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow \boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

$\exists c$ u kojem je tangenta $\parallel$ sekanta