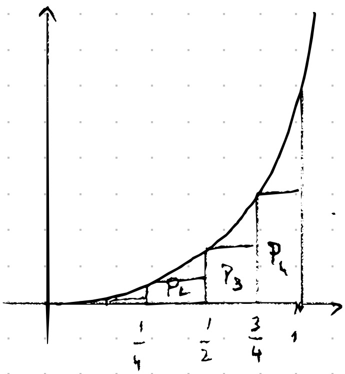
10.1. Uvod, motivacija i definicija

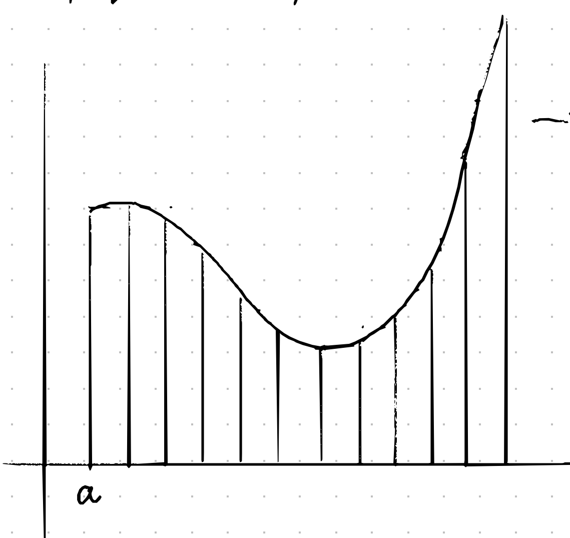
Problem: odrediti površinu ispod krivulje

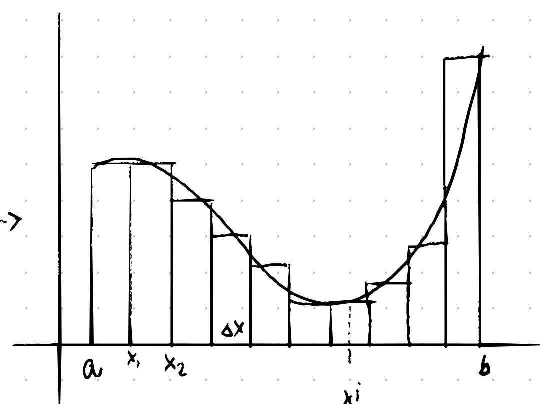


ekvidistantna podjela segmenta $[a,b]$ na n dijelova

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n$$

aproksimacija površine podjelom na pravokutnike





svaki podsegment je širine

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\boxed{\text{VRIJEDI: } x_i = x_0 + i\Delta x \quad i = 1, \dots, n}$$

$\Rightarrow$ Površinu P možemo aproksimirati sa sumom površina pravokutnika čija je širina Δx, a visina fjc u proizvoljnoj točki x_i^*:

$$\underline{\underline{\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x}} \qquad x_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$*$ $P = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ jer što je n veći (širina intervala je manja; više pravokutnika)

$\Rightarrow$ bolja aproksimacija

$\boxed{\text{DEF}}$ Određeni interval

funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x}$$

Napomena

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\underline{\underline{x_i^* = x_i = a + i \cdot \Delta x}}$$

Ako taj limes postoji i ne ovisi o izboru točaka $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots n$

$\longrightarrow$ Fja je Integrabilna na intervalu $[a,b]$

Primjer 10.3.) Limes zapišite u obliku određenog intervala

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\frac{2}{n}i} \cdot \frac{2}{n}$$

sjeti se:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

vidimo:

$$\Delta x = \frac{2}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\frac{2}{\cancel{n}} = \frac{b-a}{\cancel{n}} \longrightarrow \underline{b-a=2}$$

Odabir točaka x_i na dva načina:

1. $f(x)=\sqrt{x} \longrightarrow x_i = 1 + i \cdot \Delta x$

$\boxed{a=1} \longrightarrow \boxed{b=3}$

$$\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\frac{2}{n}i} \cdot \frac{2}{n} \Rightarrow \boxed{\int_1^3 \sqrt{x}\,dx}$$

2. $f(x)=\sqrt{1+x}$ $\quad x_i = \frac{2}{n}i \Rightarrow x_i = \Delta x \cdot i \longrightarrow a=0$, $\underline{b=2}$

$$\longrightarrow \int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx$$

* Ne znamo još računati određeni integral da bismo ovo do kraja

$\boxed{\text{DEF}}$ Neka je f integrabilna na $[a,b]$

(1) Ako je $a=b$, definiramo $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(2) Ako je donja granica integracije veća od gornje, određeni integral definiramo formulom $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

$\boxed{\text{TM}}$ Svojstva određenog integrala

Neka su f i g integrabilne na $[a,b]$:

(1) SVOJSTVO LINEARNOSTI

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(2) Za bilo koji poredak točaka $a, b, c \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

(3) SVOJSTVO MONOTONOSTI

$$f(x) \leq g(x),\ \forall x \in \langle a,b\rangle \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

TM:

1. Ako je f neprekinuta na [a,b], onda je f integrabilna na [a,b]

2. Ako je f omeđena i ima konačan broj prekida (prve vrste) na intervalu [a,b], onda je f integrabilna na [a,b]

3. Ako je f omeđena i monotona na intervalu [a,b], onda je f integrabilna na [a,b].