MATEMATIČKA INDUKCIJA

Koristi se za dokazivanje tvrdnji koja ovisi o prirodnom broju n.

PRINCIP MAT. IND.

Ako je tvrdnja istinita za neki $n \in \mathbb{N}$ i ako iz činjenice da je istinita za $n \in \mathbb{N}$ slijedi da je istinita i za $n+1$,

tada je istinita i za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

POSTUPAK

1. **BAZA**: Pokažemo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ $(n_0 = 1)$

2. **PRETPOSTAVKA**: Pretp. da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ $(k \in \mathbb{N})$

3. **KORAK**: Koristeći pretpostavku mat. ind. dokažemo da tvrdnja vrijedi za $n+1$ $(k+1)$

4. **ZAKLJUČAK**: Prema principu mat. ind. tvrdnja vrijedi za $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$

ZADACI

1. Dokažite mat. ind. da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\dots\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

1. BAZA: $\boxed{n=1}$ $\quad \frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}$ ✓

2. PRETP. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\dots\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

3. KORAK: Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n+1$

$$\boxed{T:\ \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\dots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\dots+\frac{n}{2^n}}_{\text{Pretpostavka indukcije}}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

nju trebam dobit

znači ne diram

ovo mora postat 1 razlomak

$$=2-\frac{n+2}{2^n}^{\cdot 2}+\frac{n+1}{2^n\cdot 2}=2-\frac{2(n+2)+(n+1)}{2^{n+1}}$$

$$=2+\frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}}=2+\frac{-n-3}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}$$

4. ZAKLJUČAK: Pretpostavka vrijedi za $n+1$ stoga vrijedi $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ što smo dokazali mat. indukcijom.

2. $2^2+5^2+8^2+\dots+(3n-1)^2=\frac{n}{2}(6n^2+3n-1)$

BAZA: $n=1$

$$2^2=\frac{1}{2}(6\cdot 1+3-1)$$

$$4=\frac{1}{2}\cdot 8=4 \checkmark$$

PRETPOSTAVKA: Pretpostavka da vrijedi za neki $n\in\mathbb{N}$

KORAK:

$$T: 2^2+5^2+8^2+\dots+(3n-1)^2+(3(n+1)-1)^2=\frac{n+1}{2}\left(6\overbrace{(n+1)^2}^{n^2+2n+1}+\overbrace{3(n+1)}^{3n+3}-1\right)$$

$$\underbrace{2^2+5^2+8^2+\dots+(3n-1)^2}_{\text{Pretp.}}+(3n+2)^2=\frac{n+1}{2}(6n^2+15n+8)$$

$$\frac{1}{2}(6n^3+15n^2+8n$$

$$=\frac{n}{2}(6n^2+3n-1)+\overbrace{(3n+2)^2}^{9n^2+12n+4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(6n^3+3n^2-n+2(9n^2+12n+4)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(6n^3+3n^2-n+18n^2+24n+8)$$

$$=\frac{1}{2}(6n^3+21n^2+23n+8)$$

mogli smo pomnožiti i vidjeti što da očekujemo (dobije se to)

potrošimo puno vremena na faktorizaciju

2. Zad.) $6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}$ djeljiv s 11 $\forall n \in \mathbb{N}$

BAZA:

$$6^2+3^3+3 = 36+27+3 = 66 \checkmark \text{ djelji'}$$

PRETP: za neki $n \in \mathbb{N}$ $11 \mid 6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}$

KORAK:

$$T: 11 \mid 6^{2(n+1)} + 3^{n+1+2} + 3^{n+1}$$

$$\boxed{11 \mid 6^{2n+2} + 3^{n+3} + 3^{n+1}}$$

$$6^{2n} + 3^{n+3} + 3^{n+1} = 36\cdot 6^{n+3} + 3\cdot 3^{n+2} + 3\cdot 3^{n}$$

$$= 33\cdot 6^{2n} + \underbrace{3\cdot 6^{2n} + 3\cdot 3^{n+2} + 3\cdot 3^{n}}_{3 \times \text{Pretp}}$$

33+3=36

$$= \underbrace{33}_{\text{djeljivo s } 11}\cdot 6^{2n} + 3\big(\underbrace{6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}}_{\text{dokazali da je djeljivo s } 11}\big)^{11k}$$

$$= 11(36^{n}+3k)$$

4. Dokažite Bernoullijevu nejednadžbu

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{za sve } x>0, \ \forall x \in \mathbb{N}$$

BAZA $n=1$

$(1+x) \geq 1+x$ ✓

PRETP. Nejednakost vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^n \geq 1+nx$

KORAK:

$T: (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

nejednakosti nisu ekvivalentne (nije $\longleftrightarrow$)

pretpostavka ind.

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^1 \cdot (1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$

izraz iz pretpostavke

kao da smo pretpostavka zagrade pomnožili s $(1+x)$

$= 1+nx+x+nx^2 = 1+x(n+1)+nx^2$ pozitivno

nema smisla $\longrightarrow$ google

Bernoullijeva nejednakost

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$n=1$

$1+x \geq 1+x$ ✓

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$

$\cancel{1+(n+1)x = 1+nx+x}$