Zimski ispitni rok iz Matematičke analize 1

18. veljače 2019.

1. (**5 bodova**) Nađite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$|z| = \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Im}(z^6) = \mathrm{Re}(z^3).$$

2. (**6 bodova**) Na šahovski turnir došlo je 16 šahista, od kojih su 4 velemajstora: Luka, Marko, Marin i Roza. Turnir se igra u 4 skupine po 4 igrača pri čemu se u svakoj skupini nalazi točno jedan velemajstor. Na koliko načina možemo rasporediti šahiste u skupine ako:

(a) (**2b**) nema dodatnih uvjeta na sastav skupine,

(b) (**4b**) šahisti Ante i Branka (koji nisu velemajstori) nisu u skupini s velemajstorom Lukom?

3. (**9 bodova**)

(a) (**4b**) Jesu li sljedeće tvrdnje točne ili netočne? Obrazložite svoje odgovore!

T1. Inverzna funkcija neparne funkcije (ako postoji) je neparna funkcija.

T2. Svaka periodička funkcija ima inverznu funkciju.

T3. Svaka funkcija $f\colon \mathcal{D}(f) \to Im(f)$ je surjekcija.

(b) (**5b**) Skicirajte graf funkcije $f(x) = \left|\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\right|$. Odredite najveći $A \in \langle 0, +\infty\rangle$ tako da je $f|_{[0,A]}$ injekcija.

4. (**9 bodova**)

(a) (**2b**) Pomoću definicije derivacije, izvedite derivaciju funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

(b) (**2b**) Dokažite ili opovrgnite protuprimjerom sljedeću tvrdnju: „Svaka funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja nije diferencijabilna u x_0 je prekinuta u x_0”. Obrazložite!

(c) (**3b**) Ispitajte neprekinutost i diferencijabilnost funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & x > 3, \\ \\ x^2 - 8, & x \leqslant 3, \end{cases}$$

u točki $x_0 = 3$. Obrazložite svoje tvrdnje!

(d) (**2b**) Ispitajte podudaraju li se tangente od $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ i $h(x) = x^2 - 8$ u točki $x_0 = 3$.

OKRENITE STRANICU!

5. (**11 bodova**)

(a) (**3b**) Dokažite Fermatov teorem (nužan uvjet za lokalni ekstrem diferencijabilne funkcije).

(b) (**8b**) Odredite područje definicije, ispitajte ponašanje na rubu područja definicije, odredite asimptote, intervale monotonosti i lokalne ekstreme, odredite točke infleksije i intervale konveksnosti i konkavnosti te skicirajte kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}.$$

6. (**8 bodova**)

(a) (**2b**) Neka je f integrabilna na $[a,b]$ te neka je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ekvidistantna razdioba na $[a,b]$. Koristeći integralnu sumu funkcije f, napišite definiciju određenog integrala od f na $[a,b]$.

(b) (**4b**) Koristeći definiciju određenog integrala, izračunajte limes $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ gdje je

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\sqrt{1+\frac{3\cdot i}{n}}.$$

(c) (**2b**) Grafički prikažite i izračunajte integralnu sumu σ_3 iz (b) dijela zadatka.

7. (**8 bodova**)

(a) (**5b**) Izračunajte

$$\int \frac{e^{3x}+e^{2x}}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx.$$

(b) (**3b**) Ispitajte konvergenciju sljedećeg integrala te ga izračunajte ukoliko konvergira

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{25+x^2}.$$

8. (**8 bodova**)

(a) (**4b**) Izračunajte površinu lika u prvom kvadrantu omeđenog krivuljama $y = x$, $y = x^2$ i $y = 2x^2$. Nacrtajte sliku!

(b) (**4b**) Odredite $A > 0$ ako je volumen rotacijskog tijela koje nastaje vrtnjom lika omeđenog s $y = A\cos x$ na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i osi x oko osi y jednak $2\pi^2 - 4\pi$.

Ispit se piše 150 minuta. *Dozvoljeno je isključivo korištenje pribora za pisanje i službenog podsjetnika za kolegij Matematička analiza 1.*