

**JESENSKI ISPITNI ROK**  
**7.9.2021.****Ime i prezime:** \_\_\_\_\_**JMBAG:** \_\_\_\_\_

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

**Vlastoručni potpis studenta:** \_\_\_\_\_

1. (8 bodova)

(a) Odredite kompleksna rješenja sljedećeg sustava jednačbi:

$$|z| = 1, \quad \operatorname{Re}(z^4) = \operatorname{Re}(z^2)$$

(b) Odredite kompleksna rješenja sljedećeg sustava jednačbi:

$$|z| = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re}(z^4) = \operatorname{Re}(z^2)$$

2. (8 bodova) Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana je formulom  $f(x) = \operatorname{sh}(2x - x^2)$ .(a) Odredite sliku funkcije  $f$ .(b) Odredite najveći mogući realan broj  $m$  takav da je restrikcija funkcije  $f$  na interval  $I_m = \langle -\infty, m \rangle$  injekcija.(c) Za  $m$  iz (b) dijela zadatka odredite inverz funkcije

$$f|_{I_m} : I_m \rightarrow f(I_m)$$

3. (8 bodova)

(a) Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: *Ako je niz realnih brojeva monotono rastući i ograničen odozgo, onda je nužno konvergentan.*(b) Ispitajte konvergenciju niza  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zadanog na sljedeći način:

$$a_1 = \sqrt{6}, a_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \dots, a_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}} \quad (\text{n-ti član niza "ima" } n \text{ korijena})$$

**OKRENITE STRANICU!**

4. (8 bodova) Promatrajmo funkciju  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  zadanu formulom

$$f(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}} + e^{\frac{1}{x}} + 3}{e^{\frac{2}{x}} + a}$$

gdje je  $a$  realni parametar.

- (a) Za koje vrijednosti parametra  $a$  se  $f$  može proširiti do neprekidne funkcije na  $\mathbb{R}$ ?
  - (b) Za koje vrijednosti parametra  $a$  se  $f$  može proširiti do derivabilne funkcije na  $\mathbb{R}$ ?
  - (c) Za koje vrijednosti parametra  $a$  se  $f$  može proširiti do neprekidno derivabilne funkcije na  $\mathbb{R}$ ?
5. (8 bodova) Odredite najveću moguću površinu koju može imati jednakokračan trokut upisan u kružnicu radijusa 2.
6. (8 bodova) Odredite područje definicije, ispitajte ponašanje na rubu područja definicije, nađite lokalne ekstreme i asimptote te nacrtajte kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2 - x - 2}}$$

7. (8 bodova)

- (a) Iskažite teorem srednje vrijednosti integralnog računa.
- (b) Neka je funkcija  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana formulom

$$\Phi(x) = \int_{-x}^{2x} \cos(t^2) dt$$

Po definiciji pokažite da je  $\Phi$  diferencijabilna te odredite  $\Phi'$ .

8. (8 bodova) Izračunajte volumen rotacijskog tijela nastalog rotacijom kardioide  $r = 1 + \cos(\varphi)$  za  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  oko osi apscisa.

**Napomena:** Ispit se piše **150 minuta**. Na ispitu je dopuštena upotreba isključivo pribora za pisanje i službenog podsjetnika.