

## Međuispit iz Matematičke analize 1

27. studenog 2018.

1. (8 bodova)

(a) (2b) Skicirajte skup svih  $z \in \mathbb{C}$  za koje vrijedi  $\begin{cases} |z - 1 - i| \leq 2, \\ \operatorname{Re} z > 1 \end{cases}$ .

(b) (6b) Odredite sve  $z \in \mathbb{C}$  za koje vrijedi

$$\begin{cases} \arg(i \cdot z^3) = \pi \\ |z - i| = \sqrt{3} \end{cases}.$$

2. (8 bodova) Dan je skup  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ .

(a) (3b) Navedite primjer relacije  $\rho$  na skupu  $S$  koja:

(a1) nije refleksivna, a simetrična je.

(a2) nije simetrična.

(a3) nije tranzitivna.

(b) (5b) Nadopunite relaciju

$$\rho = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$$

do relacije ekvivalencije na skupu  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  te za tako dobivenu relaciju ekvivalencije odredite klase ekvivalencije.

3. (8 bodova) Na trening košarkaške ekipe u jednoj gimnaziji došlo je 10 učenika 2. razreda, 8 učenika 3. razreda i 6 učenika 4. razreda. Na koliko načina možemo složiti jednu košarkašku ekipu od 5 učenika tako da:

(a) (3b) u ekipi bude jednak broj učenika 2. i 3. razreda?

(Uputa: Broj učenika može biti i 0.)

(b) (5b) u ekipi se nalazi barem jedan učenik iz svakog razreda?

(Uputa: Koristite formulu uključivanja i isključivanja.)

4. (8 bodova) Zadana je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa  $f(x) = 3 \operatorname{ch}(x) - 1$ .

(a) (2b) Skicirajte graf funkcije  $f$  te odredite njezinu sliku  $\operatorname{Im}(f)$ .

(b) (2b) Napišite definiciju injektorije te pokažite da  $f$  nije injektorija. Obrazložite svoje tvrdnje.

(c) (4b) Neka je  $g : [0, +\infty) \rightarrow \operatorname{Im}(f)$  zadana s  $g(x) = f(x)$ . Dokažite da je  $g$  bijektorija, odredite inverznu funkciju  $g^{-1}$  te odredite domen i sliku od  $g^{-1}$ .

OKRENITE!

5. (8 bodova)

- (a) (1b) Napišite definiciju gomilišta niza realnih brojeva  $(a_n)$ .  
(b) (2b) Je li niz  $(a_n)$  zadan rekurzivno s

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 - a_n, \quad n \geq 1$$

konvergentan? Obrazložite svoju tvrdnju.

- (c) (5b) Jesu li sljedeće tvrdnje istinite ili lažne?  
Istinite tvrdnje dokažite, a lažne opovrgnite protuprimjerom.  
(T1) Svako gomilište niza je limes tog istog niza.  
(T2) Limes niza je gomilište tog istog niza.  
(T3) Ako je niz rastući i omeđen odozgo, tada on konvergira.

6. (10 bodova)

- (a) (4b) Odredite sve realne brojeve  $a$  i  $b$  tako da funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{za } x \geq 1 \\ \arctg(x), & \text{za } x < 1 \end{cases}$$

bude neprekinuta i diferencijabilna u točki  $x = 1$ . Za takve  $a$  i  $b$  skicirajte graf funkcije  $f$ .

- (b) (2b) Koristeći definiciju derivacije funkcije, izvedite formulu za derivaciju produkta dviju funkcija  $f$  i  $g$ .  
(c) (2b) Pomoću formule za derivaciju inverzne funkcije, izvedite derivaciju funkcije  $y = \arcsin(x)$ .  
(d) (2b) Izračunajte derivaciju funkcije  $f(x) = (\operatorname{tg}(\ln x))^2$ .

**Napomena:** Ispit se piše **120 minuta**. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika za kolegij Matematička analiza 1. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.