9.2 OSNOVNE METODE INTEGRIRANJA

1. Metoda supstitucije

- kada ne možemo direktno integrirati

$\Rightarrow$ zamjeniti argument koji nam stvara problem s novom varijablom

$\Rightarrow$ integrirati po novoj varijabli

PRIMJER:

a) $$\int e^{-2x}\,dx = \left|\begin{array}{l} -2x = t \\ -2\,dx = dt \\ dx = -\frac{1}{2}\,dt \end{array}\right| = \int e^{t}\left(-\frac{1}{2}dt\right) = \frac{-1}{2}e^{t} + c$$

broj uz x

↳ vraćamo zamjenu u početnu varijablu

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

b) $$\int \sin(4x+3)\,dx = \left|\begin{array}{l} 4x+3 = t \\ 4\,dx = dt \\ dx = \frac{1}{4}\,dt \end{array}\right| = \int \sin(t)\cdot\frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\cos t + c$$

$$= \frac{1}{4}\cos(4x+3) + c$$

TM Metoda supstitucije u neodređenom intervalu

- f je neprekinuta na I
- $\varphi(t)$ je neprekinuto diferencijabilna takva da je $Im(\varphi) = I$

$\Rightarrow$ tada uz supstituciju vrijedi:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

DOKAZ:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

$\downarrow$ $\quad * \; \varphi(x)=t$

$$\int f(t)\,dt = F(t)+C = \underline{\underline{F(\varphi(x))+C}}$$

deriviramo po x

$$\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) + c$$

$$= F'(\varphi(x)) + 0$$

$\downarrow$ derivacija kompozicije

$$\underbrace{F'(\varphi(x))}\cdot\varphi'(x)$$

$\downarrow$ $\quad\downarrow$ ostaje isto

$$\underline{f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)}$$

skraćeno: $F(\varphi(x))$ je primitivna funkcija od $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

čime je teorem dokazan

Napomena: Supstitucijom $t=\varphi(x)$ moramo promijeniti i diferencijal argumenta tako da s njim baratamo kao s diferencijalom f-je

$\downarrow$

$$\left|\begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{array}\right|$$

Primjer 9.) $\int f(x)\,dx = F(x)+C$

$$\int f(ax+b)\,dx = \left|\begin{array}{l} ax+b=t \\ a\,dx = dt \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{array}\right| = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \frac{1}{a}F(t)+C$$

$$\boxed{=\frac{1}{a}F(ax+b)+C}$$

Rezultat je ista primitivna f-ja od tog izraza, ali pomnožena s recipročnim koef. uz x

* riješiti zadatke i primjere x(4) D7

2. Metoda parcijalne integracije u neodređenom obliku

- f i g su diferencijalne funkcije na $\langle a, b \rangle$

Tada na tom intervalu vrijedi

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$$

pod uvjetom da svi navedeni integrali postoje

DOKAZ teorema: pokazat ćemo da je desna strana primitivna funkcija od $f(x) \cdot g'(x)$

$$\int \underbrace{f(x) \cdot g'(x)}_{h(x)}\, dx = H(x) + C$$

$H'(x) = h(x) \Rightarrow$ derivacijom desne će dobiti lijevu

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) \right)' = \cancel{f'(x)g(x)} + f(x)g'(x) - \cancel{f'(x)g(x)}$$

$$= \underline{\underline{f(x)\, g'(x)}}$$

QED

Pojednostavljeno:

$u = f(x) \quad dv = g'(x)\, dx$

$$\to \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

- za u biramo f-ju koja se pojednostavljuje deriviranjem
- za dv biramo izraz koji se ne komplicira integriranjem

Kada koristiti parcijalnu integraciju?

(1) podintegralna fja je - umnožak polinoma sa

trigonometrijskom / eksponencijalnom

(2.) Kada podintegralnu fju ne možemo direktno integrirati, ali možemo derivirati

Primjer: $\int x e^{x} dx$ ne mijenja

pojednostavljuje

$u = x$	$v = e^x$
$dv = e^x dx$	$du = dx$

PRIMJER: $\int x e^x dx$

→ $u = x$ daje jednostavnu derivaciju $du = dx$

dok $dv = x dx$ daje $v = \frac{1}{2}x^2$ → povećava složenost integrala

→ e^x se deriviranjem i integriranjem ne mijenja → ne komplicira integral

$$\int x e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{matrix} \right| = x e^x - \int e^x dx = \boxed{x e^x - e^x + C}$$

Primjer 9.29.) $\int x^2 \sin x\, dx$

$$\int x^2 \sin x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \sin x\, dx \\ du = 2x\, dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = x^2(-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2x \cdot dx$$

$$= -x^2\cos x + \int 2x \cos x\, dx = \left| \begin{matrix} u = 2x & dv = \cos x\, dx \\ du = 2dx & v = \sin x \end{matrix} \right|$$

$$= -x^2\cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x\, dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\, dx$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\cdot(-\cos x) + C = \boxed{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C}$$

Malo kompliciraniji primjer: $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx + \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C + \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \left(\int x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx\right)$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \\ du = dx & \underbrace{v = \sqrt{1+x^2}}_{\text{dobili pomoću parcijalne integracije}} \end{matrix} \right| = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1+x^2}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + \cancel{C} + x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$2\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + x\sqrt{1+x^2} + \cancel{C} \quad /:2$$

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}}$$