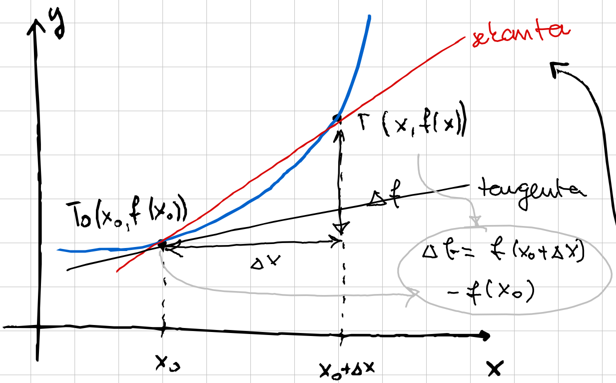
6.1. MOTIVACIJA POJMA DERIVACIJA



$$k_s = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

koeficijent smjera za sekantu

↳ smanjivanjem Δx koordinata $x_0+\Delta x$ se približava x_0

$\Downarrow$

T se približava T_0

sekanta se približava tangenti kroz T_0

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s$$

$$\Rightarrow k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

⇝ problem brzine (Newton) & tangente (Leibniz)

6.2. DERIVACIJA FUNKCIJE

6.2.1. Derivacija f-je u točki

$\boxed{\text{DEF}}$

Neka je dana fja $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval i $x_0 \in I$.

Derivacija fje u točki x_0 je jednaka

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ako taj limes postoji i konačan je

6.2. DERIVACIJA FUNKCIJE

Oznake za derivaciju funkcije u točki:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} \rightarrow \text{ne kužim}$$

Ekvivalentni zapisi formule $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

a) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ (zamjena h sa Δx)

b) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (zamjena $x = x_0+h$)

c) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$

- koriste se u praksi uz oznake Δx za prirast varijable x i $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ za prirast funkcije f u x_0

6.2.2. Tangenta na graf f-je

$\boxed{\text{DEF}}$ ⇝ derivacija f-je = nagib tangente

Tangenta na graf f-je $y = f(x)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ je pravac kroz točku T_0 s koeficijentom smjera $f'(x)$ čija jednadžba glasi: $y - y_0 = \underbrace{f'(x_0)}(x-x_0)$

piše se: $y - y_0 = k(x-x_0)$ ⟶ samo ovo

. Primjer 6.3.) Pomoću derivacije f-je u točki izvedite $f'(1)$ ako je $f(x)=x^3$ te napišite jednadžbu tangente na graf funkcije f u točki $T_0(1,1)$.

$f'(x) = ?$

$t \dots ?$

$f'(x) = 3x^2$

$T_0(1,1)$

$\downarrow$

$x_0 = 1$

$y_0 = 1$

$f'(x_0) = k_t$

$y - y_0 = k_t(x - x_0)$

$y - 1 = 3 \cdot 1^2 (x-1)$

$y - 1 = 3x - 3$

$t \dots \boxed{y = 3x - 2}$

MOJE RJEŠENJE

→ NJIHOVO RJ:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

uvrstimo x_0 i $f(x^3)$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - (1)^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1} + 3h^2 + 3h + h^3 - \cancel{1}}{h} =$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h\to 0} (\overset{0}{h^2} + \overset{0}{3h} + 3) = \boxed{3} \quad k_t = 3$$

$t \dots y = 3(x-1) + 1 = 3x - 3 + 1$

$\boxed{t \dots y = 3x - 2}$

Diferencijala funkcije =

- tangenta na graf fje u točki x_0 je pravac koji aproksimira graf
  ↳ približno je jednak grafu oko točke x_0

tangenta = linearna aproksimacija funkcije

- pomak iz točke x_0 u točku $x_0+\Delta x$ ⟶ promjeni vrijednost za $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
  ↳ PRIRAST FUNKCIJE f u točki x_0 s pomakom Δx

- DIFERENCIJAL $df(x_0)$ vrijednost ordinate točke se pomiče po tangenti za prirast odnosno za $df(x_0)$
  - iz x_0 u $x_0+\Delta x$

$$\Downarrow$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

$$\to df(x_0) \approx f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

$$f'(x_0)\Delta x \approx f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$$

Stopa (brzina) funkcije

- kako se $f(x)$ mijenja u odnosu na promjenu x
  Δf Δx

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

Derivacija $f'(x_1)$ je trenutna stopa (brzina) promjene funkcije $y=f(x)$

$$\to f'(x)_1 = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x \cancel{+x_1} \cancel{-x_1}}$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}}$$

Sve stope promjene možemo interpretirati kao nagib tangente na graf funkcije

Primjer 6.4.) Odredite brzinu promjene površine kvadrata $P(a)=a^2$ u odnosu na promjenu duljine za $a_0=3cm$.

$$P'(a_0)=\lim_{h\to 0}\frac{P(a_0+h)-P(a_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a_0+h)^2-a_0^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{a_0^2}+2a_0h+h^2-\cancel{a_0^2}}{h}$$

$$P'(a_0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2\cdot 3\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}(\overset{0}{h}+6)=\boxed{6}$$

6.2.2. Derivacija kao funkcija

DEF Neka je $f: I\longrightarrow \mathbb{R}$ gdje je I otvoreni interval i f ima derivaciju u svakoj točki intervala I.

Tada možemo definirati funkciju $f': I\to\mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$\boxed{x\longmapsto f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

koju zovemo derivacija funkcije.

OZNAKE ZA DERIVACIJU:

diferencijalni operator

$$y'(x)=\frac{dy}{dx} \qquad \text{ili} \qquad f'(x)=\frac{df}{dx}(x)=Df(x)$$

Primjer 66) Pomoću definicije derivacije izvedite derivacije nekih elementarnih funkcija.

a) $f(x) = ax$ e) $f(x) = \ln x$ i) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ preko binomne formule

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = \underline{\underline{a}}$

e) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \right) = \lim_{h \to 0} \left(\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \right) = \lim_{h \to 0} \left[\left(\ln \overbrace{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}^{e} \right)^{\frac{1}{x} \cdot \frac{\cancel{h}}{x}} \right]$

$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln e \right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$

$(ax)' = a$ $x^2 = 2x$ $(c)' = 0$

$(e^x)' = e^x$ $\ln x = \frac{1}{x}$ $\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(x^n)' = n x^{n-1}$