4. NIZOVI

4.1 Definicija nizovi

Funkcija $a: \mathbb{N} \longrightarrow S$ zove se NIZ (SLIJED) u skupu S.

Funkcija $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zove se NIZ REALNIH BROJEVA

Oznake: $a(n) = a_n$ opći član niza

$(a_n) =$ niz

$\{a_n\} = \{a_n \dots a_n \dots\}$ skup članova niza

Primjer) Ako je niz zadan općim članom, napišite prvih nekoliko članova niza:

a) $a_n = \frac{1}{n}$: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$

b) $a_n = \frac{1}{2n}$: $\frac{1}{2n}, \frac{1}{4n}, \frac{1}{6n}$

c) $a_n = \sqrt{n}$: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2 \dots$

d) *alternirani niz $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ članovi mijenjaju predznak

Primjer) Ako je niz zadan rekurz formulom, napišite prvih nekoliko članova niza:

(a) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{array}\right\} 3, 5, 7$

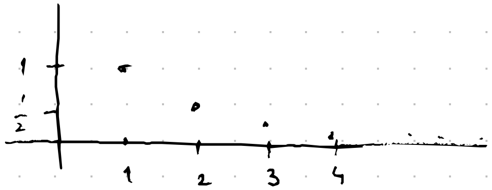
(b) Fibonaccijev niz $\left.\begin{array}{l} F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{array}\right\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

Grafički prikaz niza

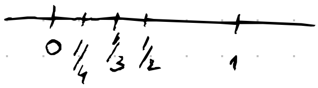
DZ Aritmetički niz

1.) Graf fje a_n

$a_n = \frac{1}{n}$



2.) Brojevni pravac



DEF Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$.

Skup je omeđen odozgo ako $\exists M \in \mathbb{R}$ t.d. $\forall x \in S$, $x \leq M$ (M = gornja međa).

Skup je omeđen odozdo ako $\exists m \in \mathbb{R}$ t.d. $\forall x \in S$ $x \geq m$ (m = donja međa)

DEF Kažemo da je niz (a_n) ODOZGO (ODOZDO) ako je skup vrijednosti članova niza $\{a_n\}$ omeđen odozgo (odozdo).

Niz je OMEĐEN ako je omeđen i odozgo i odozdo.

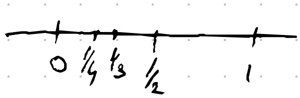
omeđen odozgo: $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

omeđen odozdo: $a_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Big\}$ omeđen $M \geq a_n \geq m$

Primjer:) Ispitajte omeđenost niza

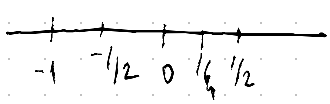
(a) $= a_n = \frac{1}{n}$.



$1 \geq a_n \geq 0$

└ omeđen

$(a_n) = a_n = \frac{(-1)^n}{n}$



$1/2 \geq a_n \geq -1$

Primjer: Dokažite da je niz (a_n) $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$ omeđen te mu odredite donju i gornju granicu.

$$a_n = \frac{2n-3}{n+1} = \frac{2(n+1)-5}{n+1} = 2 - \frac{5}{n+1} < 2$$

$M = 2$?

minimalna udaljenost od $a_n = 2 - \frac{5}{n+1}$ se postiže za maksimalnu vrijednost od $\frac{5}{n+1}$.

$f(n) = \frac{5}{n+1}$ je najveće za najmanji $n+1 = 2$ (jer $n \in \mathbb{N}$ ide 1 $\to 1+1=2$)

$f(1) = \frac{5}{2}$

$$a_n = 2 - \frac{5}{2} \geq 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \quad \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

$2 - \frac{5}{n+1}$, $n \to \infty$ } cijeli razlomak se smanjuje

* iako još nisu obrađeni limesi,

ako $n+1$ teži beskonačnosti, cijeli razlomak teži 0

→ stoga je sve veća razlika između 2 i razlomka

→ **zato je gornja međa 2**

=> kada je razlomak najveći, razlika je najmanja, zato je to donja granica → minimalna vrijednost izraza

4.2. Gomilište niza

Za neke n članovi niza se gomilaju oko jedne vrijednosti

↳ $a_n = \frac{1}{n}$ se „skuplja" (gomila) oko 0 jer se povećavanjem n smanjuje vrijednost razlomka i približava se 0

DEF Neka su $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$.

Interval oblika $V_\varepsilon(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon \} = \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$ zovemo ε-okolina broja x_0.

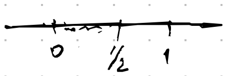
→ interval $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$ nazivamo ε-okolina br. x_0.

↳ kraće označavamo sa $V_\varepsilon(x_0)$

DEF Realan broj A zovemo GOMILIŠTE NIZA (a_n) ako se unutar svake ε-okoline broja A nalazi beskonačno mnogo članova na (a_n).

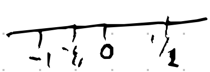
Pr.) Pronađite gomilište nizova

(a) $a_n = \frac{1}{n}$



$A = 0$

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$



$A = 0$

(c) $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ $\quad A = 1$

ZAKLJUČUJEMO: Ako je niz omeđen, ima barem jedno gomilište

! ALI obrat ne vrijedi.

odnosno, ako niz ima gomilište, ne znači da je omeđen

⇝ niz: $a_n \begin{cases} a_n = n & n \text{ paran} \\ a_n = -1 & n \text{ je neparan} \end{cases}$ → niz se gomila u -1, ali to mu nije međa.