

# Ljetni ispitni rok iz Matematičke analize 1

6. srpnja 2020.

1. (8 bodova)

(a) (3 boda) Dokažite da vrijedi

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) (5 bodova) Odredite sve  $z \in \mathbb{C}$  za koje vrijedi:

$$\begin{cases} \arg\left(\frac{z^2}{i\bar{z}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{Re}(z^2) = 1. \end{cases}$$

2. (8 bodova) Iz skupa od 5 studentica i 7 studenata, nastavnik treba sastaviti projektnu grupu koja sadrži 6 različitih osoba. Na koliko načina nastavnik može sastaviti ovakvu grupu, ako se zna da je u njoj:

- (a) (2 boda) točno jedna studentica;
- (b) (2 boda) jednak broj studentica i studenata;
- (c) (2 boda) veći broj studenata od studentica?

(2 boda) Dokažite da je broj svih timova od  $k$  ljudi, koji se biraju iz skupa od  $n$  različitih osoba ( $k \leq n$ ) jednak  $\binom{n}{k}$ .

3. (8 bodova)

- (a) (4 boda) Krivulju  $y = \arcsin(x)$  prvo transliramo za 1 udesno, onda za  $\frac{\pi}{2}$  prema gore te potom zrcalimo s obzirom na os  $y$ . Kako glasi jednačba dobivene krivulje? Ako ta krivulja predstavlja graf funkcije  $f$ , odredite domen i sliku funkcije  $f$ .
- (b) (4 boda) Riješite sljedeću jednačbu:

$$\cos(2 \arccos(x)) = 2x.$$

4. (8 bodova)

- (a) (2 boda) Koristeći derivaciju produkta dviju funkcija, izvedite formulu za derivaciju kvocijenta dviju funkcija.
- (b) (2 boda) Koristeći (a), izračunajte derivaciju funkcije  $y = \operatorname{tg}(x)$
- (c) (2 boda) Koristeći (b) i formulu za derivaciju inverzne funkcije, izračunajte derivaciju funkcije  $y = \operatorname{arctg}(x)$ .
- (d) (2 boda) Izračunajte derivaciju funkcije

$$y = \ln^3(\operatorname{arctg}(x)).$$

OKRENITE!

5. **(8 bodova)** Koristeći Taylorov polinom 5. reda funkcije  $f(x) = \sin(x)$  oko točke  $c = 0$ , aproksimirajte broj  $\sin(1)$  te ocijenite pogrešku aproksimacije koristeći Lagrangeov oblik pripadnog ostatka.

6. **(7 bodova)**

(a) **(2 boda)** Definirajte određeni integral funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

(b) **(5 boda)** Koristeći definiciju određenog integrala izračunajte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left( 1 + \sqrt{\frac{3k}{n}} \right)^2.$$

7. **(9 bodova)**

(a) **(3 boda)** Izračunajte integral

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx.$$

(b) **(6 boda)** Izračunajte integral

$$\int x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

8. **(8 bodova)** Izračunajte volumen i oplošje tijela koje nastaje rotacijom ravninskog lika omeđenog krivuljama:

$$y = 3 - x^2, \quad \text{ i } \quad y = 1 + x^2.$$

oko osi  $x$ . Skicirajte taj ravninski lik koji rotira.

**Napomena:** Ispit se piše **150 minuta**. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika sa kolegija matematička analiza 1. Nije dozvoljena uporaba kalkulatora.