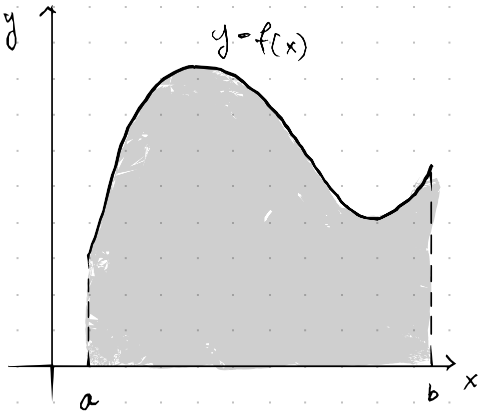
NEPRAVI INTEGRALI S GRANICAMA U BESKONAČNOSTI

1.1. Uvod



→ $\int_a^b f(x)dx$ predstavlja površinu ispod krivulje grafa $y=f(x)$ na intervalu $[a,b]$

└→ konačan interval

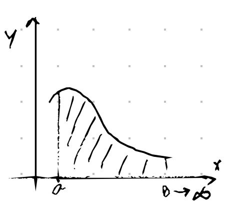
└ podintegralna funkcija je omeđena na tom intervalu

=> što ako pustimo granice integracije a ili b da budu $-\infty$ ili $+\infty$?

1.2. DEF Definicija nepravog integrala s granicama u ∞

- integrali koji imaju granice integracije $-\infty$ ili $+\infty$ su nepravi integrali s granicama u beskonačnosti

Neka je $f: [a,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ integrabilna na svakom segmentu $[a,b]$, gdje je $b < +\infty$. Ako postoji konačan limes $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$, onda se zove nepravi integral f-je f:



$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx}$$

Ako taj limes postoji i konačan je, još kažemo da integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergira.

Ako je taj limes jednak $+/- \infty$, ili ne postoji → divergira.

Napomena:

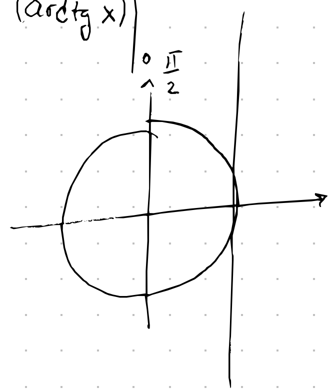
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

Primjer 1.) Ispitajte konvergenciju integrala $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} (\text{arctg}\, x)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (\underbrace{\text{arctg}\, b}_{\Downarrow \; \pi/2} - \underbrace{\text{arctg}\, 0}_{\Downarrow \; 0}) = \frac{\pi}{2}$$

konvergira



Primjer 2.) $I = \int_0^{+\infty} \sin x\, dx$

$$\int_0^{+\infty} \sin x\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \sin x\, dx = \lim_{b\to+\infty} (-\cos x)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (-\cos b + \underbrace{\cos 0}_{\Downarrow \; 1}) = 1 - \lim_{b\to\infty} \cos b \rightarrow \text{ne postoji}$$

divergira

Primjer 3.) $I = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} & \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right|$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left(-x e^{-x} - \int_0^b -e^{-x} dx \right) = \lim_{b\to+\infty} \left(-xe^{-x} + \underbrace{\int_0^b e^{-x} dx}_{-e^{-x}} \right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left((-b\cdot e^{-b} - e^{-b}) - (\underbrace{-0\cdot e^{0}}_{0} \underbrace{- e^{0}}_{1}) \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} (-b\cdot e^{-b} - e^{-b} + 1) = \lim_{b\to+\infty} \left(\underbrace{-e^{-b}}_{\downarrow \; -\frac{1}{e^b} \Rightarrow 0} \underbrace{(b+1)}_{\nearrow 0} + 1 \right) = 1$$

Propozicija: Za $a>0$ vrijedi sljedeće:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{divergira za } p \le 1 \\ \text{konvergira za } p > 1 \end{cases}$$

Primjer 5.) Ispitajte konvergenciju $I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ za $a>0$ u ovisnosti o parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{+\infty} x^{-p} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b x^{-p} dx \; \begin{cases} \text{za } p \neq 1 \\ \text{za } p = 1 \end{cases}$$

Za $p=1$

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-1} dx = \lim_{b\to+\infty} (\ln|x|)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} \Big(\underbrace{\ln(b)}_{\to +\infty} - \ln(a) \Big) = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$x^{-p} = \underbrace{\frac{1}{(-p+1)} \cdot x^{-p+1}}$$

Za $p \neq 1$

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-p} dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right)\Big|_a^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1} \right) = \underline{\underline{\lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-p} - a^{1-p}}{-p+1} \right)}}$$

$$\lim_{b\to+\infty} (b^{1-p}) = \begin{cases} +\infty & \text{za } p<1 \\ 0 & \text{za } p>1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (b^{1-1/2} = b^{1/2}) \\ (b^{1-45} = b^{-44} \approx 0) \end{matrix}$$

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{konvergira za } p>1 \\ \text{divergira za } p \le 1 \end{cases}}$$

$\boxed{TM}$ Kriterij usporedbe za neprave integrale s granicama u beskonačnosti

Neka graf funkcije $f(x)$ leži u području između grafova fja $-g(x)$ i $g(x)$ odnosno $|f(x)| \leq g(x)$, $g(x) \geq 0$, za $x \in [a, +\infty\rangle$.

a) Ako integral $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ konvergira, onda konvergira i integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

b) Ako integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ divergira onda divergira i integral $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

*

=> analogne tvrdnje vrijede i za integrale $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ i $\int_{-\infty}^{b} g(x)dx$ te za integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$.

Primjer 6.) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

Za podintegralnu fju $x \in [0, +\infty\rangle$

vrijedi: $\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ konvergira

pa prema teoremu i cijeli integral konvergira