EKVI.POT. SKUPOVI I KARDINALNI BROJEVI

Želimo odgovoriti na pitanja =
- Koliko el. ima neki skup?
- Pod kojim uvjetom dva skupa imaju jednaki broj elem.?

DEF: Kardinalni broj skupa X je broj elemenata skupa.
Oznaka: card X ili $|X|$

Primjer:) Odredite kard broj skupova

a) $A = \{n \in \mathbb{N};\ 1 \leq n < 9,\ n \text{ paran}\}$ $\quad \underline{\text{card } A = 4}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 + x - 2 = 0\}$ $\quad \underline{\text{card } B = 2}$

c) $C = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ djeljiv s } 3\}$ beskonačno

d) $D = \{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 3\}$ beskonačno

DEF Za skupove X i Y kažemo da su ekvipotentni (jednakobrojna) ako postoji bijekcija $f: X \to Y$. Za ekvipot. skupove kažemo da imaju jednak kardinalni broj

$$\text{card } X = \text{card } Y.$$

Pr.) Jesu li skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ ekvipotentni?

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	a	b	c	d	e	f

$f: A \to B$ bijekcija

Ekvipotencija

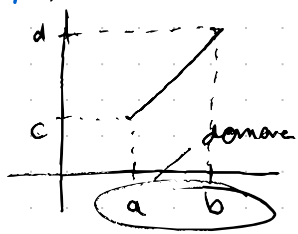
Pr.) Pokažite da su skupovi $\mathbb{N}$ i $2\mathbb{N}$ ekvipotentni skupovi.

$\mathbb{N} = \{1,2,3\dots\}$ konstruirana bijekcija je $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$,

$2\mathbb{N} = \{2,4,6\dots\}$ $f(n) = 2n$

f je bijekcija jer je svaka lin. funkcija bijekcija.

Pr.) Pokažite da su intervali $\langle a,b\rangle$ i $\langle c,d\rangle$ ekvipotentni.



pravac kroz 2 točke (a,c) i (b,d)

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$$

$$f: \langle a,b\rangle \longmapsto \langle c,d\rangle$$

KONAČNI SKUPOVI:

$\boxed{\text{DEF}}$ Kažemo da je skup X konačan ako postoje $n \in \mathbb{N}$ takvi da su skupovi X i $\{1,2,3\dots,n\}$ ekvipotentni.

Tada je $\operatorname{card} X = n$

Nap: ako je X prazan skup, onda je $\operatorname{card} X = 0$

$X \neq 0$ $\operatorname{card} X = 0$

Nap: Ako je $\operatorname{card} X = n$, tada je broj elemenata parnog podskupa od $X \leq n-1$.

$\boxed{\text{PROP}}$ Skup X je konačan ako i samo ako NE POSTOJI bijekcija s X niti jedan njegov pravi podskup.

BESKONAČNI SKUPOV

DEF Skup je beskonačan ako nije konačan (očitoooo)

Iz PROP slijedi: Skup je beskonačan $\Longleftrightarrow$ postoji bijekcija s X na neki njegov podskup.

Pr.) Pokažite da je $\mathbb{N}$ beskonačan.

$2\mathbb{N} = \{2, 4, 6 \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ pravi podskup

Postoji bijekcija $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ $f(n) = 2n$ $\Longrightarrow$ N je besk.

BESKONAČNI SKUPOVI
- prebrojivo beskonačni $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
- neprebrojivo beskonačni $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Prebrojivo beskonačni sk.

Za skup X koji je ekvipotent. sa skupom $\mathbb{N}$ kažemo da je prebrojiv, a kardinalni broj mu je card $X = \aleph_0$ (alef)

Primjer) Pokažimo da je $\mathbb{Z}$ prebrojiv

Konstruiramo bijekciju $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ t.d.

- parni brojevi idu u nenegativne br ($n > 0$ + 0)
- neparni idu u negativne

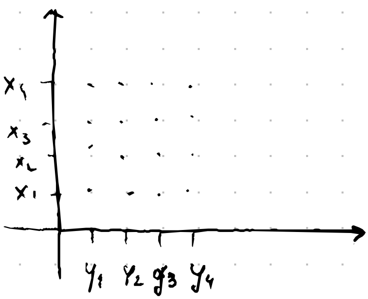
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	-1	0	-2	1	-3	2

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ neparan} \\ \frac{n}{2} - 1, & n \text{ paran} \end{cases}$$

f (bijekcija) $\longrightarrow \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

Pr.) Pokažimo da je za 2 prebrojiva skupa X i Y, njihov Kartezijev produkt $X \times Y$ također prebrojiv

$$X \times Y = \{ (x_i, y_j) ; x_i \in X, \ y_j \in Y, \ i,j \in \mathbb{N} \}$$



X, Y prebrojivi

$X = \{ x_1, x_2, x_3 \dots \}$

$Y = \{ y_1, y_2, y_3 \dots$

$f : X \times Y \to \mathbb{N}$

Napomena: Ako postoji injekcija $f : X \to Y$, tada je $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$

$\boxed{\text{Teorem}}$ Cantor – Bernstein – Schröder

Ako postoje injekcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$, tada su X i Y ekvipotentni

Pr.) Pokažite da je $\mathbb{Q}$ prebrojiv

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Umjesto bijekcije tražimo 2 injekcije

1. $\ln : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $\ln(n) = \frac{n}{1}$ $\Rightarrow$ $\ln$ je injekcija

2. Tražimo injekciju $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$

Konstantno $f_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$f_1 \left(\frac{m}{n} \right) = (m, n)$

injekcija

skupovi $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$ su ekvipotentni

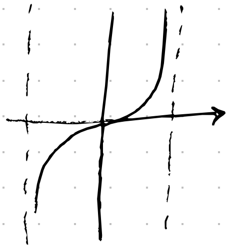
$f_2 \ \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f = f_2 \circ f_1$ inj.

NEPREBROJIVO BESKONAČNI ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

Pr.) Pokažemo da je $\mathbb{R}$ beskonačan

$\mathbb{R}$ je beskonačan ako postoji bijekcija uz neki njegov podskup.



$f(x) = tg(x)$ $\quad f: \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$

bijekcija

$\left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i $\mathbb{R}$ su ekvipotentni

$\boxed{\text{DEF}}$ Za skup brojeva X koji je beskonačan i nije prebrojiv kažemo da je <u>NEPREBROJIV</u>. Pišemo: $\text{card } X = c$