

4. NIZOVI

4.1) Definicije nizovi

Funkcija $a: \mathbb{N} \rightarrow S$ zove se NIZ (SLIJED) u skupu S .

Funkcija $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zove se NIZ REALNIH BROJEVA

Oznake: $a(n) = a_n$ opći član niza

(a_n) = niz

$\{a_n\} = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ skup članova niza

Primer) Ako je niz zadan općim članom, napišite prvih nekoliko članova niza:

a) $a_n = \frac{1}{n}$: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$

b) $a_n = \frac{1}{2n}$: $\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{4n}$, $\frac{1}{6n}$

c) $a_n = \sqrt{n}$: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots$

d) *alternirani niz $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ članovi mijenjaju predznak

Primer) Ako je niz zadan rekurz formulom, napišite prvih nekoliko članova niza:

(a) $a_1 = 3$
 $a_{n+1} = a_{n+2}$ } 3, 5, 7

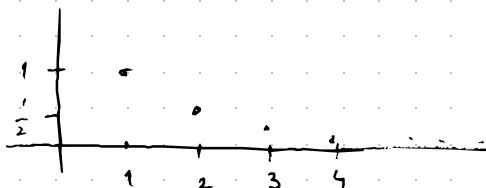
(b) Fibonaccijev niz
 $f_1 = 1$ $f_2 = 1$
 $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ } = 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Grafčki prikaz niza

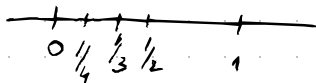
(22) Aritmetički niz

1.) Graf fije a_n

$$a_n = \frac{1}{n}$$



2.) Brojevni pravac



DEF Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$.

Skup je omeđen odozgo ako $\exists M \in \mathbb{R}$ t.d. $\forall x \in S, x \leq M$
(M = gornja međa).

Skup je omeđen odozdo ako $\exists m \in \mathbb{R}$ t.d. $\forall x \in S, x \geq m$ (m = donja međa)

DEF Kažemo da je niz (a_n) ODOZGO (ODOZDO) ako je skup vrijednosti članova niza $\{a_n\}$ omeđen odozgo (odozdo).

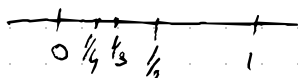
Niz je OMEĐEN ako je omeđen i odozgo i odozdo.

omeđen odozgo: $a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
omeđen odozdo: $a_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$

omeđen $M \geq a_n \geq m$

Primjer: Ispitajte omeđenost niza

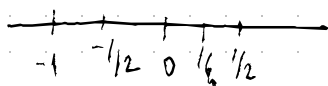
(a) $a_n = \frac{1}{n}$



$$1 \geq a_n \geq 0$$

— omeđen

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$



$$\frac{1}{2} \geq a_n \geq -1$$

Primjer: Dokažite da je niz (a_n) $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$ omeđen te mu odredite donju i gornju granicu.

$$a_n = \frac{2n-3}{n+1} = \frac{2(n+1)-5}{n+1} = 2 - \frac{5}{n+1} < 2$$

$M=2?$

minimalna udaljenost od $a_n = 2 - \frac{5}{n+1}$ se postiže za
maksimalnu vrijednost od $\frac{5}{n+1}$

$f(n) = \frac{5}{n+1}$ je najveće za najmanji $n+1=2$ (jer $n \in \mathbb{N}$ ide 1 $\rightarrow 1+1=2$)

$$f(1) = \frac{5}{2} \quad a_n = 2 - \frac{5}{2} \geq 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \quad \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

$2 - \frac{5}{n+1}$ $n \rightarrow \infty$ cijeli razlomak se smanjuje

* iako još nisu doveli limesi,

ako $n+1$ teži beskonačnosti, cijeli razlomak teži 0

\rightarrow toga je ne veća razlika između 2 i razlomka

\rightarrow zato je gornja međa 2

\Rightarrow tada je razlomak najveći, razlika je najmanja, zato je to donja granica \rightarrow minimalna vrijednost izraza

4.2. Gornjište niza

Za neke n članovi niza se gomilaju oko jedne vrijednosti

↳ $a_n = \frac{1}{n}$ se "skuplja" (gomila) oko 0 jer se povećavajući n smanjuje vrijednost razlomka i približava se 0

DEF Neka su $x_0 \in \mathbb{R}$; $\varepsilon > 0$.

Interval oblika $V_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$

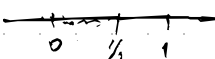
zovemo ε -okolina broja x_0 .

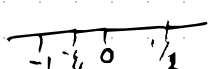
→ interval $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$ nazivamo ε -okolina br. x_0 .

↳ kraće označavamo sa $V_\varepsilon(x_0)$

DEF Realan broj A zovemo GORNJIŠTE NIZA (a_n) ako se unutar neke ε -okoline broja A nalazi beskonačno mnogo članova a_n .

Pr.) Pronađite gornjište nizova

(a) $a_n = \frac{1}{n}$  $A = 0$

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  $A = 0$

(c) $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ $A = 1$

ZAKLJUČUJEMO: Ako je niz omeđen, ima barem jedno gornjište

! ALI obrat ne vrijedi.

odnosno, ako niz ima gornjište, ne znači da je omeđen

→ niz: $a_n \begin{cases} a_n = n & n \text{ paran} \\ a_n = -1 & n \text{ je neparan} \end{cases} \rightarrow \text{niz se gomila u } -1, \text{ ali to mu nije gornjište}$