Teorija iz skripte iz Matan 1 na ispitima u akademskoj godini 2020/21

• dokazi tvrdnji koje su napisane crnim slovima se ispituju na ispitima;

• dokazi tvrdnji koje su napisane crvenim slovima se NE ispituju ove godine na ispitima; međutim, njihovi iskazi, njihove varijante (npr. njen obrat po kontrapoziciji) i primjena ovih tvrdnji se ispituju na ispitima;

• iskazi definicija i primjeri vezano uz definicije se ispituju na ispitima;

• ako neka tvrdnja iz skripte nije navedena u ovom popisu onda se njen dokaz automatski ne ispituje na ispitima.

• **Poglavlje 1**: nema dokaza.

• **Poglavlje 2**:

• formule (2.11) do (2.15) za množenje, dijeljene i potenciranje $z \in \mathbb{C}$ koji su dani u trigonometrijskom obliku; priznaju se i dokazi ovih formula pomoću Eulerovog zapisa kompleksnog broja, koji su dani u 2.3 ;

• formule (2.18) i (2.19) za korjenovanje $z \in \mathbb{C}$ koji su dani u trigonometrijskom obliku.

• **Poglavlje 3**:

• **Teorem 3.1.1** Funkcija $f : X \to Y$ ima inverznu funkciju $f^{-1} : Y \to X$ ako i samo ako je f bijekcija.

• **Korolar 3.1.2** Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ ulančane funkcije koje su bijekcije. Tada je i funkcija $g \circ f : X \to Z$ bijekcija i njezina inverzna funkcija dana je formulom $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

• **Poglavlje 4**:

• **Teorem 4.1.2** Neka su A i B konačni neprazni skupovi, tako da prvi ima n elemenata, a drugi ima m. Onda svih funkcija $f : A \to B$ ima ukupno m^n, tj. vrijedi $|B^A| = m^n$. Drugim riječima, vrijedi $|B^A| = |B|^{|A|}$.

• **Korolar 4.1.3** Broje poredanih n-teraca sastavljenih od 0 i 1 (ili od neka druga dva različita elementa) jednak je 2^n.

• **Teorem 4.1.4** Neka je X konačan skup od n elemenata. Onda on ima ukupno 2^n podskupova, tj. vrijedi $|2^X| = 2^{|X|}$.

• **Propozicija 2** Ako je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ prirodan broj rastavljen na proste faktore, onda je broj svih pozitivnih djelitelja od n jednak $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

• **Teorem 4.2.1** Neka je zadan neprazan $n-$člani skup i prirodan broj k takav da je $k \leq n$. Broj poredanih $k-$teraca različitih elemenata iz $n-$članog skupa, jednak je padajućem umnošku k uzastopnih prirodnih brojeva, počevši od n: $n(n-1) \cdots (n-k+1) = n!/(n-k)!$. Ukupan broj permutacija $n-$članog skupa jednak je $n!$.

• **Teorem 4.2.2** Neka su skupovi $A = \{a_1, \cdots, a_k\}$ i $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ konačni neprazni, takvi da je $k \leq n$. Onda je broj svih injektivnih funkcija $f : A \to B$ jedna padajućem umnošku k uzastopnih prirodnih brojeva počevši od n: $n(n-1) \cdots (n-k+1) = n!/(n-k)!$. Ako je $k = n$, onda je svaka injektivna funkcija iz A u B ujedno i bijekcija. Prema tome, dobivamo da je broj svih bijektivnih funkcija iz $n-$članog skupa A u $n-$člani skup B jednak $n!$.

• **Teorem 4.2.3** Neka je $k \leq n$, gdje je k nenegativan cijeli broj i n prirodan broj. Broj $k-$članih podskupova $n-$članog skupa jednak je:

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

• **Propozicija 3** Za sve prirodne brojeve n i k, gdje je $k \leq n$, vrijedi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

• **Teorem 4.2.4** Za sve kompleksne brojeve x, y i sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

• **Teorem 4.3.1** Broj permutacija $n-$tog reda $k-$članog skupa $\{a_1, \cdots, a_k\}$, u kojima se elementi a_i pojavljuje n_i puta, $i = 1, \cdots k$, gdje je $n = n_1 + \cdots n_k$, jednak je

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}.$$

• **Teorem 4.3.2** Za sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ te $x_1, \cdots x_k \in \mathbb{C}$, vrijedi multinomna formula:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + n_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}.$$

Zbrajamo po svim poredanim $k-$tercima $(n_1, n_2, \cdots n_k)$ nenegativnih cijelih brojeva takvih da je $n_1+n_2+\cdots+n_k = n$.

• **Teorem 4.3.3** Poredanih $k-$teraca $n-$članog skupa ima ukupno n^k.

• **Teorem 4.3.4** Neka su k i n bilo koji prorodni brojevi. Broj $k-$članih multiskupova s elemntima iz zadanog $n-$članog skupa iznosi

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

• **Teorem 4.4.1** FUI ili Sylvesterova formula.......

• **Poglavlje 5**:

• **Teorem 5.1.1** Neka su $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realne funkcije takve da je $g \circ f : D \to \mathbb{R}$. Ako je:
(a)(i) f rastuća i g rastuća, tada je $g \circ f$ rastuća; (a)(ii) f rastuća i g padajuća, tada je $g \circ f$ padajuća;
(b)(i) f padajuća i g rastuća, tada je $g \circ f$ padajuća; (a)(ii) f padajuća i g padajuća, tada je $g \circ f$ rastuća.

• **Propozicija 1** Neka su $D, K \subset \mathbb{R}$ i $f : D \to K$ bijekcija. Označimo noj inverznu funkciju s $f^{-1} : K \to D$. Ako je:
(a) f strogo rastuća, tada je i f^{-1} strogo rastuća.
(b) f strogo padajuća, tada je i f^{-1} strogo padajuća.

• **Poglavlje 5.5.2 Area funkcije -** izvod za formulu inverzne funkcije od sinus hiperboličke funkcije.

• **Propozicija 3** Broj e je iracionalan broj.

• **Poglavlje 6**:

• **Propozicija 1** Ako je niz a_n konvergentan i ima limes L, tada je L jedino gomilište niza.

• **Korolar 6.3.1** Konvergentan niz ima samo jedan limes.

• **Teorem 6.3.2** Ako je niz realnih brojeva a_n konvergentan, tada je on omeđen.

• **Teorem 6.3.6** Niz realnih brojeva a_n konvergira k 0 ako i samo ako niz njegovih apsolutnih vrijednosti $|a_n|$ konvergira k 0, tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{ako i samo ako} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

• **Teorem 6.4.1**a) Ako su a_n i b_n konvergentni nizovi, tada je niz $a_n + b_n$ konvergentan i vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

• **Propozicija 3** Neka je $a_n \sim c_n$ kada $n \to \infty$ i b_n divergira prema $+\infty$. Ako postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n}.$$

Analogno, ako je $b_n \sim d_n$ kada $n \to \infty$ i a_n divergira prema $+\infty$ te ako postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, onda vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n}.$$

• **Propozicija 4** Niz a_n je rastući ako i samo ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$. Niz a_n je padajući ako i samo ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \geq a_{n+1}$.

• **Propozicija 6.6.1** Ako je niz realnih brojeva a_n monoton i moeđen, onda je on konvergentan.

• **Limes (6.4)**: $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$; • **Limes (6.5)**: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$, $p \in \mathbb{Q}^+$, $a > 1$; • **Limes (6.6)**: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
• **Limes (6.7)**: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$. • **Limes (6.8)**: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.
• **Limes (6.9)**: $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$.

• **Poglavlje 7**:

• **Teorem 7.1.2** Ako za funkciju f postoji limesi u točki $x = a$, tada je on jednoznačno određen.

• **Teorem 7.1.3** Neka su $a, L \in \mathbb{R}$.

$$L = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{ako i samo ako} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L \;\text{ i }\; \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

• **Teorem 7.1.4** Neka postoje konačni limesi funkcija f i g u točki $x = a$. Tada vrijedi:
(i) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$; (ii) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$;
(iii) $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x)$, uz uvjet da su nazivnici različiti od nule.

• **Teorem 7.2.1 a)** Neka je $a \in \mathbb{R}$. Neka su f i g neprekinute u točki a. Tada je $f + g$ neprekinuta u točki a.

• **Teorem 7.4.3** Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ima limes kada $x \to 0$ i vrijedi $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

• **Poglavlje 8**:

• **Teorem 8.3.1** Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval. Ako je f diferencijabilna u točki $x_0 \in I$, onda je f neprekinuta u $x_0 \in I$.

• **Teorem 8.4.1** Ako su $f, g : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilne na I, onda vrijedi:
(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$, $x \in I$; (2) $(Cf(x) = Cf'(x)$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$;
(3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$, $x \in I$; (4) $(f(x)/g(x))' = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]/g^2(x)$, $x \in I$.

• **Teorem 8.5.1** Neka je kompozicija $f \circ g$ dobro definirana u nekoj točki x, te neka je g diferencijabilna u točki x, a f diferencijabilna u $g(x)$. Tada je kompozicija $f \circ g$ diferencijabilna u x i vrijedi:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

• **Izvodi tabličnih derivacija**
• **Formula za derivaciju inverzne funkcije**:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$