ZIMSKI ISPITNI ROK
15.02.2021.

Ime i prezime: ______________________________
JMBAG: ____________________

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.
Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: ____________________

1. (6 bodova)
   (a) (2b) U skupu $\mathbb{C}$ riješite jednadžbu $(z+i)^2+1=0$.
   (b) (4b) U skupu $\mathbb{C}$ riješite jednadžbu $\arg(z^4(1+\sqrt{3}i)) = \arg(\pi z^2)$. Skicirajte skup rješenja.

2. (9 bodova)
   (a) (1b) Napišite definiciju konvergencije niza realnih brojeva.
   (b) (4b) Postoji li niz $(a_n)_n$ koji
      (b1) je omeđen, ali nije konvergentan?
      (b2) je konvergentan, ali nije monoton?
      (b3) ima točno 3 različita gomilišta?
   Ako postoji, navedite primjer takvog niza. Ako ne postoji, dokažite da ne postoji.
   (c) (4b) Izračunajte sljedeće limese:

$$\text{(c1)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(3n^2)}{n}$$

$$\text{(c2)} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+3}$$

3. (9 bodova)
   (a) (4b) Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadana je izrazom:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+b, & x<1 \\ \ln(x), & x\geq 1 \end{cases}$$

   Odredite konstante $a,b\in\mathbb{R}$ tako da f bude neprekinuta i diferencijabilna za sve $x\in\mathbb{R}$. Za takve a,b skicirajte graf od f.
   (b) (2b) Po definiciji izvedite $f'(x)$ ako je $f(x)=\sqrt{x}$.
   (c) (3b) Izračunajte $f'(0)$ ako je $f(x)=\sqrt{e^{-\sin(2x)}}$.

OKRENITE STRANICU!

4. (8 bodova) Neka je $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekinuta na $[a, b]$ i diferencijabilna na $\langle a, b\rangle$. Ako je $f(a) = f(b)$, tada je samo jedna od sljedeće 3 tvrdnje uvijek istinita:

   (T1) $\exists c \in \langle a, b\rangle$ t.d. $f(a) = f(c) = f(b)$

   (T2) $\exists c \in \langle a, b\rangle$ t.d. $f'(c) = 0$

   (T3) $\exists c \in \langle a, b\rangle$ t.d. $f(c) = 0$.

   Tvrdnju koja je uvijek istinita dokažite, a za preostale dvije nađite protuprimjer.

5. (8 bodova) Iz točke na osi ordinata povučene su dvije tangente na krivulju $y = 1 - x^2$ tako da te tangente s osi apscisa zatvaraju trokut minimalne površine. Koliko iznosi ta površina? Dokažite da se radi o minimumu.

6. (7 bodova)

   (a) (5b) Iskažite i dokažite Teorem srednje vrijednosti integralnog računa.

   (b) (2b) Koristeći teorem pod (a), pokažite da vrijedi:

$$\left| \int_1^3 \sin(x)dx \right| \leq 2.$$

7. (9 bodova)

   (a) (1b) Iskažite formulu parcijalne integracije u neodređenom integralu.

   (b) (4b) Izračunajte:

$$\int \frac{dx}{e^x + 1}.$$

   (c) (4b) Izračunajte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} \sin(2x)dx.$$

8. (8 bodova)

   (a) (4b) Izračunajte površinu omeđenog lika između krivulja $x = 2(y - 1)^2$ i $x = (y - 1)^2 + 1$.

   (b) (4b) Zadana je funkcija $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$. Izračunajte volumen tijela dobivenog rotacijom površine ispod grafa ove funkcije oko osi y.

Napomena: Ispit se piše **150 minuta**. Na ispitu je dozvoljena upotreba samo pribora za pisanje i službenog podsjetnika.