2.2. RELACIJE

Binarne relacije

↳ Definiramo odnos između dva elementa skupa (poredak je bitan).

$\boxed{\text{DEF}}$ A - neprazan skup

ρ na skupu A je neprazan podskup od $A \times A$

tj. $\rho = A \times A$. Ako je $(x, y)\ \rho$ tada, kažemo da je x u relaciji s y .... x, y ....

Relacija je u stvari podskup od kartezijevog produkta

kartezijev produkt dva skupa

$A \times A \{(x, y) : x \in A, y \in A\}$

za svaki el kar.pt. vrijedi

$(x, y) \in \rho$

ili

$(x, y) \notin \rho$

$$\boxed{\rho \subseteq A \times A}$$

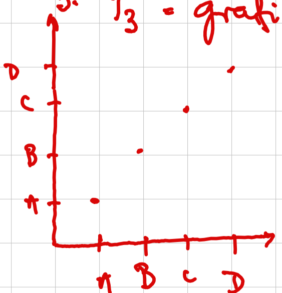
- Neusporedivi elementi: $(x, y) \notin \rho$ i $(y, x) \notin \rho$

Binarnu relaciju zadajemo na 3 načina

1. nabrajanjem elemenata
2. zadavanjem uvjeta
3. graf. prikazom

Pr.) $A = \{a, b, c, d\}$

1. $\rho_1 = \{(A A), (B B), (C C), (D D)\}$
2. $\rho_2 = \{(x, x) : x \in A\}$
3. ρ_3 = grafički



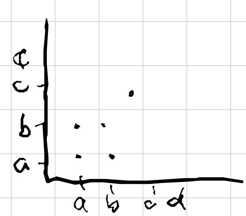
Pr.) Zadan je skup $A = \{a, b, c, d\}$. Na su zadane sljedeće relacije:

a) $\rho_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$

b) $\rho_2 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,d), (d,a)\} \subseteq A \times A$

$\rho_2 = \{(x,y) : x = a \text{ ili } y = a\}$

c) $\rho_3 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$



Pr.)

$A = \mathbb{Z}$

a) $x \rho y$ ako $x = y$; $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y\}$

relacija jednakosti

b) $x \rho y$ ako $x \leq y$; $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \leq y\}$

relacija manje ili jednako

c) $x \rho y$ ako $x < y$: $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x < y\}$

relacija strogo manje

d) $x \rho y$ ako je $x - y$ paran: $\rho \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 2 \mid x - y\}$

relacija iste parnosti

e) $x \rho y$ ako je $x - y$ djeljiv s m, $m \geq 2$:

$\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \mid x - y\}$ relacija kongruencije

f) $x \rho y$ ako je y djeljiv s x : $\rho \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; x \mid y\}$

relacija djeljivosti

Relacija ekvivalencije i parcijalnog poretka

$\boxed{\text{DEF}}$ Za relaciju ρ na nepraznom skupu A kažemo da je:

1. REFLEKSIVNA ako za $\forall x \in A$, $x \rho x$
(svaki x iz A, on je u relaciji sam sa sobom)

2. SIMETRIČNA ako za $\forall x, y \in A$, $x \rho y \Rightarrow y \rho x$
iz x u relaciji s y slijedi y u rel s x

3. ANTISIMETRIČNA ako za $\forall x, y \in A$, $x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$

4. TRANZITIVNA $\forall x, y \in A$, $x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

Napomena:

1. ρ je refleksivna $\Leftrightarrow$ graf prikaz sadrži dijagonalu kvadrata $A \times A$

2. ρ je simetričan $\Longleftrightarrow$ Γ je simetričan s obzirom na pravac $y = x$

3. ρ je antisimetrična ako vrijedi obrat po kontrapoziciji

$$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \Rightarrow x \not\rho y \text{ ili } y \not\rho x$$

Pr.) Ispitajte svojstva relacija:

a) $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y\}$

Relacija ekvivalencije

- refleksivnost $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x = y$ ✓
- simetričnost $\forall x,y \in \mathbb{Z}, \ x = y \Rightarrow y = x$ ✓
- asimetričnost $\forall x,y \in \mathbb{Z} \quad x = y \wedge y = x \Rightarrow x = y$ ✓
- tranzitivnost $\forall x,y \in \mathbb{Z} \quad x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$ ✓

b) $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \leq y\}$

Rel. parc. poretka

- refl. $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \leq x$ ✓
- sim. $\forall x,y \in \mathbb{Z} \quad x \leq y \not\Rightarrow y \leq x$ —
- Asim $\forall x,y \in \mathbb{Z} \quad x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ ✓
- tranz. $\forall x,y \in \mathbb{Z} \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ✓

DEF

Rel. koja je refl., sim. i tranz. je relac. <u>ekvivalencije</u>.

Rel. koja je refl. antisim. i tranz. je relac. <u>parcijalnog poretka</u>.

RELACIJE PARC. PORETKA

Zc) Koja svojstva zadovoljavaju relacije:

a) $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x - y \text{ paran broj}\}$

(1.) refl.: $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0$ paran br ✓

(2.) sim.: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $x-y$ paran $\Rightarrow$ $y-x$ paran ✓

X asim.: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $x-y$ paran $\wedge$ $y-x$ paran $\not\Rightarrow$ $x=y$

(4) tranz.: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $\underset{\text{paran}}{x-y} \wedge \underset{\text{paran}}{y-z} \Rightarrow x-z$ paran

$$x - z = \underbrace{x-y}_{\text{paran}} + \underbrace{y-z}_{\text{paran}} \Rightarrow x-z \text{ paran}$$

$\Rightarrow$ relacija ekvivalencije

b) $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x < y\}$ dokaz po kontrapoziciji

1. refl. $\forall x \in \mathbb{Z}$ $x < x$ <u>ne</u>

2. sim $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ $x < y \not\Rightarrow y < x$ <u>ne</u>

(3.) asim $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ $x \neq y \Rightarrow x \geq y$ ili $y \geq x$ ✓

(4.) tranz. $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$ ✓

$\boxed{\text{DEF}}$ X - skup

Skup svih podskupova skupa X zovemo PARTITIVNI SKUP od X. Oznaka: $\mathcal{P}(X)$

Pr. $X = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(x) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

$$\mathcal{P}(x) = 8 = 2^3$$

Pr.) Na partitivnom skupu $P(x)$ promatramo relac. biti podskup tj:

$A, B \in \mathcal{P}(x)$, $A \, \rho \, B$ ako je $A \subseteq B$.

Provjerite sva svojstva za ovu relaciju.

- refleksivnost: $\forall A \in \mathcal{P}(x)$, $A \subseteq A$ ✓
- simetr.: $A, B \in \mathcal{P}(x)$ $A \subseteq B \Rightarrow B \subseteq A$ ✗
- antisim: $A, B \in \mathcal{P}(x)$ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ✓
- tranzit: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ ✓

Relacija „biti podskup" je relacija parcijalnog poretka

RELACIJA POTPUNOG PORETKA: $\leq$

$\subseteq$ nije relacija

Ako su svi el. skupa A usporedivi s obzirom na rel. parc. poretka.

$A = \mathbb{R}$, $\leq$

2.2.3 Relacija ekvivalencije i particija skupa

$\boxed{\text{DEF}}$ PARTICIJA SKUPA A je familija podskupova $A_i \subset A, i \in I$ koji su međusobno disjunktni $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, a unija im je cijeli skup A. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i = A\right)$.

Pr.) A = svi studenti 1. g. particija skupa A = P01, P02 ... P05

$\boxed{\text{DEF}}$ Neka je ρ relacija ekviv. na A. KLASA ili RAZRED ekvival. elementa x element A je skup svih elemenata iz A koji su s njim u relaciji, tj.

$$[x] := \{ y \in A : y \, \rho \, x \}$$

Za sve el. jedne klase kažemo da su ekvivalentni.

Reprezentant klase može biti bilo koji element $y \in [x]$

$\boxed{\text{PROP}}$ Ako su $x, y \in A$, t.d. je $[x] \cap [y] = \emptyset$ ili $[x] = [y]$

Dokaz:

$x, y \; A$

$x \, \rho \, y \Rightarrow x \in [x] \wedge y \in [x] \overset{\text{trans.}}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow [x] \subseteq [y] \wedge [y] \subseteq [x] \Rightarrow [x] = [y]$

$x \not\rho \, y \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

Pr.) Neka je $\varrho := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x-y$ djeljiv s $m\}$

a) Pokažite da je ϱ relacija ekviv.

b) Odredite particiju skupa $\mathbb{Z}$ koristeći ϱ.

---

a)

* ne treba nam antisim.

- refl. $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x-x=0$ djeljiv s m
- sim. $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $m \mid x-y \Rightarrow m \mid y-x$
- tranz. $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $x-y=mk \wedge y-z=mz \Rightarrow$

$\Rightarrow x-z = x+y-y-z = mk+ml = m(l+k)$

b) $x-y$ djeljiv s $m \Leftrightarrow x,y$ ima isti ostatak pri dijeljenju s m.

Ostaci pri dijeljenju s m: $0, 1, \ldots, m-1$

KLASE EKVIVALENCIJE

$[0] := \{mk : k \in \mathbb{Z}\}$ = skup brojeva djeljivih s m

$[1] := \{mk+1, k \in \mathbb{Z}\}$ = -||- ostatak 1

$\vdots$

$[m-1] := \{mk+(m-1) : k \in \mathbb{Z}\}$ = skup brojeva s ostatkom $m-1$

PITANJA

1.) Može li $x \in \mathbb{Z}$ biti u dvije klase? NE

2.) Postoji li $x \in \mathbb{Z}$ koji nije niti u jednoj klasi? NE

DOBILI SMO Particiju skupa $\mathbb{Z} = \{[0], [1] \dots, [m-1]\}$

Zad.) Na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zadana je relacija

$\rho = \{(1,1), (2,2), (2,1), (3,3), (3,5), (4,5), (6,6)\}$

Zadanu relaciju ρ nadopunite do najmanje relacije $\bar{\rho}$ koja je relacija ekvivalencije. Odredite ekv. za $\bar{\rho}$.

- refl: $\forall x \in S,\ x \rho x$: $(4,4)$, $(5,5)$
- sim: $\forall x,y \in S,\ x \rho y \Rightarrow y \rho x$: $(1,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$
- tranz: $\forall x, y, z \in S$ $x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$:

$(1,1) \wedge (1,2) \rightarrow (1,2)$ ✓

$(1,2) \wedge (2,1) \rightarrow (2,1)$ ✓

$(2,1) \wedge (1,1) \Rightarrow (2,1)$ ✓

$(2,1) \wedge (1,2) \Rightarrow (2,2)$ ✓

$(5,3) \wedge (3,5) \Rightarrow (3,5)$ ✓

$(3,5) \wedge (5,5) \Rightarrow (3,5)$ ✓

$(3,5) \wedge (5,3) \Rightarrow (3,3)$ ✓

$(3,5) \wedge (5,4) \Rightarrow (3,4)$ fali