9.3. INTEGRALI RACIONALNIH FUNKCIJA

DEF: Racionalna funkcija $f(x)$ je funkcija oblika

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

gdje su P_n i Q_m polinomi stupnja n odnosno m

Razlikujemo dva slučaja:

1. ako je stupanj brojnika strogo manji od stupnja nazivnika ($n < m$) kažemo da je $f(x)$ prava racionalna funkcija.

2. ako je stupanj brojnika veći ili jednak od stupnja nazivnika $n \geq m$ kažemo da je $f(x)$ neprava racionalna funkcija.

$\Rightarrow$ neke prave racionalne funkcije možemo jednostavno integrirati odgovarajućom supstitucijom u slj. primjeru.

Primjeri:

a) $$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+3x+1 \\ (2x+3)\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

$$\boxed{= \ln(x^2+3x+1) + C}$$

b) $$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ 2x\,dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \underbrace{\frac{1}{t^2+1}}_{(\mathrm{arctg}\, x)'} \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, t + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, x^2 + C}$$

Nadopuna kvadratnog trinoma

- često ćemo se susresti s integralima koji imaju kvad. trinom ax^2+bx+c u nazivniku ! a da nisu rješivi direktnom supstitucijom*

→ PRISTUP: nadopuna kvad. trinoma do potpunog kvadrata
+ uvodimo supstituciju čime dobijemo tabl. integ.

Primjer:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{x^2}+\underbrace{\frac{3}{4}}_{a^2}} = \dots \stackrel{\text{formula}}{=} \boxed{\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C}$$

$$\boxed{= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C}$$

Dijeljenje i faktorizacija polinoma

- u slučaju kada je $n \geq m$ (stupanj polinoma brojnika veći ili jednak od nazivnika)

⟹ dijelimo ovako:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \boxed{S_{n-m}(x)} + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$$

ostatak pri dijeljenju (< m!)

polinom stupnja n-m dobiven
kao ostatak pri dijeljenju

Primjer 39) Podijelimo polinome x^3+x^2-4 i x^2-2x

$$\frac{x^3+x^2-4}{x^2-2x} = (x^3+x^2-4):(x^2-2x) = x+3$$

$$-x^3+2x^2+0$$

$$0+3x^2-4$$

$$-3x^2+6x$$

$$0+\boxed{6x-4} \text{ ostatak}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+x^2-4}{x^2-2x} = (x+3) + \frac{6x-4}{x^2-2x}$$

Teorem: Faktorizacija polinoma

Polinom $P_n(x) = a_n x^n + \dots a_1 x^1 + a_0 (x^0)$

s realnim koeficijent $a_1 \dots a_n$

$\Downarrow$ možemo zapisati kao produkt lin. i kvad. faktora u obliku:

$$\boxed{P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{r} (x-x_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{s} (x^2+p_j x+q_j)^{l_j}}$$

Pri čemu:

- polinom ima linearan faktor $(x-x_i)^{k_i}$ AKO je $x_i \in \mathbb{R}$ nultočka polinoma kratnosti k_i stupanj te nultočke
- polinom ima kvad. faktor $(x^2+p_j x+q_j)^{l_j}$, $p_j, q_j \in \mathbb{R}$, ako ima konjugirano kompleksne nultočke stupnja (kratnosti) l_j

* Suma stupnjeva svih nultočaka jednaka je stupnju polinoma n.

→ Faktorizacija proizlazi iz nultočki polinoma

STVARNE — linearni

KONJUGIRANO KOMPLEKSNE — kvadratni

Primjer 40.) Faktorizirajte polinome

a) $x^6 - 1$

- razlika kvadrata pa razliku i zbroj kubova

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$$

$$= \underline{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}$$

b) $x^5 + 4x^3 + 3x$

$$x^5 + 3x^3 + x^3 + 3x =$$

$$= x^3(x^2+3) + x(x^2+3) = (x^2+3)(x^3+x) = \underline{x(x^2+1)(x^2+3)}$$

c) $x^3 - 3x^2 - 3x - 4$

→ pronaći jednu nultočku koja je djelitelj slobodnog člana -4 $(\pm 1, \pm 2, \pm 4)$ ⇝ uvrstimo i vidimo $x=4$ je nultočka

$$64 - 48 - 12 - 4 = 0 \checkmark$$

$$x^3 - 4x^2 + x^2 - 4x + x - 4 = x(x^2+x+1) - 4(x^2+x+1)$$

$$= (x-4)(x^2+x+1)$$

Rastav na parcijalne razlomke

$\boxed{\text{TM}}$ Rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke

prava racionalna fja ima jednoznačno određen rastav na zbroj parcijalnih razlomaka čiji broj (koliko ih ima) ovisi o faktorizaciji nazivnika

$\boxed{\text{FAKTOR} \quad (x-a)^k}$: $\frac{A_1}{(x-a)^1}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}$, $A_i \in \mathbb{R}$

– ako je nazivnik racionalne funkcije oblika $(x-a)^k$ ↗

– A_i su konstante

$\boxed{\text{FAKTOR} \quad (x^2+px+q)^k}$ $\frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)^1}, \dots, \frac{B_k x + C_k}{(x^2+px+q)^k}$ $B_i, C_i \in \mathbb{R}$

Primjer 9.42.) $\frac{6x-4}{x^2-2x}$

$$\frac{6x-4}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \quad / \cdot x(x-2)$$

$$6x-4 = A(x-2) + Bx$$

$$6x-4 = Ax + Bx - 2A$$

$$6x = Ax + Bx \qquad -4 = -2A$$

$$6 = A + B \qquad 2 = A$$

$$B = 4$$

Primjer 9.43.)

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

2 linearna   1 kvadr

$$x^2 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$$

$$x^2 = A(x^3+x+x^2+1) + B(x^3+x-x^2-1) + (Cx+D)(x^2-1)$$

$$x^2 = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D$$

$$x^2 = x^3(A+B+C) + x^2(A-B+D) + x(A+B-C) + (A-B-D)$$

$0 = A+B+C$ $-C = A+B$

$1 = A-B+D$ $\boxed{C=0}$ $A=-B$

$0 = A+B-C \rightarrow C = A+B$ $0 = -B-B-D$

$0 = A-B-D$ $0 = -2B-D$ $D = -2B$

$1 = -2B+D$

Prema tome vrijedi rastav: $1 = 2D /:2 \rightarrow D = \frac{1}{2}$

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

$\boxed{B = \frac{-1}{4}}$

$\boxed{A = \frac{1}{4}}$

Kada rastavimo racionalnu funkciju na parcijalne razlomke koristimo svojstvo da je integral zbroja jednak zbroju integrala pa se integracija racionalne f-je svodi na integraciju njenih parcijalnih razlomaka

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx = \int \frac{1}{4(x-1)}\,dx - \int \frac{1}{4(x+1)}\,dx + \int \frac{1}{2(x^2+1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\operatorname{arctg}\frac{x}{1}\right) + C$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C}$$

Koraci integriranja racionalnih funkcija $\left(\frac{m}{n}\right)$

1. Ako je racionalna funkcija oblika $n \leq m$ (stupanj nazivnika $\leq$ brojnika) dijeljenjem polinoma je svodimo na zbroj polinoma i prave racionalne funkcije

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$$

2. Nazivnik prave racionalne funkcije racionaliziramo u obliku linearnih i kvadratnih faktora

$$Q_m(x) = a_n \underbrace{\prod_{i=1}^{r} (x-x_i)^{k_i}}_{\text{stvarne nult.}} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{s} (x^2+p_j x+q_j)^{l_j}}_{\text{kompleksno konj. nult.}}$$

3. Prave racionalne fije rastavimo na parcijalne razlomke (oblik i broj parc. razlomaka ovisi o faktorima dobivenim u 2. točki)

$$\frac{A_1}{x-a} \cdots \frac{A_k}{(x-a)^k} \quad \& \quad \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q}, \dots, \frac{B_k x + C_k}{(x^2+px+q)^k}$$

4. Izračunamo poznate koeficijente A_i, B_i i C_i na rastavu na parcijalne razlomke

5. Dobivene parcijalne razlomke integriramo svaki posebno