# 7.3. Taylorovi polinomi i formula

+ želimo zadanu f-ju ili vrijednost f-je u točki APROKSIMIRATI polinomom stupnja n

**DEF** Neka je $f : \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima u točki $x_0 \in \langle a,b\rangle$ sve derivacije do n-te uključujući n-tu derivaciju

**TM** Taylorov teorem

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (otvoreni interval $\mathbb{R}$) ima sve derivacije do $(n-1)$ reda u točki $c \in I$

Tada $f$:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x) \end{aligned}}$$

Gdje je $T_n$ Taylorov polinom n-tog stupnja

$R(x)$ je ostatak

$R_n(x) \to$ Lagrangeov oblik ostatka

↳ predstavlja pogrešku u aproksimaciji funkcije

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \longmapsto f(x) \approx T_n(x) \quad ; \quad |f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$$

Zad.) Koristeći $T_n$ stupnja 4 f-je $f(x)=\cos x$ u točki $c=0$, aproksimirajte broj cos1 te ocjenite pogrešku aproksimacije

$f(x) = \cos x$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x$ $\quad f^{IV}(0) = 1$

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(c)}{k!}(x-c)^k \qquad c=0$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(0)}{k!} \cdot x^k$$

$$T_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{24}x^4$$

$$= 1 + \cancel{\frac{0}{1}x} + \frac{-1}{2}x^2 + \cancel{\frac{0}{6}x^3} + \frac{1}{24}x^4$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$f(1) = \cos 1$

$$T_4(1) = 1 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{24}\cdot 1^4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24}$$

$f(1) = 0$

$$\boxed{T_4(1) = \frac{37}{24}}$$

$f(1) = T_4(1) + R_4(1)$

$$|R_4(1)| = |f(1) - T_4(1)| = \left|0 - \frac{37}{24}\right|$$

$\cos 1 = 0$