8.1. MONOTONOST

- funkcija pada: interval $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$

  ako je $f(x_1) \geq f(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$

- funkcija raste: interval $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$

  ako je $f(x_1) \leq f(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$

$\rightarrow$ $\langle a,b\rangle$ je interval monotonosti funkcije

*za funkcije koje su složenije od elementarnih f-ja nije lako provjeriti nejednakost između $f(x_1)$ i $f(x_2)$ za $\forall x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$.

$\boxed{\text{TM.}}$ Neka je $f(x)$ diferencijabilna funkcija na $\langle a,b\rangle$. Tada vrijede:

$f(x)$ raste na $\langle a,b\rangle \iff f'(x) \geq 0, \forall x \in \langle a,b\rangle$

$f(x)$ pada na $\langle a,b\rangle \iff f'(x) \leq 0, \forall x \in \langle a,b\rangle$

* Korolar 7.2.5. Ako se zamijene iz „raste" u „strogo raste"

$f'(x) > 0$ na $\langle a,b\rangle \longrightarrow f(x)$ strogo raste na $\langle a,b\rangle$

$f'(x) < 0$ na $\langle a,b\rangle \longrightarrow f(x)$ strogo pada na $\langle a,b\rangle$

ali nije nužno i obrnuto (da ako $f(x)$ strogo raste da je $f'(x) > 0$)

$\hookrightarrow$ f-ja $f(x) = x^3$ $\underbrace{\langle -1, 1\rangle}$ (strogo raste)

$\langle -1, 0\rangle$ $f'(x) = 0$

$\langle 0, 1\rangle$ $f'(x) > 0$

8.2. LOKALNI EKSTREMI

Postupak:

1. Izračunamo $f'(x)$
2. Teorem 7.2.1.: Odredimo stacionarne točke funkcije f odnosno riješimo jednadžbu $f'(x)=0$
3. Nađemo tablicu monotonosti funkcije f
4. Odredimo karakter lokalnih ekstrema funkcije f

Određivanje karaktera lokalnih ekstrema iz intervala mon.

- ako $f(x)$ (strogo) raste na $\langle a,c\rangle$ i (strogo) pada na $\langle c,b\rangle$, tada je $x=c$ točka (strogog) lokalnog maksimuma od $f(x)$;
- ako $f(x)$ (strogo) pada na $\langle a,c\rangle$ i (strogo) raste na $\langle c,b\rangle$, tada je $x=c$ točka (strogog) lokalnog minimuma od $f(x)$.

Primjer: $f(x)=x^3+3x^2-9x-7$

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$0=3x^2+6x-9 \quad /:3$

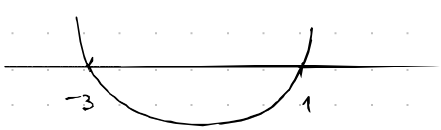
$0=x^2+2x-3$

$0=x^2+3x-x-3$

$0=x(x+3)-(x+3)$

$0=(x+3)(x-1)$

$x=-3 \qquad x=1$



	$-\infty$ ... -3	-3 ... 1	1 ... $+\infty$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

(+) (−)

$f(x)$ raste na $\langle -\infty,-3\rangle$ i $\langle 1,+\infty\rangle$ a pada na $\langle -3,1\rangle$

$x=-3$ je točka lokalnog max

$x=1$ je točka lok. min

Karakter lokalnih ekstrema iz predznaka druge deriv.

TM. Neka je $f : \langle a,b \rangle \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvaput neprekinuta diferencijab. f-ja i $x_0 \in \langle a,b \rangle$. Ako je x_0 stacionarna točka od $f(x)$, tada vrijedi:

- $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ je točka strogog lok. min od $f(x)$
- $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$ je točka strogog lok max od $f(x)$

popizdit ću od dokaza

Primjer: $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 1$

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$

$0 = -6x^2 + 6x + 12 \quad /:(-6)$

$0 = x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + x - 2$

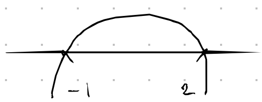
$0 = x(x-2) + (x-2)$

$0 = (x+1)(x-2)$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$

	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

$\ominus$ Min $\qquad \oplus$ Max



$f'(-1) = -6 \cdot 1 + 6 + 12 = 12 \to \boxed{T_{min}(-1, 12)}$

$f'(2) = -6 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 12 = -24 + 24 = 0 \quad \boxed{T_{max}(2, 0)}$

Da se uvjerimo:

$f''(x) = -12x + 6 \to -12 \cdot (-1) + 6 = 12 + 6 \to \min > 0$

$-12 \cdot 2 + 6 = < 0 \to \max$

TM Neka je x_0 točka u kojoj funkcija $f(x)$ ima neprekidne derivacije reda $k = 1, 2, \dots, n$ takve da je:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$\text{i } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Ako je n neparan prirodan broj, tada x_0 nije točka ekstrema.
Ako je n paran prirodan broj, tada je x_0 točka ekstrema i vrijedi:

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0 \text{ je točka lok. min od } f(x) \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0 \text{ je točka lok. max od } f(x) \end{cases}$$

Primjer: Odredimo lok. ekstreme fje $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$

$$f'(x) = (x^2-4x+5)' e^x + (x^2-4x+5)(e^x)'$$
$$f'(x) = (2x-4)e^x + (x^2-4x+5)e^x$$
$$= e^x(2x - 4 + x^2 - 4x + 5)$$
$$= e^x(x^2 - 2x + 1) = \underline{e^x (x-1)^2}$$

Stac. točke: $f'(x) = 0$

$$e^x (x-1)^2 = 0$$

$\cancel{e^x = 0}$ $\nexists$ $\quad x - 1 = 0$

$$\underline{x = 1}$$

jedna stac točka

$$f''(x) = e^x (x-1)^2 + e^x \, 2(x-1)(x-1)'$$
$$f''(x) = e^x (x-1)^2 + e^x \, 2(x-1) \cdot 1$$
$$f''(x) = e^x (x-1)((x-1)+2)$$
$$f''(x) = e^x (x-1)(x+1) = e^x(x^2-1)$$

$f''(1) = f'(1) = \underline{\underline{0}}$ $\rightarrow$ ne možemo vidjeti je li min ili max

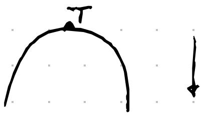
nastavljamo s deriviranjem dok ne dođemo do $f^{(n)}$ koji nije 0!

8.3. GLOBALNI EKSTREMI FUNKCIJE

DEF Za funkciju $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje je A bilo koji neprazni skup, kažemo da u točki $a \in A$ (ako postoji) ima <u>globalni maks</u> ako je $f(a) \geq f(x)$ za sve $x \in A$. Slično se definira i <u>globalni minimum</u> funkcije f. Takve točke zovu se točke <u>globalnih ekstrema</u> funkcije f.

Primjer:

funkcija $f: \langle -1, 1 \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = 1 - x^2$ ima globalni maksimum u točki $a=0$, ali nema točke globalnog minimuma.

* parabola  nema min   nisu uključeni -1 i

funkcija $g: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definirana s $g(x) = 1 - x^2$ ima i globalni maks. u $a=0$ i dvije točke glob. minimuma $a_{1,2} = \pm 1$

→ funkcija koja je neprekinuta na $[a,b]$ i strogo raste na otvorenom intervalu $\langle a,b \rangle$ nema lokalne ekstreme u $\langle a,b \rangle$.

Na rubovima intervala vrijedi:

$$f(a) = \min_{[a,b]} f(x) \qquad f(b) = \max_{[a,b]} f(x)$$

U ovakvom slučaju $x=a$ je glob. min., a $x=b$ je glob maks. od $f(x)$ na zatvorenom intervalu $[a,b]$ jer vrijedi:

$$f(a) \leq f(x), \forall x \in [a,b] \quad ; \quad f(b) \geq f(x), \forall x \in [a,b]$$

Prema tome, $x=a$ i $x=b$ su globalni ekstremi od $f(x)$ na zatvorenom intervalu $[a,b)$.

Slični primjeri: (8.9.Pr.)

$f(x) = e^x$, interval $[0,1)$ → glob maks. $x=1$

$f(x) = \sin x$ interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ → glob min $x = -\frac{\pi}{2}$ i glob maks u $x = \frac{\pi}{2}$

⇝ obje funkcije na pripadnim otvorenim intervalima nemaju glob ekstreme