8. tangenta $t \ldots y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

normala $n \ldots y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

$\Rightarrow$ ako je $f'(x_0) = 0 \Rightarrow t \ldots y = y_0$, $n \ldots x = x_0$

$f'(x_0) = tg\,\varphi$

kut među krivuljama $tg\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$ $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\hookrightarrow$ pravi kut $k_2 = \frac{-1}{k_1}$

9. implicitno zadana funkcija $F(x, y(x)) = 0$

$$y'(x) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y''(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)$$

lokalni maks. $f(a) \geq f(x)$

min. $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$

stacionarna točka $f'(a) = 0$

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

f strogo raste $f'(x) > 0$

pada $f'(x) < 0$

f raste $f'(x) \geq 0$

f pada $f'(x) \leq 0$

Taylorov polinom $T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad x_0 \in \langle a, b \rangle$$

Taylorova formula $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(Lagrangeov oblik ostatka)

$c \in \langle x_0, x \rangle$ ili $\langle x, x_0 \rangle$

pogreška aproksimacije funkcije

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$$

L'Hospitalovo pravilo $\frac{0}{0}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim \frac{e^x - 1}{x} = \lim \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$ (računaju se L'Hospitalom

L'Hospitalovo pravilo $\frac{\infty}{\infty}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

neodređeni oblik $\lim (f(x) \cdot g(x)) = (0 \cdot \infty) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right) \\ \\ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \end{cases}$

neodređeni oblik $\lim (f(x)-g(x)) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to a}\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right) f(x) =$

$$= \begin{cases} (0\cdot\infty), & \lim \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \\ \text{određeni oblik}, & \lim \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1 \end{cases}$$

neodređeni oblici $0^0, 1^\infty, \infty^0$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln(f(x))} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln(f(x))} = e^{(0\cdot\infty)} = \dots$$

npr.

	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
f'	+	−	+	
f	↗	↘	↗	

10.

$f''(x_0) > 0$ točka strogog lokalnog minimumma od $f(x)$

$f''(x_0) < 0$ točka strogog lokalnog maksimumma od $f(x)$

(x_0 - stacionarna točka)

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad ; \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ ako je n neparan, tada x_0 nije točka estrema, ako je n paran onda vrijedi

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \text{točka lokalnog minimumma od } f(x) \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \text{točka lokalnog maksimumma od } f(x) \end{cases}$$

globalni ekstremi : maks. $f(a) \geq f(x)$

min. $f(a) \leq f(x)$

za $f(x)$ kažemo da je konveksna ako je tangenta ispod grafa u svakoj točki

za $f(x)$ kažemo da je konkavna ako je u svakoj točki grafa tangenta iznad grafa ako za svaku točku na grafu vrijedi da pripadna tangenta dodiruje graf samo u diralištu, onda je $f(x)$ strogo konveksna ili konkavna

$f''(x) \geq 0$ $f(x)$ je konveksna

$f''(x) \leq 0$ $f(x)$ je konkavna

$f''(x_0) = 0$ i $f''(x)$ mijenja predznak $\Rightarrow$ x_0 je točka infleksije

$\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$ vertikalna asimptota

$\uparrow$

barem jedna a^+ ili a^-

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $l = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$

CRTANJE GRAFA

1. domena
2. ispitamo ponašanje na rubu domene (vertikalne asimptote)
3. kose (i horizontalne) asimptote
4. $f'(x)$
5. stacionarne točke od $f(x)$ $(f'(a) = 0)$
6. intervali monotonosti i karakter lokalnih ekstrema
7. izračunamo $f''(x)$
8. odredimo kandidate za točku infleksije $(f''(x) = 0)$
9. intervali konveksnosti i konkavnosti, točka infleksije
10. nacrtati sve (asimptote, točke ekstrema, infleksije, funkciju)

11. primitivna funkcija $F'(x) = f(x)$

dvije primitivne funkcije se razlikuju za konstantu

$F_2(x) - F_1(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

σ integralna suma $\qquad \sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x \qquad \Leftarrow \text{određeni integral}$$

ako $a=b$ tada $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$$\Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ ako $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

$\Rightarrow$ ako je f neprekinuta na $[a,b]$ onda je integrabilna na $[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

$$\Downarrow$$

srednja vrijednost funkcije f na $[a,b]$ $\qquad f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow$ konstrukcija primitivne funkcije pomoću određenog integrala

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad x \in [a,b]$$

vrijedi $\Phi'(x) = f(x)$

$\Rightarrow$ Newton - Leibnizova formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$\Rightarrow$ neodređeni integrali $\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

$\Rightarrow$ svojstvo linearnosti $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

$$\int 0\,dx = C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int dx = x + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

12. metoda supstitucije (neodređeni oblik)

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

$\Rightarrow$ supstitucija $\quad t = \varphi(x), \quad dt = \varphi'(x)dx$

metoda supstitucije (određeni oblik)

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

$\Rightarrow$ supstitucija $\quad t = \varphi(t), \quad dt = \varphi'(x)dx$

metoda parcijalne integracije

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

odnosno

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \quad \begin{pmatrix} u = f(x) & dv = g'(x)dx \\ du = f'(x)dx & v = g(x) \end{pmatrix}$$

metoda parcijalne integracije za određeni integral

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

odnosno

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

integrali racionalnih funkcija

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$n < m$ ⇒ prava racionalna funkcija

$n \geq m$ ⇒ neprava -||- (P_n i Q_m možemo podijeliti)

⇒ faktorizacija polinoma

1. korak - dijeljenje polinoma, ako $f(x)$ nije prava racionalna
2. korak - faktorizacija nazivnika prave racionalne funkcije
3. korak - rastav na parcijalne razlomke

⇒ ako je $(x-a)^k$ daje $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \ldots, \frac{A_n}{(x-a)^k}$

ako je $(x^2+px+q)^l$ daje $\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, \ldots, \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}$

4. korak - integracija svakog parcijalnog integrala zasebno

⇒ integrali trigonometrijskih funkcija

1. f neparna $\cos x \,/\, \sin x$ ⇒ supstitucija $t = \sin x \,/\, t = \cos x$
2. f parna $\cos x \,/\, \sin x$ ⇒ supstitucija $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

3. sinus i kosinus imaju različite argumente

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

$\Rightarrow$ univerzalna trig. supstitucija

$t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$\Rightarrow x = 2 arctg\, t$, $dx = \frac{2}{t^2+1}\,dt$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$\Rightarrow$ trigonometrijske i hiperbolne supstitucije

$\Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x = a\sin t$ $\quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\hookrightarrow = a \cdot \cos t$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow x = a\, sh\, t$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow = a \cdot ch\, t$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow x = a\, ch\, t$ $\quad t \geq 0$

$\hookrightarrow = a \cdot sh\, t$

13. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ (nepravi integral)

$\Rightarrow$ ako je limes konačan onda integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira

$\Rightarrow$ ako je limes jednak $+\infty$ i $-\infty$, ili limes ne postoji tada kažemo da integral divergira analogno se definira $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx$

$\Rightarrow$ za $a>0$

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{divergira za } p \leq 1 \\ \text{konvergira za } p > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $|f(x)| \leq |g(x)|$

- $\Rightarrow$ ako $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ konvergira onda konvergira i $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$

$\Rightarrow$ ako $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ divergira onda divergira i $\int_{a}^{b} g(x)dx$

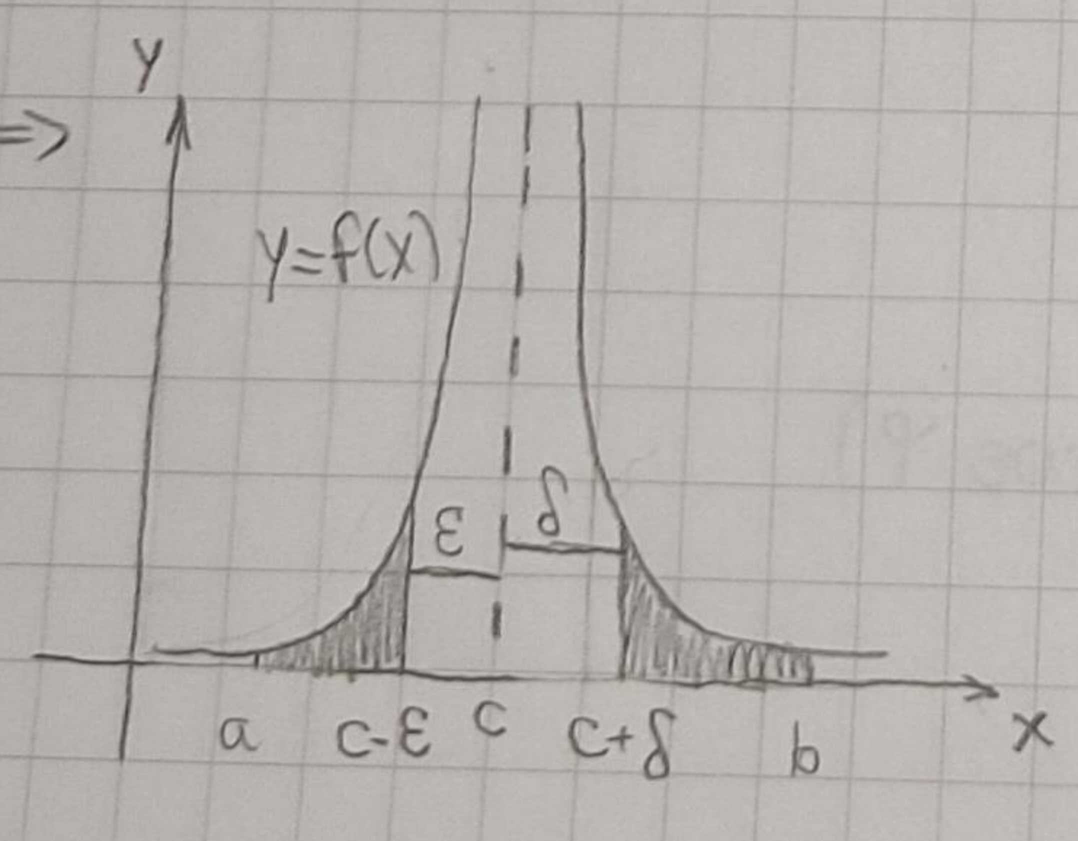
(analogno za $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ i $\int_{-\infty}^{b} g(x)dx$ te $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$

$\Rightarrow$ ako $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, $L \neq 0$

- $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ i $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ oba konvergiraju ili divergiraju

$\Rightarrow$ ako je $L=1$ onda $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \sim \int_{a}^{+\infty} g(x)dx$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ nepravi integral neomeđene funkcije

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to0^+} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$$

$\Rightarrow$ ako su oba limesa konačna nepravi integral $\int_{a}^{b} f(x)dx$ konvergira, ako bilo koji limes nije konačan ili ne postoji $\int_{a}^{b} f(x)dx$ divergira

$\Rightarrow$ ako $c = a$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$

$c = b$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$

$\Rightarrow$ treba provjeravati (ne) omeđenost funkcije

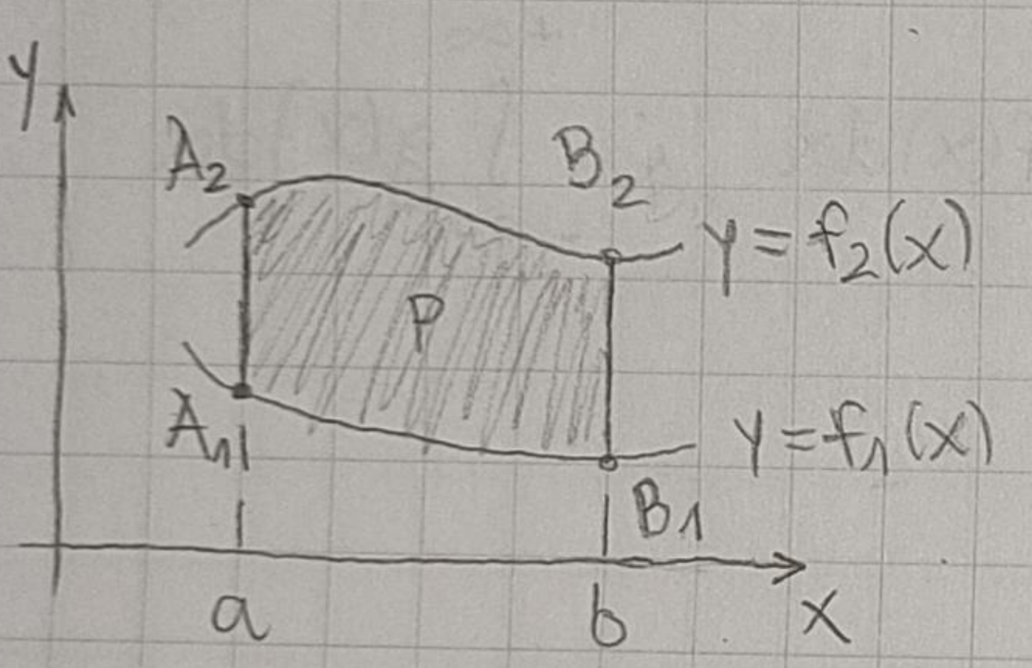
$\Rightarrow$ za $a > 0$ $\quad \int_0^a \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{konvergira za } p < 1 \\ \text{divergira za } p \geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$, neomeđen u $c \in [a,b]$

ako postoji $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, $L \neq 0$ i konačan je,

onda $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju

14.



$$P = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}$ polarne koordinate (r, φ)

$\Rightarrow$ Arhimedova spirala $\quad r = a\varphi$

Kardioda (krivulja u obliku srca) $\quad r = a(1 + \cos\varphi)$

Bernoullijeva lemniskata $\quad r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$

$$V = \int_a^b P(x)\,dx \quad \text{(volumen)}$$

⇒ volumen rotacijskog tijela oko osi x

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$$

⇒ volumen rotacijskog tijela oko osi y

$$V = 2\pi \int_a^b x\,y(x)\,dx$$