Međuispit iz Matematičke analize 1
25.11.2020.

Ime i prezime: ______________________________
JMBAG: ____________________

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.
Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: ____________________

---

1. (**8 bodova**)
   (a) (**5b**) Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi
   $$\arg(z^4) = \pi \qquad \text{i} \qquad |z + i + 1| = 1.$$
   (b) (**3b**) Neka su $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zadani u trigonometrijskom obliku
   $$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad \text{i} \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$
   Izvedite formulu za produkt $z_1 \cdot z_2$ u trigonometrijskom obliku.

2. (**8 bodova**)
   (a) (**3b**) Mara, Luce, Kata i Franka često izlaze van zajedno s Dadom, Tomom, Mariom, Lukom, Ivanom i Hrvojem. Svaka od djevojaka iz društva odabire jednog dečka za ples. Na koliko načina se to može napraviti?
   (b) (**2b**) Želimo dizajnirati zastavu koja se sastoji od tri horizontalne trake tako da dvije susjedne trake nisu iste boje. Koliko različitih zastava možemo dizajnirati ako raspolažemo s crvenom, zelenom, plavom, žutom, crnom i bijelom bojom?
   (c) (**3b**) Odredite koliko ima peteročlanih podskupova skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ koji sadrže barem jedan neparan broj.

3. (**9 bodova**) Funkcija f zadana je pravilom pridruživanja
   $$f(x) = A\cos(3x + b) + c.$$
   (a) (**4b**) Odredite realne brojeve A, b i c, pri čemu su $A, b > 0$, takve da funkcija $f : \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \to [0, 4]$ bude bijekcija.
   (b) (**2b**) Skicirajte graf funkcije f iz (a) dijela zadatka.
   (c) (**3b**) Odredite inverznu funkciju funkcije f iz (a) dijela zadatka te skicirajte graf inverzne funkcije.

OKRENITE STRANICU!

4. (**8 bodova**)

   (a) (**4b**) Niz (a_n) zadan je općim članom $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Zapišite tvrdnju

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

   koristeći definiciju limesa niza. Za zadani $\varepsilon = 10^{-10}$, odredite neki pripadni $n_0 \in \mathbb{N}$ iz definicije limesa niza.

   (b) (**3b**) Definirajte gomilište niza u skupu realnih brojeva. Odredite sva gomilišta niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadanog s

   $$b_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right), & \text{za } n \text{ paran,} \\ 2 \cdot (-1)^n + \frac{1}{n^2}, & \text{za } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

   (c) (**1b**) Je li niz $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan s $c_n = b_{2n-1}$ konvergentan? Obrazložite.

5. (**9 bodova**)

   (a) (**3b**) Skicirajte graf neke funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi sljedeće:

   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0^+ \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

   (b) (**2b**) Navedite nužan i dovoljan uvjet da funkcija f ima limes u $x = a$. Ima li funkcija f iz (a) dijela zadatka limes u $x = 1$?

   (c) (**4b**) Izračunajte sljedeće limese:

   (c1) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x+2}$,

   (c2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Big[\ln(5x^2 + x) - \ln(2x^2 + 1)\Big] \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

6. (**8 bodova**)

   (a) (**3b**) Koristeći definiciju derivacije izračunajte $(\ln x)'$.

   (b) (**2b**) Neka je $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija takva da za svaki $x \in I$ vrijedi $f'(x) \neq 0$. Nadalje, neka f ima inverznu funkciju f^{-1}. Izvedite $(f^{-1})'$ pomoću f'.

   (c) (**3b**) Izvedite formulu

   $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Napomena: Ispit se piše **120 minuta**.