MATEMATIČKA LOGIKA

<u>Definicije</u> = opisuju matematički pojam

<u>Teoremi</u> = iskazuju pretpostavke i tvrdnje teorema koja vrijedi ako su zadovoljene pretpostavke

TEOREM
PRETPOSTAVKE ⟹ TVRDNJA

Lema, Propozicija = manji teorem

Korolar = posljedica teorema

* Pitagorin teorem

<u>Dokaz teorema</u> = log. zaključivanjem se obj. kako iz pretpostavki slijedi tvrdnja

→ mi znamo što trebamo dobiti i to nam olakšava

<u>Formule ili Metode</u> = postupci tj. određenog problema

↳ izvodi formula i metoda – dobivanje formula

1. 31. SUDOVI

SUD = tvrdnja za koju se može utvrditi je li istina (T) ili laž (F)

$2+3=5$ (T) $\qquad 2>5$ (F)

Operacije sa sudovima:

x, y – sudovi

1. NEGACIJA: $\neg x$ (ne x, nije x)
2. KONJUNKCIJA: $x \wedge y$ = x i y
3. DISJUNKCIJA: $x \vee y$ = x ili y
4. IMPLIKACIJA: $x \Rightarrow y$ = x; y
   (iz x slijedi y)
   (ako je x onda je y)
   (x je dovoljan uvjet za y)
   (y je nužan uvjet za x)

   ako y ne vrijedi, znači da ni x ne vrijedi

5. EKVIVALENCIJA: $x \Leftrightarrow y$

   $x \Leftrightarrow y \equiv (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$ — $\equiv$ ekvivalentne tvrdnje

- x je ekvivalentno s y
- x vrijedi ako i samo ako vrijedi y
- x je nužan i dovoljan uvjet za y

tablice istinitosti

kada su oni isk. istinitosti

x	$\neg x$
T	F
F	T

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

Primjer) Napišite tablicu istinitosti za sud $\neg(x \wedge \neg y)$

x	y	$\neg y$	$x \wedge \neg y$	$\neg(x \wedge \neg y)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

$$\neg(x \wedge \neg y) \equiv x \to y$$

DE MORGANOVE FORMULE

$$\neg(\neg x) \equiv x$$

$$\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$$

$$\neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y$$

$$\neg(x \Rightarrow y) \equiv x \wedge \neg y$$

$(x \Rightarrow y) \equiv (\neg y \Rightarrow \neg x)$ (dokaz po kontrapoziciji)

$\hookrightarrow$ $(x = 5 \Rightarrow x^2 = 25) \equiv (x^2 \neq 25 \quad x \neq 5)$

Logički kvantifikatori : $\forall$ i $\exists$

$\forall_x$ za svaki, za sve x

$\exists_x$ postoji (barem jedan) x

$\exists!_x$ postoji jedinstveni (točno jedan) x

Predikat

$P(x)$ = tvrdnja koja ovisi o x zove se **predikat**

↳ za neku fiksnu vrijednost x predikat postaje sud

Primjer:

$$P(x) : x > 2$$

Za $x = 4$ postaje istinit sud $P(4) : 4 > 2$

a za $x = 1$ postaje lažan $P(1) : 1 > 2$

→ Tvrdnja koja se sastoji od kvantifikatora i predikata je isto sud

$\forall x \; P(x)$ za svaki x vrijedi $P(x)$

$\exists x \; P(x)$ postoji x za koji vrijedi $P(x)$

$\exists! x \; P(x)$ postoji točno 1 x za koji vrijedi $P(x)$

Primjer:

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad x^2 \geq 0 \quad$ T

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad x^2 = 2 \quad$ F

$\exists_{x \in \mathbb{R}} \quad x^2 = 2 \quad$ T

De Morganove formule za $\forall$ i $\exists$

1. $\neg(\forall_x P(x)) \equiv \exists_x \neg P(x)$
2. $\neg(\exists_x P(x)) \equiv \forall_x \neg P(x)$

Pr: $\neg(\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x^2=2) \equiv \exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2\neq 2$ F

$\neg(\exists_x \in \mathbb{Q}\ x^2=2) \equiv \forall_x \in \mathbb{Q}\ x^2\neq 2$ F

$P(x,y)$ - predikat s dvije varijable je tvrdnja koja ovisi o x i y

→ tvrdnja koja ovisi o x i y

Pr: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ x<y$ T

Zadatak 1.)

a) $(\forall_x \in \mathbb{R})(\exists_y \in \mathbb{R})(x+y=0)$ T

b) $(\exists_x \in \mathbb{R})(\forall_y \in \mathbb{R})(x+y=y)$ T

c) $(\forall_x \in \mathbb{N})(\exists_y \in \mathbb{N})(x=y^2)$ F

za $x=2$ $\quad \exists_y \in \mathbb{N}\quad y^2=2$

$(\exists_x \in \mathbb{N})(\forall_y \in \mathbb{N})\ (x\neq y^2)$ T

d) $(\forall_x \in \mathbb{R})(\exists_y \in \mathbb{R})(2x^2=y^2+1)$ F

$(\exists_x \in \mathbb{R})(\forall_y \in \mathbb{R})\ (2x^2\neq y^2+1)$

za $x=0$ $\quad 2\cdot 0 \neq y^2+1$

$-1\neq y^2$

Domaća zadaća

Zadatak:

$$A \equiv (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 = xy \Rightarrow x = y)$$

$$B \equiv (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$$

Negirajte svaki od danih sudova te ih zapišite ne koristeći znak negacije.

Koji je od sudova istinit: A ili $\neg A$, B ili $\neg B$?

$$\neg A \equiv \neg\left[(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 = xy \Rightarrow x = y)\right]$$

$$\equiv (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ \neg\left[(x^2 = xy) \Rightarrow (x = y)\right]$$

$$\equiv (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 = xy \wedge \neg(x = y))$$

$$\equiv (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\left[(x^2 = xy) \wedge (x \neq y)\right]$$

Za $x = 0$ bez obzira na y,

$0 = 0 \cdot y$ to je $0 \rightarrow$ $\neg A$ vrijedi

A nije istinit

$$\neg B \equiv \neg\left[(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((x < y) \Rightarrow (x^2 < y^2))\right]$$

$$\equiv (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\left[(x < y) \wedge (x^2 > y^2)\right]$$

1. $x = -5 \quad y = -2$

$-5 < -2$

$25 > 4$

2. $x = 3 \quad y = 7$

$9 \not> 49$

$\boxed{\neg B \text{ vrijedi } \forall x \in \langle -\infty, 0 \rangle}$

MATEMATIČKI DOKAZI I METODE DOKAZIVANJA

Mat dokazi

- logičko mat postupak kojim se pomoću poznatih tvrdnji potvrđuje ili opovrgava neka nova tvrdnja

Tvrdnje : implikacije $A \Rightarrow B$

ekvivalencije $A \Leftrightarrow B$

Neke metode dokazivanja

1. izravan dokaz

Pr.: Ako su a i b parni brojevi, tada je i a+b paran broj $(a, b \in \mathbb{N})$

DOKAZ:

$$a = 2k \quad k \in \mathbb{N}$$
$$b = 2l \quad l \in \mathbb{N}$$

$$a+b = 2k + 2l = 2(k+l)$$

$\Rightarrow$ a+b je paran broj

2. Pravilo kontrapozicije

$$(A \to B) \equiv (\neg B \to \neg A)$$

$n \in \mathbb{N}$

Pr. Ako je n^2 paran broj, tada je i n paran broj

DOKAZ:

n^2 paran $\Rightarrow n$ paran $\equiv$ n neparan $\to n^2$ neparan

n neparan: $n = 2k+1 \quad /^2$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$n^2 = 2(k^2+k)+1 \longrightarrow$ 2 put nešto +1 to je neparan broj

3. Kontradikcija → dokazujemo suprotno

↳ negiramo početnu tvrdnju

PR Dokažite $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

A - poč. tvrdnja

pretpostavimo suprotno tj. da vrijedi $\neg A$

$\neg A \to \quad \to \quad \Rightarrow F \equiv T$

Dobili smo kontradikciju iz koje slijedi da je $\neg A$ lažna tvrdnja. Dakle, A je istinita tvrdnja!

4. Opovrgavanje tvrdnje kontra primjerom

Tvrdnju oblika "Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi..." opovrgavamo kontraprimjerom tj. nađemo x za koji tvrdnja ne vrijedi.

Pr. Produkt svaka dva iracionalna broja je iracionalan broj.

Nije istina

$x = \sqrt{2}$ $\quad xy = 2$

Potvrđivanje: $y = \sqrt{2}$