10.2. OSNOVNI TEOREMI DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA

$\boxed{\text{TM}}$ Teorem srednje vrijednosti integralnog računa

· povezuje diferencijalni i integralni račun

→ Lagrangeov teorem srednje vrijednosti:

Za neprekinutu i diferencijabilnu fju f na intervalu $[a,b]$ je $c \langle a,b \rangle$

→ $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

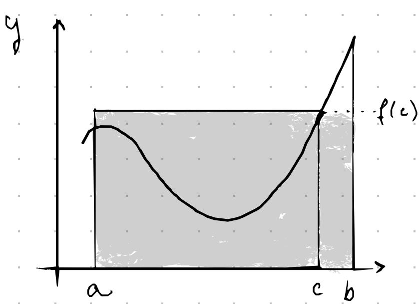
→ tangenta na krivulju u točki c ima koeficijent smjera isti kao sekanta kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$

analogno je i u integralnom računu

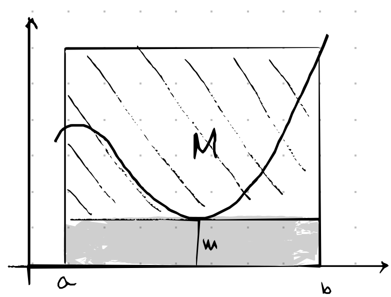
⇒ f je neprekinuta na $[a,b]$. postoji $c \in \langle a,b \rangle$ tka:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)}$$

$\int_a^b f(x)dx$ predstavlja površinu P ispod grafe



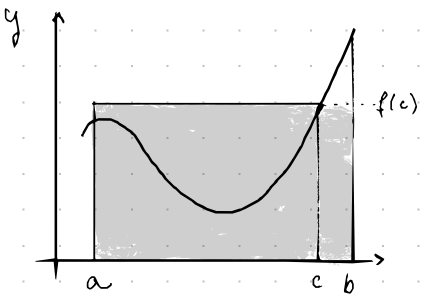
pravokutnik površine $f(c) \cdot (b-a)$

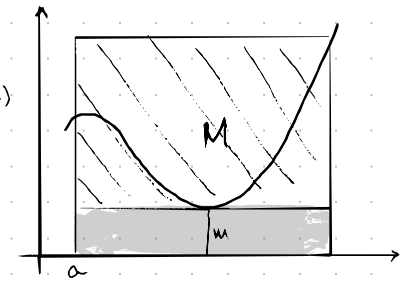


→ ispada da je sivo lijevo jednako sivom desno ? ?

NAP: $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ => srednja vrijednost funkcije f na intervalu $[a,b]$

DOKAZ:





minimalna:

$$m = \min_{[a,b]} f(x)$$

maksimalna

$$M = \max_{[a,b]} f(x)$$

m je najmanja P

M je najveća P

$$\rightarrow \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad / :(b-a)$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M \longrightarrow \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \in [m, M]}$$

Znači $f([a,b]) = [m,M]$ prema tome, f je nešto iz $[m,M]$.

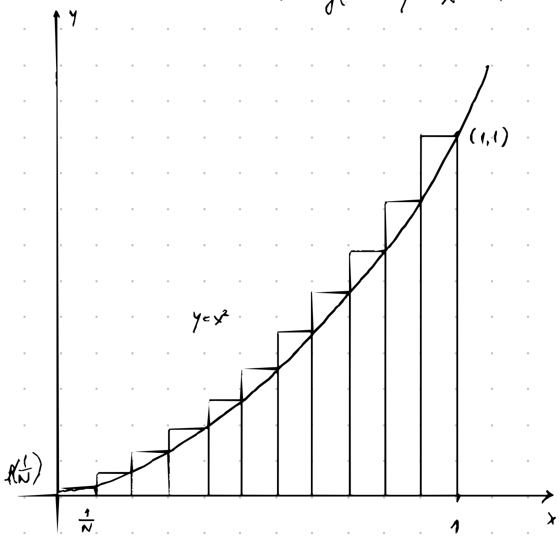
Dakle postoji $c \in \langle a,b \rangle$ za koji će $f(c)$ biti $\dfrac{\int_a^b (f(x))\,dx}{b-a}$

Lakše je shvatiti na primjeru

Primjer 10.6.) Odredimo srednju vrijednost funkcije $f(x)=x^2$ na intervalu $[0,1]$. Za koji $c \in \langle 0,1\rangle$ se ona postiže?

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

$\int_0^1 x^2 dx$ - vrijednost tog integrala predstavlja površinu ispod krivulje $y=x^2$ na intervalu $[0,1]$



$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

* suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednaka je

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \frac{n}{6n^3}(n+1)(2n+1)$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2+2n^2+n}{6n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n \;/:n^3}{6n^3 \;/:n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} \quad \frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\to 0 \quad = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad [a,b]=[0,1]$$

$$\underbrace{\int_a^b x^2 dx}_{\frac{1}{3}} = f(c)\underbrace{(b-a)}_{1-0} \longrightarrow \frac{1}{3}=f(c)$$

$$\frac{1}{3}=c^2 \rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \in [0,1]}$$

$$\rightarrow \cancel{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Newton-Leibnizova formula

* vrijednost određenog integrala ne ovisi o nazivu varijable $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

→ primjer integrala u kojem je gornja granica varijabilna:

$$\int_a^{x} f(t)\,dt$$ (t je varijabla integracije)

↳ $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$

$\boxed{\text{TM}}$ Konstrukcija primitivne funkcije pomoću određenog integrala

f je neprekinuta fja na $[a,b]$ ⟶ $\boxed{\phi(x) = \int_a^x f(t)dt \ , \ x \in [a,b]}$

tada je fja diferencijabilna na $\langle a,b \rangle$

i vrijedi $\underline{\underline{\phi'(x) = f(x)}}$.

⇒ određeni integral $\int_a^x f(t)dt$ je primitivna funkcija od svoje podintegralne funkcije s obzirom na gornju granicu integracije

↳ $$\underline{\underline{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)}}$$

DOKAZ:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} \qquad * \; \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} \qquad * \, 10.1$$

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

primjenjiv teorem srednje vrijednosti

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c_x)\cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c_x)\cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \begin{pmatrix} \Delta x \to 0 \\ \Rightarrow c_x \to x \end{pmatrix} = \lim_{c_x \to x} f(c_x) = f(x)$$

Primjer 10.7.) Neka je $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$. Odredite $S'(x)$ i $S''(x)$.

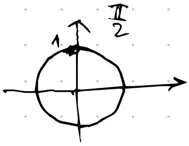
Prema prošlom teoremu $\Phi'(x) = f(x)$ $\quad \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$S'(x) = f(x)$

$S'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$

$S'(1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)$

$S'(1) = 1$



$S''(x) = (S'(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)\right)'$

$S''(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} x$

$S''(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) \cdot \pi \cdot x$

$S''(1) = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} \cdot \pi \cdot 1$

$S''(1) = 0$

TM Newton-Leibnizova formula

Neka je f neprekinuta funkcija na $[a,b]$, te neka je $F(x)$ bilo koja primitivna f-ja od $f(x)$ na $[a,b]$. Tada je:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

DOKAZ: prema prošlom teoremu $\int_a^x f(t)\,dt$ je prim f-ja od $f(x)$ pa vrijedi $\Phi(x) = F(x) + C$ (dvije prim f-je se razlikuju za C)

Za $x = a$:

$$\Phi(x) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \implies F(a) + C = 0$$

$$F(a) = -C \longrightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a)$$

Za $x = b$ imamo:

$$\Phi(b) = F(b) - F(a) \quad i \quad \Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

*

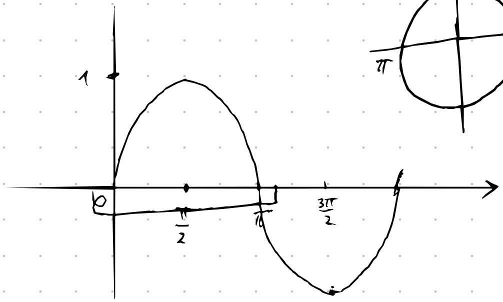
veza određenog integrala i površine ispod grafa f-je $f(x)$ i njene primitivne f-je vidljiva je iz geomet. interpret. TM 10.2.2.

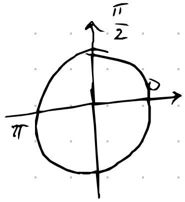
$P(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ (povr. lika $[a,x]$) $\xrightarrow{\text{poveća li se } x \text{ za } \Delta x}$ $P(x+\Delta x) = P(x) + \Delta P \rightarrow P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x)$

* P je funkcija od x koja je f...

Primjer 10.9.) Izračunajte površinu ispod prvog luka sinusoide $f(x) = \sin x$

$[0, \pi]$ $\qquad$ $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$





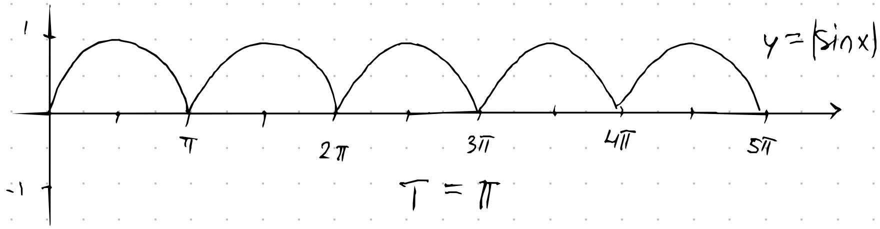
$$P(x) = \int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi}$$

$$P(x) = \underbrace{-\cos(\pi)}_{-\cdot(-1)} + \underbrace{\cos(0)}_{+1}$$

$$\boxed{P(x) = 2}$$

Primjer 10.10.) $\int_0^{5\pi} |\sin x|\,dx$



$T = \pi$

$$P(x) = \int_0^{5\pi} |\sin x|\,dx \longrightarrow 5\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 5\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 5\Big(\underbrace{-\cos(\pi) + \cos(0)}_{2}\Big) = \boxed{10}$$