7.1. DERIVACIJA IMPLICITNO I PARAMETARSKI ZADANIH FUNKCIJA

Sjeti se:

$y = ax + b$ → eksplicitno zadavanje funkcije

$ax - y + b = 0$ → implicitno zadavanje funkcije

svaka eksplicitno zadana fja se može zapisati implicitno
↳ ali ne može se svaka implicitno zadana napisati eksplicitno !

DEF Za funkciju realne varijable $y = y(x)$ kažemo da je <u>implicitno</u> zadana ako je zadana jednadžbom:

$\boxed{F(x, y(x)) = 0}$ gdje je F realna fja dviju varijabli

Postupak derivacije → OPĆENITI POSTUPAK ZA y' i y''

1. napisati jednadžbu i onda cijeli izraz derivirati po x pri čemu je $y = f(x)$ $\left(\frac{d}{dx}\right)$

   npr. $y^2 = x \xrightarrow[\text{po } x]{\text{deriviram}} x = y^2 = \underline{2y \cdot y'}$

2. iz dobivene jednadžbe izlučimo y'

* 3. Može nas tražiti da još deriviramo → druga deriv $[f''(x)]$

   • u dobiveni izraz ubacimo y'

   * $f'' = (f')'$

* 4. Ako tražimo $y'(x_0)$ u točki $T(x_0, y_0)$ koja se nalazi na funkciji $y = y(x)$ (tj. $y_0 = y(x_0)$) tada u dobiveni izraz za $y'(x)$ uvrstimo koordinate za x_0 i y_0

* $\frac{d}{dx}$ – koristimo kada funkcija nije eksplicitno izražena

↳ $\frac{dy}{dx}$ nam govori kako se promijenio y s obzirom na mijenjanje x → ako nemamo izražen y preko x, ne koristimo $\frac{dy}{dx}$

Primjer 1.) Izračunajte y' i y'' fije zadane implicitno s
$y^2 - y = 1 + x - 2x^2$

$$1 + x - 2x^2 - y^2 + y = 0 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$ — derivacija po x

$$0 + 1 - 2\cdot 2x - 2y\cdot y' + y' = 0$$

bitno → y'

$$-2y\cdot y' + y' = 4x - 1$$

$$y'(-2y+1) = 4x - 1$$

$$\boxed{y' = \frac{4x-1}{-2y+1}}$$

$$\Downarrow \qquad y'' = ?$$

$$y'' = (y')'$$

$y = y(x)$

$$y'' = \left(\frac{4x-1}{-2y+1}\right)' = \frac{(4x-1)'(-2y+1) - (4x-1)(-2y+1)'}{(-2y+1)^2}$$

* U koracima pogledaj: u deriviranom izrazu uvrstimo y'

uvrstimo

$$y'' = \frac{4(1-2y) - (4x-1)\cdot(-2)\,y'}{(-2y+1)^2} = \frac{4(1-2y) - 2y'(1-4x)}{(1-2y)^2}$$

$$y'' = \frac{4(1-2y) - 2\cdot\left(\frac{4x-1}{1-2y}\right)(1-4x)}{(1-2y)^2}$$

$$y'' = \frac{4(1-2y) + 2\frac{(4x-1)^2}{(1-2y)}}{(1-2y)^2} = \frac{\frac{4(1-2y)^2 + 2(4x-1)^2}{1-2y}}{(1-2y)^2}$$

$$\boxed{y'' = \frac{4(1-2y)^2 + 2(4x-1)^2}{(1-2y)^3}}$$

DEF Derivacija parametarski zadanih fija

Za fiju kažemo da je parametarski zadana ako postoje φ i $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ takve da funkcijski zavisne varijable možemo opisati jednadžbama:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [a, b] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ parametrizacija funkcije $y = g(x)$

* zbog jednostavnijeg označavanja koristimo i $x = x(t)$ i $y = y(t)$; $t \in [a, b]$.

* Nejedinstvenost parametrizacije

$\hookrightarrow$ svaka fija $y = y(x)$ koja je zadana eksplicitno može se jednostavno parametrizirati sa:

$$x(t) = t \; ; \; y(t) = y(t)$$

$$\Downarrow$$

npr.

$$y = x^2 \to x(t) = t \; ; \; y(x) = t^2$$

$\Rightarrow$ za $y = \sqrt{1 - x^2}$ je to nepraktično tako

ali može se:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

$$y(t) = \sqrt{1 - x^2} \longrightarrow \sin(t) = \sqrt{1 - \cos(t)}$$

SJETI SE:

$\rightarrow$ parametarski zadane jednadžbe u LinAlg imaju ono λ, a, t, p, neko tako stanje

$\longrightarrow \lambda x_1 + t x_2 + 2 \lambda x_3 = 8$ to su ti parametri

KAKO IZRAČUNATI y' i y'' ako je f-ja parametarski zadana?

$x = x(t)$, $y = y(t)$; $t \in [a, b]$

Pravilo za $y'(x)$ i $y''(x)$

* deriviramo

(1.) $$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

(2.) $$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)$$

$$= \frac{1}{\dot{x}(t)} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \frac{1}{\dot{x}(t)} \cdot \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^2}$$

derivacija razlomka

$$y''(x) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3}$$

* (3.) Ako je potrebno izračunati vrijednost od $y'(x)$ i $y''(x)$ u zadanoj točki $T(x_T, y_T)$, tada u prethodne izraze umjesto varijable $x = x_T$ i $y = y_T$ uvrštavamo odgovarajući parametar $t = t_T$ takav da je

$$x_T = x(t_T) \quad i \quad y_T = y(t_T)$$

ZAKLJUČAK:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \cdot \frac{d}{t}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)$$

Primjer) Za funkciju $y(x)$ koja je parametarski zadana jednadžbama $x(t) = 4t + 2$; $y(t) = 2e^t + 3$, vrijednost prve i druge derivacije u točki $T = (x_T, y_T)$ za koju je $t = 2$ (odnosno $T = (x(2), y(2))$) iznose:

$$y'(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \left(\frac{(2e^t+3)'}{(4t+2)'}\right) = \frac{2e^t}{4}$$

$$\boxed{y'(t) = \frac{e^t}{2}}$$

→ to je to zapravo

$$\longrightarrow \; y'(2) = \frac{e^2}{2}$$

$$y''(t) = \frac{1}{\dot{x}(t)} \cdot \frac{d}{d(t)}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3}$$

$$y''(t) = \frac{\left(\frac{e^t}{2}\right)' \cdot 4 - \left(\frac{e^t}{2}\right) \cdot (4)'}{(4)^3} = \frac{\frac{2e^t}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} - 0}{16}$$

$$y''(t) = \frac{2e^t}{16} \longrightarrow \boxed{y''(t) = \frac{e^t}{8}} \Longrightarrow y''(2) = \frac{e^2}{8}$$

Za $y''(t)$ treba biti oprezan jer u mnogim slučajevima vrijedi $y''(t) \neq \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)$

Primjer: Fja je zadana parametarski s $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = t^2 - t + 1 \end{cases}$

↳ odredite y' u $T(0,1)$

$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{(t^2-t+1)'}{(t\ln t)'} = \frac{2t-1}{\underbrace{t'\ln t}_{\ln t} + \underbrace{t\cdot(\ln t)'}_{\frac{t}{t}}} = \frac{2t-1}{\ln t - 1}$$

$x = t\ln t \Rightarrow 0$

$y = t^2 - t + 1 \Rightarrow 1$

$t \cdot \ln t = 0$ — $t = 0$; $\ln t = 0$, $e^0 = t \rightarrow t = 1$

$t^2 - t + \cancel{1} = \cancel{1}$

$t^2 - t = 0$

$t(t-1) = 0$

$t = 0 \quad t = 1$