9.1. PRIMITIVNA FUNKCIJA I NEODREĐENI INTEGRAL

* kada se prof malo izgubio i skrenuo (8. lekcija), radio je uvod na ove temu

DEF f-ja f definirana na intervalu $I = \langle a,b \rangle \subseteq \mathbb{R}$

Funkcija F je primitivna funkcija od f ako za svaki $x \in I$ vrijedi $\boxed{F'(x) = f(x)}$.

* drugi naziv: antiderivacija

PR: $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

primitivna funkcija $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3}$

$F_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 3$

$F_c(x) = \frac{x^3}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$

↳ ima beskonačno mnogo prim f-ja jer je $c \in \mathbb{R}$

PR: $f(x) = \sin(2x)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = -\cos(2x) \cdot \frac{1}{2}$

$F'(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot 2 = \sin(2x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$F_c(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, $F_c'(x) = \sin(2x)$

$G(x) = \sin^2(x) \Rightarrow G'(x) = 2 \sin(x) \cos x = \sin(2x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{TM}}$ Neka je $f: I \to \mathbb{R}$

1) Ako je $F_1 : I \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija od f na I, tada je i $F_2 : I \to \mathbb{R}$, t.d. $F_2(x) = F_1(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$ također primitivna funkcija od f na I.

2.) Neka su $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije od f na I. Tada postoji konstanta $C \in \mathbb{R}$ t.d. vrijedi $\boxed{F_2(x) - F_1(x) = C}$, $\forall x \in I$.

Dokaz 1. Neka je $F_1 : I \to \mathbb{R}$ primitivna f-ja od f na I.

Definiramo $F_2 : I \to \mathbb{R}$ t.d. $F_2(x) = F_1(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

računamo $\boxed{F_2'(x) = (F_1(x) + C)' \Rightarrow F_1'(x) \Rightarrow f(x)}$ $\forall x \in I$.

2.) F_1 i F_2 primitivne od f na I definiramo $G : I \to \mathbb{R}$;

$G(x) := F_2(x) - F_1(x)$, $x \in I$.

računamo $G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = F_1'(x) - F_1'(x) = \underline{\underline{0}}$, $\forall x \in I$.

$\boxed{G'(x) = 0}$, $\forall x \in I$ } derivacija konstante je 0

$\to$ tada $\exists\, C \in \mathbb{R}$ td $G(x) = C$

$\hookrightarrow$ posljedica Langrangeovog teorema srednje vrijednosti (LTSV)

* Langrang TSV — * ovo je neka f-ja g, nema veze sa G(x)

$g(x) : I \to \mathbb{R}$; $g'(x) = 0$ $\forall x \in I$

$x, y \in I$ $(x < y)$ $\xRightarrow{\text{LTSV na } [x,y)}$ $\exists\, c \in \langle x, y \rangle$ $g'(y) - g(x) = g(c)(y - x) \Rightarrow \underline{\underline{g(y) = g(x)}}$

PRIMJERI I ZADACI:

Pr. 1)

$f(x) = 2x + e^x$

$2 \cdot x^{n-1}$

$F'(x) = f(x) \longrightarrow F(x) = x^2 + e^x$ jer ostaje isto $+ C$ jer ide u $\emptyset$

$\longrightarrow$ skup svih primitivnih f-ja je $\{x^2+e^x+c \,;\, c \in \mathbb{R}\}$

može ostat

VJ 9.1.) $f(x) = 5 + 3\cos x - e^{2x}$

$5 \cdot x^1$ $\sin x$ $-e^{2x} = -e^{2x} \cdot (2x)'$

$-e^{2x} \cdot 2$

$F(x) = 5x + 3\sin x - e^{2x}$?

ma bezveze

9.1.1. Neodređeni integral

DEF Neodređeni integral funkcije f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je skup svih primitivnih funkcija od f na $\langle a,b\rangle$.

Označavamo sa:

$$\int f(x)\,dx$$

oznaka integracije

podintegralna funkcija

diferencijal argumenta (oznaka varijable integracije)

* u 10.1. više o tome

* TM 9.1.1. dvije primit. fje se razlikuju za konstantu (c)

ako je neka $F(x)$ primitivna od $f(x)$ $\Longrightarrow$ $\int f(x)\,dx = \{F(x)+c : c \in \mathbb{R}\}$

kraći zapis: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Primjer:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

x^2 0

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

e^x 0

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

0

navedeni integrali su definirani na svim intervalima $I \subseteq \mathbb{R}$

dok je npr neodređeni integral

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

definiran na $\langle -\infty, 0\rangle$ ili $\langle 0, +\infty\rangle$

$\Longrightarrow$ domena integralne funkcije je $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

TM 9.1.2 Za neodređeni integral vrijedi

1) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$

2) $\int f'(x)\,dx = f(x)+C$

DOKAZ: * Fx je primitivna f-ja od f(x)

① $$\frac{d}{dx}\left(\underbrace{\int f(x)\,dx}_{F(x)+c}\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x)+C\right) = F'(x)+0 = f(x) \checkmark$$

② deriviranjem desne strane pokažemo:

$$(f(x)+C)' = f'(x)+0 = f'(x)$$

$\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$

TM. Svojstvo linearnosti

$$\int\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Primjer: $\int\left(\frac{(1+\sqrt{x})^2}{x^2}\right)dx = \int\frac{1+2\sqrt{x}+x}{x^2}\,dx$ $\qquad x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-2} = x^{-3/2}$

$$= \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{x^2}+\frac{x}{x^2}\right)dx = \int\frac{1}{x^2}\,dx + \int\frac{2\sqrt{x}}{x^2}\,dx + \int\frac{x}{x^2}\,dx$$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$= \int\frac{1}{x^2}\,dx + 2\int x^{-3/2}\,dx + \int\frac{1}{x}\,dx$$

$-2\cdot\frac{1}{2}\,x^{-1/2}$

$$= \boxed{-\frac{1}{x} + 2\cdot\left(-2\cdot x^{-1/2}\right) + \ln x + C}$$

$x^{-1} = \ln x$

primitivna f-ja