$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, znamo f' (derivirati)

↳ $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Koja funkcija derivirana daje f.?

<u>DEF</u> | $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, funkcija $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$ zove se <u>primitivna funkcija</u> funkcije f na I.

* ANTIDERIVACIJA

<u>PR</u>: $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

primitivna funkcija $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$

$F_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3$

$F_c(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$

↳ ima beskonačno mnogo prim. f-ja jer je $c \in \mathbb{R}$

<u>PR</u>: $f(x) = \sin(2x)$, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = -\cos(2x) \cdot \dfrac{1}{2}$

$F'(x) = \dfrac{1}{2} \sin(2x) \cdot 2 = \sin(2x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$F_c(x) = -\dfrac{1}{2} \cos(2x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, $F_c'(x) = \sin(2x)$

$G(x) = \sin^2(x) \Rightarrow G'(x) = 2 \sin(x) \cos x = \sin(2x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{TM}}$ Neka je $f: I \to \mathbb{R}$

1) Ako je $F_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija od f na I, tada je i $F_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, t.d. $F_2(x) = F_1(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ također primitivna funkcija od f na I.

2.) Neka su $F_1, F_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije od f na I. Tada postoji konstanta $C \in \mathbb{R}$ t.d. vrijedi
$\boxed{F_2(x) - F_1(x) = C}$, $\forall x \in I$.

Dokaz 1.) Neka je $F_1 : I \to \mathbb{R}$ primitivna f-ja od f na I.

Definiramo $F_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ t.d. $F_2(x) = F_1(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

računamo $\boxed{F_2'(x) = (F_1(x) + C)' \Rightarrow F_1'(x) \Rightarrow f(x)}$ $\forall x \in I$.

2.) F_1 i F_2 primitivne od f na I definiramo $G : I \to \mathbb{R}$;

$G(x) := F_2(x) - F_1(x)$, $x \in I$.

računamo $G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = F_1'(x) - F_1'(x) = \underline{\underline{0}}$, $\forall x \in I$.

$\boxed{G'(x) = 0}$, $\forall x \in I$

$\longrightarrow$ tada $\exists C \in \mathbb{R}$ t.d. $G(x) = C$ } derivacija konstante je 0

↳ posljedica Langrangeovog teorema srednje vrijednosti (LTSV)

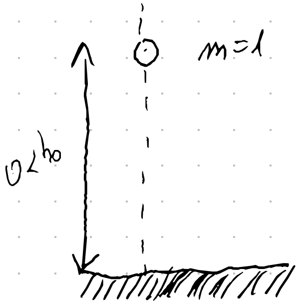
* Langrang TSV — * ovo je neka f-ja g, nema veze sa $G(x)$

$g(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $g'(x) = 0$ $\forall x \in I$

$x, y \in I$ $(x < y)$ $\xRightarrow{\text{LTSV na } [x,y)}$ $\exists c \in \langle x, y \rangle$ $g'(y) - g(x) = g(c)(y - x) \Rightarrow \underline{\underline{g(y) = g(x)}}$

Krećemo s mrkvom

$m\vec{a} = \vec{F}$



$x(t)$ opisuje poziciju kuglice u trenutku $t \geq 0$

$x(0) = h_0$

$x(t) = 0$

$v(t)$ - brzina kuglice $\quad v(t) = x'(t)$

$a(t)$ - akceleracija $\quad a(t) = v'(t) = x''(t)$

$x''(t) = -g \iff v'(t) = -g$

$v(t) = -gt + C, \ C \in \mathbb{R}$

$v(0) = 0$ kuglica miruje u početnom trenutku

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = -gt$

$x'(t) = v(t) = -gt$

$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + C, \ C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow h_0 = C$

$\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0, \ t > 0$

$x(t) = 0$

$0 = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0 \Rightarrow t^2 = 2h_0 \cdot \frac{1}{g} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

Zašto smo bili zatvoreni 2 godine?

$n(t)$ - broj jedinki neke vrste u trenutku t

$n'(t)$ - vremenska promjena broja jedinki
brzina promjene (rasta ili pada) populacije

- biološki zakon : $n'(t) \sim n(t)$; λ konstanta propor

$$n'(t) = \lambda \cdot n(t)$$

$$n(t) = Ce^{\lambda t}, \quad c > 0$$

$$n'(t) = \underbrace{Ce^{\lambda t}}_{n(t)} \cdot \lambda$$

$$= \lambda n(t)$$

$n(0) = N_0$ ← broj jedinki u početnom trenutku

$$n(t) = N_0 e^{\lambda t}; \quad \lambda > 0$$

Korekcija modela

$$n'(t) = \varkappa\, n(t)\,(1 - \int n(t))'$$