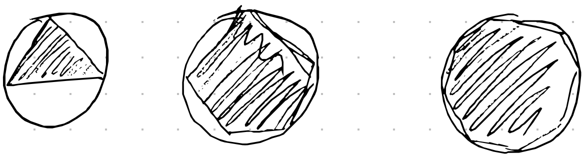
4.3. KONVERGENCIJA NIZA REALNIH BR.



što je n površina pravilnog n-terokuta P_n veća, to je P_n sve bliža površini kruga P.

Kada n teži $\infty+$, tada P_n teži P.

=> Ovo je primjer konvergentnog niza

↝ (P_n) konvergira prema (P)

↳ P zovemo limes niza.

Nizovi sa članovima a_n se približavaju nekoj fiksnoj vrijednosti $L \in \mathbb{R}$ za dovoljno velike indekse n.

DEF Niz realnih br. (a_n) konvergira (teži) k realnom broju L ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n - L| < \varepsilon$.

*da prevedem; za svaku okolinu niza veću od 0 postoji najmanji n za kojeg vrijedi da apsolutno od $a_n - L$ bude manje od ε-okoline.

Broj L zovemo LIMES NIZA (a_n) te pišemo:

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n \quad \text{ili} \quad a_n \to L,\ n \to \infty$$

Ako niz realnih brojeva a_n ima limes $L \in \mathbb{R}$, kažemo da je KONVERGENTAN. Ako ne, onda je DIVERGENTAN.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \iff (\forall \varepsilon > 0)\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.d. } \forall n \geq n_0\ |a_n - L| < \varepsilon$$

epsilon okolina od L

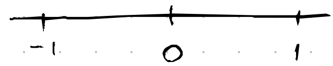
koliko god mali epsilon uzeli, postoji taj obruč

prvi a_n koji upadne zovemo a_0 = svi članovi niza nakon njega će biti unutra

Niz realnih br. a_n konvergira k realnom br L ako se izvan svake ε okoline broja L nalazi samo konačno mnogo članova niza a_n. => Limes jedino gomilište!

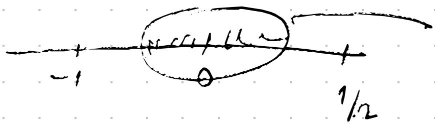
Primjer :)

(a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$



dva gomilišta $\longrightarrow$ nema limesa

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$



jedno gomilište

$L = 0$

Pr.) Pomoću definicije limesa pokažite da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$a_n = \frac{1}{n}$ | Izaberemo neki $\varepsilon > 0$.

Moramo pokazati da $\exists n \in \mathbb{N}$ t.d. $n \geq n_0$

$|a_n - L| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

$n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$

* pod : $\lfloor m \rfloor$ = najveće cijelo

$\lfloor 6.2 \rfloor = 6$

strop : $\lceil 6.2 \rceil = 7$.

Za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ t.d. $\forall n \geq n_0$ vrijedi

$n > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n} < \varepsilon$

PROP 1. Ako je niz (a_n) konvergentan s limesom L, tada je jedno gomilište.

DOKAZ: L = limes $\Rightarrow$ L = gomilište

Pretp. da $\exists L_2$ gomilište $L_2 \neq L$:

$\rightarrow$ u $\forall$ ε-okolini od L_2 nalazi beskonačno mnogo članova niza

$\Downarrow$ s tvrdnjom da se van svake okoline L nalazi beskonačno mnogo članova

KOR 1.

Konverg. niz ima samo jedan limes

Teorem Ako je niz realnih brojeva konvergentan, tada je on omeđen.

DOKAZ: (a_n) ima limes L:

$L-\varepsilon \quad L \quad L+\varepsilon$

$a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$ = članovi niza izvan ε domene

$m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

$m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, L-\varepsilon\}$

$M = \max\{-\text{II}-, -\text{II}-, L+\varepsilon\}$

NAP: OBRAT ne vrijedi

Postoji omeđen niz koji nije konvergentan

Teorem Neka su (a_n) i (b_n) konv. nizovi. Pretp. da postoji $m \in \mathbb{N}$ tdj $a_n \leq b_n, \forall n \geq m$. Tada je

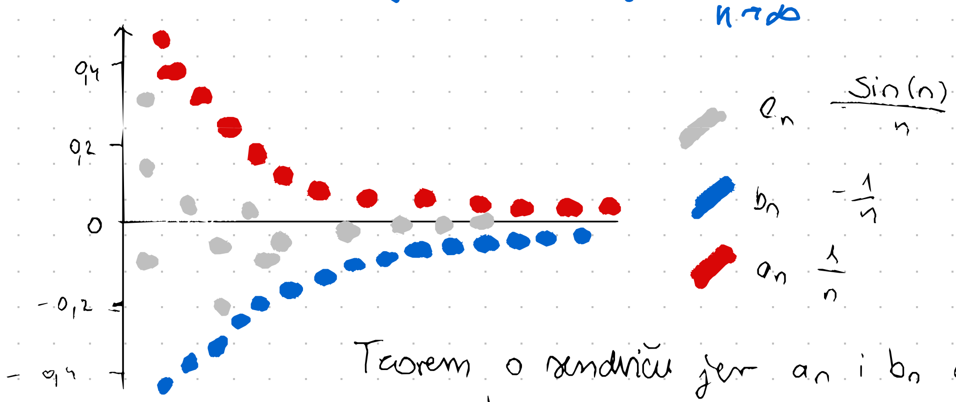
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Teorem (sendvič teorem)

Neka su (a_n) i (b_n) konv. nizovi realnih br. td.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Neka je niz (c_n) takav da $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m$, vrijedi $a_n \leq c_n \leq b_n$.
Tada je niz (c_n) konvergentan i vrijedi $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.



Teorem o sendviču jer a_n i b_n okružuju c_n kao u sendvič

Primjer) Dokažite da je $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$.

$1 \geq \sin n \geq -1 \quad / : n$

$\frac{1}{n} \geq \frac{\sin n}{n} \geq \frac{-1}{n}$

$b_n \geq c_n \geq a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{n}\right) = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Prema sendvič teoremu $\Rightarrow \lim\limits_{n} c_n = \lim\limits_{n} \frac{\sin n}{n} = 0$ ✓

Pr.) Izračunajte

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2+1)}{n^2} = ?$

$1 \geq \cos(n^2+1) \geq -1 \quad / : n^2$

$\frac{1}{n^2} \geq \frac{\cos(n^2+1)}{n^2} \geq \frac{-1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$

Sendvič teorem $\rightarrow \lim \frac{\cos(n^2+1)}{n^2} = 0$

KOROLAR — posljedica sendvič teorema

Neka su nizovi (a_n) i (b_n) nizovi realnih brojeva za koje vrijedi $0 \le a_n \le b_n$ za sve $n \ge m$, gdje je $m \in \mathbb{N}$, te je (b_n) konvergentan i $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$.

Tada je niz a_n konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

SLIJEDI

$\boxed{\text{TM}}$

Niz realnih brojeva (a_n) konvergira k 0 ako i samo ako niz njegovih apsolutnih vrijednosti $(|a_n|)$ konvergira k 0

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \to \infty} (|a_n|) = 0$$