

Završni ispit iz Matematičke analize 1

04. veljače 2019.

1. (8 bodova) U ravninski lik omeđen krivuljama $y = 2x^2$ i $y = -x^2 + 5$ upisan je pravokutnik čije su stranice paralelne s koordinatnim osima. Nađite maksimalnu površinu takvog pravokutnika i pokažite da se radi o maksimumu.

2. (7 bodova) Ispitajte istinitost sljedećih tvrdnji. Istinite tvrdnje dokažite, a lažne opovrgnite protuprimjerom ili pokažite suprotne tvrdnje. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

T1. (3b) Neka je $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija takva da je $f'(x) > 0$, za svaki $x \in \langle a, b \rangle$. Tada je f strogo rastuća funkcija na $\langle a, b \rangle$.

T2. (2b) Neka je $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna i strogo padajuća funkcija na $\langle a, b \rangle$. Tada je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in \langle a, b \rangle$.

T3. (2b) Za svaki $x > 0$ postoji $c \in \langle 0, x \rangle$ takav da vrijedi

$$\frac{\sin x}{x} = \cos(c).$$

3. (8 bodova) Odredite područje definicije, ispitajte ponašanje na rubu područja definicije, odredite asimptote, intervale monotonosti i lokalne ekstreme, odredite točke infleksije i intervale konveksnosti i konkavnosti te skicirajte kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{x^2/2}.$$

4. (11 bodova)

(a) **(2b)** Dokažite formulu za parcijalnu integraciju kod neodređenog integrala.

(b) **(4b)** Izračunajte

$$\int e^{-2x} \sin(3x) dx.$$

(c) **(5b)** Izračunajte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(\cos x + 1)(\sin^2 x - 2)}.$$

5. (8 bodova)

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekinuta funkcija.

a) (3b) Dokažite sljedeću tvrdnju: Ako je $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ za $x \in [a, b]$, tada je Φ primitivna funkcija od f odnosno vrijedi $\Phi'(x) = f(x)$ za sve $x \in \langle a, b \rangle$.

b) (3b) Koristeći tvrdnju pod (a), dokažite Newton-Leibnizovu formulu odnosno formulu

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdje je F bilo koja primitivna funkcija od f .

c) (2b) Izračunajte $G'(x)$ ako je $G(x) = \int_{2x}^1 f(t)dt$.

6. (8 bodova)

a) (5b) Skicirajte lik L koji je omeđen parabolom $y = \frac{1}{2}x^2$ i njezinom normalom u točki $T(1, \frac{1}{2})$ te nađite površinu lika L .

b) (3b) Izračunajte volumen tijela V_x koji nastaje vrtnjom oko osi x lika L iz (a) dijela zadatka.