# Jesenski ispitni rok iz Matematičke analize 1

4. rujna 2019.

**1.** (**8 bodova**) Odredite sve kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C}$ takve da vrijedi:

(a) (**4b**) $z^6 = (2+2i)^2$. Skicirajte sva rješenja.

(b) (**4b**) $\begin{cases} |z+3i| = 3|z|, \\ \arg z = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

**2.** (**9 bodova**) Zadani su skupovi $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $k \leqslant n$.

(a) (**2b**) Koliko ima funkcija $f : A \to B$? Obrazložite.

(b) (**2b**) Napišite definiciju injekcije. Koliko ima injekcija iz $A$ u $B$?

(c) (**2b**) Koliko ima bijekcija iz $A$ u $A$? Koliko ima bijekcija iz $A$ u $A$ ako je $f(a_1) = a_k$ i $f(a_k) = a_1$?

(d) (**3b**) Na koliko načina možemo rasporediti 5 osoba u 7 soba tako da:

(i) nema nikakvih uvjeta na broj osoba u sobi,

(ii) sobe su jednokrevetne?

**3.** (**9 bodova**) Za $a, b \in \mathbb{R}$ funkcija $f$ zadana je s

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\sin(ax)}{x}, & x < 0, \\ \dfrac{e^{bx} - 1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

(a) (**1b**) Odredite vrijednost funkcije $f$ u točki $x = 0$ tako da bude neprekinuta slijeva.

(b) (**3b**) Uz koje uvjete na $a$ i $b$ je $f$ neprekinuta u $x = 0$?

(c) (**2b**) Uz koje uvjete na $a$ i $b$ funkcija $f$ ima prekid u $x = 0$?

(d) (**3b**) Ako je $a = 0$, u ovisnosti o parametru $b$ ispitajte diferencijabilnost funkcije $f$ u točki $x = 0$.

**4.** (**6 bodova**)

(a) (**2b**) Neka je položaj točke koja se giba po realnom pravcu dan funkcijom $s(t)$. Definirajte brzinu $v(t)$ i akceleraciju $a(t)$ pomoću limesa.

(b) (**4b**) Točka se giba po realnom pravcu tako da se u trenutku $t \geqslant 0$ nalazi na položaju $(t^3 + at^2 + bt)$ cm. Odredite realne parametre $a$ i $b$ tako da se u trenutku $t = 1$ s točka nalazi na položaju 5 cm od ishodišta, s brzinom jednakom 0 cm/s. Odredite akceleraciju točke u tom trenutku.

**OKRENITE STRANICU!**

**5.** (**10 bodova**) Ispitajte istinitost sljedećih tvrdnji. Istinite tvrdnje dokažite, a lažne opovrgnite protuprimjerom ili dokažite suprotne tvrdnje. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

(a) (**3b**) Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $a \in I$ i $a$ je točka lokalnog maksimuma. Tada je $f'(a) = 0$.

(b) (**4b**) Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na $I$ i strogo rastuća te neka je $a \in I$ takva da je $f(a) = 0$ i $f'(a) \neq 0$. Tada svaka primitivna funkcija od $f$ na $I$ ima lokalni minimum u točki $a \in I$.

(c) (**3b**) Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna i dva puta diferencijabilna na $I$ te neka je $a \in I$ takav da je $f(a) = f'(a) = 0$. Tada $f$ mijenja predznak na $I$.

**6.** (**6 bodova**) U područje omeđeno krivuljom $y = \sqrt{1 - x^4}$ i osi $x$ upisan je pravokutnik kojem su stranice paralelne koordinatnim osima. Kolika je maksimalna površina tog pravokutnika? Nacrtajte sliku!

**7.** (**8 bodova**)

(a) (**4b**) Dokažite formulu za parcijalnu integraciju neodređenog integrala.

(b) (**4b**) Izračunajte $\displaystyle\int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx$.

**8.** (**8 bodova**)

(a) (**4b**) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = \sqrt{2 - x}$, $y = 2x - 1$ i osi $x$. Nacrtajte sliku!

(b) (**4b**) Izračunajte volumen tijela dobivenog rotacijom lika pod (a) oko osi $x$.

---

***Ispit se piše 150 minuta.*** *Dozvoljeno je isključivo korištenje pribora za pisanje i službenog podsjetnika za kolegij Matematička analiza 1.*