Jesenski ispitni rok iz Matematičke analize 1

24. kolovoza 2020.

1. **(8 bodova)**

   a) **(5 bodova)** Odredite i skicirajte u Gaussovoj ravnini sve kompleksne brojeve za koje vrijedi $(z+\sqrt{2})^4 = -16$.

   b) **(3 boda)**
   Napišite jednadžbu kružnice na kojoj se nalaze sva rješenja ove jednadžbe.

2. **(8 bodova)**

   a) **(2 boda)** Broj uređenih n-torki $(x_1, \dots, x_n)$ svih nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe ________________ iznosi ________________.

   b) **(6 bodova)** Na koliko načina možemo podijeliti:

   b1) deset jednakih predmeta na 4 osobe, ako je moguće da netko ne dobije niti jedan predmet?

   b2) deset jednakih predmeta na 4 osobe tako da barem jedna osoba ne dobije niti jedan predmet?

   b3) osam različitih predmeta na 4 osobe tako da svaka osoba dobije po 2 predmeta?

3. **(7 bodova)**

   a) **(2 boda)** Navedite primjer niza (a_n) koji divergira, ali je $\dfrac{1}{a_n^3}$ konvergentan.

   b) **(3 boda)** Odredite sva gomilišta niza

   $$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & n \le 10^{12} \\ \frac{7n^2+2}{6n^2+7n} & n > 10^{12} \end{cases}$$

   Je li niz konvergentan?

   c) **(2 boda)** Izračunajte limes niza (a_n) ako je $a_n = \dfrac{\cos(3^n) + 2\cdot 3^n}{2^n + 3^n}$.

4. **(8 bodova)** Zadane su funkcije $f, g : [-1, 4] \to \mathbb{R}$

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \le x \le 1 \\ a\cdot x & 1 < x \le 4 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & -1 \le x \le 3 \\ b - x & 3 < x \le 4 \end{cases}$$

   a) **(4 boda)** Odredite a i b tako da funkcije f i g budu neprekinute.

   b) **(2 boda)** Nacrtajte grafove funkcije f i g.

   c) **(2 boda)** Neka je $h_1(x) = f(g(x))$ i $h_2(x) = g(f(x))$. Odredite $h_1'(2)$ i $h_2'(1)$.

OKRENITE!

5. **(8 bodova)** Odredite područje definicije, ponašanje na rubu područja definicije i asimptote, intervale monotonosti, lokalne ekstreme te nacrtajte kvalitativni graf funkcije:

$$f(x) = 3\cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right).$$

6. **(8 bodova)**

   a) **(3 boda)** Dokažite Newton-Leibnizovu formulu.

   b) **(5 boda)** Izračunajte $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\ln(\sin(x))dx$

7. **(9 bodova)**

   a) **(3 boda)** Ispitajte konvergenciju integrala

$$I = \int_1^{\infty} \frac{x \cdot dx}{\sqrt[4]{x^5+x+1}}.$$

   b) **(4 boda)** Dokažite sljedeću tvrdnju:
   Za $a > 0$ vrijedi sljedeće:

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{konvergira za } p < 1; \\ \text{divergira za } p \geq 1. \end{cases}$$

   c) **(2 boda)** Ispitajte konvergenciju integrala

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^5}} dx.$$

8. **(8 bodova)**

   a) **(5 boda)** Odredite površinu lika određenog jednadžbama $x = 5-y^2$ i $x = y^2-5$. Nacrtajte skicu.

   b) **(3 boda)** Izračunajte volumen tijela dobivenog rotacijom lika pod a) oko osi x.

Napomena: Ispit se piše **150 minuta**. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika sa kolegija matematička analiza 1. Nije dozvoljena uporaba kalkulatora.