# LJETNI ISPITNI ROK - RJEŠENJA
# 13.7.2021.

1. (a) Odaberemo prvo pozicije brojeva 1 i 2 tako da odaberemo dvije pozicije i stavimo 1 na prvu od te dvije. Nakon toga prozivoljno permutiramo preostala $n-2$ broja.

$$\binom{n}{2} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2}$$

(b) Parova susjednih pozicija ima $n-1$. To znači da parova nesusjednih pozicija ima $\binom{n}{2} - (n-1)$. Kada odaberemo par nesusjednih pozicija, 1 i 2 na njih možemo razmjestiti na 2 načina, te preostala $n-2$ broja možemo razmjestiti na $(n-2)!$ načina.

$$\left(\binom{n}{2} - (n-1)\right) \cdot 2 \cdot (n-2)! = n! - (n-1)! \cdot 2$$

(c) Skup $\{1, 2, ..., n\}$ ima točno $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ parnih elemenata. Mi tražimo neprazne podskupove skupa parnih elemenata pa je rješenje:

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1$$

2. (a) Dokažimo identitet matematičkom indukcijom:
BAZA n=1
Trivijalno slijedi iz identiteta $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
PRETPOSTAVKA: Za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi gornja tvrdnja.
KORAK ZA $n+1$:

$$\cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot \ldots \cdot \cos(2^{n-1}x) \cdot \cos(2^n x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)} \cdot \cos(2^n x) = \frac{\frac{\sin(2 \cdot 2^n x)}{2}}{2^n \sin(x)} = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}$$

(b) i. Ne vrijedi! Primijetimo da za svaki $x \in \langle 0, \pi \rangle$ vrijedi $|\cos(2^k x)| \leq 1$. Stoga je lijeva strana jednakosti po apsolutnoj vrijednosti uvijek manja ili jednaka 1. Uzmemo li sada na primjer $y = 2$ vidimo da željeni $x$ ne može postojati.

ii. Neka su $x \in \langle 0, \pi \rangle$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni, ali fiksni. Budući da je $\frac{1}{\sin(x)} > 0$ znamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $2^n \varepsilon \geq n\varepsilon > \frac{1}{\sin(x)}$. Sada zbog $(a)$ dijela zadatka imamo:

$$|\cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdot \ldots \cdot \cos(2^{n-1}x)| = \left| \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)} \right| \leq \frac{1}{2^n \sin(x)} < \varepsilon$$

čime smo pokazali željenu tvrdnju.

3. (a) (T1) Netočno!
Promatramo li niz $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vidimo da je on omeđen, no nije konvergentan.

(T2) Netočno!
Promatramo li niz $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vidimo da je on konvergentan, no nije monoton.

(T3) Točno!
Pretpostavimo da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan. Neka mu je $L$ limes. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n > n_0$ vrijedi $|L - a_n| < 1$, odnosno $|a_n| < |L| + 1$. Definirajmo sada $M = max\{|L| + 1, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0}|\}$. Sada vidimo da je $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ pa je niz $(a_n)$ nužno omeđen.

(b) Primijetimo da je $a_2 = 3$. Pokažimo induktivno da je $1 \leq a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
BAZA $n = 1$:
$1 = a_1 \leq 3 = a_2$
PRETPOSTAVKA: Za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $1 \leq a_n \leq a_{n+1}$.
KORAK ZA $n + 1$:
Zbog $0 < 1 \leq a_n \leq a_{n+1}$ imamo

$$\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{a_n} \leq -\frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow$$
$$4 - \frac{1}{a_n} \leq 4 - \frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow$$
$$1 \leq a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Ovime smo dobili da je niz $(a_n)_n$ rastući. Također, iz monotonosti zaključujemo da je $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ pa imamo da je $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \leq 4$ odnosno da je niz $(a_n)_n$ ograničen odozgo. Sada iz činjenice da je promatrani niz rastući i ograničen odozgo slijedi da je konvergentan. Označimo njegov limes s $L$. Puštajući relaciju

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n}$$

na limes $n \to \infty$ dobivamo

$$L = 4 - \frac{1}{L}$$

odnosno

$$L^2 - 4L + 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Zbog $a_n \geq 1$ zaključujemo da je $L \geq 1$ pa je

$$L = 2 + \sqrt{3}$$

4. Ako krivulja ima desnu kosu asimptotu onda mora postojati limes

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+a)^2}}{x}$$

Računamo limes

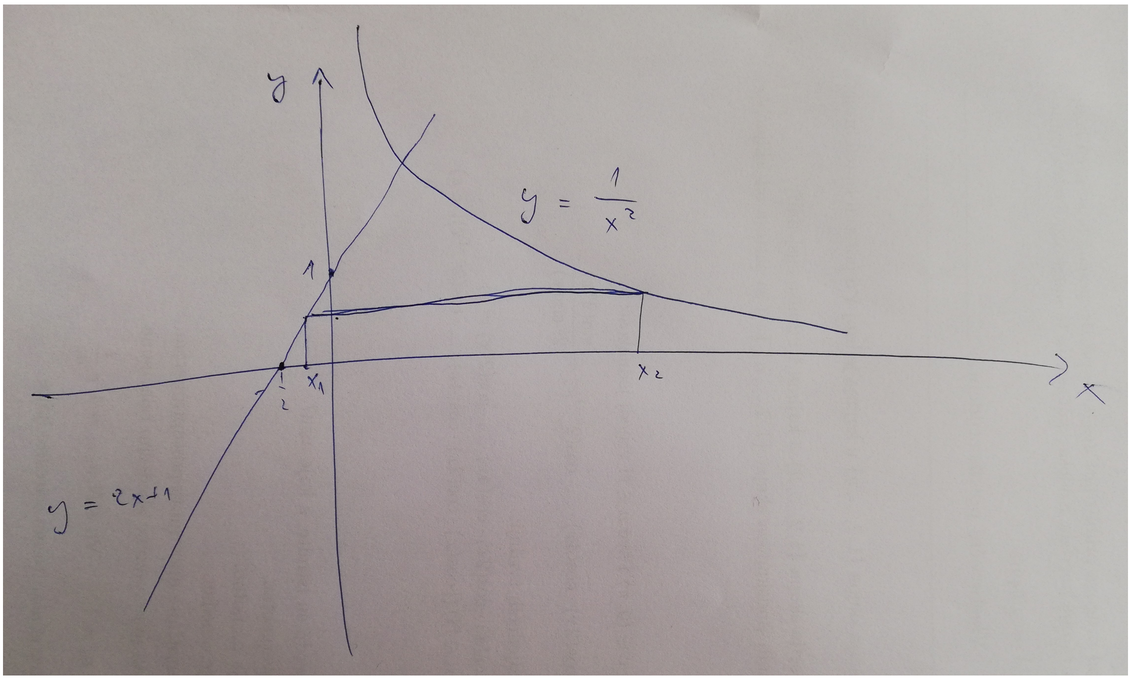
$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+a)^2}}{x} = k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x\sqrt{x} + 6x + 4\sqrt{x} + 1}{x(x + 2a\sqrt{x} + a^2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x\sqrt{x} + 6x + 4\sqrt{x} + 1}{x^2 + 2ax\sqrt{x} + a^2x} = 1$$

Također, mora postojati limes

$$l = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+a)^2} - kx = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+a)^2} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x}+1)^4 - x(\sqrt{x}+a)^2}{(\sqrt{x}+a)^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x\sqrt{x} + 6x + 4\sqrt{x} + 1 - (x^2 + 2ax\sqrt{x} + a^2x)}{x + 2a\sqrt{x} + a^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(4-2a)x\sqrt{x} + (6-a^2)x + 4\sqrt{x} + 1}{x + 2a\sqrt{x} + a^2} = \begin{cases} +\infty & \text{ako je } 4 - 2a > 0 \\ (6 - a^2) & \text{ako je } 4 - 2a = 0 \\ -\infty & \text{ako je } 4 - 2a < 0 \end{cases}$$




Slika 1: Zadatak 5

Vidimo da promatrani limes postoji ako i samo ako je $a = 2$ te u tom slučaju iznosi $l = 2$. Kosa asimptota je sada dana jednadžbom:

$$y = kx + l = x + 2$$

5. Primijetimo da je pravokutnik jedinstveno određen visinom $y$ na kojoj se nalazi njegova gornja stranica. U tom slučaju je $x-$koordinata lijevog ruba pravokutnika dana s $x_1 = \frac{y-1}{2}$, a desnog $x_2 = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Sada vidimo da površinu promatranog pravokutnika možemo izraziti kao funkciju od $y$:

$$P(y) = y(x_2 - x_1) = y(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{y-1}{2}) = \sqrt{y} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}$$

Neka se pravac $y = 1 + 2x$ i krivulja $y = \frac{1}{x^2}$ sijeku u točki $(x_0, y_0)$. Primijetimo da za $y > y_0$ vrijedi da je $x_2 < x_1$ pa je $P(y) < 0$. Stoga je dovoljno tražiti maksimum funkcije $P$ na $\langle 0, +\infty\rangle$.

$$P'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - y + \frac{1}{2}$$

$$P''(y) = -\frac{1}{4\sqrt{y^3}} - 1 < 0, \forall y > 0$$

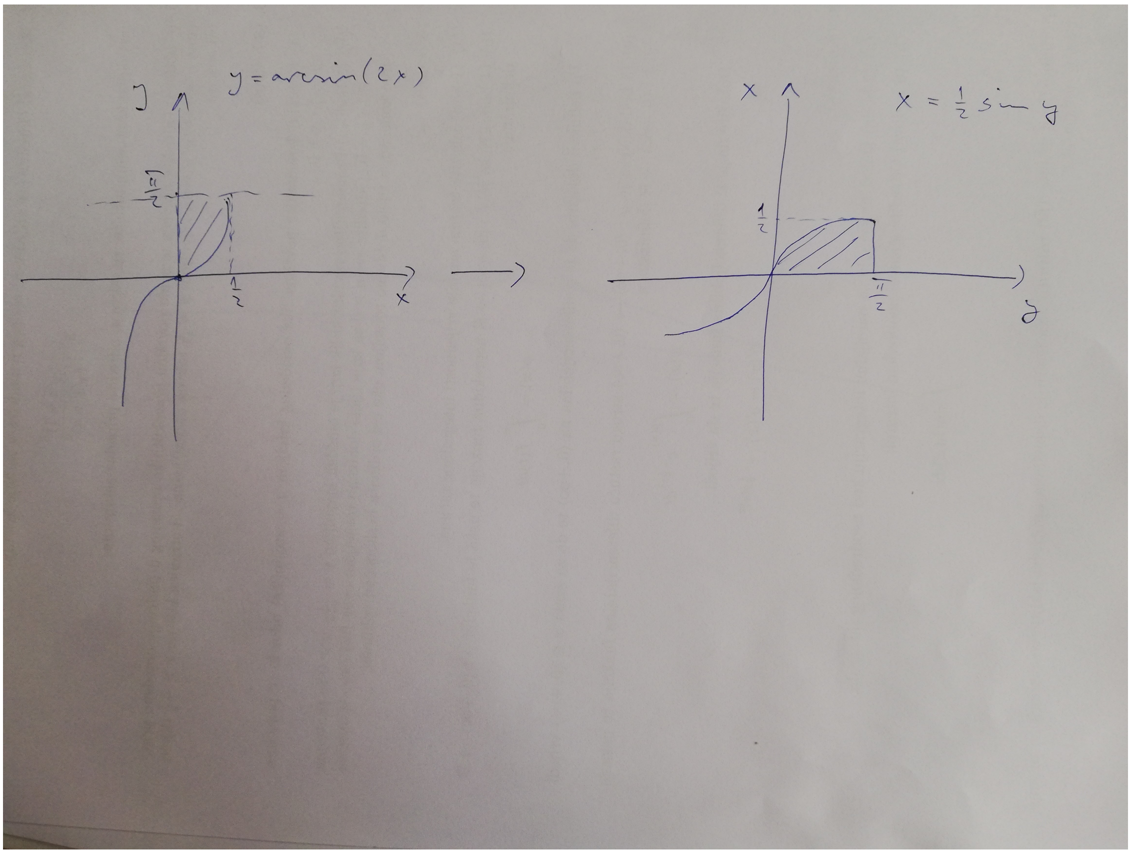
Računamo:

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} - y + \frac{1}{2} = 0$$

$$1 - 2y\sqrt{y} + \sqrt{y} = 0, \quad (t = \sqrt{y})$$

$$0 = 2t^3 - t - 1 = (t-1)(2t^2 + 2t + 1) = (t-1)\left(t^2 + (t+1)^2\right)$$

Jedino rješenje je $t = 1$ odnosno $y = 1$ pa zbog $P''(1) < 0$ zaključujemo da je strogi lokalni maksimum. Budući da je to jedini lokalni ekstrem možemo zaključiti da je i globalni maksimum. Pripadna maksimalna površina je $P(1) = 1$.




Slika 2: Zadatak 6(a)

6. (a) Zamijenimo li koordinatne osi vidimo da je tražena površina dana sljedećim integralom

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(y)dy = -\frac{1}{2}\cos(y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

   (b) Volumen dobiven rotacijom oko osi aspcisa je

$$\pi\int_1^{+\infty} y^2 dx = \pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx$$

   i on je konačan ako i samo ako je $a > 1$. Volumen dobiven rotacijom oko osi ordinata je

$$2\pi\int_1^{+\infty} xydx = 2\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{a}{2}-1}}dx$$

   i on je beskonačan ako i samo ako je $\frac{a}{2} - 1 \leq 1$ odnosno $a \leq 4$. Traženi skup vrijednosti parametra $a$ je $\langle 1, 4]$.

7. (a) Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

   (b) Neka je $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ proizvoljan, ali fiksan. Za $h \in \mathbb{R}$ takav da je $x + h > 0$ postoji $c_h$ između $x$ i $x + h$ takav da je $\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_h)\cdot h$. Primijetimo da $c_h \to x$ kada $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(c_h)\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$$

   odnosno $\phi$ je diferencijabilna u $x$ i $\phi'(x) = f(x)$. Budući da je $x$ bio proizvoljan zaključujemo da je $\phi$ diferencijabilna na $\langle 0, +\infty\rangle$.

(c) Definirajmo funkciju $F : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ s

$$F(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Po ($b$) dijelu zadatka imamo da je $F$ diferencijabilna te da je $F'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Primijetimo da je $\psi(x) = F(g(x)) = (F \circ g)(x)$ pa je $\psi$ diferencijabilna kao kompozicija diferencijabilnih funkcija. Sada po lančanom pravilu dobivamo:

$$\psi'(x) = (F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = g'(x)e^{-\frac{1}{2}g(x)^2}$$

8. (a) Budući da je

$$\left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$$

zaključujemo da je

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(b)

$$\int \sin(\ln x)dx = \left[x = e^t,\ dx = e^t dt\right] = \int \sin(t)e^t dt = \sin(t)e^t - \int \cos(t)e^t dt =$$

$$= \sin(t)e^t - \left(\cos(t)e^t - \int -\sin(t)e^t dt\right) = \sin(t)e^t - \cos(t)e^t - \int \sin(t)e^t dt$$

$$\Rightarrow \int \sin(t)e^t = \frac{\sin(t)e^t - \cos(t)e^t}{2} + C$$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)dx = \int \sin(t)e^t dt = \frac{\sin(t)e^t - \cos(t)e^t}{2} + C = \frac{x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)}{2} + C$$