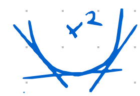
8.5. KONVEKSNOST I KONKAVNOST

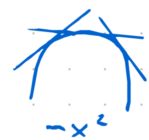
DEF $f : \langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna

Konveksna na $\langle a,b\rangle$ ako je u svakoj točki grafa funkcije pripadajuća tangenta ispod grafa



$\hookrightarrow \boxed{f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$

Konkavna na $\langle a,b\rangle$ ako je u svakoj točki grafa funkcije pripadajuća tangenta iznad grafa



$\hookrightarrow \boxed{f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$

* Ako za svaku točku na grafu vrijedi da pripadna tangenta dodiruje graf samo u diralištu.

$\Downarrow$

$f(x)$ je strogo konveksna / konkavna

- općenita definicija konveksnosti: $y = f(x)$

$\lambda \in \langle 0,1\rangle$, $x,y \in \langle a,b\rangle$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

- općenita definicija konkavnosti:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) - (1-\lambda) f(y)$$

po ovim definicijama f-ja $y = |x|$ je konveksna iako nije diferencijabilna

$\boxed{\text{TM 1}}$ $f : \underline{I} = \langle a, b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ je dvaput diferencijabilna

KONVEKSNOST:

I. ▶ f je konveksna ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$

II. ▶ Ako je $f''(x) > 0$ $\forall x \in I$, onda je f strogo konveksan

KONKAVNOST

III. ◀ fja f je konkavna $\Longleftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$

IV. ◀ Ako je $f''(x) < 0$ $\forall x \in I$, onda je f strogo konkavna

DOKAZ: II. & IV. pomoću Taylorove formule

$\boxed{\Longrightarrow}$

→ za svaki $x, x_0 \in I$ postoji $c \in \langle x_0, x \rangle$ (ili $\langle x, x_0 \rangle$);

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2}$$

jer ako je $f''(c) = 0$ onda je $\rightarrow \emptyset$

i time dobijemo izraz $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$f(x)$ je konkavna ako je $-f(x)$ konveksna $\left(\overset{\text{npr.}}{-x^2}\right)$

★ ! ALI obrat ne vrijedi općenito

Sažeto od prošli put

$f: I \to \mathbb{R}$ je konveksna na intervalu I ako

konveksna / konk.

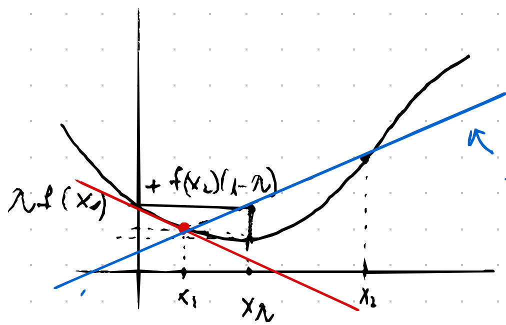
1.) $\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

(<) strogo konveksna

↳ Jensenova nejednakost

2.) dodatno ako je f diferencijab. na I, onda je konveksna ako $\forall x_1, x_2 \in I$.

$f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1)$ (>)



$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$f'(x_1)$

$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$D_f(x_2, x_1) := f(x_2) - f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1)$

ovo nije slika

f strogo konv. $\Rightarrow D_f(x_2, x_1) > 0, \quad \forall x_1, x_2 \quad x_1 \neq x_2$

$= 0 \quad x_1 = x_2$

* Bregmanove diferencije na 4. godini

Konkavnost

f je konkavna ako je $-f$ konveksna

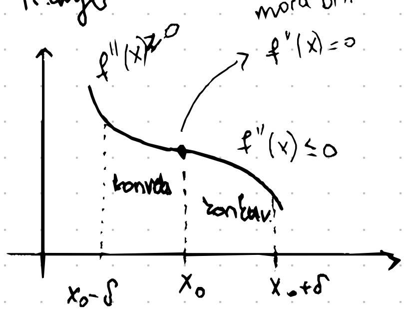
TOČKA INFLEKSIJE

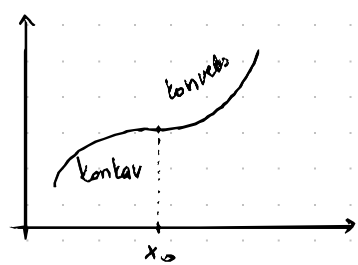
$\boxed{\text{DEF}}$ $f: I \to \mathbb{R}$.

Kažemo da je $x_0 \in I$ točka infleksije funkcije f (odnosno Γ_f) ako $\exists\, \delta > 0$ t.d. je f strogo konveksna na $\langle x_0 - \delta, x_0 \rangle$ i strogo konkavna na $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ ili obratno.

→ mijenja izgled f-je iz konveksnog u konkavno ili obrnuto

Primjer:





$\boxed{\text{TM}}$ $f: I \to \mathbb{R}$ dvaput diferencijabilna na I

Ako je x_0 točka infleksije, onda je $f''(x_0) = 0$. To je nužan, ali ne i dovoljan uvjet => obrat ne vrijedi

Primjer: $f(x) = x^4$; $f''(x) = 12x^2 \to f''(0) = 0$, ali $x_0 = 0$ nije točka infleksije → parabola ∪

$\boxed{\text{TM}}$ $f: I \to \mathbb{R}$ dvaput diferencijabilna. Ako $f''(x)$ mijenja predznak u $x_0 \in I$, onda je x_0 točka infleksije.

↳ DOVOLJAN TIP UVJETA

Pr.) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

• $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty \rangle \setminus \{1\}$ — jer je $\ln(x)$ definiran na >0, a opet u nazivniku je

• $$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

• $$f''(x) = \frac{(\ln x - 1)' \ln^2 x - (\ln x - 1)(\ln^2 x)'}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - 1)\, 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x}$$

$$= \frac{\frac{\ln^2 x}{x} - (2\ln^2 x - 2\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} - 2\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} + 2 \ln x \frac{1}{x}}{\ln^4 x}$$

$$= \frac{-\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}}{\ln^3 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$$

kandidati za točke infl.

• $f''(x) = 0 \iff 2 - \ln x = 0 \iff x_0 = e^2$

• $f''(x)$ nije definirana u točkama $x_1 = 0,\ x_2 = 1 \in \mathcal{D}(f)$

$\Rightarrow$ nisu točke infleksije

	0		1		e^2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	X	$+$	0	$-$	
		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

nije u domeni

Primjer) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

I. dio)

1). Odrediti $D(f)$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ što možemo reći o fji f gledajući samo pravilo pridruživanja?

2) asimptote

- rubovi domene su uvijek kandidati za vertikalne asimptote

zdesna

$$\lim_{x\to 2^+} x\, \underbrace{e^{\frac{1}{x-2}}}_{+\infty} = +\infty$$

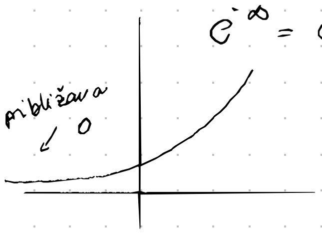
+ beskonačno puta bilošto konačno je $+\infty$

$x = 2$ je V.A.

$$\lim_{x\to 2^-} x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

približava $-\infty$

$e^{-\infty} = 0$



Kose asimptote (nemamo lijeve V.A.)

$y = kx + l$, $f(x) \approx y$ za $x \to \pm\infty$

tražimo pravac koji približno opisuje $f(x)$

$$\Rightarrow k_{+,-} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$l_{+,-} = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$$

$y = k_+ x + l_+ \to$ desna kosa asimpt.

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = 1$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = 1$$

$$l_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \overset{(1\cdot x)}{x}) = \lim_{x\to+\infty} (x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} - x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}(\underbrace{e^{\frac{1}{x-2}}}_{1} - \underbrace{1}_{1}) \quad 1 - 1 = 0$$

$l_1 = [+\infty \cdot 0]$

L'H ↓

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{x-2}} = 1$$

$l_2 =$ isti postupak $\to 1$

$\Rightarrow$ desna K.A. = lijeva K.A.

$\Rightarrow y = x + 1$

II. dio

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} + x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x-2}} \left(1 - \frac{x}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{1}{x-2}} \, \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}$$

$x \neq 2$!

- stac. točke: $f'(x) = 0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x_1 = 1, \; x_2 = 4$

	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	X	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

1: točka lok. maks

4: točka lok. min.

III.

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \, \frac{5x-8}{(x-2)^4}$$

$$f''(x) = 0 \iff 5x - 8 = 0$$

$$x_0 = \frac{8}{5}$$

	$-\infty$		$\frac{8}{5}$		2		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+		+	
$f(x)$		∩		∪		∪	

	$-\infty$		1		8/5		2		4		$+\infty$
$f''(x)$		−		−	0	+	X	−		+	
$f'(x)$		+	0	−		−	X	−	0	+	
$f(x)$		↗∩		↘∩		↘∪		↘∩		↗∪	

Bukal GOAT

Primjer) $f(x)=\sqrt{x}\ln(x)$

I. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty\rangle$

· rubovi: $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = [0\cdot(-\infty)] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{L'H}{=} \left[\dfrac{-\infty}{+\infty}\right]$

* nemamo lijevi

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -2x^{\frac{1}{2}} = 0$ — nema asimptotu

NEMA V.A.

Kose asimptote

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)\cdot\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{L'H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{\cancel{x}}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

$l = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\cdot\ln x = [+\infty\cdot+\infty] = +\infty$ (obje fje beskonačno rastu)

→ nema kosih ni horizontalnih asimptota