5. LIMES F-je

NEPREKINUTE F-je

5.1. Limes funkcije

. limes niza $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $L = \lim_{n} a_n$

. limes f-je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L = \lim_{n} f(x)$

INTUITIVNA DEF LIMESA

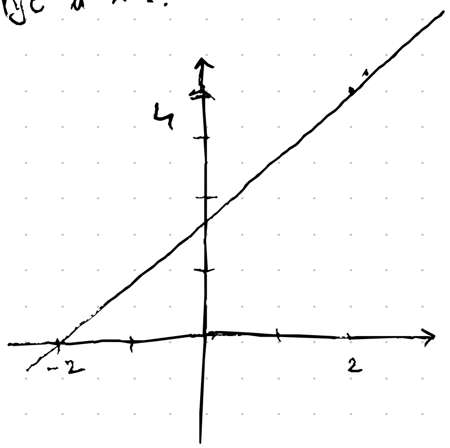
Pretpostavimo da je f definirana na otvorenom intervalu oko a, osim u a. Kažemo da f-ja f ima <u>LIMES</u> <u>L kada x teži prema a</u> i pišemo

$L = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ ako se vrijednost od f približava L tad. $x \to a$.

Primjer:)

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ Pretvorimo limes f-je u $x=2$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

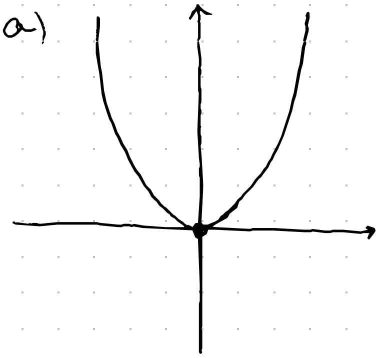


$f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = x+2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

Pr.) Pogledajmo 3 rez. f-je za koje je $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

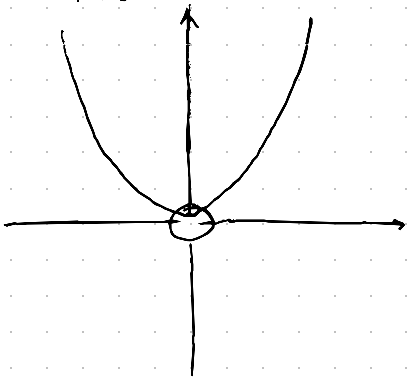
a)



$f_1(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to 0}(f(x)) = 0$

b)



$f_2(x) = x^2$ $D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

KONAČAN LIMES U KONAČNOJ TOČKI

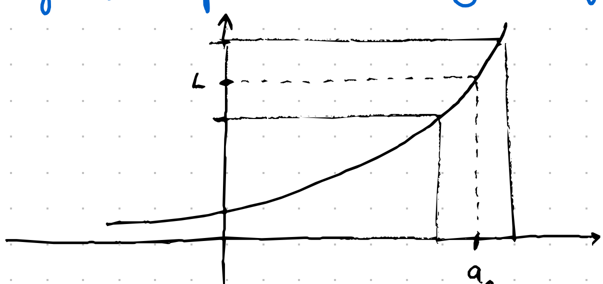
Za $L \in \mathbb{R}$ kažemo da je LIMES f-je f u točki $a \in \mathbb{R}$ i

pišemo $\boxed{L = \lim_{x \to a} f(x) \text{ ako za } \forall_x > 0}$ ako za svaki

$\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi:

za svaki $x \in D(f)$, $x \neq a$, iz $|x-a| < \delta$ slijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$

TM — Grafički prikaz definicije (o jedinstvenosti limesa)



NAP 1. Kraći zapis pomoću kvantifikatora:

$L = \lim_{x \to a} f(x)$ ako: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) \cdots$

$\cdots (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

NAP 2.)

u ovoj def. limesa broj δ ovisi o ε te ga označavamo s $\delta(\varepsilon)$.

R.) Koristeći definiciju, pokažite da je $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

c) $\lim_{x \to 3} (4x-5) = 7$

čemu teži = 3

Moramo pokazati da $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(0 < |x - a| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

limes = 7

$f(x) = 4x - 5$

$\rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |4x - 5 - 7| < \varepsilon)$

$\rightsquigarrow \quad |4x - 5 - 7| < \varepsilon$

$|4x - 12| < \varepsilon$

$4|x - 3| < \varepsilon$

$|x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$

Vidimo da ~~za~~ $\forall \varepsilon > 0$ postoji $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ ~~za~~ koji vrijedi implikacija tvrdnje

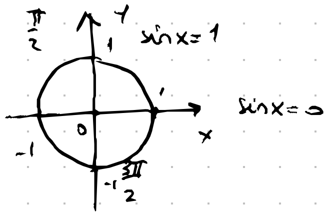
DEF Heineova definicija limesa

Broj L je limes f u točki $x=a$ ako i samo ako $\Longleftrightarrow$ za svaki niz $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \neq a$ i $x_n \to a$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = L$.

$$L = \lim_{x\to a} f(x) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L \quad \text{za svaki niz } x_n \to a$$

*Ovaj rezultat nam omogućava da kod računanja limesa f-je koristimo poznate rezultate limesa niza. Osim toga možemo ga koristiti za pokazivanje da limes funkcije ne postoji kao u slj. primjeru:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{za } x \neq 0 \\ 0, & \text{za } x = 0 \end{cases}$$



$$a_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \qquad b_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \qquad -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$1 \qquad\qquad -1 \qquad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}(b_n) = -1 \rightarrow \text{dva niza sa različitim limesima}$$

Zaključujemo da limes f-je $y = f(x)$ u točki $x=0$ ne postoji

TM Teorem o jedinstvenosti limesa

Ako za f-ju f postoji limes u točki $x=a$, tada je on jednoznačno određen.

DOKAZ: Da bi pokazali jednoznačnost limesa, pretpostavimo suprotno:

$f: y = f(x)$ ima dva limesa $L_1 = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

$L_2 = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

po def. limesa:

$\longrightarrow$ za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ takvi da za sve x za koje je $|x-a| < \delta_1$ i $|x-a| < \delta_2$ vrijedi $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$

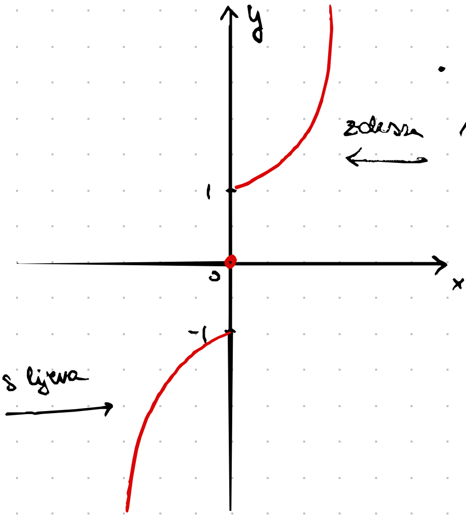
$|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$

$\overset{\text{slijedi}}{\Longrightarrow}$ za sve x takve da je $|x-a| < \delta$ gdje je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |L_1 - f(x)| + |L_2 - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Jednostrani limesi

Pr. 5.7.) Postoji li limes funkcije $f(x) = \begin{cases} -x^2-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$



- kad se približavamo $x=0$ s lijeve strane, $f(x)$ ide u -1
- kada se približavamo u $x=0$ s desne strane, $f(x)$ ide u 1

=> ne postoji jedinstveni limes

↳ $\lim\limits_{x\to 0^-}(f(x)) = -1$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)) = 1$

LIJEVI I DESNI LIMESI

$\boxed{\text{DEF}}$ Desni limes

Za $L\in\mathbb{R}$ kažemo da je desni limes fje f u točki $a\in\mathbb{R}$ uz oznaku

$$L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$ ide iz $\oplus$ (desnog) dijela

ako za svaki $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ td:

za svaki $x\in D(f)$, $x>a$, iz $|x-a|<\delta$ slijedi $|f(x)-L|<\varepsilon$.

$\boxed{\text{DEF}}$ Lijevi limes

Za $L\in\mathbb{R}$ kažemo da je lijevi limes fje f u točki $a\in\mathbb{R}$ uz oznaku

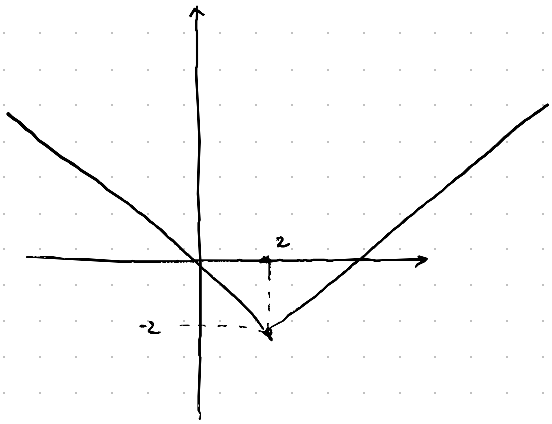
$$L = \lim_{x\to a^-} f(x)$$ ide iz $\ominus$ (lijevog) dijela

ako za svaki $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ td:

za svaki $x\in D(f)$, $x<a$, iz $|x-a|<\delta$ slijedi $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Pr.) Odredite limese i jednostavne limese u $x=2$.

a)

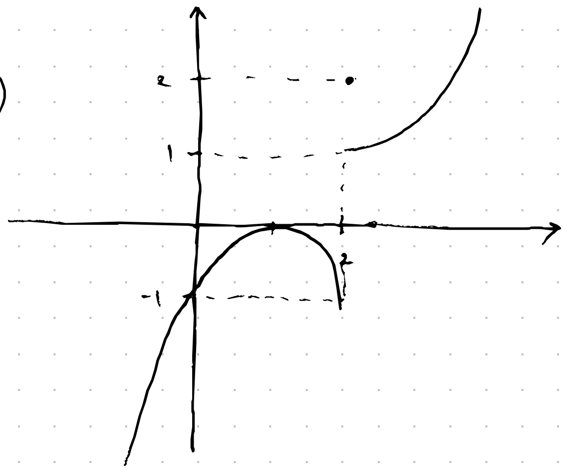


$$\lim_{x\to 2^+} (f(x)) = -2$$

$$\lim_{x\to 2^-} (f(x)) = -2$$

$$\lim_{x\to 2} (f(x)) = -2$$

b)



$$\lim_{x\to 2^+} (f(x)) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} (f(x)) = -1$$

Teorem EGZISTENCIJA LIMESA FUNKCIJE u TOČKI

Neka su $a, L \in \mathbb{R}$.

Tada je $\lim\limits_{x\to a} (f(x)) = L \iff \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} (f(x)) = L$

Dokaz: slijedi iz definicije

Nap: Limes ne postoji ako su jednostavni limesi različiti ili barem jedan od njih ne postoji.