

Matematička analiza 1 - završni ispit
1.2.2021.

Ime i prezime: _____

JMBAG: _____

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: _____

1. **(9 bodova)** Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija te neka je $x_0 \in I$.

- (a) **(3 boda)** Dokažite da vrijedi:

Ako je $f'(x) = 0, \forall x \in I$, onda je f konstantna funkcija na I .

- (b) **(6 bodova)** Koje od sljedećih tvrdnji su istinite, a koje nisu?

- (i) $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ nema lokalni ekstrem u x_0 .
- (ii) $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ ima lokalni ekstrem u x_0 .
- (iii) f je strogo rastuća funkcija na $I \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in I$.

Istinite tvrdnje obrazložite, a neistinite opovrgnite protuprimjerom.

2. **(9 bodova)**

- (a) **(7 bodova)** Odredite područje definicije, ponašanje na rubu područja definicije i asimptote, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konkavnosti i konveksnosti, točke infleksije te nacrtajte kvalitativni graf funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \ln x}.$$

- (b) **(2 boda)** Nacrtajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \ln |x|}.$$

3. **(8 bodova)**

- (a) **(2 boda)** Što je pogrešno u ovom računu:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{2}?$$

Obrazložite.

- (b) **(4 boda)** Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta neprekinuto diferencijabilna funkcija na I . Dokažite da za sve $a, b \in I$ vrijedi formula:

$$\int_a^b x f''(x) dx = b f'(b) - f(b) + f(a) - a f'(a).$$

- (c) **(2 boda)** Izračunajte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

OKRENITE!

4. (8 bodova) Izračunajte integrale:

(a) (5 bodova)

$$\int \frac{\sin x}{(\cos x + 1)(\sin^2 x - 2)} dx,$$

(b) (3 boda)

$$\int_0^2 x^3 e^{x^2} dx.$$

5. (8 bodova)

(a) (4 boda) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ zadani brojevi takvi da je $a < b$. Napišite primjere funkcija $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ takvih da je integral $\int_a^b f(x) dx$ nepravi:

- (i) u rubu a ,
- (ii) u rubu b ,
- (iii) u oba ruba.

(b) (4 boda) Ispitajte konvergenciju sljedećih integrala:

(i)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+2x)}{x^3} dx,$$

(ii)

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+2x)}{x^3} dx.$$

6. (8 bodova) Odredite površinu lika omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2 - 2x + 2$, tangentom na graf funkcije f u točki $(1, 1)$ i normalom na graf funkcije f u točki $(2, 2)$. Nacrtajte skicu.