1) Zadatak

Riješite jednadžbe u skupu $\mathbb{C}$:

a) $z + \frac{2}{z} = 2 \quad / \cdot z$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}, \qquad z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i, \qquad z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

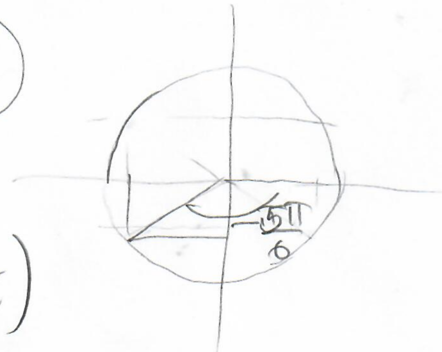
b) $z^3(1+i)^2 = \bar{z}^2(2-2\sqrt{3}\,i)$

Trivijalno rješenje $z=0$. Nadalje tražimo rješenja $z \neq 0$.

$$z^3(1+i)^2 = \bar{z}^2(2-2\sqrt{3}\,i) \quad / \cdot z^2$$

$$z^5(1+i)^2 = |z|^4(2-2\sqrt{3}\,i) \quad / \cdot |\cdot|$$

$$\underset{\sim}{|z|} = \frac{|2-2\sqrt{3}\,i|}{|(1+i)^2|} = \frac{\sqrt{4+12}}{2} = \underset{\sim}{2}$$



$$\Rightarrow z^5 = \frac{2^4(2-2\sqrt{3}\,i)}{(1+i)^2} = \frac{2^6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{2i} = 2^5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$\arg(z^5) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \arg(z) = \frac{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}, \quad k=0,1,2,3,4.$$

$\Rightarrow$ Rješenja su redom:

$$z_k = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)\right), \quad k=0,1,2,\dots,4$$

i dodatno rješenje $z_5 = 0$.

2)

a) $S = \{ a \in \mathbb{N} \mid a$ peteroznamenkast, 3 znamenke isti parni brojevi, 2 znamenke isti neparni brojevi. $\}$

Prva znamenka ne smije biti nula:

$\Rightarrow$ smije biti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$

Ako je prva znamenka parna: 2, 4, 6, 8, još dvije mogu biti identične i preostale 2 mogu biti jedan od brojeva 1, 3, 5, 7, 9.

$\Rightarrow$ Broj načina za to je: $4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5$ ← broj načina za odabrati neparnu znamenku

broj načina za odabrati prvu znamenku

broj načina za odabrati pozicije za neparne znamenke

Ako je prva znamenka neparna: 1, 3, 5, 7, 9, još jedna je identična i preostale 3 su jedan od brojeva 0, 2, 4, 6, 8.

Broj načina za to je: $5 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5$ ← broj načina za parne znamenke

broj načina za prvu

broj načina za pozicije parnih

$$\text{card } S = 4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5 + 5 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5 = 220.$$

Ili

$$\text{card } S = \binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 5 - \binom{4}{2} \cdot 5 = 220$$

broj načina za odabrati neparnu znamenku

broj načina za odabrati znamenke

broj načina za odabrati mjesta za parne

broj načina za odabrati gdje staviti 0 osim na 1. mjesto

b) 30 osoba ← S $|S|=30$

A - osobe koje govore engleski
B - osobe koje govore francuski
C - osobe koje govore njemački

$|A|=17$ $|A\cap B|=10$

$|B|=14$ $|A\cap C|=3$

$|C|=8$ $|B\cap C|=2$

$$|S\setminus(A\cup B\cup C)|=2$$

$|A\cap B\cap C|=?$

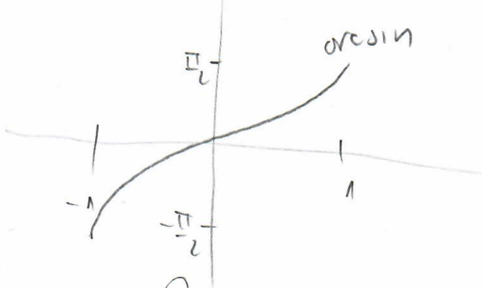
$$|S|=|S\setminus(A\cup B\cup C)|+|(A\cup B\cup C)|$$
$$=|S\setminus(A\cup B\cup C)|+|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$$
$$+|A\cap B\cap C|$$

$$\Rightarrow 30=2+17+14+8-10-3-2+|A\cap B\cap C|$$

$$\Rightarrow |A\cap B\cap C|=\boxed{4}$$

4 osobe govore sva tri stana jezika.

3) $f(x) = 3\arcsin(2x) + \pi$



b) $D(\arcsin) = [-1, 1]$

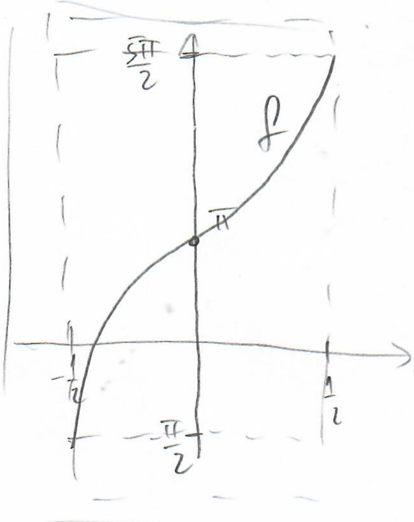
$x \in D(f) \Leftrightarrow 2x \in D(\arcsin) \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ $\Big\}$ $D(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Za $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ je $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(2x) \le \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \le 3\arcsin(2x) + \pi \le \frac{5\pi}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{5\pi}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3\frac{\pi}{2} + \pi = -\frac{\pi}{2}$, f je neprekidna $\Big\}$ $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$



c) Funkcija f je surjekcija na svoju sliku.

f je strogo rastuća funkcija, jer je arcsin strogo rastuća pa je injekcija.

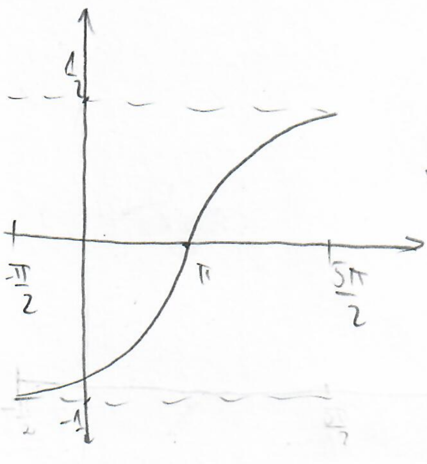
$\Rightarrow$ f je bijekcija. f ima inverz $f^{-1}: \operatorname{Im} f \to D(f)$.

Neka je $y \in \operatorname{Im} f$, Tražimo x t.d. je $f(x) = y$.

$y = 3\arcsin(2x) + \pi$

$\frac{y-\pi}{3} = \arcsin(2x) \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{y-\pi}{3}\right)$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{y-\pi}{3}\right)$

$D(f^{-1}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, $\operatorname{Im} f^{-1} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

a) ~~[illegible]~~ , g strogo rastuća, h strogo rastuća, $f = h \circ g$,

Neka su $x, y \in D(f)$, $x < y$.

g je strogo rastuća $\Rightarrow$ $g(x) < g(y)$

h je strogo rastuća $\Rightarrow$ $h(g(x)) < h(g(y))$

$\Rightarrow$ $f(x) < f(y)$.

4. a) Neka je niz (a_n) padajući i omeđen odozdo.

- kako je (a_n) omeđen odozdo, ima najveću donju među L za koju vrijedi:
  - $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \geq L$ (L je donja međa)
  - $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ t.d. $a_{n_0} < L + \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$ $L+\varepsilon$ nije donja međa)
- kako je (a_n) padajući:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq a_{n_0} < L + \varepsilon)$$

- nadalje:

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$\iff |a_n - L| < \varepsilon.$$

- time smo pokazali:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|a_n - L| < \varepsilon),$$

tj. (a_n) je konvergentan i limes mu je najveća donja međa L.

4) b) $a_1 = 8$

$$a_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{a_n}}\right)^3$$

$$a_2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$a_3 = \left(2 - \frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$a_4 = \left(2 - \frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

$a_4 < a_3 < a_2 < a_1$ Baza indukcije

$a_1, a_2, a_3, a_4 > 1.$ Baza indukcije.

Naslućujemo: a_n je padajući, $a_n \geq 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

T: (a_n) je padajući.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $a_{n+1} < a_n$.

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a_{n+1}} < \sqrt[3]{a_n}$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{a_{n+1}}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a_n}}$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{a_{n+1}}}\right)^3 < \left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{a_n}}\right)^3 = a_{n+1}$$

KORAK INDUKCIJE

Po P.M.I niz (a_n) je padajući

T: $a_n \geq 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $a_n \geq 1$

$$\sqrt[3]{a_n} \geq 1$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{a_{n+1}}} \geq -1$$

$$2 - \frac{1}{\sqrt[3]{a_{n+1}}} \geq 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \geq 1$$

KORAK INDUKCIJE

Po P.M.I $a_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Niz je padajući i omeđen odozdo $\Rightarrow$ konvergentan je, postoji $L = \lim_{n\to\infty} a_n$

$$a_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{a_n}}\right)^3 \Big/ \lim$$

$$L = \left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{L}}\right)^3 \Rightarrow L = 1 \text{ je jedino rješenje.}$$

5) a) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^2}{2x+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to -1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2x+2}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2}{2x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to -1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2x+2}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ limes ne postoji.

b) Funkcija f je neprekinuta na $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ jer je kompozicija neprekinutih funkcija.

Mora vrijediti: $f(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

$f(3) = \sqrt{a+9} = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2+3x+9) = 27$

$\sqrt{a+9} = 27$

$a = 720.$

c) Vidi predavanja.

6)

a) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{3x+3\Delta x} - e^{3x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} e^{3x}\left(\frac{e^{3\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) = 3e^{3x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{3\Delta x} - 1}{3\Delta x} = 3e^{3x}$$

b) $$\left.\begin{matrix} f_1(0) = 1, & f_2(0) = 1 \\ f_1'(0) = 3, & f_2'(0) = 3 \end{matrix}\right\} \; t\ldots$$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$y = 3x + 1$

c) f je diferencijabilna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 3\cos x = 3 \\ \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 3e^{3x} = 3 \end{matrix}\right\} \; f \text{ je diferencijabilna u } x = 0.$$