Graf realne funkcije – VERTIKALNI TEST

· svojstvo da svaki pravac paralelan s osi y siječe f-iju u samo jednoj točki.

Domena – skup svih vrijednosti x za koje f-ja ima $\mathbb{R}$ rješenja

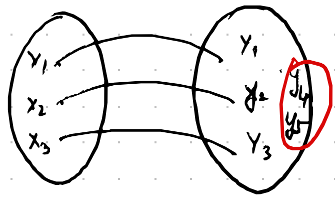
Slika – skup svih vrijednosti koje poprima funkcija (kodomena)

INJEKCIJA

domena

$\forall x_1, x_2 \in X$

$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



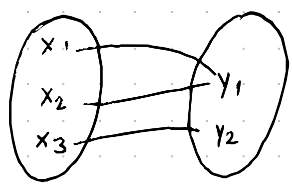
* nije surjekcija

*svaki x se preslikava u samo 1 y

↳ horizontalni test: pravac paralelan s osi x siječe graf u samo 1 točki

SURJEKCIJA

*za svaki y postoji neki x koji se u taj y preslikava.



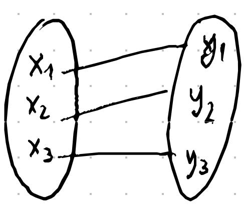
* nije injekcija

jer 2 x idu u isti y

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x))$$

BIJEKCIJA

- ako je i surjekcija i injekcija, onda je bijekcija
- svaki x ima svoj y i nijedan y nije bez para



Primjer sa sata) Ispitajte injektivnost i surjektivnost

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_1 = x^2$

INJEKCIJA

$f(x_1) \neq f(x_2)$ $\quad x_1 \neq x_2$

$x_1^2 \neq x_2^2$

$x_1 = \pm x_2$ nije injekcija

SURJEKC.

$Im f = \mathbb{R}$?

$x^2 \geq 0$ $\mathbb{R}$

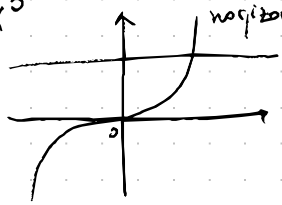
$\downarrow$

$Im f = [0, \infty\rangle$

nije surjekcija

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$

to bi bio horizontalni test



*bitno je da kodomena i slika funkcije budu jednake

INJEKCIJA

$f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^3 = x_2^3$

$x_1 = x_2$ injekcija ✓

$Im f = \mathbb{R} \to$ surjekcija $\to$ jer funkcija poprima sve vrijednosti kodomene

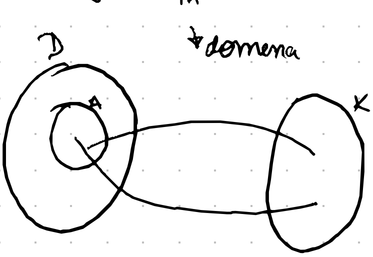
$\Longrightarrow$ BIJEKCIJA

RESTRIKCIJA: $f : D \to K$ na skup $A \subset D$

D – domena, K – kodomena

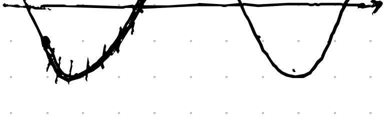
je funkcija $f|_A : A \to K$ zadana $f|_A(x) = f(x)$ za sve $x \in A$.

*domena



*restrikcija → ograničenje

(ograničenje domene na manji podskup



INVERZNA FUNKCIJA

domena kodomena

$f : X \to Y$ funkcija

$g : Y \to X$ inverzna funkcija (suprotni smjer)

ako vrijedi

$g(f(x)) = x \quad \forall x \in X$

$f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y$

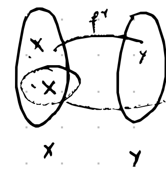
MORA BITI BIJEKCIJA

$\to \quad g \circ f = id_X \qquad f \circ g = id_Y$

nema:

* **ako fja nije surjekcija**

$(\exists x \in X \,;\, y \not\to x)$



ne preslikava se u njega

* **ako fja nije injekcija**

za različit „x" fja poprima isti y $(f(x_1) = f(x_2))$

nemoguće je y jednozn. preslikati u jednu točku

$\Downarrow$ ako postoji inverzna fja od $f : X \to Y$, ona je <u>jedinstvena</u>

$$\underbrace{f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y}$$

$f^{-1} \circ f = id_X \qquad f \circ f^{-1} = id_Y$

$\to \quad \boxed{y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)}$

Domena i slika

$D(f^{-1}) = Im(f)$

$Im(f^{-1}) = D(f)$

$\longrightarrow$ jer su simetrične s obzirom na $y = x$ os