

Dekanski ispitni rok iz Matematičke analize 1

17. rujna 2019.

1. (7 bodova)

(a) (2b) Skicirajte skup svih $z \in \mathbb{C}$ takvih da je

$$1 \leq |z - 1| \leq 2 \quad \text{i} \quad \arg(z - 1) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

(b) (5b) Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$z^3 = (1 - i)\bar{z}.$$

2. (8 bodova) Neka je dan skup $A = \{10, 20, 30\}$ i relacija ρ na skupu A definirana s $\rho = \{(10, 10), (10, 20), (20, 10), (30, 30)\}$.

(a) (4b) Je li ρ simetrična i tranzitivna relacija? Pokažite da ρ nije relacija ekvivalencije.

(b) (4b) Nadopunite relaciju ρ do $\tilde{\rho}$ najmanjim brojem parova tako da $\tilde{\rho}$ bude relacija ekvivalencije na A . Napišite particiju od A i kvocijentni skup od A generirane relacijom $\tilde{\rho}$.

3. (8 bodova)

(a) (3b) Dokažite sljedeću tvrdnju: Niz koji je rastući i omeđen odozgo je konvergentan.

(b) (5b) Za niz zadan rekursivnom formulom

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{5}, \quad a_1 = \frac{1}{5}$$

pokažite da je konvergentan i odredite mu limes.

4. (7 bodova) Neka je $f(x) = 3 \arccos(2x)$.

(a) (3b) Skicirajte graf funkcije f te odredite $D(f)$ i $Im(f)$.

(b) (2b) Odredite inverznu funkciju f^{-1} i $D(f^{-1})$ te skicirajte njezin graf.

(c) (2b) Odredite sve točke na grafu funkcije f^{-1} u kojima tangenta ima koeficijent smjera $k = -\frac{\sqrt{3}}{12}$.

OKRENITE STRANICU!

5. (8 bodova)

- (a) **(4b)** Iskažite i dokažite Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.
- (b) **(1b)** Geometrijski interpretirajte gornji teorem.
- (c) **(3b)** Neka je $f : \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Ako je $f'(x) = 0$ za sve $x \in \langle a, b \rangle$, dokažite da je onda $f(x) = \text{konst.}$ na $\langle a, b \rangle$.

6. (8 bodova)

- (a) **(6b)** Odredite područje definicije, ponašanje na rubu područja definicije i asimptote, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konkavnosti i konveksnosti, točke infleksije te nacrtajte kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x.$$

- (b) **(2b)** Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje jednačina $(x^2 - 3)e^x = a$ ima točno jedno rješenje.

7. (10 bodova)

- (a) **(2b)** Definirajte određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ kao limes integralnih suma. Nacrtajte sliku.
- (b) **(4b)** Izračunajte $\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2x^2 + x + 2} dx$.
- (c) **(4b)** Izračunajte $\int \frac{\cos x \sin^4 x}{\sin^{10} x + 1} dx$.

8. (8 bodova)

- (a) **(2b)** Definirajte nepravu integral funkcije f na intervalu $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.
- (b) **(3b)** Koristeći definiciju pod (a) ispitajte konvergenciju integrala $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$.
- (c) **(3b)** Ravninski lik koji je omeđen krivuljom $y = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, te pravcima $x = 0$, $x = 1$ i $y = 0$ rotira oko osi y . Odredite sve $\alpha > 0$ za koje dobiveno rotacijsko tijelo ima konačan volumen i beskonačno oplošje.

Ispit se piše 150 minuta. Dozvoljeno je isključivo korištenje pribora za pisanje i službenog podsjetnika za kolegij Matematička analiza 1.