Drugi jesenski ispitni rok iz Matematičke analize 1

3. rujna 2020.

Ime i prezime: ______________________________

JMBAG: ____________________

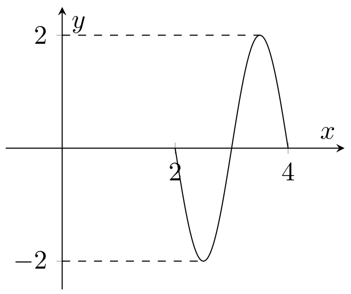
Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.
Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: ____________________

---

1. **(8 bodova)**
   (a) **(2 boda)** Definirajte sva 4 svojstva relacija na skupu A.
   (b) **(6 bodova)** Na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ zadana je binarna relacija
   $$\varrho = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}.$$
   Ispitajte koja svojstva zadovoljava ova relacija. Ako je potrebno, nadopunite ϱ do najmanje moguće relacije ekvivalencije te odredite pripadne klase ekvivalencije. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite

2. **(9 bodova)**



   (a) **(3 boda)** Na slici je dan dio sinusoide $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$. Odredite A, ω, φ
   (b) **(2 boda)** Neka je zadana funkcija $g : D \to K$, gdje su D i K neki skupovi. Napišite koje svojstvo funkcija g mora imati da bi imala inverz i definirajte inverz funkcije g^{-1}.
   (c) **(4 boda)** Odredite maksimalni interval I takav da restrikcija funkcije iz a dijela na interval I ima inverz te odredite domenu, sliku i jednadbu inverza.

3. **(8 bodova)**
   (a) **(4 boda)** Odredite derivaciju zadane funkcije koristeći definiciju derivacije.
      i. $f(x) = x^2$
      ii. $f(x) = e^{2x}$
   (b) **(2 boda)** Izračunajte derivaciju funkcije $f(x) = \ln^2(1 + \mathrm{tg}(x))$
   (c) **(2 boda)** Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije iz b u točki $T_0(x_0, y_0)$, za $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

4. **(6 bodova)**

   (a) **(2 boda)** Dokažite sljedeću tvrdnju: Ako su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi, onda vrijedi

   $$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

   (b) **(4 boda)** U ovisnosti o realnom parametru a odredite limes

   $$\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n^2}\right)n^a$$

5. **(7 bodova)**

   (a) **(2 boda)** Neka je I otvoren podskup skupa $\mathbb{R}$. Definirajte pojmove lokalnog minimuma i maksimuma za funkciju $f: I \to \mathbb{R}$ u točki $t \in I$.

   (b) **(2 boda)** Iskažite Fermatov teorem.

   (c) **(3 boda)** Dokažite Fermatov teorem.

6. **(8 bodova)** Odredite $D(f)$, ponašanje na rubu, intervale monotonosti. lokalne ekstreme i asimptote te nacrtajte kvalitativni graf funkcije

   $$f(x)=\ln\left(1-\frac{2}{x^2+x}\right)$$

7. **(10 bodova)**

   (a) **(2 boda)** Iskažite i dokažite formulu za parcijalnu integraciju za neodređeni integral

   (b) **(4 boda)** Izračunajte integral

   $$\int xe^{-2x}dx$$

   (c) **(4 boda)** Izračunajte integral

   $$\int \frac{\mathrm{tg}(\ln x)}{x}dx$$

8. **(8 bodova)**

   (a) **(4 boda)** Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y=\sqrt{x-1}$ i pravcem $y=\frac{1}{2}x-1$u prvom kvadrantu.

   (b) **(4 boda)** Izračunajte volumen tijela dobivenog rotacijom like pod a oko osi x.

Napomena: Ispit se piše **150 minuta**. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika sa kolegija matematička analiza 1. Nije dozvoljena uporaba kalkulatora.