WDWR
Projekt
20602

Student:
Anton Pylkevych
308821
Prowadzący:
Dr inż. Adam Krzemienowski

Warszawa 2020

2. Zadanie 1

Zaproponować jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością oczekiwaną jako miarą kosztu. Wyznaczyć rozwiązanie optymalne.

2.1.Dane

- Do produkcji pięciu podzespołów (A, B, C, D i E) przedsiębiorstwo musi wydzierżawić trzy maszyny.
- Każdy podzespół może być produkowany na każdej maszynie, maszyny różnią się jednak wydajnością przy produkcji poszczególnych podzespołów, co przedstawia tabela:

Maszyna	Wydajność maszyny (szt./godz.) przy produkcji podzespołu				
	A	B	C	D	E
M1	0,85	1,30	0,65	1,50	0,40
M2	0,65	0,80	0,55	1,50	0,70
M3	1,20	0,95	0,35	1,70	0,40

- Każdą z maszyn można wydzierżawić na co najwyżej 180 godz. w ciągu miesiąca. Koszty 1 godz. pracy maszyn (zł) określają składowe wektora losowego $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)^T$:

M1	M2	M3
R_1	R_2	R_3

- Wektor losowy $\mathbf{R}$ opisuje 3-wymiarowy rozkład t-Studenta z 5 stopniami swobody, którego wartości składowych zostały zawężone do przedziału $[20; 50]$. Parametry $\boldsymbol{\mu}$ oraz $\boldsymbol{\Sigma}$ niezawężonego rozkładu t-Studenta są następujące:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 45 \\ 35 \\ 40 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 36 & -8 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Należy rozdzielić miesięczną produkcję podzespołów pomiędzy maszyny tak, aby wyprodukować co najmniej po 60 szt. podzespołów A, B, C oraz co najmniej 120 szt. podzespołów D i E.
- Przy dzierżawie dowolnej z maszyn na okres do 100 godz., koszt 1 godz. pracy maszyny maleje o 20%.

2.2. Rozwiązanie

Na Początku liczymy wartości oczekiwane zawężonych rozkładów brzegowych.
Robimy to zgodnie z formułą:

$$\mathbb{E}(R) = \mu + \sigma * \frac{(\Gamma((v-1)/2)((v + a^2)^{-(v-1)/2} - (v + b^2)^{-(v-1)/2})v^{v/2})}{2(F_v(b) - F_v(b))\Gamma(v/2)\Gamma(1/2)} \quad \text{, dla } v > 1$$

Gdzie:

- $\Gamma()$ – funkcja gamma Eulera
- (a, b) - przedział
- $a = (\alpha - \mu)/\sigma$,
- $b = (\beta - \mu)/\sigma$,
- v - liczba stopni swobody
- μ - wartość oczekiwana

Do obliczeń wykorzystamy możliwości pakietu R. (Plik –„***Gen_exp.r***”)
Skąd otrzymujemy:

```
> Er
[1] 44.98682 35.00000 39.87610
>
```

E(R1)≈ 44,99;
E(R2)≈ 35.00;
E(R3)≈ 39.88.

2.2.1. model

Teraz budujemy model jednokryterialny:

```
model;

param M; # liczba maszyn
param N; # liczba czesci
param efficiency {1..M, 1..N}; # wydajnosc [szt/h]
param C {1..N};       # minimalne ilosci wypr. czesci
param R_exp {1..M};          # wartosci oczekiwane kosztow maszyn [pln/h]



var bool{1..M} binary; #okresla czy nadwyzka zostala przekroczona
var t_first {1..M, 1..N}; # czas 80% malej [maszyna,czesc]
var t_sec {1..M, 1..N};         # czas 100% wydajnosci [maszyna,czesc]
var gen_t {m in 1..M} = sum {n in 1..N} (t_first[m,n] + t_sec[m,n]); #ogolny czas pracy masz
var t_mach_comp {m in 1..M, n in 1..N} = t_first[m,n] + t_sec[m,n]; #czas pracy masz\czeszc
var c {n in 1..N} = sum {m in 1..M} efficiency[m,n] * (t_first[m,n] + t_sec[m,n]);
```

```
var total_cost = (sum{m in 1..M, n in 1..N} 0.8*t_first[m,n]*R_exp[m]) + (sum{m in 1..M, n
in 1..N} t_sec[m,n]*R_exp[m]) + sum{m in 1..M} bool[m]*20*R_exp[m];



subject to c2: total_cost >= 0;

subject to c1 {n in 1..N}:
  c[n] >= C[n];

subject to t1 {m in 1..M}:
  sum {n in 1..N} (t_first[m,n] + t_sec[m,n]) <= 180;

subject to t2 {m in 1..M, n in 1..N}:
  t_first[m,n] >= 0;

subject to t3 {m in 1..M}:
  sum {n in 1..N} t_first[m,n] <= 100;

subject to t4 {m in 1..M, n in 1..N}:
  t_sec[m,n] >= 0;

subject to t5 {m in 1..M}:
  sum {n in 1..N} t_first[m,n] >= 100 * bool[m];

subject to t6 {m in 1..M}:
  sum {n in 1..N} t_sec[m,n] <= 180 * bool[m];


minimize model: total_cost;
```

2.2.2. Zmienne:

Wszystkie wartości oprócz liczby wytworzonych podzespołów mogą nie być liczbami całkowitymi.

- bool{1..M} binary - przyjmuje wartość 1, jeśli liczba godzin pracy maszyny jest większa niż 100, a 0, jeśli jest mniejsza.

całkowity maksymalny czas pracy (180h) maszyn jest podzielony na 2 dwie części:

- t_first {1..M, 1..N} - odpowiada za pierwsze 100 godzin pracy

- t_sec {1..M, 1..N} - odpowiada za pozostałe godziny pracy (80)

- gen_t {m in 1..M} - oznacza całkowity czas działania maszyny

- gen_t {m in 1..M} - oznacza całkowity czas działania maszyny

- t_mach_comp {m in 1..M, n in 1..N} - oznacza czas pracy maszyny na każdym podzespołem

- c {n in 1..N} - oznacza wyprodukowaną liczbę podzespołów (A, B, C, D i E)

- total_cost - oznacza całkowity koszt produkcji zgodnie z treścią problemu. Zastosowanie zniżki 20%, gdy czas pracy maszyny nie przekracza 100h. Zmienna binarna ***bool*** wykorzystywana jest, gdy trzeba dodać 20 jednostek kosztu, po przekroczoniu 100h limitu czasu pracy maszyny.

2.2.3 Parametry:

- M - oznacza liczbę maszyn
- N - oznacza ilość podzespołów
- efficiency {1..M, 1..N} - oznacza wydajnosc [num/h]
- C {1..N} - oznacza minimalne ilosci wypr. czesci
- R_exp {1..M} - oznacza wartosci oczekiwane kosztow pracy maszyn [pln/h]

Ograniczenia:

- total_cost >= 0;
Koszty nie mogą być liczbami nienaturalnymi;
- c[n] >= C[n];
Ograniczenia zgodnie z treścią zadania. (Ilosci wyprodukowanych częsci muszą być co najmniej w określonej ilości).
- sum {n in 1..N} (t_first[m,n] + t_sec[m,n]) <= 180
Określa podział całkowitego czasu pracy na dwie części, suma godzin nie może być większa niż maksymalna ustawiona.
- t_first[m,n] >= 0;
- sum {n in 1..N} t_first[m,n] <= 100;
Ograniczenia określające wielkość pierwszej części godzin pracy maszyny.
- t_sec[m,n] >= 0;
Czas pracy musi być wartością naturalną
- sum {n in 1..N} t_first[m,n] >= 100 * bool[m];
- sum {n in 1..N} t_sec[m,n] <= 180 * bool[m];
Ograniczenia, które decydują o akceptacji wartości zmiennej logicznej. 0 - jeśli liczba godzin pracy maszyny jest mniejsza niż 100, a 1 w innym przypadku.

2.2.4 Funkcja celu:

minimize model: total_cost;
Rozwiązujemy problemy związane z optymalizacją poprzez minimalizację kosztów.

2.2.5 Rozwiązanie optymalne

Na podstawie modelu my wyznaczamy rozwiązanie optymalne:

Funkcja celu przyjmuje wartość = 16383.1

Przy następnych zmiennych decyzyjnych:

	M1	M2	M3
A	0	0	50
B	46.1538	0	0
C	92.3077	0	0
D	14.7619	8.57143	50
E	0	171.429	0

Godziny pracy każdej maszyny:

M1	153.223
M2	180
M3	100

3. Zadanie 2

3.1. Treść

Scenariusze potrzebne do rozwiązania danego zadania zostały wygenerowane przy użyciu poniżej funkcji **rtmvt** dostępnej w bibliotece «**tmvtnorm**» w programie R-statistics.

rtmvt(n,µ,sigma,df,lower,upper)

- **n** - liczba generowanych scenariuszy;
- **µ oraz Σ** zmienne podane w treści zadania;
- **df** - liczba stopni swobody równa 5;
- **lower** - wektor dolnej granicy przedziału równy [20, 20, 20];
- **upper** - wektor górnej granicę przedziału równy [50, 50, 50].

Plik – Scen.r
Kod:

```
library(tmvtnorm)

df = 5
mu = c(45, 35, 40)
sigma = matrix(c(1, -2, -1, -2, 36, -8, -1, -8, 9), 3, 3)
lower = c(20,20,20)
upper=c(50,50,50)

data <- rtmvt(n=5000, mu, sigma, df, lower, upper)

write.table(data, "d:/WDWR/Scenarios.txt", sep=" ", col.names = F, row.names = F)
```

Scenariusze zostały zapisane do pliku **Scenarios.txt**

Zagadnienie odchylenia przeciętego jako miary ryzyka można sformułować używając modelu **MAD**, które odpowiada zadaniu programowania liniowego:

$$\textbf{MAD:} \quad \max \{\mu(\mathbf{x}) - \lambda\delta(\mathbf{x}) \;:\; \mathbf{x} \in Q\}$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j - \lambda \sum_{t=1}^{T} p_t(d_t^+ + d_t^-)$$
$$\mathbf{x} \in Q$$
$$d_t^+ - d_t^- = \sum_{j=1}^{n} (\mu_j - r_{jt}) x_j \quad \text{dla } t = 1, \ldots, T$$
$$d_t^+, d_t^- \geqslant 0 \quad \text{dla } t = 1, \ldots, T$$

3.1. Model

Dla modelu dwukryterialnego zastosujemy metodę **punktu odniesienia.**

Więc dodajemy dodajemy niektóre zmienne, parametry i ograniczenia. A także zmodyfikujemy funkcję celu, aby uwzględniała oba kryterie.

Stała **a** zawiera punkt aspiracji i jest zmieniana w skrypcie przygotowanym do projektu w celu wyznaczenia zbioru rozwiązań efektywnych przestrzeni ryzyko–koszt. W zależności od punktu startowego uzyskiwane są różne rozwiązania niezdominowane. Metoda punktu odniesienia wykorzytuje maksymilizacje po wszystkich ocenach. Zostało zastosowane odwrócenie znaku **y** w ograniczeniach na definicje zmiennej **z**. W ten sposob mniejsze wartości **y**, będą większe dla −**y**. Wszystkie oceny są przeskalowane za pomocą mnożnika λ (przyjęto λ = 1) dla znormalizowania ich zakresów zmienności. Dalej, wartości wyrażające znormalizowane nadmiary wartości ocen ponad poziom aspiracji są pomniejszane przez czynnik β, rzędu 10^{-3}. W konsekwencji przyrost wartości oceny ponad poziomem apsiracji powoduje znacznie mniejszy przyrost wartości funkcji osiągnięcia niż w przypadku nieosiągania poziomu aspiracji.

3.1.1 Zmienne:

- y {k in K} >= 0 - zawiera 2 kryteria: Koszt i ryzyko.
- v - zmienna pomocnicza do metody punktu odniesienia
- z {k in K} - zmienna pomocnicza do metody punktu odniesienia

3.1.2 Parametry:

set **K -** określa liczbę kryteriów;
param **R {i in 1..500, 1..M}** - scenariusze kosztow maszyn;
param **pk {m in 1..M} = max{p in 1..500} R[p,m]** - koszt pesymistyczny ;
param **eps** - mala stala do metody punktu odniesienia;
param **a {k in K}** - punkt aspiracji w metodzie punktu odniesienia;
param **lambda** -stala skalujaca w metodzie punktu odniesienia;
param **beta** - krok w metodzie punktu odniesienia;

3.1.3 Ograniczenia:

- subject to koszt:

y[1] = (**sum**{m **in** 1..M, n **in** 1..N} 0.8*t_first[m,n]*R_exp[m]) + (**sum**{m **in** 1..M, n **in** 1..N} t_sec[m,n]*R_exp[m]) + **sum**{m **in** 1..M} bool[m]*20*R_exp[m];

Zmienna **y[1]** odpowiada zmiennej ***total_cost*** z jednokryterialnej modeli; Teraz to jest definicją **kosztu**.

- subject to ryzyko:

y[2] = (**sum**{m **in** 1..M, n **in** 1..N} (0.8*t_first[m,n] + t_sec[m,n])*pk[m]) + **sum**{m **in** 1..M} bool[m]*20*pk[m] - y[1];

Ograniczenie określające drugie kryterium (ryzyko). Definicje **ryzyka.**

- **subject to** odniesienie1 {k **in** K}:

v <= z[k];

Definicja zmiennej **v.**

- **subject to** odniesienie2 {k **in** K}:

beta*lambda *(-y[k]+a[k]) >= z[k];

- subject to odniesienie3 {k **in** K}:

lambda*(-y[k]+a[k]) >= z[k];

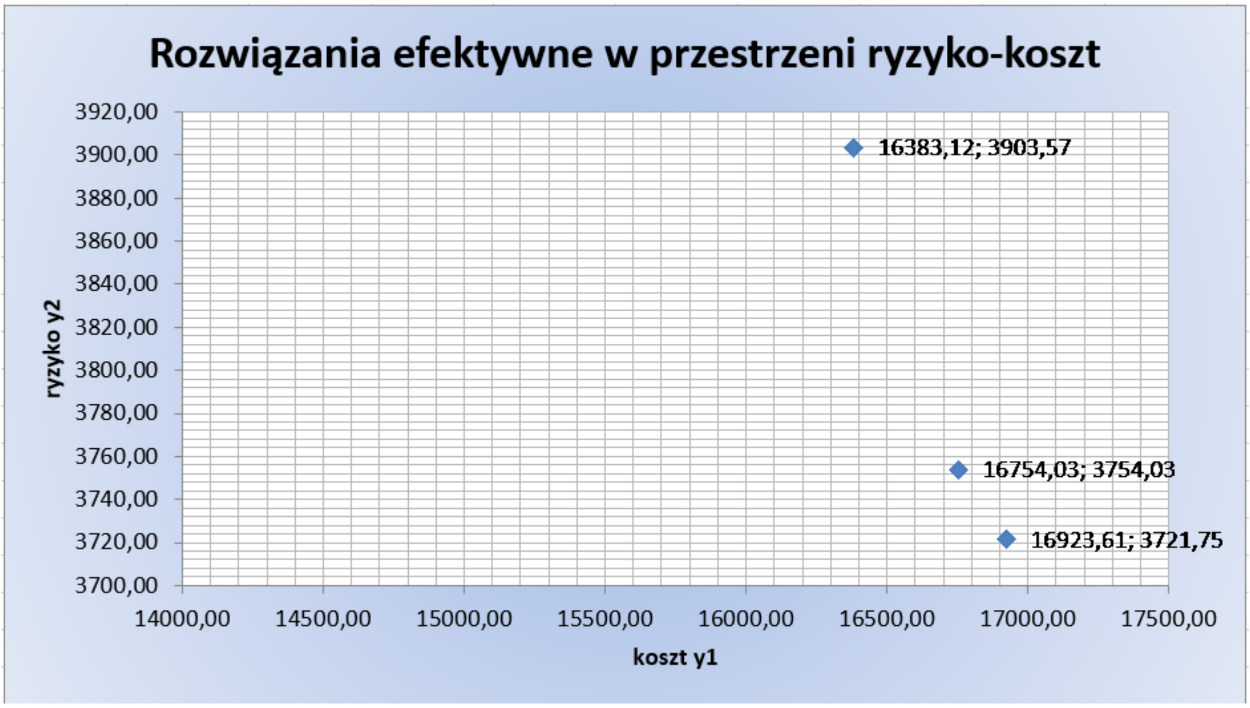
Definicje zmiennej **z[k].**

3.1.4 Funkcja celu:

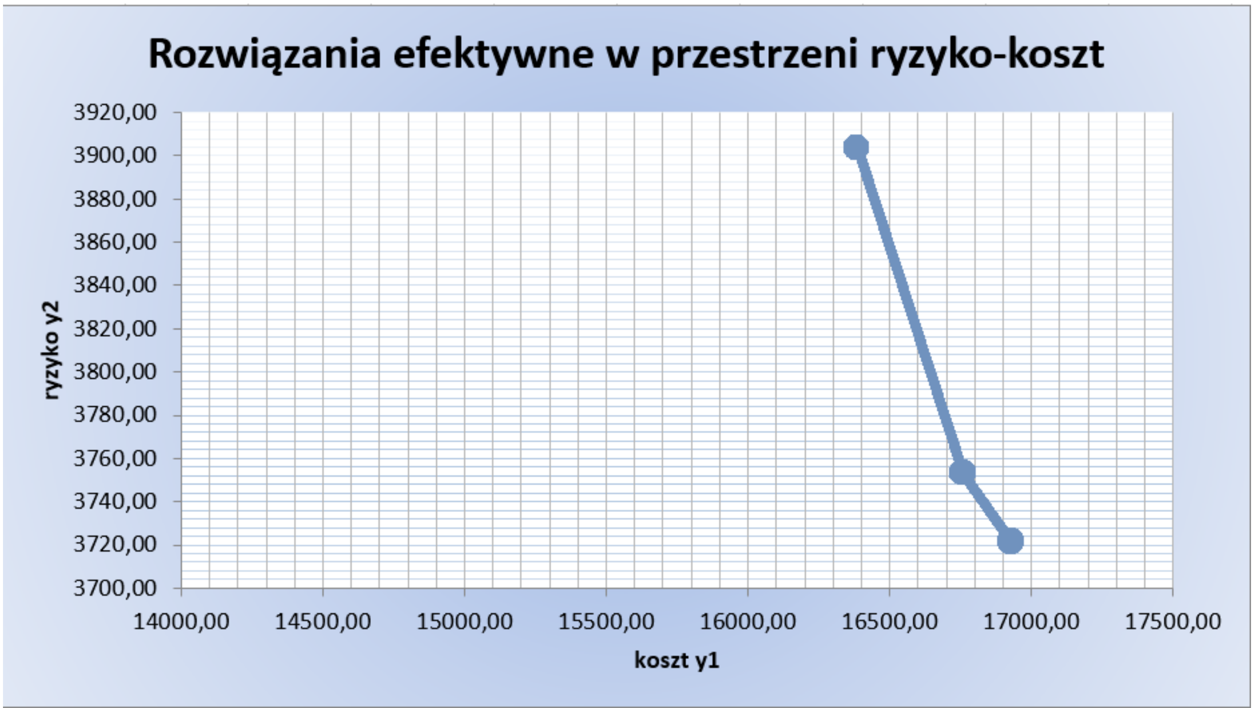
maximize cost: v + **sum**{k **in** K} eps*(-y[k]);

3.2. (a) Zbiór rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–koszt

Rysunek 1 oraz 2 przestawiają zbiór rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko-koszt.



Rysunek 1: Obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–koszt, w zł/zł



Rysunek 2: Obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–koszt, w zł/zł

3.2.1. (b) Rozwiązania efektywne minimalnego kosztu i minimalnego ryzyka

Rozwiązania efektywne minimalnego kosztu i minimalnego ryzyka odpowiadają skrajnym rozwiązaniom w przestrzeni ryzyko–koszt.

Minimalny koszt
dla funkcji celu min(y1)
koszt = 16383.1
ryzyko = 3903,57

	M1	M2	M3
A	0	0	50
B	46.1538	0	0
C	92.3077	0	0
D	14.7619	8.57143	50
E	0	171.429	0

Tablica 1: Czas pracy m-tej maszyny nad e-tym podzespołem przy minimalizacji kosztu, w godz

Minimalne ryzyko
dla funkcji celu min(y2)
koszt = 16923.61
ryzyko = 3721.75

	M1	M2	M3
A	0	0	50
B	46.1538	0	0
C	92.3077	0	0
D	23.3333	0	50
E	18.2051	161.026	0

Tablica 2: Czas pracy m-tej maszyny nad e-tym podzespołem przy minimalizacji ryzyko, w godz

Podsumowanie

	min koszt	min ryzyko
M1	153.223	180
M2	180	161.026
M3	100	100

Tablica 3: Czas pracy maszyn

3.2.2 (c) Trzy rozwiązania efektywne minimalnego kosztu i minimalnego ryzyka

Tabela 4 przedstawia wybrane wyniki minimalnego ryzyka i minimalnego kosztu. Pierwszy wynik osiąga lepszy koszt, trzeci wynik osiąga lepsze ryzyko, drugi - zajmuje między nimi pozycję pośrednią.

Nr	**a1**	**a2**	**Koszt**	**Ryzyko**
1	1000	11000	16383.1	4019.11
2	16000	3000	16754.03	3754.03
3	14000	1000	16923.61	3721.75

Tablica 4: Trzy rozwiązania efektywne minimalnego kosztu i minimalnego ryzyka

Podsumowanie

	1	**2**	**3**
M1	153.223	173.213	180
M2	180	164.904	161.026
M3	100	100	100

Tablica 5: Czas pracy maszyn

Relacja dominancji stochastycznej pierwszego rzędu

Teoria

Dominacja stochastyczna

- Dominacja stochastyczna pierwszego rzędu

$$Y' \succeq_{FSD} Y'' \quad \Leftrightarrow \quad F_{Y'}(v) \leqslant F_{Y''}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

$$Y' \succ_{FSD} Y'' \quad \Leftrightarrow \quad Y' \succeq_{FSD} Y'' \quad \text{i} \quad Y'' \not\succeq_{FSD} Y'$$

- Zmienna losowa Y' dominuje zmienną losową Y'' w sensie dominacji stochastycznej pierwszego rzędu jeżeli dla każdego $v \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność $F_{Y'}(v) \leqslant F_{Y''}(v)$ i dla przynajmniej jednej wartości $v_0 \in \mathbb{R}$ jest to nierówność ostra

$$F_Y^{(-1)}(p) = \inf \{v \; : \; F_Y(v) \geqslant p\} \quad \text{dla } 0 < p \leqslant 1$$

$$\theta_i(\mathbf{y}) = F_Y^{(-1)}(\frac{i}{m}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Sprawdzenie

Możliwości techniczne uniemożliwiły niestety poprowadzenie prawdziwych wykresów dystrybuant, ale to nie powstrzymuje nas przed znaniem odpowiedzi na pytanie.

Dystrybuanta kosztu wybranych przypadków ukazuje dominowanie wartości kosztów przypadku nr 1 (skrajny przypadek o minimalnym koszcie). Wykresy dystrybuant Przypadków nr 2 i 3 zawierają się w całości pod wykresem przypadku nr 1. Jednocześnie, wykresy nr 2 i 3 przecinają się, a więc między tymi przypadkami nie ma relacji dominacji stochastycznej pierwszego rzędu.

A więc ostatecznie jedynie Przypadek nr 1 dominuje nad przypadkami 2 i 3 na podstawie relacji stochastycznej pierwszego stopnia dla miary kosztu.

Przypadek1 $\succ_{FSD}$ Przypadek2

Przypadek1 $\succ_{FSD}$ Przypadek3

Analogicznie do dystrybuanty kosztu, dystrybuanta ryzyka została poprowadzona dla każdego przypadku odejmując od ryzyka uzyskany w danym przypadku koszt. W obrębie przypadku wartość ryzyka była stała, gdyż był to przypadek pesymistyczny - wartość maksymalna kosztu. Z wykresu dystrybuant nie można zauważyć żadnych relacji dominacji. Wszystkie przypadki są niezdominowane, dla każdego z nich mogą istnieć decydencji, którzy go wybiorą.