Exercices de révision

Contents

1 Analyse

1.1 Calcul de périodicité

Calculer la périodicité de la fonction

$$f : x \mapsto \cos(5\pi t) + \sin(\frac{3}{2}\pi t)$$

1.2 Factorisation $a^n - b^n$

Factoriser $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

1.3 Série harmonique et série harmonique alternée

Notons :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Et :

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

Montrer que :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \ln(2)$
2. Justifier la convergence de G_n et B_n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n$ (sachant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

Indications :

- Montrer que $H_{2n} - H_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ln(2)$

- Décomposer les ordres pairs et impairs de A_{2n}, $P_{2n} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $I_{2n} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, pour montrer que $A_{2n} = H_{2n} - H_n$

1.4 Calcul d'une intégrale

Justifier l'existence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} (x^2 + 6x + 3) \exp(-x) \mathrm{d}x$$

(Réponse : -3)

1.5 Exercices oraux

1.5.1 Exercice 1

Soit $(u_n)_n$ une suite définie de la façon suivante :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n} \text{ avec } \alpha > 0 \text{ et } u_1 > 0$$

1) Nature de la suite $(u_n)_n$
2) Trouver un équivalent de :

- $l - u_n$ quand u_n converge vers l
- u_n quand u_n diverge

2 Algèbre

2.1 Espaces vectoriels

2.1.1 Réunion de sev (18.10)

Soient E un $\mathbb{K}-$ev, A, B deux sev de E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A \cup B$ est un sev de E
2. $A \subset B$ ou $B \subset A$

2.1.2 Inégalité sur des carrés de dimensions de sev (18.12)

Soient E un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie, $E, F deux sev de E. Montrer : $\geq$

$$(\dim(F+G))^2 + (\dim(F \cap G))^2 \geq (\dim(F))^2 + (\dim(G))^2$$

2.2 Exercices oraux

2.2.1 Exercice oral improvisé

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonales, $\alpha \in]0, 1[$.

Montrer que si $\alpha A + (1-\alpha)B$ est orthogonale alors $A = B$

2.2.2 Exercice oral improvisé

Soit $u \colon E \to E$ où E est un espace vectoriel euclidien.

On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ et $\mu < 0$ deux valeurs propre de u.

Montrer qu'il existe $x \in E$, $x \neq 0$ tels que$\langle u(x) \mid x \rangle = 0$

3 Statistiques

3.1 Exercice : calcul d'intégrales

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx + c)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{a} + c\right)$$

Sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

3.2 Équivalences intégrales infinies

Soit f une fontion C^1 sur $[0, +\infty[$, continue, positive, décroissante. Montrer que : si $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge alors $\lim_{x \to +\infty} xf(x) = 0$

Solution :

Notons $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. On a :

$$\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(x/2) \geq \int_{x/2}^{x} f(x)\mathrm{d}t = \frac{xf(x)}{2} \geq 0$$

D'où le résultat voulu d'après le théorème des gendarmes

3.3 Exercices oraux

3.3.1 Exercice 1

Soient $a > 0$, $r > 0$. On dit que $T \sim \mathcal{P}(a, r)$ lorsque la densité de T est :

$$f_T(x) = \begin{cases} \frac{ar^a}{(x+r)^{a+1}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Soient a, b, c trois réels strictements positifs et A, B, C trois variables aléatoires indépendantes telles que $A \sim \mathcal{P}(a, r)$, $B \sim \mathcal{P}(b, r)$ et $C \sim \mathcal{P}(c, r)$.
Notons $X = \min(B, C)$, $Y = \min(A, C)$ et $Z = \min(A, B)$

1. Trouver la loi de X, Y et Z.

2. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$

3. Soit $(U_n)_n$ une suite de variables aléatoires telles que $U_n \sim \mathcal{P}\big(n, \frac{n}{\lambda}\big)$. Convergence en loi de $(U_n)_n$?