Analyse des séries temporelles avec R

ENSAE-ENSAI Formation continue (Cepe)

4 - Lissage exponentiel et qualité des prévisions

Alain Quartier-la-Tente

Objectifs de cette séquence

Présenter les méthodes basiques de prévision d'une série temporelle ainsi que le lissage exponentiel

Questions de positionnement

Quelles sont les modèles de prévision les plus simples ?

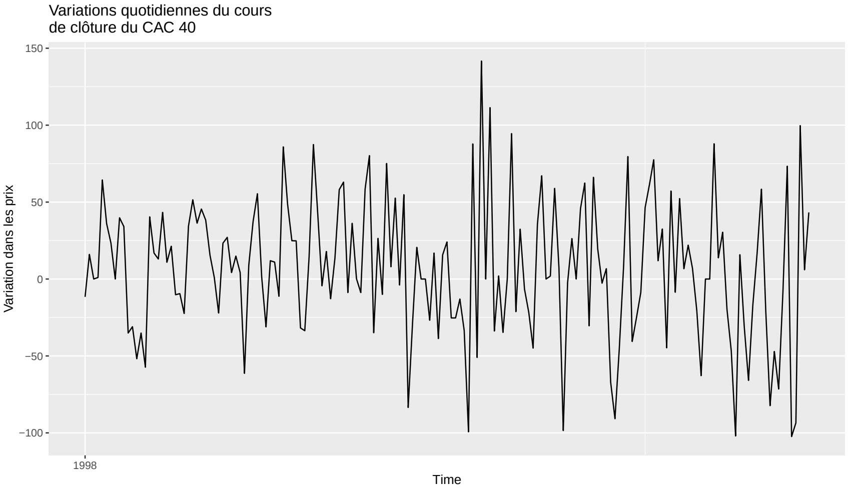
Comment évaluer la qualité d'un modèle de prévision ?

Quelles sont les propriétés que doivent suivre les erreurs de prévision ?

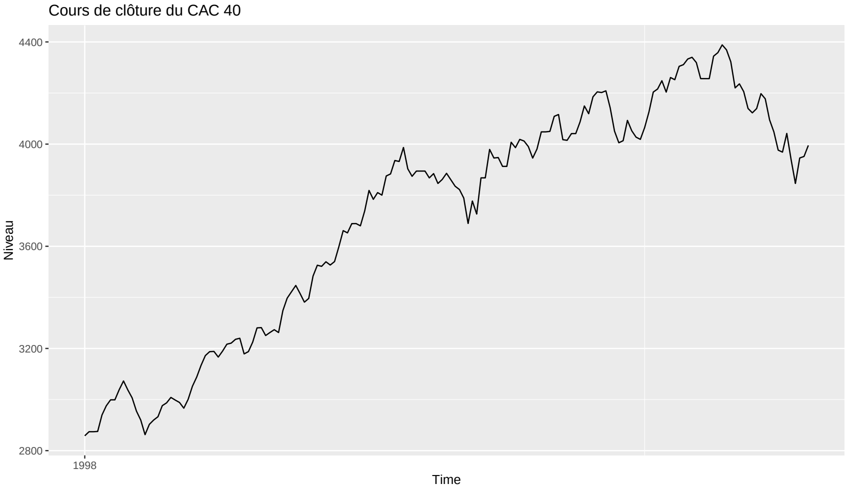
Qu'est-ce que le lissage exponentiel ?

Sommaire

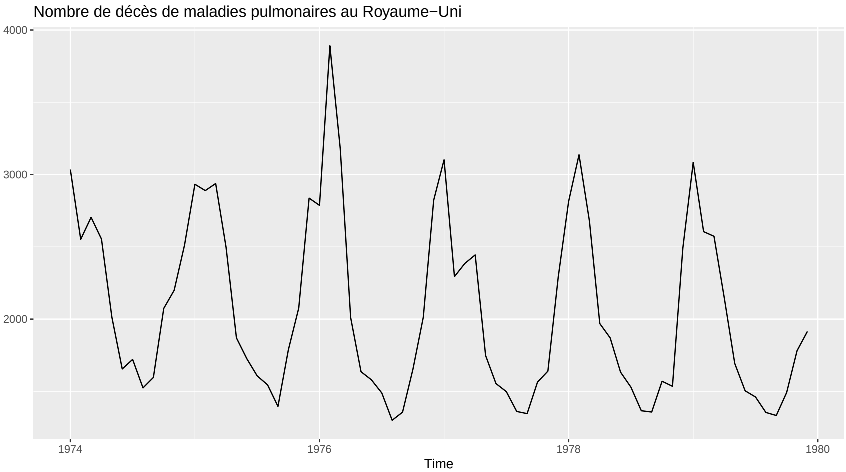
Comment prévoir ces séries ? (1)



Comment prévoir ces séries ? (2)



Comment prévoir ces séries ? (3)



Modèles de base

1. Moyenne de valeurs passées (`forecast::meanf()` ou `fable::MEAN()`):

$$\hat{y}_{T+h|T} = \bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} y_t$$

Modèles de base

1. Moyenne de valeurs passées (`forecast::meanf()` ou `fable::MEAN()`):

$$\hat{y}_{T+h|T} = \bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} y_t$$

2. Dernière valeur connue (`forecast::naive()` ou `fable::NAIVE()`) :

$$\hat{y}_{T+h|T} = y_T$$

Hypothèse du marché efficient

Modèles de base

1. Moyenne de valeurs passées (`forecast::meanf()` ou `fable::MEAN()`):

$$\hat{y}_{T+h|T} = \bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} y_t$$

2. Dernière valeur connue (`forecast::naive()` ou `fable::NAIVE()`) :

$$\hat{y}_{T+h|T} = y_T$$

Hypothèse du marché efficient

3. Dernière valeur connue à la saison précédente (`forecast::snaive()` ou `fable::SNAIVE()`), m la pérdiode de saisonnalité :

$$\hat{y}_{T+h|T} = y_{t+h-m(k+1)} \quad \text{avec} \quad k = \lfloor (h-1)/m \rfloor$$

Modèles de base

1. Moyenne de valeurs passées (`forecast::meanf()` ou `fable::MEAN()`):

$$\hat{y}_{T+h|T} = \bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} y_t$$

2. Dernière valeur connue (`forecast::naive()` ou `fable::NAIVE()`) :

$$\hat{y}_{T+h|T} = y_T$$

   Hypothèse du marché efficient

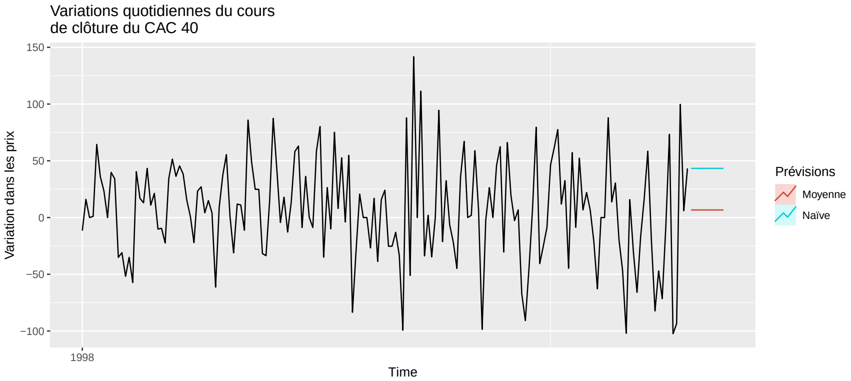
3. Dernière valeur connue à la saison précédente (`forecast::snaive()` ou `fable::SNAIVE()`), m la pérdiode de saisonnalité :

$$\hat{y}_{T+h|T} = y_{t+h-m(k+1)} \quad \text{avec} \quad k = \lfloor (h-1)/m \rfloor$$

Il y a également d'autres combinaisons possibles (*drift*...), voir https://otexts.com/fpp3/simple-methods.html

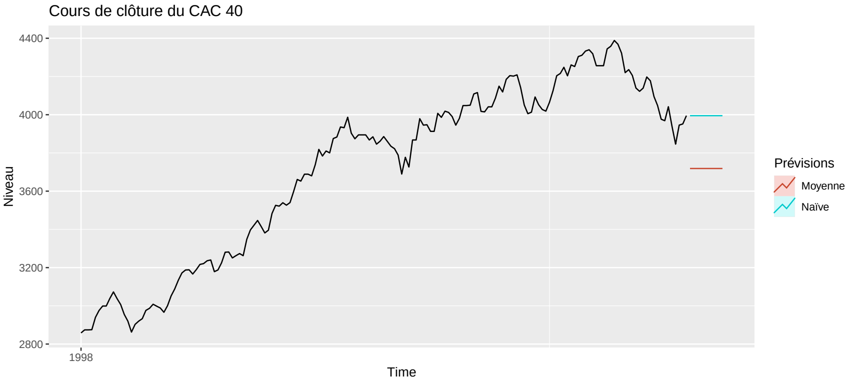
Retour sur les exemples (1)

```
y = window(diff(EuStockMarkets[,"CAC"]), start = 1998)
autoplot(y, y = "Variation dans les prix",
         main  = "Variations quotidiennes du cours\nde clôture du CAC 40") +
  autolayer(meanf(y, h=10), PI=FALSE, series="Moyenne") +
  autolayer(naive(y, h=10), PI=FALSE, series="Naïve") +
  guides(colour=guide_legend(title="Prévisions"))
```



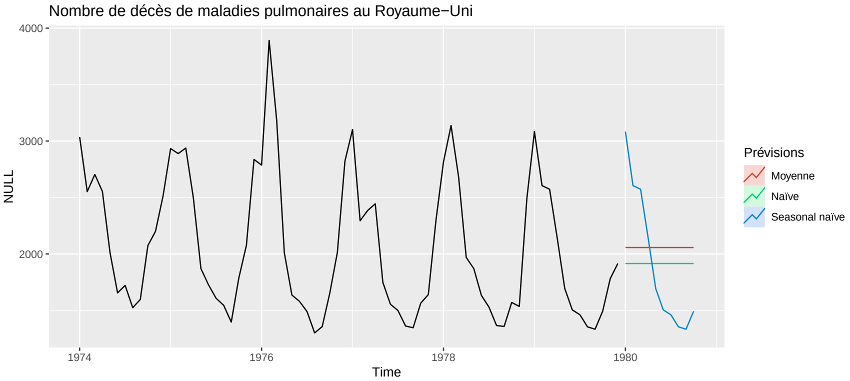
Retour sur les exemples (2)

```
y = window(EuStockMarkets[,"CAC"], start = 1998)
autoplot(y, y = "Niveau",
         main  = "Cours de clôture du CAC 40") +
  autolayer(meanf(y, h=10), PI=FALSE, series="Moyenne") +
  autolayer(naive(y, h=10), PI=FALSE, series="Naïve") +
  guides(colour=guide_legend(title="Prévisions"))
```



Retour sur les exemples (3)

```
autoplot(ldeaths, y = "NULL",
         main  = "Nombre de décès de maladies pulmonaires au Royaume-Uni") +
  autolayer(meanf(ldeaths, h=10), PI=FALSE, series="Moyenne") +
  autolayer(naive(ldeaths, h=10), PI=FALSE, series="Naïve") +
  autolayer(snaive(ldeaths, h=10), PI=FALSE, series="Seasonal naïve") +
  guides(colour=guide_legend(title="Prévisions"))
```



Sommaire

Modèle exponentiel simple (SES)

Méthode entre prévision naïve et moyenne lorsqu'il n'y a pas de tendance ni de saisonnalité claire

Modèle exponentiel simple (SES)

Méthode entre prévision naïve et moyenne lorsqu'il n'y a pas de tendance ni de saisonnalité claire

Idée : un poids décroissant est associée aux valeurs passées

$$\hat{y}_{T+1|T} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots$$

Modèle exponentiel simple (SES)

Méthode entre prévision naïve et moyenne lorsqu'il n'y a pas de tendance ni de saisonnalité claire

Idée : un poids décroissant est associée aux valeurs passées

$$\hat{y}_{T+1|T} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots$$

Peut s'écrire sous forme espace-état :

$$\begin{cases} \hat{y}_{T+h|T} & = l_t \\ l_t & = \alpha y_t + (1-\alpha)l_{t-1} \end{cases} \iff \begin{cases} y_t & = l_{t-1} + \varepsilon_t \\ l_t & = l_{t-1} + \alpha\varepsilon_t \end{cases}$$

l_t représente le niveau de la série.

Modèle exponentiel simple (SES)

Méthode entre prévision naïve et moyenne lorsqu'il n'y a pas de tendance ni de saisonnalité claire

Idée : un poids décroissant est associée aux valeurs passées

$$\hat{y}_{T+1|T} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots$$

Peut s'écrire sous forme espace-état :

$$\begin{cases} \hat{y}_{T+h|T} & = l_t \\ l_t & = \alpha y_t + (1-\alpha) l_{t-1} \end{cases} \iff \begin{cases} y_t & = l_{t-1} + \varepsilon_t \\ l_t & = l_{t-1} + \alpha\varepsilon_t \end{cases}$$

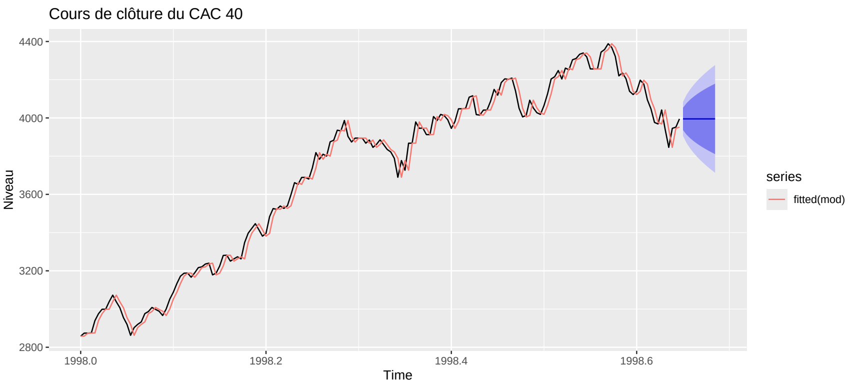
l_t représente le niveau de la série.

Paramètres à estimer : l_0 et α par minimisation des erreurs de prévision :

$$SSE = \sum_{t=1}^{T} e_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{y}_{t|t-1})^2$$

Exemple

```
mod <- ses(y)
mod2 <- ets(y, model = "ANN") # autre option
autoplot(mod) +
    autolayer(fitted(mod)) +
    labs(y = "Niveau",
         title  = "Cours de clôture du CAC 40")
```



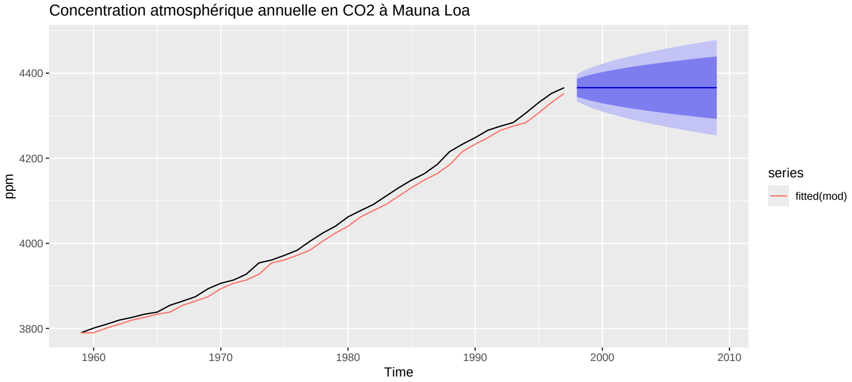
Exemple

```
mod2
```

```
ETS(A,N,N)

Call:
ets(y = y, model = "ANN")

  Smoothing parameters:
    alpha = 0.9999

  Initial states:
    l = 2857.9761

  sigma:  45.4825

     AIC     AICc      BIC
2161.198 2161.343 2170.587
```

Exemple 2

```r
mod <- ses(aggregate(co2), h = 12)
autoplot(mod) +
    autolayer(fitted(mod)) +
    labs(y = "ppm",
        title  = "Concentration atmosphérique annuelle en CO2 à Mauna Loa")
```



Lissage exponentiel double : Holt (1957)

Le SES peut être étendu pour ajouter une prévision de la tendance :

$$\begin{cases} \hat{y}_{T+h|T} & = l_t + h b_t \\ l_t & = \alpha y_t + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t & = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*) b_{t-1} \end{cases} \iff \begin{cases} y_t & = l_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t \\ l_t & = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t \\ b_t & = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t \end{cases}$$

Lissage exponentiel double : Holt (1957)

Le SES peut être étendu pour ajouter une prévision de la tendance :

$$\begin{cases} \hat{y}_{T+h|T} &= l_t + hb_t \\ l_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t &= \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1} \end{cases} \iff \begin{cases} y_t &= l_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t \\ l_t &= l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t \\ b_t &= b_{t-1} + \beta\varepsilon_t \end{cases}$$

On a encore $l_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t|t-1}$.

Damped trend/tendance amortie : Gardner & McKenzie (1985)

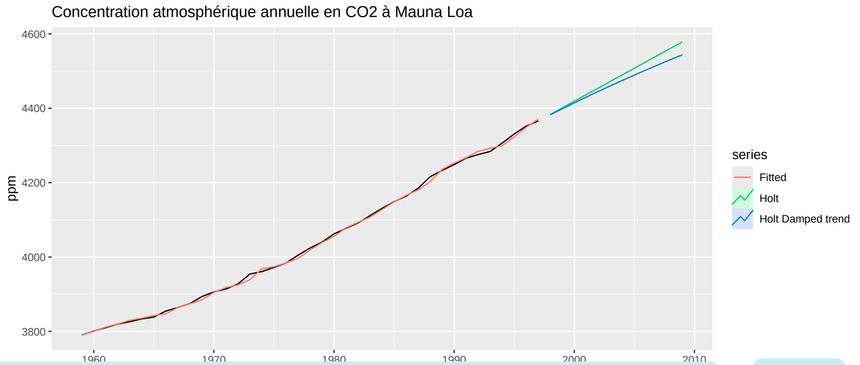
La méthode de Holt prévoit une tendance croissante de manière indéfinie : tend à sur-estimer les prévisions sur horizon longue.

Amortir la tendance avec le temps

$$\begin{cases} \hat{y}_{T+h|T} & = l_t + (\phi + \phi^2 + \cdots + \phi^h) b_t \\ l_t & = \alpha y_t + (1-\alpha)(l_{t-1} + \phi b_{t-1}) \\ b_t & = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)\phi b_{t-1} \end{cases} \iff \begin{cases} y_t & = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \varepsilon_t \\ l_t & = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t \\ b_t & = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t \end{cases}$$

Exemple

```
mod <- holt(aggregate(co2), h = 12)
mod_damped <- holt(aggregate(co2), damped = TRUE, h = 12)
mod2 <- ets(aggregate(co2), model = "AAN") # autre option
autoplot(aggregate(co2)) + autolayer(mod, PI = FALSE, series = "Holt") +
    autolayer(mod_damped, PI = FALSE, series = "Holt Damped trend") +
    autolayer(fitted(mod), series = "Fitted") +
    labs(y = "ppm",
         title  = "Concentration atmosphérique annuelle en CO2 à Mauna Loa")
```



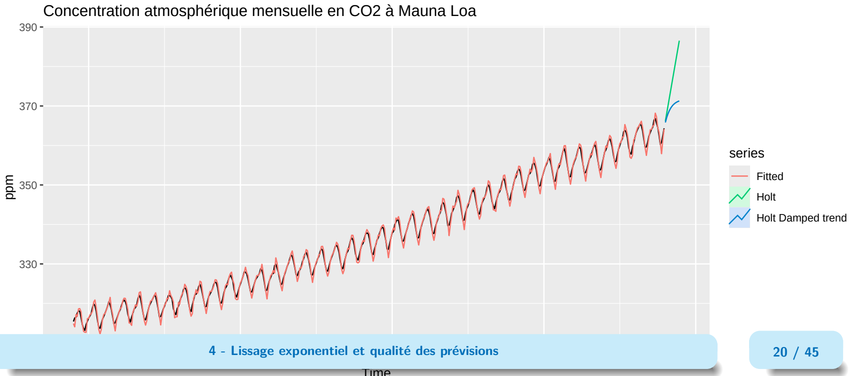
Exemple

```
mod2
```

```
ETS(A,A,N)

Call:
ets(y = aggregate(co2), model = "AAN")

  Smoothing parameters:
    alpha = 0.9999
    beta  = 0.1785

  Initial states:
    l = 3779.61
    b = 10.2955

  sigma:  5.8373

     AIC     AICc      BIC
286.2718 288.0900 294.5896
```

Exemple 2

```
mod <- holt(co2, h = 12)
mod_damped <- holt(co2, damped = TRUE, h = 12)
autoplot(co2) + autolayer(mod, PI = FALSE, series = "Holt") +
    autolayer(mod_damped, PI = FALSE, series = "Holt Damped trend
    autolayer(fitted(mod), series = "Fitted") +
    labs(y = "ppm",
         title  = "Concentration atmosphérique mensuelle en CO2 à
```



Holt-Winter

On ajoute une composante saisonnière !

$$\begin{cases} \hat{y}_{T+h|T} & = l_t + hb_t + s_{t+h-m(k+1)} \\ l_t & = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t & = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1} \\ s_t & = \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m} \end{cases} \iff \begin{cases} y_t & = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t \\ l_t & = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t \\ b_t & = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t \\ s_t & = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t \end{cases}$$

Holt-Winter

On ajoute une composante saisonnière !

$$\begin{cases} \hat{y}_{T+h|T} & = l_t + hb_t + s_{t+h-m(k+1)} \\ l_t & = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t & = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1} \\ s_t & = \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m} \end{cases} \iff \begin{cases} y_t & = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t \\ l_t & = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t \\ b_t & = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t \\ s_t & = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t \end{cases}$$

On peut aussi réécrire

$$s_t = \gamma^*(y_t - l_t) + (1-\gamma^*)s_{t-m}$$

Holt-Winter

On ajoute une composante saisonnière !

$$\begin{cases} \hat{y}_{T+h|T} & = l_t + hb_t + s_{t+h-m(k+1)} \\ l_t & = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t & = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1} \\ s_t & = \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m} \end{cases} \iff \begin{cases} y_t & = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t \\ l_t & = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t \\ b_t & = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t \\ s_t & = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t \end{cases}$$

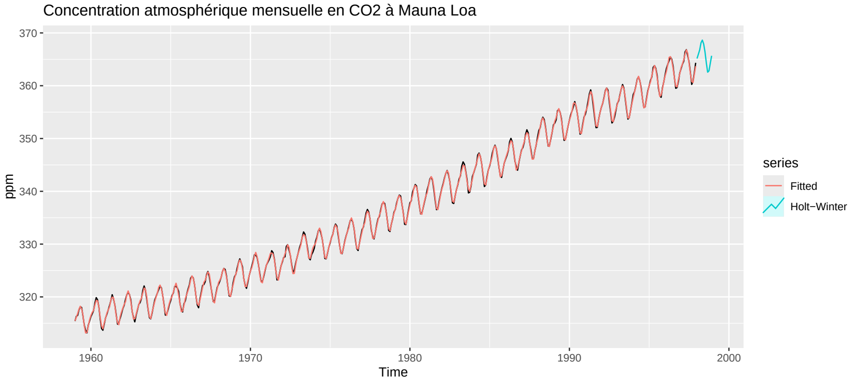
On peut aussi réécrire

$$s_t = \gamma^*(y_t - l_t) + (1-\gamma^*)s_{t-m}$$

Même idée avec tendance amortie

Exemple

```
mod <- hw(co2, h=12)
mod2 <- ets(co2, model = "AAA") # autre option
autoplot(co2) + autolayer(mod, PI = FALSE, series = "Holt-Winter") +
    autolayer(fitted(mod), series = "Fitted") +
    labs(y = "ppm",
         title  = "Concentration atmosphérique mensuelle en CO2 à Mauna Loa")
```



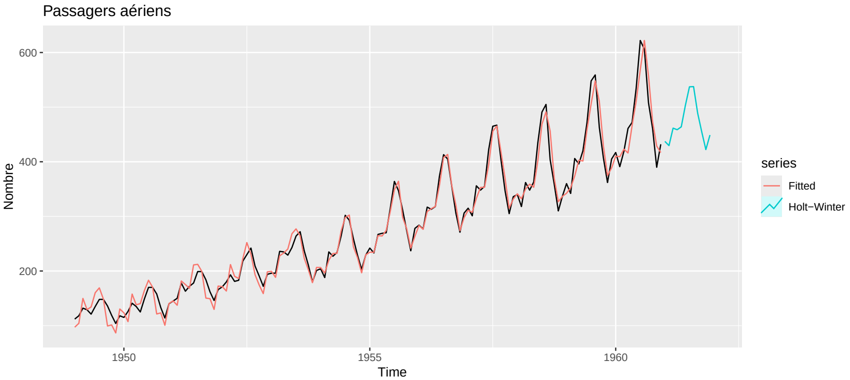
Exemple

```
mod2
```

```
ETS(A,A,A)

Call:
ets(y = co2, model = "AAA")

  Smoothing parameters:
    alpha = 0.5785
    beta  = 0.0061
    gamma = 0.1373

  Initial states:
    l = 315.3303
    b = 0.0801
    s = -0.8174 -1.836 -3.024 -2.7715 -1.2671 0.7784
           2.1746 2.702 2.1571 1.1912 0.6693 0.0433

  sigma:  0.294

     AIC     AICc      BIC
1749.350 1750.710 1819.874
```

Et maintenant ?

```
mod <- hw(AirPassengers, h=12)
mod2 <- ets(AirPassengers, model = "AAA") # autre option
autoplot(AirPassengers) + autolayer(mod, PI = FALSE, series = "Holt-Winter") +
    autolayer(fitted(mod), series = "Fitted") +
    labs(y = "Nombre",
         title  = "Passagers aériens")
```



Saisonnalité multiplicative

$$
\begin{cases}
\hat{y}_{T+h|T} & = (l_t + hb_t) + s_{t+h-m(k+1)} \\
l_t & = \alpha \frac{y_t}{s_{t-m}} + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\
b_t & = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1} \\
s_t & = \gamma \frac{y_t}{l_{t-1}+b_{t-1}} + (1-\gamma)s_{t-m}
\end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases}
y_t & = (l_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t \\
l_t & = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t \\
b_t & = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t / s_{t-m} \\
s_t & = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t / (l_{t-1} + b_{t-1})
\end{cases}
$$

Saisonnalité multiplicative

$$
\begin{cases}
\hat{y}_{T+h|T} & = (l_t + hb_t) + s_{t+h-m(k+1)} \\
l_t & = \alpha \frac{y_t}{s_{t-m}} + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\
b_t & = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*) b_{t-1} \\
s_t & = \gamma \frac{y_t}{l_{t-1}+b_{t-1}} + (1-\gamma) s_{t-m}
\end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases}
y_t & = (l_{t-1} + b_{t-1}) s_{t-m} + \varepsilon_t \\
l_t & = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t \\
b_t & = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t / s_{t-m} \\
s_t & = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t / (l_{t-1} + b_{t-1})
\end{cases}
$$

L'erreur aussi peut être multiplicative !

Taxonomie des modèles ETS

Notations Générales

E T S : **E**xponen**T**ial **S**moothing

Erreur **T**endance **S**aisonnalité

Taxonomie des modèles ETS

Notations Générales

E T S : **E**xponen**T**ial **S**moothing

Erreur **T**endance **S**aisonnalité

- Erreur : Additive (`"A"`) ou multiplicative (`"M"`)
- Tendance : Sans tendance (`"N"`), additive (`"A"`), multiplicative (`"M"`) ou amortie (`"Ad"` ou `"Md"`)
- Saisonnalité : Sans saisonnalité (`"N"`), additive (`"A"`) ou multiplicative (`"M"`)

`"Z"` pour une sélection automatique

Erreurs additives

Trend	Seasonal N	Seasonal A	Seasonal M
N	$y_t = \ell_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/\ell_{t-1}$
A	$y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/(\ell_{t-1} + b_{t-1})$
A$_\mathbf{d}$	$y_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$
M	$y_t = \ell_{t-1}b_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/\ell_{t-1}$	$y_t = \ell_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/\ell_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}b_{t-1}s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/(s_{t-m}\ell_{t-1})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/(\ell_{t-1}b_{t-1})$
M$_\mathbf{d}$	$y_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^{\phi} + \beta\varepsilon_t/\ell_{t-1}$	$y_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^{\phi} + \beta\varepsilon_t/\ell_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi}s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1}^{\phi} + \beta\varepsilon_t/(s_{t-m}\ell_{t-1})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/(\ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi})$

Source : Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2018)

Erreurs multiplicatives

Trend	Seasonal N	Seasonal A	Seasonal M
N	$y_t = \ell_{t-1}(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}(1+\alpha\varepsilon_t)$	$y_t = (\ell_{t-1}+s_{t-m})(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}+\alpha(\ell_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}+\gamma(\ell_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}s_{t-m}(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}(1+\alpha\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1+\gamma\varepsilon_t)$
A	$y_t = (\ell_{t-1}+b_{t-1})(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1}+b_{t-1})(1+\alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}+\beta(\ell_{t-1}+b_{t-1})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1}+b_{t-1}+s_{t-m})(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}+b_{t-1}+\alpha(\ell_{t-1}+b_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}+\beta(\ell_{t-1}+b_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}+\gamma(\ell_{t-1}+b_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1}+b_{t-1})s_{t-m}(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1}+b_{t-1})(1+\alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}+\beta(\ell_{t-1}+b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1+\gamma\varepsilon_t)$
$\mathbf{A_d}$	$y_t = (\ell_{t-1}+\phi b_{t-1})(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1}+\phi b_{t-1})(1+\alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1}+\beta(\ell_{t-1}+\phi b_{t-1})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1}+\phi b_{t-1}+s_{t-m})(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}+\phi b_{t-1}+\alpha(\ell_{t-1}+\phi b_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1}+\beta(\ell_{t-1}+\phi b_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}+\gamma(\ell_{t-1}+\phi b_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1}+\phi b_{t-1})s_{t-m}(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1}+\phi b_{t-1})(1+\alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1}+\beta(\ell_{t-1}+\phi b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1+\gamma\varepsilon_t)$
M	$y_t = \ell_{t-1}b_{t-1}(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}(1+\alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}(1+\beta\varepsilon_t)$	$y_t = (\ell_{t-1}b_{t-1}+s_{t-m})(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}+\alpha(\ell_{t-1}b_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}+\beta(\ell_{t-1}b_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t/\ell_{t-1}$ $s_t = s_{t-m}+\gamma(\ell_{t-1}b_{t-1}+s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}b_{t-1}s_{t-m}(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}(1+\alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}(1+\beta\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1+\gamma\varepsilon_t)$
$\mathbf{M_d}$	$y_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi}(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi}(1+\alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}^{\phi}(1+\beta\varepsilon_t)$	$y_t = (\ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi}+s_{t-m})(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi}+\alpha(\ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi}+s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^{\phi}+\beta(\ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi}+s_{t-m})\varepsilon_t/\ell_{t-1}$ $s_t = s_{t-m}+\gamma(\ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi}+s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi}s_{t-m}(1+\varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^{\phi}(1+\alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}^{\phi}(1+\beta\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1+\gamma\varepsilon_t)$

Source : Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2018)

Sous R

Pour les objets `ts` : `forecast::ets()` avec paramètre `damped = FALSE` ou `damped = TRUE`.

Pour les objets `tsibble` : `fable::ETS()` avec fonctions `error()`, `trend()` et `season()`

```
library(fable)
as_tsibble(USAccDeaths) %>%
  model(ETS(value ~ season("A")))
```

```
# A mable: 1 x 1
  `ETS(value ~ season("A"))`
                     <model>
1               <ETS(A,N,A)>
```

Sommaire

Analyse des résidus

On distingue deux types de prévisions :

- Prévisions *in-sample*, dans l'échantillon, *fitted values* : paramètres estimés sur l'ensemble des données
- Prévisions *out-of-sample*, hors échantillon : on reproduit le processus de prévision $\hat{y}_{t+h|t}$ permet de vérifier les problèmes de sur-ajustement

Prévisions *in-sample*

Résidus : $e_t = y_t - \hat{y}_t$

Hypothèses :

- (e_t) non corrélés (sinon il reste de l'information qui auraient dû être prise en compte dans la prévision)
- (e_t) de moyenne nulle : sinon prévisions biaisées

Prévisions *in-sample*

Résidus : $e_t = y_t - \hat{y}_t$

Hypothèses :

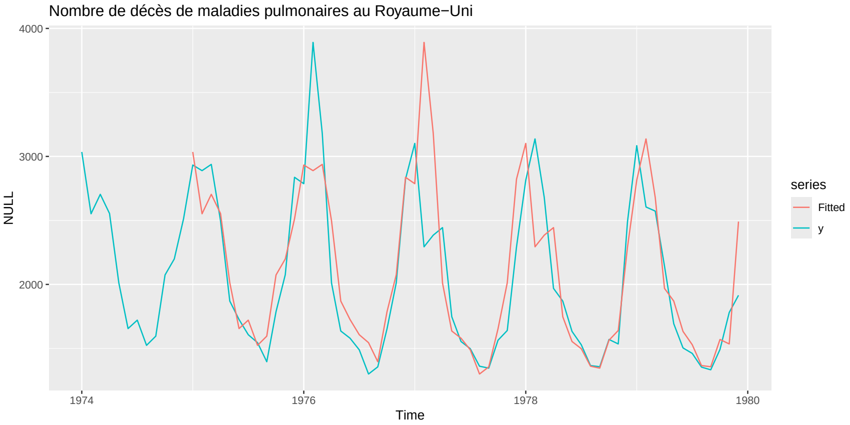
- (e_t) non corrélés (sinon il reste de l'information qui auraient dû être prise en compte dans la prévision)
- (e_t) de moyenne nulle : sinon prévisions biaisées

Hypothèses utiles pour la construction d'intervalles de confiance

- (e_t) ont une variance constante
- (e_t) suivent une loi normale

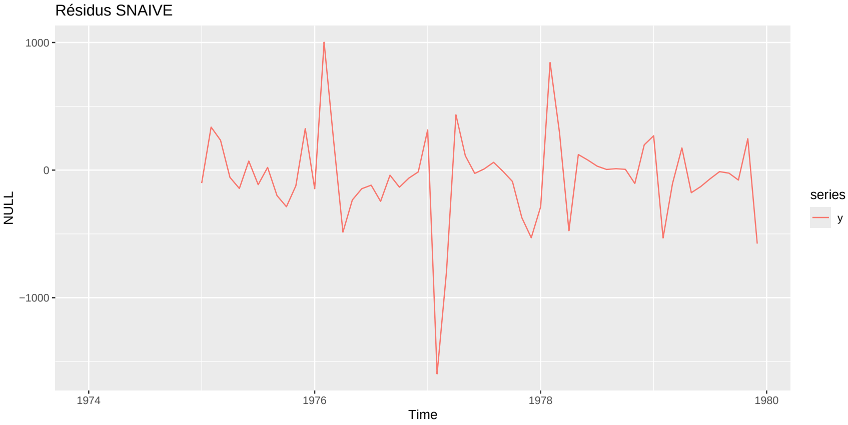
Exemple

```
autoplot(ldeaths, y = "NULL",
         main  = "Nombre de décès de maladies pulmonaires au Royaume-Uni",
         series = "y") +
  autolayer(fitted(snaive(ldeaths)), series = "Fitted")
```



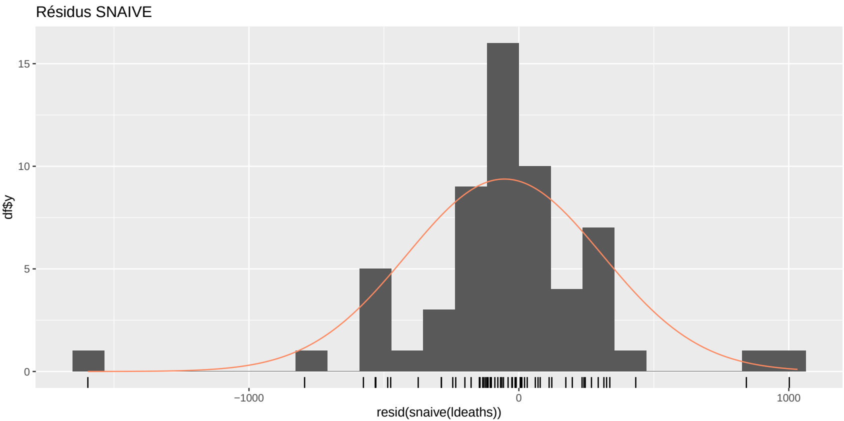
Exemple

```
autoplot(resid(snaive(ldeaths)), y = "NULL",
         main  = "Résidus SNAIVE",
         series = "y")
```



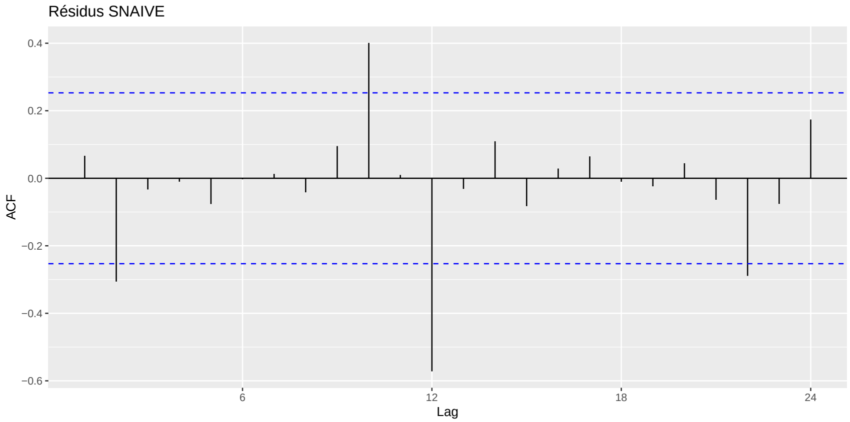
Exemple

```r
gghistogram(resid(snaive(ldeaths)), add.normal = TRUE) +
    labs(title = "Résidus SNAIVE")
```



Exemple

```r
ggAcf(resid(snaive(ldeaths)), add.normal = TRUE) +
    labs(title = "Résidus SNAIVE")
```



ACF et tests Portemanteau (`Box.test()`)

L'ACF est un outils graphique simple pour vérifier ont les mêmes propriétés qu'un bruit blanc.

Il existe également des tests d'autocorrélation :

- Box-Pierce

$$Q = T \sum_{k=1}^{p} \hat{\rho}(k)^2$$

- Ljung-Box (marche mieux sur petits échantillons)

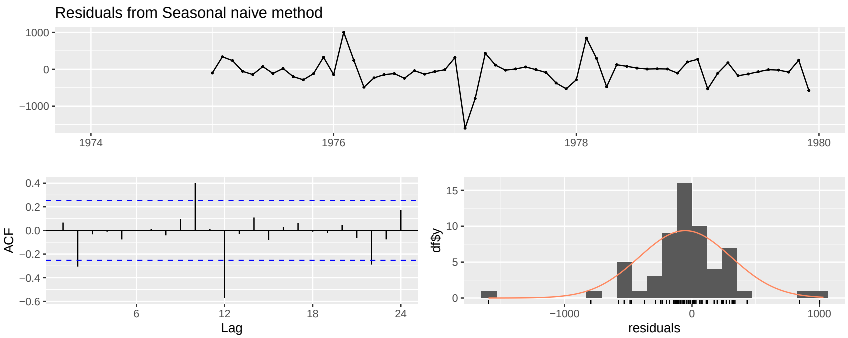
$$Q^* = T(T+1) \sum_{k=1}^{p} (T-k)^{-1} \hat{\rho}(k)^2$$

Paramètre p à choisir. Recommandation : $p = 10$ pour séries non saisonnières, $p = 2m$ sinon.

Sous (H_0) ces quantités suivent $\chi^2(p-K)$ avec K nb de paramètres dans le modèle

Exemple

```
forecast::checkresiduals(snaive(ldeaths))
```

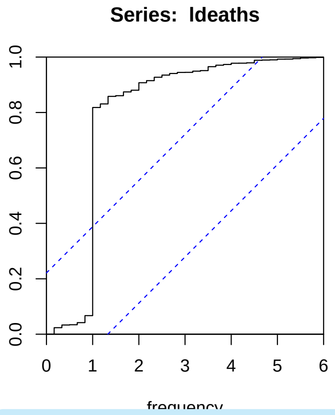


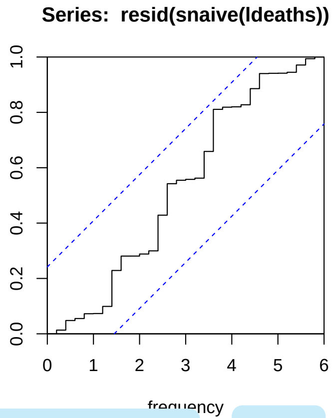

```
    Ljung-Box test

data:  Residuals from Seasonal naive method
Q* = 45.922, df = 14, p-value = 2.887e-05

Model df: 0.   Total lags used: 14
```

Périodogramme cumulatif

On peut aussi analyser les résidus avec le périodogramme cumulatif : proche d'une ligne droite pour un bruit blanc

```
par(mfrow = c(1,2))
cpgram(ldeaths)
cpgram(resid(snaive(ldeaths)))
```





Mesure de la qualité de la prévisions

Plusieurs critères :

$$MAE = moy(|e_{T+h}|) \quad MSE = moy(e^2_{T+h})$$
$$RMSE = \sqrt{moy(e^2_{T+h})} \quad MAPE = 100mean(|e_{T+h}|/|y_{T+h}|)$$

Les 3 premiers critères dépend de l'échelle mais pas le MAPE (mais valable si $y_t \gg 0$)

Mesure de la qualité de la prévisions

Plusieurs critères :

$$MAE = moy(|e_{T+h}|) \quad MSE = moy(e^2_{T+h})$$
$$RMSE = \sqrt{moy(e^2_{T+h})} \quad MAPE = 100 mean(|e_{T+h}|/|y_{T+h}|)$$

Les 3 premiers critères dépend de l'échelle mais pas le MAPE (mais valable si $y_t \gg 0$)

MASE proposé par Hyndman and Koehler (IJF, 2006) :

$$MASE = moy(|e_{T+h}|/Q) \quad \text{avec } Q \text{ une mesure stable de l'échelle de } y_t$$

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T} |y_t - y_{t-1}| & \text{série non saisonnière} \\ Q = \frac{1}{T-m}\sum_{t=m+1}^{T} |y_t - y_{t-m}| & \text{série saisonnière} \end{cases}$$

Validation croisée dans les séries temporelles

Prévisions en temps-réel : prévisions dynamiques en réactualisant les coefficients à chaque date.

➔ *leave-h-out cross-validation*

Validation croisée dans les séries temporelles

Prévisions en temps-réel : prévisions dynamiques en réactualisant les coefficients à chaque date.

➔ *leave-h-out cross-validation*

On peut ensuite comparer les erreurs en utilisant un critère (e.g. RMSE) et un test (`forecast::dm.test()`).

Exemple LOOCV ($h = 1$), modèle trimestriel :

2000T1
⋮
2021T4

Validation croisée dans les séries temporelles

Prévisions en temps-réel : prévisions dynamiques en réactualisant les coefficients à chaque date.

➔ *leave-h-out cross-validation*

On peut ensuite comparer les erreurs en utilisant un critère (e.g. RMSE) et un test (`forecast::dm.test()`).

Exemple LOOCV ($h = 1$), modèle trimestriel :

2000T1
⋮
2021T4

$\longrightarrow$ On estime les coefficients sur la période 2000T1-2021T4 pour prévoir le point de 2022T1

On peut s'aider de `forecast::tsCV()`

Validation croisée dans les séries temporelles

Prévisions en temps-réel : prévisions dynamiques en réactualisant les coefficients à chaque date.

➔ *leave-h-out cross-validation*

On peut ensuite comparer les erreurs en utilisant un critère (e.g. RMSE) et un test (`forecast::dm.test()`).

Exemple LOOCV ($h = 1$), modèle trimestriel :

2000T1
⋮
2021T4
2022T1

On estime les coefficients sur la période 2000T1-2022T1 pour prévoir le point de 2022T2

On peut s'aider de `forecast::tsCV()`

Validation croisée dans les séries temporelles

Prévisions en temps-réel : prévisions dynamiques en réactualisant les coefficients à chaque date.

➔ *leave-h-out cross-validation*

On peut ensuite comparer les erreurs en utilisant un critère (e.g. RMSE) et un test (`forecast::dm.test()`).

Exemple LOOCV ($h = 1$), modèle trimestriel :

2000T1
⋮
2021T4
2022T1
2022T2

On estime les coefficients sur la période 2000T1-2022T2 pour prévoir le point de 2022T3

On peut s'aider de `forecast::tsCV()`

Validation croisée dans les séries temporelles

Prévisions en temps-réel : prévisions dynamiques en réactualisant les coefficients à chaque date.

➔ *leave-h-out cross-validation*

On peut ensuite comparer les erreurs en utilisant un critère (e.g. RMSE) et un test (`forecast::dm.test()`).

Exemple LOOCV ($h = 1$), modèle trimestriel :

2000T1
$\vdots$
2021T4
2022T1
2022T2
2022T3

$\longrightarrow$ On estime les coefficients sur la période 2000T1-2022T3 pour prévoir le point de 2022T4

On peut s'aider de `forecast::tsCV()`

Sélection de modèles

Les modèles sont parfois sélectionnés en utilisant des critères d'information (AIC, BIC, HQ) qui sont des vraisemblances pénalisées. Retenir :

- Il faut les minimiser

Sélection de modèles

Les modèles sont parfois sélectionnés en utilisant des critères d'information (AIC, BIC, HQ) qui sont des vraisemblances pénalisées. Retenir :

- Il faut les minimiser
- Ils sont définis à une constante additive/multiplicative près (qui peut changer en fonction des logiciels)

Sélection de modèles

Les modèles sont parfois sélectionnés en utilisant des critères d'information (AIC, BIC, HQ) qui sont des vraisemblances pénalisées. Retenir :

- Il faut les minimiser
- Ils sont définis à une constante additive/multiplicative près (qui peut changer en fonction des logiciels)
- AICc effectue une correction lorsqu'il y a peu de données

Sélection de modèles

Les modèles sont parfois sélectionnés en utilisant des critères d'information (AIC, BIC, HQ) qui sont des vraisemblances pénalisées. Retenir :

- Il faut les minimiser
- Ils sont définis à une constante additive/multiplicative près (qui peut changer en fonction des logiciels)
- AICc effectue une correction lorsqu'il y a peu de données
- Minimiser l'AIC est asymptotiquement équivalent à minimiser le LOOCV

Sélection de modèles

Les modèles sont parfois sélectionnés en utilisant des critères d'information (AIC, BIC, HQ) qui sont des vraisemblances pénalisées. Retenir :

- Il faut les minimiser
- Ils sont définis à une constante additive/multiplicative près (qui peut changer en fonction des logiciels)
- AICc effectue une correction lorsqu'il y a peu de données
- Minimiser l'AIC est asymptotiquement équivalent à minimiser le LOOCV
- Minimiser le BIC est asymptotiquement équivalent à minimiser le L-v-OCV avec $v = T[1 - 1/(\log(T) - 1)]$ et à sélection le *true model*

Sélection de modèles

Les modèles sont parfois sélectionnés en utilisant des critères d'information (AIC, BIC, HQ) qui sont des vraisemblances pénalisées. Retenir :

- Il faut les minimiser
- Ils sont définis à une constante additive/multiplicative près (qui peut changer en fonction des logiciels)
- AICc effectue une correction lorsqu'il y a peu de données
- Minimiser l'AIC est asymptotiquement équivalent à minimiser le LOOCV
- Minimiser le BIC est asymptotiquement équivalent à minimiser le L-v-OCV avec $v = T[1 - 1/(\log(T) - 1)]$ et à sélection le *true model*
- L'AIC a tendance à sur-ajuster le modèle et le BIC à le sous-ajuster

Sélection de modèles

Les modèles sont parfois sélectionnés en utilisant des critères d'information (AIC, BIC, HQ) qui sont des vraisemblances pénalisées. Retenir :

- Il faut les minimiser
- Ils sont définis à une constante additive/multiplicative près (qui peut changer en fonction des logiciels)
- AICc effectue une correction lorsqu'il y a peu de données
- Minimiser l'AIC est asymptotiquement équivalent à minimiser le LOOCV
- Minimiser le BIC est asymptotiquement équivalent à minimiser le L-v-OCV avec $v = T[1 - 1/(\log(T) - 1)]$ et à sélection le *true model*
- L'AIC a tendance à sur-ajuster le modèle et le BIC à le sous-ajuster
- $\bar{R}^2$ a tendance à sélectionner trop de variables

Sélection de modèles

Les modèles sont parfois sélectionnés en utilisant des critères d'information (AIC, BIC, HQ) qui sont des vraisemblances pénalisées. Retenir :

- Il faut les minimiser
- Ils sont définis à une constante additive/multiplicative près (qui peut changer en fonction des logiciels)
- AICc effectue une correction lorsqu'il y a peu de données
- Minimiser l'AIC est asymptotiquement équivalent à minimiser le LOOCV
- Minimiser le BIC est asymptotiquement équivalent à minimiser le L-v-OCV avec $v = T[1 - 1/(\log(T) - 1)]$ et à sélection le *true model*
- L'AIC a tendance à sur-ajuster le modèle et le BIC à le sous-ajuster
- $\bar{R}^2$ a tendance à sélectionner trop de variables
- Ne comparer les modèles avec critères d'information que s'ils sont calculés sur les mêmes données (ordre de différenciation ARIMA et ARIMA vs ETS)

Sommaire

Conclusions

- Dans beaucoup de cas les meilleurs modèles de prévision seront les plus simples : dernière valeur, valeur moyenne, valeur de la période précédente, etc.
- Le lissage exponentiel basé sur la description de la tendance et de la saisonnalité de la série
- La sélection d'un modèle peut se faire par un critère d'information ou par minimisation d'une statistique de validation croisée
- Les erreurs de prévision doivent être non corrélés et être de moyenne nulle. Pour la construction d'intervalles de confiance il faut en plus une variance constante et une loi normale

Bibliographie

Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2018) *Forecasting: principles and practice*, 2nd edition, OTexts: Melbourne, Australia. OTexts.com/fpp2. Accessed on june 2025.

Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021) *Forecasting: principles and practice*, 3rd edition, OTexts: Melbourne, Australia. OTexts.com/fpp3. Accessed on june 2025.