Backcast transformation

9 novembre 2022

Voir https ://robjhyndman.com/hyndsight/backtransforming/.
Soit f la fonction de transformation inverse, μ la moyenne de la série transformée et σ^2 sa variance. Les trois premiers termes du développement de Taylor en série entière s'écrivent :

$$f(\mu + x) \simeq f(\mu) + f'(\mu)x + f''(\mu)\frac{x^2}{2}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(X)\right] &= \mathbb{E}\left[f(\mu + X - \mu)\right] \\
&\simeq \mathbb{E}\left[f(\mu) + f'(\mu)(X-\mu) + \frac{1}{2}f''(\mu)\left(X-\mu\right)^2\right] \\
&= f(\mu) + f'(\mu)\underbrace{\mathbb{E}\left[X-\mu\right]}_{=0} + \frac{1}{2}f''(\mu)\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(X-\mu\right)^2\right]}_{=\sigma^2} \\
&= f(\mu) + f''(\mu)\frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}$$

Idem on peut montrer

$$\mathbb{V}\left[f(X)\right] \simeq \left(f'(\mathbb{E}\left[X\right])\right)^2 \mathbb{V}\left[X\right] = \left(f'(\mu)\right)^2\sigma^2 - \frac{1}{4}\left(f''(\mu)\right)^2\sigma^4$$

Dans le cas de la transformation de Box-Cox

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{si } \lambda = 0 \\ \text{sign}(\lambda x + 1)|\lambda x + 1|^{1/\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

donc

$$f'(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{si } \lambda = 0 \\ \text{sign}(\lambda x + 1)|\lambda x + 1|^{1/\lambda - 1} & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{si } \lambda = 0 \\ \text{sign}(\lambda x + 1)(1-\lambda)|\lambda x + 1|^{1/\lambda - 2} & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

La moyenne de la transformation inverse de Box-Cox est donc

$$\begin{cases} \exp(\mu)\left(1+\frac{\sigma^2}{2}\right) & \text{si } \lambda = 0 \\ \operatorname{sign}(\lambda\mu+1)|\lambda\mu+1|^{1/\lambda}\left(1+\frac{\sigma^2(1-\lambda)}{2|\lambda\mu+1|^2}\right) & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} f(\mu)\left(1+\frac{\sigma^2}{2}\right) & \text{si } \lambda = 0 \\ f(\mu)\left(1+\frac{\sigma^2(1-\lambda)}{2f(\mu)^{2\lambda}}\right) & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$