# sVAR

Prenons un modèle VAR(p) général avec $n$ composantes :

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad \text{avec } \mathbb{V}\varepsilon_t = \Sigma$$

On se place dans le cas d'un VAR stationaire donc tous les chocs sont transitoires : l'effet d'un choc tend vers 0.

Dans le cas de l'étude des IRF, on va s'intéresser à l'impact d'un choc unitaire sur une des composantes.

En théorie, pour calculer l'impact en $t+h$ on calcule la décomposition de Wold :

$$X_t = m + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \varepsilon_{t-k}$$

Et donc, si $C_h = \left[C_1^{(h)}, \dots, C_n^{(h)}\right] = \left(c_{i,j}^{(h)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ alors :

$$\frac{\partial X_{t+h}}{\partial \varepsilon_{jt}} = C_j^{(h)} \text{ et } \frac{\partial x_{i,t+h}}{\partial \varepsilon_{jt}} = c_{i,j}^{(h)}$$

Les IRF sont les graphes $h \mapsto c_{i,j}^{(h)}$.

En pratique en fait plutôt une simulation du VAR :

$$\begin{cases} X_{t-1} = \dots = X_{t-p} = 0 \\ X_t = \varepsilon_t = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)' \\ \varepsilon_{t+s} = 0 \quad \forall s > 0 \end{cases}$$

Cette approche n'a du sens seulement si $\Sigma$ est diagonale : dans le cas contraire, $\varepsilon_{jt}$ donne de l'information sur les autres composantes de $\varepsilon_t$. C'est pourquoi on utilise générale des IRF orthogonalisés.

L'idée est la suivante : à partir des $\varepsilon_t$, on construit un vecteur $u_t$ qui contient la même information que $\varepsilon_t$ mais dont les composantes sont non corrélées, ce qui permet de considérer des chocs unitaires sur les $u_{it}$.

La décomposition de Cholesky est la suivante :

- $u_{1t} = \varepsilon_{1t}$ et $\forall j > 1, u_{jt} = \varepsilon_{jt} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} u_{kt}$ avec $a_{jk}$ choisis de sorte que $\operatorname{Cov}(u_{jt}, u_{it}) = 0 \forall i < j$.
- $A$ est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale : $u_t = A^{-1}\varepsilon_t$ et $\mathbb{V}u_t = D$ diagonale. On a donc $\Sigma = ADA' = PP'$ avec $P = AD^{1/2}$ triangulaire inférieure.
- En notant $A = (a_1, \dots, a_n)$ il vient :
  - L'effet d'un choc unitaire de $u_{jt}$ sur $\varepsilon_{it}$ est $a_{ij}$ et l'effet d'un choc sur $X_{t+h}$ est $C_h a_j$. Un choc sur $u_{jt}$ s'intérprète comme un choc sur $x_{jt}$ qui n'est pas lié à des chocs sur $x_{1,t}, \dots, x_{j-1,t}$.
  - Les IRF orthogonalisés sont les graphs $h \mapsto C_h a_j$ (avec $a_j$ éventuellement normalisés de sorte que l'on considère la variance du choc égale à un).

Dans un modèle SVAR(p), la spécification est légèrement différente : on prend un modèle du type

$$AX_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i A X_{t-i} + B u_t,$$

On a donc $\varepsilon_t = A^{-1} B u_t$ et les matrices $A$ et $B$ peuvent être utilisées pour donner un sens économique aux chocs. Dans l'exemple précédent, on a par exemple $A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$ et $B = I_n$, cela signifie qu'un choc sur la première composante a un effet **contemporain** sur toutes les autres composantes (1ere colonne). Un choc sur la deuxième variable n'a pas d'impact **contemporain** sur la première variable mais en a sur toutes les autres (un 0 sur la première ligne de la deuxième colonne), etc.

Sous R on spécifie $A$, $B$ ou les deux :

- Si l'on ne spécifie qu'une des deux matrices il faut au minimum $K(K-1)/2$ contraintes ($K = n =$ nombre de variables)
- Si les deux sont spécifiées, il en faut au moins $K^2 + K(K-1)/2$

Dans les exemples trouvés, généralement on ne spécifie qu'une des deux matrices ou alors on normalise à 1 la diagonale de $A$, par exemple pour la décomposition de Cholesky :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Pour coder ça il suffit de remplacer les $*$ par des `NA` :

```
Amat <- diag(nrow = 4)
Amat[2,1] <- Amat[3,1:2] <- Amat[4,1:3] <- NA
Amat
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    0    0    0
## [2,]   NA    1    0    0
## [3,]   NA   NA    1    0
## [4,]   NA   NA   NA    1
```

```
Bmat <- diag(nrow = 4)
diag(Bmat) <- NA
Bmat
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]   NA    0    0    0
## [2,]    0   NA    0    0
## [3,]    0    0   NA    0
## [4,]    0    0    0   NA
```

Les contraintes que l'on peut imposer sont assez libres. Ici par exemple, ils supposent que le PIB n'est affecté de manière contemporaine que par lui-même (première colonne de la matrice) et que les prix ne sont affectés que par le PIB et lui-même.

Dans le package **`vars`** il y a également la fonction `BQ` qui permet d'estimer un modèle SVAR de la même façon que dans l'article de Blanchard Quah (1989) vu en cours (mais je n'ai pas bien en tête ce que c'est)