



Institut national de la statistique  
et des études économiques

Mesurer pour comprendre

## Estimation en temps réel de la tendance-cycle : Apport de l'utilisation des filtres asymétriques dans la détection des points de retournement

ALAIN QUARTIER-LA-TENTE  
Division Études macroéconomiques  
20 septembre 2022

# Sommaire

---

## 1. Introduction

## 2. Méthodes étudiées

## 3. Comparaison des méthodes

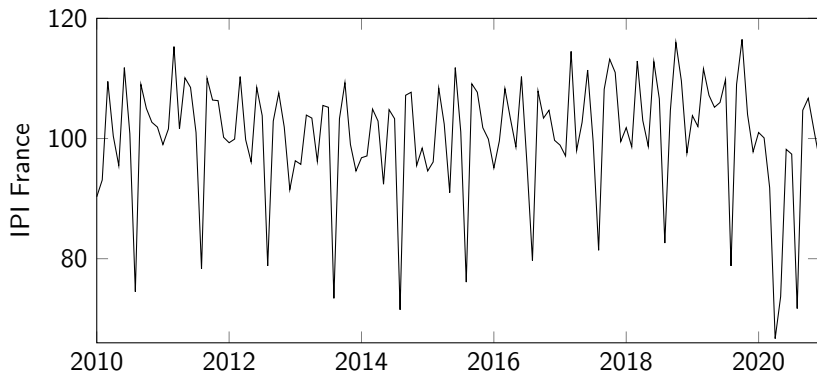
## 4. Extensions

## 5. Conclusion

# La tendance-cycle (1)

$X_t$  (ex : IPI France) se décompose en plusieurs composantes inobservées :

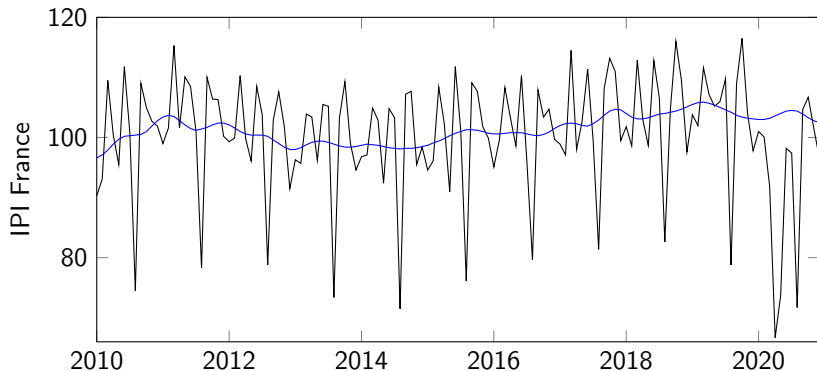
$$X_t = \quad \quad \quad (\text{décomposition additive})$$



# La tendance-cycle (1)

$X_t$  (ex : IPI France) se décompose en plusieurs composantes inobservées :

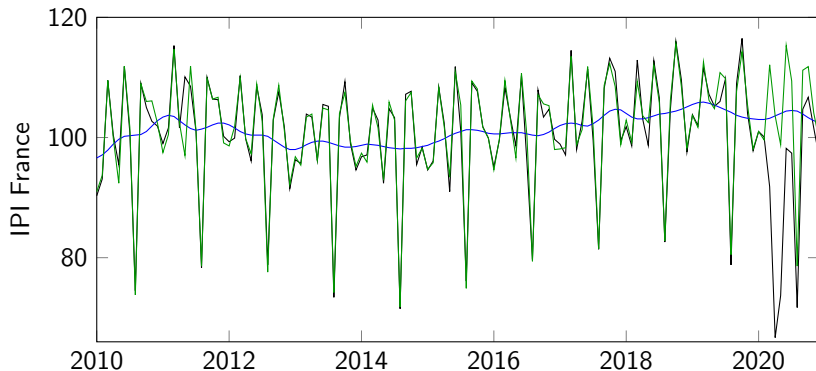
$$X_t = \underbrace{TC_t}_{\text{tendance-cycle}} \quad (\text{décomposition additive})$$



# La tendance-cycle (1)

$X_t$  (ex : IPI France) se décompose en plusieurs composantes inobservées :

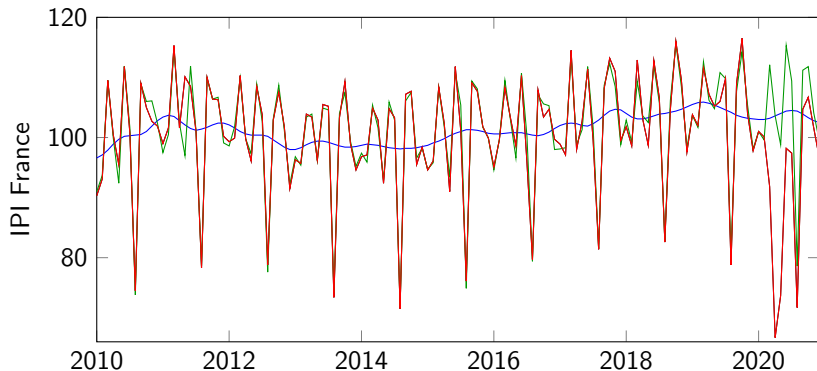
$$X_t = \underbrace{TC_t}_{\text{tendance-cycle}} + \underbrace{S_t}_{\text{saisonnalité}} \quad (\text{décomposition additive})$$



# La tendance-cycle (1)

$X_t$  (ex : IPI France) se décompose en plusieurs composantes inobservées :

$$X_t = \underbrace{TC_t}_{\text{tendance-cycle}} + \underbrace{S_t}_{\text{saisonnalité}} + \underbrace{I_t}_{\text{irrégulier}} \quad (\text{décomposition additive})$$

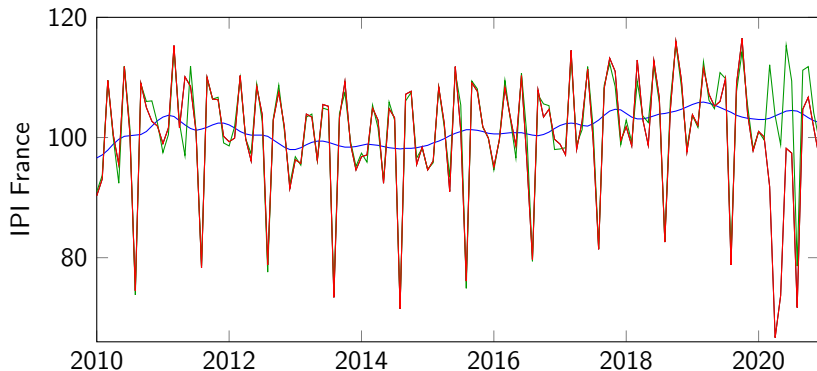


# La tendance-cycle (1)

$X_t$  (ex : IPI France) se décompose en plusieurs composantes inobservées :

$$X_t = \underbrace{TC_t}_{\text{tendance-cycle}} + \underbrace{S_t}_{\text{saisonnalité}} + \underbrace{I_t}_{\text{irrégulier}} \quad (\text{décomposition additive})$$

tendance et cycle ici estimés *simultanément*



## La tendance-cycle (2)

---

Pour l'analyse conjoncturelle, on étudie généralement des séries désaisonnalisées

$$X_t - S_t = TC_t + I_t$$



## La tendance-cycle (2)

---

Pour l'analyse conjoncturelle, on étudie généralement des séries désaisonnalisées

$$X_t - S_t = TC_t + I_t$$

La présence de l'irrégulier peut rendre l'interprétation difficile, un lissage supplémentaire peut être utilisé :

$$(X_t - S_t) - I_t = TC_t$$

## La tendance-cycle (2)

---

Pour l'analyse conjoncturelle, on étudie généralement des séries désaisonnalisées

$$X_t - S_t = TC_t + I_t$$

La présence de l'irrégulier peut rendre l'interprétation difficile, un lissage supplémentaire peut être utilisé :

$$(X_t - S_t) - I_t = TC_t$$

Tendance-cycle publiée par peu d'instituts (Insee, ONS, Statistics Canada, ABS) mais volonté de faire des bonnes pratiques au niveau européen (Destatis).

## La tendance-cycle (2)

---

Pour l'analyse conjoncturelle, on étudie généralement des séries désaisonnalisées

$$X_t - S_t = TC_t + I_t$$

La présence de l'irrégulier peut rendre l'interprétation difficile, un lissage supplémentaire peut être utilisé :

$$(X_t - S_t) - I_t = TC_t$$

Tendance-cycle publiée par peu d'instituts (Insee, ONS, Statistics Canada, ABS) mais volonté de faire des bonnes pratiques au niveau européen (Destatis).

Critères importants de la tendance-cycle :

1. minimiser les révisions
2. minimiser le nombre de faux points de retournement
3. détecter correctement et *rapidement* les (bons) points de retournement

# Estimations de la TC et moyennes mobiles (1)

---



objectif différent de celui des méthodes d'analyse des cycles économiques  
 $TC_t$  généralement estimée sur une série *sans* saisonnalité

# Estimations de la TC et moyennes mobiles (1)

---



objectif différent de celui des méthodes d'analyse des cycles économiques

$TC_t$  généralement estimée sur une série *sans* saisonnalité

Méthode de décomposition X-13ARIMA une des plus utilisées : études de méthodes non-paramétriques pour estimer  $TC_t$

# Estimations de la TC et moyennes mobiles (1)



objectif différent de celui des méthodes d'analyse des cycles économiques

$TC_t$  généralement estimée sur une série *sans* saisonnalité

Méthode de décomposition X-13ARIMA une des plus utilisées : études de méthodes non-paramétriques pour estimer  $TC_t$

*Moyennes mobiles* (ou *filtres linéaires*) omniprésents dans l'extraction de la tendance-cycle et la désaisonnalisation (e.g. : X-13ARIMA) :

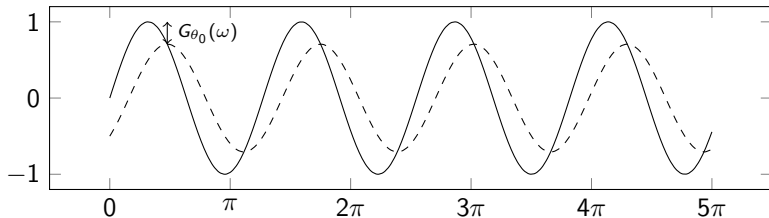
$$M_{\theta}(X_t) = \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k X_{t+k}$$

# Estimations de la TC et moyennes mobiles (1)

Appliquer  $M_\theta$  sur  $X_t = e^{-i\omega t}$  va avoir deux effets :

$$M_\theta X_t = \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k e^{-i\omega(t+k)} = \left( \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k e^{-i\omega k} \right) \cdot X_t = G_\theta(\omega) e^{-i\Phi_\theta(\omega)} X_t$$

1. Multiplier le niveau par  $G_\theta(\omega)$  (*gain*)

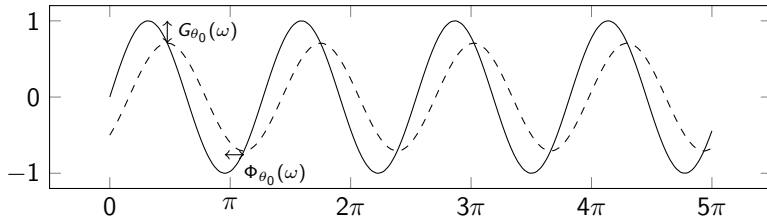


# Estimations de la TC et moyennes mobiles (1)

Appliquer  $M_\theta$  sur  $X_t = e^{-i\omega t}$  va avoir deux effets :

$$M_\theta X_t = \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k e^{-i\omega(t+k)} = \left( \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k e^{-i\omega k} \right) \cdot X_t = G_\theta(\omega) e^{-i\Phi_\theta(\omega)} X_t$$

1. Multiplier le niveau par  $G_\theta(\omega)$  (*gain*)
2. Créer un *déphasage*  $\Phi_\theta(\omega)/\omega$  : affecte détection des points de retournement





## Estimations de la TC et moyennes mobiles (2)

➡ Généralement, utilisation de filtres *symétriques* ( $p = f$  et  $\theta_{-i} = \theta_i$ )

$$M_{\theta}(X_t) = \sum_{k=-p}^{+p} \theta_k X_{t+k}, \quad \text{avec } \theta_{-i} = \theta_i$$

## Estimations de la TC et moyennes mobiles (2)

➡ Généralement, utilisation de filtres *symétriques* ( $p = f$  et  $\theta_{-i} = \theta_i$ )

$$M_{\theta}(X_t) = \sum_{k=-p}^{+p} \theta_k X_{t+k}, \quad \text{avec } \theta_{-i} = \theta_i$$

➡ Pour l'estimation en **temps réel**, utilisation de filtres *asymétriques* ( $f < p$ )  $\implies$  révision et détection avec retard des points de retournement (*déphasage*)

$$\text{ex : } M_{\theta}(X_t) = \sum_{k=-p}^0 \theta_k X_{t+k}$$

## Estimations de la TC et moyennes mobiles (2)

➡ Généralement, utilisation de filtres *symétriques* ( $p = f$  et  $\theta_{-i} = \theta_i$ )

$$M_{\theta}(X_t) = \sum_{k=-p}^{+p} \theta_k X_{t+k}, \quad \text{avec } \theta_{-i} = \theta_i$$

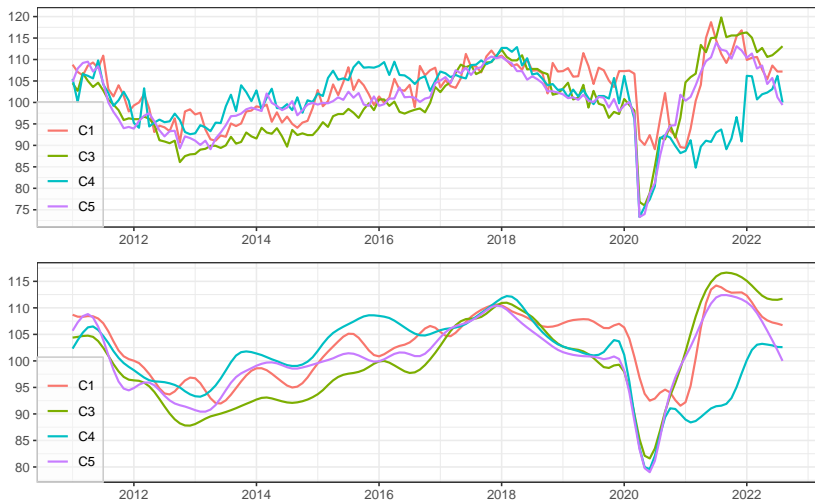
➡ Pour l'estimation en *temps réel*, utilisation de filtres *asymétriques* ( $f < p$ )  $\implies$  révision et détection avec retard des points de retournement (*déphasage*)

$$\text{ex : } M_{\theta}(X_t) = \sum_{k=-p}^0 \theta_k X_{t+k}$$

Solution classique : prolonger la série par prévision et utiliser filtre symétrique

- ➡ revient à utiliser des filtres asymétriques optimisés avec certains critères
- ➡ sous-optimal pour séries très variables

# Illustration avec climats des affaires dans l'industrie manufacturière



# Objectifs

---

Objectifs de cette étude :

- Étudier et comparer des approches récentes pour l'extraction de la tendance-cycle en temps réel : Régression polynomiale locale (Proietti et Luati 2008); RKHS (Dagum et Bianconcini 2016); Optimisation sous contrainte d'une somme pondérée de critères (Grun-Rehomme *et ali* 2018, Wildi et McElroy, 2019)

# Objectifs

---


Objectifs de cette étude :

- Étudier et comparer des approches récentes pour l'extraction de la tendance-cycle en temps réel : Régression polynomiale locale (Proietti et Luati 2008); RKHS (Dagum et Bianconcini 2016); Optimisation sous contrainte d'une somme pondérée de critères (Grun-Rehomme *et ali* 2018, Wildi et McElroy, 2019)
- Montrer qu'il est possible d'établir une théorie générale englobant toutes ces méthodes

# Objectifs

---

Objectifs de cette étude :

- Étudier et comparer des approches récentes pour l'extraction de la tendance-cycle en temps réel : Régression polynomiale locale (Proietti et Luati 2008); RKHS (Dagum et Bianconcini 2016); Optimisation sous contrainte d'une somme pondérée de critères (Grun-Rehomme *et ali* 2018, Wildi et McElroy, 2019)
- Montrer qu'il est possible d'établir une théorie générale englobant toutes ces méthodes
- Présenter le package  rjdfilters  
<https://github.com/palatej/rjdfilters>

# Sommaire

---

## 1. Introduction

## 2. Méthodes étudiées

### 2.1 Filtre symétrique

### 2.2 Polynômes Locaux

### 2.3 Filtres et Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS)

### 2.4 Minimisation sous contrainte : FST et ATS

## 3. Comparaison des méthodes

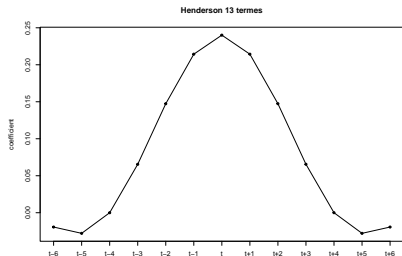
## 4. Extensions

## 5. Conclusion



# Moyenne mobile symétrique d'Henderson

```
library(rjdfilters)
f <- lp_filter(6, kernel = "Henderson")
plot_coef(f, q = 6, legend = FALSE,
          main="Henderson 13 termes")
```



MM Henderson (utilisé dans X-13ARIMA) largement répandue pour estimer  $TC_t$

MM Henderson préserve les tendances polynomiales de degré 3 et minimise le critère de "lissage" ( $\sum(\nabla^3\theta_i)^2$ )

Sur séries mensuelles : MM de 13 termes généralement

## Polynômes Locaux : `rjdfilters::lp_filter()`

---

Hypothèse :  $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$  avec  $\varepsilon_t \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$\mu_t$  localement approchée par un polynôme de degré  $d$  :

$$\forall j \in \llbracket -h, h \rrbracket : y_{t+j} = m_{t+j} + \varepsilon_{t+j}, \quad m_{t+j} = \sum_{i=0}^d \beta_i j^i$$

## Polynômes Locaux : `rjdfilters::lp_filter()`

Hypothèse :  $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$  avec  $\varepsilon_t \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$\mu_t$  localement approchée par un polynôme de degré  $d$  :

$$\forall j \in \llbracket -h, h \rrbracket : y_{t+j} = m_{t+j} + \varepsilon_{t+j}, \quad m_{t+j} = \sum_{i=0}^d \beta_i j^i$$

Estimation en utilisant les WLS avec *noyaux* :  $\hat{\beta} = (X' K X)^{-1} X' K y$  et

$$\hat{m}_t = \hat{\beta}_0 = w' y = \sum_{j=-h}^h w_j y_{t-j} \Rightarrow \text{équivalent à une moyenne mobile symétrique}$$

➔ Filtre de Henderson avec  $d = 3$  et noyau spécifique.

## Filtres asymétriques : `rjdfilters::lp_filter()`

1. Même méthode mais moins de données (DAF)  $\iff$  minimiser les révisions sous mêmes contraintes polynomiales
- ➡ **sans biais** mais **beaucoup de variance**
  - ➡ utilisé dans STL

## Filtres asymétriques : `rjdfilters::lp_filter()`

1. Même méthode mais moins de données (DAF)  $\iff$  minimiser les révisions sous mêmes contraintes polynomiales
    - ➔ **sans biais** mais **beaucoup de variance**
    - ➔ utilisé dans STL
  2. Minimisation des révisions sous contraintes polynomiales :
    - 2.1 *Linear-Constant* (LC) :  $y_t$  linéaire and  $v$  reproduit les constantes (*Musgrave*)
    - 2.2 *Quadratic-Linear* (QL) :  $y_t$  quadratique et  $v$  reproduit droites
    - 2.3 *Cubic-Quadratic* (CQ) :  $y_t$  cubique et  $v$  reproduit tendances quadratiques
- ➔ Filtres asymétriques  $v$  dépendent de "IC-Ratio"

## Filtres asymétriques : `rjdfilters::lp_filter()`

1. Même méthode mais moins de données (DAF)  $\iff$  minimiser les révisions sous mêmes contraintes polynomiales

➡ **sans biais** mais **beaucoup de variance**

➡ utilisé dans STL

2. Minimisation des révisions sous contraintes polynomiales :

2.1 *Linear-Constant* (LC) :  $y_t$  linéaire and  $v$  reproduit les constantes (*Musgrave*)

2.2 *Quadratic-Linear* (QL) :  $y_t$  quadratique et  $v$  reproduit droites

2.3 *Cubic-Quadratic* (CQ) :  $y_t$  cubique et  $v$  reproduit tendances quadratiques

➡ Filtres asymétriques  $v$  dépendent de “IC-Ratio”



modèles simples facilement interprétables



Déphasage non contrôlé ➡ méthode étendue dans `rjdfilters::lp_filter()`

## Filtres asymétriques : `rjdfilters::lp_filter()`

1. Même méthode mais moins de données (DAF)  $\iff$  minimiser les révisions sous mêmes contraintes polynomiales

➡ **sans biais** mais **beaucoup de variance**

➡ utilisé dans STL

2. Minimisation des révisions sous contraintes polynomiales :

2.1 *Linear-Constant* (LC) :  $y_t$  linéaire and  $v$  reproduit les constantes (*Musgrave*)

2.2 *Quadratic-Linear* (QL) :  $y_t$  quadratique et  $v$  reproduit droites

2.3 *Cubic-Quadratic* (CQ) :  $y_t$  cubique et  $v$  reproduit tendances quadratiques

➡ Filtres asymétriques  $v$  dépendent de “IC-Ratio”



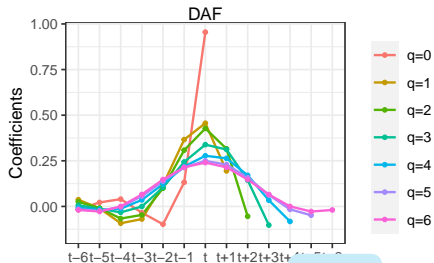
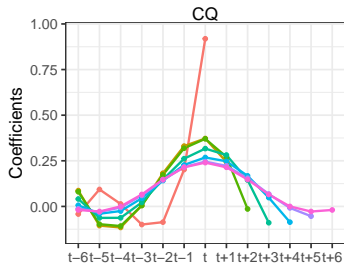
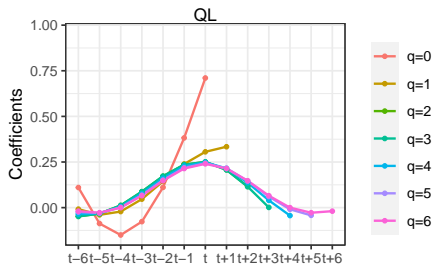
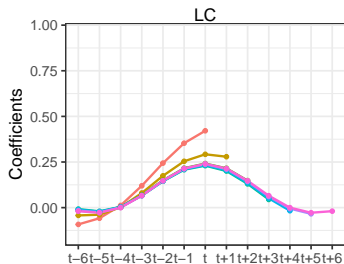
modèles simples facilement interprétables



Déphasage non contrôlé ➡ méthode étendue dans `rjdfilters::lp_filter()`

🖥 Visualisation <https://aqlt.shinyapps.io/FiltersProperties/>

# Coefficients





## Filtres RKHS : `rjdfilters::rkhs_filter()`

- Utilisation de la théorie des RKHS pour approcher le filtre d'Henderson
- Avec  $K_p$  une **fonction de noyau** définie sur  $[-1, 1]$ , le filtre symétrique :

$$\forall j \in \llbracket -h, h \rrbracket : w_j = \frac{K_p(j/b)}{\sum_{i=-h}^h K_p(i/b)}$$

➔ avec  $b = h + 1$  et  $K_p$  spécifique on retrouve le filtre d'Henderson

- Pour les filtres asymétriques :

$$\forall j \in \llbracket -h, q \rrbracket : w_{a,j} = \frac{K_p(j/b)}{\sum_{i=-h}^q K_p(i/b)}$$

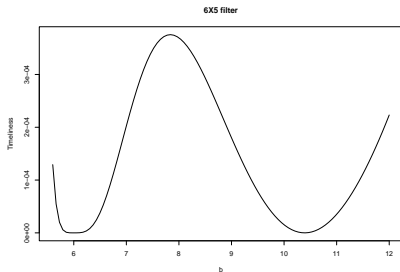
➔  $b$  choisit par optimisation, e.g. minimisant les révisions  $(b_{q,r})$ , les révisions liées à la fonction de gain  $(b_{q,G})$  et celles liées au déphasage  $(b_{q,\varphi})$

# Filtres asymétriques



Plusieurs extremum

```
library(rjdfilters)
fun <- rkhs_optimization_fun(horizon = 6,
                             leads = 5, degree = 3,
                             asymmetricCriterion = "Timeliness")
plot(fun, 5.6, 12, xlab = "b",
      ylab = "Timeliness", main = "6X5 filter")
```



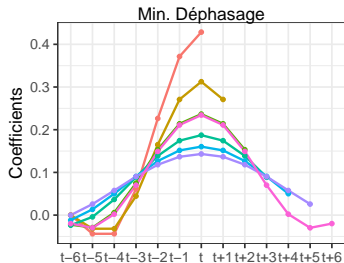
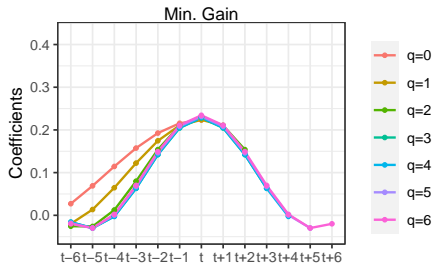
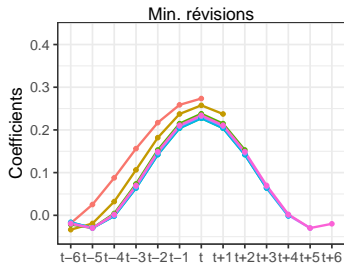
```
rkhs_optimal_bw()
```

##	q=0	q=1	q=2	q=3	q=4	q=5
##	6.0000	6.0000	6.3875	8.1500	9.3500	6.0000



Méthode  
généralisable à des  
filtres avec fréquences  
irrégulières

# Coefficients



## Approche FST : `rjdfilters::fst_filter()`

---

Minimisation sous contrainte d'une somme pondérée de 3 critères :

$$\begin{cases} \min_{\theta} & J(\theta) = \alpha F_g(\theta) + \beta S_g(\theta) + \gamma T_g(\theta) \\ s.c. & C\theta = a \end{cases}$$

$F_g$  fidélité (*fidelity*, réduction de variance  $\sum_{k=-p}^{+f} \theta_k^2$ ),  $S_g$  lissage (*smoothness*, critère d'Henderson  $\sum_j (\nabla^3 \theta_j)^2$ ),  $T_g$  temporalité (*timeliness*, déphasage  $\int_0^{2\pi/12} \rho_\theta(\omega) \sin(\varphi_\theta(\omega))^2 d\omega$ )

## Approche FST : `rjdfilters::fst_filter()`

Minimisation sous contrainte d'une somme pondérée de 3 critères :

$$\begin{cases} \min_{\theta} & J(\theta) = \alpha F_g(\theta) + \beta S_g(\theta) + \gamma T_g(\theta) \\ \text{s.c.} & C\theta = a \end{cases}$$

$F_g$  fidélité (*fidelity*, réduction de variance  $\sum_{k=-p}^{+f} \theta_k^2$ ),  $S_g$  lissage (*smoothness*, critère d'Henderson  $\sum_j (\nabla^3 \theta_j)^2$ ),  $T_g$  temporalité (*timeliness*, déphasage  $\int_0^{2\pi/12} \rho_{\theta}(\omega) \sin(\varphi_{\theta}(\omega))^2 d\omega$ )

- 😊 Solution unique
- 😊 Filtres asymétriques indépendants des données et du filtre symétrique
- 😞 Poids non normalisés

## Approche ATS `rjdfilters::dfa_filter()` (1)

Décomposition de l'EQM :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [(y_t - \hat{y}_t)^2] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma_s(\omega) - \Gamma_\theta(\omega)|^2 h(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \int_0^{\pi} |\Gamma_s(\omega) - \Gamma_\theta(\omega)|^2 h(\omega) d\omega\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|\Gamma_s(\omega) - \Gamma_\theta(\omega)|^2 &= \rho_s(\omega)^2 + \rho_\theta(\omega)^2 + \\ &\quad 2\rho_s(\omega)\rho_\theta(\omega)(1 - \cos(\varphi_s(\omega) - \varphi_\theta(\omega))) \\ &= (\rho_s(\omega) - \rho_\theta(\omega))^2 + \\ &\quad 4\rho_s(\omega)\rho_\theta(\omega)\sin^2\left(\frac{\varphi_s(\omega) - \varphi_\theta(\omega)}{2}\right)\end{aligned}$$

## Approche ATS `rjdfilters::dfa_filter()` (2)

Ce qui conduit à

$$A_w = 2 \int_0^{\omega_1} (\rho_s(\omega) - \rho_\theta(\omega))^2 h(\omega) d\omega$$

$$T_w = 8 \int_0^{\omega_1} \rho_s(\lambda) \rho_\theta(\lambda) \sin^2 \left( \frac{\varphi_\theta(\omega)}{2} \right) h(\omega) d\omega$$

$$S_w = 2 \int_{\omega_1}^{\pi} (\rho_s(\omega)^2 - \rho_\theta(\omega))^2 h(\omega) d\omega$$

$$R_w = 8 \int_{\omega_1}^{\pi} \rho_s(\lambda) \rho_\theta(\lambda) \sin^2 \left( \frac{\varphi_\theta(\omega)}{2} \right) h(\omega) d\omega$$

Minimisation d'une somme pondérée de 3 critères :

$$\mathcal{M}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \vartheta_1 T_w(\theta) + \vartheta_2 S_w(\theta) + (1 - \vartheta_1 - \vartheta_2) A_w(\theta)$$

$\implies$  minimisation sous contraintes linéaires avec  $h(\omega) = 1$

## Approche ATS `rjdfilters::dfa_filter()` (3)

- 😊 Poids ont un sens
- 😞 Résidus pas toujours négligeables
- 😞 Pas unicité de la solution



# Difficulté du choix des poids

---

Comment choisir les poids dans FST et AST (DFA) ?

- Minimiser que la *timeliness*? introduit trop de variance

# Difficulté du choix des poids

---

Comment choisir les poids dans FST et AST (DFA) ?

- Minimiser que la *timeliness*? introduit trop de variance
- Minimiser les révisions? on néglige le déphasage

# Difficulté du choix des poids

---

Comment choisir les poids dans FST et AST (DFA) ?

- Minimiser que la *timeliness*? introduit trop de variance
- Minimiser les révisions? on néglige le déphasage
- Garder les poids qui donnent des MM de meilleure qualité que les autres selon tous les critères? Rien de satisfaisant

# Difficulté du choix des poids

---

Comment choisir les poids dans FST et AST (DFA) ?

- Minimiser que la *timeliness* ? introduit trop de variance
- Minimiser les révisions ? on néglige le déphasage
- Garder les poids qui donnent des MM de meilleure qualité que les autres selon tous les critères ? Rien de satisfaisant
- Faire quadrillage du plan et une analyse empirique du déphasage ?  
Difficile à analyser -> utiliser des méthodes de réduction de dimension ?

# Sommaire

---

## 1. Introduction

## 2. Méthodes étudiées

## 3. Comparaison des méthodes

### 3.1 Méthodologie

### 3.2 Application sur séries simulées

### 3.3 Un exemple : série des ventes au détail des États-Unis (en log)

## 4. Extensions

## 5. Conclusion

# Méthodologie

---

Comparaison des différentes méthodes sur séries simulées (avec 3 niveaux de variabilité) et séries réelles :

1. Estimation de la tendance-cycle à chaque date en utilisant les différentes méthodes et un filtre symétrique de 13 termes

# Méthodologie

---

Comparaison des différentes méthodes sur séries simulées (avec 3 niveaux de variabilité) et séries réelles :

1. Estimation de la tendance-cycle à chaque date en utilisant les différentes méthodes et un filtre symétrique de 13 termes
2. À chaque date, estimation des points de retournement :
  - redressements :  $y_{t-3} \geq y_{t-2} \geq y_{t-1} < y_t \leq y_{t+1}$
  - ralentissements :  $y_{t-3} \leq y_{t-2} \leq y_{t-1} > y_t \geq y_{t+1}$

Déphasage = temps nécessaire pour détecter le bon point de retournement  
*sans révision*

# Méthodologie

Comparaison des différentes méthodes sur séries simulées (avec 3 niveaux de variabilité) et séries réelles :

1. Estimation de la tendance-cycle à chaque date en utilisant les différentes méthodes et un filtre symétrique de 13 termes
2. À chaque date, estimation des points de retournement :
  - redressements :  $y_{t-3} \geq y_{t-2} \geq y_{t-1} < y_t \leq y_{t+1}$
  - ralentissements :  $y_{t-3} \leq y_{t-2} \leq y_{t-1} > y_t \geq y_{t+1}$

Déphasage = temps nécessaire pour détecter le bon point de retournement *sans révision*

3. Calcul des révisions avec deux critères :

$$\mathbb{E} \left[ \left| \frac{y_{t|t+q} - y_{t|last}}{y_{t|last}} \right| \right] \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \left| \frac{y_{t|t+q} - y_{t|t+q+1}}{y_{t|t+q+1}} \right| \right]$$



# Séries simulées (1)

---

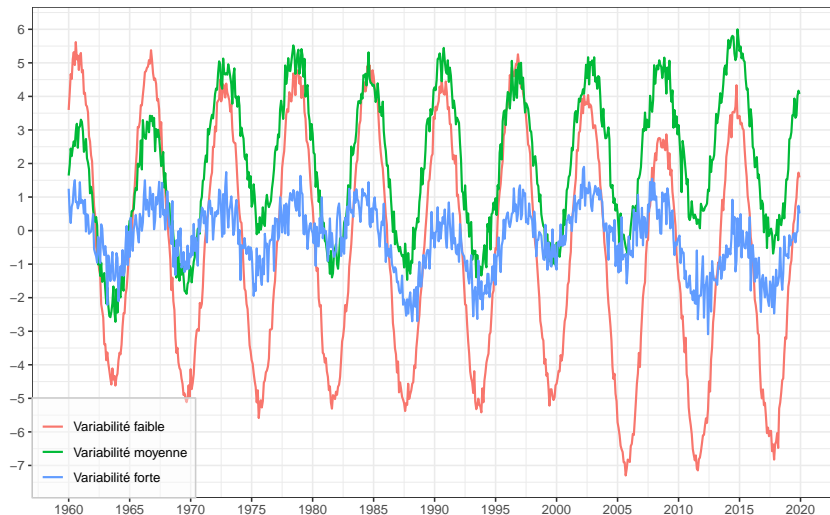
De façon similaire à Darne et Dagum (2009), on simule  $y_t = C_t + T_t + I_t$  entre janvier 1960 et décembre 2020 :

- $C_t = \rho[\cos(2\pi t/\lambda) + \sin(2\pi t/\lambda)]$ ,  $\lambda = 72$  (cycles de 6 ans, 19 points de retournement détectables)
- $T_t = T_{t-1} + \nu_t$  avec  $\nu_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\nu^2)$ ,  $\sigma_\nu = 0,08$
- $I_t = e_t$  avec  $e_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$

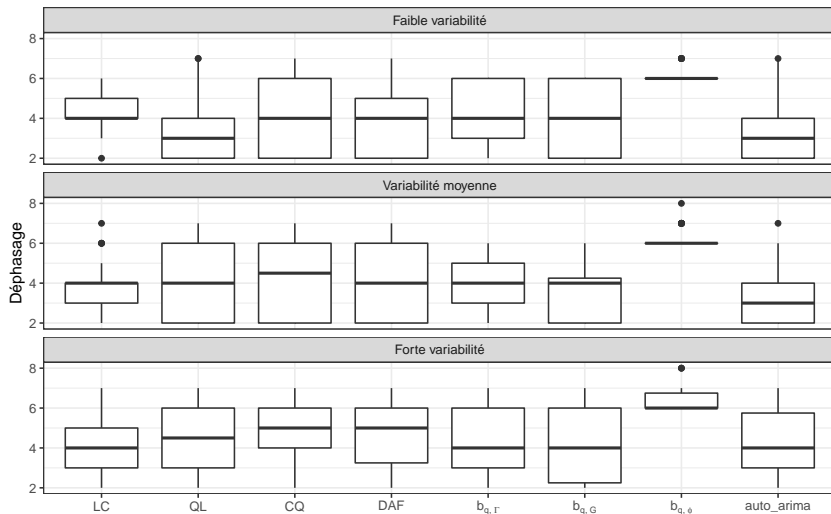
Niveau de variabilité :

- variabilité faible (rapport signal/bruit fort) :  $\sigma_e^2 = 0,2$  et  $\rho = 3,0, 3,5$  ou  $4,0$  ( $0,9 \geq \text{I-C ratio} \geq 0,7$ )
- variabilité moyenne (rapport signal/bruit moyen) :  $\sigma_e^2 = 0,3$  et  $\rho = 1,5, 2,0$  ou  $3,0$  ( $2,3 \geq \text{I-C ratio} \geq 1,4$ )
- variabilité forte (rapport signal/bruit élevé) :  $\sigma_e^2 = 0,4$  et  $\rho = 0,5, 0,7$  ou  $1,0$  ( $8,9 \geq \text{I-C ratio} \geq 5,2$ )

## Séries simulées (2)



# Résultats sur le déphasage (séries simulées)



# Médiane des révisions (séries simulées)

Pour les séries à variabilité **moyenne** :

Méthode	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$
<b>MAE entre <math>q^e</math> et la dernière estimation</b>						
LC	0,21	0,10	0,03	0,03	0,03	0,01
QL (rel)	1,6	1,0	1,3	1,5	1,3	1,1
CQ (rel)	2,2	1,3	4,2	3,3	2,1	1,6
DAF (rel)	2,3	1,5	4,9	3,5	2,2	1,5
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	3,1	2,3	1,1	3,6	3,5	3,9
$b_{q,G}$ (rel)	4,1	4,0	1,1	3,6	3,5	4,0
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,5	1,1	1,0	1,8	2,7	8,7
ARIMA (rel)	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,0
<b>MAE entre <math>q^e</math> et la <math>q + 1^e</math> estimation</b>						
LC	0,19	0,10	0,02	0,01	0,07	0,01
QL (rel)	1,6	43,2	0,1	3,1	0,9	1,1
CQ (rel)	2,3	0,2	4,3	7,3	1,4	1,6
DAF (rel)	3,5	2,6	4,6	12,9	1,3	1,5
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	2,1	2,9	3,7	0,3	16,2	3,9
$b_{q,G}$ (rel)	3,7	4,7	4,3	0,5	17,0	4,0
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,2	1,4	3,5	5,3	0,7	8,7
ARIMA (rel)	1,1	1,3	0,8	1,8	2,3	1,0

# Médiane des révisions (séries simulées)

Pour les séries à variabilité **moyenne** :

Méthode	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$
<b>MAE entre <math>q^e</math> et la dernière estimation</b>						
LC	0,21	0,10	0,03	0,03	0,03	0,01
QL (rel)	1,6	1,0	1,3	1,5	1,3	1,1
CQ (rel)	2,2	1,3	4,2	3,3	2,1	1,6
DAF (rel)	2,3	1,5	4,9	3,5	2,2	1,5
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	3,1	2,3	1,1	3,6	3,5	3,9
$b_{q,G}$ (rel)	4,1	4,0	1,1	3,6	3,5	4,0
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,5	1,1	1,0	1,8	2,7	8,7
ARIMA (rel)	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,0
<b>MAE entre <math>q^e</math> et la <math>q + 1^e</math> estimation</b>						
LC	0,19	0,10	0,02	0,01	0,07	0,01
QL (rel)	1,6	43,2	0,1	3,1	0,9	1,1
CQ (rel)	2,3	0,2	4,3	7,3	1,4	1,6
DAF (rel)	3,5	2,6	4,6	12,9	1,3	1,5
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	2,1	2,9	3,7	0,3	16,2	3,9
$b_{q,G}$ (rel)	3,7	4,7	4,3	0,5	17,0	4,0
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,2	1,4	3,5	5,3	0,7	8,7
ARIMA (rel)	1,1	1,3	0,8	1,8	2,3	1,0

# Médiane des révisions (séries simulées)

Pour les séries à variabilité **moyenne** :

Méthode	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$
<b>MAE entre <math>q^e</math> et la dernière estimation</b>						
LC	0,21	0,10	0,03	0,03	0,03	0,01
QL (rel)	1,6	1,0	1,3	1,5	1,3	1,1
CQ (rel)	2,2	1,3	4,2	3,3	2,1	1,6
DAF (rel)	2,3	1,5	4,9	3,5	2,2	1,5
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	3,1	2,3	1,1	3,6	3,5	3,9
$b_{q,G}$ (rel)	4,1	4,0	1,1	3,6	3,5	4,0
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,5	1,1	1,0	1,8	2,7	8,7
ARIMA (rel)	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,0
<b>MAE entre <math>q^e</math> et la <math>q + 1^e</math> estimation</b>						
LC	0,19	0,10	0,02	0,01	0,07	0,01
QL (rel)	1,6	43,2	0,1	3,1	0,9	1,1
CQ (rel)	2,3	0,2	4,3	7,3	1,4	1,6
DAF (rel)	3,5	2,6	4,6	12,9	1,3	1,5
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	2,1	2,9	3,7	0,3	16,2	3,9
$b_{q,G}$ (rel)	3,7	4,7	4,3	0,5	17,0	4,0
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,2	1,4	3,5	5,3	0,7	8,7
ARIMA (rel)	1,1	1,3	0,8	1,8	2,3	1,0

# Médiane des révisions (séries simulées)

Pour les séries à variabilité **moyenne** :

Méthode	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$
<b>MAE entre <math>q^e</math> et la dernière estimation</b>						
LC	0,21	0,10	0,03	0,03	0,03	0,01
QL (rel)	1,6	1,0	1,3	1,5	1,3	1,1
CQ (rel)	2,2	1,3	4,2	3,3	2,1	1,6
DAF (rel)	2,3	1,5	4,9	3,5	2,2	1,5
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	3,1	2,3	1,1	3,6	3,5	3,9
$b_{q,G}$ (rel)	4,1	4,0	1,1	3,6	3,5	4,0
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,5	1,1	1,0	1,8	2,7	8,7
ARIMA (rel)	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,0
<b>MAE entre <math>q^e</math> et la <math>q + 1^e</math> estimation</b>						
LC	0,19	0,10	0,02	0,01	0,07	0,01
QL (rel)	1,6	43,2	0,1	3,1	0,9	1,1
CQ (rel)	2,3	0,2	4,3	7,3	1,4	1,6
DAF (rel)	3,5	2,6	4,6	12,9	1,3	1,5
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	2,1	2,9	3,7	0,3	16,2	3,9
$b_{q,G}$ (rel)	3,7	4,7	4,3	0,5	17,0	4,0
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,2	1,4	3,5	5,3	0,7	8,7
ARIMA (rel)	1,1	1,3	0,8	1,8	2,3	1,0

# Médiane des révisions (séries simulées)

Pour les séries à variabilité **faible** :

Méthode	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$
<b>MAE entre <math>q</math>ième et la dernière estimation</b>						
LC	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
QL (rel)	1,7	1,1	1,2	1,1	1,0	0,9
CQ (rel)	2,1	1,7	4,9	3,1	1,8	1,1
DAF (rel)	2,2	2,0	5,8	3,6	2,0	1,3
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	6,6	5,0	1,3	6,1	7,3	7,5
$b_{q,G}$ (rel)	8,8	8,9	1,1	6,2	7,3	7,5
$b_{q,\varphi}$ (rel)	2,6	1,9	1,3	1,7	3,3	9,8
ARIMA (rel)	1,4	1,2	1,6	1,6	1,3	1,0
<b>MAE entre <math>q</math>ième et la <math>q + 1</math>ième estimation</b>						
LC	0,1	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0
QL (rel)	1,4	1,3	0,0	1,8	1,5	0,9
CQ (rel)	2,3	0,3	5,4	5,2	2,0	1,1
DAF (rel)	1,6	0,7	5,8	7,8	2,2	1,3
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	3,4	22,8	8,7	0,5	12,8	7,5
$b_{q,G}$ (rel)	13,7	10,2	11,6	0,8	9,1	7,5
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,5	3,0	2,3	2,8	1,7	9,8
ARIMA (rel)	2,5	1,2	0,3	2,1	1,7	1,0



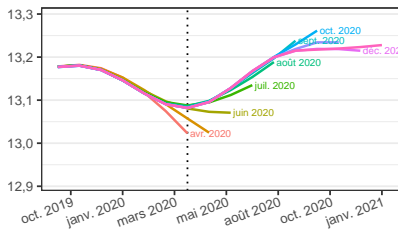
# Médiane des révisions (séries simulées)

Pour les séries à variabilité **forte** :

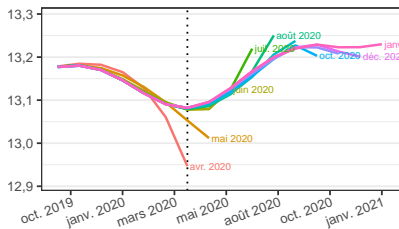
Méthode	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$
<b>MAE entre <math>q</math>ieme et la dernière estimation</b>						
LC	1,6	0,6	0,3	0,2	0,3	0,1
QL (rel)	1,8	1,2	1,1	1,5	1,4	1,4
CQ (rel)	2,1	2,2	5,0	4,1	2,7	2,1
DAF (rel)	2,4	2,3	4,6	4,3	2,5	2,3
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	1,0	1,1	1,2	1,0	1,1	1,4
$b_{q,G}$ (rel)	1,2	1,2	1,1	1,0	1,1	1,4
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,2	1,2	1,2	1,9	3,4	10,7
ARIMA (rel)	1,0	1,2	1,0	1,1	0,8	0,9
<b>MAE entre <math>q</math>ieme et la <math>q + 1</math>ieme estimation</b>						
LC	0,7	0,4	0,1	0,0	0,2	0,1
QL (rel)	2,0	1,5	0,1	3,5	2,5	1,4
CQ (rel)	1,7	0,2	19,1	9,2	1,4	2,1
DAF (rel)	11,0	1,4	4,2	9,3	1,6	2,3
$b_{q,\Gamma}$ (rel)	1,0	1,3	1,3	0,2	0,9	1,4
$b_{q,G}$ (rel)	0,9	1,5	8,5	0,2	0,8	1,4
$b_{q,\varphi}$ (rel)	1,2	1,6	3,3	4,3	1,0	10,7
ARIMA (rel)	32,8	1,4	0,8	1,6	0,9	0,9

# Estimations successives de la tendance-cycle (1)

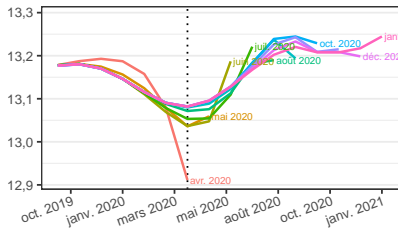
Linear – Constant (LC)  
Déphasage de 3 mois



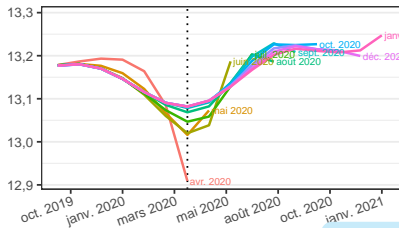
Quadratic – Linear (QL)  
Déphasage de 2 mois



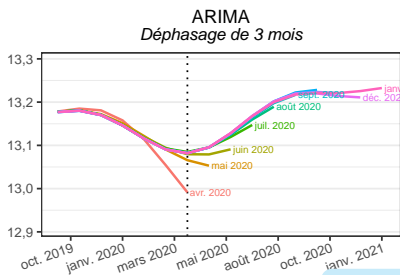
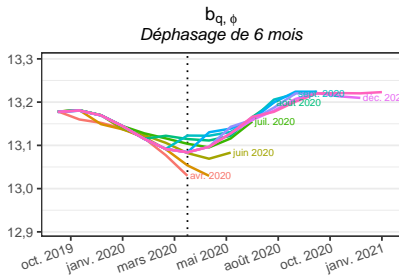
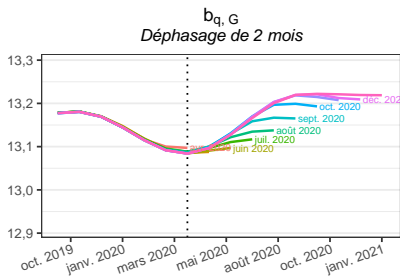
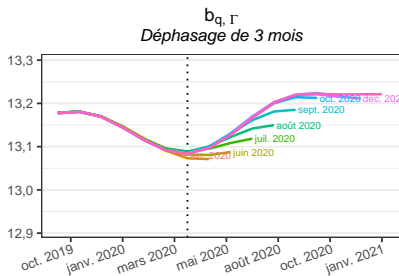
Cubic – quadratic (CQ)  
Déphasage de 2 mois



DAF  
Déphasage de 2 mois



# Estimations successives de la tendance-cycle (2)



# Prévisions implicites

Fonction `rjdfilters::implicit_forecast`

$$\forall q, \underbrace{\sum_{i=-h}^0 v_i y_i + \sum_{i=1}^h v_i y_i^*}_{\text{lissage par } v \text{ de la série prolongée}} = \underbrace{\sum_{i=-h}^0 w_i^q y_i + \sum_{i=1}^h w_i^q y_i^*}_{\text{lissage par } w^q \text{ de la série prolongée}} \quad \text{avec } \forall i > q, w_i^q = 0$$

Ce qui est équivalent à :

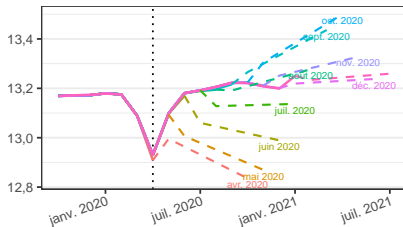
$$\forall q, \sum_{i=1}^h (v_i - w_i^q) y_i^* = \sum_{i=-h}^0 (w_i^q - v_i) y_i.$$

Matriciellement :

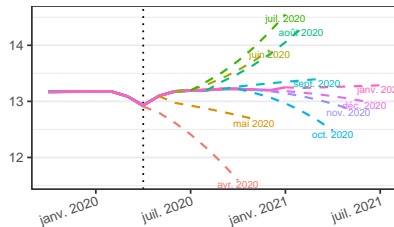
$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_h \\ v_1 - w_1^1 & v_2 & \cdots & v_h \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1 - w_1^{h-1} & v_2 - w_2^{h-1} & \cdots & v_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_h^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{-h}^0 - v_{-h} & w_{-(h-1)}^0 - v_{-(h-1)} & \cdots & w_0^0 - v_0 \\ w_{-h}^1 - v_{-h} & w_{-(h-1)}^1 - v_{-(h-1)} & \cdots & w_0^1 - v_0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{-h}^{h-1} - v_{-h} & w_{-(h-1)}^{h-1} - v_{-(h-1)} & \cdots & w_0^{h-1} - v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{-h} \\ \vdots \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

# Prévisions implicites (1)

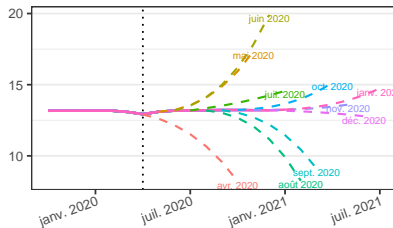
Linear – Constant (LC)  
Déphasage de 3 mois



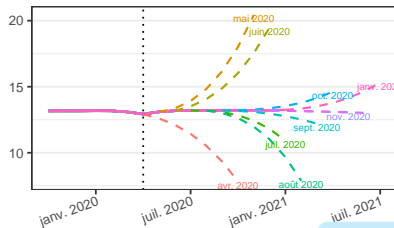
Quadratic – Linear (QL)  
Déphasage de 2 mois



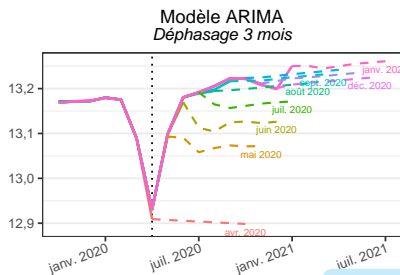
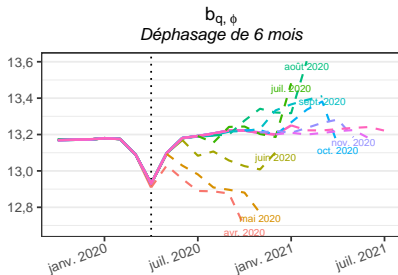
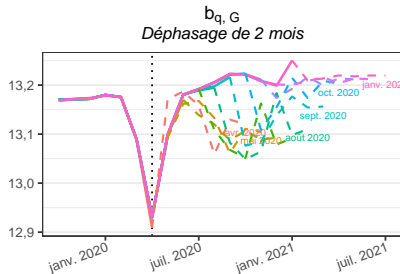
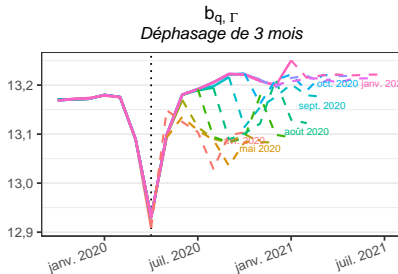
Cubic – quadratic (CQ)  
Déphasage de 2 mois



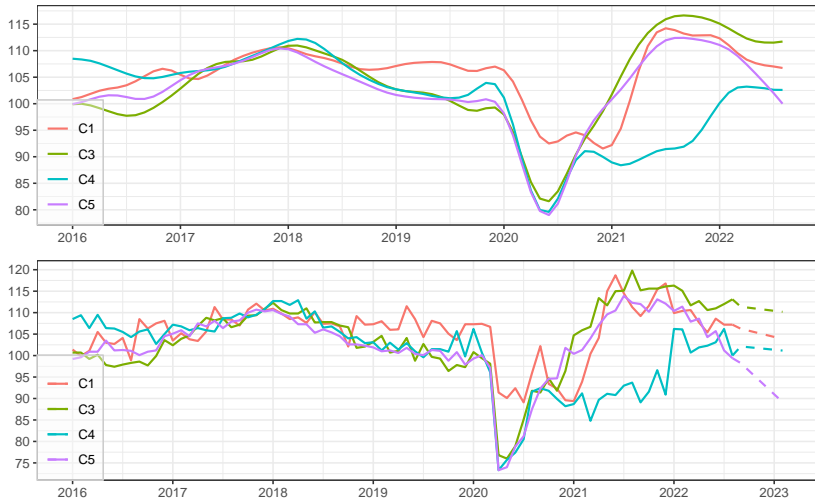
DAF  
Déphasage de 2 mois



# Prévisions implicites (2)



# Retour sur les climats des affaires dans l'industrie



# Sommaire

---

## 1. Introduction

## 2. Méthodes étudiées

## 3. Comparaison des méthodes

## 4. Extensions

### 4.1 Choix de la fenêtre

### 4.2 Paramétrisation locale des méthodes polynomiales

## 5. Conclusion



## Combien de termes utiliser les MM asymétriques ? (1)

Actuellement on utilise toujours autant de points dans le passé (6) que la MM symétriques pour les estimations intermédiaires : hypothèse raisonnable ? Faudrait-il utiliser plus ou moins de points dans le passé ?

Critères classiques : validation croisée, CP-Mallow, AIC, Rice-T :

$$CV(\hat{\mu}) = \frac{1}{n-2h} \sum_{t=h+1}^{n-h} \frac{(y_t - \hat{\mu}_t)^2}{(1-w_0)^2}$$

$$CP(\hat{\mu}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=h+1}^{n-h} (y_t - \hat{\mu}_t)^2 - (n-2h)(1-2w_0)$$

Mais en général leur minimisation ne donne pas de bon résultats (critères peu discriminants)

Pistes à explorer :

## Combien de termes utiliser les MM asymétriques ? (2)

1. Méthodes plus complexes de sélection de la fenêtre (e.g. Fan et Gijbels 1992)
2. Méthode des plus proches voisins : utiliser toujours le même nombre de points (e.g. toujours 13 points)

# Estimation de la pente (1)

Régression non paramétrique :  $y_i = \mu(x_i) + \varepsilon_i$  avec  $\varepsilon_i$  un terme d'erreur.

Avec Taylor, pour tout point  $x_0$ , si  $\mu$  est différentiable  $d$  fois, alors :

$$\forall x : \mu(x) = \mu(x_0) + \mu'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{\mu^{(d)}(x_0)}{d!}(x - x_0)^d + R_d(x),$$

Régression polynomiale

Hypothèse :  $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$  avec  $\varepsilon_t \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$\mu_t$  localement approchée par un polynôme de degré  $d$  :

$$\forall j \in \llbracket -h, h \rrbracket : y_{t+j} = \sum_{i=0}^d \beta_i j^i + \varepsilon_{t+j}$$

## Estimation de la pente (2)

Estimation en utilisant les WLS avec *noyaux* :  $\hat{\beta} = (X'KX)^{-1}X'Ky$  et

$$\hat{m}_t = \hat{\beta}_0 = e_1' \hat{\beta} = w' y = \sum_{j=-h}^h w_j y_{t-j} \text{ avec } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et de la même façon :

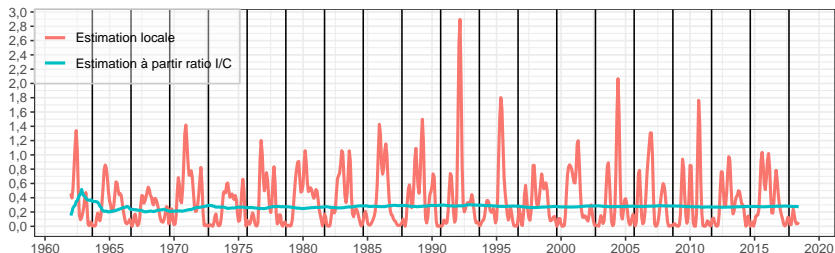
$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \widehat{\mu'(t)} = e_2' \hat{\beta} & (\neq \widehat{\mu(t)})' \\ \hat{\beta}_2 = \widehat{\mu''(t)} = e_3' \hat{\beta} \end{cases}$$

Dans la méthode LC, en fin de période on suppose :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \text{ avec } \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

## Estimation de la pente (3)

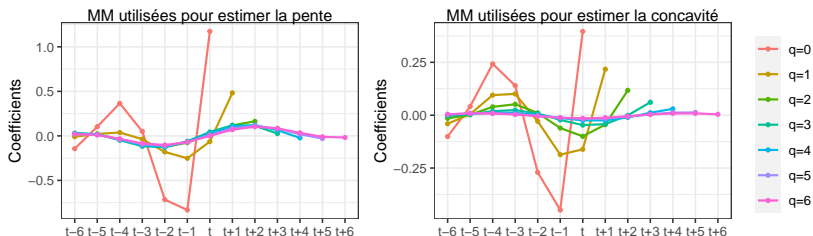
Filtres asymétriques dépendent du ratio  $|\beta_1/\sigma|$  qui est toujours supposé constant : peu de sens au niveau global, notamment dans les périodes de points de retournement ( $\beta_1 \simeq 0$ )



Idée : paramétrisation locale

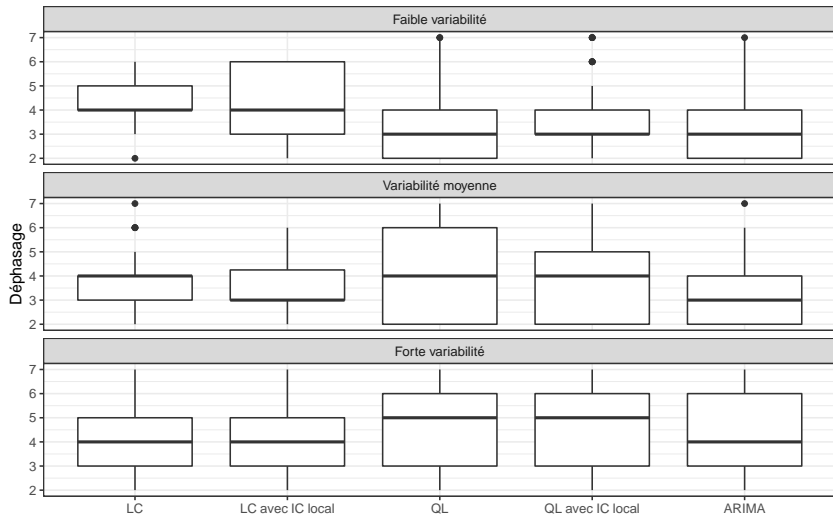
$$\begin{cases} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2h} \sum_{t=h+1}^{n-h} \frac{(y_t - \hat{\mu}_t)^2}{1 - 2w_0^2 + \sum w_i^2} \\ \beta_1 \text{ et } \beta_2 \text{ estimés par MM (DAF par simplification)} \end{cases}$$

# Estimation de la pente (4)



Rmq : il y a (encore) de fortes révisions entre la première et deuxième estimation, on pourrait utiliser méthode QL pour avoir les estimateurs de la pente

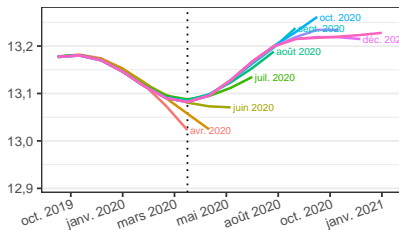
# Résultats (1)



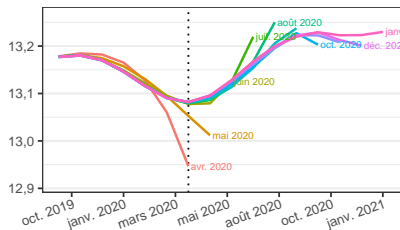
# Résultats (2)

Sur la série étudiée, les résultats sont très proches :

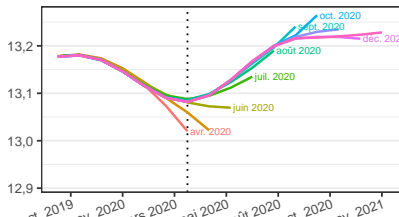
Linear – Constant (LC)  
Déphasage de 3 mois



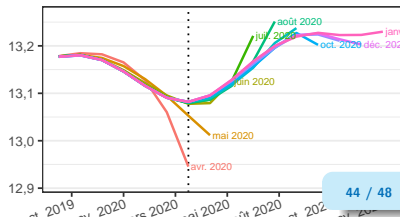
Quadratic – Linear (QL)  
Déphasage de 2 mois



LC avec IC local  
Déphasage de 3 mois



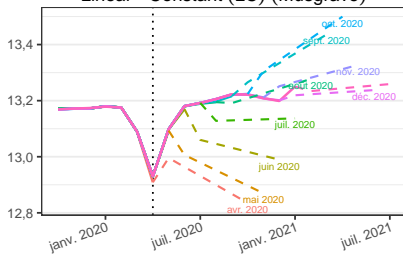
QL avec IC local  
Déphasage de 2 mois



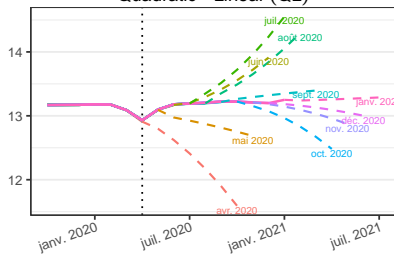


# Résultats (3)

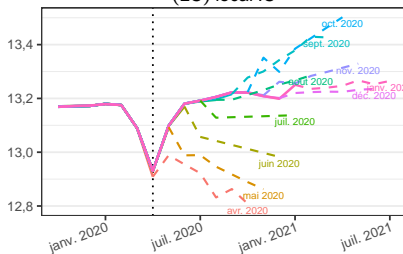
Linear – Constant (LC) (Musgrave)



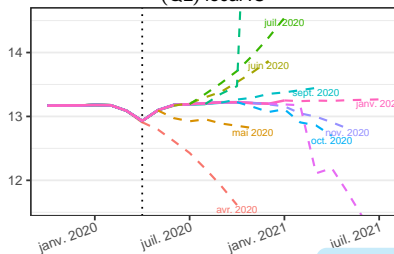
Quadratic – Linear (QL)



(LC) local IC



(QL) local IC



# Sommaire

---

## 1. Introduction

## 2. Méthodes étudiées

## 3. Comparaison des méthodes

## 4. Extensions

## 5. Conclusion

### 5.1 Conclusion

# Conclusion

---

- Dans la construction des filtres asymétriques :
1. on peut se restreindre à ceux qui conservent les polynômes de degré au plus 1 (et exclure les filtres QL, CQ et DAF)

# Conclusion

---

- Dans la construction des filtres asymétriques :
  1. on peut se restreindre à ceux qui conservent les polynômes de degré au plus 1 (et exclure les filtres QL, CQ et DAF)
  2. on peut utiliser le filtre LC pour les estimations proches de l'estimation finale

# Conclusion

---

- Dans la construction des filtres asymétriques :
  1. on peut se restreindre à ceux qui conservent les polynômes de degré au plus 1 (et exclure les filtres QL, CQ et DAF)
  2. on peut utiliser le filtre LC pour les estimations proches de l'estimation finale
- Dans certains cas des méthodes alternatives à la prévision ARIMA peuvent être utilisées ➡ `rjdfilters` peut aider à comparer les résultats (`rjdfilters::x11()` pour les intégrer dans X-11)

# What next?

---

- Etudes sur d'autres méthodes comme Vasyechko et Grun-Rehomme (2014) ou Feng et Schäfer (2021) ou l'extension des méthodes polynomiales avec  $T_g$


# What next?

---

- Etudes sur d'autres méthodes comme Vasyechko et Grun-Rehorme (2014) ou Feng et Schäfer (2021) ou l'extension des méthodes polynomiales avec  $T_g$
- Impact des points atypiques ? quid des méthodes robustes ?

# Merci pour votre attention

---

Package  :

 palatej/rjdfilters

Plus d'exemples sur le package, voir SAPW 2022 :

<https://community.amstat.org/governmentstatisticssection/conferences/pastconference210/seasonal-adjustment-practitioners-workshop-2022>