Einführung in die Informatik II
Automaten

Prof. Bernd Brügge, Ph.D
Institut für Informatik
Technische Universität München

Sommersemester 2001

2. - 4. Juli 2001

Ziele dieser Vorlesung

- Sie können ein Objekt mit interessantem dynamischen Verhalten als endlichen Automaten modellieren.
- Sie verstehen, dass UML-Zustandsdiagramme eine Notation für endliche Automaten sind.
- Sie verstehen, dass endliche Automaten und reguläre Grammatiken äquivalente Interpretationen desselben Konzeptes sind.
- Sie können aus einem endlichen Automaten eine reguläre Grammatik erstellen, die dieselbe Sprache akzeptiert wie der Automat.
- Sie können für eine gegebene reguläre Grammatik den entsprechenden endlichen Automaten konstruieren.

Modellierung mit endlichen Automaten

- Ein Automat ist ein Modell, dass zur Modellierung von vielen Problemen verwendet werden kann. Die Ursprünge für endliche Automaten kamen aus folgenden Anwendungsdomänen:
- **Biologie (McCollough & Pitts**, *"A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity"*, 1943)
  - Modellierung des menschlichen Gehirns: Ein Gehirn besteht aus etwa 2^{35} Neuronen (ca. 35 Milliarden), und es sollte möglich sein, den Zustand jedes Neurons durch einige Bits zu beschreiben.
- **Elektrotechnik (Mealy**, *"A method for synthesizing sequential circuits"*, 1955)
  - Entwurf von Schaltkreisen aus einer endlichen Zahl von Gattern, die nur einen von 2 Werten annehmen können.
- **Linguistik (Chomsky** *"Three models for the description of language"*, 1956)
  - Beschreibung von Grammatiken für die natürliche Sprache

Endliche Automaten in der Informatik

- **Interaktive Systeme:**
  - Spezifikation der Eingaben, die in einem interaktiven System akzeptierbar sein sollen.
- **Compilerbau**:
  - Zur lexikalischen Analyse von Programmen, d.h zur Erkennung von Schlüsselwörtern und Bezeichnern
- **Softwaretechnik**:
  - Zur Beschreibung von Systemen, die durch die dynamischen Eigenschaften eines einzigen Objektes bestimmt werden.

Endliche Automaten

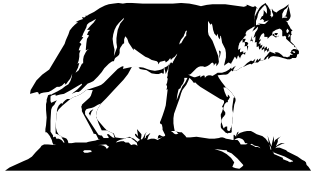
- Ein endlicher Automat ist ein gutes Werkzeug zur Modellierung von Problemen aus der Wirklichkeit, wenn folgende Eigenschaften vorliegen.
  - **Diskrete Ein-/Ausgabe:**
    - Das System reagiert nur auf diskrete Eingabe-Werte und gibt nur diskrete Werte aus.
  - **Endliche Anzahl von Zuständen**:
    - Das System kann nur in einer endlichen Zahl von internen Konfigurationen sein, die wir Zustände nennen.
  - **Gedächtnislosigkeit**:
    - Der Zustand, in dem das System gerade ist, umfasst die gesamte Information über die Vergangenheit des Systems
    - Nur dieser Zustand entscheidet bei der nächsten Eingabe, was der nächste Zustand ist.

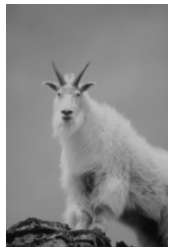
Beispiel für einen endlichen Automaten

- Die ***Steuerung eines Fahrstuhls*** kann man mit einem endlichen Automaten modellieren.
  - **Diskrete Ein-/Ausgabe:**
    - Eingabe: Welche Knöpfe wurden in welchen Etagen gedrückt, aber noch nicht bedient?
    - Ausgabe: In welche Richtung (hoch, runter) und wie weit muss der Fahrstuhl als nächstes fahren?
  - **Endliche Anzahl von Zuständen**:
    - Der Fahrstuhl bedient nur eine endliche Anzahl von Etagen.
  - **Gedächtnislosigkeit**:
    - Die Steuerung braucht nicht zu wissen, welche Etagen der Fahrstuhl bis jetzt schon besucht hat.
    - Wichtig ist der derzeitige Zustand: Wo steht der Fahrstuhl?

Ein altes Problem: Wolf, Kohl und Ziege

- Eine Hirte steht mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf am linken Ufer eines Flusses. Sie wollen den Fluss überqueren.
- Es gibt eine Fähre, die hin und her fährt. Die Fähre ist allerdings so klein, dass sie höchstens den Hirten und einen weiteren Passagier gleichzeitig transportieren kann.
- Es gibt folgende Probleme:
  - Allein gelassen, frisst der Wolf die Ziege
  - Allein gelassen, frisst die Ziege den Kohlkopf
- Wie können alle den Fluss erfolgreich überqueren, ohne dass irgend jemand gefressen wird?





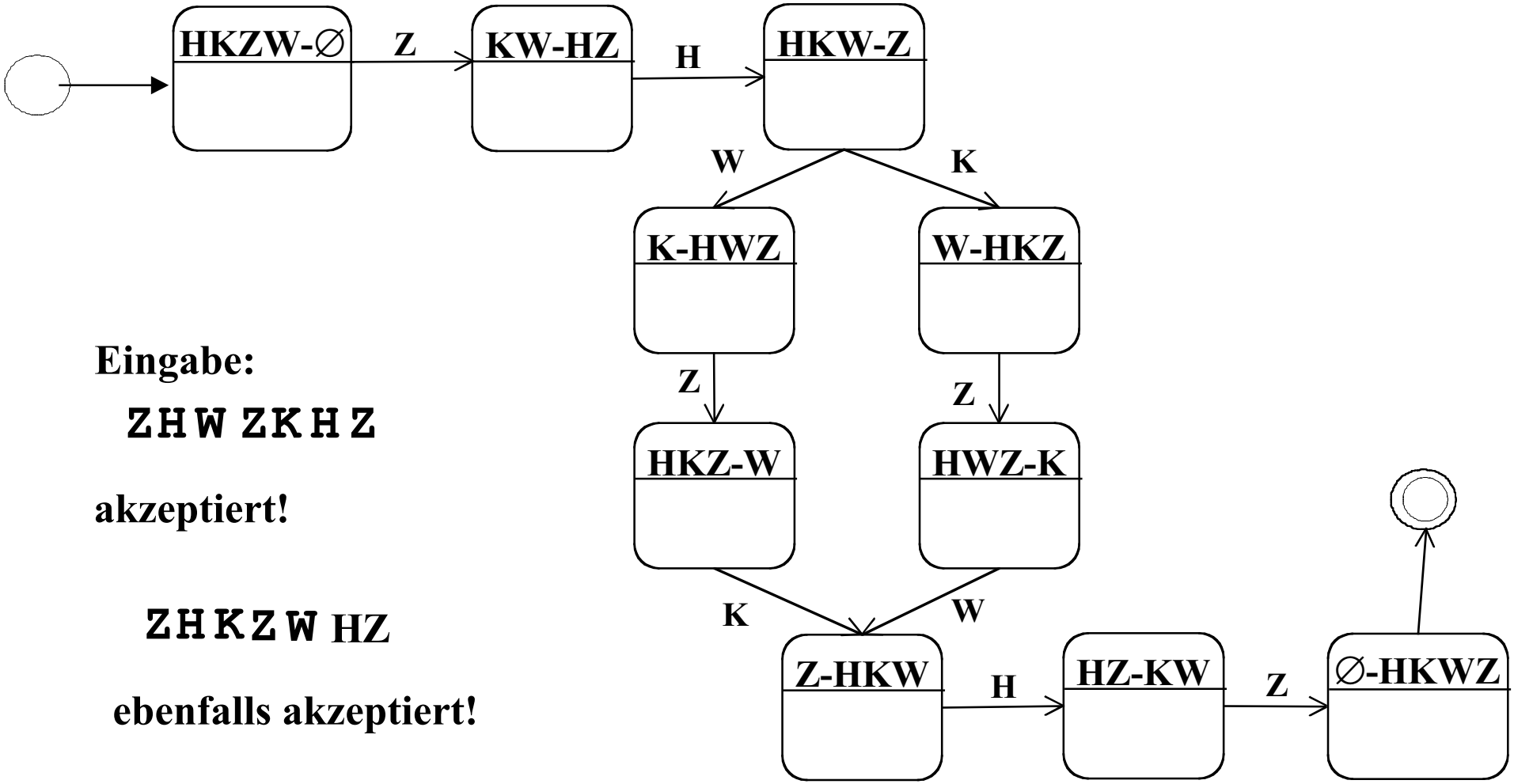
Wie modellieren wir das Problem?

- Sollen wir **Anwendungsfälle** mit Ereignisfolgen probieren?
  - Akteure: Wolf, Hirte, Ziege, …
  - Ereignisfolge:
    - Alle sind am linken Ufer
    - Der Hirte fährt mit der Ziege zum rechten Ufer
    - Dort lässt er die Ziege,
    - Dann fährt er allein zum linken Ufer
    - ...
- Sollen wir ein **Klassendiagramm** erstellen? Das Problem hat viele Objekte. Abbott's Analyse ergibt: Hirte, Wolf, Ziege, Kohlkopf, Fluss, Ufer, überqueren, fressen, transportieren, Fähre, Kapazität.
- Brauchen wir dafür ein **Sequenzdiagramm**?
- Oder können wir das ganze Problem allein mit einem **Zustandsdiagramm** modellieren?

Analyse des Hirte-Wolf-Ziege-Kohl-Problems

- Wir führen folgende Bezeichnungen ein: H ist der Hirte, W der Wolf, Z die Ziege und K der Kohl. ∅ bezeichnet die leere Menge.
- Wir identifizieren eine Klasse **`Steuerung`** mit einem Attribut **`Uferverteilung`** vom Typ Zeichenkette mit Werten wie "`HWZK-∅`", "`WK-HZ`", usw. Die Attributwerte modellieren die Besetzung der beiden Uferseiten folgendermaßen:
  - "`HWZK-∅`": Alle Beteiligten sind am linken Ufer.
  - "`WK-HZ`": Wolf und Kohl am linken Ufer, Hirte und Ziege am rechten Ufer.
  - ....
  - "`K-HWZ`": Kohl am linken Ufer, Hirte, Wolf und Ziege am rechten Ufer.
  - "`∅-HWZK`": Alle Beteiligten sind am rechten Ufer.
- Insgesamt kann **`Uferverteilung`** höchstens $2^4 = 16$ verschiedene Werte annehmen, wir haben also 16 Zustände (davon sind nicht alle erstrebenswert). Als Namen für die Zustände nehmen wir die Werte: `HWZK-∅` ist unser Anfangszustand, den Endzustand `∅-HWZK` wollen wir erreichen.

Modellierung des Problems mit UML-Zustandsdiagramm



Eingabe:

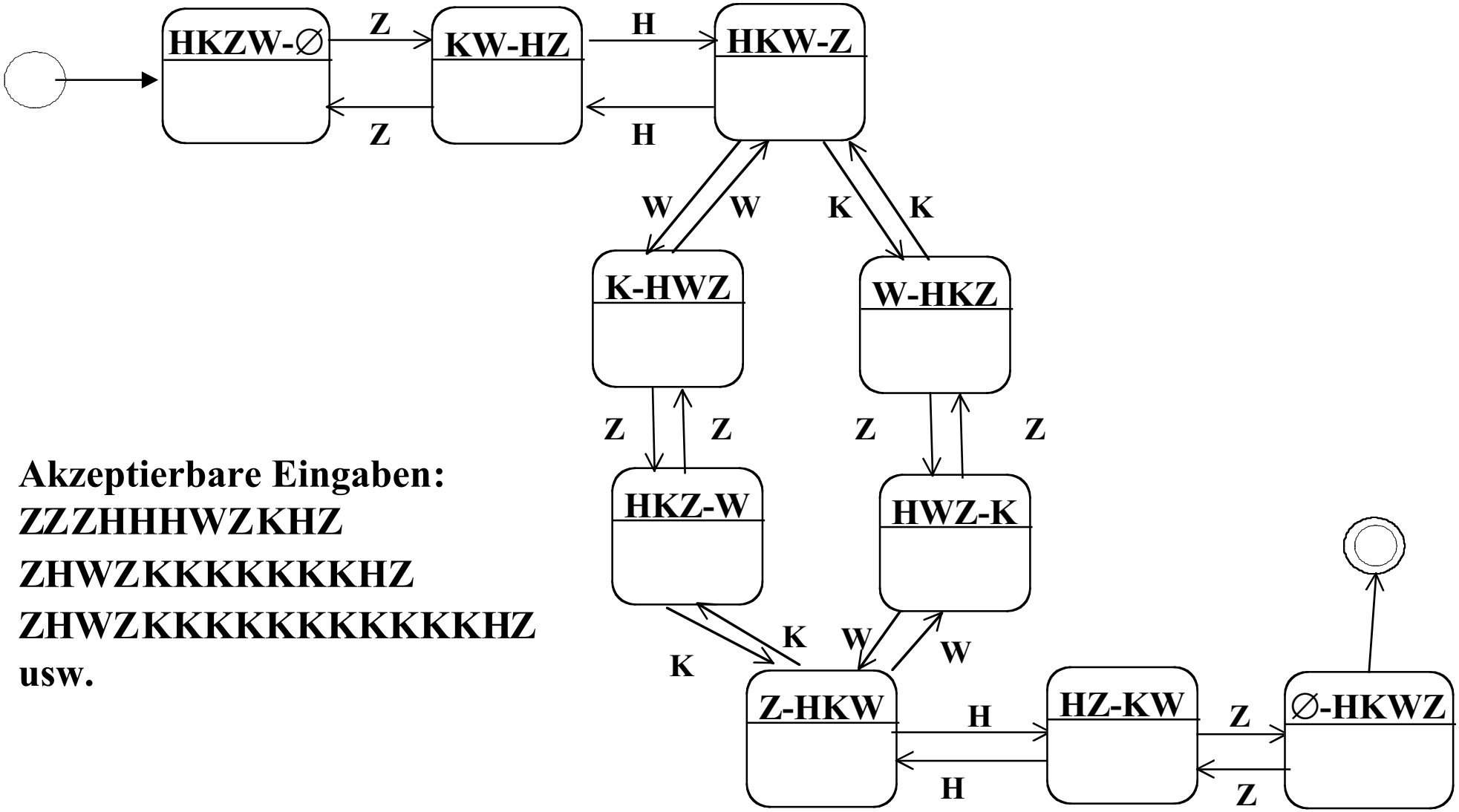
`ZHW ZKHZ`

akzeptiert!

`ZHKZW HZ`

ebenfalls akzeptiert!

Ebenfalls mögliche Modellierung des Problems

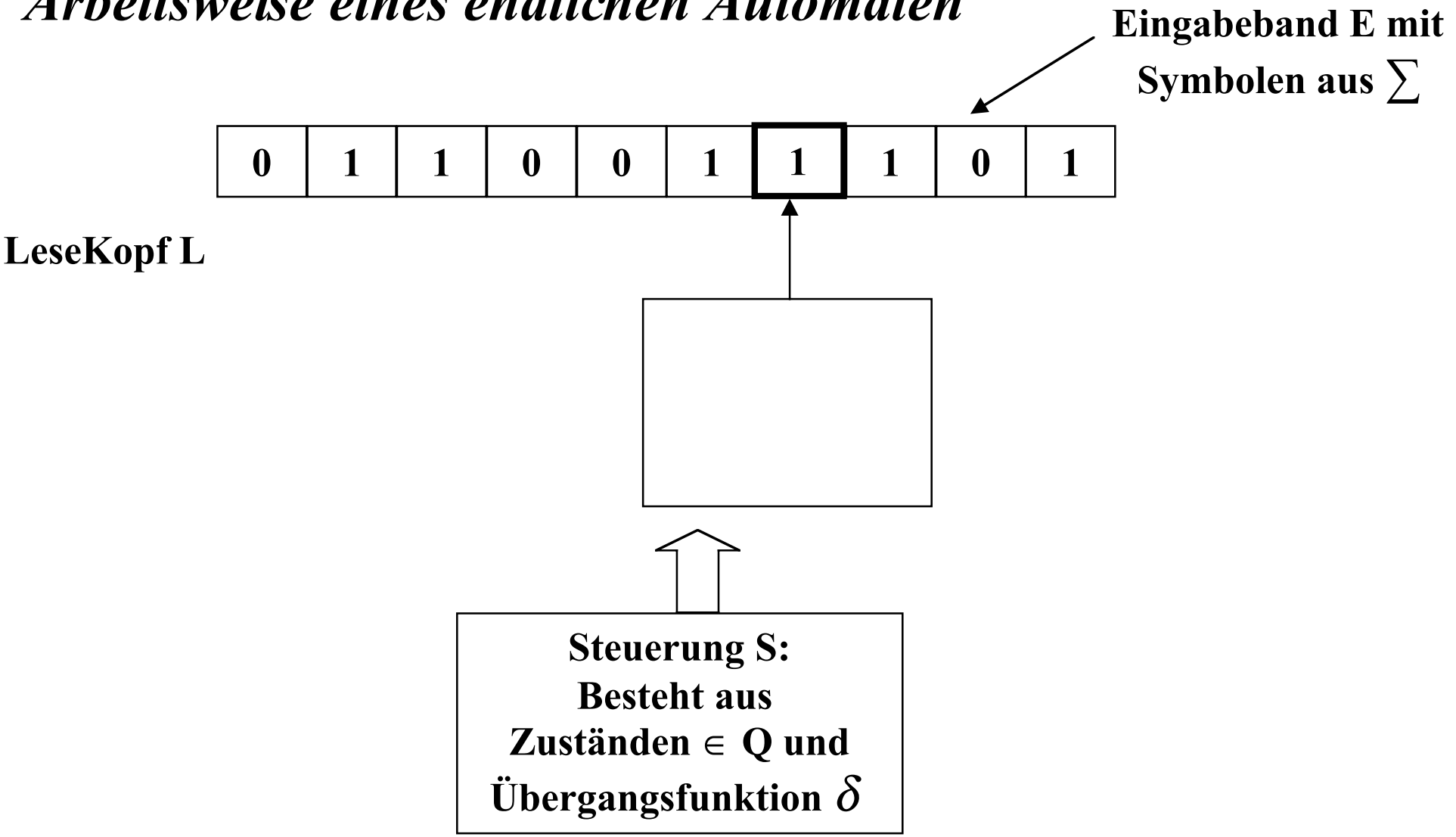


Akzeptierbare Eingaben:
ZZZHHHWZKHZ
ZHWZKKKKKKKHZ
ZHWZKKKKKKKKKKKHZ
usw.

Endlicher Automat

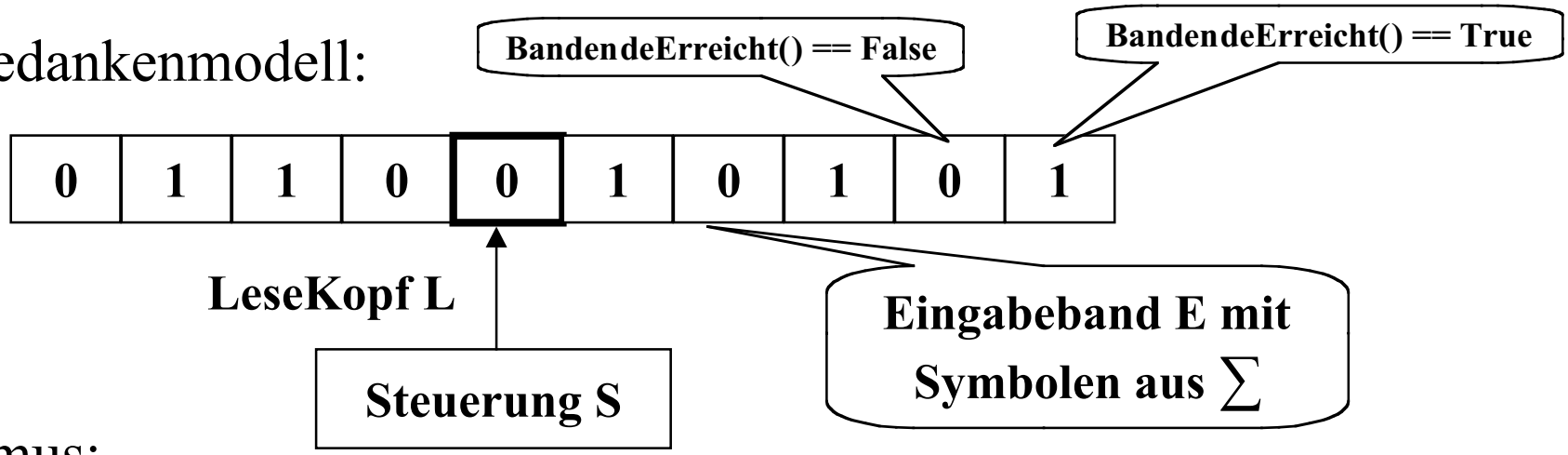
- **Definition:** Ein endlicher Automat ist ein 5-Tupel $A = (\sum, Q, \delta, q_0, F)$, wobei gilt:
  - $\sum$ ist ein endlicher Zeichenvorrat (also ein Alphabet),
  - Q ist eine nichtleere endliche Menge von Zuständen,
  - $\delta : Q \times \sum \rightarrow Q$ ist eine Übergangsfunktion (*engl. transition function*), wobei gilt:
    - $\delta\,(q, a)$ ist ein definierter Zustand für jeden Zustand q und Eingabe $a \in \sum$.
  - $q_0 \in Q$ ist ein Anfangszustand
  - F ist eine Menge von Endzuständen

Arbeitsweise eines endlichen Automaten



Ein endlicher Automat ist ein Algorithmus

- Unser Gedankenmodell:



- Algorithmus:

Setze die Steuerung *S* auf den Anfangszustand; // $S = q_0$;

Positioniere Lesekopf L am Anfang des Eingabebandes E;

akzeptiert = istEndzustand(q_0);

while not BandendeErreicht() do {

    Lies Symbol unter dem Lesekopf L; // $L = a_i$;

    Berechne den neuen Zustand aus *S* und *L*; // $S = \delta(S,L)$;

    Ist der neue Zustand ein Endzustand? Wenn ja, akzeptiert = true;

} // while not BandendeErreicht()

return akzeptiert;

Darstellungsmöglichkeiten für die Übergangsfunktion

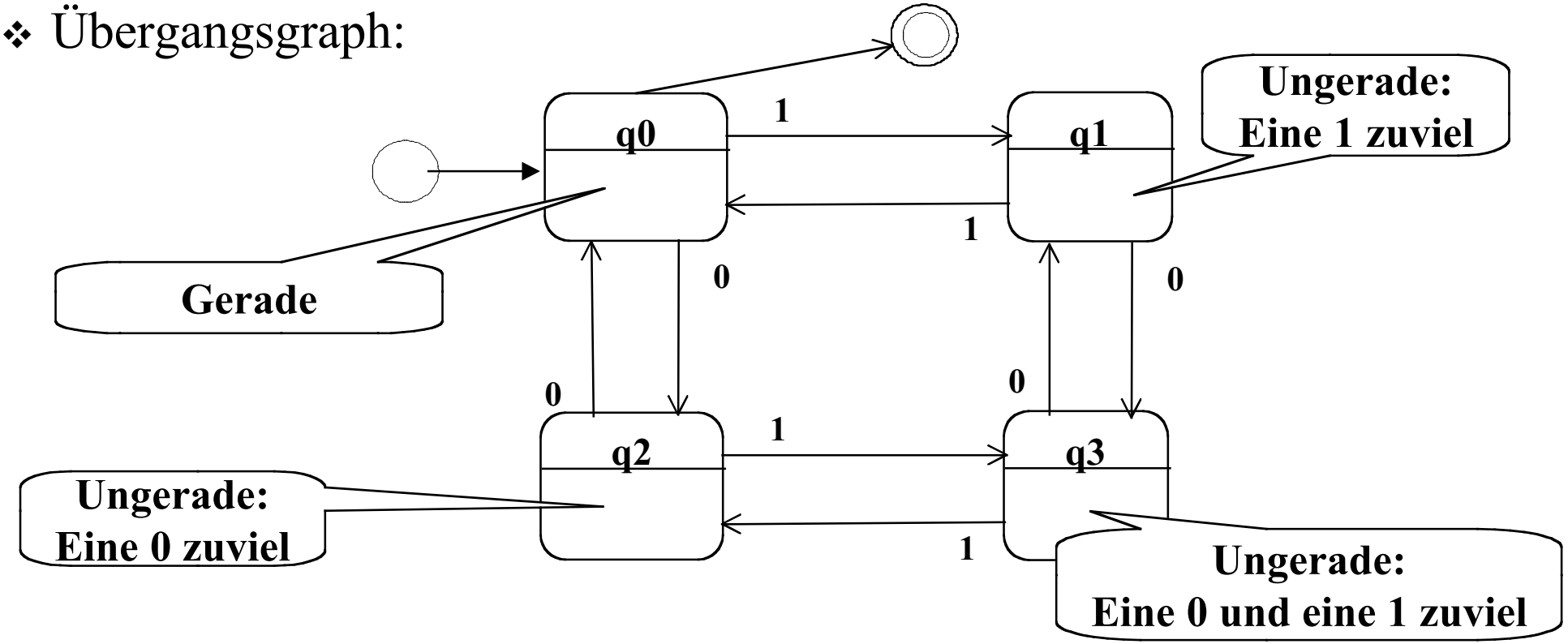
- Die Übergangsfunktion δ eines endlichen Automaten lässt sich auf verschiedene Art und Weise darstellen:
  - als Graph $\Rightarrow$ Übergangsgraph
  - als Tabelle $\Rightarrow$ Übergangstabelle
  - als Menge $\Rightarrow$ Menge von Produktionen

Übergangsfunktion δ als Graph

- Ein endlicher Automat kann als ***gerichteter Graph G*** dargestellt werden, wenn wir folgende Zuordnungen festlegen:
  - die Menge der ***Zustände*** Q ist die Menge der ***Knoten*** des Graphen mit q_0 als Anfangszustand
  - Zwei Knoten q_1 und q_2 im Graphen sind durch eine mit der Eingabe a beschriftete gerichtete ***Kante*** verbunden, wenn es einen ***Übergang*** vom Zustand q_1 nach q_2 gibt, d.h. wenn $\delta(q_1, a) = q_2$ gilt.
- Den gerichteten Graphen nennen wir **Übergangsgraph**
  - UML-Zustandsdiagramme sind also Übergangsgraphen.

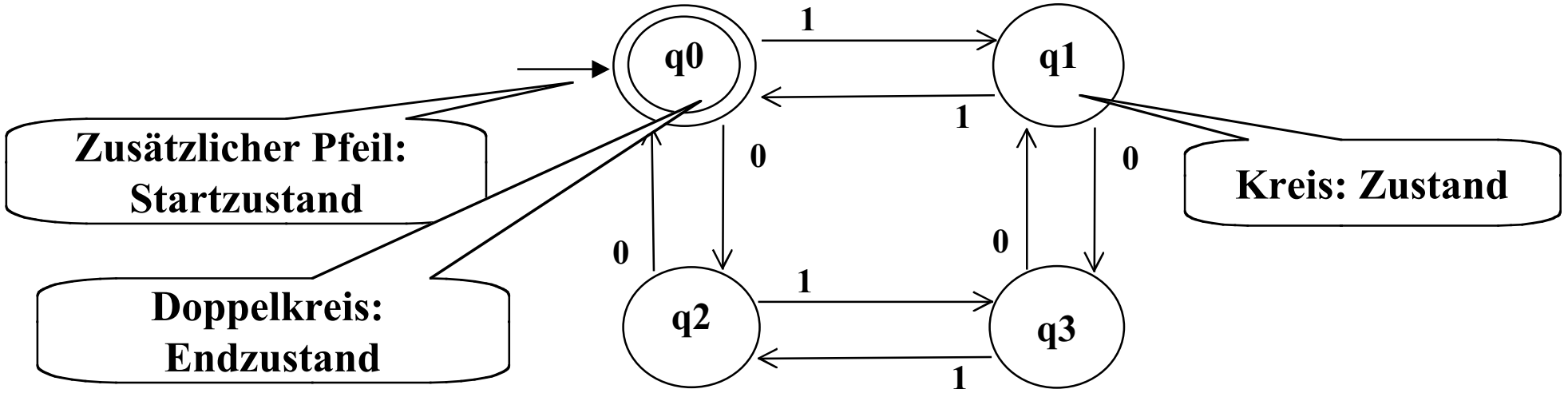
Beispiel für einen Übergangsgraph

- Wir wollen einen Prüfer bauen, der eine vorgegebene Zeichenkette aus '0' und '1' nur dann akzeptiert, wenn die Kette eine gerade Anzahl von 0'en und eine gerade Anzahl 1'en hat.
- Beispiel: `110101` wird akzeptiert,
  `1101011` wird nicht akzeptiert
- Übergangsgraph:



Alternative Notation für Übergangsgraphen

- In der Softwaretechnik benutzen wir UML-Zustandsdiagramme für die Notation von endlichen Automaten.
- In der Automatentheorie hat sich vorher schon eine einfachere Notation etabliert:
  - Zustände werden als Kreise gezeichnet
  - Der Anfangszustand hat einen kleinen gerichteten Pfeil
  - Der Endzustand besteht aus 2 konzentrischen Kreisen



- Bei endlichen Automaten ohne größere Komplexität werden wir diese Notation öfters benutzen.

Übergangsfunktion δ als Tabelle

- **Definition Übergangstabelle:** Tabellenförmige Darstellung der Übergangsfunktion eines endlichen Automaten.

		Eingabe aus ∑				
		a	**b**	**...**	**j**	**...**	**z**
Zustände	q_0	$\delta(q_0, a)$	$\delta(q_o, b)$		$\delta(q_o, j)$		$\delta(q_o, z)$
	q_1	$\delta(q_1, a)$	$\delta(q_1, b)$		$\delta(q_1, j)$		$\delta(q_1, z)$
	...	...	...		...		...
	q_i	$\delta(q_i\ a)$	$\delta(q_i, b)$		$\delta(q_i, j)$		$\delta(q_i, z)$
	...	...	...		...		...
	q_n	$\delta(q_n\ a)$	$\delta(q_n, b)$		$\delta(q_n, j)$		$\delta(q_n, z)$

Übergangstabelle für den Gleichheitsprüfer

Zustand \ Eingabe	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Erweiterung der Übergangsfunktion δ von einzelnen Zeichen auf Zeichenketten:
$\delta(q, aw) = \delta(\delta(q, a), w)$
$a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$

- Beispiel: Eingabe 110101

$\delta(q_0, 1) = q_1 \Rightarrow \delta(q_1, 1) = q_0 \Rightarrow \delta(q_0, 0) = q_2 \Rightarrow \delta(q_2, 1) = q_3 \Rightarrow$
$\delta(q_3, 0) = q_1 \Rightarrow \delta(q_1, 1) = q_0$

- Für diese Folge von Berechnungen schreiben wir auch verkürzt:

$\delta(q_0, 110101) \overset{*}{\Rightarrow} q_0$

Sprache eines Automaten

- Die von einem endlichen Automaten A **akzeptierte Sprache** L(A) ist definiert als

$$L(A) = \{ x \mid x \in \sum^*, q_0 x \xrightarrow{*} q_f \text{ mit } q_f \in F \}$$

- Alle Eingabeworte, die den Automaten A vom Anfangszustand in einen Endzustand überführen, sind also Teil der Sprache L(A)
  - Wolf-Kohl-Ziege Automat A:

    $ZHWZKKKKKKKKHZ \in L(A),\ KZHW \notin L(A)$
  - Gleichheits-Checker P:
    - $110101 \in L(P),\ 1101011 \notin L(P)$
- Im Übergangsgraphen entspricht ein $x \in L(A)$ einem Weg vom Anfangszustand q_0 zu einem Endzustand.

Endliche Automaten mit Ausgabe

- Endliche Automaten, wie wir sie bis jetzt definiert haben, besitzen nur eine Eingabe, aber keine richtige Ausgabe:

  Die Ausgabe ist ein binäres Signal:
  "Die Eingabe ist akzeptiert" oder *"Die Eingabe ist nicht akzeptiert"*

- Es gibt Probleme, die mit endlichen Automaten modellierbar sind, bei denen die Ausgabe wichtiger ist als der erreichte Endzustand.
- Beispiel: MVV-Fahrkartenautomat.
  - Ich wähle einen Fahrschein aus, z.B. eine Tageskarte.
  - Ich werfe den korrekten Geldbetrag in den Automaten.
  - Jetzt erwarte ich, dass der Fahrschein ausgegeben wird.
  - Ob der Automat dabei in einem Endzustand ist, interessiert mich absolut nicht.
- Es gibt viele Arten von Automaten, die Ausgabe ermöglichen.
  - Für uns wichtige Varianten sind die Mealy-, Moore- und Harel-Automaten.

Moore-Automat

- Ein ***Moore-Automat*** ist ein 6-Tupel M = (Q, Σ, T, δ, λ, q_o), wobei Q, Σ, δ und q_o wie beim endlichen Automaten definiert sind. T ist das Ausgabealphabet, und λ ist eine Abbildung von Q nach T.
  - In einem **Zustand** wird also ein Zeichen $t \in T$ ausgegeben.
- Jeder MVV-Kartenautomat enthält zwei Moore-Automaten, wobei das Eingabealphabet immer aus erlaubten Geldstücken besteht:
  - *Fahrscheinausgabe F:* Wenn der korrekte Geldbetrag eingegeben worden ist, wird ein Zustand erreicht, in dem der Fahrschein ausgegeben wird.
  - *Wechselgeldausgabe W:* Wenn mehr als der korrekte Geldbetrag eingeben wurde, muss ein Zustand erreicht werden, in dem das zuviel eingezahlte Geld ausgegeben wird.

Mealy-Automat

- Ein ***Mealy-Automat*** ist ein 6-Tupel M = (Q, Σ, T, δ, λ, q_o) wobei Q, Σ, T, δ und q_o wie beim Moore-Automaten definiert sind. λ ist allerdings eine Abbildung von $Q \times \Sigma$ nach T.
  - Beim Übergang von einem Zustand zu einem anderen Zustand wird also bei Eingabe $a \in \Sigma$ ein Zeichen $t \in T$ ausgegeben.
- Jeder MVV-Kartenautomat enthält einen Mealy-Automaten:
  - Eingabealphabet sind wieder die erlaubten Geldstücke.
  - *Anzeige des fehlenden Betrages F:* Nach dem Einwurf jedes Geldstückes wird der noch fehlende Betrag auf dem Bildschirm angezeigt.

Harel-Automat

- Die durch UML-Zustandsdiagramme beschreibbaren Automaten nennen wir ***Harel-Automaten***.
- Ein Harel-Automat hat also
  - eine Zustandsmenge Q, die hierarchisch organisiert sein kann (durch Superzustände)
  - eine Eingabemenge Σ von Ereignissen
  - eine Menge von Prädikaten Π für Wächter
  - eine Ausgabemenge T
  - einen Anfangszustand q_0
  - Zwei Funktionen mit Ausgabe:
    - Übergangsfunktion δ: $Q \times \Sigma \times \Pi \rightarrow T \times Q$
    - Zustandsausgabe λ: $Q \rightarrow T$

Endliche Automaten vs Harel-Automaten

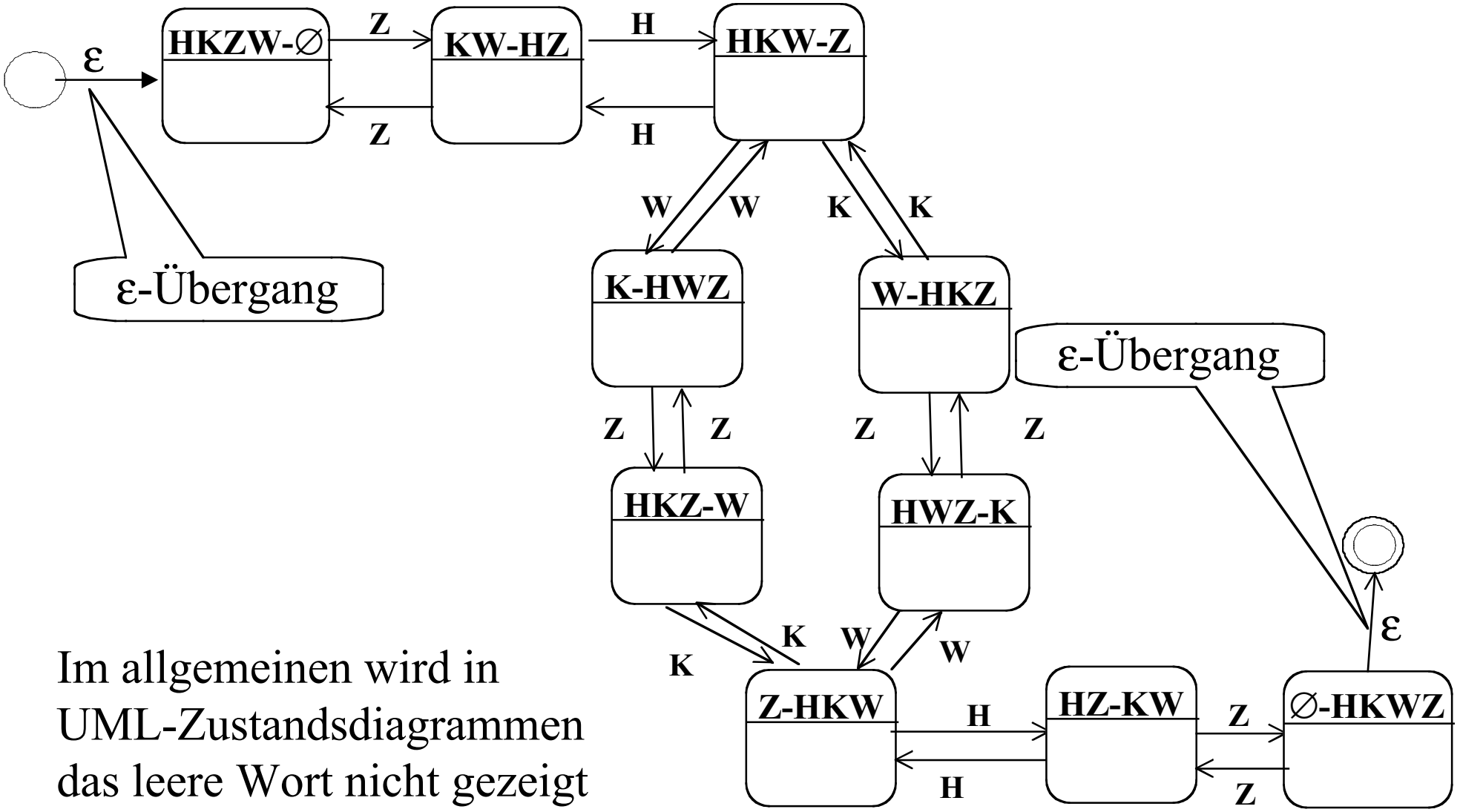
- Die ***Eingabe*** in einem endlichen Automaten entspricht den ***Ereignissen*** in einem Harel-Automaten. Die Ereignisse kommen dabei aus der Modellierung der Anwendungsdomäne.
- Die ***Ausgabe*** in einem endlichen Automaten ist äquivalent zu einer ***Aktion*** oder einer ***Aktivität*** im entsprechenden Harel-Automaten.
  - Ein UML-Zustandsdiagramm beschreibt einen Mealy-Automaten, wenn es keine Wächter und keine Aktivitäten enthält, sondern ***nur Aktionen*** der Form `a/t`.
  - Ein UML-Zustandsdiagramm beschreibt einen Moore-Automaten, wenn es keine Wächter und keine Aktionen enthält, sondern ***nur Aktivitäten*** der Form `do/print(t)`

Automaten mit ε-Übergängen

- Ein endlicher Automat kann auch Transitionen ohne spezifische Eingabe ausführen. In diesem Fall verallgemeinern wir die Übergangsfunktion δ folgendermaßen:
- $\delta : Q \times (\sum \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Q$, wobei gilt:
  - $\delta(q, a)$ ist ein definierter Zustand für jeden Zustand q und jede Eingabe $a \in \sum \cup \{\varepsilon\}$.
- ***Erstaunlich***: Die Sprachen von Automaten mit ε-Übergängen sind nicht mächtiger als die von endlichen Automaten.
  - **Satz**: Jeder Automat mit ε-Übergängen kann in einen äquivalenten endlichen Automaten (ohne ε-Übergänge) transformiert werden.

    Beweis $\Rightarrow$ Hauptstudium (Automatentheorie)

Beispiel für einen Automaten mit ε-Übergängen



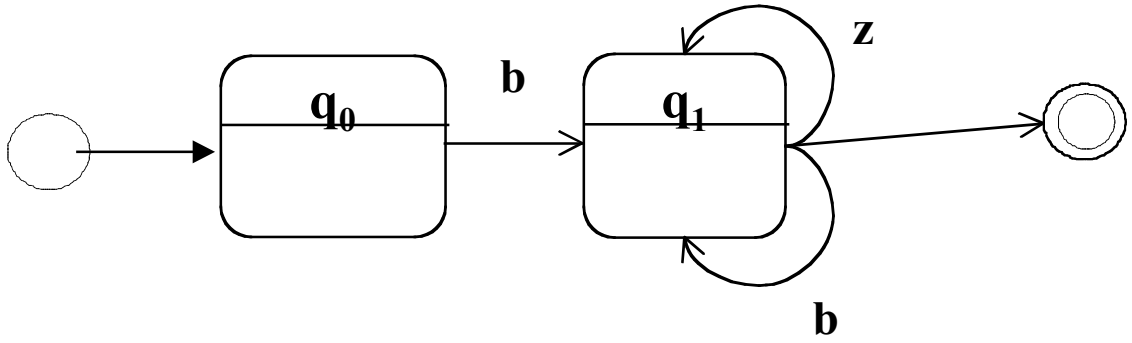
Im allgemeinen wird in UML-Zustandsdiagrammen das leere Wort nicht gezeigt

Nichtdeterministischer endlicher Automat

- Bisher haben wir angenommen, dass $\delta : Q \times \sum \rightarrow Q$ für die Berechnung von Zustandsübergängen ***eine Funktion*** ist.
  - Für jedes Paar Zustand/Eingabe gibt es nur einen neuen Zustand.
  - Solche Automaten nennen wir **deterministisch**.
- Im allgemeinen Fall kann man von einem gegebenen Zustand q bei Eingabe eines Zeichens mehr als einen Zustand bekommen.
  - Beispiel: $\delta(q_1, a) = q_3$ ***und*** $\delta(q_1, a) = q_4$
- δ ist dann keine Funktion, sondern eine ***Relation***. Ein endlicher Automat, bei dem δ eine Relation ist, heißt **nichtdeterministisch** oder auch **indeterministisch**.
- ***Erstaunlich***: Die Sprachen, die von nichtdeterministischen endlichen Automaten akzeptiert werden, sind nicht mächtiger als die von deterministischen endlichen Automaten.
  - **Satz**: Jeder nichtdeterministische endliche Automat kann in einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten transformiert werden.

Ein weiteres Beispiel: Erkennung von Zahlen

- Wir wollen einen endlichen Automaten konstruieren, der Bezeichner akzeptiert. Ein ***Bezeichner*** muss mit einem Buchstaben anfangen, gefolgt von beliebig vielen Buchstaben oder Ziffern.
- Endlicher Automat A:
  - Eingabealphabet Σ = { b, z }
    - wobei b ein Buchstabe ist und z eine Ziffer
  - Übergangsdiagramm:



Grammatik für Bezeichner

- Für die eben definierten ***Bezeichner*** können wir auch eine Grammatik entwickeln, und zwar mit den Produktionen P:

  { ***Bezeichner*** → 'b' ***ZahlBuchstabe*** | 'b'

  ZahlBuchstabe → 'b' ***ZahlBuchstabe*** | 'b'

  ZahlBuchstabe → 'z' ***ZahlBuchstabe*** | 'z'

  }

- Diese Grammatik akzeptiert dieselbe Sprache wie der eben entwickelte Automat !
- Dies ist kein Zufall, sondern liegt an einem tieferen Zusammenhang zwischen Automaten und Grammatiken, den wir jetzt genauer herausarbeiten.

Einschub: Reguläre Grammatik (Chomsky-3-Grammatik)

- Gegeben sei eine Chomsky-Grammatik ***G = (T, N, P, Z)***.
  Seien *A* und *B* Nichtterminale aus ***N*** und *a* ein Terminal aus ***T***.
- Wir definieren eine **Rechtslineare Produktion** als eine Produktion der Form $A \rightarrow aB$
- Wir definieren eine **Linkslineare Produktion** als eine Produktion der Form $A \rightarrow Ba$
- **Definition:** Eine Grammatik ist eine **reguläre Grammatik** oder auch **Chomsky-3-Grammatik**, wenn sie neben terminierenden Produktionen entweder nur links- oder nur rechtslineare Produktionen enthält.
- Beispiele:
  - $P = \{A \rightarrow aB, A \rightarrow a, B \rightarrow aB\}$ $\Rightarrow$ G ist regulär
  - $P = \{A \rightarrow Ba, B \rightarrow a, B \rightarrow Ba\}$ $\Rightarrow$ G ist regulär
  - $P = \{A \rightarrow Ba, B \rightarrow a, B \rightarrow aB\}$ $\Rightarrow$ G ist nicht regulär
  - $P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow a, B \rightarrow aB\}$ $\Rightarrow$ G ist nicht regulär

Regulär oder nicht regulär?

$P = \{A \rightarrow aB, A \rightarrow a, B \rightarrow aB\}$

Grammatik ist regulär

(Produktionen sind terminal oder rechtslinear)

$P = \{A \rightarrow Ba, B \rightarrow a, A \rightarrow \varepsilon\}$

Grammatik ist **nicht** regulär

(hat eine sog. ε-Produktion, die weder rechts- noch linkslinear ist)

$P = \{A \rightarrow Ba, B \rightarrow a, B \rightarrow aB\}$

Grammatik ist **nicht** regulär

(hat sowohl rechts- als auch linkslineare Produktionen)

$P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow a, B \rightarrow aB\}$

Grammatik ist **nicht** regulär

(hat eine Produktion, die weder rechts- noch linkslinear ist)

Automaten und Grammatiken

- Wir hatten **L(A)** als die Sprache definiert, die von einem Automaten A akzeptiert wird.
- Für eine gegebene Chomsky-Grammatik G = (Σ, N, P, Z) hatten wir **L(G)** als die Sprache definiert, die von G erzeugt wird (siehe Info I - Vorlesung 4).
- **Satz über Äquivalenz zwischen endlichen Automaten und regulären Grammatiken**
  - Eine Menge $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann die Sprache L = **L(A)** eines endlichen Automaten A, wenn es eine reguläre Grammatik G = (Σ, N, P, Z) gibt, so dass L = **L(G)**.
  - Die Äquivalenz ist beschränkt auf die nichtleeren Worte aus L: Eine reguläre Grammatik kann ε nicht im Sprachschatz haben, es gibt aber endliche Automaten, die ε erkennen (Welche?)

Endliche Automaten und reguläre Grammatiken

- Zurück zu unserem Satz:
  - Immer wenn wir einen endlichen Automaten haben, der eine Sprache L(A) akzeptiert, können wir eine reguläre Grammatik konstruieren, die denselben Sprachschatz akzeptiert.
  - Dasselbe gilt auch umgekehrt.
- Wir führen den Beweis in beiden Richtungen.
  1. Gegeben eine reguläre Grammatik $\Rightarrow$ Endlicher Automat
  2. Gegeben ein endlicher Automat $\Rightarrow$ reguläre Grammatik

Reguläre Grammatik $\Rightarrow$ Endlicher Automat

- Der Beweis ist konstruktiv, d.h. wir zeigen, wie für eine beliebige vorgegebene reguläre Grammatik der entsprechende Automat konstruiert werden kann.
- Sei eine reguläre Grammatik $G = (T, N, P, Z)$ gegeben.
  Die Produktionen in P haben also alle die Form $A \rightarrow aB,\ A \rightarrow a$

  für rechtslineare Produktionen wird der Beweis analog geführt

Reguläre Grammatik ⇒ Endlicher Automat (3)

- Aus der Grammatik $G = (T, N, P, Z)$ konstruieren wir den Automaten $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ folgendermaßen:

$\Sigma = T$

Eingabealphabet Σ: Alle Terminale T

$Q = N \cup \{q_f\}$

Zustandsmenge Q: Alle Nichtterminale N plus ein neuer Endzustand q_f

$q_0 = Z$

Anfangszustand q_0: Das Axiom Z

$F = \{q_f\}$

Endzustandsmenge F: Neu eingeführter Zustand q_f

$\delta(A, a) = B \;\; wenn \; A \rightarrow aB \in P$

$\delta(A, a) = q_f \;\; wenn \; A \rightarrow a \in P$

Für jede Produktion aus P berechnen wir einen Wert für die Übergangsfunktion δ. Der Rest von δ ist undefiniert

Das heißt: Für jede reguläre Grammatik können wir einen endlichen Automaten konstruieren, der dieselbe Sprache akzeptiert.

Endlicher Automat ⇒ Reguläre Grammatik

- Aus dem Automaten $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ konstruieren wir die Grammatik $G = (T, N, P, Z)$ folgendermaßen:

$T = \Sigma$ — **Terminale T: Alle Elemente aus dem Eingabealphabet Σ**

$N = Q$ — **Nichtterminale N sind alle Zustände von Q**

P:

- Für jedes $\delta(A, a) = B$ definieren wir eine Produktion $A \rightarrow aB$
- Für jedes Eingabesymbol a, das aus Zustand A zu einem Endzustand $q_f \in F$ führt, d.h. $\delta(A, a) = q_f$, definieren wir eine Produktion $A \rightarrow a$

$Z = q_0$ — **Als Axiom** Z nehmen wir den **Anfangszustand** q_0

Das heißt: Für jeden endlichen Automaten können wir eine reguläre Grammatik konstruieren, die dieselbe Sprache (bis auf ε) akzeptiert.

q.e.d.

Beispiel: Konvertierung einer Grammatik in endlichen Automaten

- G = (T, N, P, Z), wobei gilt:

  T = { 'b', 'z'}

  N = { Bezeichner, ZahlBuchstabe}

  P = {

  Bezeichner → 'b' ZahlBuchstabe | 'b'

  ZahlBuchstabe → 'b' ZahlBuchstabe | 'b'

  ZahlBuchstabe → 'z' ZahlBuchstabe | 'z'

  }

  Z = Bezeichner

Konstruktion des Automaten

$\Sigma = T = \{b, z\}$

$Q = N \cup q_f = \{\text{Bezeichner, ZahlBuchstabe, } q_f\}$

$q_0 = Z = \text{Bezeichner}$

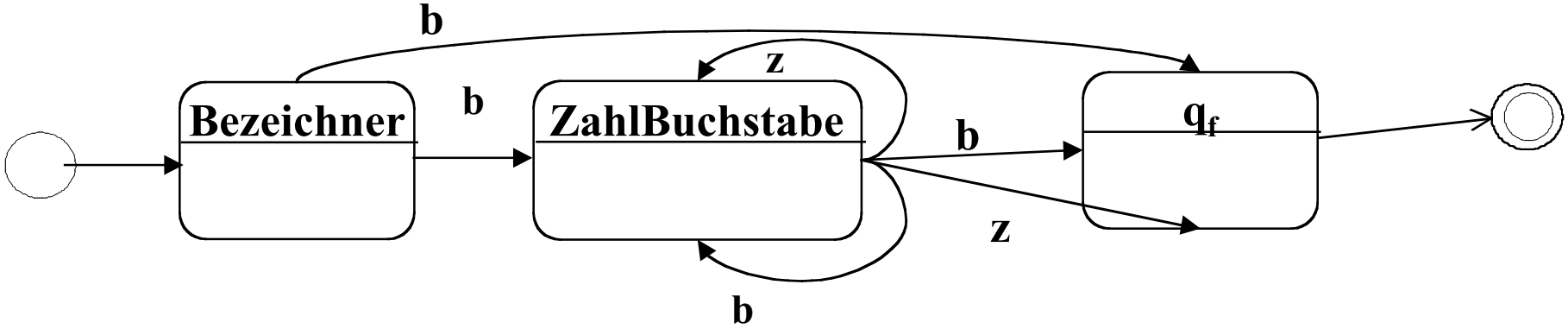
$F = q_f$

$\delta(A, a) = B \quad wenn \; A \rightarrow aB \in P$

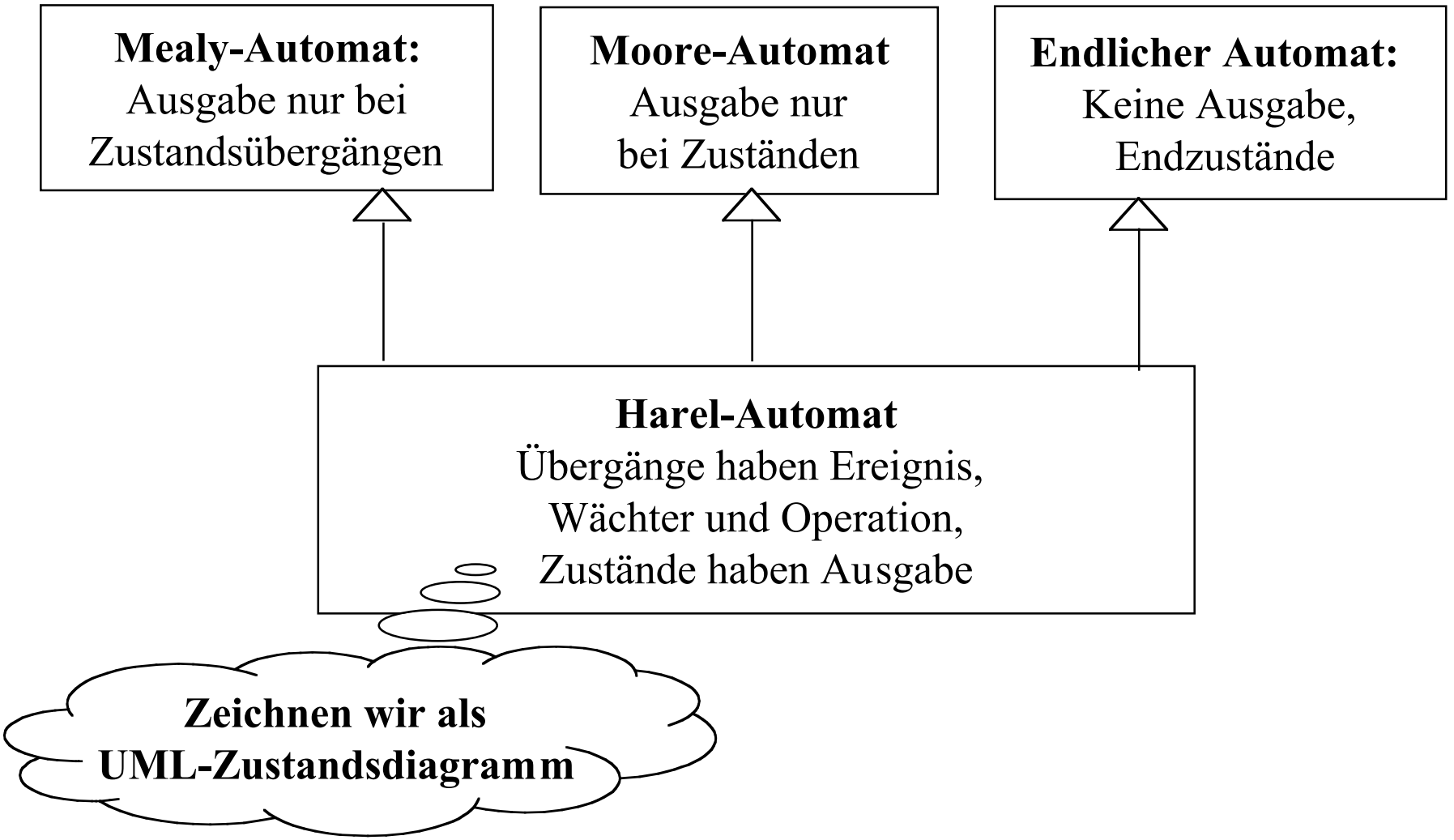
$\delta(\text{Bezeichner, b}) = \{\text{ZahlBuchstabe, } q_f\}$ // **Bezeichner** → 'b' **ZahlBuchstabe**

$\delta(\text{ZahlBuchstabe, b}) = \{\text{ZahlBuchstabe, } q_f\}$ // **ZahlBuchstabe** → 'b' **ZahlBuchstabe**

$\delta(\text{ZahlBuchstabe, z}) = \{\text{ZahlBuchstabe, } q_f\}$ // **ZahlBuchstabe** → 'z' **ZahlBuchstabe**



Zusammenfassung (1)



Zusammenfassung (2)

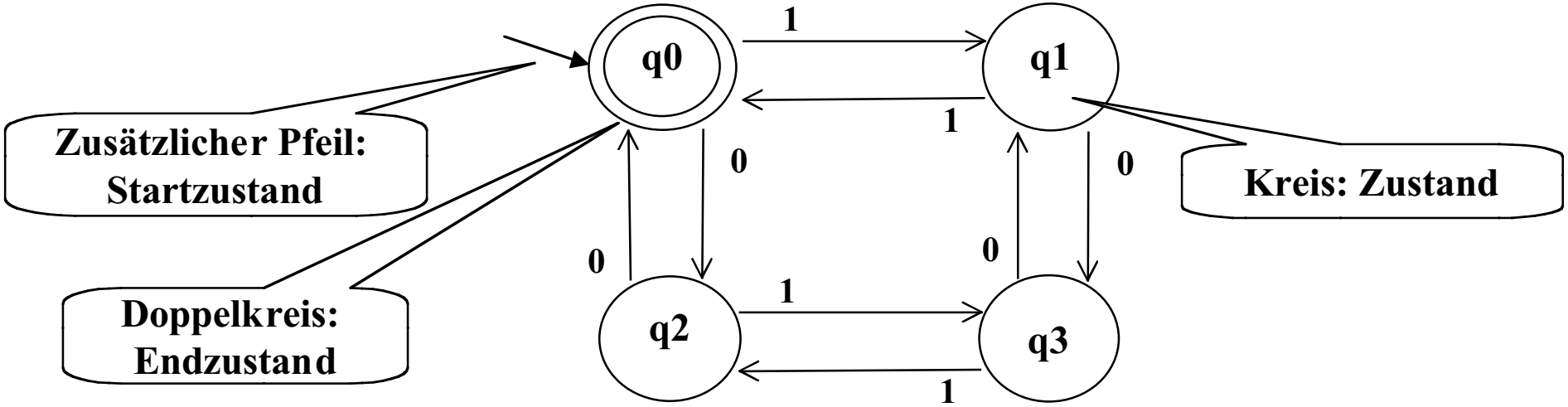
- Endlicher Automat zur Modellierung von ***dynamischen*** Aspekten in Systemen
- Verschiedene Darstellungen für die Übergangsfunktion:
  - ***Übergangsgraph***, ***Übergangstabelle, Produktionenmenge***
- Wichtige Automaten mit Ausgabe: ***Mealy***, ***Moore***, und ***Harel***
- ***UML-Zustandsdiagramme*** sind ***Übergangsgraphen*** für Harel-Automaten.
- ***Endliche Automaten*** und ***reguläre Grammatiken*** sind verschiedene Interpretationen desselben Sachverhaltes
  - Viele Einsichten über Automaten erhalten wir, weil wir zwischen diesen Interpretationen hin und her wechseln können.
  - Da ein Übergangsgraph ein Graph ist, können wir auch Kenntnisse aus der Graphentheorie zum Verständnis der Eigenschaften von endlichen Automaten verwenden.

Ziele dieses Vorlesungsabschnitts

- Sie können einen nichtdeterministischen endlichen Automaten in einen endlichen Automaten transformieren.
- Sie können mit dem Pumping-Lemma zeigen, dass eine gegebene Sprache nicht regulär ist.
- Sie verstehen, dass es Sprachen gibt, die man mit endlichen Automaten nicht erkennen kann.

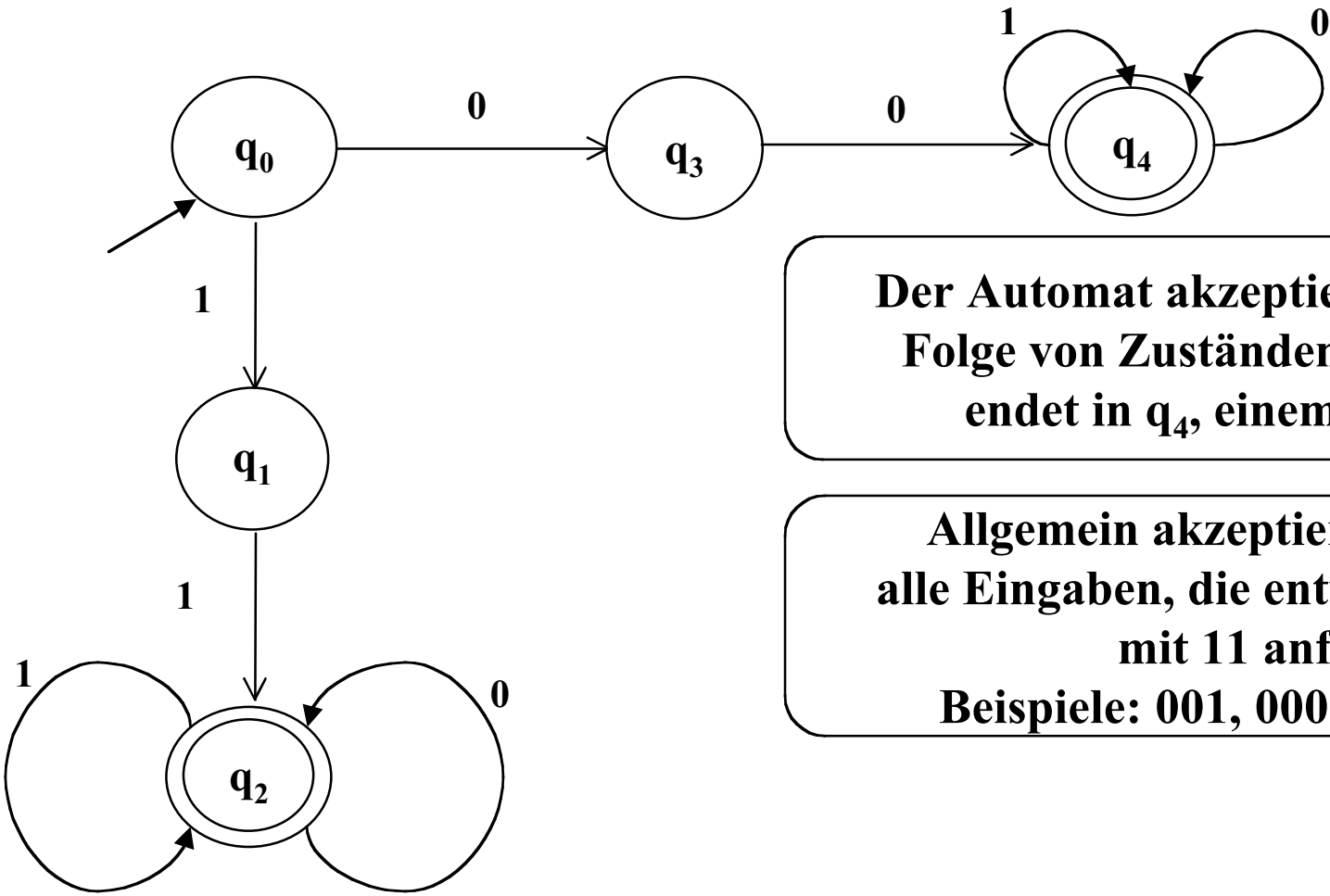
Wiederholung: Alternative Notation für Übergangsgraphen

- In der Softwaretechnik benutzen wir UML-Zustandsdiagramme für die Notation von endlichen Automaten.
- In der Automatentheorie hatte sich schon vorher eine einfachere Notation etabliert:
  - Zustände werden als Kreise gezeichnet
  - Der Anfangszustand hat einen kleinen gerichteten Pfeil
  - Der Endzustand besteht aus 2 konzentrischen Kreisen



- Bei endlichen Automaten ohne größere Komplexität werden wir diese Notation öfters benutzen.

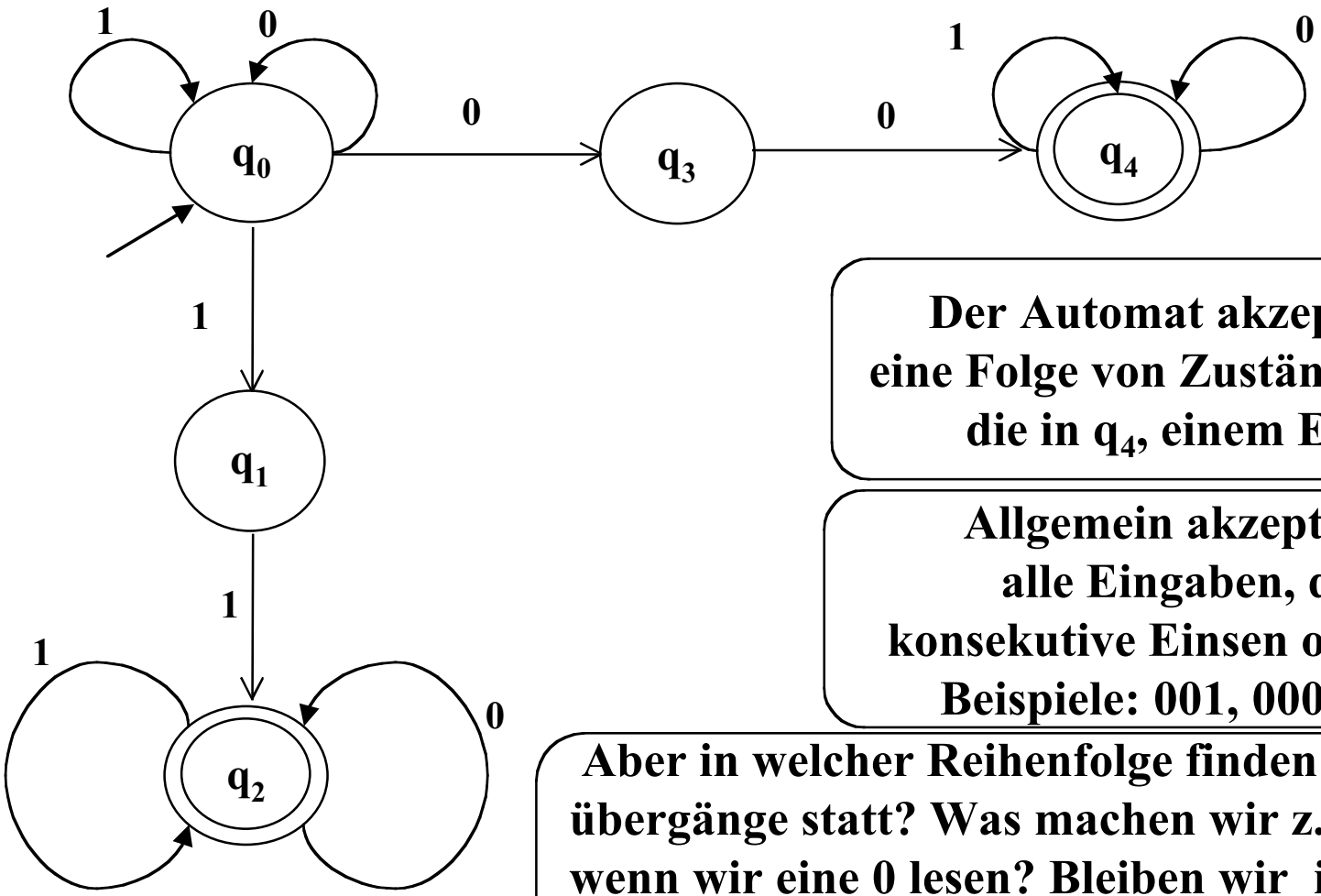
Übung: Welche Sprache akzeptiert dieser Automat?



Der Automat akzeptiert 0011, denn die Folge von Zuständen q_0, q_3, q_4, q_4 , q_4 endet in q_4, einem Endzustand

Allgemein akzeptiert der Automat alle Eingaben, die entweder mit 00 oder mit 11 anfangen.
Beispiele: 001, 0001, 11, 110, 1101

Und welche Sprache akzeptiert dieser Automat?



Eingabebeispiel: 01001

Der Automat akzeptiert 01001: Es gibt eine Folge von Zuständen q_0, q_0, q_0, q_3, q_4, q_4 die in q_4, einem Endzustand, endet

Allgemein akzeptiert der Automat alle Eingaben, die mindestens 2 konsekutive Einsen oder Nullen enthalten. Beispiele: 001, 0001, 11, 110, 1101, ...

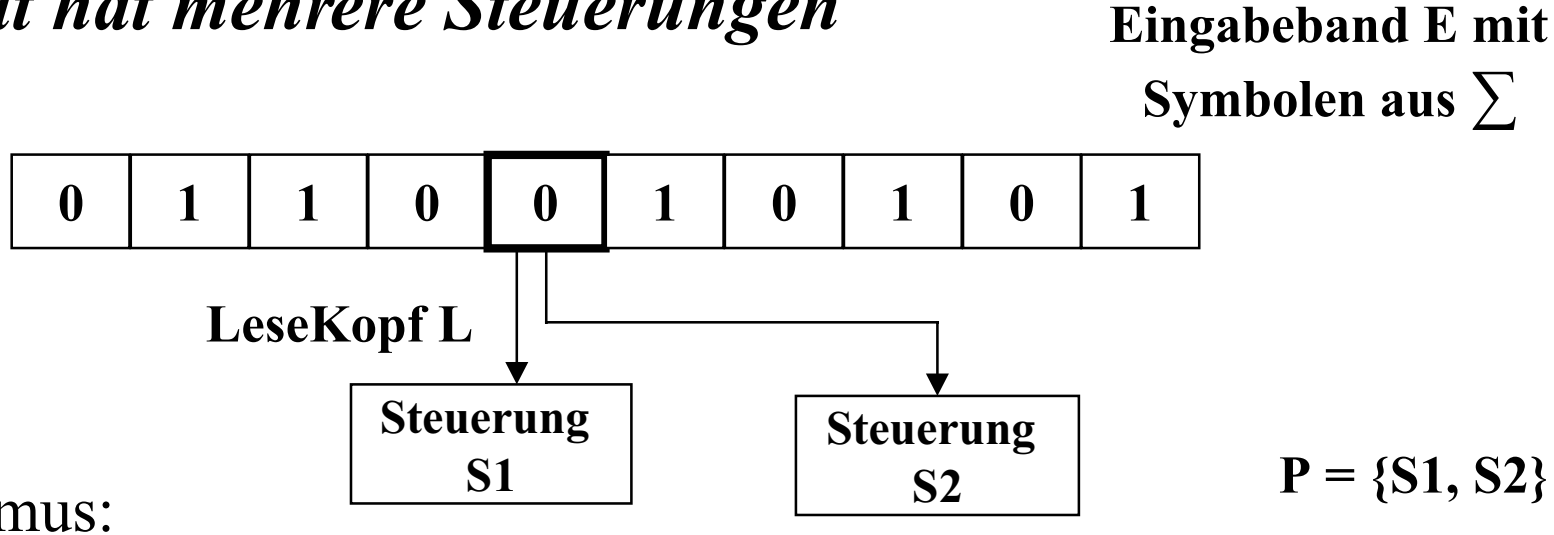
Aber in welcher Reihenfolge finden die Zustands-übergänge statt? Was machen wir z.B in Zustand q_0, wenn wir eine 0 lesen? Bleiben wir in q_0 oder gehen wir nach q_3? Wenn wir immer in q_0 blieben, würde 01001 nicht akzeptiert werden. Wann tun wir was?

Nicht-Deterministische endliche Automaten

- Endliche Automaten mit Zuständen, die für dieselbe Eingabe mehr als einen Übergang erlauben, hatten wir nicht-deterministisch genannt.
- Das Konzept der nicht-deterministischen endlichen Automaten spielt eine große Rolle in mehreren Gebieten der Informatik, insbesondere im Übersetzerbau und beim Beweisen von Theoremen.
- Wir hatten schon erwähnt, dass nicht-deterministische endliche Automaten keine mächtigeren Sprachen akzeptieren, als deterministische endliche Automaten.
  - Das werden wir nun im folgenden beweisen.
  - Eine solche Äquivalenz gilt nicht für alle Arten von Automaten (unendliche Automaten, Kellerautomaten).

  $\Rightarrow$ Hauptstudium

Gedankenmodell: Ein nicht-deterministischer endlicher Automat hat mehrere Steuerungen



- Algorithmus:

Setze die Steuerung *S* auf den Anfangszustand; // $S = q_0$;

Akzeptiert = istEndzustand(S);

While not BandendeErreicht() do {

Lies Symbol unter dem Lesekopf // $L = a_1$;

Berechne die Menge P aller Zustände aus *S* und *L*; // $P = \{S1, S2, \ldots Sn\} = \delta(S,L)$;

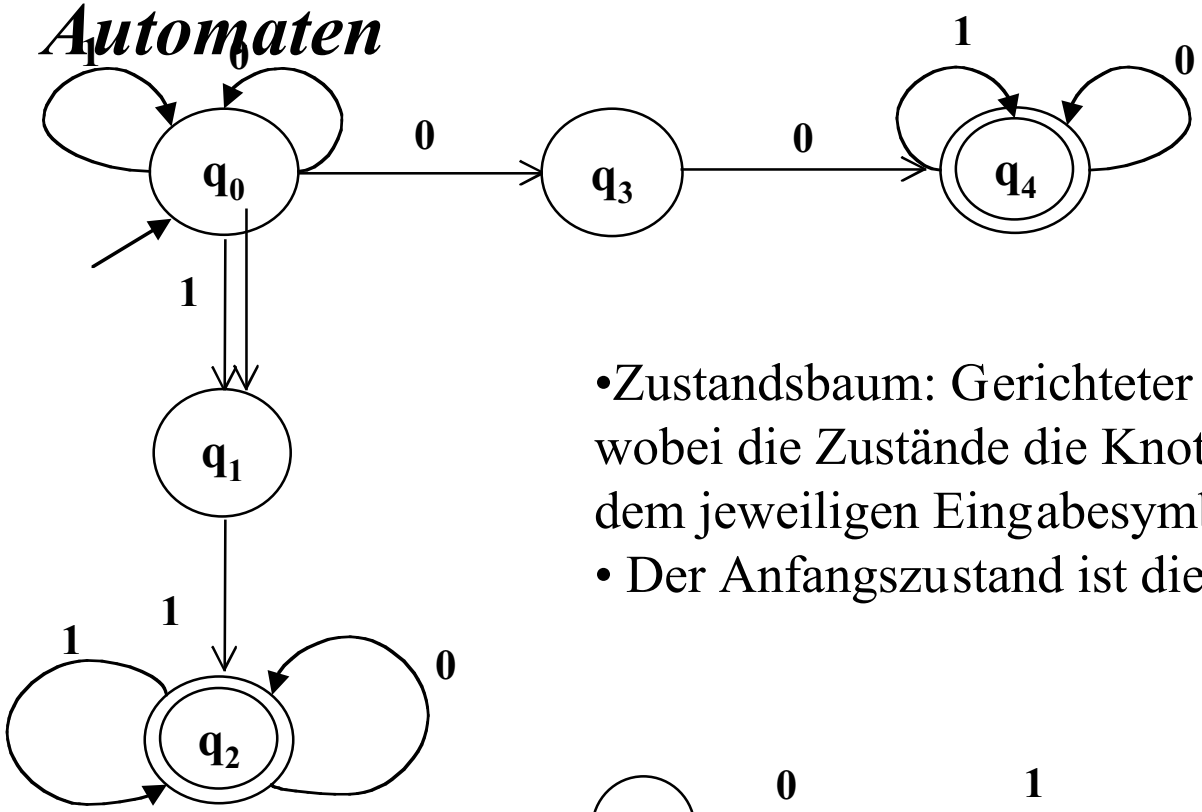
//P enthält eine Menge von Steuerungen $S_{i..}$ Alle Steuerungen zeigen auf dasselbe Eingabesymbol, können aber in verschiedenen Zuständen sein

// In einer Java-Implementation würden die Steuerungen als Threads implementiert

Ist eine der Steuerungen in P in einem Endzustand? Wenn ja, Akzeptiert = true;

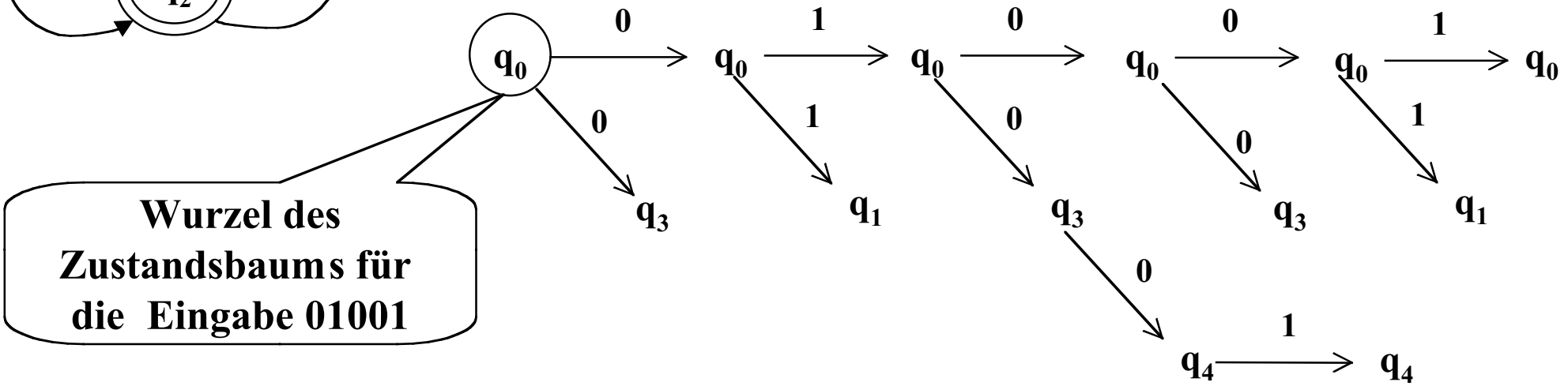
} // while not Akzeptiert

Zustandsbaum eines nicht-deterministischen endlichen Automaten

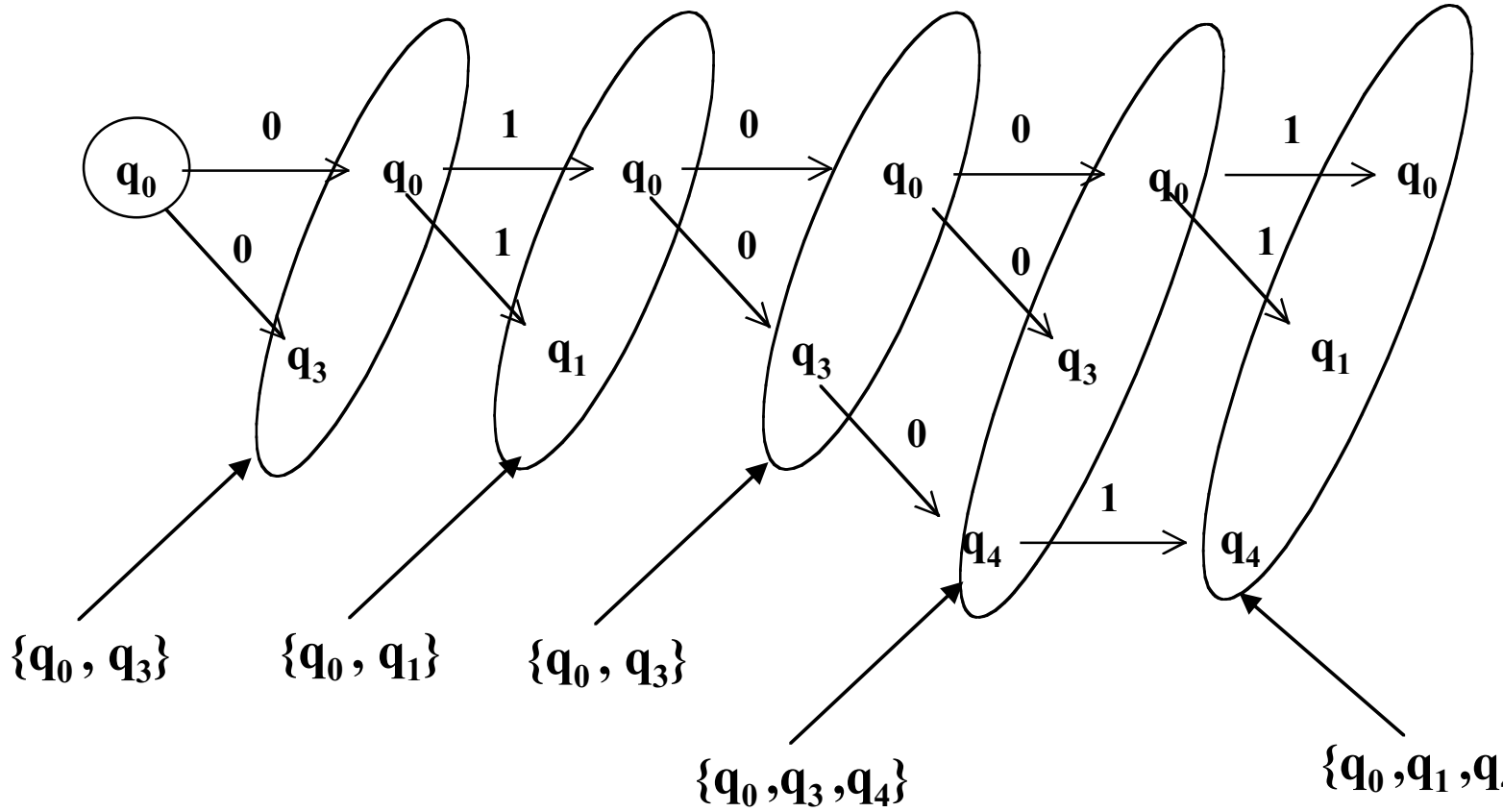


•Zustandsbaum: Gerichteter Graph für eine gegebene Eingabe, wobei die Zustände die Knotenwerte sind, und die Kanten mit dem jeweiligen Eingabesymbol beschriftet sind.

• Der Anfangszustand ist die Wurzel des Zustandsbaumes.



Ein nicht-deterministischer endlicher Automat kann also immer in mehr als einem Zustand sein



- Wir verallgemeinern die Übergangsfunktion $\delta : Q \times \sum \rightarrow Q$ deshalb zu $\delta : Q \times \sum \rightarrow \mathcal{P}(Q)$
  - wobei $\mathcal{P}(Q)$ die Potenzmenge von Q bezeichnet.

Nicht-deterministischer Endlicher Automat: Definition

- **Definition:** Ein nichtdeterministischer endlicher Automat ist ein 5-Tupel $A = (\sum, Q, \delta_{nea}, q_0, F)$, wobei gilt:
  - $\sum$, Q, q_0 und F *(Eingabe, Zustände*, *Anfangszustand* und *Endzustände)* sind wie beim deterministischen Automaten definiert.
  - Die Übergangsfunktion $\delta_{nea}: Q \times \sum \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ bildet dabei Tupel (*Zustand*, *Eingabe*) auf eine Teilmenge der Potenzmenge von Q ab.
  - δ_{nea} ist eine Erweiterung von δ wie folgt:
    - $\delta_{nea}(q, \varepsilon) = \{q\}$
    - $\delta_{nea}(q, wa) = \{p \mid \exists\, r \in \delta_{nea}(q,w) \Rightarrow \delta(r,a) = p\}$
      - d.h. ausgehend von einem Zustand q lesen wir die Zeichenkette w. Dann gibt es einen Zustand r, von dem wir aus mit dem Eingabezeichen a nach p gehen können.

Die Äquivalenz von nicht-deterministischen und deterministischen endlichen Automaten

- **Satz**: Sei L eine von einem nicht-deterministischen endlichen Automaten akzeptierte Sprache. Dann existiert ein deterministischer endlicher Automat, der L auch akzeptiert.
- **Beweisidee**: Der Beweis baut darauf auf, dass wir für einen gegebenen nicht-deterministischen endlichen Automaten NEA einen deterministischen endlichen Automaten DEA bauen können, der NEA simuliert.
  - Jeder Zustand im DEA wird dabei rein syntaktisch aus den Zustandsteilmengen (die "Ellipsen" auf Folie 10) von NEA konstruiert.

Äquivalenz-Beweis

- Wir beginnen mit einem nicht-deterministischen endlichen Automaten NEA = $(\sum, Q, \delta_{nea}, q_0, F)$. Aus diesem konstruieren wir einen deterministischen endlichen Automaten DEA = $(\sum', Q', \delta', q_0', F')$ wie folgt:
  - $\sum' = \sum$
  - $Q' = \mathcal{P}(Q)$. Die Zustände in DEA sind also Teilmengen der Potenzmenge der Zustände von NEA. Elemente von Q' bezeichnen wir als ***DEA-Zustand*** $[q_1, q_2, \ldots, q_n]$.
    - Ein Zustand ist nur dann ein DEA-Zustand $[q_1, q_2, \ldots, q_n]$, wenn der NEA in einem der ***korrespondierenden Zustände*** $q_1, q_2, \ldots$oder q_n ist.
  - $q_0' = [q_0]$
  - F' ist die Menge aller DEA-Zustände $[q_1 \ldots, q_i, \ldots, q_n]$ in Q', bei denen mindestens ein Element q_i, aus F ist.
- Jetzt müssen wir "nur noch" die Übergangsfunktion des deterministischen Automaten konstruieren.

Äquivalenz-Beweis (2)

- Wir definieren die Übergangsfunktion des deterministischen Automaten DEA wie folgt:

  $\delta'([q_1, q_2, ..., q_n], a) = [p_1 p_2, ..., p_n]$

  genau dann wenn

  $\delta_{nea}(\{q_1, q_2, ..., q_n\}, a) = \{p_1 p_2, ..., p_n\}$

- δ' für DEA-Zustand $[q_1, q_2, ..., q_n]$ bei Eingabe a wird so berechnet:
  - Wir wenden die δ_{nea} vom NEA auf jeden der NEA-Zustände $q_1, q_2, ..., q_n$ für a an, was mehrere Zustandsmengen ergibt.
  - Diese Zustandsmengen vereinigen wir dann zur Menge $\{p_1 p_2, ..., p_n\}$, woraus wir den DEA-Zustand $[p_1 p_2, ..., p_n]$ erhalten.
- ***Illustratives Beispiel:***
  - ***NEA:*** $\delta_{nea}(q_1, a) = \{p_1\}$, $\delta_{nea}(q_2, a) = \{p_2, p_7\}$, $\delta_{nea}(q_3, a) = \{p_2, p_3, p_{12}\}$
  - $\{p_1 p_2, p_3, p_7, p_{12}\} \Rightarrow [p_1 p_2, p_3, p_7, p_{12}]$
  - ***DEA:*** $\delta'([q_1, q_2, q_3]), a) = [p_1 p_2, p_3, p_7, p_{12}]$

Äquivalenz-Beweis (3)

- Jetzt sind wir soweit, den Beweis der Äquivalenz zu machen. Wir benutzen dabei vollständige Induktion über die Länge der Eingabe-Zeichenkette *x*. D.h. für alle *x* beliebiger Länge gilt:

  $\delta'(q_0', x) = [p_1, p_2, ..., p_n]$ genau dann, wenn $\delta_{nea}(q_0, x) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$

- ***Induktionsanfang***: $|x| = 0$. Als Eingabe ist also nur das leere Wort ε möglich. Beide Automaten akzeptieren ε genau dann, wenn q_0 ein Endzustand ist ($\delta'(q_0', \varepsilon) = \delta_{nea}(q_0, \varepsilon)$, aufgrund der Konstruktion von DEA (siehe Folie 13), wo $q_0' = [q_0]$. Also L(DEA) = L(NEA).

- ***Induktionsschritt***: Annahme: Für alle Eingaben der Länge $|x| \leq m$ akzeptieren die Automaten dieselbe Sprache L(DEA) = L(NEA).

  $\delta'(q_0', x) = [p_1, p_2, ..., p_n]$ genau dann, wenn $\delta_{nea}(q_0, x) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$

- Nun betrachten wir Eingaben der Länge $m+1$, d.h. alle xa, wobei a ein beliebiges Element aus $\sum$ ist.Wir müssen jetzt zeigen, dass genau dann, wenn xa vom nicht-deterministischen endlichen Automaten erkannt wird, es auch vom deterministischen endlichen Automaten erkannt wird.

Äquivalenz-Beweis (4)

(1) Aufgrund der Induktionshypothese gilt für $|x| \leq m$:

$\delta'(q_0', x) = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ genau dann, wenn $\delta_{nea}(q_0, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

- d.h. die Eingabe von *x* wird von DEA genau dann erkannt, wenn sie auch von NEA erkannt wird.

(2) Zur Erinnerung: Die Übergangsfunktion δ' von DEA ist:

$\delta'([p_1, p_2, \ldots, p_n], a) = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$ genau dann, wenn

$\delta_{nea}(\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, a) = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$

(3) Außerdem gilt: $\delta'(q_0', xa) = \delta'(\delta'(q_0', x), a)$

- Aus diesen 3 Gleichungen erhalten wir:

$\delta'(q_0', xa) = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$ genau dann, wenn

$\delta_{nea}(q_0, xa) = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$

- d.h. die Eingabe von *xa* führt auf einen DEA-Zustand genau dann, wenn die Eingabe von *xa* einen der korrespondierenden Zustände im NEA ergibt.

Äquivalenz-Beweis (4, ohne Kreise)

- Aufgrund der Induktionshypothese gilt für $|x| \leq m$:

  $\delta'(q_0', x) = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ genau dann, wenn $\delta_{nea}(q_0, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

  - d.h. die Eingabe von *x* wird von DEA genau dann erkannt, wenn sie auch von NEA erkannt wird.

- ***Zur Erinnerung:*** Die Übergangsfunktion δ' von DA ist:

  $\delta'([p_1, p_2, \ldots, p_n], a) = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$ genau dann, wenn

  $\delta_{nea}(\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, a) = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$

- ***Außerdem gilt:*** $\delta'(q_0', xa) = \delta'(\delta'(q_0', x), a)$

- Das heißt, es gilt :

  $\delta'(q_0', xa) = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$ genau dann, wenn

  $\delta_{nea}(q_0, xa) = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$

  - d.h. die Eingabe von *xa* führt auf einen DEA-Zustand genau dann, wenn die Eingabe von *xa* im NEA auf einen korrespondierenden Zustand führt.

Äquivalenz-Beweis (5)

- Um den Beweis zu beenden, müssen wir nur noch sicherstellen, dass $\delta'(q_0', x)$ genau dann in F' ist, wenn beim nicht-deterministischen endlichen Automaten die Berechnung $\delta(q_0, x)$ einen Zustand ergibt, der in F ist.
- Damit gilt also: L(NEA) = L(DEA)
- q.e.d
- **Bemerkung**: Für den vollständigen Beweis der Äquivalenz von NEA und DEA muss strenggenommen noch gezeigt werden, wie aus einem NEA ein DEA konstruiert wird:
  - nichts zu tun, da jeder DEA bereits ein NEA ist

Beispiel: Konstruktion eines DEA aus einem NEA

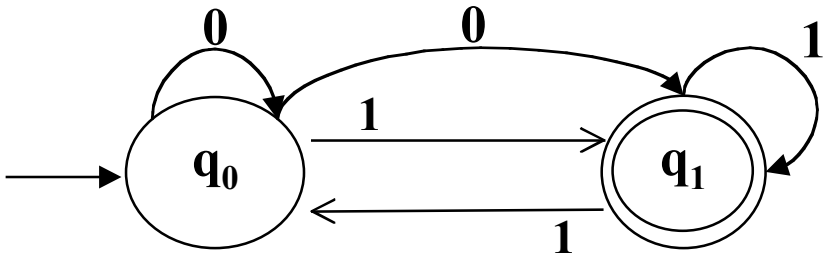
- Gegeben sei ein NEA = $(\sum, Q, \delta_{nea}, q_0, F)$ mit
  - Eingabealphabet $\sum = \{0,1\}$
  - Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_1\}$
  - Übergangsfunktion δ_{nea}:

    $\delta_{nea}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

    $\delta_{nea}(q_0, 1) = \{q_1\}$

    $\delta_{nea}(q_1, 0) = \emptyset$

    $\delta_{nea}(q_1, 1) = \{q_0, q_1\}$
  - Anfangszustand q_0
  - Endzustandsmenge $F = \{q_1\}$



Beispiel: Konstruktion eines DEA aus einem NEA (2)

❖ Wir konstruieren nun den DEA= $(\Sigma', Q', \delta', [q_0], F')$ wie folgt:

- **Eingabealphabet**: $\Sigma' = \Sigma = \{0, 1\}$
- **Zustandsmenge:** $Q' = \{[q_0], [q_1], [q_0, q_1]\}$

  denn die Potenzmenge von $Q = \{q_0, q_1\}$ ist $\mathcal{P}(Q) = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_0, q_1\}\}$

- **Übergangsfunktion** δ':

$\delta'([q_0], 0) = [q_0, q_1]$ denn $\delta_{nea}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

$\delta'([q_0], 1) = [q_1]$ denn $\delta_{nea}(q_0, 1) = \{q_1\}$

$\delta'([q_1], 0) = \emptyset$ denn $\delta_{nea}(q_1, 0) = \emptyset$

$\delta'([q_1], 1) = [q_0, q_1]$ denn $\delta_{nea}(q_1, 1) = \{q_0, q_1\}$

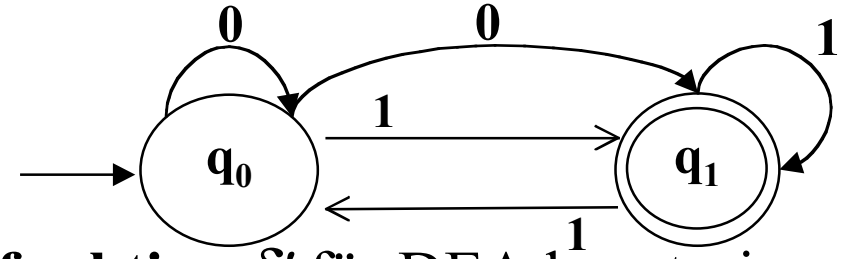
$\delta'([q_0, q_1], 0) = [q_0, q_1]$ denn $\delta_{nea}(\{q_0, q_1\}, 0) = \delta_{nea}(q_0, 0) \cup \delta_{nea}(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$

$\delta'([q_0, q_1], 1) = [q_0, q_1]$ denn $\delta_{nea}(\{q_0, q_1\}, 1) = \delta_{nea}(q_0, 1) \cup \delta_{nea}(q_1, 1) = \{q_1\} \cup \{q_0, q_1\} = \{q_0, q_1\}$

- **Anfangszustand**: $[q_0]$
- **Endzustände:** $F' = \{[q_1], [q_0, q_1]\}$

Einfachere Konstruktion der Übergangsfunktion δ'

- Wenn der NEA als Übergangsgraph vorliegt, lässt sich der korrespondierende DEA relativ leicht konstruieren.



- Die **Übergangsfunktion** δ' für DEA konstruieren wir, indem wir die Spalte **Zustände** der Übergangstabelle ***schrittweise*** erstellen.
- Wir fangen mit dem Anfangszustand $[q_0]$ an.

Zustände \ Eingabe	0	1
$[q_0]$	$[q_0, q_1]$	$[q_1]$
$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$
$[q_1]$	$\varnothing$	$[q_0, q_1]$

3: $[q_1]$ ist Resultat einer Berechnung

2: $[q_0, q_1]$ wird hinzugefügt

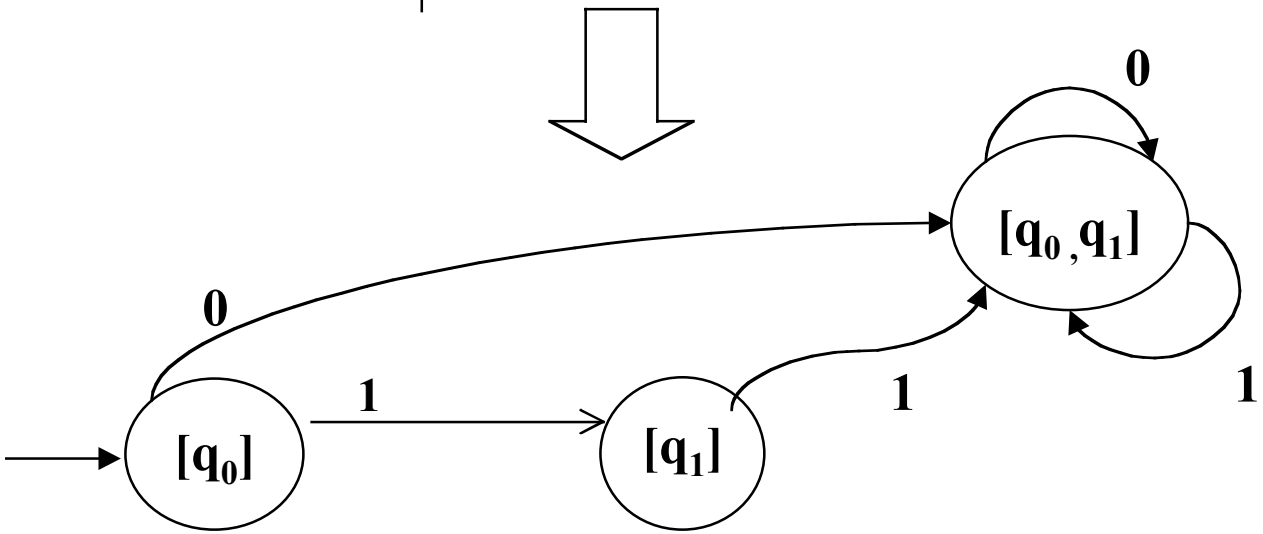
1: $[q_0, q_1]$ ist Resultat einer Berechnung

4: $[q_1]$ wird hinzugefügt

- Neue Zustände werden also nur dann in die Spalte **Zustände** hinzugefügt, wenn sie das Resultat einer Zustandsberechnung sind.

Aus der Übergangstabelle erzeugen wir dann den Übergangsgraph von DEA

		Eingabe aus $\sum'$: 0	1
	$[q_0]$	$[q_0, q_1]$	$[q_1]$
Zustände	$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$
	$[q_1]$	$\varnothing$	$[q_0, q_1]$



Sprachen erzeugen interessante Probleme

- Wenn wir Sprachen durch eine Grammatik oder durch einen Automaten spezifizieren, gibt es viele interessante Fragen.
  - Sind 2 Sprachen, die wir mit verschiedenen Grammatiken spezifiziert haben, äquivalent?
  - Sind 2 Sprachen, die von verschiedenen Automaten akzeptiert werden, äquivalent?
  - Ist die Sprache, die von einem endlichen Automaten akzeptiert wird, endlich oder unendlich?
  - Ist die Sprache regulär oder nicht?
- Wir nennen eine Sprache ***regulär,*** wenn sie von einem endlichen Automaten erkannt wird, oder von einer regulären Grammatik erzeugt wird.
  - Im Rest dieses Vorlesungsabschnitts beschäftigen wir uns mit einem wichtigen Werkzeug, mit dem wir zeigen können, dass bestimmte Sprachen nicht regulär sind.

Pumping-Lemma: Vorüberlegungen

- Gegeben sei ein endlicher Automat A = $(\sum, Q, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen.
- Als Eingabe nehmen wir eine Zeichenkette $a_1a_2....a_m$, wobei $m \geq n$ gilt. Die Zeichenkette hat also mindestens die Länge n.
- Die Übergangsfunktion δ ist definiert als: $\delta(q_0, a_1a_2....a_m) = q_i$ für $i = 1, 2, ..., m,$ d.h. sie ist so konstruiert, dass folgendes gilt:

  $\delta(q_0, a_1) = q_1$

  $\delta(q_0, a_1a_2) = q_2$

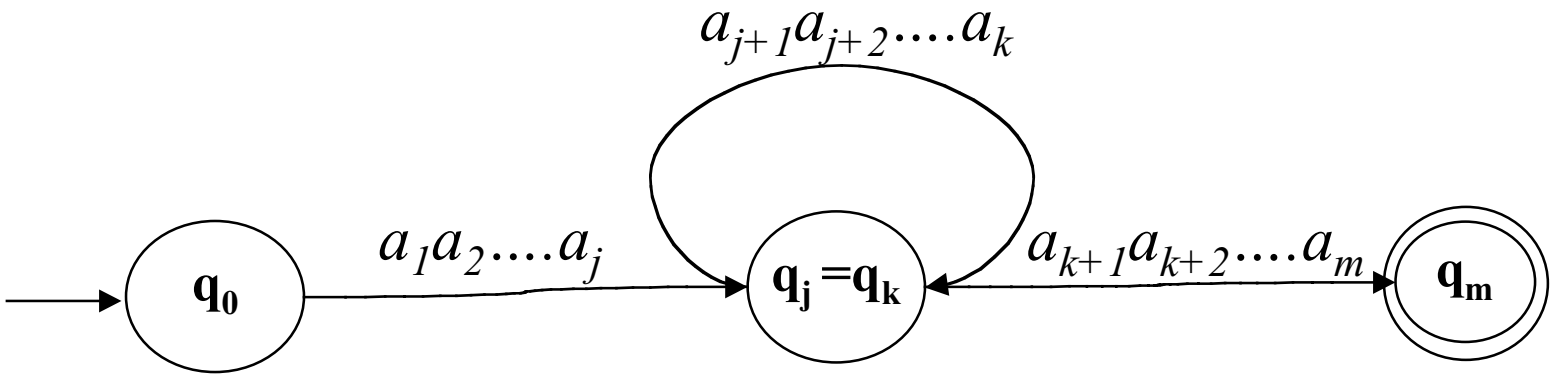
  $\delta(q_0, a_1a_2a_3) = q_3$

  ...

  $\delta(q_0, a_1a_2....a_m) = q_m$
- Da der Automat nur n Zustände hat und $m \geq n$ ist, ist es nicht möglich, dass die Zustände $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ in der Übergangsfunktion alle verschieden sind!
- Diese Erkenntnis ist das Kernstück des ***Pumping-Lemmas***.

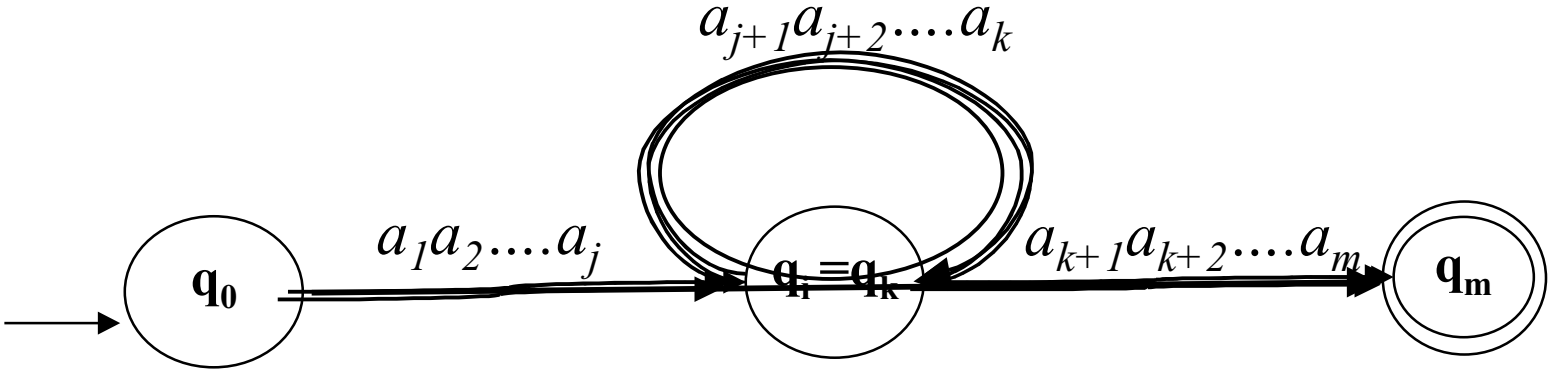
Pumping-Lemma: Vorüberlegungen (2)

- Schauen wir uns unsere Übergangsfunktion einmal im Übergangsgraphen für die Eingabe $a_1a_2....a_m$ der Länge m an:



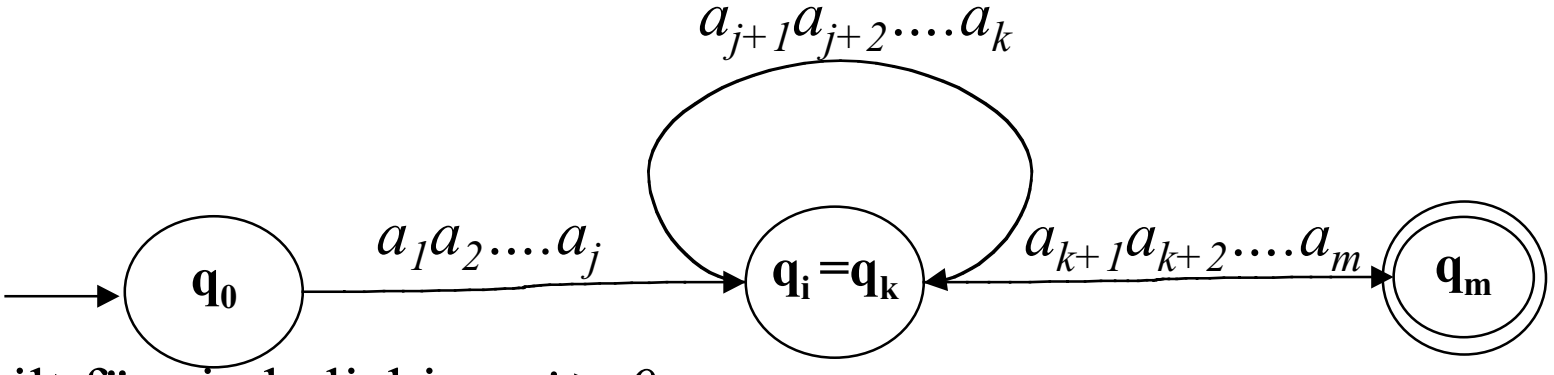
- Da die Eingabe $m \geq n$ Zeichen enthält und wir daher mindestens $n+1$ Zustände $q_0, ..., q_m$ durchlaufen, wir aber nur n verschiedene Zustände haben, muss es zwei Indizes j und k geben, $0 \leq j < k \leq m,$ für die gilt: $\boldsymbol{q_j = q_k}$
- Das Teilwort $a_{j+1}a_{j+2}....a_k$ hat dabei mindestens die Länge 1.
- Im Weiteren gehen wir davon aus, dass wir die kleinsten Indizes j, k finden (d.h. die Länge des Teilworts $a_1a_2...a_k$ ist kleiner gleich n).

Pumping-Lemma: Vorüberlegungen (3)



- Da q_m ein Endzustand ist, ist $a_1a_2...a_m$ in L(A), d.h. in der von A akzeptierten Sprache.
- Es ist aber auch $a_1a_2...a_j\ a_{k+1}a_{k+2}...a_m$ in L(A), also die Eingabe, die die Schleife $a_{j+1}a_{j+2}....a_k$ beim Zustand $q_i=q_k$ vermeidet.
- Und es ist $a_1a_2...a_j\ \mathbf{a_{j+1}a_{j+2}...a_k}\mathbf{a_{j+1}a_{j+2}...a_k}\ a_{k+1}a_{k+2}...a_m$ in L(A), d.h. die Eingabe, die zweimal über die Schleife beim Zustand $q_i=q_k$ geht.
- Dies können wir natürlich verallgemeinern.

Pumping-Lemma: Vorüberlegungen (4)



- Es gilt für ein beliebiges $i \geq 0$:
  - Wenn q_m ein Endzustand ist und $a_1a_2....a_m$ in L(A), dann ist auch $a_1a_2....a_j\,(a_{j+1}a_{j+2}....a_k)^i\,a_{k+1}a_{k+2}....a_m$ in L(A), d.h. eine Eingabe, die i-mal über die Schleife bei $q_i = q_k$ geht.
- Wir haben also folgendes:
  - Gegeben sei eine lange Eingabezeichenkette E, die von einem endlichen Automaten A akzeptiert wird
  - Dann können wir immer eine Teilzeichenkette in E finden, die wir "aufpumpen" können.
  - Die daraus resultierende Zeichenkette wird auch von A akzeptiert.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

- **Lemma**: Sei L(A) eine von einem endlichen Automaten mit *n* Zuständen akzeptierte Sprache, also eine reguläre Sprache.
  - Sei *z* ein beliebiges Wort mit der Länge $|z| \geq n$.
    Dann ist es möglich, *z* als Konkatenation von Teilwörtern *u*, *v* und *w* zu schreiben: $z = uvw$, wobei $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
  - Dann ist auch uv^iw in L(A) für ein beliebiges $i \geq 0$.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen: Beweis

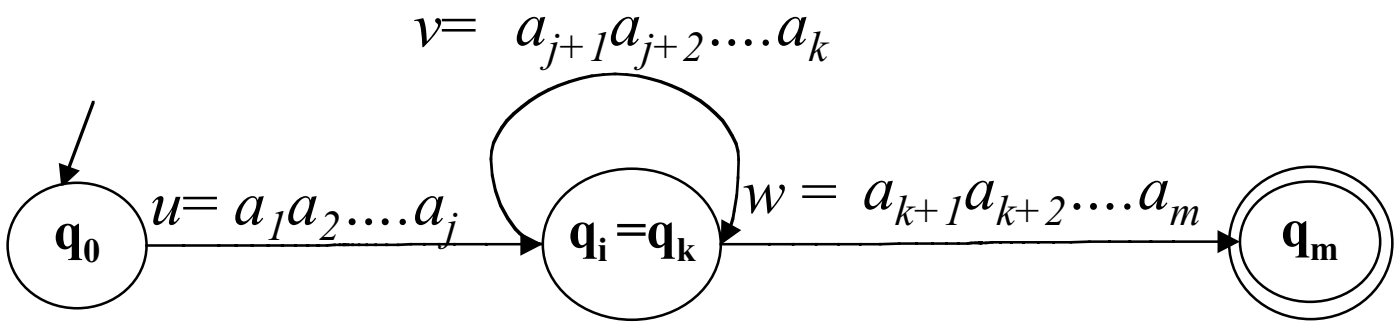
- **Beweis:** Ausgangspunkt ist der Übergangsgraph aus unseren Vorüberlegungen.
- Wir belegen *z*, *u*, *v* und *w* einfach wie folgt:

$$z = a_1 a_2 \ldots . a_m$$

$$u = a_1 a_2 \ldots . a_j$$

$$v = a_{j+1} a_{j+2} \ldots . a_k$$

$$w = a_{k+1} a_{k+2} \ldots . a_m$$



Anwendungen des Pumping-Lemmas

- Wir benutzen das Pumping-Lemma mit Vorliebe dann. wenn wir zeigen wollen, dass eine bestimmte Sprache **nicht** von einem endlichen Automaten erkannt werden kann.
- Wir benutzen dabei die Beweismethode "Beweis durch Widerspruch":
  - Wir nehmen an, die Sprache ist regulär, d.h. von einem endlichen Automaten erkennbar.
  - Dann wählen wir eine beliebige, hinreichend lange Zeichenkette
  - Wir pumpen sie nach dem Pumping-Lemma auf
  - Dann zeigen wir, dass die so aufgepumpte Zeichenkette nicht in der Sprache liegt.
  - Das ist ein Widerspruch zur Annahme, denn nach dem Pumping-Lemma müssen alle aufgepumpten Zeichenketten in der Sprache liegen.

"Algorithmus" für das Ausführen von Beweisen mit dem Pumping-Lemma

2-Personenspiel: **Kontrahent** behauptet, die Sprache L ist regulär.
Sie behaupten, dass die Sprache L nicht regulär ist.

1) Der **Kontrahent** behauptet, dass L regulär ist, also muss das Pumping-Lemma gelten.
2) **Sie** bitten Ihren **Kontrahenten**, eine beliebige endliche Zahl n auszuwählen. n ist beliebig, aber einmal ausgewählt ist n fest.
3) **Sie** wählen nun eine Zeichenkette z aus L mit $|z| \geq n$.
Die Wahl von z ist im allgemeinen von n abhängig.
4) **Sie** bitten Ihren **Kontrahenten**, z in u, v und w aufzubrechen, wobei die Einschränkungen $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ einzuhalten sind.
5) Nun pumpen **Sie** die Zeichenkette i-mal nach dem Pumping-Lemma auf.
6) Dann zeigen **Sie**, dass die Zeichenkette uv^iw nicht in L ist.
Das ist ein Widerspruch zur Annahme 1), denn es würde bedeuten, dass das Pumping-Lemma nicht gilt.
7) Wenn der **Kontrahent** alle möglichen Zerlegungen ausprobiert hat, haben **Sie** gewonnen: L kann nicht regulär sein.

Beispiel für eine nicht-reguläre Sprache

- Gegeben sei die Sprache L = { $a^n b^n$ | n > *0* }
- Beispiel für L: a = `(` und b = `)`. Dann gilt unter anderem
  - In L: `()`, `(())`, `((()))`, `(((())))`
  - Nicht in L: `(`, `)`, `((`, `()))`, `(()(`, `))((`
- Kontrahent behauptet, L ist regulär. Sie behaupten, L ist nicht regulär. Kontrahent wählt n = 4. Wir wählen die Zeichenkette
  z = `(((())))` ∈ L
- Kontrahent bricht *z* auf in *u* = `(((`, *v* = `(` und *w* = `))))`
- Wenn L regulär ist, gilt das Pumping-Lemma.
- Also können Sie *v* aufpumpen, z.b. auf v^2, eine Konkenation von *2* öffnenden Klammern: v^2 = `((`
- uv^2w ist nicht in L, da die öffnenden und schließenden Klammern eindeutig nicht balanziert sind.
- Wegen des Pumping-Lemmas muss uv^2w aber in L liegen. Widerspruch für diese Zerlegung!
- Widerspruch für ***jede*** Zerlegung ⇒ L kann nicht regulär sein. q.e.d.

Es gibt eine Grammatik für L = { $a^n b^n$ | n > 0}

- Die Chomsky-Grammatik *G = (T, N, P, Z)* mit

  N = {Z},
  T = {a, b} und
  P = { Z → aZb,
  Z → ab}

erkennt die Sprache L = { $a^n b^n$ | *n* > 0 }

- Beispiel einer Ableitung:

  $Z \Rightarrow aZb \Rightarrow aaZbb \Rightarrow a^3Zb^3 \Rightarrow .... \Rightarrow a^{n-1}Zb^{n-1} \Rightarrow a^nb^n$

- G ist nicht regulär, denn die Produktion $Z \rightarrow aZb$ ist weder linkslinear noch rechtslinear.
- Man bezeichnet solche Produktion als ***kontextfrei***. Eine Grammatik, die kontextfreie Produktionen enthält, bezeichnet man als ***Chomsky-2*** *oder* ***kontextfreie Grammatik***

  mehr über Grammatiken in Info IV

Zusammenfassung

- Für jede Sprache, die von einem ***nicht-deterministischen endlichen Automaten*** akzeptiert wird, gibt es einen ***äquivalenten deterministischen endlichen Automaten***.
- Wir brauchen daher zwischen deterministischen und nicht-deterministischen endlichen Automaten nicht zu unterscheiden und sprechen deshalb nur von ***endlichen Automaten***.
- Das ***Pumping-Lemma*** ist ein wichtiges Werkzeug, wenn man zeigen möchte, dass eine bestimmte Sprache nicht regulär ist, also von einem endlichen Automaten nicht erkannt werden kann.