Moyses Vol. 1 - Soluções

Artur R. B. Boyago (aka Morcego)

January 14, 2024

CONTENTS

CHAPTER I.

MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL

§1. Q1

O problema estabelece que a tartaruga anda continuamente até o final, mas que a lebre tem uma pequena parcela de tempo de descanso. Portanto, o tempo que demora a tartaruga chegar ao final deve ser menor ou igual ao tempo da lebre chegar ao final para que ela ganhe a corrida. Portanto, vamos achar o tempo de corrida da tartaruga, e igualar ao tempo de corrida da lebre:

$$\text{(Tempo de corrida da tartaruga)} = \frac{\text{Dist. total}}{v_t}$$
$$\text{(Tempo de corrida da lebre)} = \frac{\text{Dist. ao descanso}}{v_l} + \text{(Tempo de descanso } t_s\text{)} + \frac{\text{(Dist. total - Dist. ao descanso)}}{v_l}$$

Igualando os dois, podemos achar uma expressão pro tempo de descanso t_s e substituir os valores:

$$\frac{D}{v_t} = \frac{d}{v_l} + t_s + \frac{D-d}{v_l}$$
$$\frac{D}{v_t} - \frac{D}{v_l} = t_s$$
$$(600 \text{ m})\left(\frac{1}{1{,}5 \text{ m/min}} - \frac{1}{30 \text{ km/h}}\right) \approx 6\text{h}38\text{min}$$

§2. Q2

Queremos saber o tempo para atingir uma velocidade sob aceleração constante, que pode ser achado por $v(t) = at$, e depois a distância total, que é $at^2/2$.

$$a = \frac{100 \text{ km/h}}{4 \text{ s}} \approx \frac{27,7 \text{ m/s}}{4 \text{ s}} \approx 6,92 \text{ m/s}^2$$

Esse a é $\approx 70\%$ da gravidade média da terra. O tempo é então:

$$(100 \text{ km/h}) = (6,92 \text{ m/s}^2)t \rightarrow t \approx 4\text{s}$$

Substituindo para achar a distância:

$$x(t) = \frac{1}{2}(6,92 \text{ m/s}^2)(4\text{s})^2 \approx 2,41 \text{ km}$$

§3. Q3

§4. Q4

§5. Q5

§6. Q6

CHAPTER II.

MOVIMENTO BIDIMENSIONAL

§1. Q1

§2. Q2

§3. Q3

Queremos provar a desigualdade:

$$||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Essa identidade é trivial por lógica; o primeiro termo sempre vai ter dois números estritamente positivos se subtraindo e gerando outro positivo, no segundo temos dois números formando um estrito positivo, e no terceiro *sempre* temos dois números estritamente positivos se somando.

Usando algebra geométrica, sabemos que $|\mathbf{a}| = \mathbf{a}^2$, logo, simplesmente fazendo quadrados de tudo:

$$(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)^2 \leq (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 \leq \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$$

CHAPTER III.

OS PRINCIPIOS DA DINÂMICA

§1. Q1

Isso é só uma prova das *lei dos senos*. Sabendo que $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0$, podemos usar algebra geométrica rapidamente; tome o produto externo $\wedge$ em tres partições dessa equação:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) \wedge \mathbf{F}_1 = 0 \wedge \mathbf{F}_1 \\
(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) \wedge \mathbf{F}_2 = 0 \wedge \mathbf{F}_2 \\
(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) \wedge \mathbf{F}_3 = 0 \wedge \mathbf{F}_3
\end{aligned}
$$

Termos da forma $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}$ são 0, logo temos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_2 \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 \wedge \mathbf{F}_1 = 0 \\
\mathbf{F}_1 \wedge \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \wedge \mathbf{F}_2 = 0 \\
\mathbf{F}_1 \wedge \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_2 \wedge \mathbf{F}_3 = 0
\end{aligned}
$$

Se colocarmos os segundos termos no lado do zero, e depois tomarmos suas magnitudes, temos:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{F}_2 \wedge \mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_3 \wedge \mathbf{F}_1| \\
|\mathbf{F}_1 \wedge \mathbf{F}_2| = |\mathbf{F}_3 \wedge \mathbf{F}_2| \\
|\mathbf{F}_1 \wedge \mathbf{F}_3| = |\mathbf{F}_2 \wedge \mathbf{F}_3|
\end{aligned}
$$

Pela regra que $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta_{ab}$, temos então a conclusão final da lei dos senos:

$$
\frac{\sin \theta_{23}}{\mathbf{F}_1} = \frac{\sin \theta_{31}}{\mathbf{F}_2} = \frac{\sin \theta_{12}}{\mathbf{F}_3}
$$

§2. Q8

O martelo originalmente tem uma energia cinética de $m\mathbf{v}^2/2$, e pelo trabalho W que a madeira faz no prego, essa energia é totalmente dissipada pra zero. O trabalho é a força média $\mathbf{F}_m$ vezes o deslocamento l. Queremos achar a proporção:

$$\frac{\text{(For. med.)}}{\text{(Peso do martelo)}} = \frac{\mathbf{F}_m}{m\mathbf{g}} = \frac{W/l}{m\mathbf{g}}$$

Sabendo que:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \mathbf{F}_m l = 0 \to \mathbf{F}_m = \frac{1}{2l}m\mathbf{v}^2$$

Portanto podemos substituir:

$$\frac{\left(\frac{1}{2l}m\mathbf{v}^2\right)}{m\mathbf{g}}$$

Para acharmos $\mathbf{v}$, o problema disse que é a velocidade final do martelo depois duma queda de altura h. Essa velocidade é $\sqrt{2\mathbf{g}h}$, logo:

$$\frac{\left(\frac{1}{2l}\cancel{m}\mathbf{v}^2\right)}{\cancel{m}\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{v}^2}{2l\mathbf{g}} = \frac{2\cancel{\mathbf{g}}h}{2\cancel{\mathbf{g}}l} = \frac{h}{l}$$

CHAPTER IV.

ROTAÇÕES E MOMENTO ANGULAR

§1. Q1

Esse problema é relativamente conceitual então serei breve. O vetor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é um *vetor axial* que representa o *dual pseudoescalar* do bivetor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Por isso $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$, ou seja, seu comprimento é proporcional a área do bivetor, e pode ser então descrito como $i(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$.

Sobre o segundo problema, se você somar vários bivetores em direções opostas com a mesma magnitude, evidentemente você irá retornar zero. Uma nota, irei usar bivetores ao invés de vetores axiais em todo o resto do livro por que os acho intoleravéis.

§2. Q2

O ***momento de dipolo*** é $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, ou seja, apenas uma diferença de posições com escala por carga. Sabemos que o torque é o bivetor $\tau = \mathbf{f} \wedge \mathbf{x}$, e sabemos que a força $\mathbf{f}$ do campo elétrico $\mathbf{E}$ é simplesmente $q\mathbf{E}$, logo o torque:

$$\begin{aligned} \tau &= (q\mathbf{E}) \wedge \mathbf{d} \\ &= \mathbf{E} \wedge (q\mathbf{d}) \\ &= \mathbf{E} \wedge \mathbf{p} \end{aligned}$$

Sobre a energia potencial U, sabemos que ela deve ser:

$$U \propto \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

Mas queremos uma relação ao torque τ.