Ingreso medio (X)	7	4,4	5,4	4,9	7,6	4,2	3,8	6,2
Porcentaje de propietarios (Y)	58	49	53	51	70	53	48	60

a) Represente los datos en un diagrama de dispersión.
b) Ajuste una recta de mínimos cuadrados a estos datos y represente en el gráfico de la parte a).
c) Estime el porcentaje de familias que poseen al menos un automóvil en una ciudad en la que la renta media es S/. 6 000. *R.* 59,8

26. La MAXTE es una firma que vende por correo y mantiene una amplia gama de objetos de arte bastante costosos para hogares y oficinas. Opera anunciando un artículo, ya sea en revistas seleccionadas o bien en un programa de correo directo. Supóngase que la respuesta de las ventas varía mucho por artículo y que la administración de la firma no ha podido predecir anticipadamente qué artículos se venderán bien y cuáles no. En consecuencia, la firma experimenta con frecuencia ya sea agotamiento de artículos, o bien inventarios excesivos de otros. Para muchos de los productos que vende MAXTE, es posible pedir una cantidad limitada para el inventario y colocar un pedido subsiguiente para entrega en un plazo de dos semanas. Así pues, si la firma pudiera predecir oportunamente las ventas definitivas de un producto, se reducirían en gran medida sus problemas de inventario. Como se necesitan aproximadamente seis semanas para recibir el 90 por ciento de una campaña dada, sería útil una predicción precisa de las ventas totales hechas hasta el final de la primera semana de recibir pedidos. Las ventas de la primera semana y las ventas totales de las últimas 12 campañas de la firma se indican en la tabla siguiente:

Ventas de la primera semana	32	20	114	66	18	125	83	65	94	5	39	50
Ventas totales	167	91	560	335	70	650	401	320	470	15	210	265

a) Trace un diagrama de dispersión.
b) Obtenga el coeficiente de correlación muestral. *R.* 0,99788
c) Halle la recta de mínimos cuadrados de las ventas totales respecto de las ventas de la primera semana. *R.* $\hat{Y} = -6{,}179 + 5{,}112X$
d) Basándose en lo encontrado en las parte a) hasta c), ¿qué puede pensarse de la utilización de las ventas de la primera semana para predecir ventas totales?

4 ANÁLISIS COMBINATORIO

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrollan las nociones básicas de la teoría matemática que estudia las diferentes técnicas de conteo, conocida como análisis combinatorio.

4.2 PRINCIPIOS BÁSICOS DEL PROCESO DE CONTAR

Teorema 1.- (Principio de multiplicación) Sea $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un conjunto de m elementos y $T = \{b_1, \ldots, b_n\}$ un conjunto de n elementos, entonces el número de pares $(a_j; b_k)$ que pueden ser formados tomando un elemento de S y un elemento de T es

$$m \cdot n$$

Dicho de otro modo, si una decisión se puede tomar de m maneras, y una vez tomada una de ellas una segunda decisión es tomada de n maneras, entonces el número de maneras de tomar ambas decisiones es igual a $m \cdot n$.

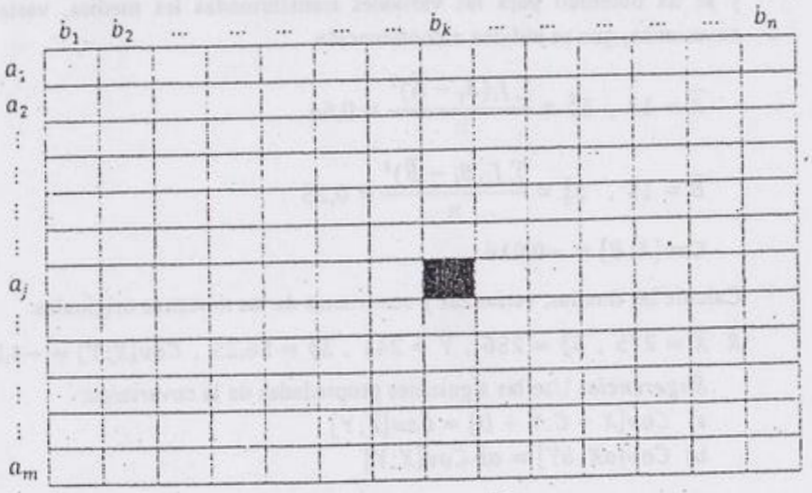


Fig. 4.1

Demostración: Supongamos que los pares ordenados son colocados en una tabla rectangular que tiene la forma de una tabla de multiplicación de m filas y n columnas, de modo que el par ordenado $(a_j; b_k)$ aparece en la intersección de la j-ésima fila con la k-ésima columna (Fig. 4.1).

En estas condiciones, hay un cuadrado en la tabla por cada par $(a_j; b_k)$, esto es hay un total de $m \cdot n$ cuadrados en toda la tabla.

Ejemplo 1.- Supongamos que cuatro universidades de Lima Metropolitana desean contratar un empleado para cada una de las 3 áreas: biblioteca, mantenimiento y personal. ¿Cuántas oportunidades de empleo hay disponible?

Solución

Podemos ver que hay dos conjuntos de cosas: universidades (cuatro) y tipos de empleo (tres).

Por tanto, según la Fig. 4.2, hay tres empleos por cada una de las cuatro universidades, esto es, hay

$$m \cdot n = (4)(3) = 12$$

posibles pares de universidad y empleo. Luego, hay 12 oportunidades disponibles de empleo.

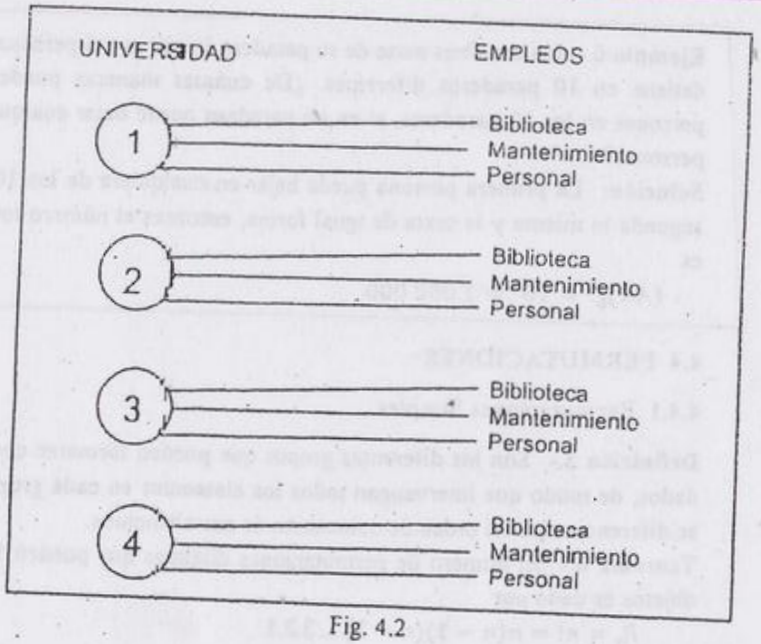


Fig. 4.2

Teorema 2.- (Agrupamientos múltiples) Sea $S_1 = \{a_1, \ldots, a_{n_1}\}$ un conjunto de n_1 elementos. $S_2 = \{b_1, \ldots, b_{n_2}\}$ un conjunto de n_2 elementos, . . . $S_r = \{x_1, \ldots, x_{n_r}\}$ un conjunto de n_r elementos.

Entonces es posible formar

$$n = n_1 . n_2 \ldots n_r$$

grupos ordenados, con r elementos en cada grupo $\{a_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\}$, donde a_{j_1} es un elemento de S_1, b_{j_2} un elemento de S_2 , ... x_{j_r} un elemento de S_r.

Demostración: Ejercicio para el lector.

Ejemplo 2.- Un conductor de un automóvil puede tomar cualquiera de las 5 rutas para ir de la ciudad A a la ciudad B; y para ir de la ciudad B a la ciudad C puede tomar cualquiera de las 4 rutas y finalmente para ir de la ciudad C a la ciudad D tiene 6 rutas posibles. Si para ir desde A a D debe ir de A a B, de B a C y de C a D, ¿cuántas rutas posibles tiene para ir de A a D?

Solución Sean

n_1 = número de rutas de A a B = 5

n_2 = número de rutas de B a C = 4

n_3 = número de rutas de C a D = 6

Por tanto, el número total de maneras en que se puede construir una ruta completa, escogiendo una ruta de A a B, otra de B a C y la última de C a D es

$$n = n_1 . n_2 . n_3 = (5)(4)(6) = 120$$

Ejemplo 3.- Suponga que las personas son clasificadas de acuerdo al sexo, estado civil (soltero o casado) y profesión. Si hay 30 profesionales, ¿de cuántas maneras se puede hacer esta clasificación?

Solución

Se tiene n_1 = categorías de sexo = 2

n_2 = categorías de estado civil = 2

n_3 = número de profesionales = 30

Entonces, el número total de maneras de hacer este tipo de clasificación es

$$n = n_1 . n_2 . n_3 = (2)(2)(30) = 120$$

Teorema 3.- (Principio de adición) Si dos decisiones son mutuamente excluyentes y la primera se puede tomar de m maneras y la segunda de n maneras, entonces una o la otra se puede tomar de $m + n$ maneras

Demostración: Ejercicio para el lector.

Ejemplo 4.- ¿Cuántos números de 4 cifras menores de 2367 se pueden formar con los dígitos 1; 2; 3 y 4, si cada dígito se usa una sola vez?

Solución

Enumeremos las posibilidades en el siguiente diagrama de árbol (Fig. 4.3).

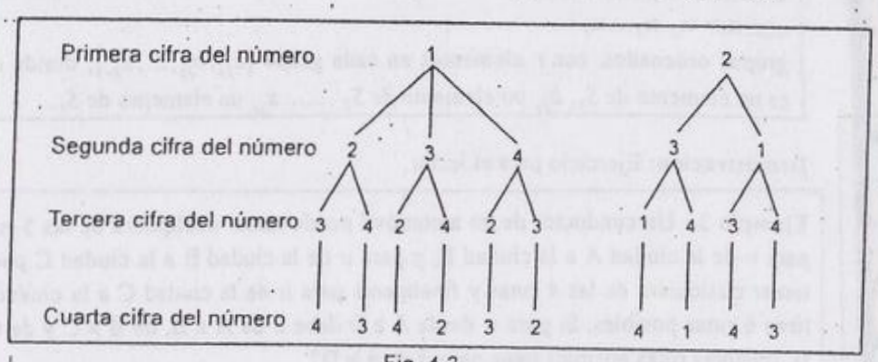


Fig. 4.3

Por tanto, podemos formar $m + n = 6 + 4 = 10$ números de 4 cifras menores que 2367.

4.3 ARREGLOS

4.3.1 Arreglos Simples

Definición 1.- Un arreglo simple de n objetos diferentes tomados de k en k es una ordenación de k objetos entre los n dados, de tal manera que estos grupos de k elementos difieran en algún elemento o en el orden de colocación.

Teorema 4.- El número de todos los arreglos a formarse con n objetos tomados de k en k es obtenido por la fórmula

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

donde $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$ y $0! = 1$

Demostración: Lo que buscamos es el número de maneras de colocar n objetos distintos en k posiciones. Al aplicar el teorema 2, el primer objeto se puede escoger de n maneras. Después de escoger el primero, el segundo se puede escoger de $(n-1)$ maneras, el tercero de $(n-2)$ maneras, ...,el k-ésimo de $(n-k+1)$ maneras. Luego. el número total de maneras es

$$A_k^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo 5.- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 8 personas en una banca con capacidad para 5 personas?

Solución: Como $n = 8$ y $k = 5$, el número total de maneras diferentes que pueden sentarse 8 personas en una banca, con capacidad para 5 personas es

$$A_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 8(7)(6)(5)(4) = 6720$$

4.3.2 Arreglos con Repetición

Definición 2.- Son aquellos arreglos en los que un elemento, cualquiera de los dados, puede repetirse en el mismo grupo el número de veces que se indique.

Teorema 5.- El número de todos los arreglos con repetición a formarse con n objetos tomados de k en k es dado por la fórmula

$$(AR)_k^n = n^k$$

Demostración: Ejercicio para el lector.

Ejemplo 6.- Un ómnibus parte de su paradero inicial con 6 personas a bordo y se detiene en 10 paraderos diferentes. ¿De cuántas maneras pueden bajar las 6 personas en los 10 paraderos, si en un paradero puede bajar cualquier número de personas?

Solución: La primera persona puede bajar en cualquiera de los 10 paraderos, la segunda lo mismo y la sexta de igual forma, entonces el número total de maneras es

$$(AR)_6^{10} = 10^6 = 1\,000\,000$$

4.4 PERMUTACIONES

4.4.1 Permutaciones Simples

Definición 3.- Son los diferentes grupos que pueden formarse con los n objetos dados, de modo que intervengan todos los elementos en cada grupo y los grupos se diferencian por el orden de colocación de sus elementos.

Teorema 6.- El número de permutaciones distintas que pueden formarse con n objetos es dado por

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$$

Demostración: Ejercicio para el lector.

Ejemplo 7.- Se proyecta presentar 6 conferencias en una reunión de padres de familia y profesores en un colegio. El moderador del programa desea saber de cuántas maneras diferentes se pueden situar en el escenario los 6 conferencistas en fila.

Solución: El número total de maneras de situar los 6 conferencistas en fila en el escenario es

$$P_6 = 6! = 720$$

Ejemplo 8.- En una sección de Cálculo I hay 6 hombres y 4 mujeres. Cuando un examen se realiza, los estudiantes son listados de acuerdo a su puntaje obtenido (mayor a menor). Suponga además que ningún estudiante obtiene el mismo puntaje.

a) ¿Cuántos listados diferentes se deben hacer?

b) Si los hombres son ordenados entre ellos mismos y las mujeres entre ellas mismas, ¿cuántos listados diferentes se deben hacer?

Solución

a) El número de listados diferentes es

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800$$

b) Como los hombres pueden ordenarse entre ellos mismos de $P_6 = 6! = 720$ maneras y las mujeres entre ellas mismas de $P_4 = 4! = 24$ maneras. Entonces el número de listados pedidos es

$$(6!)(4!) = 17\,280$$

Ejemplo 9.- El señor Edwin Meza tiene 6 libros diferentes de Matemática, 2 de Estadística y 4 de Química, y desea colocarlos en un estante.

a) ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse, si los libros de cada materia deben estar juntos?

b) ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse, si sólo los libros de química deben estar juntos?

Solución

a) Los libros de Matemática pueden ordenarse de $P_6 = 6!$ maneras., los libros de Estadística de $P_2 = 2!$ maneras, los libros de química de $P_4 = 4!$ maneras y los 3 grupos de libros de $P_3 = 3! = 6$ maneras. Por tanto, el número total de ordenaciones pedido es

$$(6!)(2!)(4!)(3!) = 207\,360$$

b) Considerando los 4 libros de química como un solo libro, tenemos 9 libros que pueden ordenarse de $P_9 = 9!$ maneras. En todos los grupos los libros de química están juntos, pero pueden ordenarse entre ellos de $P_4 = 4! = 24$ maneras. Entonces el número total de ordenaciones pedido es

$$(9!)(4!) = 8\,709\,120$$

4.4.2 Permutaciones Circulares

Definición 4.- Son las diferentes permutaciones que pueden formarse con n objetos dados, de modo que no hay ni primero ni último objeto, pues todos se encuentran en un círculo cerrado.

Teorema 7.- El número de permutaciones circulares distintas que pueden formarse con n objetos es dado por

$$P_n^c = (n-1)!$$

Demostración: Ejercicio para el lector.

Ejemplo 10.- ¿De cuántas formas pueden sentarse los 12 miembros del Consejo de facultad de la Facultad de Ingeniería Industrial alrededor de una mesa circular, si:

a) Pueden sentarse de cualquier forma.

b) Dos miembros determinados deben estar uno al lado del otro.

Solución

a) Considerando uno de los miembros sentado en cualquier parte alrededor de la mesa, entonces los 11 miembros restantes, pueden sentarse de $P_{11} = 11!$ maneras.

Luego, el número total de maneras distintas que pueden sentarse los 12 miembros alrededor de la mesa es

$$P_{11}^c = 11! = 39\,916\,800$$

b) Considerando las dos personas que han de ir juntas como una sola, entonces hay 11 personas para sentarse en círculo que lo pueden hacer de 10! maneras. Las dos personas consideradas como una sola pueden a su vez ordenarse entre sí de 2! maneras. Por tanto, el número de ordenaciones de 12 miembros del Consejo de facultad alrededor de una mesa circular con 2 miembros determinados sentados juntos es

$$(10!)(2!) = 7\,257\,600$$

4.4.3 Permutaciones con Repetición

Teorema 8.- Sean $k_1, k_2, \dots, k_m$ números enteros positivos tal que

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

El número de maneras en que un conjunto de n elementos puede ser dividido en m partes ordenadas (o particionado en m subconjuntos) de los cuales el primero contiene k_1 elementos, el segundo k_2 elementos, etc. , se obtiene mediante la siguiente fórmula

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_m!}$$

Demostración: Ejercicio para el lector.

Ejemplo 11.- ¿Cuántas permutaciones distintas se pueden formar usando las letras MEMMER?

Solución: Se tiene

$n = 6$ letras ; $n_1 = 3$ letras M ; $n_2 = 2$ letras E y $n_3 = 1$ letra R

Entonces hay $P_6^{3,2,1} = \dfrac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$ permutaciones distintas

Ejemplo 12.- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar 3 bolas blancas, 4 rojas y 4 negras en una fila, si las bolas de igual color no se distinguen entre sí?

Solución: Se pueden ordenar de

$$P_{11}^{3,4,4} = \frac{11!}{3!\,4!\,4!} = 11\,550 \text{ maneras distintas}$$

4.5 COMBINACIONES

Definición 5.- Una combinación de n objetos diferentes tomados de k en k es una selección de k objetos de los n dados sin tener en cuenta la ordenación de los mismos (no pueden haber dos grupos con los mismos elementos).

Teorema 9.- El número de combinaciones de n objetos tomados de k en k se obtiene mediante la fórmula siguiente

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Demostración: Sea $a = C_k^n$ el número de grupos de tamaño k y sea b el número de formas de reordenar cada combinación (grupo) una vez que ha sido escogida,

esto es, $P_k = k! = b$. Entonces por el principio de multiplicación (teorema 1), el número de arreglos simples a formarse con n objetos tomados de k en k es

$$A_k^n = ab = (C_k^n)b = (C_n^k)(k!)$$

Por tanto, resolviendo la igualdad para C_k^n , se tiene

$$C_k^n = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Teorema 10.- El número de combinaciones con repetición a formarse con n objetos tomados de k en k es

$$(CR)_k^n = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

Demostración: Ejercicio para el lector.

Ejemplo 13.- Una placa de un televisor se puede adquirir en 7 fábricas. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 4 de las siete fábricas?

Solución: El número total de maneras de escoger 4 fábricas de 7 es

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$$

Ejemplo 14.- ¿Cuántos grupos de 2 hombres y 3 mujeres se pueden formar con 5 hombres y 7 mujeres?

Solución: Como hay $C_2^5 = \binom{5}{2}$ posibles grupos de 2 hombres y $C_3^7 = \binom{7}{3}$ posibles grupos de 3 mujeres, entonces hay

$$C_2^5 \times C_3^7 = \frac{5.4.7.6.5}{2.1.3.2.1} = 350$$

posibles grupos de 2 hombres y 3 mujeres.

Observación 1.- Para resolver un problema de conteo se debe tener en cuenta las siguientes sugerencias:

i) Estudie el problema y determine si se forma un suceso simple al:
   a) Seleccionar elementos de dos (o más) conjuntos (situación que sugiere el uso del principio de multiplicación o el principio de agrupamiento múltiple).
   b) Seleccionar k elementos de un solo conjunto de n elementos (situación que sugiere el uso de arreglos o permutaciones o combinaciones).

ii) Las reglas de los arreglos y permutaciones pueden ser aplicables si los objetos se toman de un solo conjunto y cada reordenamiento diferente de los k objetos de un grupo conduce a un suceso simple diferente.

iii) La regla de las combinaciones puede ser aplicable si los objetos se toman de un solo conjunto y el reordenamiento de los objetos no produce un suceso simple.

iv) Si se tiene dificultad para visualizar la regla (o reglas) de conteo apropiada para un problema determinado que involucra un gran número de objetos, se puede construir una versión en miniatura del problema de manera que se puedan contar manualmente los objetos. Esto puede ayudar a ver cómo se resuelve la versión más complicada.

Ejemplo 15.- De un conjunto de 8 hombres y 7 mujeres, ¿cuántos comités de 10 miembros se pueden formar si cada uno de ellos debe contener cuando menos 5 mujeres?

Solución: Las condiciones del problema se cumplen si el comité consta de:

i) 5 hombres y 5 mujeres, que se pueden seleccionar de $C_5^8 \times C_5^7$ maneras

ii) 4 hombres y 6 mujeres, que se pueden elegir de $C_4^8 \times C_6^7$ maneras

iii) 3 hombres y 7 mujeres, que se pueden elegir de $C_3^8 \times C_7^7$ maneras y cada una de estas elecciones son mutuamente excluyentes. Por tanto, al aplicar el principio de adición, el número total de comités a formarse es

$$C_5^8 \times C_5^7 + C_4^8 \times C_6^7 + C_3^8 \times C_7^7 = 1722$$

Ejemplo 16.- Supóngase que el entrenador de la selección peruana de vóleibol desea formar su alineación compuesta de 4 jugadoras veteranas y 2 juveniles, ¿cuántas alineaciones puede formar con 6 veteranas y 6 juveniles, si todas ellas pueden jugar en cualquier posición?

Solución: Como hay C_4^6 posibles grupos de 4 veteranas y C_2^6 posibles grupos de juveniles, entonces un equipo se puede seleccionar de $C_4^6 \times C_2^6$ maneras. Además cualquier grupo de 6 chicas se pueden ordenar de 6! maneras.

Por tanto, el número total de posibles alineaciones es

$$C_4^6 \times C_2^6 \times 6! = 162\,000$$

Ejemplo 17.- Cada pieza de un dominó es marcado por dos números. Las piezas son simétricos de modo que el par de números no es ordenado. ¿Cuántas piezas diferentes de dominó pueden construirse usando los números 1; 2; ...; n?

Solución: Como cada pieza del dominó se puede marcar con dos números repetidos, entonces el número total de piezas de dominó que se pueden construir es

$$(CR)_2^n = \frac{(n+2-1)!}{(n-1)!\,2!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 18.- ¿De cuántas maneras se pueden colocar 11 jugadores de fútbol en una fila, de modo que el arquero y el defensa central, en particular, no queden uno al lado del otro?

Solución

Tenemos 10 jugadores sin el arquero. Éstos se pueden ordenar de 10! maneras diferentes. En cada ordenación de 10 jugadores, el arquero puede quedar en 9 lugares diferentes sin estar al lado del defensa central (ver Fig. 4.4).

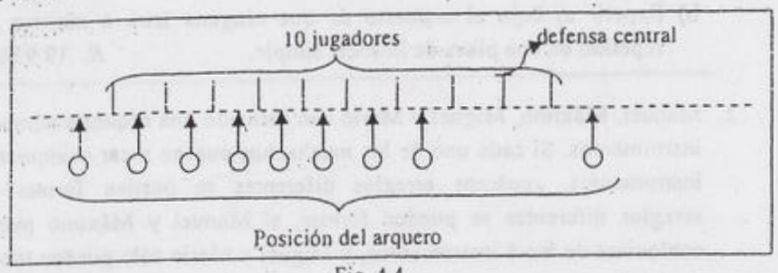


Fig. 4.4

Luego, el número total de maneras de colocar 11 jugadores en una fila de modo que el arquero y el defensa central no estén juntos es

$$9 \times 10! = 32\,659\,200$$

Ejemplo 19.- Un muchacho tiene 4 monedas, cada una de distinto valor. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero puede formar con las cuatro monedas?

Solución: El muchacho puede formar grupos de una moneda, grupos de 2, grupos de 3 y grupos de 4. Entonces, el número total de sumas diferentes de dinero que puede formar el muchacho es

$$C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 15 = 2^4 - 1$$

En general, para cualquier número entero positivo n se tiene

$$C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n - 1$$

Ejemplo 20.- ¿De cuántas maneras diferentes se puede izar cinco banderas de colores diferentes en 8 mástiles colocados en fila, si se pueden izar cualquier número de ellas en cada mástil?

Solución: La primera bandera puede ser izada en cualquiera de los 8 mástiles. Entonces este mástil queda dividido en dos partes y por tanto, existen ahora $8 + 1 = 9$ posiciones posibles para la segunda bandera.

De la misma forma existen $8 + 2 = 10$ posiciones posibles para la tercera bandera y así sucesivamente. Así, el número total de maneras diferentes de izar las banderas es

$$8(9)(10)(11)(12) = 95\,040$$

EJERCICIOS

1. a) Suponga que el Ministerio de Transportes desea construir placas de matrícula de automóviles compuesto de 7 lugares, de los cuales los 2 primeros deben estar ocupados por letras y los otros 5 por números, ¿cuántas placas diferentes se deben construir si se utilizan todas las letras y números? *R.* $(26)^2 \times 10^5$

   b) Repetir a) bajo el supuesto de que ninguna letra o número puede ser repetido en una placa de licencia simple. *R.* 19 956 000

2. Manuel, Máximo, Miguel y Mario han formado una orquesta compuesta de 4 instrumentos. Si cada uno de los muchachos pueden tocar cualquiera de los 4 instrumentos, ¿cuántos arreglos diferentes se pueden formar? ¿cuántos arreglos diferentes se pueden formar, si Manuel y Máximo pueden tocar cualquiera de los 4 instrumentos, y Miguel y Mario sólo pueden tocar piano y tambor? *R.* 24 ; 4

3. a) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 3 niños y 3 niñas en una banca? *R.* 720

   b) ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse 3 niños y 3 niñas en una banca, si tanto los niños como las niñas deben estar juntos? *R.* 72

   c) ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse 3 niños y 3 niñas en una banca, si solamente los niños deben estar juntos? *R.* 144

   d) ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse 3 niños y 3 niñas en una banca, si los niños ocupan los lugares impares? *R.* 36

4. ¿Cuántas permutaciones distintas se pueden formar con las letras:
   a) ARREGLO b) MISSISSIPPI c) ESTADÍSTICA

5. Un niño tiene 12 bloques, de los cuales 6 son de color negro, 4 de color rojo, 1 de color blanco y 1 de color azul. Si el niño desea colocar los bloques en una fila, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden colocar los bloques? *R.* 27 720

6. Una compañía desea ascender a 3 de sus 12 gerentes para colocarlos en las posiciones de Vice-presidente de ventas, de manufactura y de finanzas. ¿Cuántas opciones distintas se tienen para efectuar estos ascensos? *R.* 1 320

7. Tres viajeros llegan a una ciudad en que hay 4 hoteles. ¿De cuántas maneras pueden ocupar sus cuartos, debiendo estar cada uno en un hotel diferente? *R.* 24

8. Con 7 consonantes y 4 vocales, ¿cuántas palabras se pueden formar conteniendo cada una 3 consonantes y 2 vocales? (Las palabras no necesariamente tienen significado) *R.* 25 200

9. ¿Cuántos números de 5 dígitos pueden formarse con los 10 dígitos siguientes: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 y 9:
   a) Si se permiten repeticiones *R.* 90 000
   b) Si no se permiten repeticiones *R.* 27 216
   c) Si el último número debe ser 5 y no se permiten repeticiones. *R.* 2 688

10. Se va realizar un estudio para determinar la actitud de las enfermeras de un hospital respecto a varios procedimientos administrativos empleados actualmente. Si se va seleccionar un grupo de 5 enfermeras de un total de 50, ¿cuántos grupos distintos se pueden seleccionar? *R.* 2 118 760

11. Si contamos con 7 miembros del partido A y 5 miembros del partido B, y hay que formar una junta directiva que tenga 3 miembros del partido A y 2 del partido B. ¿De cuántas formas se puede constituir la junta directiva si:
    a) cualquiera del partido A y cualquiera del partido B pueden ser incluidos.
    b) uno en particular del partido A debe ser incluido siempre en la junta directiva.
    c) dos miembros del partido A en particular no pueden ser incluidos.
    R. a) 350 b) 150 c) 100

12. En un examen de Cálculo I, un estudiante debe responder 7 preguntas de las 10 dadas, ¿de cuántas maneras diferentes debe seleccionar, si él debe responder por lo menos 3 de las 5 primeras preguntas? *R.* 120

13. Un investigador tiene 5 jaulas con ratones y 3 jaulas de conejos. ¿De cuántas maneras él pude colocar las jaulas en una fila, si él no distingue las jaulas con ratones de las jaulas con conejos? *R.* 56

14. Una chica tiene 8 amigas, de las cuales invitará para su cumpleaños solamente a 5.

a) ¿De cuántas maneras debe hacer la invitación, si 2 de sus amigas están enemistadas y no pueden asistir juntas? *R.* 36

b) ¿De cuántas maneras debe hacer la invitación, si dos de ellas solamente pueden asistir juntas? *R.* 26

15. Considere una colonia experimental de 10 abejas obreras y una reina. ¿De cuántas maneras puede ser escogido un grupo de 4 abejas si:

a) La reina tiene que pertenecer al grupo. *R.* 120

b) La reina no debe pertenecer al grupo. *R.* 210

16. Un laboratorio de sicología en donde se realiza una investigación sobre sueños tiene 3 cuartos, con 2 camas en cada cuarto. Si 3 grupos de gemelos idénticos son asignados a estas 6 camas de modo que cada grupo de gemelos duerme en el mismo cuarto pero en diferentes camas, ¿cuántas asignaciones diferentes se pueden hacer? *R.* 48

17. Si 12 personas son divididos en 3 comités de tamaño 3; 4 y 5, respectivamente, ¿cuántas divisiones diferentes se pueden formar? *R.* 27720

18. ¿De cuántas maneras diferentes puede un padre dividir 7 regalos entre sus 3 hijos, si el mayor debe recibir 3 regalos y los menores 2 cada uno? *R.* 210

19. Un grupo de 10 pacientes ingresa a una clínica en donde serán atendidos cada uno, por uno de tres médicos. Si los resultados de este experimento pueden identificarse con el conjunto de consultas tales como el Dr. Manrique ve al paciente 1 o el Dr. Barriga ve al paciente 3, etc., entonces encontrar el número de puntos muestrales de tal experimento. *R.* 30

20. A los compradores de determinados televisores se les ofrecen 4 estilos distintos del mueble para que escojan. ¿Cuántos resultados posibles hay si se considera 1 comprador? ¿Si se considera 2 compradores? ¿Cinco? *R.* 4; 16; 1 024

21. Suponga que los delegados de 10 países incluyendo Perú, Chile, Brasil y Argentina, deben sentarse en fila en una banca. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse, si los delegados de Brasil y Argentina deben sentarse juntos, y los delegados de Perú y Chile no deben estar juntos? *R.* 564 480

22. Un cierto invento electrónico tiene 50 circuitos, cada uno de los cuales puede estar abierto o cerrado. El estado del sistema se define como el vector $(x_1; x_2; \ldots; x_{50})$, donde $x_i = 1$ ó 0 cuando el i-ésimo circuito está abierto o cerrado, respectivamente, $i = 1, \ldots, 50$. ¿Cuántos estados diferentes hay? *R.* 2^{50}

23. Quince estudiantes de secundaria han pasado las pruebas semifinales para llegar a ser líder dirigente. De estas semifinalistas se escogerán 6 para que conformen el equipo líder del primer escuadrón. ¿Cuántos equipos diferentes se pueden formar con estos 15 semifinalistas, si uno de ellos debe ser el presidente? *R.* 30 030

24. Un vendedor de autos nuevos quiere impresionar a sus clientes potenciales con la cantidad posible de diferentes combinaciones de que se dispone. Un modelo presenta 4 tipos de motores, 3 transmisiones, 5 colores de carrocería y 3 colores de interiores. ¿Cuántas posibilidades de elección respecto a estas opciones hay? *R.* 180

25. Las parejas para un baile escolar se eligen colocando los nombres de las chicas en una urna, y el de los muchachos, en otra, seleccionándolos después al azar. Si hay 15 chicos y 15 chicas, ¿cuántas parejas se pueden formar? *R.* 15!

26. Tres hombres y dos mujeres deben ser seleccionados de una nómina de 10 hombres y 5 mujeres. Si hay tres distintas tareas A_1, A_2, A_3, para los hombres y B_1, B_2, para las mujeres dentro del comité, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden asignar las tareas a estas personas? *R.* 14 400

27. Si 20 países intercambian embajadores, ¿cuántos embajadores son utilizados en este intercambio? *R.* 190

28. De 10 números positivos y 6 números negativos, se eligen 3 números al azar (sin reemplazamiento) y se multiplican. ¿Cuántos productos negativos se pueden obtener? *R.* 470

29. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar un grupo de 5 personas en una banca, si el presidente debe sentarse en el medio? *R.* 48

a) ¿De cuántas maneras debe hacer la invitación, si 2 de sus amigas están enemistadas y no pueden asistir juntas? *R.* 36

b) ¿De cuántas maneras debe hacer la invitación, si dos de ellas solamente pueden asistir juntas? *R.* 26

15. Considere una colonia experimental de 10 abejas obreras y una reina. ¿De cuántas maneras puede ser escogido un grupo de 4 abejas si:

a) La reina tiene que pertenecer al grupo. *R.* 120

b) La reina no debe pertenecer al grupo. *R.* 210

16. Un laboratorio de sicología en donde se realiza una investigación sobre sueños tiene 3 cuartos, con 2 camas en cada cuarto. Si 3 grupos de gemelos idénticos son asignados a estas 6 camas de modo que cada grupo de gemelos duerme en el mismo cuarto pero en diferentes camas, ¿cuántas asignaciones diferentes se pueden hacer? *R.* 48

17. Si 12 personas son divididos en 3 comités de tamaño 3; 4 y 5, respectivamente, ¿cuántas divisiones diferentes se pueden formar? *R.* 27720

18. ¿De cuántas maneras diferentes puede un padre dividir 7 regalos entre sus 3 hijos, si el mayor debe recibir 3 regalos y los menores 2 cada uno? *R.* 210

19. Un grupo de 10 pacientes ingresa a una clínica en donde serán atendidos cada uno, por uno de tres médicos. Si los resultados de este experimento pueden identificarse con el conjunto de consultas tales como el Dr. Manrique ve al paciente 1 o el Dr. Barriga ve al paciente 3, etc., entonces encontrar el número de puntos muestrales de tal experimento. *R.* 30

20. A los compradores de determinados televisores se les ofrecen 4 estilos distintos del mueble para que escojan. ¿Cuántos resultados posibles hay si se considera 1 comprador? ¿Si se considera 2 compradores? ¿Cinco? *R.* 4; 16; 1 024

21. Suponga que los delegados de 10 países incluyendo Perú, Chile, Brasil y Argentina, deben sentarse en fila en una banca. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse, si los delegados de Brasil y Argentina deben sentarse juntos, y los delegados de Perú y Chile no deben estar juntos? *R.* 564 480

22. Un cierto invento electrónico tiene 50 circuitos, cada uno de los cuales puede estar abierto o cerrado. El estado del sistema se define como el vector $(x_1; x_2; \ldots; x_{50})$, donde $x_i = 1$ ó 0 cuando el i-ésimo circuito está abierto o cerrado, respectivamente, $i = 1, \ldots, 50$. ¿Cuántos estados diferentes hay? *R.* 2^{50}

23. Quince estudiantes de secundaria han pasado las pruebas semifinales para llegar a ser líder dirigente. De estas semifinalistas se escogerán 6 para que conformen el equipo líder del primer escuadrón. ¿Cuántos equipos diferentes se pueden formar con estos 15 semifinalistas, si uno de ellos debe ser el presidente? *R.* 30 030

24. Un vendedor de autos nuevos quiere impresionar a sus clientes potenciales con la cantidad posible de diferentes combinaciones de que se dispone. Un modelo presenta 4 tipos de motores, 3 transmisiones, 5 colores de carrocería y 3 colores de interiores. ¿Cuántas posibilidades de elección respecto a estas opciones hay? *R.* 180

25. Las parejas para un baile escolar se eligen colocando los nombres de las chicas en una urna, y el de los muchachos, en otra, seleccionándolos después al azar. Si hay 15 chicos y 15 chicas, ¿cuántas parejas se pueden formar? *R.* 15!

26. Tres hombres y dos mujeres deben ser seleccionados de una nómina de 10 hombres y 5 mujeres. Si hay tres distintas tareas A_1, A_2, A_3, para los hombres y B_1, B_2, para las mujeres dentro del comité, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden asignar las tareas a estas personas? *R.* 14 400

27. Si 20 países intercambian embajadores, ¿cuántos embajadores son utilizados en este intercambio? *R.* 190

28. De 10 números positivos y 6 números negativos, se eligen 3 números al azar (sin reemplazamiento) y se multiplican. ¿Cuántos productos negativos se pueden obtener? *R.* 470

29. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar un grupo de 5 personas en una banca, si el presidente debe sentarse en el medio? *R.* 48

30. Un paciente que recibe anualmente examen corporal debe realizar 8 chequeos. La sucesión en la que estos se ejecutan es importante porque el tiempo perdido entre chequeo y chequeo variará y dependerá de la sucesión. Si un experto estudia las sucesiones para determinar uno que requiera el menor tiempo, ¿cuántas sucesiones diferentes deberá incluir en su estudio si todas las sucesiones posibles es admisible? *R.* 40 320

31. El encargado de poner los discos en una radiodifusora tiene que escoger cinco discos entre 10 para ponerlos en un programa de 15 minutos. ¿De cuántas maneras se puede programar la distribución de estos cinco discos entre las cinco interrupciones que hay entre comerciales, charlas, etc.? *R.* 30 240

32. Un agente de ventas de casas tiene 10 diseños básicos. En una calle determinada posee 7 lotes.

i) Supongamos que el alcalde del distrito no permite casas que se parezcan en una misma calle. ¿De cuántas maneras diferentes puede el agente utilizar sus diseños básicos restringiéndose a lo estipulado por el alcalde? *R.* 604 800

ii) Si no hay restricciones, ¿cuántos arreglos son posibles? *R.* 10 000 000

33. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir n bolas indistinguibles en r urnas de modo que la i-ésima urna contenga por lo menos m_i bolas, $i = 1, \ldots, r$?

Suponga que $n \geq \sum_{i=1}^{r} m_i$.

40. Usando la inducción matemática y la identidad combinatoria

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n-1}{r-1}$$

pruebe la identidad

$$\binom{r+M}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{M+1-j}{j}$$

41. El Colegio de Contadores Públicos de Lima desea formar una comisión para realizar auditoría a Minero Perú. Esta comisión debe estar integrada por 3 contadores y 2 economistas. ¿De cuántas maneras puede formarse la comisión si:

a) Un determinado contador debe estar en la comisión. *R.* 100

b) Dos economistas no deben estar en la comisión. *R.* 60

5 PROBABILIDAD

5.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores, vimos que la distribución de frecuencias de las observaciones de un fenómeno casual es un recurso muy poderoso para entender la variación del mismo. Sin embargo, haciendo suposiciones apropiadas sobre el fenómeno en estudio y sin observar directamente el mismo, podemos construir un modelo teórico que represente en forma adecuada a la distribución de frecuencias cuando el fenómeno es observado directamente. Tales modelos son llamados modelos de probabilidad.

En este capítulo se desarrollan las nociones básicas y propiedades del modelo propuesto que serán utilizadas en la inferencia estadística.

5.2 EXPERIMENTO ALEATORIO

Con la finalidad de facilitar la comprensión de lo que sigue, definiremos algunos términos.

Definición 1.- Un experimento es un proceso mediante el cual se obtiene un resultado de una observación. Un experimento puede ser determinístico y no determinístico.

Definición 2.- Un experimento es determinístico cuando el resultado de la observación es determinado en forma precisa por las condiciones bajo las cuales se realiza dicho experimento.

Definición 3.- Un experimento es aleatorio o no determinístico cuando los resultados de la observación no se pueden predecir con exactitud antes de realizar el experimento.

Ejemplo 1.- Son ejemplos de experimentos determinísticos los siguientes procesos:

a) Observar la suma de dos números naturales pares.

b) Observar el color de una bola extraída de una urna que contiene sólo bolas negras.

c) Observar el área barrida durante cierto período de tiempo por planetas obedeciendo las leyes de Kepler.

Ejemplo 2.- Son ejemplos de experimentos aleatorios los siguientes procesos:

a) Lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior.
b) Lanzar una moneda 8 veces y observar la sucesión de caras y sellos.
c) Lanzar una moneda 6 veces y observar el número de caras obtenidas.
d) Extraer con o sin reemplazamiento bolas de una urna que contiene 5 bolas blancas y 6 negras.
e) Contar el número de piezas defectuosas producidas por una máquina X en un día determinado.
f) Elegir un presidente de un grupo de 50 personas.
g) Observar el tiempo de vida de una refrigeradora.

5.2.1 Caracterización de un Experimento Aleatorio

Las características comunes en un experimento aleatorio son:

1. Cada experimento podrá ser repetido indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones.
2. No se conoce un particular valor del experimento "a priori". Sin embargo, es posible describir el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.
3. Cuando el experimento es repetido un número grande de veces, aparece un modelo de regularidad, esto es, habrá una estabilidad de la fracción $h = \frac{f}{n}$ (frecuencia relativa), donde n es el número de repeticiones y f es el número de éxitos de un particular resultado establecido antes de la realización del experimento. Gráficamente, se tiene (Fig. 5.1):

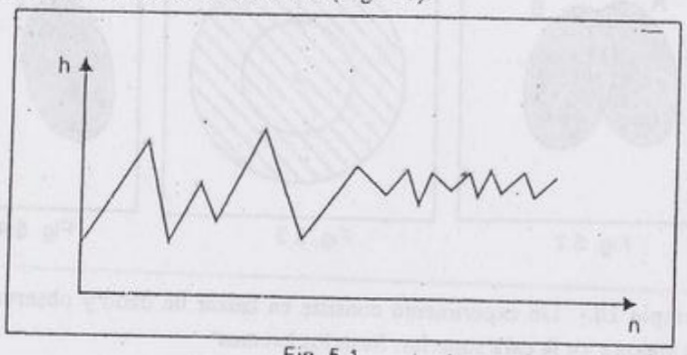


Fig. 5.1

Como veremos más adelante, la característica (3) es de gran importancia para calcular la probabilidad de un cierto resultado de un experimento.

5.3 ESPACIO MUESTRAL

Definición 4.- Un espacio muestral, que se denota por Ω, es un conjunto de puntos correspondientes a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, esto es,

$\Omega = \{\omega$, tal que ω es un resultado de la realización de un fenómeno aleatorio$\}$

Ejemplo 3.- Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior. Entonces el espacio muestral asociado a este experimento es

$$\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$

Ejemplo 4.- Supongamos que en un lote de 20 artículos hay 8 defectuosos. Se selecciona un artículo al azar uno después del otro (sin reemplazamiento) hasta obtener el último artículo defectuoso. Luego, se cuenta el número total de artículos sacados del lote. Entonces el espacio muestral que proporciona mayor información con relación a este experimento es

$$\Omega = \{8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16;\ 17;\ 18;\ 19;\ 20\}$$

Ejemplo 5.- Sea el experimento: lanzar 3 monedas y observar el resultado. Luego el espacio muestral que nos proporciona mayor información con respecto a este experimento es

$$\Omega = \{ccc, ccs, csc, scc, css, scs, ssc, sss\}$$

donde c = cara y s = sello.

Ejemplo 6.- Sea el experimento: contar el número de camiones que pasan por un peaje durante un día determinado. Entonces el espacio muestral asociado a este experimento es

$$\Omega = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$$

5.4 EVENTOS

Definición 5.- Un evento es un conjunto de posibles resultados de un experimento. En términos de conjuntos, es un subconjunto del espacio muestral Ω. En particular, Ω y ϕ (conjunto vacío) son eventos. Al espacio muestral Ω se le llama evento seguro y a ϕ evento imposible.

Ejemplo 7.- Sea el experimento: lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior. El espacio muestral asociado a este experimento es

$$\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$

Para este experimento podemos definir los siguientes eventos:

i) A: Observar un número impar. Entonces $A = \{1; 3; 5\}$.
ii) B: Observar un número menor que 4. Entonces $B = \{1; 2; 3\}$.
iii) C: Observar un número múltiplo de 2. Entonces $C = \{2; 4; 6\}$.
iv) D: Observar un número múltiplo de 3. Entonces $D = \{3; 6\}$.
v) E: Observar el número 1. Entonces $E = \{1\}$.

Definición 6.- (Evento simple) Un evento es simple si contiene solamente un punto del espacio muestral y se denota por ω.
Un evento compuesto es aquél que puede expresarse como la unión de dos o más eventos simples.

Ejemplo 8.- Tres muchachas María, Magna y Maritza compiten en un concurso de belleza. Los premios solamente son otorgados a las que ocupan el primer y segundo lugar.

a) Liste los elementos del espacio muestral correspondientes al experimento "Elegir las dos ganadoras".
b) Defina como subconjuntos los eventos
A: María gana el concurso de belleza
B: María gana el segundo lugar
C: Maritza y Magna ganan los premios.

Solución

a) El espacio muestral asociado a este experimento es
$\Omega = \{(\text{María; Magna}), (\text{María; Maritza}), (\text{Magna; María}), (\text{Magna; Maritza}), (\text{Maritza; Magna}), (\text{Maritza; María})\}$
b) Los eventos son los subconjuntos
$A = \{(\text{María; Magna}), (\text{María; Maritza})\}$
$B = \{(\text{Maritza; María}), (\text{Magna; María})\}$
$C = \{(\text{Magna; Maritza}), (\text{Maritza; Magna})\}$

Ejemplo 9.- Un experimento consiste en lanzar 2 dados y observar los números que aparecen en las caras superiores.

a) Liste los elementos del espacio muestral Ω.
b) Liste los elementos del evento A: la suma de los números es 5.
c) Liste los elementos del evento B: la suma de los números es 12.
d) Liste los elementos del evento C: el producto de los números es 24.
e) Liste los elementos del evento D: la suma de los números es divisible por 7.

Solución:

a) El espacio muestral asociado a este experimento es:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), \\ (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), \\ (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6), \\ (4;1), (4;2), (4;3), (4;4), (4;5), (4;6), \\ (5;1), (5;2), (5;3), (5;4), (5;5), (5;6), \\ (6;1), (6;2), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6), \end{Bmatrix}$$

Los eventos pedidos son:

b) $A = \{(1;4), (4;1), (2;3), (3;2)\}$
c) $B = \{(6;6)\}$
d) $C = \{(6;4), (4;6)\}$
e) $D = \{(1;6), (6;1), (3;4), (4;3)\}$

5.4.1 Operaciones con Eventos

Usando las operaciones con conjuntos, podemos formar nuevos eventos. Estos nuevos eventos serán nuevamente subconjuntos del mismo espacio muestral de los eventos dados.

Definición 7.- (Unión de eventos) Sean A y B dos eventos cualesquiera de un experimento aleatorio. La unión de estos eventos, denotado por $A \cup B$, es el evento que ocurre si A ocurre o B ocurre o ambos ocurren.
Los elementos de $A \cup B$ pueden listarse mediante la regla

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \in A \text{ ó } \omega \in B\}$$

En las figuras que siguen, la parte sombreada representa a la unión de los eventos A y B.

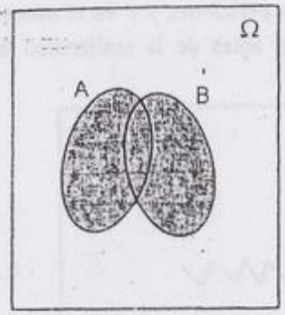


Fig. 5.2

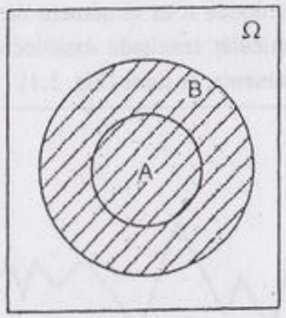


Fig. 5.3

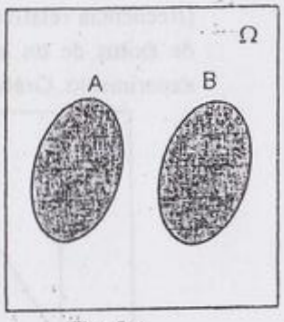


Fig. 5.4

Ejemplo 10.- Un experimento consiste en lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior. Sean los eventos
A: Observar un número impar.
B: Observar un número mayor o igual a 4.

Liste los elementos del evento $A \cup B$.

Solución: Se tiene

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$A = \{1; 3; 5\}$, $B = \{4; 5; 6\}$

Entonces la unión de estos eventos es

$A \cup B = \{$ número que resulta es impar o mayor o igual a $4\} = \{1; 3; 4; 5; 6\}$

Definición 8.- (Intersección de eventos) Sean A y B dos eventos cualesquieras de un experimento aleatorio. La intersección de A y B es el evento que contiene todos los resultados que pertenecen a A y B simultáneamente. La intersección de A y B se denota por $A \cap B$, y sus elementos son listados mediante la regla

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \in A \text{ y } \omega \in B\}$$

En las figuras que siguen, la parte sombreada representa a la intersección de los eventos A y B.

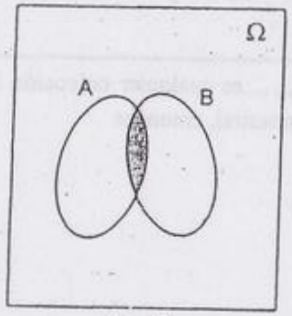


Fig. 5.5

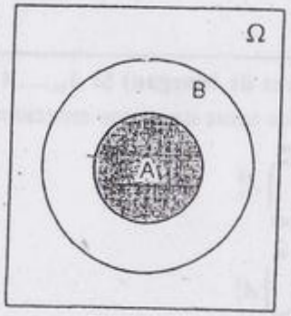


Fig. 5.6

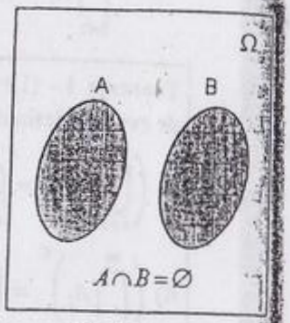


Fig. 5.7

Ejemplo 11.- Para el experimento del ejemplo 10, se tiene $A = \{1; 3; 5\}$ y $B = \{4; 5; 6\}$. Luego, $A \cap B = \{5\}$.

Ejemplo 12.- Considere el experimento aleatorio de seleccionar una persona que haga contribuciones al Estado. Sea A el evento de que una persona seleccionada al azar sea un contribuyente menor de 60 años y B el evento de que la persona seleccionada es mayor de 55 años. Entonces el evento $A \cap B$ es

$A \cap B =$ {todos los contribuyentes que son mayores de 55 años y menores de 60 años}

Definición 9.- (Eventos mutuamente excluyentes) Sean A y B dos eventos de un cierto experimento aleatorio, se dice que estos eventos son mutuamente excluyentes (disjuntos) si no pueden ocurrir juntos, esto es,

$$A \cap B = \emptyset$$

Ejemplo 13.- Un experimento aleatorio consiste en seleccionar un alumno de la Universidad de Lima y observar su edad. Sea el evento A: el alumno seleccionado al azar tiene más de 24 años, y B: el alumno seleccionado tiene menos de 21 años. Por tanto, el evento $A \cap B = \emptyset$, y consecuentemente los eventos A y B son mutuamente excluyentes.

Definición 10.- (Complemento de un evento) El complemento de un evento A con respecto al espacio muestral Ω es el evento que ocurre si A no ocurre. En símbolos, se tiene

$$A^c = \bar{A} = A' = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \notin A\}$$

En el siguiente diagrama de Venn, la parte sombreada corresponde al conjunto A^c.

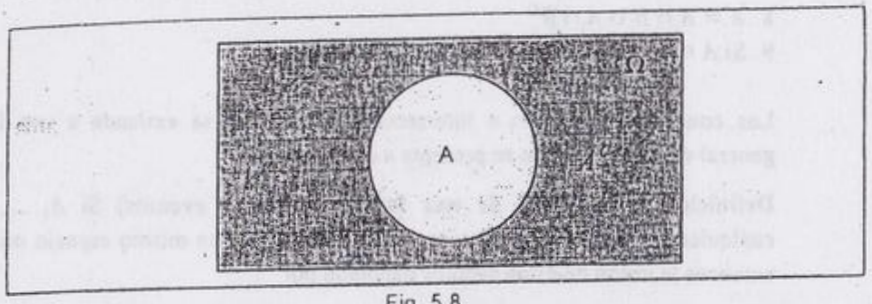


Fig. 5.8

Ejemplo 14.- Un experimento aleatorio consiste en seleccionar un alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Sea el evento A: el alumno seleccionado al azar fuma. Entonces el evento complementario de A es

A^c: el alumno seleccionado no fuma.

Definición 11.- (Inclusión de eventos) Dados dos eventos A y B de un cierto experimento aleatorio, se dice que el evento A está contenido en B si siempre que ocurre A ocurre B. En símbolos:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall\, \omega)\ (\text{si } \omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$$

Ejemplo 15.- Consideremos el experimento aleatorio que consiste en seleccionar un alumno de la Universidad de Lima y observar su estatura. Sea el elemento A: el alumno seleccionado al azar tiene una estatura mayor de 1,70 m y el evento B: el alumno seleccionado tiene una estatura mayor de 1,80 m. Entonces, es claro que el evento B está contenido en A, esto es $B \subset A$.

5.4.2 Propiedades de las operaciones con eventos

Dados los eventos A, B y C de un cierto experimento aleatorio, se verifican las siguientes propiedades básicas de unión y de intersección de eventos

1. $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$ (ley conmutativa)
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ley asociativa)
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $(A^C)^C = A$ (el complemento del complemento de A es igual a A)
5. $\Omega \cup A = \Omega$, $\emptyset \cup A = A$, $A \cup A^C = \Omega$, $A \cup A = A$
6. $\Omega \cap A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$, $A \cap A^C = \emptyset$, $A \cap A = A$
7. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ y $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (leyes de Morgan)
8. $A = A \cap B \cup A \cap B^C$
9. Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$

Los conceptos de unión e intersección de eventos se extiende a una familia general de eventos como se presenta a continuación.

Definición 12.- (Unión de una familia finita de eventos) Si $A_1, \ldots, A_n$ es cualquier colección finita de eventos definidos sobre un mismo espacio muestral, entonces la unión de estos eventos denotado por

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \text{, es definido por}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega \,/\, \omega \in A_i \text{ para algún } i = 1; 2; \ldots; n\}$$

Definición 13.- (Intersección de una familia finita de eventos) Si $A_1, \ldots, A_n$ es cualquier colección finita de eventos definidos sobre un mismo espacio muestral, entonces la intersección de estos eventos denotado por

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

es el evento que ocurre si y solamente si todos los eventos A_i ocurren simultáneamente, $\forall\, i = 1; \ldots; n$

En símbolos, se tiene

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega / \ \omega \in A_i \text{ , para todo } i = 1; 2; \ldots; n\}$$

Definición 14.- (Unión e intersección de una familia infinita de eventos) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ es cualquier colección infinita (numerable) de eventos definidos sobre un mismo espacio muestral, entonces se tiene

i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si al menos uno de los eventos A_i ocurre. En símbolos, se tiene

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega / \ \omega \in A_i \text{ , para algún } i = 1; 2; \ldots\}$$

ii) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si todos los eventos ocurren simultáneamente. En símbolos, se tiene

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega / \ \omega \in A_i \text{ , para todo } i = 1; 2; \ldots\}$$

Teorema 1.- (Leyes de Morgan) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es cualquier colección infinita de eventos definidos sobre un mismo espacio muestral, entonces

i) $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^C$

ii) $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C$

Demostración.- (Ejercicio para el lector).

5.4.3 Álgebra de Eventos

Definición 15.- Sea Ω un espacio muestral asociado con un cierto experimento aleatorio. Sea $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \,/\, A \text{ es evento}\}$ una clase de subconjuntos de Ω. Se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de eventos (subconjuntos de Ω) si:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$
2) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^C \in \mathcal{A}$ (esto es, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la operación de complemento).
3) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ es cerrado bajo la operación de unión).

Observación 1.- Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω. Entonces, se tiene

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ y $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$. Así, un álgebra de eventos es cerrado para un número finito de operaciones de $\cup$ y $\cap$.

Ejemplo 16.- Sea Ω un espacio muestral asociado con un cierto experimento aleatorio. Son ejemplos de álgebra de subconjuntos de Ω, los siguientes conjuntos

a) $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$

b) $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, para algún subconjunto $A \subset \Omega$

Ejemplo 17.- Considere el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado que tiene 3 caras rojas y 3 caras blancas. El espacio muestral asociado a este experimento es

$$\Omega = \{R, B\}, \text{ donde } R = \text{cara roja}, \ B = \text{cara blanca}$$

Sea $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{R\}, \{B\}, \{R, B\}\}$ una familia de subconjuntos de Ω.

Sean $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{R\}$, $A_3 = \{B\}$, $A_4 = \{R, B\} = \Omega$.

Se observa que $\mathcal{A}$ tiene las propiedades siguientes:

1) $A_4 = \Omega = \{R, B\} \in \mathcal{A}$

2) Si $A_i \in \mathcal{A}$, entonces $A_i^c \in \mathcal{A}$, $\forall i = 1; 2; 3; 4$

3) Si $A_i, A_j \in \mathcal{A}$, entonces $A_i \cup A_j \in \mathcal{A}$, $\forall i, j = 1; 2; 3; 4$

Por tanto, $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de Ω.

Definición 16.- Se dice que la clase de subconjuntos del espacio muestral Ω que se denota por $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \,/\, A \text{ es evento}\}$ es un σ-álgebra de eventos (subconjuntos de Ω) si

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$

iii) Si $A_n \in \mathcal{A}$, para $n = 1, 2, \ldots$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Observación 2.- Un σ-álgebra es siempre un álgebra, pues si $A, B \in \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra, entonces por iii) se cumple

$$A \cup B = A \cup B \cup B \cup \ldots \in \mathcal{A}$$

Teorema 2.- Sea $\mathcal{A}$ un σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Demostración:

Para $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{A}$, se tiene que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (por ser $\mathcal{A}$ σ – álgebra).

Entonces por ii), se obtiene

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c \in \mathcal{A}$$

Ejemplo 18.- Considere el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda 2 veces y observar la secuencia de caras y sellos.

El espacio muestral asociado a este experimento es $\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$.

Son σ-álgebra de subconjuntos de Ω las siguientes clases de subconjuntos de Ω:

a) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$

b) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{cc, cs\}, \{sc, ss\}\}$

c) $\mathcal{A} = P(\Omega) = \left\{\begin{array}{c} \emptyset, \Omega, \{cc\}, \{cs\}, \{ss\}, \{cc, ss\}, \{cc, sc\}, \{cc, ss\}, \{sc\} \\ \{cs, sc\}, \{cs, ss\}, \{sc, ss\}, \{cc, cs, sc\}, \{cc, cs, ss\} \\ \{cs, sc, ss\}, \{cc, sc, ss\} \end{array}\right\}$

A este conjunto se le llama conjunto de partes de Ω. Esta clase $P(\Omega)$ tiene $2^4 = 16$ elementos (subconjuntos), es decir, hay 16 eventos aleatorios asociados a este experimento. En general, si Ω es un espacio muestral finito de n elementos, entonces $P(\Omega)$ tiene 2^n eventos aleatorios.

EJERCICIOS

1. Cuatro profesores de la Universidad de Lima se distribuyen al azar en 4 oficinas numeradas con 1; 2; 3 y 4. Si los 4 profesores pueden estar en la misma oficina, describa el espacio muestral Ω.

2. Lance una moneda y un dado.
   a) Construya el espacio muestral asociado a este experimento.
   R. $\Omega = \{(c;1),(c;2),(c;3),(c;4),(c;5),(c;6),(s;1),(s;2),(s;3),(s;4),(s;5),(s;6)\}$
   b) Liste los elementos de los eventos:
   A: Sale sello en la moneda y un número par en el dado.
   B: Sale cara en la moneda y un número impar en el dado.
   C: El número en el dado es múltiplo de 3.
   R. $C = \{(c;3),(s;3),(c;6),(s;6)\}$
   c) Liste los elementos de los eventos:
   i) $\overline{B}$ ii) $A \cup B$ iii) $B \cap C$ iv) $\overline{A \cup B}$
   d) ¿Cuál de los eventos A, B y C son mutuamente excluyentes?

3. Determine si los siguientes experimentos son aleatorios o no, y en caso sean aleatorios, describa el espacio muestral asociado a cada experimento.
   a) Se arroja 3 veces una moneda.
   b) Se arrojan 3 monedas.
   c) Se retira una bola de una urna que contiene 5 bolas negras idénticas y 7 blancas también idénticas.
   d) Un jugador de baloncesto tira un tiro libre.
   e) Se saca una carta de baraja de 52 cartas.
   f) Elegimos un arquitecto que vive en la ciudad para construir nuestra casa.
   g) La Universidad de San Marcos elige un rector.
   h) El Perú elige sus congresistas.

4. Una moneda es lanzada 4 veces y el resultado es registrado para cada lanzamiento.
   a) Liste los elementos del espacio muestral asociado a este experimento.
   b) Sea el evento A: en los 4 lanzamientos se obtienen 3 caras. Liste los elementos del evento A.

5. Los pacientes que llegan al hospital Edgardo Rebagliati pueden seleccionar cualquiera de los 3 consultorios médicos para su atención. Suponga que los médicos son asignados aleatoriamente a los consultorios y, por tanto, los

pacientes no tienen preferencia especial por ninguno de los consultorios. Tres pacientes llegan al hospital y se registra el consultorio que escogen.
   a) Liste los elementos del espacio muestral asociado a este experimento.
   R. El espacio muestral tiene 27 elementos.
   b) Sea el evento A: cada consultorio recibe un paciente. Liste los elementos del evento A. *R.* El evento A tiene 6 elementos.

6. Supongamos que una tarjeta es seleccionada de una caja que contiene 10 tarjetas rojas numeradas del 1 a 10 y 10 tarjetas azules numeradas del 1 a 10. Sean los eventos:
   A: la tarjeta seleccionada está numerada por un número impar.
   B: la tarjeta seleccionada es azul.
   C: la tarjeta seleccionada está numerada por un número menor que 5.
   a) Liste los elementos del espacio muestral asociado a este experimento
   b) Liste los elementos de los eventos A, B y C.

7. Al planificar una familia de 4 niños, una pareja está interesada en los siguientes eventos:
   A: todos del mismo sexo
   B: exactamente un varón
   C: por lo menos dos varones
   Liste los elementos de los eventos A, B y C.

8. Cinco trabajadores, de los cuales 3 pertenecen a un grupo minoritario, se asignan a 5 empleos netamente distintos.
   a) Defina el experimento.
   b) Haga una lista de los elementos del espacio muestral Ω.

9. Un número es seleccionado al azar entre los números 1 al 20. Sean los eventos:
   A: el número elegido es par B: el número elegido es primo
   C: el número elegido es múltiplo de 5
   Liste los elementos de los siguientes eventos: $A \cap B$, $A \cup B$, $A^c \cap C$ y $(A \cup B) \cap C^c$.

10. Se lanza un dado repetidas veces. Si estamos interesados en el número de lanzadas hasta obtener un 3 por primera vez:
   a) Describa el espacio muestral. *R.* $\Omega = \{1;2;3;\ldots\}$
   b) Describa el evento A: obtener un 3 en el experimento.

$R.\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, donde A_i: obtener 3 por primera vez en la i-ésima lanzada.

11. En la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, hay 5 kioscos numerados con 1; 2; 3; 4 y 5). Siete alumnos de la universidad seleccionan al azar, y en forma independiente, un kiosco para hacer sus compras.
    a) Liste los elementos del espacio muestral asociado a este experimento.
    b) Liste los elementos de los siguientes eventos:
    A: todos los alumnos escogen el kiosco N° 1 al N° 4.
    B: dos escogen el kiosco N° 1, tres el kiosco N° 4 y dos el kiosco N° 5.
    C: tres escogen el kiosco N° 3 y los otros diferentes kioscos.

12. Un experimento consiste en tirar dos dados, uno verde y otro rojo, y anotar los resultados.
    a) Liste los elementos del espacio muestral Ω.
    b) Liste los elementos del evento A: la suma de los números es menor que 7.
    c) Liste los elementos del evento B: ocurre 4 en cualquier dado.

13. Un experimento consiste en tirar una moneda y, si sale sello, tirarla una segunda vez. Si sale cara en el primer lanzamiento, se tira una vez un dado.
    a) Liste los elementos del espacio muestral asociado a este experimento.
    b) Liste los elementos del evento A: ocurre un número menor que 3 en el dado.
    c) Liste los elementos del evento B: ocurren dos caras. $R.\ \emptyset$

14. Un experimento consiste en preguntar a 3 electores elegidos al azar si votan por un partido político X.
    a) Liste los elementos del espacio muestral Ω utilizando las letras S para el "sí" y N para el "no".
    b) Liste los elementos del evento A: cuando menos dos de los electores votan por el partido X.
    c) Defina en palabras el evento que tiene por elementos los puntos $\{SSS,\ NSS,\ SSN,\ NSN\}$.

15. Para el puesto de Jefatura de práctica en Cálculo I, se colocan en un mismo expediente los antecedentes de 4 estudiantes: 2 hombres y 2 mujeres, que lo solicitan. Como ahora hay 2 puestos vacantes, el primero, el de Jefe de Práctica, se cubre seleccionando un solicitante al azar. El segundo puesto, el de ayudante-estudiante, también se cubre seleccionando al azar uno de los 3 restantes.

    a) Liste los elementos del espacio muestral Ω asociado a este experimento.
    b) Liste los elementos de los eventos siguientes:
    A: el puesto de jefe de práctica es cubierto por un hombre
    B: uno de los dos puestos es cubierto por una mujer
    C: ningún puesto es cubierto por un hombre
    c) Construya el diagrama de Venn que muestre la relación entre los eventos A, B y C.

16. En una clase de Estadística Aplicada I se selecciona al azar 6 estudiantes, y se clasifican en hombre o mujer.
    a) Liste los elementos del espacio muestral Ω_1 utilizando las letras H para hombre y M para mujer.
    b) Defina un segundo espacio muestral Ω_2 en donde los elementos representen el número de hombres seleccionados.

17. Suponga que 10 tarjetas están numeradas del 1 al 10. De las 10 tarjetas, se retira al azar una cada vez y sin reposición hasta retirar la primera tarjeta numerada con número par. Luego, se cuenta el número de retiradas necesarias. Liste los elementos del espacio muestral asociado a este experimento.

18. Para los eventos del ejercicio 15, liste los elementos de los eventos siguientes:
    a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $(A^c \cap B) \cup C$ d) $(\Omega \cap C)^c$
    e) $A \cap C \cap B^c$ f) $(A \cup B \cup C)^c$ g) $(A \cap B \cap C)^c$

19. Suponga que un número x es seleccionado de la recta real Ω, y sean A, B y C los eventos representados por los siguientes subconjuntos de Ω:
    $A = \{x \in \Omega\ /\ 1 \le x \le 5\}$
    $B = \{x \in \Omega\ /\ 3 < x \le 7\}$
    $C = \{x \in \Omega\ /\ x \le 0\}$
    Describa cada uno de los eventos siguientes como un conjunto de números reales.
    a) $A \cup B$ b) $B \cap C^c$ c) $A^c \cap B^c \cap C^c$ d) $(A \cup B) \cap C$

20. Sean A_j, $j = 1, 2, 3$, subconjuntos arbitrarios de Ω. Determine si cada una de las afirmaciones siguientes es correcta o no.
    i) $(A_1 - A_2) \cup A_2 = A_2$ ii) $(A_1 \cup A_2) - A_1 = A_2$
    iii) $(A_1 \cup A_2) \cap (A_1 - A_2) = \emptyset$
    iv) $(A_1 \cup A_2) \cap (A_2 \cup A_3) \cap (A_3 \cup A_1) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_1)$

21. Sea $\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / -5 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 5 \wedge x;y = \text{enteros}\}$, y sean A_j, $j = 1;2;\ldots;7$, subconjuntos de Ω definidos como sigue

$A_1 = \{(x;y) \in \Omega \ / \ x = y\}$ $\quad A_2 = \{(x;y) \in \Omega \ / \ x = -y\}$

$A_3 = \{(x;y) \in \Omega \ / \ x^2 = y^2\}$ $\quad A_4 = \{(x;y) \in \Omega \ / \ x^2 \le y^2\}$

$A_5 = \{(x;y) \in \Omega \ / \ x^2 + y^2 \le 9\}$ $\quad A_6 = \{(x;y) \in \Omega \ / \ y \le x^2\}$

$A_7 = \{(x;y) \in \Omega \ / \ y^2 \ge x\}$

a) Liste los elementos del conjunto A_j, $j = 1;2;\ldots;7$.

b) Pruebe que

i) $A_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{7} A_j\right) = \bigcup_{j=2}^{7} (A_1 \cap A_j)$ $\quad$ ii) $A_1 \cup \left(\bigcap_{j=2}^{7} A_j\right) = \bigcap_{j=2}^{7} (A_1 \cup A_j)$

iii) $\left(\bigcup_{j=1}^{7} A_j\right)^C = \bigcap_{j=1}^{7} A_j^C$ $\quad$ iv) $\left(\bigcap_{j=1}^{7} A_j\right)^C = \bigcup_{j=1}^{7} A_j^C$

listando los elementos de cada uno de los 8 conjuntos que aparecen en cada lado de las relaciones (i) – (iv).

22. Sea Ω un conjunto no vacío. Demuestre que: Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son σ-álgebras de subconjuntos de Ω, entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es también σ-álgebra.

23. Sea $\Omega = \{5;6;7;8\}$ y sea $\mathcal{A}$ una clase de subconjuntos de Ω definido como sigue

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{5;6\}, \{5;7\}, \{5;8\}, \{6;7\}, \{6;8\}, \{5;6;7\}, \{5;7;8\}, \{6;7;8\}, \Omega\}$

Determine si $\mathcal{A}$ es un álgebra o no.

24. Sea Ω un espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ una sucesión infinita de eventos.

Para $n = 1;2;\ldots$; sean $B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ y $C_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$.

a) Pruebe que $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$ y $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$.

b) Pruebe que un resultado de Ω pertenece al evento $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ si y solamente si pertenece a un infinito número de eventos $A_1, A_2, \ldots$

5.5 PROBABILIDAD DE UN EVENTO

Sea Ω un espacio muestral asociado con un cierto experimento aleatorio y sea $\mathcal{A}$ un σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Definición 17.- Una medida de probabilidad P es una función

$$\begin{array}{ccc} P: \mathcal{A} & \longrightarrow & [0;1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & P(A) \end{array}$$

que asigna a cada evento $A \in \mathcal{A}$ un número $P(A)$, llamado probabilidad del evento A, tal que satisface los 3 axiomas siguientes:

Axioma 1.- $0 \le P(A) \le 1$, para cualquier evento $A \in \mathcal{A}$

Axioma 2.- $P(\Omega) = 1$

Axioma 3.- (Aditividad finita) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ son eventos disjuntos 2 a 2 (mutuamente excluyentes), entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Una función de probabilidad P que satisface estos tres axiomas 1; 2 y 3 se denomina probabilidad finitamente aditiva.

Observación 3.- Una consecuencia inmediata del axioma 3 es que si A y B son eventos mutuamente excluyentes en Ω, entonces se tiene

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Observación 4.- En teorías más avanzadas de probabilidad, es matemáticamente más conveniente usar en vez del axioma 3 el axioma siguiente:

Axioma 3'.- (σ-aditividad). Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ son eventos disjuntos 2 a 2 (mutuamente excluyentes), entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Observación 5.- Dado un cierto evento $A \in \mathcal{A}$, esto es, un evento perteneciente al σ-álgebra de eventos de un experimento aleatorio, la frecuencia absoluta del evento A es el número de veces que ocurre este evento en una serie de n repeticiones similares del experimento, y se denota por f_A.

La frecuencia relativa del evento A es dada por

$$h_A = \frac{f_A}{n}$$

Al recordar las propiedades de la frecuencia relativa, se tiene

i) $0 \leq h_A \leq 1$

ii) $h_\Omega = \frac{f_\Omega}{n} = \frac{n}{n} = 1$

iii) $h_{A \cup B} = h_A + h_B$, donde A y B són eventos mutuamente excluyentes.

Entonces podemos decir que los axiomas que definen la probabilidad de un evento son producto de una motivación puramente realista al considerar la probabilidad de un evento como una abstracción de la frecuencia relativa del mismo en una serie de repeticiones del experimento.

Por ejemplo, el primer axioma establece que la probabilidad de cualquier evento debe ser mayor o igual a cero, al igual que ocurre con la frecuencia relativa de un evento.

El segundo axioma establece que la probabilidad del evento seguro es uno, al igual que ocurre con la frecuencia relativa del evento seguro.

Por último, el tercer axioma establece que para eventos disjuntos la probabilidad del evento unión es la suma de las probabilidades de cada uno de los eventos, al igual que ocurre con la frecuencia relativa.

5.5.1 Propiedades de la Probabilidad de Eventos

Teorema 3.- Si $\emptyset$ es el evento imposible, entonces $P(\emptyset) = 0$.

Demostración: Para un evento cualquiera A, se tiene

i) A y $\emptyset$ son eventos disjuntos, pues $A \cap \emptyset = \emptyset$.

ii) $A = A \cup \emptyset$

Luego, por el axioma 3 tenemos:

$P(A) = P(A) + P(\emptyset)$, de donde se obtiene que $P(\emptyset) = 0$

Teorema 4.- Si A^C es el evento complementario de A, entonces se cumple:

$$P(A^C) = 1 - P(A) \text{ ó } P(A) = 1 - P(A^C)$$

Demostración: Se tiene

i) $\Omega = A \cup A^C$ (Fig. 5.9)

ii) $A \cap A^C = \emptyset$

Entonces, por el axioma 3, se tiene

$P(\Omega) = P(A) + P(A^C)$

$1 = P(A) + P(A^C)$ (por axioma 2)

Luego,

$P(A^C) = 1 - P(A)$ ó $P(A) = 1 - P(A^C)$

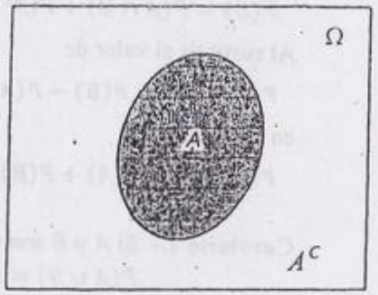


Fig. 5.9

Teorema 5.- (P **es una función no creciente**). Si A y B son dos eventos tales que $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Demostración: Se tiene

i) $B = A \cup B \cap A^C$ (Fig. 5.10)

ii) $A \cap (B \cap A^C) = \emptyset$

Luego, por el axioma 3, se tiene

$P(B) = P(A) + P(B \cap A^C)$

De donde se obtiene

$P(B \cap A^C) = P(B) - P(A) \geq 0$

(axioma 1)

Por tanto, $P(A) \leq P(B)$.

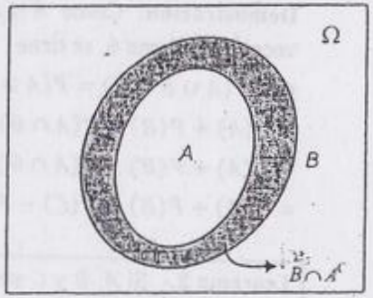


Fig. 5.10

Teorema 6.- Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración

De la figura 5.11, se tiene

i) $A \cup B = A \cup (A^C \cap B)$ y

$A \cap (A^C \cap B) = \emptyset$

ii) $B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$ y

$(A \cap B) \cap (A^C \cap B) = \emptyset$

Entonces, por el axioma 3 se tiene

$P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B)$ ... (1)

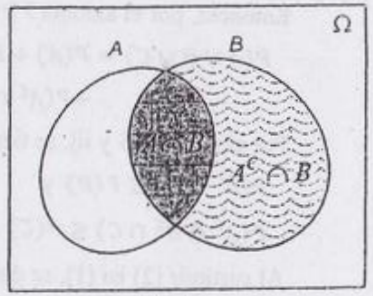


Fig. 5.11

$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$ ... (2)

Al sustituir el valor de

$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

en (1), resulta

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Corolario 1.- Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Teorema 7.- Si A, B y C son tres eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(C \cap B) + P(A \cap B \cap C)$$

Demostración: Como $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$, entonces al aplicar repetidas veces el teorema 6, se tiene

$p = P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - \{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)\}$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Teorema 8.- Si A, B y C son 3 eventos cualquiera, entonces

$$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

Demostración: De la figura 5.12, se tiene

i) $A \cup B \cup C = A \cup (A^C \cap B) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$

ii) $A^C \cap B \subset B$ y $A^C \cap B^C \cap C \subset C$

Entonces, por el axioma 3 y i), se tiene

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^C \cap B) + P(A^C \cap B^C \cap C)$ ... (1)

Por el teorema 5 y ii), se tiene:

$P(A^C \cap B) \leq P(B)$ y

$P(A^C \cap B^C \cap C) \leq P(C)$ ... (2)

Al sustituir (2) en (1), se obtiene

$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$

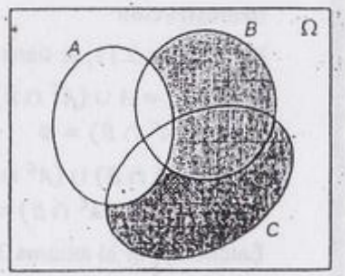


Fig. 5.12

En general, se tiene el siguiente teorema

Teorema 9.- Si $A_1, \ldots, A_n$ son n eventos cualesquiera, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Demostración: (Ejercicio para el lector)

Sugerencia: Considerar

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup (A_1^C \cap A_2) \cup \ldots \cup (A_1^C \cap \ldots \cap A_{n-1}^C \cap A_n)$$

Teorema 10.- (Continuidad de Probabilidad) Para toda sucesión de eventos $\{A_n\}$, $n \geq 1$, para el cual $\lim_{n \to +\infty} A_n = A$, entonces

$$\lim_{n \to +\infty} P[A_n] = P\left[\lim_{n \to +\infty} A_n\right] = P(A)$$

Definición 18.- (Espacio de probabilidad) Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, donde

i) Ω es un espacio muestral no vacío.

ii) $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

iii) P es una función de probabilidad con dominio $\mathcal{A}$.

El término de espacio de probabilidad convencionalmente se utiliza para suponer la existencia de los 3 componentes.

5.5.2 Espacios muestrales finitos equiprobables

Sea Ω un espacio muestral finito, esto es, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Definición 19.- Se dice que un espacio de probabilidad $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ es equiprobable o uniforme si la función de probabilidad asigna igual probabilidad a cada uno de sus eventos simples, esto es

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i = 1; 2; \ldots; n \qquad (*)$$

Luego, si A es un evento que contiene r eventos simples de Ω, es decir

$A = \{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$; entonces

$P(A) = \dfrac{r}{n}$ (de axioma 3 y $*$)

Esta manera de calcular la probabilidad del evento A es frecuentemente enunciada de la siguiente manera

$$P(A) = \frac{\text{número de maneras en que el experimento ocurre favorable a } A}{\text{número total de maneras en que el experimento puede ocurrir}}$$

ó

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos del evento } A}{\text{número de elementos de } \Omega} \quad (**)$$

Observación 6.- La expresión de $P(A)$ dada en (**) es sólo aplicable cuando todos los eventos simples del espacio muestral finito Ω son igualmente probables. Indudablemente, el espacio equiprobable no es adecuado para describir todos los experimentos aleatorios finitos, como se puede mostrar en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 19.- En el Hipódromo de Monterrico, 4 caballos A, B, C y D compiten en una carrera. A tiene 2 veces más probabilidad de ganar que B, B tiene 2 veces más probabilidad de ganar que C y C tiene 2 veces más probabilidad de ganar que D.

a) ¿Cuáles son las probabilidades de victoria de cada uno de los caballos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que B ó C gane?

Solución

El espacio muestral asociado a este experimento es

$\Omega = \{\text{gana } A, \text{gana } B, \text{gana } C, \text{gana } D\}$

Es claro que para describir este experimento no se usa el modelo equiprobable..

Sean los eventos: ω_1: gana el caballo A.
ω_2: gana el caballo B
ω_3: gana el caballo C
ω_4: gana el caballo D

a) Al suponer que $P(\omega_4) = p$, se tiene

i) $P(\omega_3) = 2P(\omega_4) = 2p$, $P(\omega_2) = 2P(\omega_3) = 4p$ y $P(\omega_1) = 2P(\omega_2) = 8p$

ii) $\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 = \Omega$ y $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1; 2; 3; 4$

Luego, al aplicar los axiomas 2 y 3 se tiene

$P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4) = P(\Omega) = 1$

$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$

$8p + 4p + 2p + p = 1$

De donde se obtiene $p = \frac{1}{15}$

Por tanto, las probabilidades de los eventos simples son

$$P(\omega_1) = \frac{8}{15}\ ,\ P(\omega_2) = \frac{4}{15}\ ,\ P(\omega_3) = \frac{2}{15}\ ,\ P(\omega_4) = \frac{1}{15}$$

b) En este caso , se tiene

$$P(\omega_2 \cup \omega_3) = P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15}$$

Ejemplo 20.- En un almacén hay 12 artículos, de los cuales 4 son defectuosos. Si se extraen 2 artículos, calcule la probabilidad de que

a) ambos artículos son defectuosos.

b) ambos artículos no son defectuosos.

c) por lo menos uno es defectuoso.

Solución

El espacio muestral asociado a este experimento es

$\Omega = \{(a_1; a_2) \,/\, a_i = \text{artículo defectuoso o no defectuoso}\,,\ i = 1, 2\}$

El número total de pares de artículos extraídos de 12 artículos es igual a $\binom{12}{2} = 66$. Esto indica que el espacio muestral tiene 66 elementos simples.

a) Sea el evento A: los 2 artículos seleccionados son defectuosos.

El número total de maneras de obtener 2 artículos defectuosos de un total de 4 es $\binom{4}{2} = 6$. Luego, A tiene 6 elementos.

Por tanto, $P(A) = \dfrac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \dfrac{6}{66} = \dfrac{1}{11}$.

b) Sea el evento B: los dos artículos seleccionados no son defectuosos.

El número de maneras de obtener 2 artículos no defectuosos de un total de 8 es $\binom{8}{2} = 28$. Luego, B tiene 28 elementos.

Entonces $P(B) = \dfrac{28}{66} = \dfrac{14}{33}$.

c) Sea el evento C: por lo menos uno de los dos artículos seleccionados es defectuoso. Luego, C es el evento complementario de B, esto es, $C = B^C$.

Por tanto, $P(C) = P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{14}{33} = \dfrac{19}{33}$.

Ejemplo 21.- Considere el problema de seleccionar 2 candidatos para un cierto empleo de un grupo de 5 personas. Supongamos que los candidatos están clasificados de acuerdo a su competencia como primero en competencia (1), segundo en competencia (2), tercero en competencia (3), cuarto en competencia (4) y quinto en competencia (5). Estas categorías son de hecho desconocidas por el empleador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el empleador seleccione al mejor y uno de los dos peores candidatos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el empleador seleccione uno de los dos mejores candidatos?

Solución

El espacio muestral asociado a este experimento es el conjunto de pares ordenados en los que la primera componente denota al primer candidato seleccionado y la segunda componente al segundo candidato, esto es,

$$\Omega = \{(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(2;3),(2;4),(2;5),(3;4),(3;5),(4;5)\}$$

a) Sea el evento A: "el empleador selecciona el mejor y uno de los dos peores candidatos". Luego, los eventos simples favorables a A son:

$$A = \{(1;4),(1;5)\}$$

Luego, $P(A) = \dfrac{\text{números de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

b) Sea el evento B: "el empleador selecciona al menos uno de los 2 mejores candidatos".

Entonces, los eventos simples favorables a B son:

$$B = \{(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(2;3),(2;4),(2;5)\}$$

Por tanto, $P(B) = \dfrac{\text{números de elementos de } B}{\text{número de elementos de } \Omega} = \dfrac{7}{10}$.

Ejemplo 22.- Un punto del diagrama (Fig. 5.13) es seleccionado al azar. Calcule la probabilidad de los eventos siguientes:

a) A: la abscisa del punto es 2.

b) B: la ordenada es mayor que la abscisa.

c) C: "la suma de las coordenadas del punto no exceden a 4".

d) D: "la abscisa y la ordenada del punto son iguales".

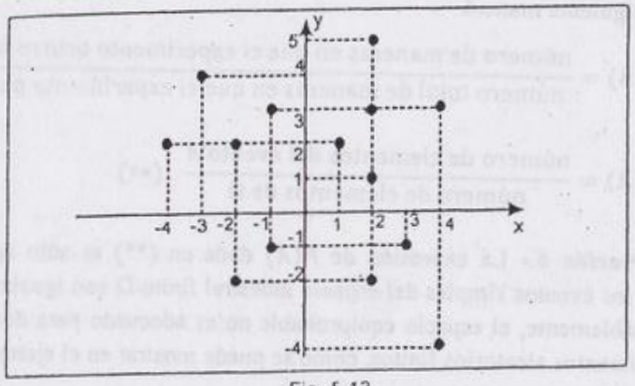


Fig. 5.13

Solución

Los elementos del espacio muestral asociados a este experimento y de los eventos son:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix}(-4;2),(-3;4),(-2;2),(-2;-2),(-1;3),(-1;-1),(1;2),\\(2;1),(2;3),(2;5),(2;-2),(3;-1),(4;3),(4;-4)\end{matrix}\right\}$$

$$A = \{(2;1),(2;3),(2;5),(2;-2)\}$$

$$B = \{(-4;2),(-3;4),(-2;2),(-1;3),(1;2),(2;3),(2;5)\}$$

$$C = \{(-4;2),(-3;4),(-2;2),(-2;-2),(-1;3),(-1;-1),(1;2),(2;1),(2;-2),(3;-1),(4;-4)\}$$

$$D = \{(-2;-2),(-1;-1)\}$$

Al hacer un simple conteo, se obtiene

a) $P(A) = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7}$ b) $P(B) = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$

c) $P(C) = \dfrac{11}{14}$ d) $P(D) = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}$

Ejemplo 23.- La probabilidad de que un estudiante apruebe Matemática I es 2/3, y la probabilidad de que apruebe Física I es 4/9. Si la probabilidad de aprobar al menos una de estas materias es 4/5, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe ambos cursos?

Solución

Sean los eventos A: el estudiante aprueba Matemática I

B: el estudiante aprueba Física I

Entonces la probabilidad de aprobar ambos cursos se obtiene al aplicar el teorema 6, como sigue

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{5} = \frac{14}{45}$$

Ejemplo 24.- Un experimento consiste en lanzar 2 dados y observar los números que aparecen en las caras superiores. Calcule la probabilidad de

a) Obtener suma igual a 5 b) Obtener suma divisible por 3

Solución

El espacio muestral asociado a este experimento está formado por el conjunto de pares ordenados en los que la primera componente es el resultado del primer dado y la segunda componente es el resultado del segundo dado, esto es

$$\Omega = \left\{\begin{array}{l}(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),\\(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6),\\(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6),\\(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6),\\(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6),\\(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)\end{array}\right\}$$

Sean los eventos A: obtener suma igual a 5

B: obtener suma divisible por 3

Entonces de Ω, resulta

$A = \{(4;1),(3;2),(2;3),(1;4)\}$

$B = \{(1;2),(2;1),(4;2),(2;4),(3;3),(5;1),(1;5),(6;3),(3;6),(6;6),(4;5),(5;4)\}$

Luego, por un simple conteo se obtiene

a) $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ b) $P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Ejemplo 25.- Ocho parejas de casados se encuentran en un salón

I) Si se escogen 2 personas al azar, halle la probabilidad de que

a) sean esposos

b) una sea mujer y el otro hombre

II) Si se escogen 4 personas al azar, halle la probabilidad de que

c) se escojan 2 parejas de casados

d) provengan de parejas diferentes

Solución

I) Podemos escoger una pareja de 16 personas de $C_2^{16} = \frac{16!}{2!\,14!} = 120$

maneras. Así, el número de elementos del espacio muestral asociado a este experimento es 120.

a) Sea el evento A: pareja seleccionada son esposos. Como hay 8 parejas de casados, entonces el número de elementos del evento A es 8. Luego

$$P(A) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15} = 0{,}067$$

b) Sea el evento B: pareja seleccionada está compuesta por una mujer y un hombre. Como hay 8 maneras de escoger una mujer y 8 maneras de escoger un hombre, entonces el número de elementos de B es $8 \times 8 = 64$. Luego

$$P(B) = \frac{64}{120} = 0{,}533$$

II) Podemos escoger 4 personas de 16 de $C_4^{16} = \frac{16!}{4!\,12!} = 1820$ maneras.

Entonces el espacio muestral asociado a este experimento tiene 1820 eventos simples.

c) Sea el evento C: las 2 parejas seleccionadas son casados. Como hay 8 parejas de casados, entonces el número de elementos del evento C es

$$C_2^8 = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$$

Luego, $P(C) = \frac{28}{1820} = 0{,}0154$.

d) Sea el evento D: las 4 personas seleccionadas provienen de 4 parejas diferentes.

Seleccionar 4 personas que provienen de 4 parejas diferentes consiste en elegir 4 parejas distintas de las 8 y luego seleccionar una persona de cada una de las 4 parejas seleccionadas. Así, el número total de maneras de escoger 4 personas que provienen de 4 parejas diferentes es

$$C_4^8 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1120$$

esto es, el número de elementos del evento D es 1120. Luego, se obtiene

$$P(D) = \frac{1120}{1820} = 0{,}615$$

Ejemplo 26.- Tres alumnos A, B y C se matriculan al azar en el curso de Matemática II, que tiene 4 secciones numeradas con 401; 402; 403 y 404, pudiendo matricularse los 3 alumnos en una misma sección.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos se matricule en la sección 404?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos se matricule en secciones cualesquiera?

Solución

Como los tres alumnos se pueden matricular en la misma sección, entonces el alumno A puede matricularse en cualquiera de las 4 secciones, de 4 formas diferentes; de manera similar, el alumno B puede matricularse en cualquiera de las 4 secciones, de 4 formas distintas; y el alumno C también puede matricularse en cualquiera de las 4 secciones, igualmente de 4 formas distintas. Luego, el número total de maneras en la que los 3 alumnos pueden matricularse en las 4 secciones es

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

Así, el número de elementos del espacio muestral asociado a este experimento es 64.

a) Sea el evento A: ninguno de los 3 alumnos se matriculan en la sección 404. Decir que ninguno de los 3 alumnos se matriculan en la sección 404 es equivalente a que los 3 alumnos se matriculan en las secciones restantes, y esto se puede hacer de $3^3 = 27$ maneras. Luego

$$P(A) = \frac{27}{64} = 0{,}422$$

b) Sea el evento B: ninguno de los 3 alumnos se matriculan en 2 secciones cualesquiera.

Decir que los alumnos no se matriculan en 2 secciones cualesquiera es equivalente a que ellos se matriculan en las 2 secciones restantes que se puede elegir de $C_2^4 = 6$ maneras, y después de haber elegido estas secciones, el alumno A puede matricularse en cualquiera de las 2 secciones elegidas, de 2 maneras distintas; similarmente el alumno B puede matricularse de 2 maneras distintas; y lo mismo el alumno C puede matricularse de 2 maneras distintas. Luego, el número total de maneras en las que los 3 alumnos pueden matricularse en las 2 secciones elegidas es

$$6 \times 2^3 = 48$$

Por tanto, $P(B) = \dfrac{48}{64} = 0{,}75$.

Ejemplo 27.- En la Universidad de Lima se publican 3 revistas: A, B y C. El 30% de los estudiantes lee A, el 20% lee B, el 15% lee C, el 12% lee A y B, el 9% A y C, el 6% B y C, y finalmente 3% leen A, B y C.

Se pide:

a) Porcentaje de estudiantes que leen al menos una de las 3 revistas.

b) Porcentaje de estudiantes que leen B ó C, pero no A.

c) Porcentaje de estudiantes que leen A, o bien, no leen B ni C.

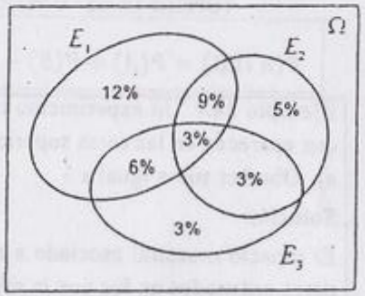


Fig 5 14

Solución

El espacio muestral asociado a este experimentos es

Ω = {estudiantes de la Universidad de Lima}

Sean los eventos:

E_1: un estudiante lee la revista A

E_2: un estudiante lee la revista B

E_3: un estudiante lee la revista C

a) La probabilidad de que los estudiantes lean por lo menos una de las 3 revistas corresponde a calcular la probabilidad del evento $E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Así, se tiene

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - \\ &\quad - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= 0{,}30 + 0{,}20 + 0{,}15 - 0{,}12 - 0{,}09 - 0{,}06 + 0{,}03 \\ &= 0{,}41 \end{aligned}$$

Por tanto, 41% de los estudiantes leen por lo menos una de las 3 revistas.

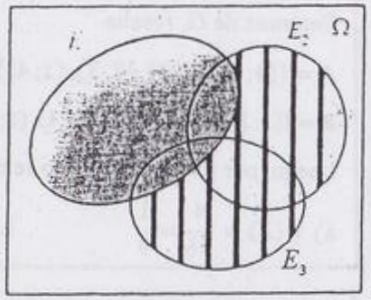


Fig. 5.15

b) El evento de que los estudiantes leen B ó C, pero no A corresponde a

$E_1^c \cap (E_2 \cup E_3)$

De la figura 5.15, se tiene

i) $E_1 \cup E_2 \cup E_3$

$= E_1 \cup [E_1^c \cap (E_2 \cup E_3)]$

ii) $E_1 \cap [E_1^c \cap (E_2 \cup E_3)] = \emptyset$

Entonces al aplicar el axioma 3, resulta

$P[E_1 \cup E_2 \cup E_3]$

$= P(E_1) + P[E_1^c \cap (E_2 \cup E_3)]$

de donde se obtiene

$P[E_1^c \cap (E_2 \cup E_3)] = 0{,}41 - 0{,}3 = 0{,}11$

Por tanto, 11% de estudiantes leen las revistas B ó C, pero no A.

c) El evento de que los estudiantes leen A o no leen B ni C corresponde al evento

$E_1 \cup (E_2^c \cap E_3^c)$

Luego, se tiene

$$P[E_1 \cup (E_2^c \cap E_3^c)] = 1 - P[(E_1 \cup (E_2^c \cap E_3^c))^c]$$
$$= 1 - P[E_1^c \cap (E_2 \cup E_3)]$$
$$= 1 - 0{,}11 = 0{,}89$$

Por tanto, 89% de estudiantes leen A o no leen B ni C.

Ejemplo 28.- Un hombre tiene 20 llaves, de las cuales exactamente una abre la cerradura. Él prueba las llaves una cada vez, escogiendo al azar en cada tentativa una de las llaves que no ha sido probada. Determine la probabilidad de que la llave que abre la cerradura sea escogida en la sexta tentativa.

Solución

Sea el evento A: el hombre selecciona la llave correcta en la sexta tentativa.

Entonces se tiene

1era llave no abre la cerradura
2da llave no abre
3era llave no abre
4ta llave no abre
5ta llave no abre
6ta llave abre

$$P(A) = \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{20}$$

Ejemplo 29.- Sebastián tiene 3 billetes de una lotería que vendió 1000 billetes, de los cuales 5 son premiados ¿Cuál es la probabilidad de que Sebastián gane por lo menos un premio?

Solución

El experimento consiste en seleccionar 5 billetes premiados de 1000. Entonces el número de elementos del espacio muestral asociado a este experimento es

$$C_5^{1000} = 8{,}2502912 \times 10^{12}$$

Sean los eventos A: Sebastián gana por lo menos un premio

B: Sebastián no gana ningún premio

Si Sebastián no gana ningún premio, entonces los 5 billetes premiados se escogerán de $1000 - 3 = 997$ billetes, y esto se puede hacer de

$$C_5^{997} = 8{,}1270318 \times 10^{12} \text{ maneras}$$

Luego, $P(A^c) = \dfrac{C_5^{997}}{C_5^{1000}} = 0{,}985$

Por tanto, $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0{,}985 = 0{,}015$.

Ejemplo 30.- Si los eventos A_j, $j = 1; 2; 3$, son tales que $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ y

$$P(A_1) = \frac{1}{4}, \; P(A_2) = \frac{5}{12}, \; P(A_3) = \frac{7}{12}$$

Calcule la probabilidad de los siguientes eventos

i) $A_1^c \cap A_2$ ii) $A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c$

iii) $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$

Solución

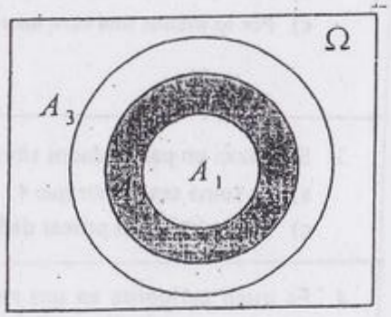


Fig. 5.16

i) De la figura 5.16, se tiene

a) $A_2 = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2)$ y

b) $A_1 \cap (A_1^c \cap A_2) = \emptyset$

Entonces al aplicar el axioma 3, se tiene

$$P(A_2) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2)$$

De donde, se obtiene

$$P(A_1^c \cap A_2) = P(A_2) - P(A_1)$$
$$= \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

ii) Se tiene

$$A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c = (A_1^c \cup A_2 \cup A_3)^c = (A_1^c \cup A_3)^c \quad (\text{pues } A_2 \subset A_3)$$
$$= A_1 \cap A_3^c = \emptyset \quad (\text{pues } A_1 \subset A_3)$$

Luego, $P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(\emptyset) = 0$.

iii) Se tiene

$$A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c = (A_3)^c \quad (\text{pues } A_1 \subset A_3 \text{ y } A_2 \subset A_3)$$

Luego, $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_3^c) = 1 - P(A_3) = 1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$.

EJERCICIOS

1. Si $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, y si A y B son eventos mutuamente excluyentes, calcule:

   a) $P(A^C)$ b) $P(A \cap B)$ c) $P(A \cup B)$ d) $P(A^C \cap B^C)$

   $R.\ \frac{1}{2}$ $R.\ 0$ $R.\ \frac{3}{4}$ $R.\ \frac{1}{4}$

2. Determine la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes.
   a) Un número par aparece en el lanzamiento de un dado. $R.$ 1/2
   b) Por lo menos una cara aparece en el lanzamiento de 3 monedas. $R.$ 7/8
   c) Por lo menos una cara aparece en el lanzamiento de n monedas. $R.\ \frac{2^n - 1}{2^n}$

3. Se lanzan un par de dados simultáneamente. Encuentre la probabilidad de que:
   a) La suma sea menor que 4. $R.$ 1/12 b) La suma sea 9. $R.$ 1/9
   c) El resultado del primer dado sea mayor que del segundo. $R.$ 5/12

4. Es usted periodista en una reunión del Jurado Nacional de Elecciones. Hay 302 electores que favorecen a Humala, 191 electores que favorecen a Fujimori y 45 electores que favorecen a Toledo. Se fija usted en un elector que está de pie en el vestíbulo. ¿Cuál es la probabilidad de que favorezca a Fujimori? $R.$ 0,355

5. En una urna son mezcladas diez bolas numeradas del 1 al 10. Dos bolas $(a; b)$ son retiradas sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que $a + b = 10$? $R.$ 4/45

6. Se pintan los números del 1 al 15 sobre 15 bolas idénticas (un número por bola). Si se extrae una de las bolas al azar:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número pintado en él sea divisible por 3? $R.$ 1/5
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número pintado en él sea un cuadrado perfecto? $R.$ 1/5

7. Un lote contiene 10 piezas buenas, 4 con defectos y 2 con defectos graves. Se extraen 2 piezas al azar. Calcule la probabilidad de que:

   a) ambas sean perfectas. $R.$ 3/8
   b) por lo menos una sea perfecta. $R.$ 7/8
   c) ninguna tenga defecto grave. $R.$ 91/120
   d) ninguna sea perfecta. $R.$ 1/8

8. Una bolsa contiene 5 veces más monedas de 5 soles que de un sol. Se extrae una moneda al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una moneda de un sol? $R.$ 1/6

9. Suponga que el 50% de estudiantes graduados en la Universidad de Lima son propietarios de automóviles, mientras que solo lo son el 30% de alumnos de cursos superiores y el 15% de alumnos de cursos inferiores. Si la universidad tiene 30 graduados, 210 alumnos de cursos superiores y 260 de cursos inferiores, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante escogido al azar sea propietario de un automóvil? $R.$ 0,234

10. En una clase hay 5 alumnos de 4to año, 4 del 2do año y 3 del 3er año. ¿Cuál es la probabilidad de que sean sorteados 2 alumnos del 2do año, 3 del 4to año y 2 del 3er año? $R.$ 5/22

11. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 1 \leq x \leq 200\}$, donde $\mathbb{Z}$ = conjunto de números enteros. Suponga que los eventos A, B y C son definidos por
    $A = \{x \in \Omega \,/\, x \text{ es divisible por } 7\}$
    $B = \{x \in \Omega \,/\, x = 3n + 10 \text{ para algún entero positivo } n\}$
    $C = \{x \in \Omega \,/\, x^2 + 1 \leq 375\}$
    Calcule $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.
    $R.\ P(A) = 0{,}14$, $P(B) = 0{,}315$, $P(C) = 0{,}095$

12. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 1 \leq x \leq 2400\}$, y sean los eventos
    $A = \{x \in \Omega \,/\, x \text{ es divisible por } 2\}$
    $B = \{x \in \Omega \,/\, x \text{ es divisible por } 3\}$
    Si se elige un número de Ω al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea un elemento de A o de B? $R.$ 0,8334

13. Sean A, B y C tres eventos disjuntos 2 a 2 y 3 a 3 tales que
    $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}25$ y $P(C) = 0{,}166$
    Calcule las siguientes probabilidades
    a) $P(A^C \cap B^C \cap C^C)$ $R.$ 0,084 b) $P(A^C \cap B^C \cap C)$ $R.$ 0,166
    c) $P(B - A)$ $R.$ 0,25

14. Sea un dado tal que la probabilidad de cada una de las caras es proporcional al número de puntos inscritos en ellas. Halle la probabilidad de obtener con este dado un número par. *R.* 4/7

15. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 1 \leq x \leq 6\,000\}$. Si se elige un elemento de Ω al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 2 o de 3 o de 4 o de 5? *R.* 11/15

16. Considere dos eventos A y B tales que $P(A) = 1/3$ y $P(B) = 1/2$. Determine el valor de $P(B \cap A^c)$ para cada una de las siguientes condiciones:

a) A y B son disjuntos *R.* 1/2 b) $A \subset B$ *R.* 1/6

c) $P(A \cap B) = 1/8$ *R.* 3/8

17. Considere dos eventos A y B tales que $P(A) = 0{,}4$ y $P(B) = 0{,}7$. Determine los posibles valores máximo y mínimo de $P(A \cap B)$ y las condiciones bajo las cuales cada uno de estos valores es alcanzado.

R. 0,4 si $A \subset B$ y 0,1 si $P(A \cup B) = 1$

18. Un punto $(x; y)$ se selecciona del cuadrado Ω que contiene todos los puntos $(x; y)$ tales que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$. Suponga que la probabilidad de que el punto seleccionado pertenezca a cualquier subconjunto específico de Ω es igual al área de dicho subconjunto. Encuentre la probabilidad de que el punto seleccionado pertenezca a los siguientes subconjuntos:

a) Subconjunto de puntos tales que $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$ *R.* $1 - \frac{\pi}{4}$

b) Subconjunto de puntos tales que $\frac{1}{2} < x + y < \frac{3}{2}$ *R.* $\frac{3}{4}$

c) Subconjunto de puntos tales que $y \leq 1 - x^2$ *R.* $\frac{2}{3}$

d) Subconjunto de puntos tales que $x = y$ *R.* 0

19. Si 12 bolas son lanzadas al azar a 20 cajas, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna caja recibirá más de una bola?

R. $\frac{20!}{8!\,20^{12}}$

20. Suponga que 3 corredores del equipo A y 3 corredores del equipo B participan en una competencia de carreras. Si los 6 corredores son de igual habilidad y no hay empates, ¿cuál es la probabilidad de que los 3 corredores del equipo A terminen en primer, segundo y tercer lugar, y que los 3 corredores del equipo B terminen en cuarto, quinto y sexto lugar?

R. $\frac{(3!)^2}{6!}$

21. Suponga que un comité de 12 personas es seleccionado al azar de un grupo de 100 personas. Determine la probabilidad de que 2 personas A y B en particular sean seleccionadas.

R. $\frac{\binom{98}{10}}{\binom{100}{12}}$

22. Una caja contiene 24 focos de luz, de los cuales 4 son defectuosos. Si una persona extrae 10 focos de la caja al azar, y una segunda persona toma el resto de los 14 focos, ¿cuál es la probabilidad de que los 4 focos defectuosos sean obtenidos por la misma persona?

R. $\frac{\binom{20}{6} + \binom{20}{10}}{\binom{24}{10}}$

23. Suponga que una caja de 25 tarjetas contiene 12 tarjetas rojas. Suponga también que las 25 tarjetas son distribuidas al azar a 3 jugadores A, B y C de tal manera que el jugador A reciba 10 tarjetas, el jugador B 8 tarjetas y el jugador C 7 tarjetas. Determine la probabilidad de que el jugador A reciba 6 tarjetas rojas, el jugador B reciba 2 tarjetas rojas y el jugador C reciba 4 tarjetas rojas.

R. $\frac{\frac{12!}{6!\,2!\,4!} \cdot \frac{13!}{4!\,6!\,3!}}{\frac{25!}{10!\,8!\,7!}}$

24. En una cierta ciudad se publican tres diarios A, B y C. Suponga que 60% de las familias de la ciudad lee A, el 40% lee B y el 30% lee C. Suponga también que 20% de las familias de la ciudad lee A y B, el 10% lee A y C, el 20% lee B y C, y el 5% lee A, B y C.

a) ¿Qué porcentaje de familias leen por lo menos uno de los 3 diarios? *R.* 85%

b) ¿Qué porcentaje de familias leen exactamente uno de los 3 diarios?

R. 45%

25. Suponga que n cartas son colocadas al azar en n sobres. y sea q_n la probabilidad de que ninguna carta sea colocada en el sobre correcto. ¿Para cuál de los siguientes 4 valores de n es q_n grande: $n = 10$, $n = 21$, $n = 53$ ó $n = 300$?

R. $n = 10$, $q_n = \frac{1}{n}$

26. Si n cartas son colocadas al azar en n sobres. ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 cartas sean colocadas en el sobre correcto?

R. $\frac{1}{2} q_{n-2}$, donde q_n es definido en el ejercicio 25

27. Tres mujeres compiten por un puesto de secretaria ejecutiva. Las candidatas A y B tienen la misma oportunidad de ganar, pero la candidata C tiene el doble oportunidad que las candidatas A y B. ¿Cuál es la probabilidad de que gane C? ¿Cuál es la probabilidad de que A no gane?

R. $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A^c) = \frac{3}{4}$

28. Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 negras. Dos jugadores A y B retiran las bolas de la urna en forma consecutiva hasta extraer una bola roja. Encuentre la probabilidad de que A seleccione primero la bola roja.

R. $\frac{3}{10} + \frac{7.6.3}{10.9.8} + \frac{7.6.5.4.3}{10.9.8.7.6} + \frac{7.6.5.4.3.2.1}{10.9.8.7.6.5.4} = 0{,}58333$

29. Una urna contiene 3 bolas rojas y 3 negras, mientras que la urna B contiene 4 bolas rojas y 6 negras. Si una bola es extraída aleatoriamente de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las bolas sean del mismo color? *R.* 1/2

30. Dos dados son lanzados n veces en forma sucesiva. Determine la probabilidad de que aparezcan 2 seis al menos una vez.

R. $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$

31. Dadas 20 personas, ¿cuál es la probabilidad de que entre los 12 meses del año hay 4 meses que contienen cada uno 2 cumpleaños y 4 meses que contienen cada uno 3 cumpleaños?

R. $\frac{\binom{12}{4}\binom{8}{4}\frac{20!}{(2!)^4(3!)^4}}{(12)^{20}}$

32. Un grupo de 6 hombres y 6 mujeres es dividido aleatoriamente en 2 grupos de tamaño 6 cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos grupos tengan el mismo número de hombres?

R. $\frac{\binom{6}{3}\binom{6}{3}}{\binom{12}{6}} = 0{,}4329$

33. Suponga que n bolas son distribuidas aleatoriamente en N compartimientos. Encuentre la probabilidad de que m bolas caigan en el primer compartimiento.

R. $\frac{\binom{n}{m}(N-1)^{n-m}}{N^n}$

34. Un closet contiene 10 pares de zapatos. Si 8 zapatos son seleccionados aleatoriamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún par completo en este grupo?

R. $\frac{\binom{10}{8}2^8}{\binom{20}{8}}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un par completo?

R. $\frac{\binom{10}{1}\binom{9}{6}2^6}{\binom{20}{8}}$

35. En una bolsa hay 3 tarros de peras en conserva, 6 de duraznos, 4 de damascos y 2 de ciruelas. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir 3 tarros al azar éstos resulten de la misma fruta? *R.* 0,0549

5.6 PROBABILIDAD CONDICIONAL

A menudo, dos eventos se relacionan de manera tal que la probabilidad de ocurrencia de uno depende de la ocurrencia del otro. Es decir, si se da la ocurrencia de un evento B, se quiere saber la probabilidad de la ocurrencia del otro evento A dado que ha ocurrido B. Para aclarar mejor esta ley que los rige, presentamos el siguiente ejemplo.

Suponga que los estudiantes matriculados en la Unidad de Postgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos son clasificados de acuerdo a su especialidad y sexo, como sigue

	Hombre	Mujeres	Total
Matemática Pura	15	5	20
Investigación Operativa	5	10	15
Estadística	8	12	20
Computación	10	10	20
	38	37	75

Fig. 5.17

Sea el experimento E: escoger al azar un estudiante, y el evento A: "el estudiante escogido es mujer". Entonces, con respecto al espacio muestral Ω = {estudiantes matriculados en la Unidad de Postgrado}, se tiene

$$P(A) = \frac{37}{75} = 0{,}493$$

Sea el evento B: "el estudiante escogido está matriculado en Estadística". Luego, podríamos estar interesados en calcular la probabilidad del evento A condicionado a la ocurrencia del evento B. En símbolos, denotamos por $P(A\,/\,B)$, y se lee: "probabilidad del evento A condicionado a la ocurrencia de B" o "probabilidad de A dado B".

En el ejemplo, dada la información de la ocurrencia de B, el espacio muestral Ω se reduce al subconjunto de estudiantes matriculados en Estadística, esto es, $B = \Omega_B$ = {estudiante de Postgrado matriculado en Estadística}, y se llama "espacio muestral restringido". El número de elementos del espacio muestral restringido es 20 (Fig. 5.17). Así, la probabilidad del evento A en el espacio muestral restringido es

$$P(A\,/\,B) = \frac{12}{20} = 0{,}6$$

Así, la probabilidad condicional se define de la siguiente manera

Definición 20.- Sean A y B dos eventos tales que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de que ocurra el evento A dado que ha ocurrido el evento B es dada por

$$P(A\,/\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observación 7.- La función de probabilidad condicional $P(.\,/\,B)$ satisface los 3 axiomas establecidos para la función $P: \mathcal{A} \to [0;1]$.
Es decir, se cumple

1) $P(A\,/\,B) \geq 0$, para todo evento $A \in \mathcal{A}$

2) $P(\Omega\,/\,B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

3) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ son eventos disjuntos 2 a 2, entonces se tiene

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\,/\,B\right) = \frac{P[(\cup_{i=1}^{n} A_i) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[\cup_{i=1}^{n}(A_i \cap B)]}{P(B)}$$

$$= \frac{1}{P(B)}\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n}\frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i\,/\,B)$$

3') En general, si $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ son eventos mutuamente excluyentes 2 a 2, entonces

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\,/\,B\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i\,/\,B)$$

Observación 8.- Se puede demostrar que los teoremas dados para la función de probabilidad $P(.)$ siguen siendo válidos para la probabilidad condicional. Así, se tiene

i) $P(\emptyset\,/\,B) = 0$ ii) $P(A^c\,/\,B) = 1 - P(A\,/\,B)$

iii) $P[(A \cup C)/B] = P(A\,/\,B) + P(C\,/\,B) - P[(A \cap C)\,/\,B]$

iv) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ son eventos cualesquiera, entonces se tiene

$$P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\,/\,B\right] \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i\,/\,B)$$

Ejemplo 31.- Cierta familia tiene 3 hijos, y se sabe que al menos dos de ellos son niñas. Al suponer que los nacimientos de niños y niñas son igualmente probables, y además que el sexo del hijo mayor no afecta en ningún modo al sexo del hijo menor, calcule la probabilidad de que la familia tenga 3 niñas.

Solución: El espacio muestral asociado a este experimento es

$$\Omega = \{MMM,\ MMH,\ MHM,\ HMM,\ MHH,\ HMH,\ HHM,\ HHH\}$$

donde M = mujer y H = hombre.

Sean los eventos A: la familia tiene 3 niñas

B: la familia por lo menos tiene dos niñas

Luego, los elementos de los eventos A y B son:

$$A = \{MMM\},\ B = \{MMM, MMH, MHM, HMM\},\ A \cap B = \{MMM\}$$

Por tanto, la probabilidad condicional de que la familia tenga 3 niñas dado que tiene por lo menos dos niñas es

$$P(A\ /\ B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 32.- La siguiente tabla presenta la clasificación de 356 estudiantes de la Universidad de Lima, de acuerdo a su especialidad y procedencia.

Especialidad / Procedencia	Ingeniería Industrial	Administración	Economía	Derecho	Total
Limeño (L)	100	40	50	20	210
Provinciano (P_1)	20	60	50	10	140
Extranjero (Q)	5	0	1	0	6
Total	125	100	101	30	356

Sea el experimento E: elegir al azar un estudiante del grupo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante no pertenezca a la Facultad de Ingeniería Industrial y no sea extranjero?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante no pertenezca a la Facultad de Ingeniería Industrial dado que es limeño?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante sea de la Facultad de Economía o de Administración dado que es provinciano?

Solución: Sean los eventos

I: El estudiante elegido pertenece a la facultad de Ing. Industrial

E: El estudiante elegido pertenece a la facultad de Economía

A: El estudiante elegido pertenece a la facultad de de Administración

L: El estudiante elegido es limeño

P_1: El estudiante elegido es provinciano

Q: El estudiante elegido es extranjero

Luego, de acuerdo a la tabla se tiene

$$P(I) = \frac{125}{356},\ P(E) = \frac{101}{356},\ P(A) = \frac{100}{356},\ P(L) = \frac{210}{356}$$

$$P(P_1) = \frac{140}{356},\ P(Q) = \frac{6}{356}$$

Por tanto, las probabilidades pedidas son

a) $P[I^c \cap Q^c] = 1 - P[(I^c \cap Q^c)^c] = 1 - P(I \cup Q)$

$$= 1 - \{P(I) + P(Q) - P(I \cap Q)\}$$

$$= 1 - \left\{\frac{125}{356} + \frac{6}{356} - \frac{5}{356}\right\} = \frac{230}{256} = 0{,}6461$$

b) $P[I^c\ /\ L] = 1 - P[I\ /\ L] = 1 - \dfrac{P(I \cap L)}{P(L)}$

$$= 1 - \frac{\frac{100}{356}}{\frac{210}{356}} = 1 - \frac{100}{210} = \frac{11}{21} = 0{,}524$$

c) $P[(E \cup A)\ /\ P_1] = P(E\ /\ P_1) + P(A\ /\ P_1) - \underbrace{P[E \cap A\ /\ P_1]}_{0}$

$$= \frac{P(E \cap P_1)}{P[P_1]} + \frac{P(A \cap P_1)}{P[P_1]} = \frac{50}{140} + \frac{60}{140} = 0{,}786$$

Ejemplo 33.- Uno de los clubes universitarios femeninos está compuesto por las siguientes asociadas: 15 rubias de ojos azules, 8 rubias de ojos castaños, 9 morenas de ojos azules, 12 morenas de ojos castaños, 4 pelirrojas de ojos azules y 2 pelirrojas de ojos castaños. Suponga que usted ha conseguido una cita con una de las chicas, sin conocerla, y está lloviendo cuando usted se encuentra con ella. Su cabello está completamente cubierto, pero sin embargo sus chispeantes ojos azules le dan la bienvenida. ¿Cuál es la probabilidad de que sea rubia?

Solución

La información contenida en el enunciado del problema se resume como sigue:

Color de ojos \ Cabello	Rubia	Morena	Pelirroja	Total
Ojos azules	15	9	4	28
Ojos castaños	8	12	2	22
Total	23	21	6	50

Sean los eventos A: la chica es rubia

B: la chica es de ojos azules

Luego, se tiene

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{50}}{\frac{28}{50}} = \frac{15}{28} = 0{,}536$$

Ejemplo 34.- Una urna contiene 10 bolas blancas, 5 bolas amarillas y 10 negras. Una bola es extraída al azar de la urna, y luego se observa que no es una bola negra. ¿Cuál es la probabilidad de que sea amarilla?

Solución: Sean los eventos

A: la bola seleccionada es amarilla

B: la bola seleccionada es negra

Luego, se tiene

$$P(A / B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A)}{P(B^c)} = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{1}{3}$$

5.6.1 Regla de Multiplicación

A partir de la definición de la probabilidad condicional, se enuncia el teorema del producto como sigue

Teorema 11.-

i) Sean A y B dos eventos cualesquiera, entonces se tiene

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B / A) = P(B)\,P(A / B)$$

ii) En general, la probabilidad de la intersección de cualquier número de eventos, digamos de k eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, de modo que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1}) > 0$, $\forall\, k = 2; 3; \ldots$, es

$$p = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$
$$= P(A_1)\,P(A_2 / A_1)\,P(A_3 / A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k / A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

para todo $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$, y para todo $k = 2; 3; \ldots$

Ejemplo 35.- Una urna contiene 20 bolas idénticas, de las cuales 8 son negras, 7 rojas y 5 blancas. Se extraen 4 bolas de la urna sin reemplazamiento, encuentre la probabilidad de que la primera bola sea negra, la segunda roja, la tercera blanca y la cuarta negra.

Solución: Sean los eventos

A_1: la primero bola seleccionada es negra

A_2: la segunda bola seleccionada es roja

A_3: la tercera bola seleccionada es blanca

A_4: la cuarta bola seleccionada es negra

Entonces, se tiene

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)\,P(A_2 / A_1)\,P(A_3 / A_1 \cap A_2)\,P(A_4 / A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

De los datos del problema, se obtiene

$$P(A_1) = \frac{8}{20},\ P(A_2 / A_1) = \frac{7}{19},\ P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{5}{18},\ P(A_4 / A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{7}{17}$$

Así, la probabilidad requerida es

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{7}{19}\right)\left(\frac{5}{18}\right)\left(\frac{7}{17}\right) = 0{,}01684$$

Ejemplo 36.- María está indecisa con relación a que si se matricula en el curso de Economía I o en el curso de Química. Aunque ella realmente prefiere matricularse en Química. Estima que su probabilidad de aprobar el curso de Economía I es 1/2, mientras que su probabilidad de aprobar el curso de Química es 1/3. Si María decide matricularse en uno de estos cursos mediante el lanzamiento de una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que ella apruebe el curso de Química?

Solución: Sean los eventos

A: María se matricula en el curso de Química

B: María aprueba el curso de Química

Entonces la probabilidad deseada es $P(A \cap B)$, y se calcula usando el teorema 10 de la siguiente manera:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B\,/\,A) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

5.6.2 Independencia Estadística de Eventos

Definición 21.- Se dice que dos eventos aleatorios A y B son estadísticamente (o estocásticamente o en el sentido de probabilidad) independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

En otro caso, se dice que los eventos A y B son dependientes.

Observación 9.- Todo evento de probabilidad cero o de probabilidad uno es independiente de cualquier otro evento, esto es

i) Si $P(A) = 0$, entonces $P(A \cap B) = 0 = P(A)\,P(B)$. Luego, A y B son independientes.

ii) Si $P(B) = 1$, y como $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$, entonces

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^C)$$

Como $A \cap B^C \subset B^C$, entonces $P(A \cap B^C) \leq P(B^C) = 0$

Luego, $P(A \cap B^C) = 0$. Así, se obtiene

$$P(A \cap B) = P(A) = P(A).P(B)$$

Luego, A y B son eventos independientes para cualquier evento A.

Observación 10.- Un evento aleatorio A es independiente consigo mismo si y sólo si $P(A) = 0$ ó $P(A) = 1$.

Teorema 12.- Si A y B son eventos aleatorios independientes, entonces

a) A y B^C son independientes

b) A^C y B son independientes

c) A^C y B^C son independientes

Demostración:

a) De la figura 5.17, se tiene

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

Al aplicar el axioma 3 de la función probabilidad, resulta

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C).$$

De donde se obtiene

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$$

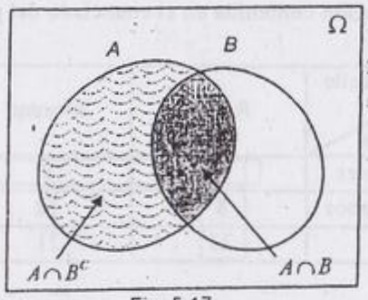


Fig. 5.17

$$= P(A) - P(A)\,P(B) \quad \text{(por independencia de } A \text{ y } B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)\,P(B^C)$$

Por tanto, A y B^C son eventos independientes.

(b) y (c) (Ejercicios para el lector)

Definición 22.- Se dice que tres eventos A, B y C son mutuamente (completamente) independientes si se cumplen las siguientes relaciones

i) Los eventos son independientes por pares, esto es

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B),\ \ P(A \cap C) = P(A)\,P(C) \text{ y } P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$$

ii) $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$

En general, se dice que los eventos $A_1, \ldots, A_n$ son mutuamente (o completamente) independientes si se cumplen las siguientes relaciones

a_1) $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$, para todo $i \neq j$ y $i, j = 1; 2; \ldots; n$

a_2) $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\,P(A_j)\,P(A_k)$, para todo $i \neq j \neq k$ y $i, j, k = 1; 2; \ldots; n$

.....

.....

a_{n-1}) $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2)\ \ldots\ P(A_n)$

Ejemplo 37.- Suponga que se lanza un dado 5 veces. Determine la probabilidad de que no aparezca ningún seis en los cinco lanzamientos.

Solución: Sean los eventos

E_i: no aparece seis en el lanzamiento número i, $i = 1; 2; 3; 4; 5$

E: no aparece ningún seis en los cinco lanzamientos.

Como los 5 lanzamientos son independientes unos de los otros, esto es, los eventos E_i, $i = 1; 2; 3; 4; 5$, son independientes; entonces la probabilidad de

$$E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5$$

es $P(E) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) = P(E_1)\,P(E_2) \ldots P(E_5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$

Ejemplo 38.- Sean A, B y C eventos mutuamente independientes tales que

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}, \quad P(A \cap C) = \frac{1}{15} \text{ y } P(A^C \cap B^C \cap C^C) = \frac{2}{5}$$

Halle $P(A \cup B \cup C)$

Solución

Como los eventos A, B y C son mutuamente independientes, también lo son A^C, B^C y C^C. Luego, se tiene

i) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{12P(A)}$

ii) $P(A \cap C) = P(A)\,P(C) = \frac{1}{15} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{15P(A)}$

iii) $\frac{2}{5} = P(A^C \cap B^C \cap C^C) = P(A^C)\,P(B^C)\,P(C^C)$

$$= (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C))$$

$$= \frac{13}{12} - P(B) - P(A) - \frac{13}{12}P(C) + P(B)\,P(C) + \frac{1}{15}$$

De donde se obtiene

$$P(B) + P(A) + \frac{13}{12}P(C) - P(B)\,P(C) = \frac{3}{4} \quad (*)$$

Al reemplazar

$$P(B) = \frac{1}{12\,P(A)} \text{ y } P(C) = \frac{1}{15\,P(A)}$$

en (*) y realizando operaciones, se obtiene

$$180[P(A)]^3 - 135[P(A)]^2 + 28\,P(A) - 1 = 0$$

Al resolver la ecuación de tercer grado en $P(A)$, resulta

$$P(A) = \frac{1}{3} \text{ ó } P(A) = 0{,}372 \text{ ó } P(A) = 0{,}045$$

Al tomar $P(A) = \frac{1}{3}$, se obtiene $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{5}$ y

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)\,P(B) - P(A)\,P(C) - P(B)\,P(C) + P(A)\,P(B)\,P(C)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{12} - \frac{1}{15} - \frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{3}{5}$$

De la misma manera se calcula $P(A \cup B \cup C)$ para los otros valores de $P(A)$.

Ejemplo 39.- La probabilidad de que un hombre viva 10 años más es 1/4, y la probabilidad de que su esposa viva 10 años más es 1/3. Halle la probabilidad de que:

a) ambos vivan 10 años más
b) al menos uno viva al cabo de 10 años
c) ninguno viva al cabo de 10 años
d) solamente la esposa viva al cabo de 10 años

Solución: Sean los eventos

A: el hombre vive 10 años más
B: la esposa vive 10 años más

Los eventos A y B son independientes, pues los años que vive el hombre no dependen de lo que viva su esposa. Luego, se tiene

a) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

b) $P(A \cup B) = P[\text{al menos uno viva al cabo de 10 años}]$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

c) $P(A^C \cap B^C) = P[\text{de que ninguno viva al cabo de 10 años}]$

$$= P(A^C)\,P(B^C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

d) $P(A^C \cap B) = P(A^C)\,P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

Ejemplo 40.- Se conoce que un paciente responde a un tratamiento de una enfermedad con probabilidad 0,8. Si 3 pacientes son tratados de manera independiente, encuentre la probabilidad de que al menos uno responda al tratamiento.

Solución: Sean los eventos

A: al menos uno de los 3 pacientes responde al tratamiento

B_1: el primer paciente no responde al tratamiento

B_2: el segundo paciente no responde al tratamiento

B_3: el tercer paciente no responde al tratamiento

A^C: ningún paciente responde al tratamiento

Entonces se tiene que $A^C = B_1 \cap B_2 \cap B_3$.

Por tanto,

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$$
$$= 1 - P(B_1).P(B_2).P(B_3) = 1 - (0{,}2)^3 = 0{,}992$$

Ejemplo 41.- Al observar una línea de servicio de una clínica local vemos que la probabilidad de una nueva llegada para un caso de emergencia es p. Encuentre la probabilidad de que el k-ésimo paciente sea el primer caso de emergencia (suponga que las condiciones de llegada de pacientes representan eventos independientes).

Solución: Sean los eventos

E_i: i-ésimo paciente es el primer caso de emergencia, $i = 1; 2; \ldots$

A_i: i-ésimo paciente que llega no corresponde a una emergencia, $i = 1; 2; \ldots$

Luego, tenemos $E_k = A_1 \cap A_2 \ldots A_{k-1} \cap A_k^C$

Así, la probabilidad es

$$P(E_k) = P[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap A_k^C]$$
$$= P(A_1)\,P(A_2)\ldots P(A_{k-1}).P(A_k^C) = (1-p)^{k-1}.p$$

Ejemplo 42.- Un experimento consiste en lanzar repetidamente un par de dados y observar la suma de los números que aparecen en las caras superiores. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma 5 salga antes de la suma 7?

Solución: El espacio muestral asociado a este experimento es

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6), \\ (2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6), \\ (3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6), \\ (4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6), \\ (5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6), \\ (6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6) \end{Bmatrix}$$

Sean los eventos

A: obtener suma igual a 5

B: obtener suma igual a 7

E_n: no obtener suma 5 ó 7 en los primeros $n-1$ ensayos y obtener 5 en el n-ésimo ensayo

En este experimento los ensayos son independientes. Además, $A \cap B = \emptyset$.

Luego, al hacer un simple conteo se obtiene

$$P(A) = \frac{4}{36},\ P(B) = \frac{6}{36},\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{36}$$

Así, la probabilidad de E_n es

$P(E_n) = P$ (de no obtener suma 5 ó 7 en los primeros $n-1$ ensayos) . $P(A)$

$= P$ (de no obtener 5 ó 7 en el 1er ensayo)...P (de no obtener 5 ó 7 en el $n-1$ ensayo) . $P(A)$

$$= [1 - P(A \cup B)].[1 - P(A \cup B)] \ldots [1 - P(A \cup B)]\,P(A)$$
$$= \left(1 - \frac{10}{36}\right)\left(1 - \frac{10}{36}\right)\ldots\left(1 - \frac{10}{36}\right)\frac{4}{36}$$
$$= \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{n-1}\frac{4}{36},\ \forall\, n = 1;\ 2;\ 3; \ldots$$

La suma 5 antes de 7 se puede obtener en el primer ensayo, segundo ensayo, ..., n-ésimo ensayo, etc.

Por tanto, la probabilidad de obtener suma 5 antes de 7 es

$$P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{10}{36}\right)^{n-1}\frac{4}{36}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{36}\cdot\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \quad \text{(serie geométrica)}$$
$$= \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{2}{5}$$

Ejemplo 43.- Un experimento consiste en una sucesión infinita de ensayos independientes. Cada ensayo resulta en un éxito con probabilidad p y en un fracaso con probabilidad $1-p$.

a) ¿Cuál es la probabilidad que al menos ocurra un éxito en los primeros n ensayos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente k éxitos ocurran en los primeros n ensayos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los ensayos resulten en éxitos?

Solución

a) A fin de calcular la probabilidad de que al menos ocurra un éxito en los primeros n ensayos, es conveniente calcular la probabilidad del evento complementario, que es: no ocurre ningún éxito en los primeros n ensayos.

Sea el evento F_i: ocurre fracaso en el i-ésimo ensayo

A: ocurre al menos un éxito en los primeros n ensayos

Entonces la probabilidad de que no ocurra ningún éxito en los primeros n ensayos es

$$P[F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n] = P(F_1)\cdot P(F_2)\ldots P(F_n) \quad \text{(por independencia de eventos)}$$
$$= (1-p)^n$$

Luego, $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - (1-p)^n$.

b) Sea el evento E_i: ocurre éxito en el i-ésimo ensayo.

Entonces una sucesión particular de los primeros n resultados conteniendo k éxitos y $n-k$ fracasos es

$$\{E_1, \ldots, E_k, F_1, F_2 \ldots, F_{n-k}\}$$

Por independencia de ensayos, la probabilidad de ocurrencia de esta sucesión es

$$P[E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_k \cap F_1 \cap \ldots \cap F_{n-k}] = p^k(1-p)^{n-k}$$

Como hay $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ de tales sucesiones, entonces la probabilidad pedida es

$$P[\text{de exactamente } k \text{ éxitos en los primeros } n \text{ ensayos}] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

c) Por independencia de eventos, la probabilidad de que todos los primeros n ensayos sean éxitos es dada por

$$P[E_1 \cap \ldots \cap E_n] = p^n$$

Por tanto, la probabilidad pedida $P\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right]$ es

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right] = \lim_{n\to\infty} P\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right] = \lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 0, \text{si } p < 1 \\ 1, \text{si } p = 1 \end{cases}$$

5.6.3 Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Definición 23.- (Partición de un espacio muestral) Se dice que una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ es una partición del espacio muestral Ω si se cumplen las condiciones siguientes:

i) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall\, i \neq j,\ i,j = 1;\ 2;\ \ldots;\ n$ (los eventos son disjuntos 2 a 2)

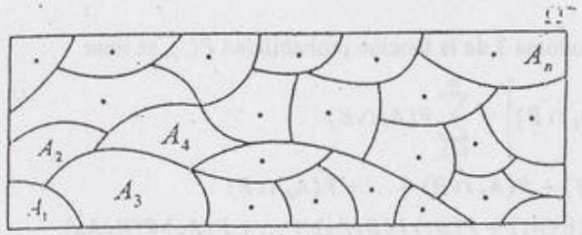


Fig. 5.18

Observación 11.- Sea $A_1, \ldots, A_n$ una partición de eventos del espacio muestral Ω, entonces para cualquier evento B de Ω, se tiene

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B) = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \quad \text{(Fig. 5.19)}$$

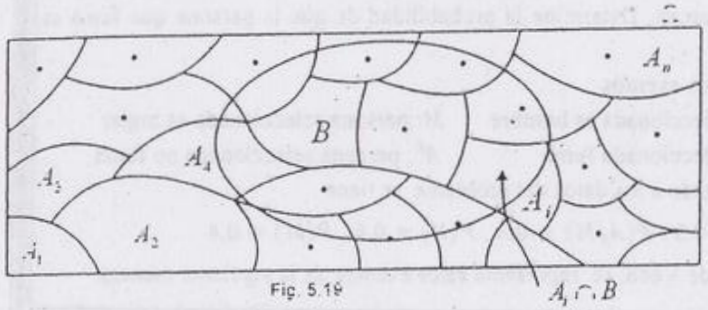


Fig. 5.19

Como los A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son disjuntos 2 a 2, entonces los $A_i \cap B$ son también disjuntos 2 a 2.

Teorema 13.- (Teorema de Probabilidad Total) Sea $A_1, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral Ω tal que

$$P(A_i) > 0,\ \forall\, i = 1;\ 2;\ \ldots;\ n$$

Entonces para cualquier evento B de Ω, se tiene

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/A_i)$$

Demostración: De la observación 11 vemos que para cualquier evento B de Ω se tiene

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \text{ y } (A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset,\ \forall\, i \neq j,\ i,j = 1;\ \ldots;\ n$$

Entonces al aplicar el axioma 3 de la función probabilidad $P(.)$, se tiene

$$P(B) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

$$= P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)\,P(B/A_n)$$

Por tanto,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i)$$

Ejemplo 44.- Suponga que la población de Lima está formada por 60% de hombres y 40% de mujeres. Suponga también que el 50% de los hombres y 30% de las mujeres fuman. Determine la probabilidad de que la persona que fuma es hombre.

Solución: Sean los eventos

H: persona seleccionada es hombre $\quad$ M: persona seleccionada es mujer

A: persona seleccionada fuma $\quad$ A^C: persona seleccionada no fuma

Entonces de acuerdo a los datos del problema, se tiene

$$P(A/H) = 0.5\,,\ P(A/M) = 0{,}3\,,\ P(H) = 0{,}6\,,\ P(M) = 0{,}4$$

En un diagrama de Venn, se representa estos eventos de la siguiente manera

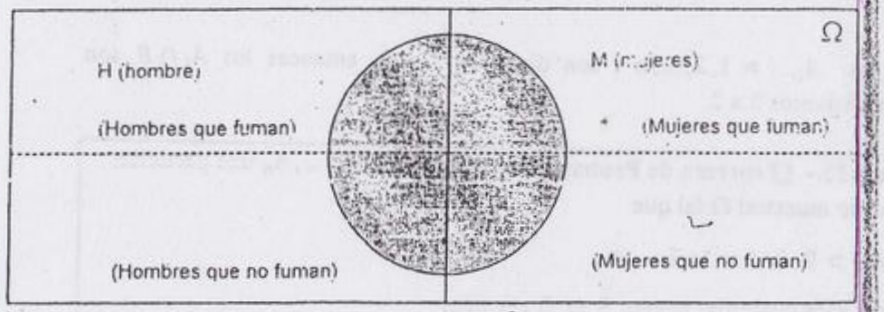


Fig. 5.20

De la figura 5.20, se tiene

i) $P(H \cap A) = P(H)\,P(A/H) = (0{,}6)(0{,}5) = 0{,}30$

ii) $A = (H \cap A) \cup (M \cap A)$ y $(H \cap A) \cap (M \cap A) = \emptyset$

Al aplicar el teorema de probabilidad total, se tiene

$$P(A) = P(H)\,P(A/H) + P(M)\,P(A/M)$$

Al aplicar el teorema de probabilidad, se obtiene

$$P(A) = P(H)P(A/H) + P(M)P(A/M) = (0{,}6)(0{,}5) + (0{,}4)(0{,}3) = 0{,}42$$

Por tanto, la probabilidad del evento pedido es

$$P(H/A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}30}{0{,}42} = 0{,}7143$$

Ejemplo 45.- Una encuesta en el departamento de Arequipa mostró que el 20% de las personas fuman. Se encontró que la probabilidad de muerte causada por cáncer al pulmón dado que la persona fuma era 10 veces mayor que la probabilidad de muerte causada por cáncer de pulmón dado que la persona no fuma. Si la probabilidad de muerte causada por cáncer del pulmón en este departamento es de 0,06, ¿cuál es la probabilidad de muerte debido a cáncer del pulmón dado que la persona fuma?

Solución: Sean los eventos

A: La persona seleccionada fuma, A^C: la persona seleccionada no fuma

B: La persona seleccionada muere debido a cáncer de pulmón

Luego, de acuerdo a los datos del problema se tiene

$$P(A) = 0{,}20\,,\ P(A^C) = 0{,}80\,,\ P(B/A) = 10P(B/A^C)\,,\ P(B) = 0{,}06$$

De la figura 5.21, se tiene

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$$

Al aplicar el teorema de probabilidad total, se obtiene

$$P(B) = P(A)\,P(B/A) + P(A^C)\,P(B/A^C).$$

$$0{,}06 = (0{,}20)[10P(B/A^C)] + (0{,}80).\,P(B/A^C)$$

$$= 2{,}80\,P(B/A^C)$$

De donde se obtiene, $P(B/A^C) = 0{,}02143$

Por tanto, $P(B/A) = 0{,}2143$.

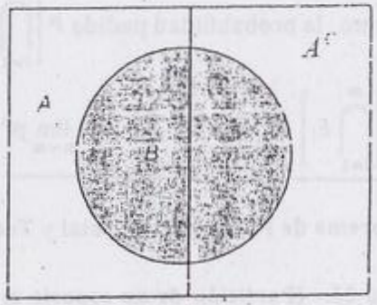


Fig. 5.21

Teorema 14.- (Fórmula de Bayes) Sea $A_1, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral Ω tal que $P(A_i) > 0, \forall\, i = 1; 2; \ldots; n$. Sea B un evento cualquiera de Ω, tal que las probabilidades $P(B/A_i)$ de la ocurrencia del evento B dado que ha ocurrido la causa A_i, $i = 1; \ldots; n$, son conocidas. Entonces para cada i, se tiene

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i)}\ ;\ i = 1; \ldots; n$$

Demostración: (Consecuencia inmediata del teorema de probabilidad total).

Observación 12.- El Teorema de Bayes es bastante importante, pues relaciona las probabilidades "a priori" $P(A_i)$ con las probabilidades "a posteriori" $P(A_i/B)$ (probabilidad de A_i después de que ha ocurrido el evento B).

Ejemplo 46.- Considere los datos de la siguiente tabla

Colores \ Urnas	U_1	U_2	U_3
Negras	2	4	2
Blancas	1	3	4
Rojas	5	2	3
Total	9	9	9

Sea el experimento E: escoger una urna al azar y de ella extraer una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de escoger la urna 3, si se sabe que la bola extraída es blanca?

Solución: Sean los eventos

B: la bola extraída es blanca

U_1: la urna elegida es la urna 1

U_2: la urna elegida es la urna 2

U_3: la urna elegida es la urna 3

De acuerdo a los datos de la tabla dada, se obtiene

$$P(U_1) = \frac{1}{3}\ ,\ P(U_2) = \frac{1}{3}\ ,\ P(U_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(B/U_1) = \frac{1}{9}\ ,\ P(B/U_2) = \frac{3}{9}\ ,\ P(B/U_3) = \frac{4}{9}$$

Al aplicar la fórmula de Bayes, la probabilidad pedida es

$$P(U_3/B) = \frac{P(U_3 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(U_3)\,P(B/U_3)}{P(U_1)\,P(B/U_1) + P(U_2)\,P(B/U_2) + P(U_3)\,P(B/U_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ejemplo 47.- El dado A tiene 4 caras rojas y 2 caras blancas, y el dado B tiene 2 caras rojas y 4 caras blancas. Además, se lanza una moneda una sola vez. Si el resultado es cara, se usa el dado A para continuar el juego; si sale sello, se debe usar el dado B.

a) Halle la probabilidad de que resulte cara roja en el primer lanzamiento.

b) Dado que en los dos primeros lanzamientos resultan caras rojas, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara roja en el tercer lanzamiento?

c) Si los primeros 3 lanzamientos resultan caras rojas, ¿cuál es la probabilidad de que se esté utilizando el dado A?

Solución

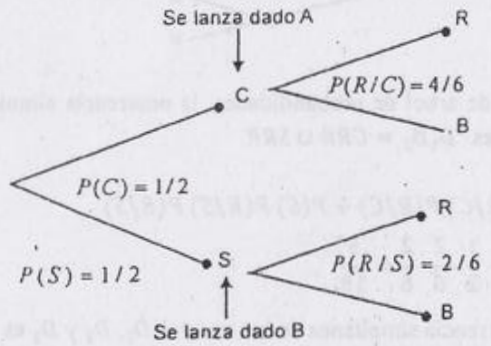
Sean los eventos

C: sale cara en la moneda $\quad$ S: sale sello en la moneda

R: sale cara roja en el dado $\quad$ B: sale cara blanca en el dado

a) Sea el evento D_1: sale cara roja en el primer lanzamiento del dado.

El diagrama de árbol de probabilidad que visualiza este problema es



Cada rama completa del diagrama de árbol representa un posible resultado del experimento, y se llama trayectoria.

En este caso, el evento D_1 está formado por la unión de CR y SR, esto es, $D_1 = CR \cup SR$, y como estos eventos son mutuamente excluyentes se tiene

$$P(D_1) = P(CR) + P(SR) = P(C)\,P(R/C) + P(S)\,P(R/S)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

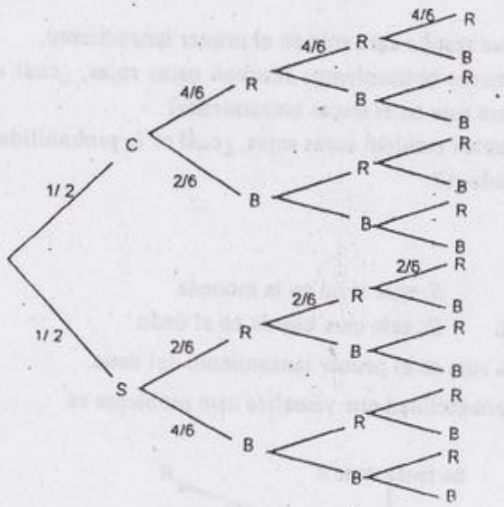
b) Sean los eventos

D_2: sale cara roja en el segundo lanzamiento del dado

D_3: sale cara roja en el tercer lanzamiento del dado

De acuerdo al enunciado del problema se quiere calcular $P(D_3 \,/\, D_1 \text{ y } D_2)$.

El diagrama de árbol de probabilidad que visualiza esta parte del problema es



De acuerdo al diagrama de árbol de probabilidades, la ocurrencia simultánea de los eventos D_1 y D_2 es $D_1D_2 = CRR \cup SRR$.

Luego,

$$P(D_1D_2) = P(C)\,P(R/C)\,P(R/C) + P(S)\,P(R/S)\,P(R/S)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{5}{18}$$

En forma análoga, la ocurrencia simultánea de los eventos D_1, D_2 y D_3 es

$$D_1D_2D_3 = CRRR \cup SRRR$$

Luego, se tiene

$$P(D_1D_2D_3) = P(C)\,P(R/C)\,P(R/C)\,P(R/C) + P(S)\,P(R/S)\,P(R/S)\,P(R/S)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{3}{18}$$

Por tanto,

$$P(D_3 \,/\, D_1 \text{ y } D_2) = \frac{P(D_1D_2D_3)}{P(D_1D_2)} = \frac{3/18}{5/18} = \frac{3}{5}$$

c) Sea el evento D: se utilizó el dado A en el juego. Entonces se tiene

$$P(D/D_1D_2D_3) = \frac{P(DD_1D_2D_3)}{P(D_1D_2D_3)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{3}{18}} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{3}{18}} = \frac{8}{9}$$

Ejemplo 48.- Al responder una pregunta de alternativas múltiples, un estudiante o bien conoce la respuesta o él responde adivinando.

Sea p la probabilidad de que el estudiante conoce la respuesta y $1-p$ la probabilidad de que él responde adivinando. Supongamos que el estudiante que responde adivinando la pregunta tiene una probabilidad de $1/m$ de responder la respuesta correcta, donde m es el número de alternativas de la pregunta. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que el estudiante conoce la respuesta a la pregunta dado que él responde correctamente?

Solución: Sean los eventos

A: el estudiante responde la pregunta correctamente

B: el estudiante realmente conoce la respuesta

B^C: el estudiante no conoce la respuesta

El diagrama de Venn que representa estos eventos está dado en la figura 5.22.

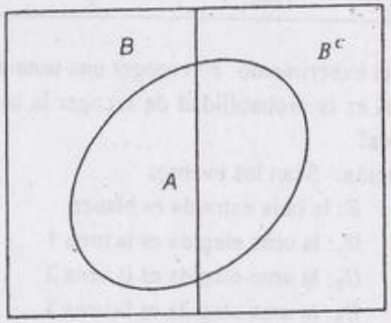


Fig. 5.22

De la figura 5.22, se tiene

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

Po la fórmula de Bayes, se tiene

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B)\,P(A/B)}{P(B)\,P(A/B) + P(B^C)\,P(A/B^C)}$$

$$= \frac{p\cdot 1}{p + \frac{1}{m}(1-p)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}$$

Ejemplo 49.- Un banco ha estimado, por experiencias anteriores, que la probabilidad de que una persona falle en los pagos de un préstamo personal es de 0,2. También ha estimado que el 30% de los préstamos no pagados a tiempo se han hecho para financiar viajes de vacaciones y el 70% de los préstamos pagados a tiempo se han hecho para financiar viajes de vacaciones. Se pide calcular:

a) Probabilidad de que un préstamo que se haya hecho para financiar un viaje de vacaciones no se pague a tiempo.

b) Probabilidad de que un préstamo que se haya hecho para propósitos distintos a viajes de vacaciones sea pagado a tiempo.

Solución

Sean los eventos

A: la persona falla en los pagos de su préstamo personal

A^C: la persona no falla en los pagos de su préstamo personal

B: la persona recibe un préstamo para financiar viajes de vacaciones

De acuerdo al enunciado del problema, se tiene

$P(A) = 0{,}2\ ,\ P(A^C) = 0{,}8$

$P(B/A) = 0{,}3\ ,\ P(B/A^C) = 0{,}7$

y $A \cup A^C = \Omega$

a) Por la fórmula de Bayes, se tiene

$$P(A/B) = \frac{P(A)\,P(B/A)}{P(A)\,P(B/A) + P(A^C)\,P(B/A^C)} = \frac{(0{,}2)(0{,}3)}{(0{,}2)(0{,}3) + (0{,}8)(0{,}7)} = 0{,}097$$

b) En este caso se desea calcular

$$P(A^C/B^C) = \frac{P(A^C)\,P(B^C/A^C)}{P(A)\,P(B^C/A) + P(A^C)\,P(B^C/A^C)}$$

Según las propiedades de probabilidad condicional, se tiene

$P(B^C/A^C) = 1 - P(B/A^C) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P(B^C/A) = 1 - P(B/A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Por tanto,

$$P(A^C/B^C) = \frac{(0{,}8)(0{,}3)}{(0{,}2)(0{,}7) + (0{,}8)(0{,}3)} = 0{,}632$$

Ejemplo 50.- En la Facultad de Ingeniería Industrial de la Universidad de Lima hay 5 secciones del curso de Probabilidad y Estadística.
Las secciones están conformadas de la siguiente manera:

Sección 1: 36 varones y 14 mujeres

Sección 2: 15 varones y 35 mujeres

Sección 3: 20 varones y 30 mujeres

Sección 4: 38 varones y 12 mujeres

Sección 5: 40 varones y 10 mujeres

Se lanza una moneda 3 veces. Si se obtiene 3 caras se elige la sección 1, si se obtiene 3 sellos se elige la sección 3, si se obtiene 2 caras se elige la sección 2, si se obtiene 2 sellos se elige la sección 4, y si se obtiene una cara se elige la sección 5.

Después de haber elegido una sección, se seleccionan 3 estudiantes al azar y resulta que ambas son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de la sección 2 o sección 4?

Solución

Sean los eventos

A: se eligen 3 alumnas

C_1: se elige la sección 1

C_2: se elige la sección 2

C_3: se elige la sección 3

C_4: se elige la sección 4

C_5: se elige la sección 5

El espacio muestral asociado al experimento de lanzar la moneda 3 veces es

$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$

Luego, se tiene

$P(C_1) = \frac{1}{8}\ ,\ P(C_2) = \frac{3}{8}\ ,\ P(C_3) = \frac{1}{8}\ ,\ P(C_4) = \frac{3}{8}\ ,\ P(C_5) = \frac{3}{8}$

$$P(A/C_1) = \frac{14 \times 13 \times 12}{50 \times 49 \times 48} = 0{,}019\ ,\ P(A/C_2) = \frac{35 \times 34 \times 33}{544890} = 0{,}334$$

$$P(A/C_3) = \frac{30 \times 29 \times 28}{50 \times 49 \times 48} = 0{,}207\ ,\ P(A/C_4) = \frac{12 \times 11 \times 10}{50 \times 49 \times 48} = 0{,}011$$

$$P(A/C_5) = \frac{10 \times 9 \times 8}{50 \times 49 \times 48} = 0{,}006$$

Al aplicar la propiedad 3 de la observación 7 y la fórmula de Bayes, se tiene

$$P[(C_2 \cup C_4)/A] = P(C_2/A) + P(C_4/A)$$

$$= \frac{P(C_2)\,P(A/C_2)}{\sum_{i=1}^{5} P(C_i)\,P(A/C_i)} + \frac{P(C_4)\,P(A/C_4)}{\sum_{i=1}^{5} P(C_i)\,P(A/C_i)}$$

Luego, se obtiene

$$P[(C_2 \cup C_4)/A] = \frac{0{,}12525}{0{,}1598} + \frac{0{,}004125}{0{,}1598} = 0{,}80961$$

Ejemplo 51.- Una Compañía de Seguros opina que la población limeña puede ser dividida en dos clases: aquellas personas propensas a accidentes y aquéllas que no son propensas. Sus estadísticas muestran que una persona propensa a accidente tendrá un accidente alguna vez dentro de un periodo de un año con probabilidad 0,4; mientras que sus probabilidades decrecen a 0,2 para una persona que no es propensa a accidentes. Si suponemos que 30% de la población limeña es propensa a accidentes, se pide:

a) Calcule la probabilidad de que una persona que compra una nueva póliza de seguros tenga un accidente dentro del año de vigencia de su póliza.

b) Al suponer que el nuevo poseedor de una póliza de seguros tiene un accidente dentro del año de vigencia de su póliza, ¿cuál es la probabilidad de que él sea propenso a accidente?

Solución

Sean los eventos

B: la persona que tiene una póliza de seguros tiene un accidente dentro del año de vigencia de su póliza.

A: la persona que tiene una póliza de seguros es propensa a accidentes

a) De acuerdo al enunciado del problema, se obtiene

i) $P(A) = 0{,}3$, $P(A^C) = 0{,}7$, $P(B/A) = 0{,}4$, $P(B/A^C) = 0{,}2$

ii) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$

Al aplicar el teorema de probabilidad total, la probabilidad pedida es

$$P(B) = P(A)\,P(B/A) + P(A^C)\,P(B/A^C)$$
$$= (0{,}3)(0{,}4) + (0{,}7)(0{,}2) = 0{,}26$$

b) La probabilidad pedida es $P(A/B)$, la cual según la fórmula de Bayes es dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)} = \frac{(0{,}3)(0{,}4)}{0{,}26} = 0{,}462$$

Ejemplo 52.- Suponga que se tiene 4 tarjetas idénticas de modo que ambos lados de la primera tarjeta son pintados de rojo, ambos lados de la segunda tarjeta son pintados de negro, un lado de la tercera tarjeta es pintado de rojo y el otro negro, y un lado de la cuarta tarjeta es pintado de rojo y el otro verde. Las 4 tarjetas son colocadas en una caja y después de removerlas bien se selecciona una tarjeta al azar y se coloca sobre la mesa. Si la cara superior de la tarjeta seleccionada es de color rojo, ¿cuál es la probabilidad de que el otro lado sea de color negro?

Solución: Sean los eventos

T_R: la tarjeta seleccionada tiene ambos lados de color rojo

T_N: la tarjeta seleccionada tiene ambos lados de color negro

T_{RN}: la tarjeta seleccionada tiene un lado de color rojo y el otro lado de color negro.

T_{RV}: la tarjeta seleccionada tiene un lado de color rojo y el otro lado de color verde.

R: la tarjeta seleccionada tiene cara superior de color rojo

Luego, la probabilidad pedida es dada por

$$p = P(T_{RN}/R) = \frac{P(T_{RN} \cap R)}{P(R)}$$

$$= \frac{P(T_{RN})\,P(R/T_{RN})}{P(T_{RN})\,P(R/T_{RN}) + P(T_R)\,P(R/T_R) + P(T_N)\,P(R/T_N) + P(T_{RV})\,P(R/T_{RV})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

5.6.4 EJEMPLOS, EJEMPLOS Y MÁS EJEMPLOS

Ejemplo 53.- En una clínica psiquiátrica de Lima, los empleados están tan ocupados que, en promedio, sólo el 70% de los nuevos pacientes que llaman por teléfono pueden hablar con un empleado en el momento de llamar. Al otro 30% se le pide que deje su número telefónico. Cerca del 75% de las veces, es posible que un empleado conteste al que ha llamado y se ponga en contacto con él el mismo día, y el otro 25% de las veces se suele poner en contacto con él al día siguiente. La experiencia en la clínica indica que la probabilidad de que una persona que ha llamado venga a la clínica para la consulta es 0,7 si el que llamó fue capaz de hablar en el mismo momento con el empleado o si él pudo hablar más tarde en el mismo día, mientras que esta probabilidad es sólo 0,6 si el que llamó no pudo ponerse en contacto con la clínica hasta el día siguiente. ¿Qué probabilidad hay de que el que llamó por teléfono venga a la consulta de la clínica?

Solución: Sean los eventos

A: persona que llamó va a la consulta de la clínica

B: persona que llamó habla con un empleado inmediatamente después de llamar.

C: persona que llamó se pone en contacto con el empleado más tarde pero el mismo día.

D: persona que llamó no pudo ponerse en contacto con el empleado hasta el día siguiente.

Se tiene $\Omega = B \cup C \cup D$, esto es, los eventos B, C y D forman una partición del espacio muestral Ω (pacientes que se ponen en contacto con el empleado por teléfono). Además, se tiene

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$$

Al aplicar el teorema de probabilidad total, se tiene

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D)$$
$$= P(B)\,P(A/B) + P(C)\,P(A/C) + P(D)\,P(A/D)$$

Para calcular $P(C)$ y $P(D)$ debemos tener en cuenta el siguiente diagrama de árbol de probabilidad

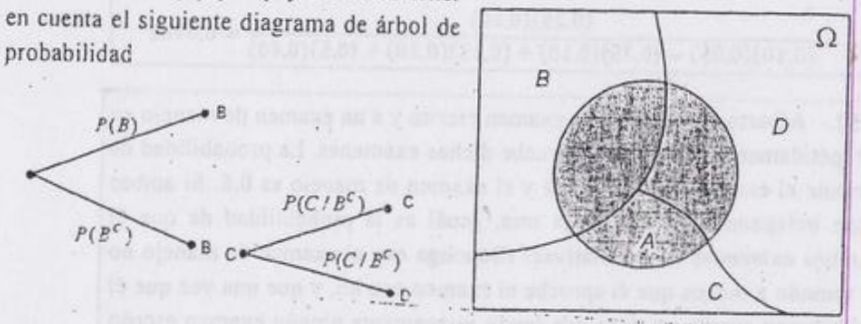


Fig. 5.24

Así, se obtiene

$$P(C) = P(B^C \cap C) = P(B^C)\,P(C/B^C) = (0{,}30)(0{,}75) = 0{,}225$$
$$P(D) = P(B^C \cap D) = P(B^C)\,P(D/B^C) = (0{,}30)(0{,}25) = 0{,}075$$

Por tanto,

$$P(A) = (0{,}7)(0{,}7) + (0{,}225)(0{,}7) + (0{,}075)(0{,}6) = 0{,}6925$$

Ejemplo 54.- Un ejecutivo comercial va a colocar un anuncio en la revista Caretas y quiere determinar la probabilidad de que dicho anuncio sea leído. Tiene los siguientes datos del departamento de circulación de la revista Caretas.

Dado un hombre con una renta anual	Su probabilidad de leer Caretas es
menor que S/. 12 000	0,004
de S/. 12000 a S/. 24 000	0.01
mayor de S/. 24 000	0.05

Por otra parte, un censo de la población que lee Caretas demuestra que:

30% de los hombres tienen renta menor de S/. 12 000

50% de los hombres tienen renta entre S/. 12 000 y S/. 24 000

20% de los hombres tienen renta mayor de S/. 24 000

Finalmente, la misma revista Caretas encontró que un hombre que lee la revista tiene una probabilidad de 0,4 de leer el anuncio.

Por otro lado, esta probabilidad es independiente de la renta. ¿Cuál es la probabilidad de que este anuncio sea leído por cualquier hombre?

Solución: Sean los eventos

A: un hombre lee el anuncio

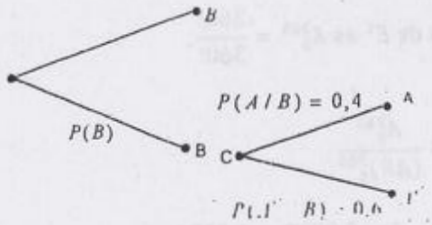
B: un hombre lee Caretas

C: la renta de un hombre es menor que S/. 12 000

D: la renta de un hombre es de S/. 12 000 a S/. 24 000

E: la renta de un hombre es mayor que S/. 24 000

Se debe calcular $P(A)$. El siguiente diagrama de árbol muestra las probabilidades para este caso.



Dado que $P(A/B^C) = 0$, entonces al aplicar el teorema de probabilidad total se tiene

$$P(A) = P(A \cap B) = P(B)\,P(A/B) = P(B)(0{,}4) = 0{,}4\,P(B)$$

Por otro lado, para calcular $P(B)$ se tiene

$\Omega = C \cup D \cup E$, esto es, los eventos C, D y E forman una partición del espacio muestral Ω (renta de hombres que leen Caretas).

Luego,

$$B = (B \cap C) \cup (B \cap D) \cup (B \cap E)$$

Por el teorema de probabilidad total, se obtiene

$$P(B) = P(C)\,P(B/C) + P(D)\,P(B/D) + P(E)\,P(B/E)$$
$$= (0{,}004)(0{,}30) + (0{,}01)(0{,}50) + (0{,}5)(0{,}20) = 0{,}0162$$

Por tanto,

$$P(A) = (0{,}4)(0{,}0162) = 0{,}00648$$

Ejemplo 55.- Suponga que hay 5 personas en una habitación. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 personas tengan cumpleaños en común? (Suponga que el año tiene 365 días)

Solución: Sean los eventos

E: por lo menos 2 personas tienen cumpleaños en común

E^C: todas las personas tienen cumpleaños en diferentes días del año.

Si los nacimientos de las personas son independientes unos de otros, entonces el número total de maneras de que las 5 personas celebren sus cumpleaños en cualquier día del año es

$$(AR)_5^{365} = (365)^5$$

El número total de maneras en que las 5 personas tienen cumpleaños en diferentes días del año es

$$A_5^{365} = \frac{(365)!}{(365-5)!} = \frac{365!}{360!}$$

Así, el número de elementos de E^C es $A_5^{365} = \dfrac{365!}{360!}$.

Por tanto,

$$P(E) = 1 - P(E^C) = 1 - \frac{A_5^{365}}{(AR)_5^{365}}$$
$$= 1 - \frac{365!}{360!\,(365)^5} = 1 - 0{,}9729 = 0{,}0271$$

Ejemplo 56.- En la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, en la que sólo hay estudiantes de Matemática Pura, Estadística, Investigación Operativa y Computación, terminan la carrera 5% de Matemática Pura, 10% de Estadística, 20% de Investigación Operativa y el 50% de Computación. Al elegir un estudiante al azar, se pide:

a) Probabilidad de que sea de Matemática Pura y haya terminado la carrera.

b) Si nos dice que ha terminado la carrera, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Estadística?

Solución: Sean los eventos

M: estudiante elegido estudia Matemática Pura

E: estudiante elegido estudia Estadística

I: estudiante elegido estudia Investigación Operativa

C: estudiante elegido estudia Computación

Luego, se tiene

$$\Omega = \{\text{estudiantes de la Facultad}\} = M \cup E \cup I \cup C$$

donde $P(M) = 0{,}10$, $P(E) = 0{,}25$, $P(I) = 0{,}15$ y $P(C) = 0{,}50$.

a) Sea el evento T: el estudiante ha terminado la carrera. Entonces

$$P(M \cap T) = P(M)\,P(T/M) = (0{,}10)(0{,}05) = 0{,}005$$

b) $$P(E/T) = \frac{P(E \cap T)}{P(T)} = \frac{P(E)\,P(T/E)}{P(M)\,P(T/M) + P(E)\,P(T/E) + P(I)\,P(T/I) + P(C)\,P(T/C)}$$
$$= \frac{(0{,}25)(0{,}10)}{(0{,}10)(0{,}05) + (0{,}25)(0{,}10) + (0{,}15)(0{,}20) + (0{,}5)(0{,}40)} = 0.0962$$

Ejemplo 57.- Alberto se somete a un examen escrito y a un examen de manejo en carretera repetidamente hasta que él apruebe dichos exámenes. La probabilidad de que él apruebe el examen escrito es 0,9 y el examen de manejo es 0,6. Si ambas pruebas son independientes una de la otra, ¿cuál es la probabilidad de que él apruebe ambos exámenes en n tentativas? (Suponga que el examen de manejo no puede ser tomado a menos que él apruebe el examen escrito, y que una vez que él aprueba el examen escrito no tiene que rendir nuevamente ningún examen escrito aunque desapruebe su próximo examen de manejo).

Solución: Sean los eventos

A: Alberto aprueba el examen escrito

B: Alberto aprueba el examen de manejo

A^C: Alberto no aprueba el examen escrito

B^C: Alberto no aprueba el examen de manejo

C: Alberto aprueba ambos exámenes en n tentativas

Alberto puede aprobar ambos exámenes en n tentativas de la siguiente manera

n tentativas

AB^CB^C ..... B^CB
A^CAB^C ..... B^CB
.....
.....
$A^CA^CA^C$ ..... A^CAB^CB
$A^CA^CA^C$ ..... A^CA^CAB

Luego, la probabilidad pedida es

$$P(C) = P(A)\,P(B)\,[P(B^C)]^{n-2} + P(A)\,P(A^C)\,P(B)\,[P(B^C)]^{n-3} + \cdots +$$
$$+P(A)\,[P(A^C)]^{n-3}\,P(B)\,P(B^C) + P(A)\,[P(A^C)]^{n-2}\,P(B)$$
$$= P(A)\,P(B)\sum_{j=1}^{n-1}[P(A^C)]^{j-1}[P(B^C)]^{n-j-1}$$
$$= 0{,}54\sum_{j=1}^{n-1}(0{,}1)^{j-1}(0{,}4)^{n-j-1}$$

Ejemplo 58.- Dos dados son lanzados repetidamente. Si por primera vez aparece una suma total de las caras igual a 10, el jugador A gana, mientras que si por primera vez aparece una suma igual a 6, el jugador B gana y el juego termina.

a) Calcule la probabilidad de que el jugador A gane el juego
b) Calcula la probabilidad de que el jugador B gane el juego

Solución: El espacio muestral asociado a este experimento es

$$\Omega = \left\{\begin{array}{l}(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),\\(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6),\\(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6),\\(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6),\\(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6),\\(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)\end{array}\right\}$$

suma 6

suma 10

Consideremos los eventos

A: el jugador A gana el juego
B: el jugador B gana el juego
E: obtener suma igual a 10 en el lanzamiento del par de dados
F: obtener suma igual a 6 en el lanzamiento del par de dados
D: obtener suma diferente de 10 y 6 en el lanzamiento del par de dados

El jugador A puede ganar cuando los eventos ocurren en la siguiente forma:

1ra tirada, 1ra tirada, 2da tirada, 1ra tirada, 2da tirada, 3ra tirada, 1ra tirada, 2da tirada, 3ra tirada, 4ta tirada

$$E \cup (D \cap E) \cup (D \cap D \cap E) \cup (D \cap D \cap D \cap E) \cup \ldots$$

y el jugador B puede ganar cuando los eventos ocurren en la siguiente forma:

1ra tirada, 1ra tirada, 2da tirada, 1ra tirada, 2da tirada, 3ra tirada, 1ra tirada, 2da tirada, 3ra tirada, 4ta tirada

$$F \cup (D \cap F) \cup (D \cap D \cap F) \cup (D \cap D \cap D \cap F) \cup \ldots$$

En este experimento los lanzamientos son independientes. Luego, se tiene

a) $$P(A) = \frac{3}{36} + \frac{28}{36}\cdot\frac{3}{36} + \left(\frac{28}{36}\right)^2\cdot\frac{3}{36} + \left(\frac{28}{36}\right)^3\cdot\frac{3}{36} + \cdots$$
$$= \frac{3}{36}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{28}{36}\right)^j \quad \text{(serie geométrica)}$$
$$= \frac{3}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{28}{36}} = \frac{3}{8}$$

b) $$P(B) = \frac{5}{36} + \left(\frac{28}{36}\right)\left(\frac{5}{36}\right) + \left(\frac{28}{36}\right)^2\left(\frac{5}{36}\right) + \left(\frac{28}{36}\right)^3\left(\frac{5}{36}\right) + \cdots$$
$$= \frac{5}{36}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{28}{36}\right)^j \quad \text{(serie geométrica)}$$
$$= \frac{5}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{28}{36}} = \frac{5}{8}$$

Ejemplo 59.- Considere el siguiente juego de azar, en el que se lanzan dos dados. Si la suma de las caras superiores es 7 u 11, el jugador gana inmediatamente, mientras si la suma es 2 ó 3 ó 12, el jugador pierde inmediatamente. Si la suma es 4 ó 5 ó 6 ó 7 ó 8 ó 9 ó 10, el jugador continúa lanzando los dados hasta que la

suma aparezca antes de la suma 7 en tal caso él gana, o hasta que la suma 7 aparezca antes de la suma original aparecida, en cuyo caso el jugador pierde. Si se supone que el juego termina cuando por primera vez el jugador gana o pierde, ¿cuál es la probabilidad de que gane?

Solución: Sea el evento A: el jugador gana el juego

El jugador gana en el primer lanzamiento si la suma es 7 u 11.

El jugador gana en el segundo lanzamiento si sale la siguiente secuencia de sumas:

1ra tirada, 2da tirada, 1ra tirada, 2da tirada, 1ra tirada, 2da tirada, 1ra tirada, 2da tirada, 1ra tirada, 2da tirada, 1ra tirada, 1ra tirada

4 y 4 ó 5 y 5 ó 6 y 6 ó 8 y 8 ó 9 y 9 ó 10 y 10

El jugador gana en la tercera tirada si sale la siguiente secuencia de sumas:

1ra, 2da, 3ra, 1ra, 2da, 3ra, 1ra, 2da

$$4 \wedge (no\,sale\,4\,y\,7) \wedge 4 \text{ ó } 5 \wedge (no\,sale\,5\,y\,7) \wedge 5 \text{ ó } 6 \wedge (no\,sale\,6\,y\,7)$$

3ra, 1ra, 2da, 3ra, 1ra, 2da, 3ra, 1ra, 2da, 3ra

$$\wedge\ 6 \text{ ó } 8 \wedge (no\,sale\,8\,y\,7) \wedge 8 \text{ ó } 9 \wedge (no\,sale\,9\,y\,7) \wedge 9 \text{ ó } 10 \wedge (no\,sale\,10\,y\,7) \wedge 10$$

El jugador gana la cuarta tirada si sale la siguiente secuencia de sumas:

1ra, 2da, 3ra, 4ta, 1ra, 2da, 3ra

$$4 \wedge (no\,sale\,4\,y\,7) \wedge (no\,sale\,4\,y\,7) \wedge 4 \text{ ó } 5 \wedge (no\,sale\,5\,y\,7)\,y\,(nos\,sale\,5\,y\,7) \wedge$$

4ta, 1ra, 2da, 3ra, 4ta, 1ra, 2da, 3ra

$$\wedge\ 5 \text{ ó } 6\,(no\,sale\,6\,y\,7) \wedge (no\,sale\,6\,y\,7) \wedge 6 \text{ ó } 8 \wedge (no\,sale\,8\,y\,7) \wedge (no\,sale\,8\,y\,7)$$

4ta, 1ra, 2da, 3ra, 4ta, 1ra, 2da, 3ra, 4ta

$$\wedge\ 8 \text{ ó } 9 \wedge (no\,sale\,9\,y\,7) \wedge (no\,sale\,9\,y\,7) \wedge 9 \text{ ó } 10 \wedge (no\,sale\,10\,y\,7) \wedge (no\,sale\,10\,y\,7) \wedge 10$$

y cesivamente.

Al l espacio muestral del ejemplo 58, la probabilidad de que el jugador gane el jut

Suma 11, Suma 4, Suma 4, Suma 5, Suma 5, Suma 6, Suma 6, Suma 8, Suma 8, Suma 9, Suma 9, Suma 10, Suma 10

$$P(A) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36}\cdot\frac{3}{36} + \frac{4}{36}\cdot\frac{4}{36} + \frac{5}{36}\cdot\frac{5}{36} + \frac{5}{36}\cdot\frac{5}{36} + \frac{4}{36}\cdot\frac{4}{36} + \frac{3}{36}\cdot\frac{3}{36} +$$

Suma 4, Suma 4 y 7, Suma 4, Suma 5 y 7, Suma 5, Suma 6, Suma 6 y 7, Suma 6, Suma 8, Suma 8 y 7, Suma 8, Suma 9, Suma 9 y 7

$$+ \frac{3}{36}\cdot\frac{27}{36}\cdot\frac{3}{36} + \frac{4}{36}\cdot\frac{4}{36} + \frac{5}{36}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{5}{36} + \frac{5}{36}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{5}{36} + \frac{4}{36}\cdot\frac{26}{36}\cdot$$

Suma 9, Suma 10, Suma 10 y 7, Suma 10

$$\frac{4}{36} + \frac{3}{36}\cdot\frac{27}{36}\cdot\frac{3}{36} + \frac{3}{36}\left(\frac{27}{36}\right)^2\cdot\frac{3}{36} + \frac{4}{36}\left(\frac{26}{36}\right)^2\cdot\frac{4}{36} +$$

$$+ \frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^2\cdot\frac{5}{36} + \frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^2\cdot\frac{5}{36} + \frac{4}{36}\left(\frac{26}{36}\right)^2\cdot\frac{4}{36} + \frac{3}{36}\left(\frac{27}{36}\right)^2\cdot\frac{3}{36} + \cdots$$

Suma 4 y 4, Suma 5 y 5

$$= \frac{8}{36} + \frac{9}{36^2}\left[1 + \frac{27}{36} + \left(\frac{27}{36}\right)^2 + \cdots\right] + \frac{16}{36^2}\left[1 + \frac{26}{36} + \left(\frac{26}{36}\right)^2 + \cdots\right] +$$

Suma 6 y 6, Suma 8 y 8

$$+ \frac{25}{36^2}\left[1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \cdots\right] + \frac{25}{36^2}\left[1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \cdots\right] +$$

Suma 9 y 9 Suma 10 y 10

$$+\frac{16}{36^2}\left[1+\frac{26}{36}+\left(\frac{26}{36}\right)^2+\dots\right]+\frac{9}{36^2}\left[1+\frac{27}{36}+\left(\frac{27}{36}\right)^2+\dots\right]+$$

Sumando los puntos de convergencia da cada una de estas series geométricas, se obtiene

$$P(A)=\frac{244}{495}$$

Ejemplo 60.- Lima Bus presta servicios de transporte público con 4 líneas al distrito de Breña, de modo que: el 20% de los ómnibus cubre el servicio de la línea 1, el 40% cubre el servicio de la línea 2, el 30% cubre el servicio de la línea 3 y el 10% cubre el servicio de la línea 4. Además, se sabe que la probabilidad de que diariamente un ómnibus se averíe es del 3% en la línea 1, del 2% en la línea 2, del 4% en la línea 3 y del 1% en la línea 4.

Se pide:

a) La probabilidad de que en un día un ómnibus sufra avería.

b) Si se sabe que un ómnibus ha sufrido una avería un día determinado, ¿cuál es la probabilidad de que preste servicio en la línea 3?

Solución

a) Sean los eventos

A: un ómnibus sufre una avería en un día determinado, cualquiera que sea la línea en la que presta servicio.

B_i: un ómnibus presta servicio en la línea i, $i = 1; 2; 3; 4$

Luego, se tiene

i) $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = \Omega$ (ómnibus que prestan servicios en el distrito de Breña)

ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$, esto es, si un ómnibus presta servicios en la línea i, no lo hace en la línea j.

iii) $A \cap B_i \neq \emptyset$, para todo B_i, $i = 1; 2; 3; 4$

iv) $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4)$

Luego, por el teorema de probabilidad total, se tiene

$$P(A) = P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2) + P(B_3)\,P(A/B_3) + P(B_4)P(A/B_4)$$

Por otro lado, de acuerdo al enunciado del problema se obtiene

$$P(B_1) = 0{,}2\,,\ P(B_2) = 0{,}4\,,\ P(B_3) = 0{,}3\,,\ P(B_4) = 0{,}1$$

$$P(A/B_1) = 0{,}03\,,\ P(A/B_2) = 0{,}02\,,\ P(A/B_3) = 0{,}04\,,\ P(A/B_4) = 0{,}01$$

Por tanto,

$$P(A) = (0{,}2)(0{,}03) + (0{,}4)(0{,}02) + (0{,}3)(0{,}04) + (0{,}1)(0{,}01) = 0{,}027$$

b) $$P(B_3/A) = \frac{P(B_3)\,P(A/B_3)}{\sum_{i=1}^{4} P(B_i)\,P(A/B_i)} = \frac{(0{,}3)(0{,}04)}{(0{,}027)} = 0{,}444$$

Ejemplo 61.- El volumen de producción diaria entre plantas diferentes de una fábrica es de 5000 unidades en la primera, 10 000 unidades en la segunda y 20000 en la tercera. Si el porcentaje de unidades defectuosas producidas en las tres plantas es del 1,5%, 0,7% y 2,5%, respectivamente; determine la probabilidad de que:

a) Extraída una unidad al azar, ésta resulte no defectuosa.

b) Habiendo sido extraída una unidad defectuosa, haya sido producida en la tercera planta.

Solución

a) Sean los eventos

D: Unidad extraída es defectuosa, cualquiera que sea la planta en que haya sido producida

D^c: Unidad extraída no es defectuosa

P_i: Unidad extraída ha sido producida en la planta i, $i = 1; 2; 3; 4$

De acuerdo a los datos del problema, se obtiene

$$P(P_1) = \frac{5000}{5000 + 10000 + 20000} = \frac{1}{7} = 0{,}143$$

$$P(P_2) = \frac{10000}{35000} = \frac{2}{7} = 0{,}286$$

$$P(P_3) = \frac{20000}{35000} = \frac{4}{7} = 0{,}571$$

$$P(D/P_1) = 0{,}015\,,\ P(D/P_2) = 0{,}007\,,\ P(D/P_3) = 0{,}025$$

La probabilidad de que una unidad extraída es no defectuosa si se sabe que ha sido producida en la planta i es

$$P(D^c/P_i) = 1 - P(D/P_i)$$

Luego, $P(D^c/P_1) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$

$P(D^c/P_2) = 1 - 0{,}007 = 0{,}993$

$$P(D^C/P_3) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$$

También se tiene

i) $P_1 \cup P_2 \cup P_3 = \Omega$ ii) $P_i \cap P_j = \emptyset, \forall i \neq j$

iii) $D^C \cap P_i \neq \emptyset$, $i = 1; 2; 3; 4$ y $D^C = (D^C \cap P_1) \cup (D^C \cap P_2) \cup (D^C \cap P_3)$

Luego,

$$P(D^C) = P(P_1)\,P(D^C/P_1) + P(P_2)\,P(D^C/P_2) + P(P_3)\,P(D^C/P_3)$$
$$= (0{,}143)(0{,}985) + (0{,}286)(0{,}993) + (0{,}571)(0{,}975) = 0{,}981578$$

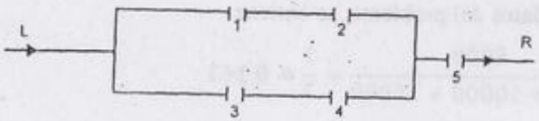
b) $$P(P_3/D) = \frac{P(P_3)\,P(D/P_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(P_i)\,P(D/P_i)}$$

$$= \frac{(0{,}571)(0{,}025)}{(0{,}143)(0{,}015) + (0{,}286)(0{,}007) + (0{,}571)(0{,}025)}$$

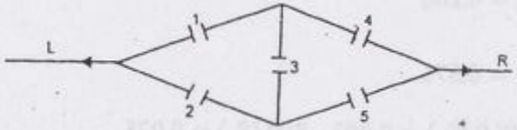
$$= \frac{0{,}014275}{0{,}018422} = 0{,}7749$$

Ejemplo 62.- En la figura, la probabilidad de que la i-ésima llave del circuito esté cerrada (dejando pasar la corriente) es $P_i = \frac{i}{6}$, $i = 1; 2; 3; 4; 5$. Si todas las llaves se cierran o se abren independientemente, ¿cuál es la probabilidad de que la corriente pase de L a R para el respectivo circuito?

a)



b)



Solución: Sean los eventos

A_i: la i-ésima llave del circuito está cerrada ($i = 1; 2; 3; 4; 5$)

B: la corriente pasa de L a R.

a) La corriente pasa de L a R en los siguientes casos:

- Cuando las tres llaves A_1, A_2 y A_5 están cerradas, esto es, cuando ocurre el evento $A_1 \cap A_2 \cap A_5$; o cuando las tres llaves A_3, A_4 y A_5 están cerradas, esto es, cuando ocurre el evento $A_3 \cap A_4 \cap A_5$.

Luego, se tiene

$$B = (A_1 \cap A_2 \cap A_5) \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

Por tanto,

$$P(B) = P[(A_1 \cap A_2 \cap A_5) \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_5)]$$
$$= P(A_1 \cap A_2 \cap A_5) + P(A_3 \cap A_4 \cap A_5) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$
$$= P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_5) + P(A_3)\,P(A_4)\,P(A_5) - P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\,P(A_4)\,P(A_5)$$
$$P(B) = \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^3} - \frac{1}{6^5} = \frac{71}{6^5} = 0{,}009131$$

b) Para este circuito, la corriente pasa de L a R en los siguientes casos:

- Cuando las dos llaves A_1 y A_4 están cerradas, esto es, cuando ocurre el evento $A_1 \cap A_4$.
- Cuando las 3 llaves A_1, A_3 y A_5 están cerradas, es decir, cuando ocurre el evento $A_1 \cap A_3 \cap A_5$.
- Cuando las 2 llaves A_2 y A_5 están cerradas, esto es, cuando ocurre el evento $A_2 \cap A_5$.
- Cuando las 3 llaves A_2, A_3 y A_4 están cerradas, esto es, cuando ocurre el evento $A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

Luego, se tiene

$$B = (A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap A_3 \cap A_5) \cup (A_2 \cap A_5) \cup (A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

Aplicar la propiedad siguiente

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) -$$
$$- P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) +$$
$$+ P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)$$

se tiene

$$P(B) = P(A_1 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_5) + P(A_2 \cap A_5) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) -$$
$$- P(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) -$$
$$- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) -$$
$$- P(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) -$$
$$- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$
$$= \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} - \frac{5}{6^4} - \frac{1}{6^5} + \frac{4}{6^5} - \frac{1}{6^5} = 0{,}07973$$

Ejemplo 63.- La urna I contiene 4 esferas blancas y 3 negras. La urna II contiene 3 esferas blancas y 4 negras. La urna III contiene 2 esferas blancas y 5 negras. Una persona extrae una esfera de la urna I, la introduce en la II, y después de mezclar las esferas extrae 2 y las coloca sobre una mesa. Otra persona extrae una esfera de la urna III y también la coloca sobre la mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las esferas sobre la mesa resulten del mismo color?

Solución: Sean los eventos

A: las 3 esferas sobre la mesa son del mismo color

B_1: la primera persona coloca 2 esferas blancas sobre la mesa

B_2: la segunda persona coloca 1 esfera blanca sobre la mesa

N_1: la primera persona coloca 2 esferas negras sobre la mesa

N_2: la segunda persona coloca 1 esfera negra sobre la mesa

Así, se tiene

$A = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)$ (ambos eventos son mutuamente excluyentes)

Entonces

$$P(A) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2)$$
$$= P(B_1)\,P(B_2) + P(N_1)\,P(N_2) \quad \text{(por ser eventos independientes)}$$

Al considerar los eventos

E_1: la primera persona extrae una esfera blanca de la urna I

E_2: la primera persona extrae 2 esferas blancas de la urna II

C_2: la primera persona extrae 2 esferas negras de la urna II

se tiene:

$$B_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1^c \cap E_2) \quad y \quad N_1 = (E_1 \cap C_2) \cup (E_1^c \cap C_2)$$

Luego, se obtiene

$$P(B_1) = P(E_1)\,P(E_2/E_1) + P(E_1^c)\,P(E_2/E_1^c)$$
$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{6}{28} + \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{28} = \frac{33}{196}$$

donde $P(E_2/E_1) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \dfrac{6}{28}$, $P(E_2/E_1^c) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \dfrac{3}{28}$

$$P(N_1) = P(E_1)\,P(C_2/E_1) + P(E_1^c)\,P(C_2/E_1^c)$$

$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{3}{7}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{4}{7}\cdot\frac{6}{28} + \frac{3}{7}\cdot\frac{10}{28} = \frac{54}{196}$$

Por tanto,

$$P(A) = \frac{33}{196}\cdot\frac{2}{7} + \frac{54}{196}\cdot\frac{5}{7} = \frac{168}{686} = 0{,}2449$$

Ejemplo 64.- La empresa Volvo desea lanzar al mundo un nuevo modelo de ómnibus en el año 2014. Al estudiar la posible situación económica que existirá en dicho año, contempla 3 alternativas: existencia de inflación, estabilidad o depresión, estimando dichas alternativas igualmente probables. La probabilidad de que se lance el nuevo modelo al mercado es 0,6 si existe inflación, 0,5 si existe estabilidad y 0,2 si la situación es de depresión. ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo modelo esté en el mercado en el año 2014?

Solución: Sean los eventos

A: lanzar al mercado un nuevo modelo en el año 2014 cualquiera que sea la alternativa que presente la situación económica

B_1: existe inflación en 2014

B_2: existe estabilidad en 2014

B_3: existe depresión en 2014

Así, se tiene

i) $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$ (en 2014 existirá inflación o estabilidad o depresión)

ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$ $(i = 1; 2; 3\ ,\ j = 1; 2; 3)$, esto es, si la situación económica en 2014 es B_i, no será para B_j para $i \neq j$

iii) $B_i \cap A \neq \emptyset$, $\forall\, i$, y $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)$

Luego,

$$P(A) = P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2) + P(B_3)\,P(A/B_3)$$

También,

$$P(B_i) = \frac{1}{3}\ ,\ \forall\, i = 1; 2; 3$$

$$P(A/B_1) = 0{,}6\ ,\ P(A/B_2) = 0{,}5\ ,\ P(A/B_3) = 0{,}2$$

Por tanto,

$$P(A) = \frac{1}{3}(0{,}6) + \frac{1}{3}(0{,}5) + \frac{1}{3}(0{,}2) = 0{,}4334$$

EJERCICIOS

1. Dado que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calcule

   a) $P(A \cup B)$ b) $P(A/B)$ c) $P(B/A)$ d) $P[(A \cup B)/B]$

2. Si A y B son dos eventos tal que $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

   Calcule $P(A^c / B^c)$ y $P(B^c / A^c)$ *R.* 5/8 , 5/6

3. Las probabilidades de 3 jugadores de que conviertan un penal son respectivamente 2/3, 4/5 y 7/10. Si cada uno cobra una única vez, ¿cuál es la probabilidad de que:

   a) todos conviertan en gol *R.* 28/75
   b) solamente uno de ellos convierta *R.* 1/6
   c) todos fallan *R.* 1/50

4. Una urna contiene 12 bolas: 5 blancas, 4 rojas y 3 negras. Otra urna contiene 18 bolas: 5 blancas, 6 rojas y 7 negras. Una bola es extraída de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color? *R.* 35/108

5. Un restaurante popular solamente presenta dos tipos de comida: ensalada completa o un plato a base de carne. 20% de los clientes del sexo masculino prefieren ensalada completa, 30% de las mujeres escogen carne y 75% de los clientes son hombres. Considere los siguientes eventos:

   H: cliente es hombre A: cliente prefiere ensalada completa
   M: cliente es mujer B: cliente prefiere carne

   Se pide:

   a) $P(A/H)$, $P(B/M)$ *R.* 0,20 ; 0,30
   b) $P(A \cap H)$, $P(A \cup H)$ *R.* 0,15 ; 0,925
   c) $P(M/A)$ *R.* 7/13

6. Un hombre toma un microbús o un ómnibus para ir a su trabajo, con probabilidades 0,3 y 0,7 respectivamente. 30% de las veces que toma el microbús llega tarde al trabajo, mientras que 20% de las veces que toma el ómnibus llega tarde a su trabajo. Si el hombre llega a su trabajo un día particular, ¿cuál es la probabilidad de que haya tomado el microbús?

   R. 0,3913

7.- En una bolsa hay 5 monedas de S/. 1 y 4 de S/. 0,50. ¿Cuál es la probabilidad de que al retirar dos monedas se obtenga S/. 1,50? *R.* 5/9

8. Una urna contiene 10 bolas negras y 5 bolas rojas. Las bolas son extraídas aleatoriamente. Cada bola extraída es devuelta a la urna, juntamente con 5 bolas del mismo color. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan en este orden: 1 negra, 1 negra, 1 roja, 1 roja? Dado que la primera bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea negra? *R.* 1/30, 3/4

9. Un vendedor calcula que la probabilidad de efectuar una venta durante la primera entrevista con un cliente es de 0,5, pero aumenta a 0,65 en la segunda entrevista si el cliente no compró en la primera. Supongamos que el vendedor regresa sólo una vez para ver al cliente. Si el vendedor entrevista al cliente, calcule:

   a) La probabilidad de que el cliente compre. *R.* 0,825
   b) La probabilidad de que el cliente no compre. *R.* 0,175

10. Una caja A contiene 8 piezas, de las cuales 3 son defectuosas y una caja B contiene 5 piezas, de las cuales 2 son defectuosas. Una pieza es retirada aleatoriamente de cada caja.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas piezas no sean defectuosas? *R.* 3/8
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza sea defectuosa y la otra no? *R.* 19/40
    c) Si una pieza es defectuosa y la otra no, ¿cuál es la probabilidad de que la pieza defectuosa venga de la caja A? *R.* 9/19

11. La urna I contiene 4 bolas: 2 blancas y 2 negras, la urna II contiene 5 bolas: 3 blancas y 2 negras. Una bola es transferida de la urna I a II. Una bola es extraída de la urna II y se verifica que es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola transferida haya sido blanca? *R.* 4/7

12. La probabilidad de que Edwin resuelva un problema es de 2/3 y la probabilidad de que Mario resuelva es de 3/4. Si ambos intentan independientemente, ¿cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto? *R.* 11/12

13. Un dado es sesgado, de tal forma que la probabilidad de que salga un cierto punto es proporcional a su valor. Calcule

    a) La probabilidad de que salga 5, si se sabe que el punto que salió es impar. *R.* 5/9

24. Un número es escogido al azar del conjunto $\{1; 2; 3; ...; 20\}$. Verifique si son independientes los siguientes eventos

a) X: el número es múltiplo de 3 — *R.* X e Y son independientes
Y: el número es par

b) M: el número es primo — *R.* M y N no son independientes
N: el número es impar

25. La empresa J y H tienen 15 800 empleados, clasificados de acuerdo a la siguiente tabla:

Edad \ Sexo	Hombres (M)	Mujeres (F)	Total
< 25 años (A)	2 000	800	2 800
25 - 40 años (B)	4 500	2 500	7 000
> 40 años (C)	1 800	4 200	6 000
Total	8 300	7 500	15 800

Si un empleado es seleccionado al azar, calcule la probabilidad de ser él:

a) un empleado con 40 años de edad o menos. *R.* 0,6203
b) un empleado con 40 años de edad o menos y mujer. *R.* 0,2089
c) un empleado con más de 40 años de edad y que sea hombre. *R.* 0,1139
d) una mujer, dado que es un empleado con menos de 25 años. *R.* 0,2857

26. Una compañía dedicada al montaje de licuadoras usa motores de dos proveedores. La compañía X proporciona el 90% y la compañía Y el otro 10%. Suponga que se sabe que 5% de los motores de la fábrica X son defectuosos, mientras que 3% de los motores de la fábrica Y son defectuosos. Se encuentra que una licuadora que ya ha sido armada tiene el motor defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que este motor haya sido proporcionado por la compañía Y? *R.* 0,0625

27. Los colegios A, B y C tienen 40%, 20% y 10% de hombres, respectivamente. Uno de estos colegios es seleccionado al azar y 8 alumnos son escogidos con reposición. Si obtenemos HHHMMMMM (H para hombre y M para mujer), ¿cuál es la probabilidad de que haya sido seleccionado el colegio C? *R.* 0,0721

28. Una compañía extranjera desea construir un supermercado en el Distrito de Villa El Salvador, Lima Perú. Un elemento vital en esta construcción es un proyecto de un tren eléctrico que une este distrito con el centro de Lima. Si el

Concejo Municipal aprueba el proyecto del tren eléctrico, hay una probabilidad de 0,95 de que la compañía construya el supermercado en tanto que si el tren eléctrico no es aprobado la probabilidad es de sólo 0,15. Basándose en la información disponible, el gerente de la compañía estima que hay una probabilidad de 0,80 de que el tren eléctrico sea aprobado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la Compañía construya el supermercado? *R.* 0,79

b) Dado que el supermercado fue construido, ¿cuál es la probabilidad de que el tren eléctrico haya sido aprobado? *R.* 0,962

29. El servicio de estudios de una empresa, que proyecta concurrir en un mercado donde sólo existiría otra empresa competidora, estima que, al finalizar el ejercicio económico, sus ventas superarán las 200 000 unidades con una probabilidad de:

0,1 si el precio fijado por la empresa competidora para su artículo es bajo.
0,5 si el precio fijado por la empresa competidora por su artículo es medio.
x si el precio fijado por la empresa competidora para su artículo es alto.

Además por situaciones anteriores, el servicio de estudios determina que la probabilidad de que la empresa competidora:

Fije precio "bajo" es de 0,2.
Fije precio "medio" es de 0,5
Fije precio "alto" es de 0,3

También el servicio de estudio de la empresa determina que la probabilidad de que las ventas de la empresa superen las 200 000 unidades es 0,51.
Determine la probabilidad x. *R.* 0,8

30. Un almacén de 20 tubos contiene 16 tubos buenos y 4 tubos defectuosos. Tres tubos son seleccionados al azar y probados sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que?

a) El tercer tubo sea bueno, si los primeros dos fueron buenos *R.* 0,8
b) El tercer tubo sea defectuoso, si uno de los 2 tubos seleccionados es bueno y el otro es defectuoso. *R.* 0,2

31. Supongamos que un instrumento diagnostica una cierta enfermedad del corazón con 95% de precisión cuando se aplica a aquellas personas que tienen la enfermedad y aquellas que no tienen la enfermedad. Si se sabe que 5 de 1000 personas en una cierta población tienen la enfermedad en cuestión, calcule la probabilidad de que un paciente tiene la enfermedad dado que la prueba indica que él la tiene. *R.* 19/218

32. La probabilidad de que la construcción de un conjunto habitacional termine a tiempo es de 17/20, la probabilidad de que no haya huelga en la empresa constructora es de 3/4; la probabilidad de que la construcción termine a tiempo dado que no hubo huelga es 14/15, y la probabilidad de que haya huelga y no se termine la construcción es 1/10. Encuentre:

a) La probabilidad de que la construcción termine a tiempo y no haya huelga. *R.* 7/10

b) La probabilidad de que no haya huelga dado que la construcción termina a tiempo. *R.* 14/17

c) La probabilidad de que la construcción no termine a tiempo dado que hay huelga. *R.* 2/5

33. Cinco personas están designadas para descifrar un mensaje. La probabilidad de que cada uno tiene para descifrarlo es de 0,9

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el mensaje sea descifrado. *R.* 0.99999

b) Dado que el mensaje fue descifrado, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente tres de ellos lo hayan descifrado? *R.* 0,0729

34. Un Ingeniero de control de calidad tiene una probabilidad de 0,85 de diagnosticar correctamente de que el producto es defectuoso, dado que realmente el producto es defectuoso, en tanto que su probabilidad es de 0,35 de diagnosticar incorrectamente como defectuoso si realmente no lo es. Si el 20% de los productos son defectuosos, calcule

a) La probabilidad que al elegir el producto el ingeniero diagnostique como defectuoso. *R.* 0,45

b) La probabilidad que el producto sea defectuoso, si él ha diagnosticado como defectuoso. *R.* 3/55

35. La probabilidad de que un misil lanzado contra un blanco no sea interceptado por un anti-misil es 2/3. Dado que el misil no es interceptado, la probabilidad de que dé en el blanco es 3/4. Si 4 misiles son lanzados independientemente, ¿cuál es la probabilidad de que?:

i) todos ellos den en el blanco *R.* 1/16

ii) al menos uno de ellos da en el blanco *R.* 15/16

¿Cuántos misiles deben ser lanzados de modo que?:

iii) al menos uno no es interceptado con probabilidad $\geq 0{,}95$ R. $n \geq 3$

36. Un estudiante rinde un examen de 30 preguntas. Para cada pregunta hay 5 diferentes respuestas (de los cuales uno es correcta). El estudiante debe responder correctamente por lo menos 25 preguntas para aprobar el examen.

Si él conoce las respuestas correctas de las 20 primeras preguntas y elige una respuesta del resto de las preguntas al azar e independientemente uno del otro, ¿cuál es la probabilidad de que él apruebe el examen?

R. $\sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} \left(\frac{1}{5}\right)^{j} \left(\frac{4}{5}\right)^{10-j}$

37. La probabilidad que una semilla no germine a tiempo es 1/5; la probabilidad que tenga mazorca grande es 2/5; la probabilidad que germine a tiempo y no tenga mazorca grande es 12/25 y la probabilidad que la semilla tenga mazorca grande dado que no germinó a tiempo es 2/5. Encuentre:

a) La probabilidad que no germine a tiempo y no tenga mazorca grande *R.* 3/25

b) La probabilidad que germine a tiempo dado que la mazorca cosechada resultó grande. *R.* 4/5

38. Una compañía de seguros de taxis clasifica choferes como de clase A (buenos), clase B (regular) y la clase C (malos).

La clase A la constituyen el 30% de los choferes que recurren para asegurarse, la clase B el 50% y la clase C, el 20%. La probabilidad de que un chofer de clase A tenga uno o más accidentes en cualquiera de los 12 meses del año es de 0,01, para cada uno de la clase B, es 0,03 y para cada uno de C, es 0,10. La compañía vende a nuestro amigo Jaime una póliza, tiempo después tuvo un accidente. ¿Cuál es la probabilidad que pertenezca a la clase A? ¿clase B?, ¿clase C? *R.* 3/38 , 15/38 , 20/38

39. En un Seminario se inscriben 9 alumnos (5 hombres y 4 mujeres). De acuerdo a una evaluación pre-seminarial los alumnos se clasifican en 3 grupos A, B y C y en la forma siguiente: grupo A, 3 alumnos (sólo hombres); grupo B: 4 alumnos (2 hombres y 2 mujeres) y grupo C: 2 alumnos (sólo mujeres). Un alumno del grupo A tiene una probabilidad de 9/10 de aprobar, uno de B 8/10 y uno del grupo C 7/10. Concluido el seminario se elige al azar un alumno.

a) Si el alumno elegido resulta estar desaprobado, ¿cuál es la probabilidad que pertenezca al grupo B? *R.* 8/17

b) Si el alumno elegido es mujer y está desaprobada, ¿cuál es la probabilidad que pertenezca al grupo C? *R.* 6/17

40. Un maestro y un alumno tiran flechas con un arco.
   i) Punto de vista del maestro: La probabilidad de dejar la flecha al alumno es 0,8, y que éste dé en el blanco si le deja la flecha, es 0,5; si no se lo deja, el maestro hace blanco con probabilidad 0,7
   ii) Punto de vista del alumno: Las probabilidades estimadas son: 0,7; 0,3 y 0,9. Si una flecha hace blanco. Calcule en ambas hipótesis, la probabilidad de que haya lanzado el maestro. *R.* i) 7/27 ii) 9/16

41. Hay 3 monedas en una caja. Una moneda tiene doble cara, la otra moneda es perfecta y la tercera moneda es sesgada y resulta cara en 75% de las veces. Se escoge una moneda al azar de la caja y se lanza una vez. Si el resultado es cara, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea la moneda de doble cara? *R.* 4/9

42. Suponga que cada una de dos tiendas de artículos del hogar (llámelas tienda 1 y tienda 2) vende refrigeradoras de dos marcas (A y B), y además suponga que son las dos únicas tiendas de la ciudad que venden refrigeradoras.
La probabilidad de que alguien compre una refrigeradora en la tienda 1 es 3/4 y la probabilidad de que alguien que se sabe que compra una refrigeradora en la tienda 1 compre la marca A es 1/3. Simultáneamente la probabilidad de que alguien que se sabe que compra una refrigeradora en la tienda 2 compre la marca A es 1/4. Dado que alguien compró una refrigeradora de la marca A, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido de la tienda 1? *R.* 0,8

43. Uno de los propósitos de una auditoría es el de detectar errores de procedimiento o de juicio en el asiento de información contable. Suponga que una firma de contadores está llevando a cabo una auditoría sobre las prácticas contables de una empresa en la cual la afectación de cuentas (de clientes) la hacen tanto por el Departamento de Ventas a Mayoristas como el de Ventas a Minoristas. Se sabe que el 70% de todas las cuentas son de mayoristas y más aún, se sabe que el 10% de las cuentas de mayoristas y el 20% de las cuentas de minoristas tienen algún tipo de error contable. Si los auditores observan un error en una cuenta de clientes, encuentre la probabilidad de que sea de las mayoristas. *R.* 0,53846

44. En un estudio realizado en el Perú, se reportó que 50% de todas las familias peruanas están libres de deudas de compras a plazos., 23% tienen deudas menores de S/. 5 000 y el resto deben más de S/. 5 000. También se hace notar que las familias de ingresos moderados entre S/. 60 000 y S/. 100 000 al año son las que más probablemente tengan una deuda. De hecho el reporte afirma

que 41% de las familias de ingresos moderados (60 000 a 100 000 soles) tienen deudas por más de S/. 5 000, mientras que sólo el 37% de estas familias no tienen deudas. Si se sabe que una familia determinada tiene un ingreso entre S/. 60 000 y S/. 100 000 al año, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una deuda por más de S/. 5 000? *R.* 0,41

45. En un mostrador hay una caja grande y otra pequeña. La grande contiene cinco jabones de color rosado y catorce de color blanco, mientras que la pequeña contiene uno de color rosado y cuatro de color blanco. Se saca al azar, un jabón de la caja pequeña y se deposita en la grande; luego se saca al azar, un jabón de la caja grande y se deposita en la pequeña. Finalmente, se extrae al azar, y sin reposición, dos jabones de la caja pequeña. ¿Cuál es la probabilidad de que estos dos últimos jabones sean de color blanco? *R.* 149/250

46. Cierto insecticida mata en la primera aplicación al 90% de las moscas, pero desarrolla cierta resistencia entre los que sobreviven, de manera que el porcentaje que muere en una aplicación posterior del insecticida es la tercera parte del porcentaje que muere en la aplicación inmediatamente anterior. Calcule la probabilidad de que una mosca:
   a) Sobreviva 3 aplicaciones de insecticida *R.* 0,063
   b) Sobreviva tres aplicaciones de insecticida. si se sabe que sobrevivió las dos primeras *R.* 0,90

47. En una ciudad, el 70% de los adultos escuchan radio, el 40% leen el periódico, y el 10% ve televisión. Entre los que escuchan radio, el 30% lee los periódicos y el 4% ve televisión. El 90% de los que ven televisión lee periódico, y sólo el 2% de la población total adulta lee periódico, ve televisión y escucha radio. Si se elige una persona al azar, se pide:
   a) La probabilidad de que lea el periódico o escuche radio o vea televisión. *R.* 0,892
   b) Si se sabe que lee periódico, ¿cuál es la probabilidad de que vea televisión? *R.* 0,225

48. Una pieza de Equipo Electrónico tiene 3 partes esenciales. Anteriormente, la parte A ha fallado el 20% del tiempo, la parte B 40% del tiempo y la parte C 30% del tiempo. La parte A opera independientemente de las partes B y C. Las partes B y C están interconectadas de tal manera que la falla de cualquiera afecta a la otra, por eso cuando falla la parte C, 2 de cada 3 veces puede fallar también la parte B. Suponga que por lo menos dos de las 3 partes deben operar

para permitir el funcionamiento del equipo. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo funcione? *R.* 0,74

49. En el montaje de un ventilador eléctrico se usa motores de dos fuentes. La compañía A provee el 90% de los motores y la compañía B el otro 10%. Suponga que el 5% de los motores suministrados por la compañía A son defectuosos y el 3% de los motores suministrados por la compañía B son defectuosos. Si en un ventilador armado se encuentra que el motor es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que este motor fue suministrado por la compañía B? *R.* 1/16

50. En vista de los gastos que supone la reparación o sustitución de mercancías defectuosas, la gerencia desearía vigilar la tasa de imperfectas en el proceso de producción. Se pide al ingeniero de control de calidad que examine un plan propuesto para un nuevo proceso de producción de grandes transformadores. En realidad, el nuevo proceso supone dos procesos separados, cada uno de los cuales produce sólo una parte del transformador como última etapa del proceso total. El examen de las máquinas y de las operaciones que intervienen en cada mitad del proceso convence al ingeniero de que hay una probabilidad de 0,0014 de que una parte del proceso produzca una parte defectuosa, y otra de 0,0025 de que lo haga la otra. ¿Qué porcentaje de la producción total del proceso ha de estimarse defectuosa? *R.* 0,0038965 (suponga independencia).

51. Ocho neumáticos de diferentes marcas son clasificados del 1 al 8 (mejor a peor) de acuerdo al desempeño en millas. Si 4 de estos neumáticos son elegidos al azar por un cliente, encuentre la probabilidad de que el mejor neumático entre los seleccionados por el cliente es clasificado tercero entre los 8 originales. *R.* 1/7

52. Si la probabilidad de que una familia tenga exactamente n hijos es 2^{-n}, $n = 1, 2, \ldots$, y si todas las 2^n permutaciones de los sexos de los n hijos son igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad que la familia no tenga hijos hombres? *R.* 1/3

Sugerencia: Sea el evento A: la familia no tiene hijos hombres

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A/B_n)\, P(B_n).$$

Donde B_n es el evento: la familia tiene exactamente n hijos.

53. En el ejercicio 52:

a) Encuentre la probabilidad de que la familia tenga exactamente k hijos hombres

R. $\dfrac{4}{3^{k+1}}$

b) Encuentre la probabilidad condicional de que la familia tenga n hijos dado que tiene exactamente k hijos hombres

R. $\dfrac{\binom{n}{k} 3^{k+1}}{4^{n+1}}$, $\forall k \geq 1$ y $n \geq 1$

54. En un experimento animal, cada día cierto animal es sometido a un cierto conjunto de estímulos con la finalidad de sacar una respuesta particular. Sea el evento A_k: el animal responde a la respuesta deseada en el k-ésimo día. Suponga que $P(A_{k+1}/A_k) = \beta$ y $P(A_{k+1}/A_k^c) = \alpha$, donde $0 < \alpha < \beta \leq 1$

a) Sea $p_k = P(A_k)$. Pruebe que $p_{k+1} = \alpha + (\beta - \alpha)p_k$.

b) Si $\beta = 1$ y $p_1 = 0$, pruebe que $p_k = 1 - (1 - \alpha)^{k-1}$.

c) Pruebe que $\lim\limits_{k \to +\infty} p_k = \dfrac{\alpha}{1 + \alpha - \beta}$.

55. Si dos dados balanceados son lanzados, ¿cuál de los siguientes pares de eventos son independientes?

a) A: a lo más aparece el punto 2 en el primer dado
B: por lo menos aparece el punto 2 en el segundo dado
R: son independientes

b) A: el número total de puntos en los dos dados es impar
B: el número total de puntos en los dos dados excede a 7

56. Un dado balanceado es lanzado repetidamente. Si 1 ó 6 puntos aparecen en el primer lanzamiento, usted gana. Si k puntos aparecen en el primer lanzamiento, donde $2 \leq k \leq 5$, el dado es lanzado hasta que 1 ó k ó 6 puntos aparezcan. Si el punto k aparece antes de 1 ó 6, entonces usted gana. En otro caso usted pierde. Calcule la probabilidad de que usted gane. *R.* 5/9

Sugerencia: Considere el evento A_n: usted gana exactamente después de n lanzamientos. Luego, encuentre la probabilidad de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

57. Un vendedor de bienes raíces tiene ocho llaves maestras para abrir varias casas, de las cuales sólo una abre cualquiera de ellas. Si generalmente el 40% de las casas están abiertas, ¿cuál es la probabilidad de que el vendedor pueda entrar a una casa específica si antes de salir de su oficina selecciona al azar llaves?

R. 5/8

58. Una persona tiene dos automóviles, uno de marca Nissan y el otro marca Toyota. Para ir a su trabajo utiliza el automóvil Nissan tres cuartas partes de las veces y una cuarta parte el automóvil Toyota. Cuando emplea el Nissan, regresa a casa a las 5.30 p.m. alrededor del 75% de las veces, y si utiliza el Toyota, regresa a la misma hora el 60% de las veces. Si cierto día regresa a casa a las 5.35 p.m., ¿cuál es la probabilidad de que haya usado el automóvil Nissan?

R. 15/23

59. Se sabe que el veredicto dado por un Juez es 90% confiable cuando el sospechoso es culpable y un 99% confiable cuando es inocente. En otras palabras, declara inocente al 10% de los culpables y declara culpable al 1% de inocentes. Si el sospechoso se selecciona entre un grupo de personas, de las cuales sólo el 5% ha cometido un delito alguna vez y el juez lo declara culpable, ¿cuál es la probabilidad de que la persona sea inocente?

R. 0,174

60. Se considera una población en la que: el 40% de las familias tienen automóvil, el 20% tienen ingresos superiores a S/. 10 000 mensuales, el 50% tienen ingresos entre S/. 5 000 y S/. 10 000. De los que tienen automóvil el 50% tienen ingresos superiores a S/. 5 000, y de los que no tienen automóvil el 60% tienen ingresos entre S/. 5 000 y S/. 10 000. Se realiza una encuesta al azar en dicha población. Se pide:

a) ¿Qué porcentaje de familias que no tienen automóvil tienen ingresos superiores a S/. 10 000?

R. 0,325

b) ¿Son el poseer automóvil y los ingresos de la familia independientes en la población?

R. No

61. Un cierto componente de un motor de fogueo falla 5% de las veces cuando el motor es prendido. Para obtener mayor confiabilidad en el funcionamiento del motor, se duplica ese componente n veces. Entonces el motor solamente falla si todos los n componentes fallan. Suponga que las fallas de los componentes son independientes unas de otras. ¿Cuál es el menor valor de n que puede ser usado para garantizar que el motor funcione el 99% de las veces?

R. 2

62. Supóngase que se ha aplicado una prueba al nivel de secundaria para verificar si los estudiantes son o no aptos para estudiar las diferentes carreras de la Universidad y se ha obtenido la siguiente experiencia. De los estudiantes que

cursaron satisfactoriamente el quinto de secundaria, el 80% de ellos aprobó el examen. De los estudiantes que no hicieron buenos estudios durante el quinto año de secundaria, el 40% de ellos aprobó el examen. Se supone que el examen no se usó como prueba de admisión. Si se sabe que sólo el 70% de los alumnos de quinto año de secundaria estudian satisfactoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante que pasó la prueba sea un estudiante satisfactorio?

R. 14/17

63. Diga si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique su respuesta.

a) Si $P(A) = P(B) = p$, entonces $P(A \cap B) \leq p^2$

b) Si $P(A) = P(B^c)$, entonces $A^c = B$

c) Si $P(A) = 0$, entonces $A = \emptyset$

d) Si $P(A) = 0$, entonces $P(A \cap B) = \emptyset$

e) Si $P(A/B) > P(A) \Rightarrow P(B/A) > P(B)$

f) Si $P(A) > P(B)$, entonces $P(A/C) > P(B/C)$

g) Si $P(A\,B) = P(B)$, entonces A y B son independientes.

h) Si $P(B/A^c) = P(B/A) \Rightarrow A$ y B son independientes

64. Pruebe: Si $P(A^c) = \alpha$ y $P(B^c) = \beta$, entonces $P(A \cap B) \geq 1 - \alpha - \beta$.

65. Cuatro viciosos de cerveza (digamos I, II, III y IV) clasifican 3 diferentes marcas de cerveza (digamos A, B y C) con los ojos vendados. Cada vicioso clasifica las 3 cervezas como 1 (la cerveza que a él le gusta más) 2 y 3, y entonces la clasificación asignada a cada marca de cerveza es sumada. Suponga que los viciosos realmente no pueden diferenciar las marcas de cerveza, de modo que cada uno asignan la clasificación al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cerveza A reciba un total de puntos igual a 4?

R. $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna cerveza reciba un total de puntos igual a 4?

R. $3\left(\frac{1}{3}\right)^4$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna cerveza reciba un total de punto igual a 5 o menos?

$$R.\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4{,}3\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{5}{27}$$

66. Si r bolas son colocadas aleatoriamente en n urnas (cada bola tiene una probabilidad de $1/n$ de ir a la primera urna), ¿cuál es la probabilidad de que la primera urna contenga exactamente k bolas?

$$R:\ \frac{\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}}{n^r}$$

67. a) Si $P(A) = P(B) = P(A/B) = 1/2$, ¿$A$ y B son independientes?

b) Si A y B son eventos independientes y $P(A) = P(B) = 1/2$, calcule $P[A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)]$

c) Si $P(B) = P(A/B) = P(C/A \cap B) = 1/2$, halle $P(A \cap B \cap C)$.

d) Suponga que B_1, B_2 y B_3 son eventos mutuamente excluyentes.

Si $P(B_j) = \frac{1}{3}$ y $P(A/B_j) = \frac{j}{6}$, para $j = 1;\ 2;\ 3$, calcule $P(A)$

68. En un juego de dados un jugador lanza un par de dados dos veces. Él gana el juego si los 2 totales de los lanzamientos no difieren en más de 2 con la siguiente excepción: si él obtiene un 3 en su primer lanzamiento, él debe obtener 4 en el segundo lanzamiento, y si él obtiene un 11 en el primer lanzamiento, él debe obtener 10 en el segundo lanzamiento. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

$R.$ Sean los eventos A: el jugador gana el juego, B_j: obtiene un total j en el primer lanzamiento. Entonces

$$P(A) = \sum_{j=2}^{12} P(B_j)(P(A/B_j)$$

6 VARIABLES ALEATORIAS Y MEDIDAS DE POSICIÓN Y DISPERSIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

6.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se ha presentado algunos modelos probabilísticos a través de espacios muestrales bien simples. Esto facilitó bastante la concepción del concepto de probabilidad y la obtención de algunas propiedades fundamentales de la teoría de probabilidad. Sin embargo, para estudiar situaciones prácticas más generales, necesitamos ampliar estos conceptos para que tengamos modelos probabilísticos que representen a todos los tipos de variables definidas en el capítulo 2. Así, todo lo que hemos presentado en ese capítulo para hacer un tratamiento descriptivo de las variables cualitativas y cuantitativas tendrá su correspondiente modelo teórico.

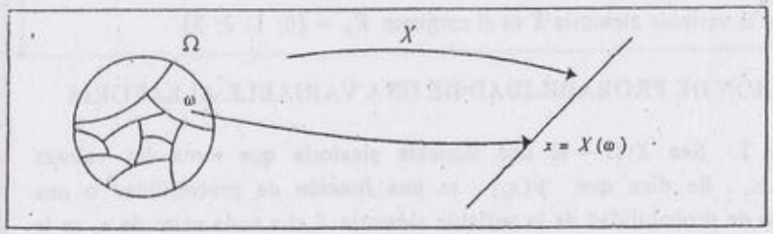
El conocimiento de modelos probabilísticos para variables cuantitativas es muy importante, y gran parte de este capítulo es dedicado a la construcción de este modelo (o sobre sus parámetros). Estas variables a las cuales asociamos modelos probabilísticos, se llaman variables aleatorias.

6.2 CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

Definición 1.- Sea E un experimento y Ω el espacio muestral asociado a este experimento. Una función $X: \Omega \to \mathbb{R}$ tal que a cada elemento $\omega \in \Omega$ se le asocia un número real $x = X(\omega)$ se denomina *variable aleatoria*.

El dominio de la variable aleatoria X es todo Ω, y el rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que se denota por R_X.

Esquemáticamente, se tiene la situación en la figura 6.1.



Observación 1.- En la definición de variable aleatoria vemos que dado un punto $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = x \in \mathbb{R}$ es simplemente un número real que de ningún modo es aleatorio. Sin embargo, es aleatorio el valor particular que se asigna a X, puesto que el resultado ω del experimento aleatorio no se conoce con certeza.

Observación 2.- Sea $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria que toma los valores $x_1, x_2, \ldots$, es decir, el rango de X es $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Para cada i, $X = x_i$ denota el siguiente evento

$$X = x_i = \{\omega \in \mathbb{R} \,/\, X(\omega) = x_i\}, \ \forall\, i = 1; 2; 3; \ldots$$

También se denota la probabilidad de este evento por $P[X = x_i]$.

Ejemplo 1.- Sea el experimento E: lanzar 3 monedas y observar el resultado.
El espacio muestral asociado a este experimento es

$$\Omega = \{(C;C;C), (C;C;S), (C;S;C), (S;C;C), (C;S;S), (S;C;S), (S;S;C), (S;S;S)\}$$

Sea X: número de caras obtenidas en las 3 monedas, entonces X es una variable aleatoria que toma los siguientes valores

$X = 0$ corresponde al evento $(S;S;S)$ con probabilidad 1/8
$X = 1$ corresponde al evento $(C;S;S), (S;C;S)$ y $(S;S;C)$ con probabilidad 3/8
$X = 2$ corresponde al evento $(C;C;S), (C;S;C)$ y $(S;C;C)$ con probabilidad 3/8
$X = 3$ corresponde al evento $(C;C;C)$ con probabilidad 1/8

En resumen, las probabilidades de estos eventos son

$$P[X = 0] = P[(S;S;S)] = \frac{1}{8}$$

$$P[X = 1] = P[(C;S;S), (S;C;S), (S;S;C)] = \frac{3}{8}$$

$$P[X = 2] = P[(C;C;S), (C;S;C), (S;C;C)] = \frac{3}{8}$$

$$P[X = 3] = P[(C;C;C)] = \frac{1}{8}$$

El rango de la variable aleatoria X es el conjunto $R_X = \{0; 1; 2; 3\}$.

6.3 FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Definición 2.- Sea $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria que toma los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Se dice que $p(x_i)$ es una función de probabilidad o una distribución de probabilidad de la variable aleatoria X si a cada valor de x_i se le asocia su probabilidad de ocurrencia, esto es,

$$p(x_i) = P[X = x_i] = P[\omega \in \mathbb{R} \,/\, x(\omega) = x_i], \ \forall\, i = 1; 2; 3; \ldots$$

Ejemplo 2.- Considere el experimento de lanzar 2 dados y observar los números que aparecen en las caras superiores.

a) Encuentre la función de probabilidad de la variable aleatoria
X: suma de los números que aparecen en las caras superiores de los dos dados.

b) Encuentre la función de probabilidad de la variable aleatoria
Y: diferencia de los números que aparecen en las caras superiores de los dos dados.

c) Encuentre la función de probabilidad de la variable aleatoria
Z: máximo de los dos números que aparecen en las caras superiores de los dos dados.

Solución.- El espacio muestral asociado al experimento es

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), \\ (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), \\ (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6), \\ (4;1), (4;2), (4;3), (4;4), (4;5), (4;6), \\ (5;1), (5;2), (5;3), (5;4), (5;5), (5;6), \\ (6;1), (6;2), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6) \end{matrix}\right\} = \{(i;j) / i = 1; \ldots; 6, \ j = 1; \ldots; 6\}$$

a) En este experimento los posibles valores de $x(\omega) = i + j$, donde $\omega = (i;j)$, son 2; 3; 4; ...; 12.
Se tiene que $X = 2$ corresponde al evento $(1;1)$ con probabilidad de 1/36, esto es,

$$P[X = 2] = P[(1;1)] = \frac{1}{36}$$

Una consideración similar de los otros casos nos lleva a la siguiente distribución de probabilidades

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x) = P[X = x]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b) En forma análoga, los valores de la variable aleatoria $Y(\omega) = i - j$, donde $\omega = (i;j)$, son $-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$, ocurren como sigue

$Y = -5$ si y sólo si ocurre (1;6)
$Y = -4$ si y sólo si ocurre (1;5) ó (2;6)
$Y = -3$ si y sólo si ocurre (1;4), (2;5) ó (3;6)
$Y = -2$ si y sólo si ocurre (1;3), (2;4), (3;5) ó (4;6)
$Y = -1$ si y sólo si ocurre (1;2), (2;3), (3;4), (4;5) ó (5;6)
$Y = 0$ si y sólo si ocurre (1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), ó (6;6)

$Y = 1$ si y sólo si ocurre (2;1), (3;2), (4;3), (5;4) ó (6;5)
$Y = 2$ si y sólo si ocurre (3;1), (4;2), (5;3), (6;4)
$Y = 3$ si y sólo si ocurre (4;1), (5;2) ó (6;4)
$Y = 4$ si y sólo si ocurre (5;1) ó (6;2)
$Y = 5$ si y sólo si ocurre (6;1)

Por tanto, según el espacio muestral Ω, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Y, $p(y) = P[Y = y]$, es dada en la siguiente tabla:

y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p(y) = P[Y = y]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

c) Los valores de la variable aleatoria Z, esto es, $Z(\omega) = \text{máx}(i;j)$, donde $\omega = (i;j)$, son: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Estos valores ocurren de la siguiente manera

$Z = 1$ si y sólo si ocurre (1;1)
$Z = 2$ si y sólo si ocurre (1;2), (2;1) ó (2;2)
$Z = 3$ si y sólo si ocurre (1;3), (3;1), (3;2), (2;3) ó (3;3)
$Z = 4$ si y sólo si ocurre (1;4), (4;1), (2;4), (4;2), (4;3), (3;4) ó (4;4)
$Z = 5$ si y sólo si ocurre (1;5), (5;1), (2;5), (5;2), (3;5), (5;3), (4;5), (5;4) ó (5;5).
$Z = 6$ si y sólo si ocurre (1;6), (6;1), (2;6), (6;2), (3;6), (6;3), (4;6), (6;4), (5;6), (6;5) ó (6;6)

Luego, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Z se muestra en la siguiente tabla

z	1	2	3	4	5	6
$p(z) = P[Z = z]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Ejemplo 3.- Tres bolas son aleatoriamente seleccionadas sin reposición de una urna que contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20. Si Edwin apuesta que al menos una de las bolas seleccionadas tiene un número mayor o igual que 17, ¿cuál es la probabilidad de que Edwin gane la apuesta?

Solución.

Sea X: el máximo de los números anotados en 3 bolas extraídas de la urna sin reposición.

Entonces X es una variable aleatoria que toma los valores 3; 4; ...; 20.

El número total de maneras de seleccionar 3 bolas de un total de 20 es $\binom{20}{3} = 1\,140$, lo cual indica que el espacio muestral tiene 1 140 elementos simples.

Por otro lado, $X = i$ $(i = 3; 4; ...; 20)$ corresponde al evento de que una bola de las 3 seleccionadas está numerada con i y las 2 bolas restantes con números comprendidos entre 1 y $i - 1$.

Luego, el número de maneras de obtener una bola numerada con i y 2 bolas comprendidas entre 1 y $i - 1$ es $\binom{1}{1}\binom{i-1}{2}$. Al suponer que cada una de las $\binom{20}{3} = 1\,140$ posibles selecciones son igualmente probables, se tiene

$$P[X = i] = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}}, \quad i = 3; 4; ...; 20$$

De esta relación, se obtiene

$$P[X = 17] = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{2}{19} = 0{,}105$$

$$P[X = 18] = \frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{34}{285} = 0{,}119$$

$$P[X = 19] = \frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{51}{380} = 0{,}134$$

$$P[X = 20] = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{20} = 0{,}150$$

Como el evento $\{X \geq 17\}$ es la unión de los eventos disjuntos $\{X = i\}$, $i = 17; 18; 19; 20$, entonces la probabilidad de que Edwin gane la apuesta es

$$P[x \geq 17] = P[X = 17] + P[X = 18] + P[X = 19] + P[X = 20] = 0{,}508$$

Ejemplo 4.- Tres bolas son aleatoriamente seleccionadas de una urna que contiene 3 bolas blancas, 3 rojas y 5 negras. Suponga que se gana S/. 1 por cada bola blanca seleccionada y se pierde S/. 1 por cada bola roja seleccionada. Halle la función de probabilidad de la variable aleatoria X, definida como ganancia neta obtenida en el experimento.

Solución. Sean los eventos

R: bola extraída es roja

B: bola extraída es blanca

N: bola extraída es negra

De acuerdo al experimento, la variable aleatoria X toma los valores: $-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$. Estos valores de la variable aleatoria X ocurren del siguiente modo

$X = -3$ si y sólo si ocurre el evento RRR

$X = -2$ si y sólo si ocurre el evento RRN

$X = -1$ si y sólo si ocurre el evento RNN ó RRB

$X = 0$ si y sólo si ocurre el evento NNN ó BRN

$X = 1$ si y sólo si ocurre el evento BNN ó BBR

$X = 2$ si y sólo si ocurre el evento BBN

$X = 3$ si y sólo si ocurre el evento BBB

Por lo tanto, las probabilidades para estos valores son

$$P[X=-3] = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{1}{165} = P[X=3]$$

$$P[X=-2] = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{15}{165} = P[X=2]$$

$$P[X=-1] = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}+\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{39}{165} = P[X=1]$$

$$P[X=0] = \frac{\binom{5}{3}+\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{55}{165}$$

Esquemáticamente, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X es dada en la siguiente tabla

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p(x) = P[X=x]$	$\frac{1}{165}$	$\frac{15}{165}$	$\frac{39}{165}$	$\frac{55}{165}$	$\frac{39}{165}$	$\frac{15}{165}$	$\frac{1}{165}$

La probabilidad de que se gane dinero en el experimento es

$$\sum_{i=1}^{3} P[X=i] = P[X=1]+P[X=2]+P[X=3] = \frac{55}{165} = \frac{1}{3}$$

6.4 DISTRIBUCIÓN ACUMULADA DE PROBABILIDAD

Definición 3.- La función de distribución acumulada de una variable aleatoria X, denotada por F, es una función $F: \mathbb{R} \to [0;1]$ definida por la regla de correspondencia

$$F(x) = P[X \le x] = P[\{\omega : X(\omega) \le x\}],\ \forall x \in \mathbb{R}$$

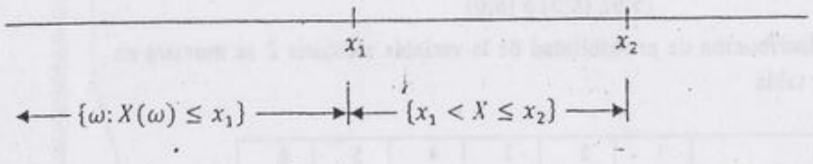
En otras palabras, $F(x)$ denota la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores menores o iguales a x.

La función de distribución acumulada F de una variable aleatoria X tiene las siguientes propiedades

Propiedad 1.- $F(x)$ es una función no decreciente, esto es, si para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$, entonces $F(x_1) \le F(x_2)$

Demostración. Si $x_1 < x_2$, entonces se tiene

$$\{X \le x_2\} = \{\omega : X(\omega) \le x_2\} = \{X \le x_1\} \cup \{x_1 < X \le x_2\}$$



y $\{X \le x_1\} \cap \{x_1 < X \le x_2\} = \emptyset$

Luego,

$$F(x_2) = P[X \le x_2] = P[X \le x_1] + P[x_1 < X \le x_2] \ge P[X \le x_1] = F(x_1)$$

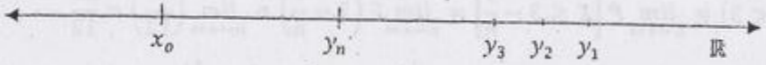
Por tanto, $F(x_1) \le F(x_2)$.

Propiedad 2.- $F(x)$ es una función continua por la derecha, esto es,

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n\ge1}$ una sucesión decreciente de números reales, esto es,

$$y_1 > y_2 > \cdots > y_n > y_{n+1} > \cdots,\ \text{tal que}\ \lim_{n\to+\infty} y_n = x_0$$



Entonces el evento $\{\omega: X(\omega) \leq x_0\} = \{X \leq x_0\}$ es la intersección de todos los eventos de la forma $\{X \leq y_n\}$.

Luego, si $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x_0$, *entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} \{X \leq y_n\} = \{X \leq x_0\}$

Así, por el teorema 10 del capítulo 5, se tiene

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x) = \lim_{n\to+\infty} P[X \leq y_n] = P\left[\lim_{n\to+\infty} \{X \leq y_n\}\right] = P[X \leq x_0]$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$.

Propiedad 3.- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Luego, se puede escribir

$$F(-\infty) = 0 \text{ y } F(+\infty) = 1$$

Demostración.

i) Sea $\{b_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales divergente a $-\infty$, esto es, $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$. Entonces la sucesión de eventos $\{X \leq b_n\}$ converge al evento $\{X < -\infty\} = \emptyset$, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} \{X \leq b_n\} = \{X < -\infty\} = \emptyset$.

Luego, por el teorema 10 del capítulo 5, se obtiene

$$\lim_{n\to+\infty} F(b_n) = \lim_{b_n\to-\infty} P[X \leq b_n] = P\left[\lim_{b_n\to-\infty} \{X \leq b_n\}\right] = P[\emptyset] = 0$$

Por tanto, $F(-\infty) = 0$.

ii) Sea $\{C_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales divergente a $+\infty$, esto es, $\lim_{n\to+\infty} C_n = +\infty$. Entonces la sucesión de eventos $\{X \leq b_n\}_{n\geq 1}$ converge al evento $\{X < \infty\} = \Omega$, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} \{X \leq b_n\} = \{X < \infty\} = \Omega$.

Luego, por la propiedad de la continuidad de probabilidad, se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} F(b_n) = \lim_{b_n\to+\infty} P[X \leq b_n] = P\left[\lim_{b_n\to+\infty} \{X \leq b_n\}\right] = P[X < \infty] = P(\Omega) = 1$$

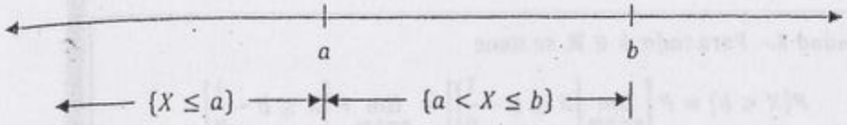
Por tanto, $F(+\infty) = 1$.

Propiedad 4.- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se tiene

$$P[a < X \leq b] = P[X < b] - P[X \leq a] = F(b) - F(a)$$

Demostración. Si $a < b$, entonces el evento $\{X \leq b\}$ se puede escribir como la unión de eventos mutuamente excluyentes $\{X \leq a\}$ y $\{a < X \leq b\}$, esto es,

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$$



Luego, $P[X \leq b] = P[X \leq a] + P[a < X \leq b]$

Por tanto,

$$P[a < X \leq b] = P[X \leq b] - P[X \leq a] = F(b) - F(a)$$

Propiedad 5.- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$, se tiene

$$P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a) + P[X = a]$$

Demostración. Si $a \leq b$, entonces el evento $\{X \leq b\}$ se puede expresar como la unión de eventos no disjuntos $\{X \leq a\}$ y $\{a \leq X \leq b\}$, esto es,

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a \leq X \leq b\}$$

Luego, por el teorema 6 del capítulo 5, se tiene

$$P[X \leq b] = P[X \leq a] + P[a \leq X \leq b] - P[\{X \leq a\} \cap \{a \leq X \leq b\}]$$
$$= F(a) + P[a \leq X \leq b] - P[X = a]$$

Por tanto,

$$P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a) + P[X = a]$$

Propiedad 6.- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, se tiene

$$P[a < X < b] = F(b) - F(a) - P[X = b]$$

Demostración. Ejercicio para el lector.

Propiedad 7.- Para todo $b \in \mathbb{R}$, se tiene

$$P[X > b] = 1 - P[X \leq b] = 1 - F(b)$$

Demostración. Para todo $b \in \mathbb{R}$, el evento Ω se puede escribir como la unión de eventos disjuntos $\{X \leq b\}$ y $\{X > b\}$, esto es, $\{X \leq b\} \cup \{X > b\} = \Omega$

Luego,

$$P[X \le b] + P[X > b] = 1$$

Por tanto,

$$P[X > b] = 1 - P[X \le b] = 1 - F(b)$$

Propiedad 8.- Para todo $b \in \mathbb{R}$, se tiene

$$P[X < b] = P\left[\lim_{n\to+\infty}\left\{X \le b - \frac{1}{n}\right\}\right] = \lim_{n\to+\infty} P\left[X \le b - \frac{1}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} F\left(b - \frac{1}{n}\right)$$

Ejemplo 5.- Suponga que la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X es dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ \frac{x}{2}, & si\ 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3}, & si\ 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{12}, & si\ 2 \le x < 3 \\ 1, & si\ x > 3 \end{cases}$$

a) Esboce la gráfica de $F(x)$.

b) Calcule

i) $P[X < 3]$ ii) $P[X = 1]$ iii) $P[X > 1/2]$ iv) $P[2 < X \le 4]$

Solución.

a) La gráfica de $F(x)$ se muestra en la figura 6.2.

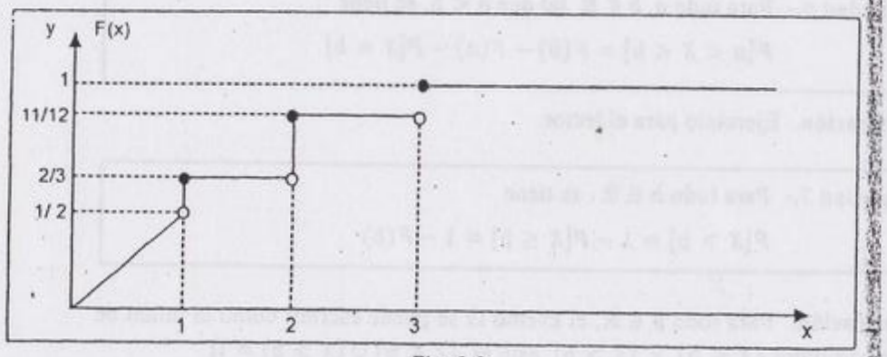


Fig. 6.2

b) i) $P[X < 3] = \lim_{n\to+\infty} P\left[X \le 3 - \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty} F\left(3 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{11}{12}\right) = \frac{11}{12}$

ii) $P[X = 1] = P[X \le 1] - P[X < 1] = F(1) - \lim_{n\to+\infty} F\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{2}{3} - \lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

iii) $P\left[X > \frac{1}{2}\right] = 1 - P\left[X \le \frac{1}{2}\right] = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

iv) $P[2 < X \le 4] = F(4) - F(2) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

EJERCICIOS

1. Suponga que la variable aleatoria X toma valores -2; 0; 1 y 4 con probabilidades siguientes

$$P[X = -2] = 0{,}4\ ,\ P[X = 0] = 0{,}1\ ,\ P[X = 1] = 0{,}3\ y\ P[X = 4] = 0{,}2$$

Halle la función de distribución acumulada de X.

2. Supongamos que una moneda es lanzada repetidamente hasta obtener cara por primera vez, y sea X la variable aleatoria que denota el número de lanzamientos que son necesarios para obtener cara por primera vez. Halle la función de distribución acumulada de X.

3. Suponga que la función de distribución acumulada F de una variable aleatoria X es dada en la figura 6.3.

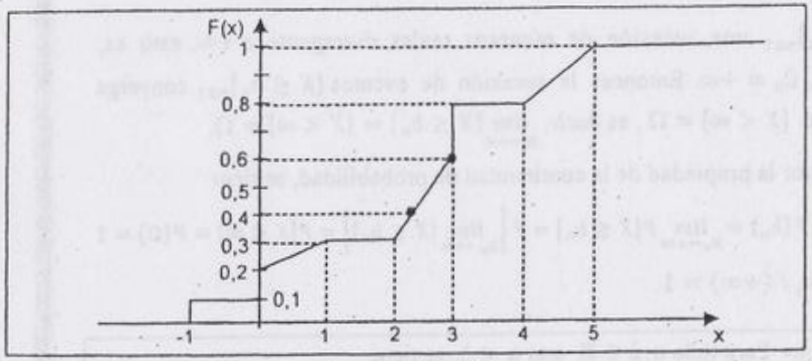


Fig. 6.3

Halle cada una de las siguientes probabilidades

a) $P[X=-1]$ b) $P[X<0]$ c) $P[X\leq 0]$
d) $P[X=1]$ e) $P[0<X\leq 3]$ f) $P[0<X<3]$
g) $P[0\leq X\leq 3]$ h) $P[1<X\leq 2]$ i) $P[1\leq X\leq 2]$
j) $P[X>5]$ k) $P[X\geq 5]$ l) $P[3\leq X\leq 4]$

4. Suponga que la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X es dada por

$$F(x)=\begin{cases}0, & si\ x<0\\ 1-e^{-x}, & si\ x\geq 0\end{cases}$$

Halle las siguientes probabilidades

a) $P[X\leq -2]$ $R.\ 0$ b) $P[X>-1]$ $R.\ 1$
c) $P[X=0]$ $R.\ 0$ d) $P[X>0]$ $R.\ 1$
e) $P[X\leq 1]$ $R.\ 1-e^{-1}$ f) $P[-1\leq X\leq 1]$ $R.\ 1-e^{-1}$
g) $P[X=2]$ $R.\ 0$ h) $P[2\leq X\leq 3]$ $R.\ e^{-2}-e^{-3}$
i) $P[X>2]$ $R.\ e^{-2}$

5. Suponga que la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X es dada por

$$F(x)=\begin{cases}e^{x}, & si\ x<-\ln 2\\ \frac{1}{2}, & si\ -\ln 2<x\leq 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & si\ x>0\end{cases}$$

Halle las siguientes probabilidades

a) $P[X<-1]$ $R.\ e^{-1}$ b) $P[-1<X<0]$ $R.\ 0{,}13212$
c) $P[X>1]$ $R.\ 1/2\,e^{-1}$ d) $P[X<3]$ $R.\ 1-1/2\,e^{-3}$
e) $P[-4<X\leq 4]$ $R.\ 0{,}972527$

6. Suponga que un número real x es seleccionado al azar en el intervalo $I=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 0\leq x\leq 1\}$ de tal manera que la probabilidad de que x pertenezca a cualquier subintervalo de I es igual a la longitud del subintervalo. Halle la función de distribución acumulada de X y esboce su gráfica.

7. Suponga que un punto en el plano XY es elegido al azar en el interior de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$, de modo que la probabilidad de que el punto pertenezca a cualquier región que está en el interior del círculo es proporcional al área de la región. Sea Z una variable aleatoria que denota la distancia del centro del círculo al punto. Halle la función de distribución acumulada de Z y esboce su gráfica.

6.5 VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Definición 4.- Se dice que una función $X:\Omega\to\mathbb{R}$ es una variable aleatoria discreta si el rango de X es un conjunto finito o infinito numerable, esto es, existe un conjunto finito $R_X=\{x_1,\dots,x_k\}\subset\mathbb{R}$ (o conjunto infinito numerable) tal que

$X(\omega)\in R_X, \forall\ \omega\in\Omega$

Ejemplo 6.- La variable aleatoria definida en el ejemplo 1 es una variable aleatoria con un número finito de posibles valores, esto es,

$R_X=\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$

Ejemplo 7.- Sea X la variable aleatoria que denota el número de veces que se lanza al aire una moneda correcta antes de que aparezca la primera cara. El espacio muestral asociado a este experimento es

$\Omega=\{C,SC,SSC,SSSC,\dots\}$ y

$X(C)=1,\ X(SC)=2,\ X(SSC)=3,\dots$

Luego, $R_X=\{1;\ 2;\ 3;\dots\}$ es un conjunto infinito numerable. Por tanto, X es una variable aleatoria discreta con un número infinito de posibles valores.

Definición 5.- (Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta)
Sea X una variable aleatoria discreta con rango $R_X=\{x_1,x_2,\dots\}$.
Se llama función de probabilidad de la variable aleatoria X a la función $p(x)$ definida por la regla de correspondencia

$$p(x)=P[X=x]=\sum_{\{\omega\in\Omega\ /\ X(\omega)=x_j\}}P[\{\omega\}]\ ,\ \text{si } x=x_j,\qquad j=1;\ 2;3;\dots$$

Esta función de probabilidad, llamada también función de cuantía de la variable aleatoria X, satisface las siguientes condiciones:

i) $p(x)>0\ ,\ \forall\ x\in R_X=\{x_1,x_2,\dots\}$
ii) $\sum_{x\in R_X}p(x)=\sum_{j=1}^{\infty}p(x_j)=1$
iii) $p(x)=0\ ,\ si\ x\neq x_j\ ,\ j=1;\ 2;\ 3;\dots$

Observación 3.- El dominio de la función de probabilidad $p(x)$ de una variable aleatoria discreta X es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y su rango es un subconjunto del intervalo $[0; 1]$. Esquemáticamente, se tiene (Fig. 6.4).

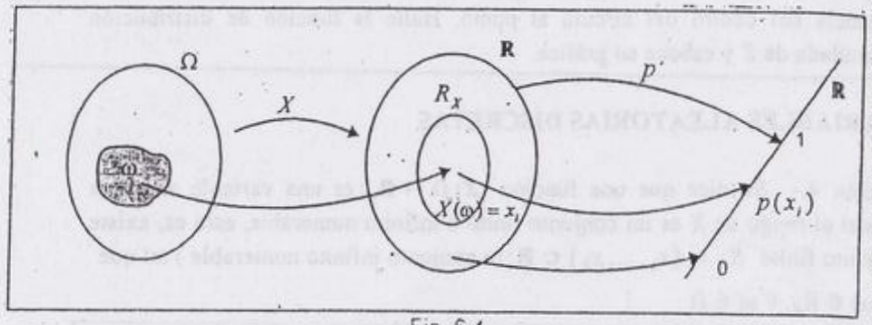


Fig. 6.4

Observación 4.- Al conjunto de pares $\{(x; p(x)), \forall x \in R_X\}$ se denomina distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X, y usualmente se representa en una tabla de la forma siguiente

Tabla: Distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X.

x	x_1	x_2	.....	x_k
$p(x) = P[X = x]$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	.....	$p(x_k)$

También es útil representar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X en forma gráfica. Dicha gráfica se obtiene uniendo los puntos $(x; p(x))$ con el eje X por medio de una línea vertical continua o punteada. La figura 6.5 muestra la gráfica de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X.

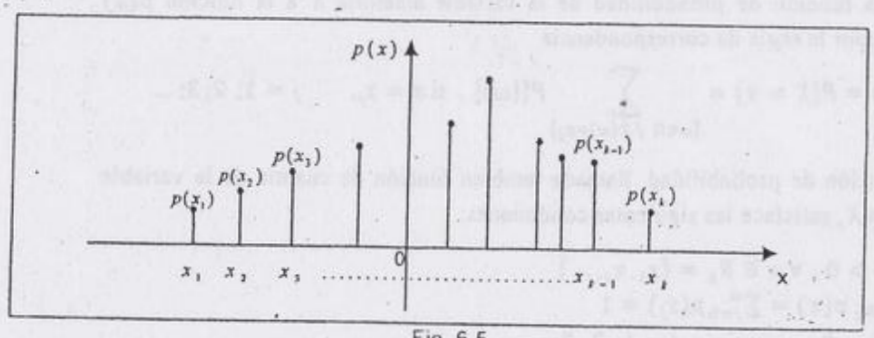


Fig 6.5

Ejemplo 8.- Halle la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, definida como el número de caras que se obtienen al arrojar 5 monedas.

Solución. Se tiene X: número de caras que se obtiene al arrojar 5 monedas.

i) El valor de la variable aleatoria X, esto es, $X = x$ puede ser cualquiera de los enteros 0; 1; 2; 3; 4 ó 5. En consecuencia, el rango de X es $R_X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

ii) El espacio muestral asociado a este experimento tiene $2^5 = 32$ elementos. Luego, el denominador para todas las probabilidades y, por lo tanto, para nuestra función de probabilidad es 32. Para calcular el número de formas de obtener, digamos 3 caras, necesitamos el número de formas de separar cinco resultados en dos celdas con 3 caras y dos sellos asignados a la otra. Esto puede hacerse de $\binom{5}{3} = 10$ maneras. En general, x caras y $5 - x$ sellos pueden ocurrir en $\binom{5}{x}$ formas, donde x puede tomar valores 0; 1; 2; 3; 4 ó 5. Así, la función de probabilidad es dada por

$$p(x) = P[X = x] = \frac{\binom{5}{x}}{32}, \; x = 1; 2; 3; 4; 5$$

iii) La tabla de distribución de probabilidad de esta función es

x	0	1	2	3	4	5
$p(x) = P[X = x]$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

iv) El diagrama de barras de esta distribución se muestra en la figura 6.6.

v) De los pasos anteriores, se tiene

a) $p(x) > 0, \; \forall x \in R_X$

b) $\sum_{x=0}^{5} p(x) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = 1$.

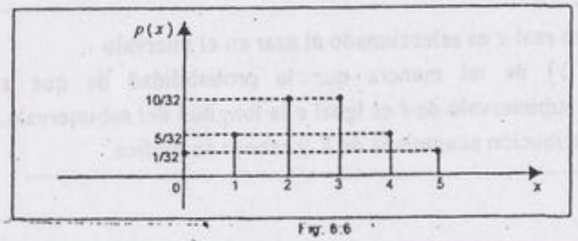


Fig. 6.6

Ejemplo 9.- La función de probabilidad de una variable aleatoria X es dada por $p(x) = \dfrac{c\lambda^x}{x!}$, $x = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$, donde λ es un número positivo.

a) Encuentre el valor de c b) Calcule $P[X = 2]$

Solución.

a) Como $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$, entonces se tiene $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} \frac{c\lambda^x}{x!} = 1$,

lo cual es equivalente a: $\displaystyle c\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = 1$

Al emplear que $\displaystyle e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, se tiene

$c\,e^{\lambda} = 1$, de donde $c = e^{-\lambda}$

b) $P[X = 2] = p(2) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} = \dfrac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda}$

Definición 6.- Sea X una variable aleatoria discreta con rango $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y función de probabilidad

$$p(x_j) = P[X = x_j],\ j = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots$$

La función de distribución acumulada de probabilidad de la variable aleatoria discreta X, denotada por $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es dada por

$$F(x) = P[X \le x] = \sum_{\{j: x_j \le x\}} p(x_j) = \sum_{\{j: x_j \le x\}} P[X = x_j]$$

Ejemplo 10.- En el lanzamiento simultáneo de dos dados legales, consideremos las siguientes variables aleatorias

X: número de puntos obtenidos en el primer dado

Y: número de puntos obtenidos en el segundo dado

a) Construya la distribución de probabilidad de las siguientes variables aleatorias

i) $W = X - Y$ ii) $A = 2Y$ iii) $Z = X.Y$

iv) $B = \text{máx}\{X, Y\}$

b) Construya la función distribución acumulada de las variables aleatorias W y B y esboce su gráfica respectiva.

c) Al aplicar las propiedades de la función de distribución acumulada, calcule las siguientes probabilidades:

i) $P[-3 < W < 3]$ ii) $P[0 \le W \le 4{,}5]$ iii) $P[A > 6]$

iv) $P[Z \le 5{,}5]$ v) $P[1 \le B < 4]$ vi) $P[20 \le Z \le 35]$

vii) $P[-1 < A < 8]$

Solución.

a) De acuerdo al ejemplo 2 de este capítulo, se tiene las siguientes tablas de distribución de probabilidad de las variables aleatorias W, A, Z y B.

i)

w	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p(w)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ii)

a	2	4	6	8	10	12
$p(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

iii)

z	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15
$p(z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

16	18	20	24	25	30	36
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

iv)

b	1	2	3	4	5	6
$p(b)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

b) i) Según la definición 6, la función de distribución acumulada de W es

$$F(w) = P[W \le w] = \begin{cases} 0, & si\ w < -5 \\ 1/36, & si\ -5 \le w < -4 \\ 3/36, & si\ -4 \le w < -3 \\ 6/36, & si\ -3 \le w < -2 \\ 10/36, & si\ -2 \le w < -1 \\ 15/36, & si\ -1 \le w < 0 \\ 21/36, & si\ 0 \le w < 1 \\ 26/36, & si\ 1 \le w < 2 \\ 30/36, & si\ 2 \le w < 3 \\ 33/36, & si\ 3 \le w < 4 \\ 35/36, & si\ 4 \le w < 5 \\ 1, & si\ w \ge 5 \end{cases}$$

y su gráfica se muestra en la figura 6.7.

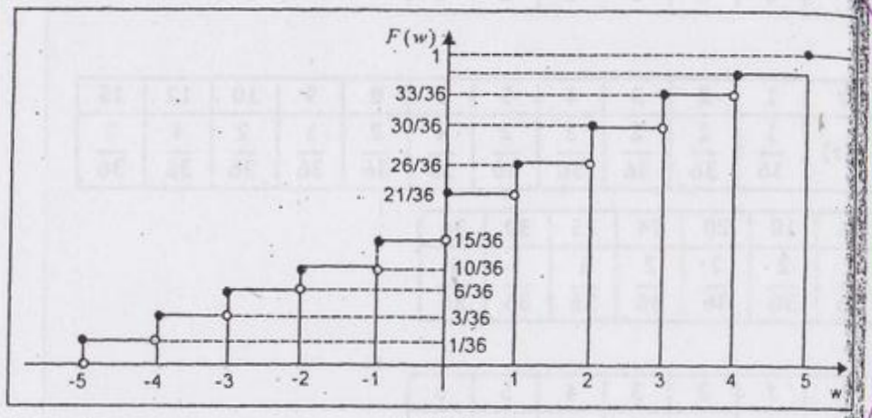


Fig. 6.7

ii) La función de distribución acumulada de la variable aleatoria B es

$$F(b) = P[B \le b] = \begin{cases} 0, & si\ b > 1 \\ 1/36, & si\ 1 \le b < 2 \\ 4/36, & si\ 2 \le b < 3 \\ 9/36, & si\ 3 \le b < 4 \\ 16/36, & si\ 4 \le b < 5 \\ 25/36, & si\ 5 \le b < 6 \\ 1, & si\ b \ge 6 \end{cases}$$

y su gráfica se muestra en la figura 6.8.

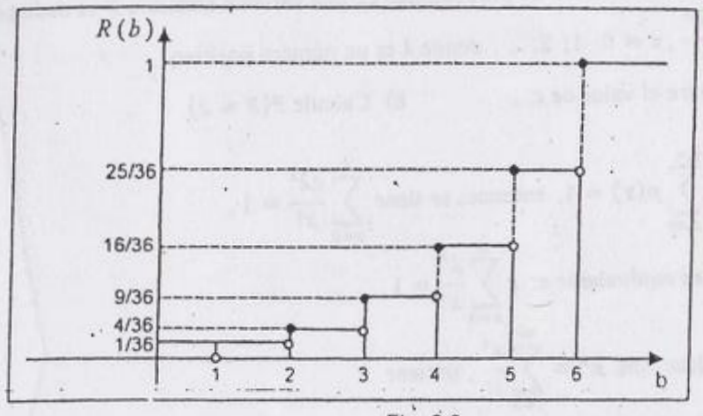


Fig. 6.8

c) i) $P[-3 < W < 3]P = F(3) - F(-3) - P[W = 3] = \frac{33}{36} - \frac{6}{36} - \frac{3}{36} = \frac{2}{3}$

ii) $P[0 \le W \le 4{,}5] = F(4{,}5) - F(0) + P[W = 0] = \frac{35}{36} - \frac{21}{36} + \frac{6}{36} = \frac{5}{9}$

iii) $P[A > 6] = 1 - P[A \le 6] = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

iv) $P[Z \le 5{,}5] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

v) $P[1 \le B < 4] = F(4) - F(1) + P[B = 1] - P[B = 4]$

$$= \frac{16}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{36} - \frac{7}{36} = \frac{1}{4}$$

vi) $P[20 \le Z \le 35] = F(35) - F(20) + P[Z = 20]$

$$= \frac{35}{36} - \frac{30}{36} + \frac{2}{36} = \frac{7}{36}$$

vii) $P[-1 < A < 8] = F(8) - F(-1) - P[A = 8] = \frac{4}{6} - 0 - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 11.- La función de probabilidad de una variable aleatoria X es dada por

$$p(x) = \frac{c}{x^2 - 1},\ x = 2;\ 3;\ 4; \ldots$$

a) Encuentre el valor de la constante c.

b) Calcule $P[X = 2]$

Solución

a) Como $\sum_{x=2}^{\infty} p(x) = 1$, entonces $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{c}{x^2-1} = 1$,

el cual es equivalente a $c\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x^2-1} = 1$.

Sea $S = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x^2-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{x=2}^{n} \frac{1}{x^2-1}$.

Descomponiendo $\frac{1}{x^2-1}$ en fracciones parciales, se tiene

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{x=2}^{n} \left[\frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}\right] = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{x=2}^{n} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{x=2}^{n} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{2}\right] \quad \text{(propiedad telescópica de sumatoria)}$$

$$= \frac{3}{4}$$

Luego, $c\left(\frac{3}{4}\right) = 1$. De donde se obtiene $c = \frac{4}{3}$.

Por tanto,

$$p(x) = \frac{4}{3(x^2-1)}, \; x = 2;\ 3;\ 4;\ \ldots$$

b) $P[X = 2] = p(2) = \frac{4}{3(4-1)} = \frac{4}{9}$

Ejemplo 12.- La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X es dada por

$$p(x) = \frac{c}{5^x}, \; x = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$$

a) Encuentre el valor de la constante c.

b) Calcule la probabilidad de que X tome valores impares.

Solución

a) Como $\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$, entonces $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{c}{5^x} = 1$, lo cual es equivalente a

$$c\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{5^x} = 1.$$

Sea $S = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{5^x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{x=0}^{n} \frac{1}{5^x}$.

Según la fórmula de la suma de n términos de una progresión geométrica de razón $r = 1/5$, se tiene

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{x=0}^{n} \frac{1}{5^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

Luego de $c\left(\frac{5}{4}\right) = 1$, se obtiene $c = \frac{4}{5}$.

Por tanto, $p(x) = \frac{4}{5^{x+1}}$, $x = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$

b) Sea el evento $I = \{1; 3; 5; 7; \ldots\}$, entonces

$$P[I] = P[X = 1] + P[X = 3] + P[X = 5] + \ldots$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \ldots\right] = \frac{4}{25}\left[1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \ldots\right]$$

$$= \frac{4}{25}\left(\frac{1}{1-1/25}\right) \quad \text{(suma de serie geométrica de razón } r = \frac{1}{25}\text{)}$$

$$= \frac{1}{6} = 0{,}1667$$

Ejemplo 13.- Una urna I contiene 5 bolas blancas y 2 negras, la urna II contiene 3 bolas blancas y 2 negras, la urna III contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola de cada urna y sea X el número de bolas blancas extraídas.

a) Determine la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

b) Determine la función de distribución acumulada de X y trace su gráfica.

Solución

a) Si X: número de bolas blancas extraídas, entonces el rango de X es

$R_X = \{0; 1; 2; 3\}$

Sean los eventos

B_1, B_2 y B_3: Obtener bola blanca en la primera urna, segunda urna y tercera urna, respectivamente.

N_1, N_2 y N_3: Obtener bola negra en la primera urna, segunda urna y tercera urna, respectivamente.

Según las condiciones del problema, se tiene

$$P[B_1] = \frac{5}{7}\,,\ P[B_2] = \frac{3}{5}\,;\ P[B_3] = \frac{2}{5}$$

$$P[N_1] = \frac{2}{7}\,,\ P[N_2] = \frac{2}{5}\,,\ P[N_3] = \frac{3}{5}$$

Por ser independientes los colores que se obtienen al seleccionar una bola en cada una de las urnas, se obtiene

$$P[X=0] = P[N_1]\,P[N_2]\,P[N_3] = \frac{12}{175}$$

$$P[X=1] = P[B_1]\,P[N_2]\,P[N_3] + P[B_2]\,P[N_1]\,P[N_3] + P[B_3]\,P[N_1]\,P[N_2]$$

$$= \left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{56}{175}$$

$$P[X=2] = P[B_1]\,P[B_2]\,P[N_3] + P[B_1]\,P[N_2]\,P[B_3] + P[N_1]\,P[B_2]\,P[B_3]$$

$$= \left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{77}{175}$$

$$P[X=3] = P[B_1]\,P[B_2]\,P[B_3] = \left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{30}{175}$$

Por tanto, la tabla de distribución de probabilidad de X es

x	0	1	2	3
$p(x) = P[X=x]$	$\frac{12}{175}$	$\frac{56}{175}$	$\frac{77}{175}$	$\frac{30}{175}$

b) La función de distribución acumulada de esta variable aleatoria es

$$F(x) = P[X \le x] = \begin{cases} 0\,, & si\ x < 0 \\ 12/175\,, & si\ 0 \le x < 1 \\ 68/175\,, & si\ 1 \le x < 2 \\ 145/175\,, & si\ 2 \le x < 3 \\ 1\,, & si\ x \ge 3 \end{cases}$$

y su gráfica se muestra en la figura 6.9.

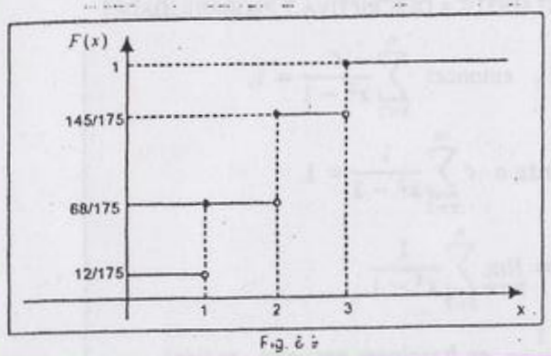


Fig. 6.9

Ejemplo 14.- En cierto juego se lanzan 5 dados y un jugador apuesta sobre la salida de un número que él elige. Gana S/. 10 cuando su número aparece en un dado, S/. 20 si aparece en 2 dados, S/. 30 si aparece en 3 dados, S/. 40 si aparece en los 4 dados, S/. 50 si sale en los 5 dados, y pierde S/. 10 cuando su número no sale en ninguno de los dados.

Sea X: cantidad de dinero que gana el jugador en el juego. Halle la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.

Solución. El experimento consiste en lanzar 5 dados legales.

X: cantidad de dinero que gana el jugador en el juego

Luego, el rango de X es $R_X = \{-10;\ 10;\ 20;\ 30;\ 40;\ 50\}$.

Sean los eventos D_1, D_2, D_3, D_4 y D_5: obtener el número escogido en el primer dado, segundo dado, tercer dado, cuarto dado y quinto dado, respectivamente. Entonces,

$$P[D_1] = P[D_2] = P[D_3] = P[D_4] = P[D_5] = \frac{1}{6}$$

$$P[\overline{D}_1] = P[\overline{D}_2] = P[\overline{D}_3] = P[\overline{D}_4] = P[\overline{D}_5] = \frac{5}{6}$$

Como los lanzamientos de los dados son independientes, se tiene

$$P[X=-10] = P[\overline{D}_1].P[\overline{D}_2].P[\overline{D}_3].P[\overline{D}_4].P[\overline{D}_5] = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3\,125}{7\,776}$$

$$P[X=10] = C_1^5.P[D_1].P[\overline{D}_2].P[\overline{D}_3].P[\overline{D}_4].P[\overline{D}_5] = 5\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3\,125}{7\,776}$$

$$P[X=20] = C_2^5.P[D_1].P[D_2].P[\overline{D}_3].P[\overline{D}_4].P[\overline{D}_5] = 10\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1\,250}{7\,776}$$

$$P[X=30] = C_3^5.P[D_1].P[D_2].P[D_3].P[\overline{D}_4].P[\overline{D}_5] = 10\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{7\,776}$$

$$P[X=40]=C_4^5.P[D_1].P[D_2].P[D_3].P[D_4].P[\overline{D}_5]=5\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{25}{7\,776}$$

$$P[X=50]=P[D_1].P[D_2].P[D_3].P[D_4].P[D_5]=\left(\frac{1}{6}\right)^5=\frac{1}{7\,776}$$

Por tanto, la tabla de distribución de probabilidad de la variable aleatoria X es

x	-10	10	20	30	40	50
$p(x)$	$\frac{3\,125}{7\,776}$	$\frac{3\,125}{7\,776}$	$\frac{1\,250}{7\,776}$	$\frac{250}{7\,776}$	$\frac{25}{7\,776}$	$\frac{1}{7\,776}$

Ejemplo 15.- Un capataz de una planta manufacturera tiene 5 hombres y 3 mujeres trabajando con él. El capataz desea seleccionar 4 trabajadores para un trabajo especial. Al suponer que no tiene influencia en la selección de los trabajadores, él decide seleccionar al azar a los 4 trabajadores. Sea Y el número de hombres en el grupo. Halle la tabla de distribución de probabilidad para Y.

Solución.

El capataz puede seleccionar 4 trabajadores de 8 de $\binom{8}{4}=70$ maneras. El espacio muestral Ω asociado a este experimento contiene 70 puntos muestrales, cada uno con igual probabilidad de ocurrencia, esto es,

$$P[w_i]=\frac{1}{70}\ ,\ i=1;\ 2;\ldots;\ 70 \text{ para todo evento simple } w_i\in\mathbb{R}$$

El rango de la variable aleatoria Y es $R_Y=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

El número de maneras de seleccionar 4 personas de 8 de modo que en el grupo haya 1 hombre y 3 mujeres es $\binom{5}{1}\binom{3}{3}$.

Luego,

$$P[Y=1]=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{3}}{70}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$$

En forma similar, se obtiene

$$P[Y=2]=\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{70}=\frac{3}{7}\ ,\qquad P[Y=3]=\frac{\binom{5}{3}\binom{3}{1}}{70}=\frac{3}{7}$$

$$P[Y=4]=\frac{\binom{5}{4}\binom{3}{0}}{70}=\frac{1}{14}$$

En general, la función de probabilidad de Y se expresa como

$$P(y)=P[Y=y]=\frac{\binom{5}{y}\binom{3}{4-y}}{\binom{8}{4}}\ ,\ y=1;\ 2;\ 3;\ 4$$

Por tanto, la tabla de distribución de probabilidad de Y es

y	1	2	3	4
$p(y)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{14}$

Ejemplo 16.- Sea $p(x)=P[X=x]=\left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}\left(\frac{6}{7}\right)$, $x=1;\ 2;\ 3;\ldots$ la función de probabilidad de una variable aleatoria X.

Halle la función de distribución acumulada como función de x.

Solución: Sea $x\in\mathbb{R}$

i) Si $x<1$, entonces $p(x)=0$.

ii) Si $x\geq 1$, se tiene

$$F(x)=P[X\leq x]=\sum_{i=1}^{[x]}\left(\frac{1}{7}\right)^{i-1}\left(\frac{6}{7}\right)=\frac{6}{7}\left[1+\frac{1}{7}+\left(\frac{1}{7}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{7}\right)^{[x]-1}\right]$$

$$=\frac{6}{7}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{[x]-1}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)}{1-\frac{1}{7}}\right]=1-\left(\frac{1}{7}\right)^{[x]}$$

Por tanto,

$$F(x)=P[X\leq x]=\begin{cases}0\ , & si\ x<1\\ 1-\left(\frac{1}{7}\right)^{[x]}\ , & si\ x\geq 1\end{cases}$$

Ejemplo 17.- Sea $p(x)=3cx^2$, $x=1;\ 2;\ldots;n$ la función de probabilidad de una variable aleatoria X.

a) Encuentre el valor de la constante c.

b) Halle la función de distribución acumulada $F(x)$ en términos de x.

Solución

a) Como $\sum_{x=1}^{n}p(x)=\sum_{x=1}^{n}3cx^2=3c[1+2^2+3^2+\cdots+n^2]=1$, entonces

se tiene $3c\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1$, de donde se obtiene

$$c = \frac{2}{n(n+1)(2n+1)}$$

Por tanto, $p(x) = \dfrac{6}{n(n+1)2n+1)}x^2$, $x = 1; 2; \ldots; n$.

b) Sea $x \in \mathbb{R}$

i) Si $x < 1$, entonces $F(x) = 0$.

ii) Si $1 \leq x < n$, se tiene

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{i=1}^{[\![x]\!]} \frac{6}{n(n+1)2n+1)} i^2$$

$$= \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}[1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + [\![x]\!]^2]$$

$$= \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{[\![x]\!]([\![x]\!]+1)(2[\![x]\!]+1)}{6} - \frac{[\![x]\!]([\![x]\!]+1)(2[\![x]\!]+1)}{n(n+1)(2n+1)}$$

iii) Si $x \geq n$, entonces $F(x) = 1$.

Por tanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 1 \\ \dfrac{[\![x]\!]([\![x]\!]+1)(2[\![x]\!]+1)}{n(n+1)(2n+1)}, & si\ 1 \leq x < n \\ 1, & si\ x \geq n \end{cases}$$

EJERCICIOS

1. En los siguientes ejercicios, determine la constante c para que la función $p(x)$ satisfaga las condiciones de una función de probabilidad de una variable aleatoria X.

i) $p(x) = \dfrac{c}{x}$, $x = 1; 3; 5; 7$ $\qquad R.\ \dfrac{105}{176}$

ii) $p(x) = cx^3$, $x = 1; 2; \ldots; n$ $\qquad R.\ \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$

iii) $p(x) = \dfrac{c}{9^x}$, $x = 0; 1; 2; 3; \ldots$ $\qquad R.\ \dfrac{9}{8}$

iv) $p(x) = \dfrac{c(2^x + 3^x)}{6^x}$, $x = 1; 2; 3; \ldots$ $\qquad R.\ \dfrac{2}{3}$

v) $p(x) = \dfrac{cx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $x = 1; 2; \ldots$ $\qquad R.\ 4$

vi) $p(x) = \dfrac{c}{2x^2 + 6x + 4}$, $x = 1; 2; \ldots; n$ $\qquad R.\ \dfrac{4(n+2)}{n}$

2. Una caja contiene 5 tuercas defectuosas y 5 no defectuosas. Se extraen 2 tuercas aleatoriamente y sin reposición. Halle la función de probabilidad de la variable aleatoria X: número de tuercas no defectuosas que se obtiene en la extracción.

R.

x	0	1	2
$p(x)$	2/9	5/9	2/9

3. Dos bolas son seleccionadas al azar de una urna que contiene 8 bolas blancas, 4 negras y 2 naranjas. Suponga que se gana S/. 2 por cada bola negra seleccionada y se pierde S/. 1 por cada bola blanca seleccionada. Sea X la variable aleatoria que denota las ganancias. ¿Cuáles son los posibles valores de X y cuáles son las probabilidades asociadas con cada valor?

R.

x	-2	-1	0	1	2	4
$p(x)$	$\frac{28}{91}$	$\frac{16}{91}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{32}{91}$	$\frac{8}{91}$	$\frac{6}{91}$

4. Tres dados son lanzados. Al suponer que cada uno de los $6^3 = 216$ posibles resultados son igualmente probables, encuentre la probabilidad asignada a los posibles valores que toma X, donde X es la suma de los puntos obtenidos en los 3 dados.

5. Cinco hombres y cinco mujeres son clasificados de acuerdo a sus puntajes obtenidos en un examen de Matemática I. Suponga que todos los puntajes obtenidos en dicho examen son diferentes y que todas las 10! posibles calificaciones son igualmente probables. Sea X la variable aleatoria que denota la calificación más alta conseguida por una alumna (por ejemplo, $X = 2$ denota que una alumna fue clasificada en segundo lugar y que el primer lugar fue ocupado por un alumno). Encuentre $P[X = i]$, $i = 1; 2; 3; \ldots; 10$.

$R.\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{18};\ \frac{5}{36};\ \frac{5}{84};\ \frac{5}{84};\ \frac{5}{252};\ \frac{1}{252};\ 0;\ 0;\ 0;\ 0$

6. Un dispositivo está compuesto de tres elementos que trabajan independientemente. La probabilidad de falla de cada elemento en una prueba es igual a 0,1. Analice la variable aleatoria X: número de elementos que fallan en una prueba.

R.

x	0	1	2	3
$p(x)$	$(0{,}9)^3$	$3(0{,}1)(0{,}9)^2$	$3(0{,}1)^2(0{,}9)$	$(0{,}1)^3$

7. Sea X la variable aleatoria que denota la diferencia entre el número de caras y el número de sellos obtenidos cuando una moneda es lanzada n veces. ¿Cuáles son los posibles valores de X? *R.* $2k - n$, $k = 0; 1; \ldots; n$

8. Luego de producir el último producto del día en una fábrica, se observa que se han manufacturado 4 del producto A y 4 del producto B. Como uno de los talleres de manufacturación estuvo fallando, se sospecha que la mitad de la producción es defectuosa. Obtenga la distribución de probabilidad del número de defectuosos provenientes del producto A al extraer 4 productos y someterlos a prueba.

R.

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$

9. Una mujer tiene 8 llaves en su llavero, de las cuales exactamente una abre la cerradura de la puerta de su casa. Ella prueba las llaves una en cada vez, escogiendo al azar en cada tentativa una de las llaves que no ha sido experimentada. Sea X la variable aleatoria que denota el número de llaves que se prueba (incluyendo la correcta) para abrir la puerta. ¿Cuál es la distribución de probabilidad de X?

R.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

10. Sea X una variable aleatoria que solamente toma valores enteros positivos $1; 2; 3; \ldots$. Si $P[X > k+1 \,/\, X > k] = \dfrac{k+1}{k+2}$

¿Cuál es la distribución de probabilidad de X?

R. $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)}, & x = 1; 2; 3; \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

11. ¿Para qué valores de α existe una constante c para el cual

$$p(x) = \begin{cases} cx^{-\alpha}, & x = 1; 2; 3; \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es función de cuantía de una variable aleatoria X?

12. ¿Para qué valores de c la función $p(x)$ define una función de cuantía de una variable aleatoria X?

$p(x) = c\alpha^x$, $x = 0; 1; 2; \ldots$, $0 < \alpha < 1$ *R.* $c = 1 - \alpha$

13. Suponga que la variable aleatoria X toma valores 0; 1; 2; ... con la siguiente probabilidad:

$$p(j) = P[X = j] = \frac{c}{3^j}, \; j = 0; 1; 2; \ldots$$

a) Determine la constante c. *R.* 2/3

b) Calcule las siguientes probabilidades

i) $P[X \geq 10]$ *R.* $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

ii) $P[x \in A]$, donde $A = \{j \,/\, j = 2k+1,\; k = 0; 1; \ldots\}$ *R.* 0,25

iii) $P[x \in B]$, donde $B = \{j \,/\, j = 3k+1,\; k = 0; 1; \ldots\}$ *R.* 3/13

14. Una urna contiene 8 bolas, de las cuales 3 son rojas. Grafique y compare las funciones de distribución acumulada de las variables aleatorias X_1: número de bolas rojas que se obtienen al extraer 2 bolas sin reemplazo y X_2: número de bolas rojas que se obtienen al extraer 2 bolas con reemplazo.

R. $F_1(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ \dfrac{20}{56}, & si\ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{50}{56}, & si\ 1 \leq x < 2 \\ 1, & si\ x \geq 2 \end{cases}$ $\quad F_2(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ \dfrac{25}{64}, & si\ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{55}{64}, & si\ 1 \leq x < 2 \\ 1, & si\ x \geq 2 \end{cases}$

6.6 VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Definición 7.- Una variable aleatoria $X: \Omega \to \mathbb{R}$ es continua cuando el rango de X es un intervalo o una colección de intervalos de la recta real.

Ejemplo 18.- Sea X una variable aleatoria que representa el tiempo de vida de un transistor. Esta variable aleatoria es continua, pues su rango (los valores que puede tomar) son todos los puntos del intervalo $[0; +\infty)$.

Definición 8.- (Función de densidad de probabilidad) Sea X una variable aleatoria continua con rango $R_X \subset \mathbb{R}$. La función de densidad de probabilidad o simplemente función de densidad asociada a la variable aleatoria X, es una función $f: R_X \to [0; +\infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

i) $f(x) \geq 0, \forall x \in R_X \subset \mathbb{R}$

ii) $\displaystyle\int_{R_X} f(x)dx = 1$

iii) Para todo $a, b \in R_X$, con $a \leq b$:

$$P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

En otras palabras, la definición indica la existencia de una función real f definida sobre R_X con las siguientes características:

i) La gráfica de f está encima del eje X.

ii) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas verticales que pasan por los extremos de R_X es 1. La gráfica de f y de la región se ilustra en la figura 6.10.

iii) El área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ es $P[a \leq X \leq b]$ (Fig. 6.11).

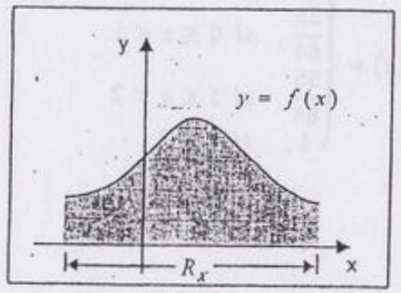


Fig. 6.10

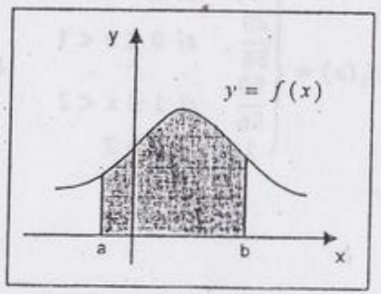


Fig. 6.11

Observación 5.-

i) Una consecuencia inmediata de la definición de función de densidad de una variable aleatoria continua es que para cualquier valor específico de X, por ejemplo $X = x_0$, se tiene $P[X = x_0] = 0$, pues

$$P[X = x_0] = P[x_0 \leq X \leq x_0] = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

ii) Si X es una variable aleatoria continua, entonces

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X < b] = P[a \leq X < b] = P[a < X \leq b]$$

iii) Se nota que $f(x)$, función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X, no es probabilidad. Solamente cuando la función es integrada entre dos límites producirá una probabilidad, que será el área bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, $(a \leq b)$.

iv) Al hacer una analogía con la mecánica, se tiene que en una variable aleatoria discreta la masa de probabilidad está concentrada en puntos aislados de la recta real, y en el caso de una variable aleatoria continua la masa de probabilidad está esparcida en forma continua en intervalos de la recta real.

Definición 9.- (Función de distribución acumulada de una v.a. continua) Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$. *La función de distribución acumulada* de la variable aleatoria X es dada por

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

El área sombreada de $F(x)$ se muestra en la figura 6.12.

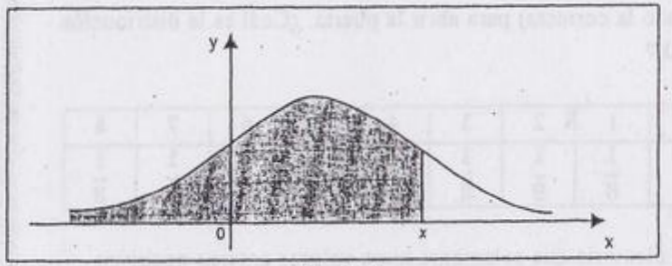


Fig. 6.12

Se prueba que $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ para todo x en el cual $F(x)$ es derivable.

Como $F(+\infty) = 1$, entonces se cumple $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Ejemplo 19.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(6x - 2x^2), & si\ 0 < x < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre el valor de la constante c.

b) Calcule $P[X > 1]$.

Solución.

a) Para que $f(x)$ sea función de densidad de una variable aleatoria continua, debe satisfacer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} c(6x - 2x^2)dx + \int_{2}^{+\infty} 0\,dx = 1$$

De donde se obtiene $0 + c\left[3x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 + 0 = 1$.

Luego, $c = \frac{3}{20}$.

b) $P[X > 1] = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \frac{3}{20}\int_{1}^{2}(6x - 3x^2)dx = \frac{13}{20}$.

Ejemplo 20.- Una variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ kx^2, & si\ 0 \le x < 1 \\ 0, & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

Halle la función de distribución acumulada de X y trace su gráfica.

Solución: Como $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, entonces se tiene

$$\int_0^1 kx^2 dx = \left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^1 = \frac{k}{3} = 1, \text{ de donde } k = 3$$

Por tanto, la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X es dada por

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} 0\,dt, & si\ x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x 3t^2\,dt, & si\ 0 \le x < 1 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 3t^2\,dt + \int_1^x 0\,dt, & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ x^3, & si\ 0 \le x < 1 \\ 1, & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

y su gráfica se muestra en la figura 6.13.

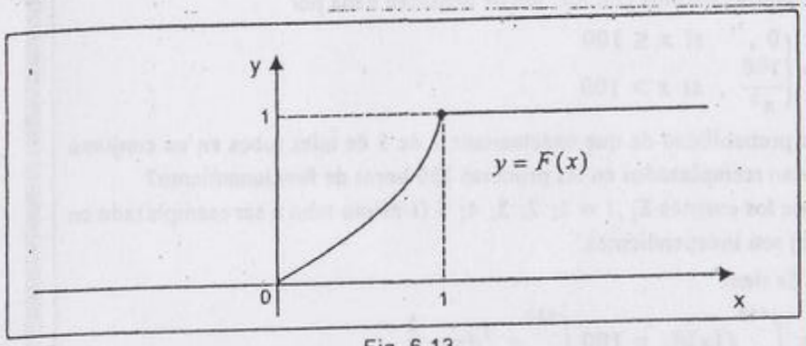


Fig. 6.13

Ejemplo 21.- La cantidad de tiempo, en horas, que un computador funciona antes de fallar es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{200}}, & si\ x \ge 0 \\ 0, & si\ x < 0 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad que el computador funcione entre 50 y 150 horas antes de fallar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el computador funcione menos de 100 horas?

Solución. Según la definición de función de densidad, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{200}}dx = \lambda \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-\frac{x}{200}}dx = 1$$

lo cual es equivalente a

$$-200\lambda \lim_{t\to+\infty}\left[e^{-\frac{t}{200}} - 1\right] = 200\lambda = 1, \text{ de donde se obtiene } \lambda = \frac{1}{200}$$

Por tanto,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{200}e^{-\frac{x}{200}}, & si\ x \ge 0 \\ 0, & si\ x < 0 \end{cases}$$

a) La probabilidad de que el computador funcione entre 50 y 150 horas antes de fallar es

$$P[50 < X < 150] = \int_{50}^{150} \frac{1}{200}e^{-x/200}dx = \left[-e^{-x/200}\right]_{50}^{150} \cong 0{,}3064$$

$b)\ P[X < 100] = \int_0^{100} \frac{1}{200} e^{-x/200} dx = \left[-e^{-x/200}\right]_0^{100} \cong 0{,}3935$

Ejemplo 22.- El tiempo de vida en horas de un cierto tubo de radio es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & si\ x \le 100 \\ \dfrac{100}{x^2}\ , & si\ x > 100 \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 de 5 de tales tubos en un conjunto de radios sean reemplazados en las primeras 150 horas de funcionamiento?
Suponga que los eventos E_i , $i = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$ (i-ésimo tubo a ser reemplazado en este tiempo) son independientes.

Solución: Se tiene

$$P[E_i] = \int_0^{150} f(x)dx = 100\int_{100}^{150} x^{-2}dx = \frac{1}{3}$$

Luego, de la independencia de los eventos E_i se sigue que la probabilidad pedida es

$$P[\text{exactamente 2 de 5 tubos sean reemplazados}] = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243} = 0{,}3292$$

Ejemplo 23.- Suponga que $F(x) = \begin{cases} 0\ , & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-2x}\ , & si\ x \ge 0 \end{cases}$

es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria X. Halle la función de densidad de probabilidad X y trace la gráfica de $f(x)$ y $F(x)$.

Solución. La función de densidad es

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0\ , & \text{si } x < 0 \\ 2\,e^{-2x}\ , & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la figura 6.14 y de $F(x)$ en la figura 6.15.

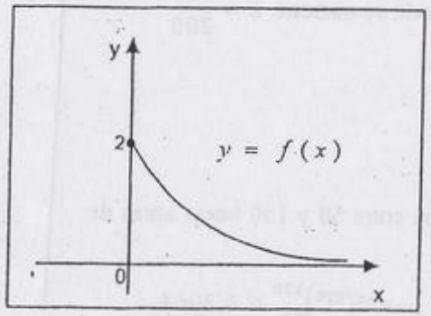


Fig. 6.14

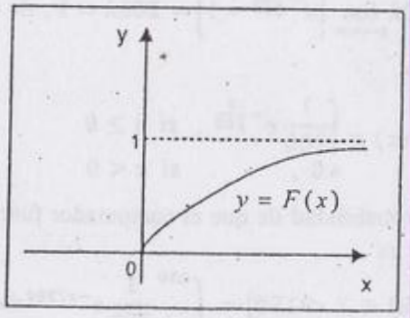


Fig. 6.15

Ejemplo 24.- Dada la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-(x+1)}\ , & \text{si } x = 2;\ 3;\ \ldots \\ \dfrac{5\ ln\,3}{16}.3^{-x}\ , & \text{si } -1 \le x < 1 \\ \dfrac{4}{9}(x-1)^3\ , & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 0\ , & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

a) Verifique que cumple las condiciones de una función de probabilidad de una variable aleatoria X (en este caso se dice que X es una variable aleatoria mixta: discreta y continua).

b) Halle la probabilidad de que X tome valores entre 0 y 2 inclusive.

Solución

a) i) $f(x) \ge 0, \forall\, x \in \langle -\infty; 1\rangle \cup [1; 2\rangle\ y\ \forall\, x = 2;\ 3;\ 4; \ldots$

ii) Se tiene

$$p = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{5\ ln\,3}{16} 3^{-x}dx + \int_1^2 \frac{4}{9}(x-1)^3 dx + \sum_{x=2}^{\infty} 3^{-(x+1)}$$

$$= 0 + \frac{5\ ln\,3}{16}\left[-\frac{3^{-x}}{ln\,3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{9}\left[(x-1)^4\right]_1^2 + \frac{1}{3}\sum_{x=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$= \frac{5}{16}\left[-\frac{1}{3} + 3\right] + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right]$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{1 - 1/3}\ \text{(suma de serie geométrica de razón } r = \frac{1}{3})$$

$$p = \frac{5}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{17}{18} + \frac{1}{18} = 1$$

b) $P[0 < X \le 2] = P[0 < X < 2 \wedge X = 2] = P[0 < X < 2] + P[X = 2]$

$$= \int_0^1 \frac{5\ ln\,3}{16} 3^{-x}\,dx + \int_1^2 \frac{4}{9}(x-1)^3 dx + 3^{-3}$$

$$= \frac{10}{48} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = 0{,}356481$$

Ejemplo 25.- La variable aleatoria Y tiene por función de densidad dada por

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\ , & si\ 0 \le y \le 8 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que sean reales las raíces de la ecuación $25X^2 + 25XY + (5Y + 8) = 0$ en la variable X.

Solución.

Al resolver la ecuación para X, se tiene

$$X = \frac{-25Y \pm \sqrt{625Y^2 - 4(25)(5Y+8)}}{50}$$

Para que esta ecuación tenga raíces reales, la cantidad subradical debe cumplir la condición

$$325Y^2 - 100(5Y+8) \geq 0$$

El cual es equivalente a

$$25Y^2 - 20Y - 32 \geq 0 \Leftrightarrow (5Y+4)(5Y-8) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow Y \in \langle -\infty; -\tfrac{4}{5}] \cup [\tfrac{8}{5}; +\infty).$$

Luego,

$$P\left[Y \leq -\frac{4}{5}\right] = \int_{-\infty}^{-4/5} f(y)dy = \int_{-\infty}^{-4/5} 0\, dy = 0$$

$$P\left[Y \geq \frac{8}{5}\right] = \int_{8/5}^{+\infty} f(y)dy = \int_{8/5}^{8} \frac{1}{8}\, dy = \frac{4}{5}$$

Por tanto,

$$P[\textit{ecuación tenga raíces reales}] = P\left[Y \leq -\frac{4}{5}\right] + P\left[Y \geq \frac{8}{5}\right]$$

$$= 0 + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

Ejemplo 26.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}\left|sen\left(\frac{x}{3}\right)\right|, & \text{si } -\pi < x < \pi \\ c\cos\left(\frac{x}{2}\right), & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle el valor de c.

b) Halle el valor de k de modo que $P[X \leq k] = 90\% = 0{,}90$.

Solución.

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{-\pi} 0\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{15}\left|sen\left(\frac{x}{3}\right)\right| dx + \int_{\pi}^{2\pi} c\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int_{2\pi}^{+\infty} 0\, dx = 1$$

Así, se tiene

$$0 - \frac{1}{15}\int_{-\pi}^{0} sen\left(\frac{x}{3}\right) dx + \frac{1}{15}\int_{0}^{\pi} sen\left(\frac{x}{3}\right) dx + c\int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx + 0 = 1$$

Luego,

$$\frac{1}{5}\left[\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{5}\left[-\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{0}^{\pi} + c\left[2\, sen\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = 1$$

de donde se obtiene $c = -\frac{2}{5}$.

b) Se tiene

$$P[X \leq k] = \int_{-\pi}^{k} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{15}\left|sen\left(\frac{x}{3}\right)\right| dx - \frac{2}{5}\int_{\pi}^{k} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 0{,}90$$

El cual es equivalente a

$$0{,}20 - \frac{4}{5}\left[sen\left(\frac{k}{2}\right) - 1\right] = 0{,}90 \Leftrightarrow sen\left(\frac{k}{2}\right) = 0{,}125.$$

de donde se obtiene $\frac{k}{2} = 0{,}125327831$ ó $k = 0{,}250655662$.

Como k tiene que estar entre π y 2π, entonces por la propiedad de la función $g(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$, el verdadero valor de k es

$$k = 2\pi - 0{,}250655662 = 6{,}032529645$$

Ejemplo 27.- La variable aleatoria X está definida por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & \text{si } |x| < a \\ 0, & \text{si } |x| \geq a \end{cases}$$

a) Encuentre el valor de la constante a.

b) Halle la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $(\frac{a}{2}; a)$.

c) Construya los gráficos de $f(x)$ y $F(x)$.

Solución.

a) Como $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-a} 0\, dx + \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \int_{a}^{+\infty} 0\, dx = 1,$

entonces se tiene

$$\int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = a\left[arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a} = a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

De donde se obtiene $a = \frac{1}{\pi}$.

b) $P\left[\frac{a}{2} < X < a\right] = P\left[\frac{1}{2\pi} < X < \frac{1}{\pi}\right] = \int_{1/2\pi}^{1/\pi} \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi^2} - x^2}}\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[arcsen\,(\pi x)\right]_{1/2\pi}^{1/\pi} = \frac{1}{3}$$

c) La gráfica de $f(x)$ se muestra en la figura 6.16.

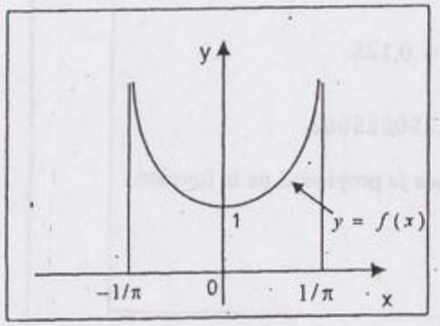


Fig. 6.16

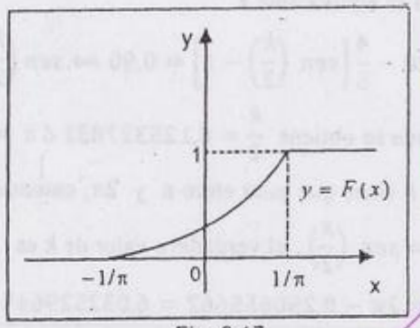


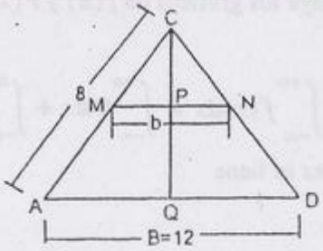
Fig. 6.17

La función de distribución acumulada es

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } x \le -\frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{\pi}\left[arcsen\,(\pi x) + \frac{\pi}{2}\right], & \text{si } |x| < \frac{1}{\pi} \\ 1\,, & \text{si } x \ge \frac{1}{\pi} \end{cases}$$

y su gráfica se muestra en la figura 6.17.

Ejemplo 28.- Se selecciona al azar un punto en el interior de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 cm y el otro lado (base) mide 12 cm. Sea X la distancia del punto elegido a la base. Determine la función de distribución acumulada y la función de densidad de X.



Solución

En el triángulo ACD se define la variable

X: distancia del punto elegido en el interior del triángulo a la base.

La altura del triángulo es

$h = \sqrt{64 - 36} = 2\sqrt{7}$

Luego, la variable aleatoria X toma valores entre 0 y $2\sqrt{7}$, esto es,

$0 < X < 2\sqrt{7}$

Por lo tanto, la función de distribución acumulada de X es dada por

$$F(x) = P[X \le x] = \begin{cases} 0\,, & si\ x \le 0 \\ \dfrac{\text{área del trapecio } AMND}{\text{área del triángulo } ACD}\,, & si\ 0 < x < 2\sqrt{7} \\ 1\,, & si\ x \ge 2\sqrt{7} \end{cases}$$

De la figura del triángulo, se tiene

$$\text{Área del triángulo } ACD = \frac{12(2\sqrt{7})}{2} = 12\sqrt{7}$$

$$\text{Área del trapecio } AMND = \frac{(b + B)h}{2} = \frac{(b + 12)x}{2}$$

Por semejanza de triángulos CPN y CQD, se obtiene

$$\frac{b/2}{6} = \frac{2\sqrt{7} - x}{2\sqrt{7}}\,, \text{ de donde } b = \frac{6}{\sqrt{7}}(2\sqrt{7} - x)$$

Así, la función de distribución acumulada es

$$F(x) = P[X \le x] = \begin{cases} 0\,, & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{(4\sqrt{7} - x)x}{28}\,, & \text{si } 0 < x < 2\sqrt{7} \\ 1\,, & \text{si } x \ge 2\sqrt{7} \end{cases}$$

y la función de densidad de la variable aleatoria X es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{14}(2\sqrt{7} - x)\,, & \text{si } 0 < x < 2\sqrt{7} \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 29.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2\,, & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si c es un número que satisface $-1 < c < 0$, calcule

$$P\left[X > c \,/\, X < \frac{c}{2}\right]$$

Solución.

Por definición de probabilidad condicional, se tiene

$$P\left[X > c \,/\, X < \frac{c}{2}\right] = \frac{P\left[X > c \wedge X < \frac{c}{2}\right]}{P\left[X < \frac{c}{2}\right]} = \frac{P\left[c < X < \frac{c}{2}\right]}{P\left[X < \frac{c}{2}\right]}$$

$$= \frac{\int_c^{c/2} 3x^2 dx}{\int_{-1}^{c/2} 3x^2 dx} = -\frac{7c^3}{c^3+8}$$

EJERCICIOS

1. Verifique si las siguientes funciones son funciones de densidad de una variable aleatoria X.

   a) $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$, $f_2(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

   $f(x) = (\theta+1)f_1(x) - \theta f_2(x)$, $0 < \theta < 1$

   b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x(2\alpha + x)}{\alpha(\alpha+x)^2}, & \text{si } 0 < x \le \alpha \\ \dfrac{\alpha^2(\alpha+2x)}{x^2(\alpha+x)^2}, & \text{si } x > \alpha \end{cases}$

2. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k, & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Encuentre el valor de k *R.* 1/12 b) Calcule $P[1 \le X \le 2]$ *R.* 1/3

3. Una variable aleatoria continua X tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ k, & \text{si } 0 \le x < 2 \\ k(x-1), & \text{si } 2 \le x < 4 \\ 0, & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

   a) Halle k *R.* 1/6 b) Halle $F(x)$ y esboce su gráfica

4. La función de densidad de una variable aleatoria continua X es proporcional a $x(1-x)$ para $0 < x < 1$, y es cero para otros valores de x.

   a) Halle la constante de proporcionalidad. *R.* 6

   b) Calcule $P[X \le 1/2]$. *R.* 1/2

5. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ Ax, & \text{si } 0 \le x < 500 \\ A(1000-x), & \text{si } 500 \le x < 1000 \\ 0, & \text{si } x \ge 1000 \end{cases}$$

   a) Halle la constante A. *R.* $1/(500)^2$

   b) Calcule $P[250 \le X \le 750]$. *R.* 3/4

6. Suponga que en un cierto sistema eléctrico el voltaje X es una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1}, & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

   Halle la función de densidad de X.

7. Suponga que la función de densidad de una variable aleatoria X es dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x, & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Encuentre el valor de t tal que $P[X \le t] = 1/4$. *R.* 2

   b) Encuentre el valor de t tal que $P[X > t] = 1/2$. *R.* $\sqrt{8}$

8. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3), & \text{si } 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   ¿Puede f ser una función de densidad? Si es así, determine c. *R.* No

9. La función de densidad de una variable aleatoria X, que denota el tiempo de vida de cierto tipo de máquina electrónica (medida en horas), es dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2}, & \text{si } x > 10 \\ 0, & \text{si } x \le 10 \end{cases}$$

   a) Calcule $P[X > 20]$. b) Halle $F(x)$.

   c) ¿Cuál es la probabilidad que de 6 máquinas de este tipo al menos 3 funcionen por lo menos 15 horas? ¿Qué suposiciones son necesarias?

10. Un grifo es aprovisionado de gasolina una vez por semana. El volumen X de la posible venta semanal en miles de galones tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Cuál debe ser la capacidad de su tanque para que la probabilidad de que su provisión se agote en una semana sea sólo de 0,01? *R.* $1-(0{,}01)^{1/5}$

11. La producción de artículos en gran escala siempre ocasiona una variable aleatoria debido a influencias que son imprevisibles e incontrolables. Así, en la producción de tuercas el diámetro X de las mismas se debe considerar como una variable aleatoria. Suponga que la densidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} k(x-0{,}9)(1{,}1-x), & \text{si } 0{,}9 < x < 1{,}1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle k. *R.* 500

b) Determine $f(x)$, $F(x)$ y trace sus respectivas gráficas.

12. Sea $f(x) = c|x|$, para $|x| \leq 2$ y cero en otros casos.

a) Halle c. *R.* 1/4

b) Calcule $P[X > 1 / -1 < X < 3]$. *R.* 3/5

13. Una estación de petróleo recibe provisión semanalmente. Las estadísticas de años anteriores sugieren que la función de densidad de las ventas semanales X, medidas en miles de galones, se aproxima a la función cuya gráfica se muestra en la figura 6.18.

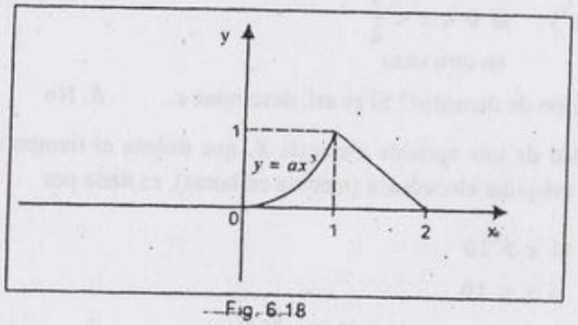


Fig. 6.18

a) Halle la función de densidad de X. *R.* $a = 2$

b) Halle la función de distribución acumulada de X y trace su gráfica.

14. Dada la función de densidad de una variable aleatoria continúa X.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq \dfrac{5\pi}{6} \\ \dfrac{2}{15}\left|\cos\left(\dfrac{x}{5}\right)\right|, & \text{si } \dfrac{5\pi}{6} < x < 5\pi \\ 0, & \text{si } x > 5\pi \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad de que X tome valores entre $\dfrac{5\pi}{2}$ y $\dfrac{8\pi}{3}$. *R.* 0,003652

b) Determine la función de distribución acumulada de X.

15. Sea $F(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Pruebe que F es una función de distribución acumulada de una variable aleatoria X, y encuentre la función de densidad.

16. Sea $F(x) = e^{-e^{-x}}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Pruebe que F es una función de distribución acumulada, y encuentre la función de densidad.

17. ¿Para qué valores de la constante c las siguientes funciones son funciones de densidad de una variable aleatoria X?

a) $f(x) = \begin{cases} c\,e^{-6x}, & \text{si } x > 0 \\ -cx, & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 0, & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$ *R.* 1,5

b) $f(x) = \begin{cases} c\,x^2 e^{-x^3}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ *R.* 3

18. Sea X la variable aleatoria que denota la duración (en horas) de un tubo de televisor, y suponga que su función de densidad es dada por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

Calcule las siguiente probabilidades

a) $P[j < X \leq j+1]$. *R.* $e^{-\lambda j}(1-e^{-\lambda})$, $j = 0; 1; 2; \ldots$

b) $P[X > s]$ para algún $s > 0$. *R.* $e^{-\lambda s}$

c) $P[X > s + t / X > s]$ para algún $s, t > 0$. *R.* $e^{-\lambda t}$

19. Sea X la variable aleatoria que denota la longitud de vida de un cierto dispositivo electrónico expresada en horas, y suponga que su función de densidad es dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^n}, & \text{si } 1\,000 \leq x \leq 3\,000 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine la constante c en términos de n.

b) Determine la probabilidad de que la vida de un dispositivo electrónico del tipo descrito se extienda en más de 2 000 horas.

20. Pruebe que la función siguiente es función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{si } 0 < x < 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x = 2; 3; \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

21. Sea $f(x) = \left(\theta x + \frac{1}{2}\right), -1 < x < 1$; donde θ es una constante. ¿Para qué valores de θ es $f(x)$ una función de densidad?

$R.\ -\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{2}$

22. El porcentaje de alcohol en un cierto compuesto puede ser considerado como una variable aleatoria continua X, con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 42x^5(1-x), & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle la función de distribución acumulada de X.

b) Calcule $P[X \leq 2/3 \,/\, X > 1/3]$. $R.$ 0,258296

c) Suponga que el precio de venta del compuesto depende del contenido del alcohol. Específicamente, el compuesto se vende a p_1 soles por galón, si $1/2 < x < 2/3$; en otros casos, se vende a p_2 soles por galón. Si el costo es p_3 soles por galón. Halle la función de densidad de la ganancia neta por galón.

$$R.\ G = \begin{cases} p_1 - p_3, & si\ \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ p_2 - p_3, & si\ x \leq \frac{1}{3}\ ó\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

23. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada

$$F(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -4 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}arctan\left(\frac{x}{4}\right), & \text{si } -4 < x \leq 4 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}cos\left(\frac{\pi x}{4}\right), & \text{si } 4 < x \leq 8 \\ 1, & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que como resultado de las pruebas, X tome un valor en el intervalo $(-2; 6)$. $R.$ 0,647584

24. El diámetro de un cable eléctrico, digamos X, es considerado como una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^3(1-x), & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle el valor de c. $R.$ 20

b) Determine el número k tal que $P[X < k] = 2P[X > k]$ $(0 < k < 1)$.

$R.$ k es solución de $15k^4 - 12k^5 - 2 = 0$

c) Calcule $P[X \leq 1/2 \,/\, 1/3 < X < 2/3]$.

6.7 MEDIDAS DE POSICIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA

6.7.1 Esperanza Matemática de una Variable Aleatoria

Definición 10.- (Media de una variable aleatoria discreta)
Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$, y sea $p(x_j) = P[X = x_j]$, $j = 1; 2; 3; \ldots$, su función de probabilidad. La *media* o *esperanza matemática* de X es dada por

$$\mu = E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\, P[X = x_j] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\, p(x_j)$$

siempre que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j\, p(x_j)$ sea absolutamente convergente,

esto es , $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|\, p(x_j) < \infty)$

Si $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|\, p(x_j) = \infty$, se dice que la esperanza matemática de X no existe.

De acuerdo a la definición, $E[X]$ es un promedio de los valores que toma la variable aleatoria, donde cada valor x_j es ponderado por su probabilidad respectiva $p(x_j)$. Valores más probables reciben mayor peso.

Definición 11.- (Media de una variable aleatoria continua) Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$. El valor esperado o media de X es dado por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

siempre que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ sea absolutamente convergente, esto es, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$ es finito ó $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty$.

Ejemplo 30.- Suponga que una variable aleatoria discreta X tiene la siguiente función de probabilidad

x_j	-2	0	1	4
$p(x_j)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Entonces, $E[X] = \sum_{j=1}^{4} x_j\, p(x_j)$

$$= -2(0{,}1) + 0(0{,}4) + 1(0{,}3) + 4(0{,}2) = 0{,}9$$

Ejemplo 31.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x\ , & 0 < x < 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces,

$$E[X] = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 32.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2}\ , & \text{si } x \geq 2 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego,

$$E[X] = \int_2^{+\infty} \frac{x}{(x-1)^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right]_2^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + 1\right] = +\infty$$

En este caso se dice que $E[X]$ no existe.

Observación 6.- **(Interpretación de la esperanza matemática).** La esperanza matemática de una variable aleatoria se considera como el centro de gravedad de la variable. Para ilustrar esta afirmación, considere la función de probabilidad cuya gráfica se muestra en la figura 6.19. En la gráfica, el eje X es considerado

como una varilla delgada en la cual se colocan los pesos. Si un peso igual a $p(x_j)$ es colocado en esta varilla en cada punto x_j, entonces la varilla estará balanceada si su soporte está en el punto $E[X]$.

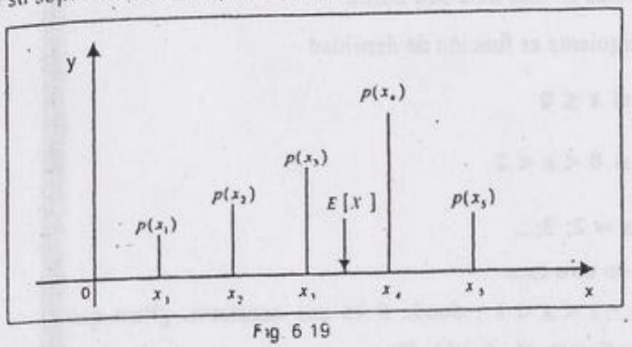


Fig. 6.19

Ahora, consideremos la función de densidad continua cuya gráfica se muestra en la figura 6.20. En este caso, el eje X es considerado como una varilla delgada en la cual la masa varia continuamente. Si la densidad de la varilla en cada punto x es igual a $f(x)$, entonces el centro de gravedad de la varilla estará localizado en el punto $E[X]$ y la varilla estará balanceada si su soporte está en dicho punto.

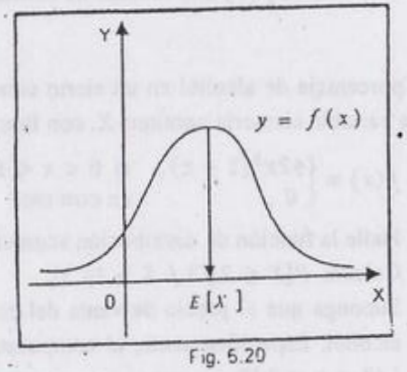


Fig. 6.20

Ejemplo 33.- **(Densidad de Cauchy).**
Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\ ,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Esta función de densidad se llama distribución de Cauchy.

La función $f(x)$ es simétrica con respecto al origen ($x = 0$) (Fig. 6.21).

Por tanto, si la media de la distribución de Cauchy existiera, su valor debe ser igual a cero. Sin embargo, la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = +\infty$$

Luego, la media de la distribución de Cauchy no existe.

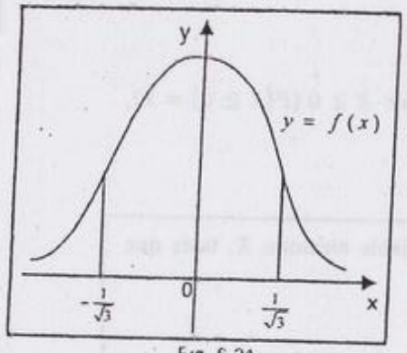


Fig. 6.21

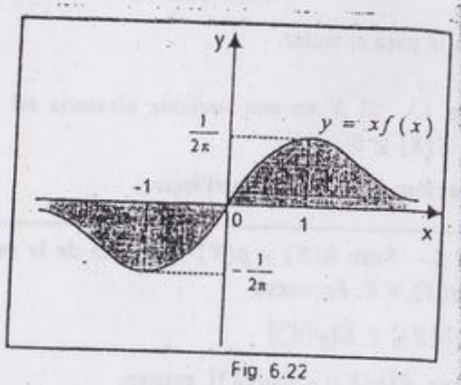


Fig. 6.22

La razón de la no existencia de la media de la distribución de Cauchy es la siguiente. Cuando la curva $y = f(x)$ es trazada como en la figura 6.21, las dos colas se aproximan rápidamente al eje X de modo que el área total bajo la curva es igual a 1. Por otro lado, si cada valor de $f(x)$ es multiplicado por x, entonces las colas de la curva $y = xf(x)$ (Fig.6.22), se aproximan lentamente al eje X, y el área total de cada parte que está debajo de la curva es infinita.

Definición 12.- (Valor esperado de una función de una variable aleatoria)

a) Si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(x_j)$; $j = 1; 2; 3; \ldots$, y $h(X)$ es una función real de la variable aleatoria X, entonces el valor esperado de la función $h(X)$ es dado por

$$E[h(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} h(x_j)p(x_j)$$

siempre que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} h(x_j)\, p(x_j)$ es absolutamente convergente, esto es,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |h(x_j)|\, p(x_j) < \infty.$$

b) Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ y $h(X)$ es una función real de la variable aleatoria X, entonces el valor esperado de $h(X)$ es dado por

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx$$

siempre que $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|f(x)dx < \infty$.

Ejemplo 34.- Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad siguiente

x	0	1	2
$p(x)$	1/4	1/2	1/4

Encuentre el valor esperado de $Y = (X-2)^2$.

Solución.

De la definición 12, se tiene

$$E[Y] = E[(X-2)^2] = \sum_{x=0}^{2} (x-2)^2 P[X = x]$$

$$= (-2)^2 P[X = 0] + (-1)^2 P[X = 1] + 0\, P[X = 2]$$

$$= 4\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 35.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2}, & \text{si } x \geq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado de $h(X) = \sqrt{X-1}$.

Solución. Se tiene

$$E[h(X)] = E[\sqrt{X-1}] = \int_2^{+\infty} \sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \int_2^t (x-1)^{-3/2}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \left[-2(x-1)^{-1/2}\right]_2^t$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[-2(t-1)^{-1/2} + 2\right] = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{t-1}} + 2\right] = 2$$

6.7.1.1 Propiedades de la esperanza matemática

Teorema 1.- Si la variable aleatoria X toma un valor constante, esto es, $X = C$, entonces

$$E[X] = E[C] = C$$

Demostración. Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$. Entonces,

$$E[X] = E[C] = \int_{-\infty}^{+\infty} Cf(x)dx = C\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = C(1) = C$$

Para el caso discreto, se demuestra de una manera análoga.

Teorema 2.- Si a y b son constantes y X es una variable aleatoria tal que $E[X]$ existe, entonces

$$E[aX \pm b] = aE[X] \pm b$$

Demostración.- Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$. Entonces,

$$E[aX \pm b] = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax \pm b)f(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \pm b\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}_{1}$$

$$= aE[X] \pm b$$

Una prueba similar se da para el caso discreto.

Teorema 3.- Sean $h(X)$ y $g(X)$ funciones reales de la variable aleatoria X tales que $E[h(X)]$ y $E[g(X)]$ existen. Entonces para a y b constantes, se tiene

$$E[a\,h(X) \pm b\,g(X)] = a\,E[h(X)] \pm b\,E[g(X)]$$

Demostración.- Ejercicio para el lector

Teorema 4.-

a) Si existe una constante a tal que $P[X \geq a] = 1$, entonces

$$E[X] \geq a$$

b) Si existe una constante b tal que $P[X \leq b] = 1$, entonces

$$E[X] \leq b$$

Demostración.

a) Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, y que $P[X \geq a] = 1$. Entonces,

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_{a}^{+\infty} a\,f(x)dx = a\ (x \geq a)$$

Por tanto, $E[X] \geq a$

b) Ejercicio para el lector.

Corolario 1.- Si X es una variable aleatoria tal que $X \geq 0$ $(P[X \geq 0] = 1)$, entonces $E[X] \geq 0$.

Demostración: (Ejercicio para el lector)

Teorema 5.- Sean $h(X)$ y $g(X)$ funciones de la variable aleatoria X, tales que $h(X) \geq g(X), \forall X$. Entonces

$$E[h(X)] \geq E[g(X)]$$

siempre que $E[h(X)]$ y $E[g(X)]$ existen.

Demostración.

Se tiene $h(X) - g(X) \geq 0$, $\forall X$. Entonces por el corolario 1,

$$E[h(X) - g(X)] \geq 0 \Leftrightarrow E[h(X)] - E[g(X)] \geq 0$$

De donde se obtiene

$$E[h(X)] \geq E[g(X)]$$

Ejemplo 36.- Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{16}{15x^5}, & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre $E[5X - 8]$.

Solución.

$$E[X] = \int_1^2 xf(x)dx = \int_1^2 x\left(\frac{16}{15x^5}\right)dx = \frac{16}{15}\int_1^2 \frac{dx}{x^4}$$

$$= \frac{16}{15}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = \frac{16}{15}\left(\frac{7}{24}\right) = \frac{14}{45}$$

Por lo tanto,

$$E[5X - 8] = 5E[X] - 8 = 5\left(\frac{14}{45}\right) - 8 = -\frac{58}{9}$$

6.7.2 Mediana de Una Variable Aleatoria

Definición 13.- La mediana de una variable aleatoria X es el número $x_5 = Med(X)$ que satisface la siguiente condición

$$P[X \leq x_5] \geq 1/2 \wedge P[X \geq x_5] \geq 1/2$$

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ y función de distribución acumulada $F(x)$, entonces la mediana de X es el número $x_{.5} = Med(X)$, tal que

$$F(x_{.5}) = F(Med(X)) = \int_{-\infty}^{x_{.5}} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 37.- Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada

$$F(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0\ , & \text{si } x < 0 \\ x^3\ , & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1\ , & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Halle la mediana de X.

Solución.

$$F(x_{.5}) = P[X \leq x_{.5}] = (x_{.5})^3 = \frac{1}{2} \implies x_{.5} = Med(X) = \sqrt[3]{1/2}.$$

6.7.3 Moda de Una Variable Aleatoria

Definición 14.-

a) Sea X una variable aleatoria discreta. La moda de X es el valor de X que tiene la más alta probabilidad y se denota por $Mod(X)$.

b) Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, la moda de X es el valor de X para el cual f tiene un valor máximo absoluto.

Ejemplo 38.- Sea X es una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad

x	-1	0	2
$p(x)$	0,3	0,2	0,5

Entonces $Mod(X) = 2$.

Ejemplo 39.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2x\ , & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle la moda de X. b) Halle la mediana de X.

Solución

a) El valor máximo absoluto de $f(x)$ ocurre en $x = 1$, pues

$$f(1) = 2 \geq f(x),\ \forall x \in [0;1]$$

Luego, la moda de X es $Mod(X) = 1$.

b) Para calcular la mediana de X, se tiene

$$F(x_{.5}) = \int_0^{x_{.5}} 2x\, dx = 0{,}5$$

el cual es equivalente a

$$[x^2]_0^{x_{.5}} = 0{,}5$$

De donde, se obtiene

$$x_{.5} = Med(X) = \sqrt{1/2}$$

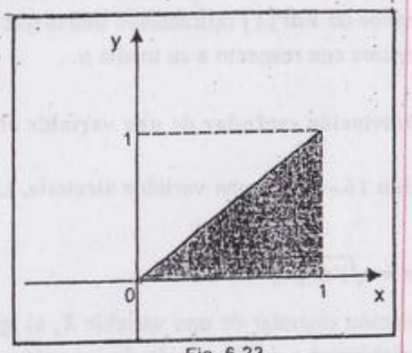


Fig. 6.23

6.8 MEDIDAS DE DISPERSIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA

6.8.1 Varianza de una variable aleatoria

Definición 15.- Sea X una variable aleatoria con media $\mu = E[X]$. La varianza de X es dada por

i) $\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2] = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - \mu)^2\, p(x_j)$

si X es una variable aleatoria discreta que toma valores $x_1, \ldots, x_j, \ldots$

ii) $\sigma^2 = Var[X] = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$

si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$.

La varianza de la variable aleatoria X solamente está definida si la serie en (i) es convergente o si la integral impropia en (ii) es convergente.

La varianza es el valor esperado de una variable aleatoria no negativa $(X-\mu)^2$. Luego, por el corolario 1 se tiene

$$Var[X] = E[(X-\mu)^2] \geq 0$$

El valor de $Var[X]$ también se llama *varianza de distribución* de X. Así, en algunos casos se habla de la varianza de X y en otros casos de la varianza de la distribución de probabilidad de X. La varianza de una distribución proporciona una medida de variabilidad o de dispersión de la distribución de probabilidad alrededor de su media μ. Un valor pequeño de $Var[X]$ indica que la distribución de probabilidad está estrechamente concentrada en torno a μ, mientras que un

valor grande de $Var[X]$ típicamente indica que la distribución de probabilidad está muy dispersa con respecto a su media μ.

6.8.2 Desviación estándar de una variable aleatoria

Definición 16.- Sea X una variable aleatoria. La desviación estándar de X es dada por

$$\sigma = \sqrt{Var[X]}$$

La desviación estándar de una variable X, al igual que la varianza, es una medida de la variabilidad o de dispersión de los valores de X. En muchas aplicaciones, se prefiere usar como una medida de dispersión la desviación estándar en vez de la varianza, pues esta medida está expresada en las mismas unidades de medida que la variable aleatoria.

6.8.3 Propiedades de la Varianza

En los teoremas siguientes se supone que la varianza de la variable aleatoria X existe.

Teorema 6.- La varianza de una constante es cero, esto es,

$$Var[X] = 0 \Leftrightarrow X = C\ ,\ \text{donde } C \text{ es constante}$$

Demostración. Se deja al lector

Teorema 7.- Si a y b son constantes cualesquiera, entonces

$$Var[aX \pm b] = a^2 Var[X]$$

Demostración.

Si $E[X] = \mu$, entonces $E[aX \pm b] = a\mu \pm b$. Luego,

$$Var[aX \pm b] = E[(aX \pm b - a\mu \mp b)^2] = E[(aX - a\mu)^2]$$
$$= a^2 E[(X-\mu)^2] = a^2 Var[X]$$

Teorema 8.- Para cualquier variable X

$$Var[X] = E[X^2] - [E(X)]^2$$

siempre que exista $E[X^2]$

Demostración. Sea $E[X] = \mu$. Entonces, se tiene

$$Var[X] = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$
$$= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$$
$$= E[X^2] - [E(X)]^2$$

Ejemplo 40.- Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad

x	-2	0	1	3	4
$p(x)$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Determine la desviación estándar de $Y = 4X - 7$.

Solución.

$$i)\ E[X] = \frac{1}{5}(-2) + \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}(3) + \frac{1}{5}(4) = 1{,}2 = \mu$$

$$ii)\ E[X^2] = \frac{1}{5}(-2)^2 + \frac{1}{5}(0)^2 + \frac{1}{5}(1)^2 + \frac{1}{5}(3)^2 + \frac{1}{5}(4)^2 = 6$$

Luego, por el teorema 8 se tiene

$$Var[X] = E[X^2] - [E(X)]^2 = 6 - (1{,}2)^2 = 4{,}56$$

Así, por el teorema 7 resulta

$$Var[Y] = Var[4X - 7] = 16\, Var[X] = 72{,}96$$

Por tanto, la desviación estándar de Y es

$$\sigma = \sqrt{Var[Y]} = \sqrt{72{,}96} = 8{,}54$$

Ejemplo 41.- Sea V la velocidad del viento en millas/hora el cual se supone que es una variable aleatoria con valores en el intervalo $[0; 20]$ y con función de densidad

$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & \text{si } 0 \le v \le 20 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La presión W (en $libras\ /\ pie^2$) sobre la superficie del ala de un avión es dada por la relación $W = 0{,}003\, V^2$.

Encuentre el valor esperado y la varianza de W.

Solución.

$$i)\ E[W] = E[0{,}003\, V^2] = \int_0^{20} 0{,}003\, v^2 \frac{1}{20} dv = 0{,}4\ libras/pie^2$$

$$ii)\ E[W^2] = E[(0{,}003)^2 V^4] = \int_0^{20} (0{,}003)^2 v^4 \cdot \frac{1}{20} dv = 0{,}288$$

Luego,

$$Var[W] = E[W^2] - [E(W)]^2 = 0{,}288 - (0{,}4)^2 = 0{,}128$$

Ejemplo 42.- Si llueve un vendedor de paraguas puede ganar S/. 300 por día, si no llueve puede perder S/. 60 por día. ¿Cuál es la esperanza matemática y su deviación estándar si la probabilidad de lluvia es 0,3?

Solución.

Sea X: cantidad de dinero que el vendedor obtiene por la venta de paraguas.

La distribución de X es

x	300	-60
$p(x)$	0,3	0,7

Así,

i) $E[X] = 300(0,3) + (-60)(0,7) = 48$

ii) $E[X^2] = (300)^2(0,3) + (-60)^2(0,7) = 29\,520$

Luego,

$$Var[X] = E[X^2] - [E(X)]^2 = 29\,520 - (48)^2 = 27\,216$$

Por tanto,

$$\sigma = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{27216} = 164{,}973$$

Ejemplo 43.- Una caja contiene 7 caramelos de sabor fresa y 9 de sabor naranja. Se extraen 4 caramelos sucesivamente y con reposición. Si usted gana S/. 50 por cada caramelo de sabor fresa extraído y S/. 30 por cada caramelo de sabor naranja extraído, ¿cuánto debería pagar por el derecho a jugar para que el juego sea equitativo?

Solución.

Sea X: ganancia del jugador y L: cantidad que deposita el jugador por derecho a jugar. Entonces para que el juego sea equitativo se debe tener

$$E[X - L] = E[X] - L = 0 \Longrightarrow E[X] = L$$

Los valores que puede tomar la variable aleatoria X son:

$X = 120$ si el jugador extrae 4 caramelos de sabor naranja

$X = 140$ si el jugador extrae 3 caramelos de sabor naranja y 1 de sabor fresa

$X = 160$ si el jugador extrae 2 caramelos de sabor naranja y 2 de sabor fresa

$X = 180$ si el jugador extrae 1 caramelo de sabor naranja y 3 de sabor fresa

$X = 200$ si el jugador extrae 4 caramelos de sabor fresa

Ahora, sean los eventos

N: extraer caramelo de sabor naranja

F: extraer caramelo de sabor fresa

Al tener en cuenta que el experimento es con reposición, se tiene

$$P[X = 120] = P[NNNN] = P(N)P(N)P(N)P(N) = \left(\frac{9}{16}\right)^4$$

$$P[X = 140] = P[NNNF \cup NNFN \cup NFNN \cup FNNN]$$

$$= \binom{4}{3}\left(\frac{9}{16}\right)^3\left(\frac{7}{16}\right) = 4\left(\frac{9}{16}\right)^3\left(\frac{7}{16}\right)$$

$$P[X = 160] = \binom{4}{2}\left(\frac{9}{16}\right)^2\left(\frac{7}{16}\right)^2 = 6\left(\frac{9}{16}\right)^2\left(\frac{7}{16}\right)^2$$

$$P[X = 180] = \binom{4}{1}\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{7}{16}\right)^3 = 4\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{7}{16}\right)^3$$

$$P[X = 200] = \binom{4}{0}\left(\frac{7}{16}\right)^4 = \left(\frac{7}{16}\right)^4$$

Luego, la distribución de probabilidad de X es

x	120	140	160	180	200
$p(x)$	$\left(\frac{9}{16}\right)^4$	$4\left(\frac{9}{16}\right)^3\left(\frac{7}{16}\right)$	$6\left(\frac{9}{16}\right)^2\left(\frac{7}{16}\right)^2$	$4\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{7}{16}\right)^3$	$\left(\frac{7}{16}\right)^4$

$$E[X] = 120\left(\frac{9}{16}\right)^4 + 140(4)\left(\frac{9}{16}\right)^3\left(\frac{7}{16}\right) + 160(6)\left(\frac{9}{16}\right)^2\left(\frac{7}{16}\right)^2 +$$

$$+180(4)\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{7}{16}\right)^3 + 200\left(\frac{7}{16}\right)^4 = \frac{10\,158\,080}{65\,536} = 155 = L$$

Por tanto, usted debe pagar S/. 155 por derecho a jugar para que el juego resulte equitativo.

Ejemplo 44.- En una localidad determinada, la distribución de la renta en miles de soles es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & si\ 0 \le x \le 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & si\ 2 < x \le 6 \\ 0, & si\ x < 0\ ó\ x > 6 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la renta media en esta localidad?

b) Si se escoge una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su renta sea superior a 3000soles?

c) ¿Cuál es la mediana y moda de la variable?

Solución.

a) $\mu = E[X] = \int_0^2 x\left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}\right)dx + \int_2^6 x\left(-\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}\right)dx = 2{,}4667$

b) $P[X > 3] = \int_3^6 \left(-\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}\right)dx = 0{,}3375$

c) Como $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}\right)dx = 0{,}4$, entonces la mediana $x_{.5} \in \langle 2; 6]$. Luego, se tiene

$$F(x_{.5}) = Med(X) = \int_0^2 \left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}\right)dx + \int_2^{x_{.5}} \left(-\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}\right)dx = \frac{1}{2}$$

De donde se obtiene

$$\int_2^{x_{.5}} \left(-\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}\right)dx = \left[-\frac{3x^2}{80} + \frac{9}{20}x\right]_2^{x_{.5}} = 0{,}1$$

Por tanto, la mediana de X es $x_{.5} = 2{,}35$

La gráfica de la función de densidad $f(x)$ se muestra en la figura 6.24.

El máximo absoluto de $f(x)$ ocurre en $x = 2$ (Fig. 6.24) y esto indica que la moda de la variable aleatoria de X es

$Mod(X) = 2.$

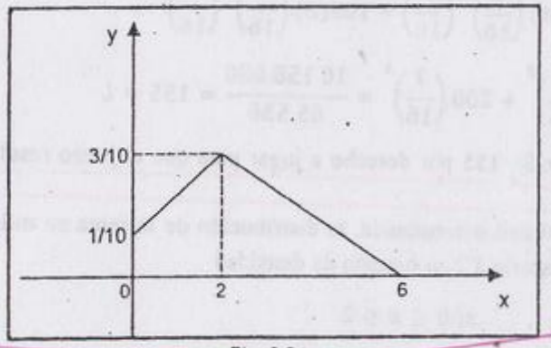


Fig 6 24

Ejemplo 45.- La demanda de un libro particular en la librería de Valentín tiene la distribución de probabilidad siguiente.

N° de ejemplares pedidos, x	0	10	20	30	40	50	60
$p(x)$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

Valentín vende cada libro a S/. 100 y paga por ella S/. 80 y se le reembolsan S/. 8 por ejemplar no vendido.

a) Calcule la media y la desviación estándar de X: el número de ejemplares vendidos.

b) Suponga que Valentín decide pedir 60 ejemplares de libros a la distribuidora. Determine los valores y sus probabilidades de la variable aleatoria Y que representa la ganancia neta.

c) Calcule la media y la desviación estándar de Y .

d) Suponga que Valentín pide 30 ejemplares, ¿cuál es la ganancia de Valentín ahora? .Comparar con c).

Solución.

a) $\mu = E[X] = 0(0{,}1) + 10(0{,}1) + 20(0{,}2) + 30(0{,}3) + 40(0{,}1) + 50(0{,}1) + +60(0{,}1) = 29$

$E[X^2] = 0(0{,}1) + 10^2(0{,}1) + 20^2(0{,}2) + 30^2(0{,}3) + 40^2(0{,}1) + 50^2(0{,}1) + +60^2(0{,}1) = 1\,130$

$\sigma^2 = Var[X] = E[X^2] - (E(X))^2 = 1\,130 - (29)^2 = 289$

Luego, $\mu = 29$ y $\sigma = \sqrt{Var[X]} = 17$

b)

N° de ejemplares pedidos a la librería	0	10	20	30	40	50	60
Ingresos por venta	0	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000
Ingresos por reembolso	480	400	320	240	160	80	0
Costos	4 800	4 800	4 800	4 800	4 800	4 800	4 800
Ganancia neta, y	−4 320	−3 400	−2 480	−1 560	−640	280	1 200
Probabilidad $p(y)$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

c) $E[Y] = -4\,320(0{,}1) - 3\,400(0{,}1) - 2\,480(0{,}2) - 1\,560(0{,}3) - 640(0{,}1) + +280(0{,}1) + 1\,200(0{,}1) = -1\,652$

Por tanto, en promedio se pierde S/. 1652 sobre este libro si pide 60 ejemplares.

d)

Nº de ejemplares pedidos a la librería	0	10	20	30	40	50	60
Ingresos por venta	0	1 000	2 000	3 000	3 000	3 000	3 000
Ingresos por reembolso	240	160	80	0	0	0	0
Costos	2 400	2 400	2 400	2 400	2 400	2 400	2 400
Ganancia neta, w	−2 160	−1 240	−320	600	600	600	600
Probabilidad $p(w)$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

$$E[W] = -2\,160(0{,}1) - 1\,240(0{,}1) - 320(0{,}2) + 600(0{,}3) + 600(0{,}1) + \\ +600(0{,}1) + 600(0{,}1) = -44$$

Así, se pierde S/. 44 soles si hace un pedido de 30 ejemplares a la distribuidora.
Al comparar con el resultado obtenido en c), es preferible pedir 30 ejemplares que pedir 60.

Ejemplo 46.- Se lanza 2 dados repetidas veces hasta obtener suma 9 en sus caras superiores. Determine el número esperado de lanzamiento.

Solución*

Sea X: número de lanzamientos de dos dados hasta conseguir suma 9

El rango de X es $R_X = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$

De acuerdo al espacio muestral Ω del ejemplo 24 del capítulo 5, se tiene

$$P[suma\ 9] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}\ ,\quad P[suma\ diferente\ a\ 9] = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

Luego,

$$P[X=1] = \frac{1}{9}\ , P[X=2] = \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)\ , P[X=3] = \left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{1}{9}\right)\ , \ldots$$

Así, la función de probabilidad de X es dada por

$$p(x) = P[X=x] = \left(\frac{8}{9}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{9}\right), x = 1; 2; \ldots$$

Por tanto, se tiene

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x\,p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{9}{8}x\left(\frac{8}{9}\right)^{x}$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{8}{9}\right)^{x} = \frac{1}{8}\lim_{n\to+\infty}\sum_{x=1}^{n} x\left(\frac{8}{9}\right)^{x}$$

Por la propiedad 4 (propiedad telescópica) página 96 Tópicos de Cálculo Vol. II), se tiene

$$\sum_{x=1}^{n}\left[x\left(\frac{8}{9}\right)^{x} - (x-1)\left(\frac{8}{9}\right)^{x-1}\right] = n\left(\frac{8}{9}\right)^{n}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}\sum_{x=1}^{n} x\left(\frac{8}{9}\right)^{x} + \sum_{x=1}^{n}\left(\frac{8}{9}\right)^{x-1} = n\left(\frac{8}{9}\right)^{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}\sum_{x=1}^{n} x\left(\frac{8}{9}\right)^{x} - \frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{n}}{1-8/9} = -n\left(\frac{8}{9}\right)^{n}$$

De donde, se obtiene

$$\sum_{x=1}^{n} x\left(\frac{8}{9}\right)^{x} = 8\left[9 - 9\left(\frac{8}{9}\right)^{n} - n\left(\frac{8}{9}\right)^{n}\right]$$

Luego,

$$E[X] = \frac{1}{8}\lim_{n\to+\infty} 8\left[9 - 9\left(\frac{8}{9}\right)^{n} - n\left(\frac{8}{9}\right)^{n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[9 - 9\left(\frac{8}{9}\right)^{n} - n\left(\frac{8}{9}\right)^{n}\right]$$

$$= 9 - 9\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{n} - \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{8}{9}\right)^{n} = 9 - 0 - 0 = 9$$

Así, $E[X] = 9$

Por tanto, en promedio se debe lanzar 9 veces para obtener la suma 9.

Ejemplo 47.- La demanda diaria de arroz en Monterrey, en centenas de kilos, es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x\ , & \text{si } 0 \le x < 1 \\ -\frac{1}{3}x + 1\ , & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ 0\ , & \text{si } x < 0 \text{ ó } x > 3 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un día escogido al azar, se vende más de 150 kg.?

b) En 30 días, ¿el gerente de Monterrey cuánto espera vender?

c) ¿Cuál es la cantidad de arroz que debe ser dejado a disposición del público diariamente para que no falte arroz en 95% de los días?

Solución.

a) $P[X > 1{,}5] = \int_{1,5}^{3} \left(-\frac{x}{3} + 1\right) dx = 0{,}375$

b) $E[X] = \int_{0}^{1} x\left(\frac{2}{3}x\right) dx + \int_{1}^{3} x\left(-\frac{x}{3} + 1\right) = 1{,}44$

Luego, la demanda promedio de arroz es de 144 kg.

Por tanto, el gerente de Monterrey venderá en 30 días en promedio

$30(144) = 4\,320\ kg.$

c) Sea x_0 la cantidad de arroz que debe ser dejado diariamente a disposición del público de modo que

$$P[X \le x_0] = 0{,}95 \iff \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = 0{,}95$$

$$\iff \int_{0}^{1} \frac{2}{3}xdx + \int_{1}^{x_0} \left(-\frac{x}{3} + 1\right) dx = 0{,}95$$

De donde, se obtiene

$$0{,}3333 + x_0 - \frac{x_0^2}{6} + \frac{1}{6} - 1 = 0{,}95 \iff x_0^2 - 6x_0 + 8{,}70 = 0$$

La solución de la ecuación de segundo grado que interesa es

$x_0^* = 2{,}4523$

Por tanto, la cantidad de arroz que debe ser dejado a disposición del público diariamente de modo que no falte arroz en 95% de los días es 245,23 kg.

6.9 DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

Teorema 9.- Sea X una variable aleatoria y g una función real tal que $g(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$P[g(X) \ge k] \le \frac{E[g(X)]}{k}, \forall k > 0$$

Demostración. Sea X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, entonces se tiene

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx = \int_{\{x\,/\,g(x)\ge k\}} g(x)f(x)dx + \int_{\{x\,/\,g(x)<k\}} g(x)f(x)dx$$

$$\ge \int_{\{x\,/\,g(x)\ge k\}} g(x)f(x)dx \ge \int_{\{x\,/\,g(x)\ge k\}} kf(x)dx = k\,P[g(X) \ge k]$$

Por tanto,

$$P[g(X) \ge k] \le \frac{E[g(X)]}{k}, \qquad \forall k > 0$$

En forma similar la demostración es válida para el caso discreto.

Teorema 10.- (Desigualdad de Markov). Si X es una variable aleatoria no negativa, esto es, $P[X \ge 0] = 1$. Entonces para cualquier número $a > 0$, se tiene

$$P[X \ge a] \le \frac{E[X]}{a}$$

Demostración. Para $g(X) = X$ y $k = a$ en el teorema 9, se tiene

$$P[X \ge a] \le \frac{E[X]}{a}$$

Teorema 11- (Desigualdad de Chebyshev). Si X es una variable aleatoria con media $E[X] = \mu$ (finita) y varianza $Var[X] = \sigma^2 < \infty$ (finita), entonces para cualquier número $k > 0$,

$$P[|X - \mu| \ge k] \le \frac{Var[X]}{k^2} \qquad \text{ó} \qquad P[|X - \mu| \ge k\sigma] \le \frac{1}{k^2}$$

Demostración. Se tiene

$$P[|X - \mu| \ge k] = P[(X - \mu)^2 \ge k^2]$$

Como $g(X) = (X - \mu)^2$ es una variable aleatoria no negativa, entonces por el teorema 10 (con $a = k^2$) se obtiene

$$P[|X - \mu| \ge k] = P[(X - \mu)^2 \ge k^2] \le \frac{E[(X - \mu)^2]}{k^2} = \frac{Var[X]}{k^2}$$

Por tanto,

$$P[|X - \mu| \ge k] \le \frac{Var[X]}{k^2}$$

La desigualdad de Chebyshev establece que la probabilidad de obtener un valor de la variable aleatoria que difiera de la media en más de k unidades es menor que $\frac{\sigma^2}{k^2}$ (ó $\frac{1}{k^2}$)

Ejemplo 48.- Suponga que el número de pernos producidos en una fábrica durante una semana específica es una variable aleatoria con media 60.

a) ¿Qué puede decirse acerca de la probabilidad de que la producción de esa semana excederá a 85?

b) Si la varianza de la producción de esa semana es conocida e igual a 25, entonces, ¿qué puede decirse acerca de la probabilidad de que la producción de esa semana esté entre 50 y 70?

Solución. Sea X la variable aleatoria que denota el número de pernos producidos en esa semana.

a) Por la desigualdad de Markov, se tiene

$$P[X > 85] \leq \frac{E[X]}{85} = \frac{60}{85} = 0{,}706$$

b) La probabilidad pedida es

$$P[50 < X < 70] = P[-10 < X - 60 < 10] = P[|X - 60| < 10]$$

Al aplicar la desigualdad de Chebyshev, se obtiene

$$P[|X - 60| \geq 10] \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Luego,

$$P[|X - 60| < 10] \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Por tanto, la probabilidad de que la producción de esa semana esté entre 50 y 70 es de por lo menos 0,75.

Ejemplo 49.- Sea X una variable aleatoria, tal que $E[X] = 5$ y $E[X^2] = 41$. Use la desigualdad de Chebyshev para calcular el límite inferior de $P[-3 \leq X < 13]$

Solución.

$$P[-3 < X < 13] = P[-8 < X - 5 < 8] = P[|X - 5| < 8]$$

Por la desigualdad de Chebyshev, se tiene

$$P[|X - 5| \geq 8] \leq \frac{\sigma^2}{64} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

Luego,

$$P[-3 < X < 13] = P[|X - 5| < 8] \geq 1 - \frac{1}{4} = 0{,}75$$

Teorema 12.- Si $Var[X] = 0$, entonces $P[X = E[X]] = 1$

En otras palabras, solamente las variables aleatorias que tienen varianza igual a cero son constantes con probabilidad 1.

Demostración.

Por la desigualdad de Chebyshev, se tiene

$$P\left[|X - \mu| > \frac{1}{n}\right] = 0 \quad , \quad \forall n \geq 1$$

Al usar la propiedad de continuidad de la probabilidad, se obtiene

$$0 = \lim_{n \to +\infty} P\left[|X - \mu| > \frac{1}{n}\right] = P\left[\lim_{n \to +\infty} \left\{|X - \mu| > \frac{1}{n}\right\}\right] = P[X \neq \mu]$$

Por tanto,

$$P[X = \mu] = 1$$

EJERCICIOS

1. Suponga que X es una variable aleatoria con media y varianza ambas iguales a 20. ¿Qué puede decirse acerca de $P[0 \leq X \leq 40]$?

   $R.\ p \geq \frac{19}{20}$

2. De experiencias pasadas un profesor conoce que los puntajes de los estudiantes después del examen final es una variable aleatoria con media 75.

   a) Dé una cota superior para la probabilidad de que el puntaje de un estudiante exceda a 85. $R.$ 15/17

   Supongamos adicionalmente que el profesor conoce que la varianza de los puntajes de los estudiantes es igual a 25.

   b) ¿Qué puede decirse acerca de la probabilidad de que un estudiante tenga puntaje entre 65 y 85? $R.\ p \geq 3/4$

3. Suponga que X es una variable aleatoria para el cual $P[X \geq 0] = 1$ y $P[X \geq 10] = \frac{1}{5}$. Pruebe que $E[X] \geq 2$.

4. Suponga que X es una variable aleatoria para el cual $E[X] = 10$, $P[X \leq 7] = 0{,}2$ y $P[X \geq 13] = 0{,}3$. Pruebe que $Var[X] \geq \frac{9}{2}$

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias, tal que $E[x_j] = \mu_j$, $Var[X_j] = \sigma_j^2$, $j = 1; \ldots; n$. Pruebe que,

   $$P\left[\left|\frac{X_j - \mu_j}{\sigma_j}\right| \leq \sqrt{n}\, a, \forall j = 1; \ldots; n\right] \geq 1 - \frac{1}{a^2}, \qquad \forall a > 0$$

6. Sea X una variable aleatoria discreta, cuyos posibles valores son $1; 2; \ldots$ Si $P[X = k]$ es no creciente en $k = 1; 2; \ldots$, pruebe que

   $$P[X = k] \leq \frac{2E[X]}{k^2}$$

7. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad

$p(-1) = P[X = -1] = \frac{1}{8}$, $p(0) = P[X = 0] = \frac{6}{8}$, $p(1) = P[X = 1] = \frac{1}{8}$

Para $k = 2$, calcule $P[|X - \mu| \geq k\sigma]$

8. Si X es una variable aleatoria con $E[X] = \mu$ y $P[X \leq 0] = 0$, pruebe que $P[X > 2\mu] \leq \frac{1}{2}$

9. El número de clientes por día en un cierto mostrador de ventas, que se denota por X, observado en un periodo largo de tiempo tiene una media de 20 clientes y una desviación estándar de 2 clientes. La distribución de probabilidad de X no es conocida. ¿Cuál es una buena aproximación de la probabilidad de que X esté entre 16 y 24 el día de mañana? *R.* $p \geq 3/4$

6.10 MOMENTOS Y FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS

Definición 17.- (Momentos) Se denomina momento de orden r ($r \in \mathbb{Z}^+$) de una variable aleatoria X a la esperanza matemática de X^r y se denota por μ'_r, esto es,

$$\mu'_r = E[X^r]$$

siempre que la esperanza exista.

Observación 8.-

i) Para $r = 1$, se tiene $\mu'_1 = E[X] = \mu$

ii) Si la variable aleatoria X es acotada, esto es, existen números reales a y b tal que $P[a \leq X \leq b] = 1$, entonces todos los momentos de orden r existen.

Teorema 13.- Si $E[|X|^r] < \infty$ para algún entero positivo r, entonces $E[|X|^j] < \infty$ para todo entero $j < r$

Demostración.

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$. Entonces

$$E[|X|^j] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^j f(x)dx = = \int_{|x|\leq 1} |x|^j f(x)dx + \int_{|x|>1} |x|^j f(x)dx$$

$$\leq \int_{|x|\leq 1} 1.f(x)dx + \int_{|x|>1} |x|^r f(x)dx$$

$$\leq P[|X| < 1] + E[|X|^r]$$

Como por hipótesis, $E[|X|^r] < \infty$, entonces $E[|X|^j] < \infty$. Una prueba similar es válida para el caso discreto.

Este teorema nos dice que si el r-ésimo momento de X existe, entonces todos los momentos de orden menor que r existen.

Definición 18.- (Momentos centrales) Sea X una variable aleatoria con media $\mu = E[X]$. El momento de orden r ($r \in \mathbb{Z}^+$) centrado en la media μ es dado por

$$\mu_r = E[(X - \mu)^r]$$

siempre que la esperanza existe

El primer momento central es $\mu_1 = E[x - \mu] = 0$

El segundo momento central es la varianza, esto es,

$$\mu_2 = E[(X - \mu)^2] = Var[X]$$

Ejemplo 50.- Sea X una variable aleatoria, tal que

$$E[X] = 1, E[X^2] = 2 \text{ y } E[X^3] = 5$$

Halle $\mu_3 = E[(X - 1)^3]$

Solución.

Como $(X - 1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, entonces

$$\mu_3 = E[(X - 1)^3] = E[X^3 - 3X^2 + 3X - 1] = E[X^3] - 3E[X^2] + 3E[X] - 1$$
$$= 5 - 3(2) + 3(1) - 1 = 1$$

Definición 19.- (Función generatriz de momentos) Sea X una variable aleatoria. Se denomina función generatriz de momentos de la variable aleatoria X a la función $M_X(t)$ dada por

$$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad -h < t < h, \quad h > 0$$

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, entonces la función de generatriz de momentos de X es dada por

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx, \quad -h < t < h, \ h > 0$$

y si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(x)$, entonces la función generatriz de momentos de X es

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{tx} p(x), \quad -h < t < h, \ h > 0$$

Observación 9.-

a) Si la variable aleatoria X es acotada, esto es, $a \leq X \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $M_X(t) = E[e^{tX}]$ siempre existe.

Si la variable aleatoria X no es acotada, entonces la función generatriz de momentos puede existir para algún valor de t y no existir para valores de t. Sin embargo, para cualquier variable aleatoria X, la función de generatriz $M_X(t)$ existe en el punto $t = 0$, pues

$$M(0) = E[1] = 1$$

Así, de aquí en adelante se supone que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X existe en alguna vecindad del punto $t = 0$

b) $M'_X(0) = \left[\frac{d}{dt}E[e^{tX}]\right]_{t=0} = E\left\{\left[\frac{d}{dt}(e^{tX})\right]_{t=0}\right\}$

$Como\ \left[\frac{d}{dt}(e^{tX})\right]_{t=0} = [Xe^{tX}]_{t=0} = X,\ entonces\ M'_X(0) = E[X]$

Es decir, la derivada de la función generatriz de momentos evaluado en $t = 0$ es igual a la media de la variable aleatoria X.

En general, si la función generatriz de momentos de X existe $\forall t \in \langle -h; h\rangle$, $h > 0$; entonces $E[X^k]$ existe $(k = 1; 2; 3; \ldots)$, pues la n-ésima derivada de $M_X(t)$ en $t = 0$ satisface la siguiente relación

$$M_X^{(n)}(0) = \left[\frac{d^n}{dt^n}E(e^{tX})\right]_{t=0} = E\left\{\left[\frac{d^n}{dt^n}E(e^{tX})\right]_{t=0}\right\}$$

$$= E\{[X^n e^{tX}]_{t=0}\} = E[X^n],\ n = 1; 2; \ldots$$

Luego,

$M'_X(0) = E[X]$, $M''_X(0) = E[X^2]$, $M'''_X(0) = E[X^3]$, etc.

Ejemplo 51.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & si\ x > 0 \\ 0, & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

a) Halle la función generatriz de momentos de X

b) Halle $Var[X]$

Solución

a) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{+\infty} e^{tx}e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{(t-1)x}dx$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{t-1}\left[e^{(t-1)b} - 1\right] = \frac{1}{t-1}\lim_{b\to+\infty}\left[e^{(t-1)b} - 1\right]$$

Este límite es finito solamente cuando $t - 1 < 0$ ó $t < 1$

Luego,

$$M_X(t) = \frac{1}{t-1}\lim_{b\to+\infty}\left[e^{(t-1)b} - 1\right] = \frac{1}{t-1}[0 - 1],\ si\ \ t < 1$$

$$= \frac{1}{1-t},\quad si\ t < 1$$

Por tanto,

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t},\quad si\ t < 1$$

b) Al derivar la función generatriz de momentos, se obtiene

$$M'_X(t) = \frac{1}{(1-t)^2},\ M''_X = \frac{2}{(1-t)^3}$$

Luego,

$$E[X] = M'(0) = 1,\qquad E[X^2] = M''(0) = 2$$

Por tanto,

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2 - 1 = 1$$

Teorema 14.- Sea X una variable aleatoria con función generatriz de momentos $M_X(t)$, y sea $Y = aX + b$ (a y b constantes) una variable aleatoria con función generatriz de momentos $M_Y(t)$. Entonces para todo t tal que $M_X(t)$existe, se tiene

$$M_Y(t) = e^{bt}M_X(at)$$

Demostración.

Por definición de función generatriz de momentos, se tiene

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E\left[e^{t(aX+b)}\right] = e^{bt}E[e^{atX}] = e^{bt}M_X(at)$$

Ejemplo 52.- Sea X la variable aleatoria dada en el ejemplo 49. Halle la función generatriz de momentos de la variable aleatoria $Y = 5 - 2X$.

Solución.

Del ejemplo 49, la función generatriz de momento de X es

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t},\ si\ t < 1$$

Luego, la función generatriz de momentos de $Y = 5 - 2X$ es

$$M_Y(t) = e^{5t}M_X(-2t) = \frac{e^{5t}}{1+2t},\ \ \forall t > -\frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

1. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x}, & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k. $R.\ \frac{1}{\ln 2}$ b) Determine $E[X]$ $R.\ \frac{1}{\ln 2}$

c) Encuentre la mediana de X. $R.\ \sqrt{2}$

d) Encuentre la moda de X. $R.\ 1$

2. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - kx^3, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle k $R.\ 12$ b) Encuentre $E[X]$ R. 3/5

c) Determine la mediana de X d) Encuentre $Var[X]$ R. 1/25

R. Solución de $4(x_{.5})^3 - 3(x_{.5})^4 = 0{,}5$

3. Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por

$$F(-2) = 0{,}3,\ F(0) = 0{,}5,\ F(1) = 0{,}6,\ F(2) = 0{,}8,\ F(5) = 1$$

a) Calcule $E[X]$ R. 0,9 c) Determine $P[-1 \le X \le 4]$ R. 0,5

b) Encuentre $Mod(X)$ R. -2 d) Encuentre $Var[X]$ R. 6,29

4. Un juego consiste en lanzar un dado; si sale 2 ó 5, la persona gana S/. 50 por cada punto obtenido, si sale 1 ó 6, la persona gana S/. 100 por cada punto obtenido; si sale 3 ó 4, la persona paga S/. 150 por cada punto obtenido.

a) ¿El juego es honesto? $R.$ Sí

b) Calcule la desviación estándar de la distribución. $R.$ 409,27

5. En una clase de Matemática I, hay 6 hombres y 3 mujeres. Se seleccionan 3 alumnos al azar sin reposición para formar un Comité. Si X representa el número de hombres en el comité, calcule la media, moda y desviación estándar de X. $R.\ \mu = 340,\ \sigma = 2{,}85$

6. Suponga que X es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2, y que el cuarto momento central de X existe. Pruebe que $E[(X-\mu)^4] \ge 0$

7. Supongamos que X es una variable aleatoria con función generatriz de momentos dado por

$$M_X(t) = \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t}), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Halle la media y la varianza de X.

8. El tiempo T, en minutos, necesarios para que un obrero procese cierta pieza es una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad.

T	2	3	4	5	6	7
$p(T)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

a) Calcule el tiempo promedio de procesamiento $R.$ 4,6

Para cada pieza procesada, el obrero gana un fijo de S/. 2, sin embargo si él procesa la pieza en menos de 6 minutos, él gana S/. 0,50 por cada minuto ahorrado. Por ejemplo, si él procesa la pieza en 4 minutos, entonces recibe una cuantía adicional de S/. 1.

b) Encuentre la distribución, la media y la varianza de la variable aleatoria X: cuantía en soles, ganada por pieza.

$R.\ \mu = 2{,}75,\ \sigma^2 = 0{,}4125$

9. Una fábrica produce válvulas, de las cuales 20% son defectuosas. Las válvulas son vendidas en cajas con 10 piezas. Si la caja no tiene ningún defectuosos, su precio de venta es S/. 100. Si tiene un defectuoso, el precio es S/. 80; si tiene 2 ó 3, el precio es S/. 60. Si tiene más de 3, el precio es S/. 20. ¿Cuál es el precio promedio de una caja?

10. Calcule $E[X]$, si X es una variable aleatoria con función de densidad dada por

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/2}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ $R.\ 4$

b) $f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ $R.\ 0$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^2}, & \text{si } x > 5 \\ 0, & \text{si } x \le 5 \end{cases}$ $R.\ \nexists$

11. La función de densidad de una variable aleatoria X es dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ o, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $E[X] = \frac{3}{5}$, halle a y b $R.\ a = \frac{3}{5},\ b = \frac{6}{5}$

12. Un corredor desea asegurar su automóvil en $ 10 000 durante la temporada de carreras. La compañía de seguros estima que una pérdida total puede ocurrir con una probabilidad de 0,002, una pérdida del 50% con una probabilidad de 0,01 y una pérdida del 25% con una probabilidad de 0,1. Se ignora las demás pérdidas parciales, ¿qué prima debe cobrar la aseguradora cada temporada para tener una ganancia de $ 100? *R.* $ 420

13. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{c^2}, & \text{si } -c < x < c \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcule $E[X^n]$ para cualquier entero positivo n.

14. Pruebe que la siguiente función es función de densidad de probabilidad y encuentre su mediana.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^2(\beta + 2x)}{x^2(\beta + x)^2}, & \text{si } x > \beta \\ \dfrac{x(2\beta + x)}{\beta(\beta + x)^2}, & \text{si } 0 < x \leq \beta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad R.\ \beta = Med(X)$$

15. Se lanzan 3 dados, el primer dado tiene 3 caras verdes y 3 rojas, el segundo dado 2 verdes y 4 negras y el tercer dado 4 rojas y 2 negras. Por cada cara verde que aparezca se paga S/. 10, por cada cara roja S/. 20 y por cada cara negra S/. 30. Determine el valor esperado de la ganancia. *R.* 61,667

16. Se va a rifar un automóvil valorizado en S/. 300 000, para lo cual se venden 5 000 boletos a S/. 200 cada uno.
   a) Si se compra un boleto, ¿cuál es el beneficio esperado? *R.* -140
   b) Si se compran 100 boletos, ¿cuál es el beneficio esperado? *R.* -1 400

17. Un experimento consiste en lanzar 2 bolas en 4 cajas de tal manera que cada bola tiene igual probabilidad de caer en cualquier caja. Si X denota el número de bolas en la primera caja.
   a) ¿Cuál es la función de probabilidad?

R.

x	0	1	2
$p(x)$	0,5625	0,375	0,0625

   b) Halle la media y la varianza de X. *R.* $\mu = 1/2$, $\sigma^2 = 3/8$

18. Suponga que el jugador A tiene 2 monedas y el jugador B tiene 1 moneda. Se lanza una moneda. Si sale cara, el jugador A recibe una moneda de B, si sale sello B recibe una moneda de A. Se continúa lanzando la moneda, independientemente hasta que uno de ellos tiene las 3 monedas. Si X denota el número de juegos requeridos hasta que finalice el juego.
   a) ¿Cuál es la función de probabilidad de X?

$$R.\ P[X = j] = \left(\frac{1}{2}\right)^j, j = 1; 2; \ldots$$

   b) Encuentre la media y la varianza de X *R.* $\mu = 2$, $\sigma^2 = 2$
   c) ¿Cuál es la probabilidad que B gane el juego? *R.* 1/3

19. A través de experimentos estadísticos, se determina que la duración de un cierto tipo de llamada telefónica satisface la relación

$$P[T > t] = ae^{-\lambda t} + (1 - a)e^{-\beta t}, \quad t \geq 0, 0 \leq a \leq 1, \lambda > 0, \beta > 0$$

Encuentre la media y la varianza de T.

$$R.\ \mu = \frac{a\beta + \lambda(1 - a)}{\lambda\beta}$$

20. Un radio técnico debe reemplazar una válvula defectuosa de un radio. En su maletín tiene 5 válvulas de los cuales sólo sirve una de ellas. Si los selecciona al azar, una después de otra sin reposición. ¿Cuál es el número esperado de válvulas que ha de probar para que pueda arreglar el radio?

21. Una fábrica ensambladora de camiones recibe los motores en lotes de 30. El departamento de recepción utiliza la siguiente regla de inspección. Se prueban 3 motores de cada lote. Si ninguno es defectuoso, no se continúa probando los demás motores. Si al menos uno de los motores resulta defectuoso, se prueba el lote completo. ¿Cuál es el número esperado de motores probados por lote si se sabe por experiencia que cada lote contiene exactamente el 20% de defectuosos? *R.* 13 aproximadamente

22. Una urna contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Cuatro jugadores A, B, C y D extraen, en este mismo orden, una bola sin devolución. El primer jugador que saca bola blanca, percibe S/. 10.
   a) Calcule la esperanza de cada jugador. *R.* $\mu_A = 4, \mu_B = 3, \mu_C = 2, \mu_D = 1$

b) Si los 10 soles las tuvieran que poner entre ellos, ¿cuánto tocaría poner a cada uno para que el juego sea equitativo? *R.* 10

23. Se lanza una moneda 3 veces. Si se obtiene al menos 2 caras se permitirá lanzar un dado y se recibirá tantos soles como puntos se obtenga en el dado. ¿Qué cantidad de dinero se espera ganar en este juego? *R.* S/. 1,75

24.- En el hospital Loayza se comprobó que el peso en kilos de los niños al nacer, era una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} kx \ , \text{ si } 2 \le x \le 4 \\ 0 \ , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle k *R.* 1/6

b) Halle la media y la desviación típica de X

R. $\mu = 3{,}1\ kilos\ ,\ \sigma = 0{,}6\ kilos$

c) ¿Cuánto debe pesar un niño para tener inferior o igual a su peso el 90% de los niños?

25. El costo de operación está dado por $C = 8(X + 3X^2)$, donde la variable aleatoria X es tiempo empleado en la operación y $E[X] = 2$ y $Var[X] = 4$. Halle el costo esperado de la operación *R.* 208

26. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x) = ae^{2x-x^2}, a > 0$. Halle la moda de X R. 1

27. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{4} \ , & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 \ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Halle la mediana de X. *R.* 1,09

28. En un día una máquina produce 4 artículos cuya calidad puede ser defectuosa y no defectuosa. Suponga que el precio de venta de cada artículo no defectuoso es S/. 5 000 y cada artículo defectuoso representa una pérdida de S/. 1 000. Si X representa el beneficio diario y que cada punto del espacio muestral tiene igual probabilidad, halle $E[X]$. *R.* 8 000

29 Un vendedor de equipo pesado puede visitar, en un día, uno o dos clientes con probabilidades de 1/3 y 2/3, respectivamente. De cada contacto, puede resultar la venta de equipos por S/. 50 000 con probabilidad 1/10 o ninguna venta con probabilidad 9/10. Sea X el valor total de las ventas diarias de este vendedor. Encuentre la media y la desviación estándar de X.

R. $X = S/.8\,333\ ,\ \sigma = S/.19{,}508$

30. El jefe de Contabilidad de la firma Sancopica está preocupado con las necesidades de caja de la firma a corto plazo. La firma necesita dinero a corto plazo para sus necesidades de transacciones diarias. El departamento de ventas ha presentado licitaciones a tres contratos del gobierno y es seguro que por lo menos uno de tales contratos le será otorgado a la firma. La probabilidad de otorgamiento de un solo contrato se estima en 0,5: la de dos contratos en 0,3 y la de 3 contratos en 0,2. Cada contrato plantea a la firma una demanda de dinero de S/. 200 000 a corto plazo. Con el fin de planificar futuras necesidades de caja, el jefe de contabilidad necesita tener alguna idea de la magnitud de las demandas de caja que puedan resultar de las tres licitaciones de contratos. ¿Cuál es la demanda promedio de caja resultante de estas licitaciones?

R. S/. 340 000.

31. Si k bolas son distribuidas aleatoriamente en n celdas de acuerdo a la estadística de Maxwell-Boltzman (toda bola tiene igual probabilidad de estar en cualquier celda), encuentre

a) El número esperado de bolas en la primera celda *R.* $\dfrac{k}{n}$

b) El número esperado de cledas vacías *R.* $n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^k$

32. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta|x|}$$

a) Hallar la función generatriz de momentos de X. *R.* $M_X(t) = \dfrac{\beta^2}{\beta^2 - t^2}$

b) Hallar los primeros cuatro momentos.

33. Supóngase que una pequeña estación de gasolina es abastecida cada sábado por la tarde. Su volumen de ventas X, en miles de litros, es una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) \ , \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0 \ , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

¿Cuál debe ser la capacidad del tanque de la gasolina para que la probabilidad de que se quede vacío en una semana específica sea de 10%?

R. 800 litros.

34. La cantidad de dinero ahorrado, aleatoria, por una persona en un mes, sigue la ley de probabilidad dada por la función de distribución acumulada.

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , \text{ si } x\le 0 \\ \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ , \text{ si } 0<x\le 1 \\ \frac{4}{9}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{6}\ , \text{ si } 1<x\le \frac{3}{2} \\ \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{15}{18}\ , \text{ si } \frac{3}{2}<x\le 2 \\ \frac{1}{9}\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{3}{18}\ , \text{ si } 2<x\le 3 \\ \frac{1}{9}(x-3)+\frac{12}{18}\ , \text{ si } 3<x\le 6 \\ 1\ , \text{ si } x>6 \end{cases}$$

donde X viene expresado en miles de

a) Determine la probabilidad de que, en un mes, la cantidad de dinero ahorrada sea superior a S/. 2 000 R. 0,5

b) Halle el promedio de dinero ahorrado en un mes. R. S/. 2 500

35. Las oportunidades de inversión con cierto grado de incertidumbre se clasifican usualmente de acuerdo a su rentabilidad esperada. Aquellas con rentabilidad esperada positiva son sujetas a un análisis más profundo a diferencia de aquellas cuya rentabilidad esperada es negativa y por ende quedan fuera de consideración posterior. Como ejemplo, considere una inversión de S/. 1 000 000 en una exploración petrolera que puede redituar S/. 10 000 000 (si se encuentra petróleo) o nada (si no se encuentra petróleo). Si la probabilidad de tener éxito en la empresa es 0,1, encuentre la ganancia esperada de la inversión. R. S/. 100 000

36. El beneficio aleatorio que una empresa, dedicada a la prestación de un servicio público, puede obtener a lo largo de un año, sigue la ley de probabilidad definida por la función de distribución

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{x}{200}\right)^2}\ , & \text{si } x\le 0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{x}{200}\right)^2}\ , & \text{si } x>0 \end{cases}$$

donde X viene expresado en millones de soles. Halle la esperanza de X *R.* 0

37. Se aplica un examen de 10 preguntas de elección múltiple a un grupo de estudiantes. Cinco de las preguntas tienen dos elecciones, cinco tienen 3 elecciones. Al calificar, se dan 10 puntos por respuesta correcta y 0 por

incorrecta, en el entendimiento de que las respuestas se clasifican en correctas e incorrectas y nada más. Si un estudiante contesta las preguntas usando números aleatorios, supuesto que cada respuesta alternativa tiene la misma oportunidad, ¿cuál será su calificación esperada? *R.* 125/3

38. Un pescador tiene probabilidad 1/3 de capturar un pez antes de tener que reemplazar la carnada; nunca usa la misma carnada para capturar más de un pez. Suponga que tiene 3 carnadas. Sea X el número de peces que captura antes que termine sus carnadas.

a) Encuentre la función de probabilidad de X

$$R.\ p(x)=\binom{3}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}\ ,\ x=0;\ 1;\ 2;\ 3$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el pescador capture más de un pez? *R.* 7/27

c) ¿Cuál es el número esperado de peces capturados? *R.* 1

39. El tiempo T en segundos, necesario para que una rata recorra un laberinto es una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad.

t	2	3	4	5	6	7
$p(t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

a) Encuentre el tiempo promedio *R.* 4,6

b) Suponga que se gratifica con 1 pan a la rata, por cada segundo que gana con respecto a 6 (por ejemplo, si emplea 4 segundos obtiene la recompensa de 2 panes. Naturalmente si tarda 6 segundos o más no recibe nada). ¿Cuál es la recompensa promedio de la rata? *R.* 1,5

40. El Consejo Universitario de La Universidad Nacional Mayor de San Marcos se ve ante el problema de decidir si se autoriza fondos para la construcción de un nuevo estadio de fútbol. Se dice que si se construye el nuevo estadio y la Universidad tiene un buen equipo de fútbol, habrá un beneficio de S/. 410 000, si el nuevo estadio se construye y la Universidad tiene un equipo mediocre, habrá un déficit de S/. 100 000: si se utiliza el viejo estadio y la Universidad tiene un buen equipo, habrá un beneficio de S/. 200 000; y si se utiliza el viejo estadio con un equipo mediocre, habrá un beneficio de S/.20 000 (principalmente por juegos fuera de la sede).

a) Si se cree al director de fútbol cuando dice que las posibilidades son 2 a 1 de que la Universidad no tendrá un buen equipo de fútbol, ¿qué habrán de decidir los miembros del consejo para maximizar el beneficio esperado?

R. El consejo universitario no deberá autorizar la construcción del nuevo estadio, pues los beneficios esperados son S/. 80 000 del viejo estadio y S/. 70 000 del nuevo.

b) Si se cree al cronista deportivo del periódico La Crónica, que afirma que las probabilidades son de 3 a 2 de que no se tendrá un buen equipo, ¿qué habrán de decidir los miembros del consejo para maximizar el beneficio esperado?

R. Los miembros del consejo deben autorizar la construcción del nuevo estadio, pues los beneficios esperados son S/. 104 000 del nuevo estadio y S/. 92 000 del antiguo.

41. Un contratista debe elegir entre dos trabajos. El primero promete un beneficio de S/. 80 000 con una probabilidad de 3/4 o una pérdida de S/. 20 000 (por huelga y otros retrasos) con probabilidad de 1/4; el segundo promete un beneficio de S/.120 000 con probabilidad 1/2 o una pérdida de S/. 30 000 con probabilidad 1/2.

a) ¿Qué trabajo deberá elegir el contratista para maximizar su beneficio esperado? *R.* el trabajo 1

b) ¿Qué trabajo podrá elegir el contratista si sus negocios van mal y puede quebrar a menos que obtenga un beneficio de S/. 100 000 mínimo en el siguiente trabajo? *R.* el trabajo 2.

7 VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

7.1 INTRODUCCIÓN

Hasta aquí se ha considerado que el resultado de un experimento es registrado como un único número real x. Sin embargo, hay situaciones en que un experimento aleatorio puede generar dos o más características simultáneamente. En este capítulo se presenta el estudio de un par de variables aleatorias. Los conceptos presentados se extienden fácilmente a un conjunto formado por un número finito de variables aleatorias.

Ejemplo 1.- Suponga que estamos interesados en estudiar la composición de familias con 3 hijos, en cuanto al sexo.

Sean las variables aleatorias X, Y y Z definidas como sigue

X: número de niños

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{si el primer hijo es hombre} \\ 0, & \text{si el primer hijo es mujer} \end{cases}$$

Z: número de veces que hubo variación de sexo entre un nacimiento y otro, dentro de la misma familia.

Con esta información y al suponer que las posibles composiciones tienen la misma probabilidad, se obtiene la tabla 7.1

Tabla 7.1

Evento	Probabilidad	X	Y	Z
HHH	1/8	3	1	0
HHM	1/8	2	1	1
HMH	1/8	2	1	2
MHH	1/8	2	0	1
HMM	1/8	1	1	1
MHM	1/8	1	0	2
MMH	1/8	1	0	1
MMM	1/8	0	0	0

Por ejemplo, el evento HMH indica que el primer hijo es hombre, el segundo es mujer y el tercero es hombre, etc.

En la tabla 7.1 se observa que cada una de las variables X, Y y Z tienen sus respectivas distribuciones de probabilidad que son:

x	0	1	2	3
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

y	0	1
$p(y)$	1/2	1/2

z	0	1	2
$p(z)$	1/4	1/2	1/4

En la tabla 7.2 se presenta las probabilidades asociadas a los pares de valores de las variables aleatorias X e Y, esto es,

Tabla 7.2

$(x;y)$	$p(x;y)$
(0;0)	1/8
(1;0)	2/8
(1;1)	1/8
(2;0)	1/8
(2;1)	2/8
(3;1)	1/8

En esta tabla $p(x;y) = P[X = x;\ Y = y]$ denota la probabilidad de la ocurrencia del evento $(X = x)$ y $(Y = y)$

La tabla 7.2 se denomina distribución conjunta de X e Y. Una manera más cómoda de representar la distribución conjunta de X e Y es a través de tablas de doble entrada, esto es, a través de la Tabla 7.3.

Tabla 7.3

X \ Y	0	1	$p(y)$
0	1/8	0	1/8
1	2/8	1/8	3/8
2	1/8	2/8	3/8
3	0	1/8	1/8
$p(x)$	1/2	1/2	1

A partir de la tabla 7.1, también se puede formar distribuciones conjuntas de X y Z e Y y Z y como también la distribución conjunta de X, Y y Z que está dada en la Tabla 7.4

Tabla 7.4

$(x;y;z)$	$p(x;y;z)$	$(x;y;z)$	$p(x;y;z)$
(0;0;0)	1/8	(2;0;1)	1/8
(1;0;1)	1/8	(2;1;1)	1/8
(1;0;2)	1/8	(2;1;2)	1/8
(1;1;1)	1/8	(3;1;0)	1/8

7.2 VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL DISCRETA

Definición 1.- Sean E un experimento y Ω el espacio muestral asociado a este experimento, y sean $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones, tal que cada función asocia a cada resultado $\omega \in \Omega$ a un número real, esto es. $X(\omega) = x$, $Y(\omega) = y$ (Fig. 7.1). Al vector $(X;Y)$ se llama variable aleatoria bidimensional o vector aleatorio bidimensional.

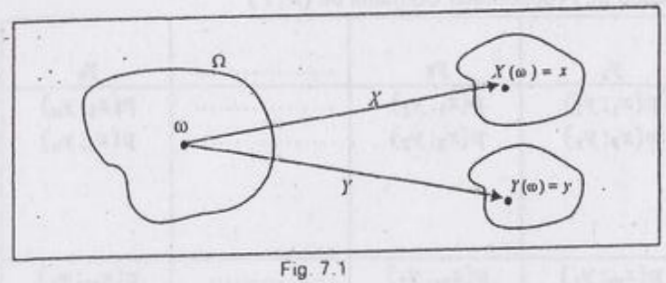


Fig. 7.1

Observación 1.- Si $X_1, \ldots, X_k: \Omega \to \mathbb{R}$ son k funciones, tal que cada función asocia a cada resultado $\omega \in \Omega$ un número real, esto es, $X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_k(\omega) = x_k$, entonces el vector $(X_1; \ldots; X_k)$ se denomina variable aleatoria multidimensional o vector aleatorio k-dimensional.

Tal como se ha dicho sobre las variables aleatorias unidimensionales, los vectores aleatorios $(X;Y)$ ó $(X_1; \ldots; X_k)$ pueden ser vectores aleatorios discretos o continuos.

Definición 2.- (Variable aleatoria bidimensional discreta) Se dice que $(X;Y)$ es una variable aleatoria bidimensional discreta, si los posibles valores $(x_i;\ x_j)$, $i = 1; 2; \ldots;\ j = 1; 2; \ldots$ de $(X;Y)$ son finitos o infinitos numerables.

Definición 3.- (Función de probabilidad conjunta de una v.a. bidimensional discreta) Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional discreta con rango

$$R_{X\times Y} = \{(x_i; x_j)\ /\ i = 1; 2; \ldots\ \ j = 1; 2; \ldots\}$$

Se llama función de probabilidad conjunta de la variable aleatoria $(X;Y)$ o función de densidad conjunta discreta, a la función

$$p(x_i; x_j) = P[X = x_i\ ;\ Y = y_j]$$

que satisface las siguientes condiciones

i) $p(x_i; y_j) \geq 0, \forall (x_i; y_j) \in R_{X\times Y}$

ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i; y_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} P[X = x_i\ ;\ Y = y_j] = 1$

Como en el caso de la variable aleatoria unidimensional, al conjunto de pares $\{((x;y)\,;\,p(x;y)), \forall (x;y) \in R_{X\times Y}\}$, se llama distribución de probabilidad conjunta de la variable aleatoria $(X;Y)$. Cuando el rango de la variable aleatoria $(X;Y)$ es finito, la distribución de probabilidad conjunta generalmente se representa mediante la siguiente tabla de dos entradas.

Tabla 7.5 Distribución de Probabilidad Conjunta de $(X;Y)$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	.....	y_n
x_1	$p(x_1;y_1)$	$p(x_1;y_2)$	.....	$p(x_1;y_n)$
x_2	$p(x_2;y_1)$	$p(x_2;y_2)$	.....	$p(x_2;y_n)$
.	.	.		
.	.	.		
.	.	.		
x_m	$p(x_m;y_1)$	$p(x_m;y_2)$	.....	$p(x_m;y_n)$

La gráfica de la distribución de probabilidad conjunta de la variable aleatoria $(X;Y)$ (Tabla 7.5) se muestra en la figura 7.2.

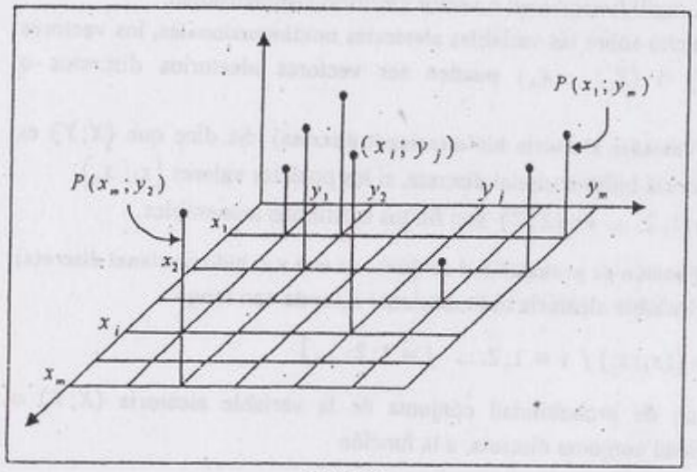


Fig. 7.2

Definición 4.- (Función de distribución acumulada bivariada). La función de distribución acumulada de la variable aleatoria bidimensional $(X;Y)$, denotado por F, es la función $F: \mathbb{R}^2 \to [0;1]$ definida por la regla de correspondencia

$$F(x;y) = P[X \le x\,;\,Y \le y]\,, \forall\, x,y \in \mathbb{R}.$$

Observación 2.- Si $(X;Y)$ es una variable aleatoria bidimensional discreta, entonces su función de distribución acumulada es dada por

$$F(x;y) = P[X \le x\,;\,Y \le y] = \sum_{y_j \le y}\sum_{x_i \le x} p(x_i;y_j)$$

La gráfica de $F(x;y)$ es la suma de las probabilidades de todos los puntos de la región A, esto es,

$$A = \{(x_i;y_j)\ /\ x_i \le x\,, y_j \le y\} \text{ (Fig. 7.3)}$$

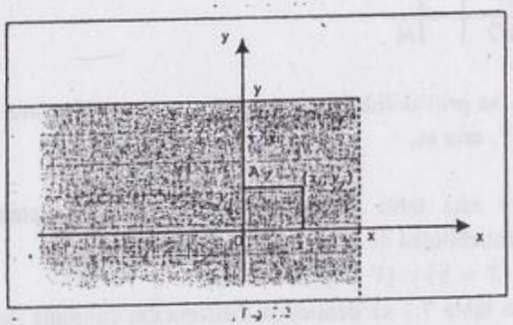


Fig. 7.3

Propiedades de la función de distribución acumulada bivariada

1.- $F(-\infty;y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x;y) = 0\,, \forall\, y \in \mathbb{R}$

2.- $F(x;-\infty) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x;y) = 0\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.- $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x;y) = F(+\infty;+\infty) = 1$

4.- $P[a < X \le b\,;\, c < Y \le d] = F(b;d) - F(a;d) - F(b;c) + F(a;c)$
(Fig. 7.4)

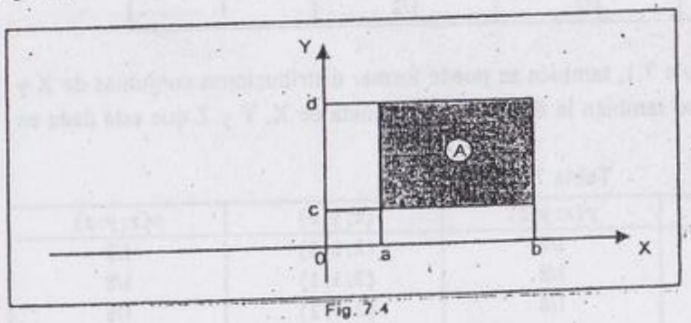


Fig. 7.4

5.- $P[x \leq a] = P[X \leq a\,;\, y < \infty] = P\left[\lim_{b\to+\infty}\{X \leq a\,;\, Y \leq b\}\right]$

$$= \lim_{b\to+\infty} P[X \leq a\,;\, Y \leq b]$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(a;b) = F(a;+\infty) = F_X(a)$$

6.- $P[Y \leq b] = \lim_{a\to+\infty} F(a;b) = F(+\infty;b) = F_Y(b)$

7.- $P[X > a\,;\, Y > b] = 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a;b)$

Observación 3.- Si $(X;Y)$ es una variable aleatoria discreta, entonces la función de probabilidad de X es obtenida de $p(x;y)$ por

$$p_X(x) = P[X = x] = \sum_{x:p(x;y)>0} p(x;y)$$

Similarmente,

$$p_Y(y) = P[Y = y] = \sum_{y:p(x;y=>0} p(x;y)$$

Ejemplo 2.- Sea el experimento E: lanzar 2 dados al aire. Sean X la variable que denota el número de puntos obtenidos en el primer dado e Y la variable que denota el número de puntos obtenidos en el segundo dado.

a) Halle la distribución de probabilidad conjunta de la v.a. $(X;Y)$ y trace su gráfica.

b) Halle la función de distribución acumulada de $(X;Y)$

c) Calcule $P[-1 < X \leq 2\,;\, 0 < Y \leq 3]$

Solución.

a) De acuerdo al ejemplo 2 del capítulo 6, se tiene

$$p(1;1) = P[X = 1\,;\, Y = 1] = \frac{1}{36}\,, p(1;2) = P[X = 1\,;\, Y = 2] = \frac{1}{36}$$

$$p(1;3) = P[X = 1\,;\, Y = 3] = \frac{1}{36}\,, etc.$$

Luego, la función de probabilidad conjunta de la v.a. $(X;Y)$ es

$$p(x;y) = P[X = x\,;Y = y] = \frac{1}{36}, \quad \forall \begin{matrix} x = 1;2;\ldots;6 \\ y = 1;2;\ldots;6 \end{matrix}$$

La distribución de probabilidad conjunta de $(X;Y)$ se muestra en la tabla 7.6

Tabla 7.6

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

La gráfica de la distribución de probabilidad de la tabla 7.6 se ilustra en la Fig. 7.5

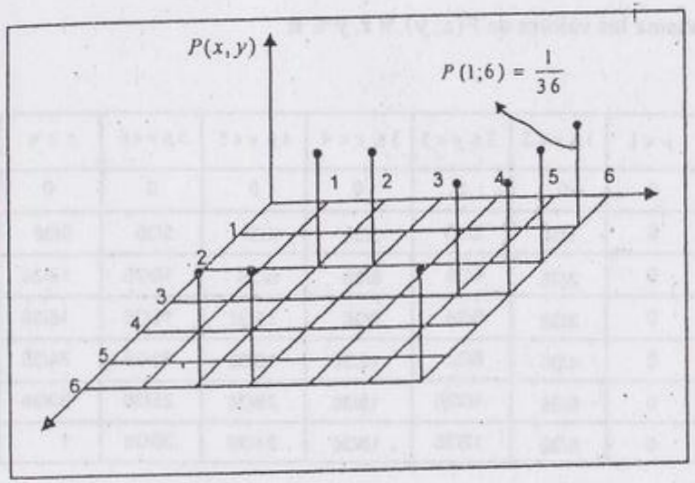


Fig. 7.5

b) Los valores del vector aleatorio $(X;Y)$ son:

(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

La representación gráfica del vector (X;Y) en el plano XY se ilustra en la Fig. 7.6.
El evento $\{X \leq 2\,;\, Y \leq 3\}$ corresponde a los puntos del círculo de la Fig. 7.6

Luego,

$$F(2;3) = P[X \leq 2\,;\, Y \leq 3] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

En forma similar, $F(x;y)$ se encuentra para otros valores de x e y.

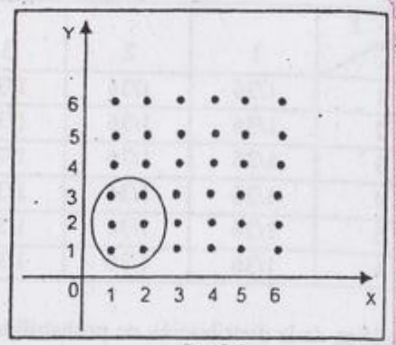


Fig. 7.6

La tabla 7.7 presenta los valores de $F(x;y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Tabla 7.7

x \ y	$y<1$	$1\leq y<2$	$2\leq y<3$	$3\leq y<4$	$4\leq y<5$	$5\leq y<6$	$y\geq 6$
$x<1$	0	0	0	0	0	0	0
$1\leq x<2$	0	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36
$2\leq x<3$	0	2/36	4/36	6/36	8/36	10/36	12/36
$3\leq x<4$	0	3/36	6/36	9/36	12/36	15/36	18/36
$4\leq x<5$	0	4/36	8/36	12/36	16/36	20/36	24/36
$5\leq x<6$	0	5/36	10/36	15/36	20/36	25/36	30/36
$x\geq 6$	0	6/36	12/36	18/36	24/36	30/36	1

c) $P[-1 < X \leq 2\,;\, 0 < Y \leq 3] = P[X=1\,;\,Y=1] + P[X=1\,;\,Y=2]$

$$+P[X=1\,;\,Y=3] + P[X=2\,;\,Y=1]$$

$$+P[X=2\,;\,Y=2] + P[X=2\,;\,Y=3]$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

También se calcula al usar la propiedad 4, esto es,

$$P[-1 < X \leq 2\,;\, 0 < Y \leq 3] = F(2;3) - F(-1;3) - F(2;0) + F(-1;0)$$

$$= \frac{6}{36} - 0 - 0 + 0 = \frac{1}{6}$$

Ejemplo 3.- Suponga que 3 bolas se seleccionan aleatoriamente de una urna que contiene 3 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules. Si X e Y denotan, respectivamente, el número de bolas rojas y blancas elegidas, halle la distribución de probabilidad conjunta de $(X;Y)$.

Solución.

La función de probabilidad de $(X;Y)$ es dada por

$$p(0;0) = P[X=0\,;\,Y=0] = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220}$$

$$p(0;1) = P[X=0\,;\,Y=1] = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{40}{220}$$

$$p(0;2) = P[X=0\,;\,Y=2] = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$$

$$p(0;3) = P[X=0\,;\,Y=3] = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{220}$$

$$p(1;0) = P[X=1\,;\,Y=0] = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$$

$$p(1;1) = P[X=1\,;\,Y=1] = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{60}{220}$$

$$p(1;2) = P[X=1\,;\,Y=2] = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{18}{220}$$

$$p(2;0) = P[X=2\,;\,Y=0] = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{15}{220}$$

$$p(2;1) = P[X=2\,;\,Y=1] = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{220}$$

$$p(3;0) = P[X=3\,;\,Y=0] = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}$$

Por tanto, la distribución de probabilidad conjunta de $(X;Y)$ se muestra en la tabla 7.8.

Tabla 7.8

X \ Y	0	1	2	3
0	10/220	40/220	30/220	4/220
1	30/220	60/220	18/220	0
2	15/220	12/220	0	0
3	1/220	0	0	0

7.3 VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL CONTINUA

Definición 5.- Se dice que una variable aleatoria bidimensional (X;Y) es continua si ambas variables son continuas y su rango es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, esto es, $R_{X\times Y} \subset \mathbb{R}^2$

Definición 6.- (Función de densidad de probabilidad conjunta) Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional continua con rango $R_{X\times Y} \subset \mathbb{R}^2$. La función de densidad de probabilidad conjunta asociada a la variable aleatoria $(X;Y)$ es una función $f: R_{X\times Y} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ que satisface las siguientes condiciones:

i) $f(x;y) \geq 0, \ \forall (x;y) \in R_{X\times Y}$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy = 1$

La probabilidad de un evento C contenido en el plano XY, es dado por

$$P[(X;Y) \in C] = \iint_{(x;y)\in C} f(x;y)dxdy$$

Si A y B son subconjuntos de números reales, entonces al definir $C = A \times B = \{(x;y) \ / \ x \in A \wedge y \in B\}$, se tiene

$$P[x \in A \ ; \ y \in B] = \int_B \int_A f(x;y)dxdy$$

En particular, si $R = \{(x;y) \ / \ a \leq x \leq b \ ; \ c \leq y \leq d\}$, se tiene

$$P[a \leq x \leq b \ ; \ c \leq y \leq d] = \int_c^d \int_a^b f(x;y)dxdy$$

Definición 7.-(Función de distribución acumulada de v.a. bidimensional continua) Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x;y)$. La función de distribución acumulada de $(X;Y)$ es dada por

$$F(x;y) = P[X \leq x \ ; \ Y \leq y] = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x;y)dxdy$$

Si $F(x;y)$ es una función absolutamente continua, entonces

$$f(x;y) = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \, \partial y}$$

Ejemplo 4.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad conjunta dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} c\,x^2 y \ , & si \ 0 < x^2 \leq y < 1 \\ 0 \ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine c para que f sea función de densidad b) Calcule $P[X \geq Y]$.

Solución.

a) Para que $f(x,y)$ sea función de densidad tiene que cumplirse

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy = 1$$

El conjunto de puntos S donde $f(x;y)$ está definida se muestra en la figura 7.7

Luego, se tiene

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dydx = \iint_S cx^2y \, dydx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} cx^2y \, dydx = \frac{4c}{21}$$

De donde se obtiene $c = 21/4$

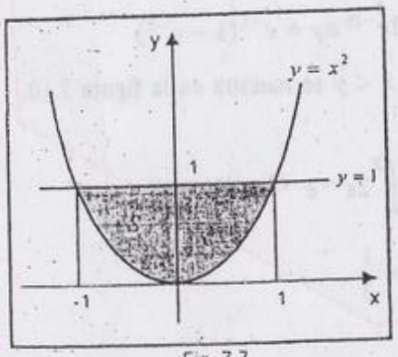


Fig. 7.7

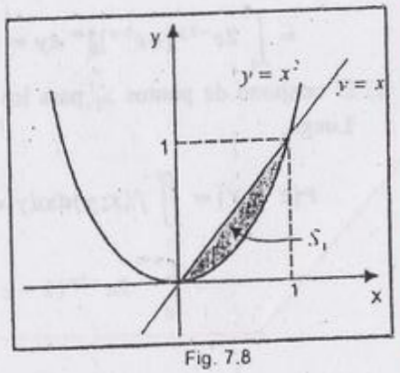


Fig. 7.8

b) El subconjunto S_1 de S donde $x \geq y$ se muestra en la figura 7.8
Luego,

$$P[X \geq Y] = \iint_{S_1} f(x;y)dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{21}{4} x^2 y \, dy \, dx = \frac{3}{20}$$

Ejemplo 5.- La función de densidad conjunta de la variable aleatoria $(X;Y)$ es dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y}, & si\ x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcule $P[X > 1\,;\, Y < 1]$ b) Halle $P[X < Y]$

Solución.

a) El conjunto de puntos S para los cuales $X > 1 \wedge Y < 1$ se da en la figura 7.9.

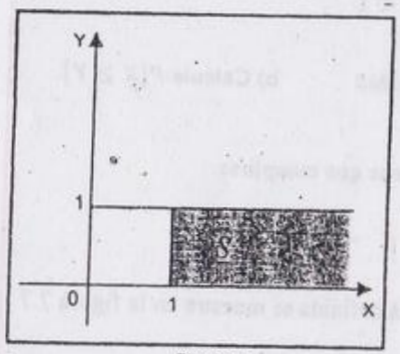


Fig. 7.9

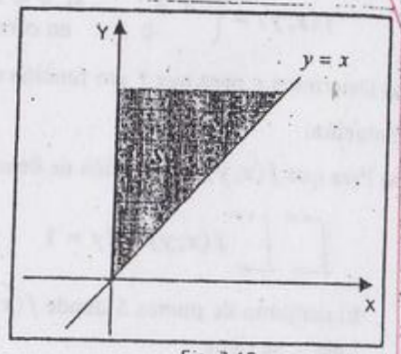


Fig. 7.10

Luego,

$$p = P[X > 1\,;\, Y < 1] = \iint_S f(x;y)dxdy = \int_0^1 \int_1^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\, dxdy$$

$$= \int_0^1 2e^{-2y}[-e^{-x}]_0^{+\infty}\, dy = e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}dy = e^{-1}(1 - e^{-2})$$

b) El conjunto de puntos S_1 para los cuales $x < y$ se muestra en la figura 7.10.
Luego,

$$P[X < Y] = \iint_{S_1} f(x;y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{y} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}(1 - e^{-y})dy = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 6.- Considere un círculo de radio R y suponga que un punto es seleccionado al azar dentro del círculo de tal manera que todas las regiones dentro del círculo de igual área tienen igual probabilidad de contener el punto (en otras palabras, el punto es uniformemente distribuido dentro del círculo). Si se elige el centro del círculo como el origen de coordenadas y se definen las variables aleatorias X e Y como las coordenadas del punto elegido (Fig. 7.11), entonces la función de densidad conjunta de X e Y es dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} c, & si\ x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & si\ x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

para alguna constante c.

a) Determine el valor de c

b) Calcule la probabilidad de que la distancia del punto elegido al origen de coordenadas no es mayor que a. $(0 < a \leq R)$

Solución.

a) Para que $f(x;y)$ sea función de densidad se debe cumplir

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy = 1$$

El conjunto de puntos del círculo S se muestra en la figura 7.11.
Luego, se tiene

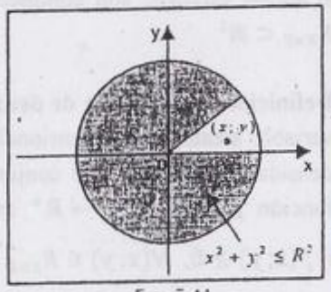


Fig. 7.11

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxd = \iint_S c\, dxdy = \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} c\, dydx$$

$$= 2c\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \pi c R^2 \implies c = \frac{1}{\pi R^2}$$

b) Sea $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ la distancia del punto $(X;Y)$ al origen de coordenadas. Para $0 \leq a \leq R$, tenemos

$$P[Z \leq a] = P\left[\sqrt{X^2 + Y^2} \leq a\right] = P[X^2 + Y^2 \leq a^2]$$

$$= \iint_{X^2+Y^2 \leq a^2} f(x;y)dxdy = \frac{1}{\pi R^2}\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx = \frac{a^2}{R^2}$$

7.4 DISTRIBUCIONES MARGINALES

Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional discreta, con distribución de probabilidad dada en la tabla 7.9

$X \backslash Y$	y_1	y_2	.....	y_n	$p_x(x_i)$
x_1	$p(x_1;y_1)$	$p(x_1;y_2)$	.....	$p(x_1;y_n)$	$p_x(x_1)$
x_2	$p(x_2;y_1)$	$p(x_2;y_2)$	.....	$p(x_2;y_n)$	$p_x(x_2)$
.	.			.	.
.	.			.	.
x_m	$p(x_m;y_1)$	$p(x_m;y_2)$	.....	$p(x_m;y_n)$	$p_x(x_m)$
$p_y(y_j)$	$p_y(y_1)$	$p_y(y_2)$	.....	$p_y(y_n)$	

Las probabilidades $p_X(x_i) = P[X = x_i] = \sum_{j=1}^{n} p(x_i;y_j)$, $i = 1;\dots;m$

y $p_Y(y_j) = P[Y = y_j] = \sum_{i=1}^{m} p(x_i;y_j)$, $j = 1;\dots;n$ se llaman probabilidades marginales de las variables X e Y, respectivamente.

Definición 7.- Se denomina distribución marginal de X a la tabla que contiene los valores de X y sus probabilidades marginales, esto es

X	$p_X(x_i)$
x_1	$p_X(x_1)$
x_2	$p_X(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_m	$p_X(x_m)$
Total	$\sum_{i=1}^{m} p_X(x_i) = 1$

En forma similar, se llama distribución marginal de Y a la tabla formada con los valores que toma Y junto con sus probabilidades marginales, esto es

Y	$p_Y(y_j)$
y_1	$p_Y(y_1)$
y_2	$p_Y(y_2)$
$\vdots$	$\vdots$
y_n	$p_Y(y_n)$
Total	$\sum_{j=1}^{n} p_Y(y_j) = 1$

Las distribuciones acumuladas marginales de las variables X e Y son, respectivamente

$$F_X(x) = P[X \le x] = P[X \le x\,;\, Y \le \infty] = \sum_{x_i \le x} P_X(x_i)$$

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[X \le \infty\,;\, Y \le y] = \sum_{y_j \le y} P_Y(y_j)$$

Definición 8.- Si $(X;Y)$ es una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta $f(x;y)$, entonces la función de densidad marginal de X es dada por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dy\,, -\infty < x < +\infty$$

En forma similar, la función de densidad marginal de Y es dada por

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx\,, -\infty < y < +\infty$$

Las distribuciones acumuladas marginales de X e Y son

$$F_X(x) = P[X \le x] = P[X \le x\,;\, Y \le \infty] = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[X \le \infty\,;\, Y \le y] = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy$$

Ejemplo 7.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria discreta con función de probabilidad conjunta dada por

$$p(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{30}(x+y) & , x = 0;1;2 \wedge y = 0;1;2;3 \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Halle las distribuciones marginales de X e Y.

Solución.

Al usar las definiciones dadas en la tabla 7.9 , se obtiene

x	$p_X(x)$
0	6/30
1	10/30
2	14/30
	1

y	$p_Y(y)$
0	3/30
1	6/30
2	9/30
3	12/30
	1

Ejemplo 8.- Suponga que la función de densidad conjunta de $(X;Y)$ es dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} 24xy, & si\ x \geq 0\ ,\quad y \geq 0\ ,\quad x+y \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine las funciones de densidades marginales de X e Y.

Solución.

El conjunto de puntos S en la cual está definida $f(x;y)$ se muestra en la figura 7.12.

Luego,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dy = \int_0^{1-x} 24xydy$$

$$= 12x(x-1)^2\ , 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx = \int_0^{1-y} 24xydx$$

$$= 12y(y-1)^2\ , 0 < y < 1$$

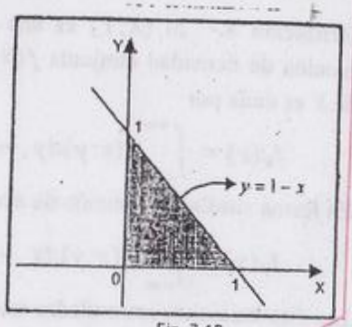


Fig. 7.12

7.5 DISTRIBUCIONES CONDICIONALES

Definición 9.- (Función de distribución condicional discreta)

Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional discreta con función de probabilidad conjunta

$$p(x_i;y_j) = P[X = x_i\ ;\ Y = y_j], \qquad \forall\, i = 1;2;\ldots;m\ , \qquad j = 1;2;\ldots;n$$

y sea x_i un valor de X tal que $P[X = x_i] = P_X(x_i) > 0$

La probabilidad

$$p(y_j/\,x_i) = P[Y = y_j/\,X = x_i] = \frac{P[X = x_i\ ;\ Y = y_j]}{P[X = x_i]}$$

se denomina probabilidad condicional de $Y = y_j$ dado que $X = x_i$. Como se observa, para cada x_i fijo, el conjunto de pares $\{(y_j;\ P[Y = y_j\ /X = x_i])\}$ define la distribución condicional de Y dado $X = x_i$, pues

$$\sum_{j=1}^{n} P[Y = y_j/\,X = x_i] = \sum_{j=1}^{n} \frac{P[Y = y_j\ ;\ X = x_i]}{P[X = x_i]} = \frac{P[X = x_i]}{P[X = x_i]} = 1$$

En forma similar, si y_j es un valor de Y, tal que $P[Y = y_j] = p_Y(y_j) > 0$, entonces la probabilidad

$$p(x_i/\,y_j) = P[X = x_i/\,Y = y_j] = \frac{P[X = x_i\ ;\ Y = y_j]}{P[Y = y_j]}$$

se denomina probabilidad condicional de $X = x_i$ dado $Y = y_j$

A la tabla

X	$p(x_i/\,y_j)$
x_1	$p(x_1/y_j)$
x_2	$p(x_2/y_j)$
$\vdots$	$\vdots$
x_m	$p(x_m/\,y_j)$
Total	1

donde $p(x_i/\,y_j) \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{m} P[X = x_i\ /\,Y = y_j] = 1$

se llama distribución de probabilidad condicional de X dado $Y = y_j$

Ejemplo 9.- Suponga que la función de probabilidad $p(x;y)$ de la variable aleatoria $(X;Y)$ es dada por

$$p(0;0) = P[X = 0\ ;\ Y = 0] = 0{,}4\ ,\quad p(0;1) = P[X = 0\ ;\ Y = 1] = 0{,}2$$

$$p(1;0) = P[X = 1\ ;\ Y = 0] = 0{,}1\ ,\quad p(1;1) = P[X = 1;\ Y = 1] = 0{,}3$$

Halle la distribución de probabilidad condicional de X dado $Y = 1$

Solución. Se tiene

i) $p_Y(1) = P[Y = 1] = \sum_{x=0}^{1} p(x;1) = p(0;1) + p(1;1) = 0{,}5$

ii) $P[X = 0\ /\ Y = 1] = \dfrac{P[X = 0\ ;\ Y = 1]}{P[Y = 1]} = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = \dfrac{2}{5}$

$$P[X = 1/Y = 1] = \frac{P[X = 1\,;\, Y = 1]}{P[Y = 1]} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \frac{3}{5}$$

Luego, la distribución de probabilidad condicional de X dado $Y = 1$ es dado en la tabla 7.10

Tabla 7.10

x	$p(x/1)$
0	2/5
1	3/5
	1

Definición 10.- (Función de densidad condicional) Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta $f(x;y)$. Sea x un valor de X, tal que la densidad marginal de X es positivo, esto es, $f_X(x) > 0$ La función

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x;y)}{f_X(x)}$$

se denomina función de densidad de probabilidad condicional de Y dado $X = x$. En forma similar, si y es un valor de Y tal que $f_Y(y) > 0$, entonces la función

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x;y)}{f_Y(y)}$$

se denomina función de densidad de probabilidad condicional de X dado $Y = y$

Definición 11.- (Función de distribución acumulada condicional continua) Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta $f(x;y)$. La función de distribución acumulada de Y condicionado al valor de $X = x$ es dada por

$$f_{Y/X}(y/x) = P[Y \le y/X = x] = \int_{-\infty}^{y} f_{Y/X}(z/x)dz = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x;z)dz}{f_X(x)}$$

$\forall\, x$, tal que $f_X(x) > 0$.

En forma similar, la función de distribución acumulada de X condicionado al valor de $Y = y$ es dada por

$$f_{X/Y}(x/y) = P[X \le x/Y = y] = \int_{-\infty}^{x} f_{X/Y}(z/y)dz = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(z;y)dz}{f_Y(y)}$$

$\forall\, y$, tal que $f_Y(y) > 0$.

Ejemplo 10.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional con función de densidad

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2-x-y), & si\ 0 < x < 1\,,\quad 0 < y < 1 \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Halle la densidad condicional de X dado $Y = y$, donde $0 < y < 1$

Solución.

Para $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, se tiene

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x;y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x;y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx} = \frac{x(2-x-y)}{\int_0^1 x(2-x-y)dx}$$

$$= \frac{x(2-x-y)}{\frac{2}{3}-\frac{y}{2}} = \frac{6x(2-x-y)}{4-3y},\quad 0 < y < 1$$

Ejemplo 11.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional con función de densidad

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & si\ x > 0,\ y > 0 \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre $P[X > 1/Y = y]$.

Solución.

La función de densidad condicional de X dado $Y = y$ es

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x;y)}{f_Y(y)} = \frac{(e^{-x/y}.e^{-y})/y}{e^{-y}\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-x/y}dx} = \frac{1}{y}e^{-x/y}$$

Luego,

$$P[X > 1/Y = y] = \int_1^{+\infty} f_{X/Y}(x/y)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-x/y}dx = e^{-1/y}$$

7.6 INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

Definición 12.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional. Se dice que las variables aleatorias X e Y son independientes si y solamente si

$$F(x;y) = P[X \le x\,;Y \le y] = P[X \le x].P[Y \le y] = F_X(x).F_Y(y), \forall (x;y)$$

Si no se verifica esta igualdad para un par $(x;y)$ se dice que X e Y no son independientes.

De modo análogo, esta definición se extiende para el caso de k variables aleatorias.

Definición 13.- Sea $(X_1; \ldots; X_k)$ una variable aleatoria multidimensional. Se dice que las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_k$ son independientes si y solamente si

$$F(x_1; \ldots; x_k) = P[X_1 \leq x_1; \ldots; X_k \leq x_k] = \prod_{i=1}^{k} P[X_i \leq x_i]$$

Definición 14.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional discreta con función de probabilidad $p(x;y)$. Se dice que las variables X e Y son independientes si y sólo si

$$p(x;y) = P[X = x; Y = y] = P[X = x].P[Y = y], \qquad \forall(x;y)$$

Definición 15.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta $f(x;y)$. Se dice que X e Y son independientes si y sólo si

$$f(x;y) = f_X(x)f_Y(y), \qquad \forall(x;y)$$

donde $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, son las densidades marginales de X e Y, respectivamente. Análogamente, la definición de independencia para k variables aleatorias continuas es el siguiente

Definición 16.- Sea $(X_1; \ldots; X_k)$ una variable aleatoria multidimensional con función de densidad conjunta $f(x_1; \ldots; x_k)$. Se dice que $X_1, \ldots, X_k$ son variables aleatorias independientes si y sólo si

$$f(x_1; \ldots; x_k) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i), \qquad \forall(x_1; \ldots; x_k)$$

Observación 4.- El concepto de independencia de variables aleatorias está estrechamente relacionado con la distribución condicional de variables aleatorias, pues si X e Y son independientes, entonces por definición se tiene

$$f(x;y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Por otro lado, por definición de densidad condicional, se obtiene

$$f(x;y) = f_{Y/X}(y/x).f_X(y/x)$$

Luego, se tiene

$$f_{Y/X}(y/x) = f_Y(y)$$

Esto es, la densidad condicional de Y dado X es igual a la densidad marginal de Y

Por tanto, para probar que las variables aleatorias X e Y no son independientes, es suficiente probar que $f_{Y/X}(y/x)$ depende de x.

Ejemplo 12.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional con distribución de probabilidad conjunta dada en la tabla 7.11. Verifique si X e Y son variables aleatorias independientes.

Tabla 7.11

X \ Y	0	1	2
0	0,10	0,04	0,06
1	0,20	0,08	0,12
2	0,20	0,08	0,12

Solución.

La distribución marginal de cada variable está dada en la siguiente tabla

X \ Y	0	1	2	$p_Y(y_j) = P[Y = y_j]$
0	0,10	0,04	0,06	0,20
1	0,20	0,08	0,12	0,40
2	0,20	0,08	0,12	0,40
$p_X(x_i) = P[X = x_i]$	0,50	0,20	0,30	1

En esta tabla se observa que $p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$, pues

$p(0;0) = p_X(0)\,p_Y(0)$ $\qquad$ $p(0;0) = p_X(0)\,p_Y(0)$

$0{,}10 = (0{,}20)(0{,}50)$ $\qquad$ $0{,}04 = (0{,}20)(0{,}20)$

$p(0;2) = p_X(0)\,p_Y(2)$ $\qquad$ $p(1;0) = p_X(1)\,p_Y(0)$

$0{,}6 = (0{,}20)(0{,}30)$ $\qquad$ $0{,}20 = (0{,}40)(0{,}50)$

$p(1;1) = p_X(1)\,p_Y(1)$ $\qquad$ $p(1;2) = p_X(1)\,p_Y(2)$

$0{,}08 = (0{,}40)(0{,}20)$ $\qquad$ $0{,}12 = ((0{,}40)(0{,}30)$

$p(2;0) = p_X(2)\,p_Y(0)$ $\qquad$ $p(2;1) = p_X(2)\,p_Y(1)$

$0{,}20 = (0{,}40)(0{,}50)$ $\qquad$ $0{,}08 = (0{,}40)(0{,}20)$

$p(2;2) = p_X(2)\,p_Y(2)$

$0{,}12 = (0{,}40)(0{,}30)$

Por tanto, X e Y son v.a. independientes.

Ejemplo 13.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria con función de densidad conjunta dada por

$$f(x;y)=\begin{cases}\frac{1}{2}xy\ , & si\ 0<x<y\ ,\quad 0<x<2\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

a) Halle las densidades marginales de X e Y

b) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

Solución.

a) Se tiene $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\int_0^x\frac{1}{2}xydy=\frac{x^3}{4}$$

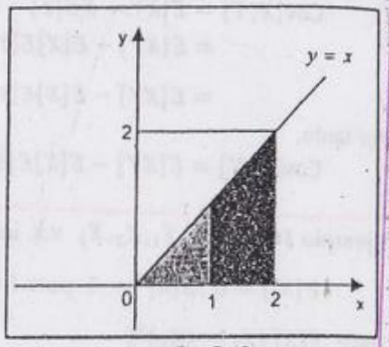


Fig. 7.13

Luego,

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{4}\ , & si\ 0<x<2\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

También, se tiene

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x;y)dx$$

$$=\int_y^2\frac{1}{2}xydx=y-\frac{y^3}{4}$$

Luego,

$$f_Y(y)=\begin{cases}y-\frac{y^3}{4}\ , & si\ 0<y<2\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

b) Como $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, entonces las v.a. X e Y no son independientes.

Ejemplo 14.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta dada por

$$f(x;y)=\begin{cases}2xe^{-y}\ , & si\ 0\le x\le 1\ ,\quad y>0\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

¿X e Y son variables aleatorias independientes?

Solución. Se tiene

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x;y)dy=\int_0^{+\infty}2xe^{-y}dy=2x[-e^{-y}]_0^{+\infty})=2x$$

Luego,

$$f_X(x)=\begin{cases}2x\ , & si\ 0\le x\le 1\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

También, se tiene

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x;y)dx=\int_0^1 2xe^{-y}dx=e^{-y}$$

Así,

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}\ , & si\ y>0\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Por tanto, $f(x;y)=f_X(x)f_Y(y)$. Luego X e Y son variables aleatorias independientes.

Ejemplo 15.- Suponga que el punto $(X;Y)$ es elegido al azar dentro del rectángulo S dado por

$$S=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ 0\le x\le 2\wedge 1\le y\le 4\}$$

a) Determine la densidad conjunta de X eY

b) Halle las densidades marginales de X e Y

c) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

Solución.

a) El punto elegido aleatoriamente dentro del rectángulo, es tal que toda región dentro del rectángulo de igual área tiene igual probabilidad de contener al punto.

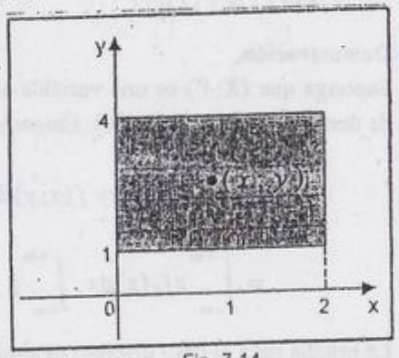


Fig 7.14

Si X e Y son las coordenadas del punto elegido (Fig. 7.14), entonces $(X;Y)$ tiene igual probabilidad de estar dentro del rectángulo. Luego, la función de densidad de X e Y es dado por

$$f(x;y)=\begin{cases}c\ , & si\ 0\le x\le 2\ ,\quad 1\le y\le 4\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Como $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x;y)dydx=\int_0^2\int_1^4 c\,dydx=6c$,entonces $c=\frac{1}{6}$

Así, se tiene

$$f(x;y)=\begin{cases}\frac{1}{6}\ , & si\ 0\le x\le 2\ ,\quad 1\le y\le 4\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

b) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dy = \int_1^4 \frac{1}{6}dy = \frac{1}{2}$

Luego,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & si\ 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx = \int_0^2 \frac{1}{6}dx = \frac{1}{3}$

Entonces,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & si\ 1 \le y \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Dado que $f(x;y) = f_X(x)f_Y(y)$, entonces X e Y son variables aleatorias independientes.

Teorema 1.- Si X e Y son variables aleatorias (v.a) independientes, entonces

$$E[XY] = E[X][Y]$$

Demostración.

Suponga que $(X;Y)$ es una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta $f(x;y)$. Entonces

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x;y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \,.\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)dy = E[X]E[Y]$$

La prueba para el caso discreto es similar.

El recíproco del teorema1 no necesariamente es verdadero, pues $E[XY] = E[X][Y]$ puede ser válido cuando X e Y son dependientes.

Teorema 2.- Si $X_1, \dots, X_n$ son n variables aleatorias, entonces

$$E[X_1 + \cdots + X_n] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Observación 5.- Si $X_1, \dots, X_n$ son v.a. independientes, entonces

$$E[X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n] = E[X_1].E[X_2] \cdot \dots \cdot E[X_n]$$

7.7 Covarianza y Coeficiente de Correlación de dos variables aleatorias

Definición 17.- (Covarianza de dos variables aleatorias) La covarianza de dos variables aleatorias X e Y es dada por

$$\text{Cov}[X;Y] = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Esto es, la covarianza de X e Y es el valor promedio del producto de las desviaciones de X e Y con relación a sus respectivas medias.

Esta fórmula puede ser escrita en una forma más simple como sigue

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X;Y] &= E[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{Cov}[X;Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Ejemplo 16.- Sean X_1, X_2, X_3 v.a. independientes tal que

$$E[X_i] = 0\,, E[X_i^2] = 1 \text{ para } i = 1;2;3$$

Halle $E[X_1^2(X_2 - 4X_3)^2]$

Solución. Se tiene

$$\begin{aligned} E[X_1^2(X_2 - 4X_3)^2] &= E[X_1^2X_2^2 - 8X_1^2X_2X_3 + 16X_1^2X_3^2] \\ &= E[X_1^2X_2^2] - 8E[X_1^2X_2X_3] + 16E[X_1^2X_3^2] \\ &= E[X_1^2].E[X_2^2] - 8E[X_1^2]E[X_2]E[X_3] + 16E[X_1^2]E[X_3^2] \\ &= (1)(1) - 8(1)(0)(0) + 16(1)(1) = 17 \end{aligned}$$

Definición 18.- Si $\text{Cov}[X;Y] = 0$, se dice que X e Y son v.a. no correlacionadas.

Ejemplo 17.- Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional con distribución de probabilidad conjunta dada por la tabla 7.12

Tabla 7.12

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_X(x)$
0	3/20	1/20	4/20	8/20
1	3/20	1/20	1/20	5/20
2	2/20	2/20	3/20	7/20
$p_Y(y)$	8/20	4/20	8/20	1

Halle $\text{Cov}[X;Y]$

Solución.

De la definición de esperanza de variables aleatorias, se tiene

$$E[X] = 0\left(\frac{8}{20}\right) + 1\left(\frac{5}{20}\right) + 2\left(\frac{7}{20}\right) = 0{,}95$$

$$E[Y] = 1\left(\frac{8}{20}\right) + 2\left(\frac{4}{20}\right) + 3\left(\frac{8}{20}\right) = 2$$

$$E[XY] = 0\left(\frac{3}{20}\right) + 1\left(\frac{3}{20}\right) + 2\left(\frac{2}{20}\right) + 0\left(\frac{1}{20}\right) + 2\left(\frac{1}{20}\right) + 4\left(\frac{2}{20}\right)$$

$$+0\left(\frac{4}{20}\right) + \frac{3}{20} + 6\left(\frac{3}{20}\right) = \frac{38}{20} = 1{,}90$$

Luego,

$$\text{Cov}[X;Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 1{,}90 - (0{,}95)(2) = 0$$

Por tanto, X e Y son variables aleatorias no correlacionadas.

Teorema 3.- Si X e Y son v.a. independientes con $Var[X] < \infty$ y $Var[Y] < \infty$, entonces $\text{Cov}[X;Y] = 0$

El recíproco del teorema no necesariamente es verdadero, esto es, $Cov[X;Y] = 0$ no implica que X e Y sean independientes. Por ejemplo, para las variables aleatorias del ejemplo 17, $Cov[X;Y] = 0$; sin embargo, como se puede verificar, X e Y no son independientes.

Teorema 4.- Si X e Y son v.a. tal que $Var[X] < \infty$ y $Var[Y] < \infty$, entonces

a) $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2\text{Cov}[X;Y]$

b) $Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y] - 2\text{Cov}[X;Y]$

c) Si X e Y son v.a. independientes, entonces

$$Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y]$$

Demostración.

a) $Var[X+Y] = E[(X+Y-E(X+Y))^2] = E[((X-E(X)+(Y-E(Y)))^2]$

$$= E[(X-E(X))^2 + (Y-E(Y))^2 + 2(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

$$= E[(X-E(X))^2] + E[(Y-E(Y))^2] + 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

$$= Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X;Y]$$

b) Ejercicio para el lector.

c) Consecuencia inmediata del teorema 3.

Observación 6.- El teorema 4 se puede generalizar para más de dos v.a. En particular, si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias tal que $Var[X_i] < \infty$, entonces se tiene

i) $Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2\sum_{i<j}\sum Cov[X_i;X_j]$

ii) Si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes, entonces se tiene

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$

Definición 19.- El coeficiente de correlación de las variables aleatorias X e Y es dado por

$$\rho(X;Y) = \frac{\text{Cov}[X;Y]}{\sqrt{Var[X].Var[Y]}}$$

Teorema 5.- Si X e Y son v.a., entonces $-1 \le \rho(X;Y) \le 1$

Demostración. Ejercicio para el lector

Observación 7.-

1) Cuando $\rho(X;Y) = \pm 1$, entonces existe una correlación perfecta entre X e Y, esto es, $Y = aX + b$.

Si $\rho(X,Y) = 1$, entonces $a > 0$ y si $\rho(X,Y) = -1$, entonces $a < 0$.

El grado de asociación lineal entre X e Y varía a medida que $\rho(X;Y)$ varía entre -1 y $+1$.

2) Para a y b constantes, se tiene

i) $\rho(X+a\,;\,Y+b) = \rho(X;Y)$

ii) $\rho(aX\,;bY) = ab\rho(X;Y)$

Ejemplo 18.- En el ejemplo 1, se ha definido la v.a. W como sigue: W: número de niños. La distribución conjunta de X y W está dada en la tabla 7.13

Tabla 7.13

$X \backslash W$	0	1	2	3	$P_X(x)$
0	0	0	0	1/8	1/8
1	0	0	3/8	0	3/8
2	0	3/8	0	0	3/8
3	1/8	0	0	0	1/8
$P_W(w)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Halle el coeficiente de correlación de X y W.

Solución. Es fácil verificar

$$E[X] = E[W] = 1{,}5\ , \qquad Var[X] = Var[W] = 0{,}75$$

$$E[XW] = 1{,}5$$

Luego,

$$Cov[X;W] = 1{,}5 - (1{,}5)^2 = -0{,}75$$

$$y\ \rho(X;Y) = \frac{\mathrm{Cov}[X;W]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = \frac{-0{,}75}{0{,}75} = -1$$

Este es un resultado esperado, pues al observar la tabla 7.1 se tiene una relación entre X y W dado por $X = 3 - W$

7.8 ESPERANZA CONDICIONAL

Definición 20.- (Caso discreto) Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional discreta con función de probabilidad condicional de Y dado $X = x$ definido por

$$p_{Y/X}(y/x) = P[Y = y / X = x] = \frac{p(x;y)}{p_X(x)}\ , \qquad P[X = x] > 0$$

La esperanza condicional de Y dado $X = x$ que se denota por $E[Y/X]$, es dada como la función de la v.a. X por

$$E[Y/X = x] = \sum_y y\, P[Y = y / X = x] = \sum_y y\, p_{Y/X}(y/x)$$

Esto es, $E[Y / X = x]$ es la media de la distribución condicional de Y dado $X = x$.

Definición 21.- (Caso continuo) Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional continua con función de densidad de Y dado $X = x$ definido por

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x;y)}{f_X(x)}\ , \quad \forall x \text{ tal que } f_X(x) > 0$$

La esperanza condicional de Y dado $X = x$ es dada por

$$E[Y/X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y/X}(y/x)dy$$

Teorema 6.- Si $(X;Y)$ es una v.a. bidimensional, entonces

$$E[E[Y/X]] = E[Y]$$

Demostración.

Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional continua. Entonces,

$$E[E[Y/X]] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[Y/X] f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y/X}(y/x)dy\right) f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y/X}(y/x) f_X(x)dydx$$

Como $f_{Y/X}(y/x) = \dfrac{f(x;y)}{f_X(x)}$, entonces se tiene

$$E[E[Y/X]] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x;y)dydx = \int_{-\infty}^{+\infty} y\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)dy = E[Y]$$

La prueba para el caso discreto es similar.

Definición 22.- (Varianza condicional) La varianza condicional de Y dada $X = x$ es dada por

$$Var[Y/X = x] = E[Y^2 / X = x] - (E[Y / X = x])^2$$

Teorema 7.- Si X e Y son variables aleatorias cualesquiera, entonces

$$Var[Y] = E[Var[Y/X]] + Var[E[Y/X]]$$

Demostración. Se tiene

$$E[Var[Y/X]] = E[E[Y^2/X]] - E(E[Y/X])^2$$
$$= E[Y^2] - (E[Y])^2 - E(E[Y/X])^2 + (E[Y])^2$$
$$= Var[Y] - E[(E[Y/X])^2] + (E[E[Y/X]])^2$$
$$= Var[Y] - Var[E[Y/X]]$$

Luego,

$$Var[Y] = E[Var[Y/X]] + Var[E[Y/X]]$$

Teorema 8.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional. Entonces

$$E[YX/X] = x \cdot E[Y/X = x]$$

Demostración. Ejercicio para el lector.

Ejemplo 19.- Un minero está atrapado en una mina que tiene 3 puertas. La primera puerta conduce a un túnel que llevará al minero a la salida después de 3 horas de viaje. La segunda puerta lleva a un túnel que hará regresar al minero a su celda después de 5 horas de viaje. La tercera puerta lleva a un túnel que hará regresar al minero a su celda después de 7 horas de viaje. Si se supone que el minero tiene igual probabilidad de elegir cualquiera de las puertas. ¿Cuál es el tiempo esperado que el minero necesita para salir de la mina?

Solución.

Sea X la v.a. que denota la cantidad de tiempo (en horas) que el minero necesita para salir de la mina, y sea Y la v.a. que denota la elección inicial de la puerta. Entonces,

$$E[X] = E[X/Y=1]P[Y=1] + E[X/Y=2]P[Y=2] + E[X/Y=3]P[X=3]$$
$$= \frac{1}{3}(E[X/Y=1] + E[X/Y=2] + E[X/Y=3]) \quad (*)$$

Por otro lado, se tiene

$$E[X/Y=1] = 3,\ E[X/Y=2] = 5 + E[X] \text{ y } E[X/Y=3] = 7 + E[X]$$

Para explicar que estas ecuaciones son correctas, se considera por ejemplo, $E[X/Y=2]$ y se razona como sigue. Si el minero elige la segunda puerta, entonces él pasa 5 horas en el túnel y luego retorna a su celda. Ahora, una vez que retornó a su celda el problema es igual al problema inicial: Así, su tiempo adicional esperado hasta que salga de la mina es justamente $E[X]$. Luego,

$$E[X/Y=2] = 5 + E[X]$$

La otra ecuación se obtiene mediante un argumento similar. Por tanto, al reemplazar estas ecuaciones en (*), se obtiene

$$E[X] = 15$$

7.9 EJEMPLOS Y MAS EJEMPLOS

Ejemplo 20.- Una urna contiene a bolas blancas y b negras. Se retira aleatoriamente una bola cada vez hasta obtener la primera bola blanca. Halle el número esperado de bolas negras que son retiradas.

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de bolas negras retiradas. Luego el valor esperado de esta v.a. está en función de a y b, y se denota por $Q_{a;b} = E[X]$. Ahora, se obtiene una expresión para $Q_{a;b}$ condicionada a la primera bola retirada. Para esto, se define la variable aleatoria Y como sigue

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{si la primera bola seleccionada es blanca} \\ 0, & \text{si la primera bola seleccionada es negra} \end{cases}$$

Así, se tiene

$$Q_{a;b} = E[X] = E[X/Y=1]P[Y=1] + E[X/Y=0]P[Y=0]$$

De otro lado, se obtiene

$$E[X/Y=1] = 0 \quad \ldots \quad (1)$$
$$E[X/Y=0] = 1 + Q_{a;b-1} \ldots \quad (2)$$

Para explicar las ecuaciones (1) y (2), se supone por ejemplo, que la primera bola seleccionada es negra. Entonces, después de que la primera bola haya sido retirada, la situación es exactamente igual que el inicio con una urna que contiene a bolas blancas y $b-1$ bolas negras. Luego,

$$E[X/Y=0] = 1 + Q_{a;b-1}$$

Como $P[Y=0] = \dfrac{b}{a+b}$, entonces se tiene

$$Q_{a;b} = E[X] = \frac{b}{a+b}\left[1 + Q_{a;b-1}\right]$$

Es claro que $Q_{a;0} = 0$. Luego, al reemplazar $b = 1; 2$ y 3 en $Q_{a;b}$, se tiene

$$Q_{a;1} = \frac{1}{a+1}\left[1 + Q_{a;0}\right] = \frac{1}{a+1}$$

$$Q_{a;2} = \frac{2}{a+2}\left[1 + Q_{a;1}\right] = \frac{2}{a+2}\left[1 + \frac{1}{a+1}\right] = \frac{2}{a+1}$$

$$Q_{a;3} = \frac{3}{a+3}\left[1 + Q_{a;2}\right] = \frac{3}{a+3}\left[1 + \frac{2}{a+1}\right] = \frac{3}{a+1}$$

Por inducción matemática se verifica que

$$Q_{a;b} = \frac{b}{a+1}$$

Por tanto, $E[X] = \dfrac{b}{a+1}$.

Ejemplo 21.- Sea $(X;Y)$ una v.a. con función de densidad conjunta dada por

$$f(x;y) = \frac{e^{-x/y}.e^{-y}}{y}, x > 0, y > 0$$

Halle $E[X/Y = y]$

Solución. Se tiene

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x;y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{y}.e^{-x/y}.e^{-y}}{\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}e^{-x/y}.e^{-y}\,dx} = \frac{\frac{1}{y}.e^{-x/y}}{\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{y}\right)e^{-x/y}dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{y}.e^{-x/y}}{\left[-e^{-x/y}\right]_0^{+\infty}} = \frac{1}{y}e^{-x/y}$$

Lúego,

$$E[X/Y = y] = \int_0^{+\infty} x\, f_{X/Y}(x/y)dx = \int_0^{+\infty}\frac{x}{y}e^{-x/y}\,dx$$

$$= \left[-xe^{-x/y} - ye^{-x/y}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = y \text{ (integración por partes)}$$

Ejemplo 22.- un grupo de N hombres lanzan sus sombreros al centro de una sala. Los sombreros se mezclaron completamente y cada hombre selecciona aleatoriamente un sombrero.

a) Encuentre el número esperado de hombres que seleccionan su propio sombrero.

b) Calcule la varianza del número de hombres que seleccionan su propio sombrero.

Solución.

a) Sea X la v.a. que denota el número de hombres que seleccionan sus propios sombreros, esto es, el número de parejas (hombre; sombrero propio).

Luego,

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

donde

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si el i – ésimo hombre selecciona su propio sombrero} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, para cada i se tiene

$$E[X_i] = 1.P[X_i = 1] + 0.P[X_i = 0] = P[X_i = 1] = \frac{1}{N}$$

Al aplicar la propiedad de esperanza de una suma, se obtiene

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_N] = \frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N} = N\left(\frac{1}{N}\right) = 1$$

b) $Var[X] = \sum_{i=1}^{N} Var[X_i] + 2\sum\sum_{i<j} Cov[X_i;X_j]$

Donde

i) $Var[X_i] = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = E[X_i] - (E[X_i])^2$

$$= \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} = \frac{N-1}{N^2}$$

ii) $\mathrm{Cov}[X_i;X_j] = E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j]$

Como

$$X_iX_j = \begin{cases} 1, & \text{si el i – ésimo y j – ésimo hombres seleccionan ambos sus propios sombreros} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces,

$$E[X_iX_j] = 1.P[X_i = 1, X_j = 1] = P[X_i = 1]P[X_j = 1/X_i = 1]$$

$$= \frac{1}{N}.\frac{1}{N-1}$$

Luego,

$$\mathrm{Cov}[X_i;X_j] = \frac{1}{N}.\frac{1}{N-1} - \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2(N-1)}$$

Por tanto,

$$Var[X] = \sum_{i=1}^{N}\frac{N-1}{N^2} + 2\sum\sum_{i<j}\frac{1}{N^2(N-1)}$$

$$= N\left(\frac{N-1}{N^2}\right) + 2\frac{(N-1)N}{2}.\frac{1}{N^2(N-1)} = 1$$

Ejemplo 23.- Suponga que una jarra contiene $2N$ tarjetas, dos de ellas marcadas con 1, dos marcadas con 2, dos marcadas con 3, y así sucesivamente. Se extraen m tarjetas al azar. ¿Cuál es el número esperado de pares que todavía quedan en la jarra?

Solución. Sea X_i la v.a. definida por

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si el i – ésimo par permanece en la jarra, i = 1; 2; ...; N} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego,

$$E[X_i] = 1.P[X_i = 1] = \frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}} = \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2N(2N-1)}$$

Por tanto, el número esperado de pares que todavía quedan en la jarra es

$$E[X_1 + \cdots + X_N] = E[X_1] + \cdots + E[X_N] = \frac{N(2N-m)(2N-m-1)}{2N(2N-1)}$$

$$= \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2(2N-1)}$$

Ejemplo 24.- Sea $(X;Y)$ una v.a. con función de densidad conjunta dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} x+y\ , & si\ 0 < x < 1\ , \quad 0 < y < 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcule $E[X/Y=y]$ b) Halle $E\left[Xe^{(Y+\frac{1}{Y})}/Y=y\right]$

Solución.

a) $f_{X/Y}(x/y) = \dfrac{f(x;y)}{f_Y(y)} = \dfrac{x+y}{\int_0^1 (x+y)dx} = \dfrac{x+y}{y+1/2}$

Luego,

$$f_{X/Y}(x/y) = \begin{cases} \dfrac{2(x+y)}{2y+1}\ , & si\ 0 < x < 1\ , y \text{ un valor fijo en } (0;1) \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$E[X/Y=y] = \int_0^1 x \cdot f_{X/Y}(x/y)dx = \int_0^1 x\left(\frac{2x+2y}{2y+1}\right)dx$$

$$= \frac{2}{2y+1}\int_0^1 (x^2+xy)dx = \frac{2+3y}{3(2y+1)}$$

b) Al aplicar el teorema 8, se tiene

$$E\left[Xe^{(Y+\frac{1}{Y})}/Y=y\right] = e^{y+\frac{1}{y}}E[X/Y=y] = e^{y+\frac{1}{y}}.\frac{2+3y}{(2y+1)}$$

Ejemplo 25.- Una urna contiene 4 bolas rojas y 4 negras. Cuatro bolas se extraen de la urna sin reemplazamiento. Sea X el número de bolas rojas obtenidas en las dos primeras extracciones e Y el número total de bolas rojas obtenidas en las 4 extracciones.

a) Halle una fórmula para $p(x;y) = P[X=x\ ;\ Y=y]$

b) Determine $p_{Y/X}(y/x)$

c) Calcule $E[Y/X=1]$

Solución.

a) El diagrama de árbol correspondiente a este experimento es dado en la figura 7.15 y su distribución de probabilidad conjunta en la tabla 7.14

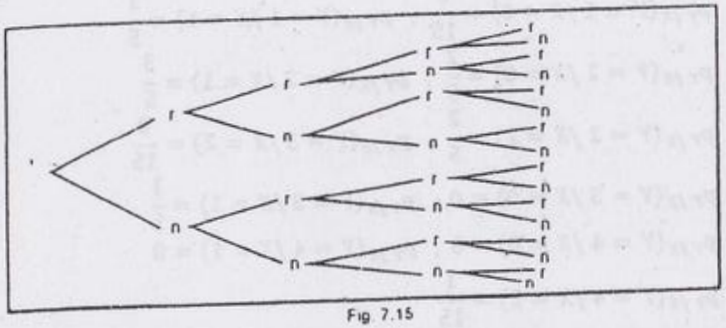


Fig. 7.15

Tabla 7.14

Y \ X	0	1	2	$P_Y(y)$
0	1/70	0	0	1/70
1	8/70	8/70	0	16/70
2	6/70	24/70	6/70	36/70
3	0	8/70	8/70	16/70
4	0	0	1/70	1/70
$P_X(x)$	15/70	40/70	15/70	1

La tabla 7.14 se obtiene del diagrama de árbol o mediante la siguiente fórmula

$$p(i;j) = P[X=i\ ;\ Y=j] = P[X=i]P[Y=j/i]$$

$$= \frac{\binom{4}{i}\binom{4}{2-i}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{4-i}{j-i}\binom{2+i}{2-j+i}}{\binom{6}{2}}$$

Por tanto,

$$P(x;y) = P[X=x\ ;\ Y=y] = \frac{\binom{4}{x}\binom{4}{2-x}\binom{4-x}{y-x}\binom{2+x}{2-y+x}}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}} \quad \begin{matrix} x = 0;1;2 \\ y = 0;1;2;3;4 \end{matrix}$$

b) Se tiene

$$p_{Y/X}(Y=0\ ;X=0) = \frac{P[X=0\ ;\ Y=0]}{p_X(0)} = \frac{1/70}{15/70} = \frac{1}{15}$$

Al calcular en forma similar, se tiene

$p_{Y/X}(Y=0/X=0)=\frac{1}{15}$, $p_{Y/X}(Y=0/X=1)=0$

$p_{Y/X}(Y=0/X=2)=0$, $p_{Y/X}(Y=1/X=2)=0$

$p_{Y/X}(Y=1/X=0)=\frac{8}{15}$, $p_{Y/X}(Y=1/X=1)=\frac{1}{5}$

$p_{Y/X}(Y=2/X=0)=\frac{2}{5}$, $p_{Y/X}(Y=2/X=1)=\frac{3}{5}$

$p_{Y/X}(Y=2/X=2)=\frac{2}{5}$, $p_{Y/X}(Y=3/X=2)=\frac{8}{15}$

$p_{Y/X}(Y=3/X=0)=0$, $p_{Y/X}(Y=3/X=1)=\frac{1}{5}$

$p_{Y/X}(Y=4/X=0)=0$, $p_{Y/X}(Y=4/X=1)=0$

$p_{Y/X}(Y=4/X=2)=\frac{1}{15}$

Se observa que la suma de cada columna es 1; esto indica que la función de probabilidad condicional está bien definida.

c) $E[Y/X=1]=\sum_{y=0}^{4} y\, p_{Y/X}(Y/X=1)$

$$=0(0)+1\left(\frac{1}{5}\right)+2\left(\frac{3}{5}\right)+3\left(\frac{1}{5}\right)+4(0)=2$$

Ejemplo 26.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta

$$f(x;y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & \text{si } x>0, y>0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle $P[X<Y/X<2Y]$ b) Calcule $P[0<X<1/Y=2]$

c) Determine el coeficiente de correlación de X e Y.

Solución.

a) $P[X<Y/X<2Y]=\frac{P[X<Y;X<2Y]}{P[X<2Y]}=\frac{P[X<Y]}{P[X<2Y]}$

El conjunto de puntos Ω_1 para los cuales $x<y$ se muestra en la figura 7.16 y el conjunto de puntos Ω_2 para los cuales $x<2y$ se muestra en la figura 7.17.

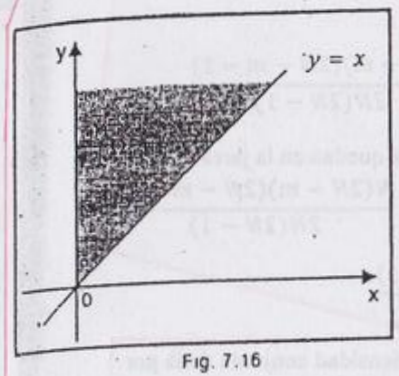


Fig. 7.16

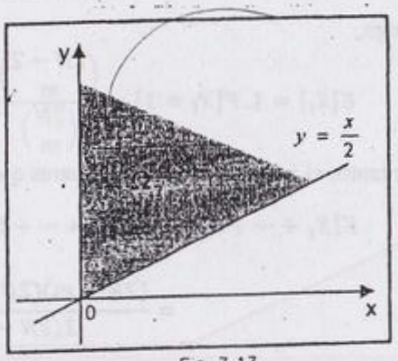


Fig. 7.17

Luego,

$$P[X<Y]=\iint_{\Omega_1} f(x;y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{y} e^{-(x+y)}dxdy=\frac{1}{2}$$

$$P[X<2Y]=\iint_{\Omega_2} f(x;y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{2y} e^{-(x+y)}dxdy=\frac{2}{3}$$

Por tanto,

$$P[X<Y/X<2Y]=\frac{1/2}{2/3}=\frac{3}{4}$$

b) Se tiene

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x;y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-x-y}}{\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dx}=\frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}}=e^{-x}, x>0$$

Como la densidad condicional de X dado Y no depende de y, entonces X e Y son v.a. independientes. Luego,

$$P[0<X<1/Y=2]=P[0<X<1]=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}$$

c) Como X e Y son v.a. independientes, entonces

$$\text{Cov}[X;Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=E[X]E[Y]-E[X]E[Y]=0$$

Por tanto,

$$\rho(x;y)=0$$

Ejemplo 27.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta dada por

$$f(x;y)=\begin{cases} e^{-y}(1-e^{-x}), & 0<x\le y, y\ge 0 \\ e^{-x}(1-e^{-y}), & 0<y\le x, x\ge 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Pruebe que $f(x;y)$ es una función de densidad conjunta de probabilidad

b) Halle las densidades marginales de X e Y

c) Calcule $E[Y/X=x]$ para $x>0$

d) Halle $P[X \le 2\,;\, Y \le 2]$

e) Determine el coeficiente de correlación de X e Y

Solución.

a) El dominio de $f(x;y)$ se muestra en la figura 7.18. Luego,

$$\iint_{S_1} f(x;y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{y} e^{-y}(1-e^{-x})dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty}(ye^{-y}+e^{-2y}-e^{-y})dy = \frac{1}{2}$$

$$\iint_{S_2} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{x} e^{-x}(1-e^{-y})dydx = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy = \iint_{S_1} f(x;y)dxdy + \iint_{S_2} f(x;y)dxdy = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

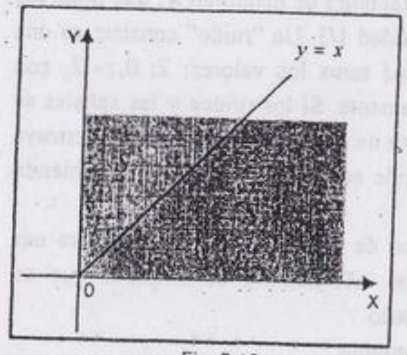


Fig. 7.18

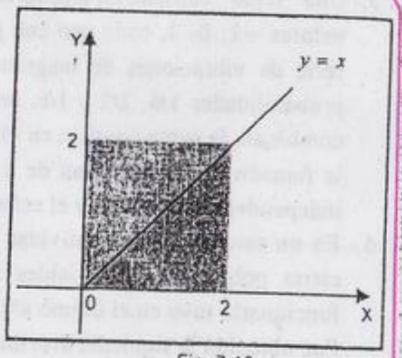


Fig 7.19

b) i) $f_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dy = \int_{y\in S_1} f(x;y)dy + \int_{y\in S_2} f(x;y)dy$

$$= \int_x^{+\infty} e^{-y}(1-e^{-x})dy + \int_0^{x} e^{-x}(1-e^{-y})dy$$

$$= e^{-x}(1-e^{-x}) + e^{-x}(x+e^{-x}-1) = xe^{-x}$$

Luego,

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & si\ x>0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

ii) En forma similar, se obtiene

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Se tiene

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x;y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{e^{-y}(1-e^{-x})}{xe^{-x}}, & \text{si } 0<x\le y\ ,\ y\ge 0\ ,\ x \text{ fijo} \\ \dfrac{1-e^{-y}}{x}, & \text{si } 0<y\le x\ ,\ x \text{ fijo} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego,

$$E[Y/X=x] = \int_x^{+\infty}\frac{ye^{-y}(1-e^{-x})}{xe^{-x}}dy + \int_0^{x}\frac{y(1-e^{-y})}{x}dy$$

$$= \frac{1-e^{-x}}{xe^{-x}}(xe^{-x}+e^{-x}) + \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+xe^{-x}+e^{-x}-1\right)$$

$$= 1+\frac{x}{2},\ x \text{ fijo y } x>0$$

d) De la figura 7.19, se tiene

$$P[X\le 2\,;\,Y\le 2] = \int_0^{2}\int_0^{y} e^{-y}(1-e^{-x})dxdy + \int_0^{2}\int_0^{x} e^{-x}(1-e^{-y})dydx$$

$$= 1-4e^{-2}-e^{-4} = 0{,}44034$$

e) Se tiene

$$E[X] = \int_0^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2$$

$$E[X^2] = \int_0^{+\infty} x^2f_X(x) = \int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx = 6$$

$$Var[X] = E[X^2]-(E[X])^2 = 6-4 = 2$$

$$E[Y] = \int_0^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} y^2e^{-y}dy = 2$$

$$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} y^2f_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} y^3e^{-y}dy = 6$$

$$Var[Y] = E[Y^2]-(E[Y])^2 = 6-4 = 2$$

De la figura 7.18, se obtiene

$$E[XY] = \int_0^{+\infty}\int_0^{y} xye^{-y}(1-e^{-x})dxdy + \int_0^{+\infty}\int_0^{x} xye^{-x}(1-e^{-y})dydx$$

$$= \int_0^{+\infty} ye^{-y}\left(\frac{y^2}{2} + ye^{-y} + e^{-y} - 1\right)dy +$$

$$+ \int_0^{+\infty} xe^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + xe^{-x} + e^{-x} - 1\right)dx = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$$

Luego,

$$\text{Cov}[X;Y] = E[XY] - E[X][Y] = 5 - (2)(2) = 1$$

Por tanto,

$$\rho(X;Y) = \frac{\text{Cov}[X;Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

1.- Considere la siguiente distribución conjunta de X e Y

X \ Y	-2	-1	4	5
1	0,1	0,2	0	0,3
2	0,2	0,1	0,1	0

a) Halle las distribuciones marginales de X e Y.

b) Calcular $E[X]$, $E[Y]$ y $E[XY]$ R. 1,4 ; 1 ; 0,9

c) Calcule $\text{Cov}[X;Y]$ R. $-0,5$

d) Calcule $\rho(X;Y)$ R. $-0,3$

2.- Dada la siguiente función de densidad conjunta de $(X;Y)$

$$f(x;y) = \begin{cases} 3x^2y + 3y^2x\ , & si\ 0 \le x \le 1\ ,\quad o \le y \le 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine las densidades marginales de X e Y

R. $f_X(x) = \frac{3}{2}x^2 + x\ , 0 \le x \le 1\ ;\ f_Y(y) = \frac{3}{2}y^2 + y\ ,\ 0 \le y \le 1$

b) Calcule $E[X]$ y $E[Y]$ R. 17/24 , 17/24

c) Calcule el coeficiente de correlación entre X e Y. R. $-0,036$

3.- La función de probabilidad conjunta de las v.a. discretas X e Y es dado por

$$p(x;y) = \begin{cases} C\,xy\ , & si\ x = 1;2;3\ ;\ y = 1;2 \\ 0\ , & \text{en otros valores} \end{cases}$$

a) Determine el valor de la constante C. R. 1/18

b) Calcule $P[X = 3\ ;\ Y = 2]$ R. 1/3

c) Determine $F(2;2)$ R. 1/2

d) Calcule el coeficiente de correlación entre X e Y. R. 0

4.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional continua con función de densidad conjunta dado por

$$f(x;y) = \begin{cases} C(x^2+y^2)\ ; & si\ 0 \le x \le 1\ ,\quad 0 \le y \le 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de C R. 3/2

b) Calcule $P[X < 1/2;\ Y > 1/2]$ R. 1/4

c) Calcule $P[Y < 1/2]$ R. 5/16

d) Determine el coeficiente de relación entre X e Y. R. -0,21

5.- Una "señal" consiste en una serie de vibraciones de magnitud X, que toma los valores -1; 0; 1, cada uno con probabilidad 1/3. Un "ruido" consiste en una serie de vibraciones de magnitud Y, que toma los valores: 2; 0,; -2, con probabilidades 1/6, 2/3 y 1/6, respectivamente. Si los ruidos y las señales se combinan, la suma consiste en vibraciones de magnitud $Z = X + Y$. Construya la función de probabilidad de Z, y calcule su media y varianza, suponiendo independencia del ruido y el señal.

6.- En un estudio sobre rotatividad de mano de obra, fueron definidas para una cierta población las variables aleatorias X: número de empleos que un funcionario tuvo en el último año Y: salario

Fue obtenida la siguiente distribución conjunta

Y \ X	1	2	3	4
S/. 800	0	0	0,10	0,10
1 200	0,05	0,05	0,10	0,10
2 000	0,05	0,20	0,05	0
5 000	0,10	0,05	0,05	0

a) Calcule $P[X = 2]$ y $P[X = 2/ Y = 1\,200]$. ¿X e Y son independientes?
R. 0,30 ; 0,16 ; dependientes

b) Obtenga $\rho(X;Y)$ e interpretar el resultado en términos de las variables en estudio R. -0,51

7.- En una sala están 5 niños, cuyas edades son: 3; 3; 4; 5 y 5. Se escoge 3 niños al azar para formar una terna. La variable X indica la edad del más joven del grupo, e Y indica la edad del más viejo del grupo.

a) Halle la función de probabilidad conjunta de X e Y

b) Calcule $E[X], Var[X]$ y $\text{Cov}[X;Y]$

c) Halle $Var[X+Y]$

8.- Un recipiente de 5 transistores contiene 2 defectuoso. Los transistores son probados uno a uno, hasta que los defectuosos son identificados. Denote por X el número de pruebas realizadas hasta que el primer defectuoso es ubicado y por Y el número de pruebas adicionales hasta que el segundo defectuoso es ubicado; encuentre la función de probabilidad conjunta de X e Y.

$$R.\ p(i;j) = \frac{1}{10}\ ,\ i = 1;2;3;4\ ;\ j = 1;2;\ldots;5-i$$

9.- Suponga que la función de densidad conjunta de las variables aleatorias X e Y es dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)e^{-y}; & si\ -y \le x \le y, o < y < \infty \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle el valor de c R. 1/8

b) Encuentre las densidades marginales de X e Y.

$$R.\ f_Y(y) = \frac{1}{6}y^3e^{-y}\ ,\qquad f_X(x) = \frac{1}{4}e^{-|x|}(1 + |x| + |x|^2)$$

10.- La función de densidad conjunta de las v.a. X e Y es

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), & si\ 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle la densidad marginal de X

b) Calcule $P[X > Y]$ R. 15/56

c) Calcule $P[Y > 1/2\ /X < 1/2]$ R. 0,58125

11.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional continua con función de densidad conjunta dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} 2\ , & si\ 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle $\text{Cov}[X,Y]$ R. 1/6

b) Determine la densidad condicional de Y dado $X = x$

$$R.\ f_{X/Y}(y/x) = \frac{1}{1-x}\ , si\ x < y < 1\ , x \text{ fijo en } (0;1)$$

12.- Se lanza una moneda perfecta 3 veces, y sean

X: número de caras en los 2 primeros resultados

Y: número de caras en el último resultado

S: número total de caras

a) A través de la distribución conjunta de $(X;Y)$; verifique si X e Y son independientes. ¿Cuál es la covarianza entre X e Y?
R. Dependientes y $\text{Cov}[X,Y] = 0$

b) Para cada variable X, Y y S, halle su media y su varianza
R. Medias: 1; 4/8; 12/8 Varianzas: 1; 1/4; 3/4

13.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional continua con función de densidad conjunta

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{2}xy\ , & si\ 0 < x < y, 0 < x < 2 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle las densidades marginales de X e Y

b) ¿Son X e Y independientes? R. No

14.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional discreta con función de probabilidad dada por

$$p(x;y) = \begin{cases} c|x+y|\ , & si\ x = -2\ ; -1; 0; 1\ ;\ y = -2; -1; 0; 1; 2 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine:

a) El valor de la constante c R. 1/40

b) $P[X = 1]$ R. 7/40 c) $P[|X - Y| \le 1]$ R. 7/10

15.- Suponga que la función de densidad conjunta de la v.a. $(X;Y)$ es dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} c(x^2 + y), & si\ 0 \le y \le 1 - x^2 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine:

a) El valor de la constante c. R. 5/4

b) $P[0 \le X \le 1/2]$ R. 79/256

c) $P[Y \le X + 1]$ R. 13/16

16.- Una cierta farmacia tiene 3 casetas telefónicas. Para $i = 0;1;2;3$, sea p_i la probabilidad de que i casetas telefónicas están ocupadas cualquier noche del lúnes a las 8 p.m. y suponga que $p_0 = 0{,}1, p_1 = 0{,}2, p_2 = 0{,}4$ y $p_3 = 0{,}3$.

Sean X e Y v.a. que denotan el número de casetas que están ocupadas a las 8 p.m. en dos noches de lunes aleatoriamente elegidos.

Determine:

a) La función de probabilidad conjunta de X e Y

$$R.\ p(x;y) = \begin{cases} p_x\, p_y\ , & \text{si } x = 0;1;2;3\ ; y = 0;1;2;3 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) $P[X = Y]$ R. 0,3 c) $P[X > Y]$. R. 0,35

17.- Suponga que dos personas se citan para encontrarse entre 5 p.m. y 6 p.m. en un cierto lugar, y ellos acuerdan que ninguno de ellos esperará más de 10 minutos a la otra persona. Si ellos llegan independientemente entre 5 p.m. y 6 p.m., ¿cuál es la probabilidad que ellos se encuentren? R. 11/36

18.- Suponga que la función de densidad conjunta de la v.a. $(X;Y)$ es dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4 - 2x - y)\ , & si\ x > 0, y > 0, 2x + y < 4 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine:

a) La función de densidad condicional de Y dado $X = x$

$$R.\ \text{Para } 0 < x < 2, f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} \frac{4 - 2x - y}{2(2-x)^2}\ , & si\ 0 < y < 4 - 2x \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) $P[Y \geq 2 / X = 1/2]$ R. 1/9

19.- Suponga que dos instrumentos pueden ser usados para hacer una cierta medida. El instrumento 1 da la medida con función de densidad dado por

$$h_1(x) = \begin{cases} 2x\ , & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El instrumento 2 da una medida con función de densidad

$$h_2(x) = \begin{cases} 3x^2\ , & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Suponga que uno de los instrumentos es elegido al azar y se toma una medida X con dicho instrumento.

a) Determine la función de densidad marginal de X.

$$R.\ f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2 + 3x)\ , & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Si el valor de la medida es $X = 1/4$, ¿cuál es la probabilidad de que el instrumento 1 fue usado? R. 8/11

20.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional continua con función de densidad conjunta dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x + y)\ , & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine el valor de $Var[2X - 3Y + 8]$

21.- Supongamos que X e Y son variables aleatorias tal que $Var[X] = 9$, $Var[Y] = 4$ y $\rho(X;Y) = -1/6$

a) Determine $Var[X + Y]$ R. 11

b) Halle $Var[X - 3Y + 4]$ R. 51

22.- Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias tal que la varianza de cada variable es 1 y la correlación entre cada par de diferentes variables es 1/4. Determine $Var[X_1 + \ldots + X_n]$

$$R.\ n + \frac{n(n-1)}{4}$$

23.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional continua, tal que

$$f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} 1\ , & x < y < x + 1\ , x \text{ un número fijo en } (0;1) \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1\ , & 0 < x < 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcule $E[Y]$ R. 1 b) Halle $\text{Cov}[X;Y]$ R. 1/12

c) Calcule $P[X + Y < 1]$ R. 1/4

d) Halle $f_{X/Y}(x/y)$

24.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional continua con función de densidad conjunta dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} [1 - \alpha(1 - 2x)(1 - 2y)]\ , & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0\ , & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde α es un parámetro que satisface la condición $-1 \leq \alpha \leq 1$

a) Diga si el siguiente enunciado es verdadero o falso: X e Y son independientes si y sólo si X e Y son no correlacionados. R. verdadero

b) Un triángulo isósceles es construido como se indica en la figura 7.20. Si $(X;Y)$ es una v.a. con función de densidad conjunta dada, halle α que maximiza el área esperada del triángulo.

R. $\alpha = -1$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo esté dentro de un cuadrado unitario con vértices $(0;0)$, $(1;0)$ $(1;1)$ y $(0;1)$. R. $1/2$

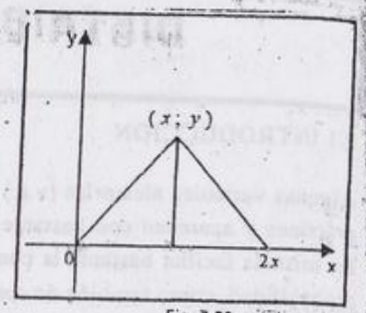


Fig. 7.20

25.- Si X_1, X_2, X_3, X_4 son variables aleatorias no correlacionadas 2 a 2 cada uno con media 0 y varianza 1, calcule la correlación de:

a) $X_1 + X_2$ y $X_2 + X_3$ R. 1/2

b) $X_1 + X_2$ y $X_3 + X_4$ R. 0

26.- Sea $(X;Y)$ una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y}}{y}, & si\ 0 < x < y, y > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcule $E[X^3 / Y = y]$ R. $\dfrac{y^3}{4}$

27.- Un prisionero está detenido en una celda que tiene 3 puertas. La primera puerta conduce a un túnel que hace retornar al prisionero a su celda después de 2 días de viaje. La segunda puerta conduce a un túnel que hace retornar al prisionero a su celda después de 4 días de viaje. La tercera puerta lleva al prisionero a su libertad después de un día de viaje. Si se supone que el prisionero siempre selecciona las puertas 1; 2 y 3 con probabilidades respectivas 0,5; 0,3 y 0,2; ¿cuál es el número esperado de días hasta que el prisionero logre su libertad? R. 12

28.- Suponga que el número esperado de accidentes por semana en una planta industrial es 5. Suponga también que el número de trabajadores lesionados en cada accidente son v.a. independientes con media común de 2,5. Si el número de trabajadores lesionados en cada accidente es independiente del número de accidentes que ocurre, calcule el número esperado de trabajadores lesionados en una semana. R. 12,5

29.- De un grupo consistente de 4 Republicanos, 3 Demócratas y 2 Independientes, se selecciona aleatoriamente un comité de 3 personas.

Sean X: número de Republicanos en el comité

Y: número de Demócratas en el comité

a) Halle la distribución de probabilidad conjunta de X e Y.

b) Calcule $P[X = 1 / Y \geq 1]$. R. 9/16

30.- Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta dado por

$$f(x;y) = \begin{cases} k, & si\ 0 \leq x \leq 2, 2y \leq x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle k R. 1

b) Determine las densidades marginales de X e Y

c) Encuentre la densidad condicional de X dado $Y = y$ y de Y dado $X = x$

d) Calcule $P[X \leq 1{,}5 ; y \leq 0{,}5]$ y $P[Y \leq 0{,}5 ; X \leq 1{,}5]$ R. 1/2 ; 8/9

31.- Consideremos la función dada por

$$f(x/y) = \begin{cases} \dfrac{y^x e^{-y}}{x!}, & x = 0; 1; \ldots; y\ (y \geq 0) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Pruebe que para cada y fijo, $f(./y)$ es una función de densidad condicional de X dado $Y = y$

b) Si $f_Y(y) = e^{-y}, y > 0$, ¿cuál es la densidad conjunta de X e Y?

c) Pruebe que la densidad marginal de X es dado por

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, x = 0; 1; 2; \ldots$$

32.- Sean b y c dos números comprendidos entre 0 y 1. Halle la probabilidad de que la ecuación $x^2 + 2bx + c = 0$, tenga raices, si la función de densidad conjunta del par $(B;C)$ es

$$f(b;c) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(b^2 + c^2), & si\ b, c \in \langle 0,1 \rangle \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$ R. $\dfrac{13}{35}$

33.- La función de densidad conjunta de la v.a. $(X;Y)$ es constante en la región limitada por las rectas: $x + y = 1; x + y = 3; x - y = 1; x - y = -1$

Calcule $E[X]$ y $Var[Y]$

34.- Sea $(X;Y)$ v.a. bidimensional continua con función de densidad conjunta dada por

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x+3y)e^{-x-2y}, & si\ x \geq 1, y \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine la densidad marginal de las variables X e Y

b) Halle la densidad condicional de Y dado $X = x$

$$R.\ f(y/x) = \begin{cases} 4\left(\frac{x+3y}{2x+3}\right)e^{-2y}, & x \geq 0, y \geq 0, x \text{ fijo} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Calcule $\text{Cov}[X,Y]$ R. $-3/25$

35.- Suponga que los tiempos que dos estudiantes necesitan para resolver un problema son independientes y tienen función de densidad dada por $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Determine la probabilidad de que el primer estudiante necesita por lo menos el doble del tiempo gastado por el segundo estudiante para resolver el problema. R. 1/3

36.- Sea $f(x;y) = \begin{cases} C(y-x)^{\alpha}, & 0 \leq x < y \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

a) Para qué valor de α se puede escoger C de modo que $f(x;y)$ sea función de densidad R. $\alpha > -1$

b) Halle las densidades marginales de X e Y

37.- Si A y B tienen una cita a las 8 a.m. pero, siendo ambos impuntuales, llegan con retrasos de X minutos e Y minutos, respectivamente, donde X e Y son v.a. independientes con funciones de densidades.

$f(x) = 2e^{-2x}, x > 0$, $f(y) = 3e^{-3y}, y > 0$

Halle el valor esperado del tiempo que deberá esperar quien llegue primero

R. 13/30

8 MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DISCRETA

8.1 INTRODUCCION

Algunas variables aleatorias (v.a.) se adaptan muy bien a una serie de problemas prácticos y aparecen con bastante frecuencia. Por tanto, un estudio detallado de las mismas facilita bastante la construcción de las correspondientes funciones de probabilidad, como también de sus principales parámetros. Así, para un problema dado, se verifica si satisface las condiciones de los modelos conocidos, pues esto facilita bastante el trabajo.

En esta sección se presenta algunos de estos modelos, tratando de enfatizar las condiciones en que éstas aparecen, su función de probabilidad, parámetros y como encontrar las probabilidades.

8.2 DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA

Definición 1.-Se dice que una v.a. discreta X que toma valores $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_n = N$ tiene distribución uniforme, si su función de probabilidad es dado por

$$p(x_i) = P[X = x_i] = \frac{1}{N}, \text{para } i = 1; 2; \ldots; N$$

La función de distribución acumulada de probabilidad de esta v.a. es

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} \frac{1}{N} = \frac{n(x)}{N}$$

donde $n(x)$ es el número de $x_i \leq x$

La gráfica de la función de probabilidad de la v.a. uniforme discreta X se muestra en la figura 8.1 y de su distribución acumulada en la figura 8.2

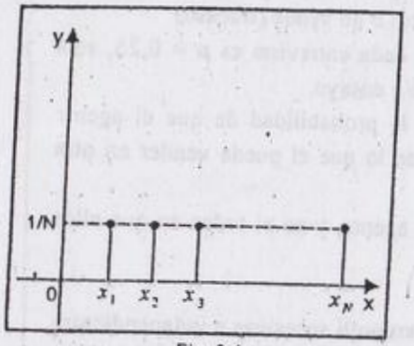


Fig. 8.1

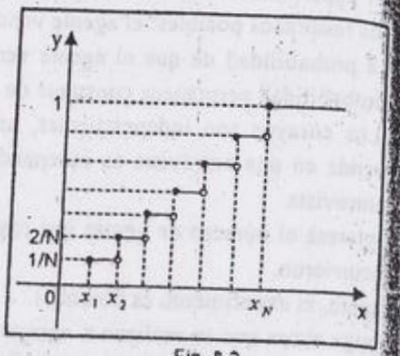


Fig. 8.2

Teorema 1.- Si X es una v.a. que tiene distribución uniforme discreta, entonces

i) $E[X] = \dfrac{N+1}{2}$ ii) $Var[X] = \dfrac{N^2-1}{12}$

iii) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{jt}$

Demostración. Se tiene

i) $E[X] = \sum_{i=1}^{N} i.\dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} i = \dfrac{1}{N}.\dfrac{N(N+1)}{2} = \dfrac{N+1}{2}$

ii) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_{i=1}^{N} i^2.\dfrac{1}{N} - \left(\dfrac{N+1}{2}\right)^2$

$= \dfrac{1}{N}.\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \dfrac{(N+1)^2}{4} = \dfrac{N^2-1}{12}$

iii) $M_X(t) - E[e^{tX}] = \sum_{j=1}^{N} e^{jt}.\dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{jt}$

Ejemplo 1.- Sea el experimento E: lanzar un dado y observar el número que cae hacia arriba. Sea la v.a. X: número observado en la cara que cae hacia arriba. Entonces X tiene distribución uniforme discreta con función de probabilidad dado por

$p(x) = P[X = x] = \dfrac{1}{6}, x = 1; 2; 3; 4; 5; 6$

$E[X] = \dfrac{6+1}{2} = 3{,}5$ y $Var[X] = \dfrac{6^2-1}{12} = 2{,}92$

8.3 DISTRIBUCIONES DE BERNOULLI Y BINOMIAL

Definición 2.- (Ensayo de Bernoulli) Un ensayo de Bernoulli es un experimento que tiene dos posibles resultados mutuamente excluyentes, generalmente llamados éxito y fracaso.

Ejemplo 2.-

a) En el lanzamiento de una moneda los resultados posibles son cara o sello.
b) En el lanzamiento de un dado los resultados posibles son número 5 ó diferente de 5.
c) En la selección de una pieza de un lote de 500 piezas. Los resultados posibles son defectuosos y no defectuosos.
d) En la selección de una persona al azar de un grupo de 1 000. Los resultados posibles son hombre o mujer.

En todos los casos, interesa la ocurrencia de un éxito (ocurrencia de una cara, número 5, pieza defectuosa, etc.) o fracaso (ocurrencia de un sello, número diferente de 5, pieza buena, etc.). Para cada experimento del ejemplo 2, se define una v.a. X que toma solamente dos valores , 0 y el valor 1, esto es.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{, si ocurre éxito con probabilidad } p \\ 0 \text{ ,} & \text{si ocurre fracaso con probabilidad } 1-p = q \end{cases}$$

Definición 3.- (Distribución de Bernoulli) La variable X, que toma solamente dos valores 0 y 1 con función de probabilidad dada por

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} \text{ , } si\ x = 0; 1 \\ 0 \text{ , en otro caso} \end{cases}$$

se denomina v.a. de Berboulli, donde el parámetro p satisface la condición

$$0 \le p \le 1 \text{ y } 0 \le q = 1 - p \le 1$$

De la definición , se tiene $P[X = 1] = p$ y $P[X = 0] = 1 - p$

La gráfica de la función de probabilidad de la v.a. Bernoulli X se muestra en la figura 8.3 y de su distribución acumulada en la figura 8.4

Observación 1.- Si X es una v.a. con distribución Bernoulli de parámetro p, entonces se denota por $X \sim B(1; p)$

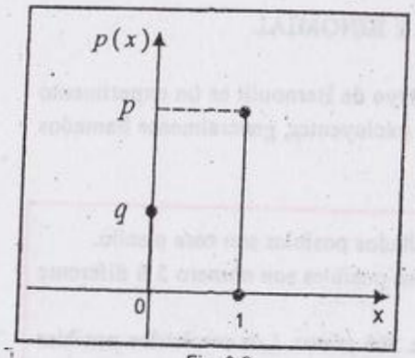


Fig. 8.3

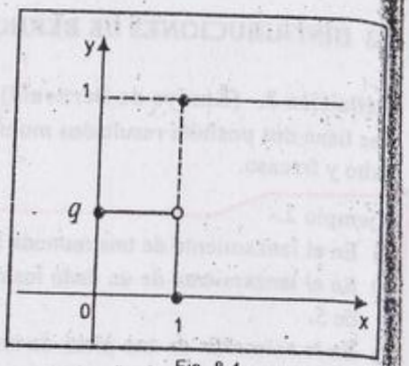


Fig. 8.4

Teorema 2.- Si X es una v.a. con distribución Bernoulli de parámetro p, entonces

i) $E[X] = p$, ii) $Var[X] = pq$ iii) $M_X(t) = E[e^{tX}] = pe^t + q$

Demostración. Se tiene

i) $E[X] = 1.p + 0.q = p$

ii) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = (1^2.p + 0^2.q) - p^2 = p - p^2 = pq$

iii) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} P[X = x] = P[X = 0] + e^t P[X = 1] = q + e^t p$

Definición 4.- (Experimento Binomial) Se dice que un experimento es binomial si satisface los siguientes supuestos.

i) El experimento consiste de n ensayos de Bernoulli, siendo n fijado de antemano.

ii) La probabilidad de éxito en un ensayo es igual a p y es constante para todos los ensayos. La probabilidad de fracaso es por lo tanto igual a $q = 1 - p$.

iii) Los ensayos son independientes.

iv) El investigador está interesado en el número de éxitos y no en el orden que ocurren.

Ejemplo 3.- Un agente de ventas desea determinar la probabilidad de llevar a cabo 2 ventas en 5 entrevistas. Se sabe que la probabilidad es 0,25 de que el agente lleve a cabo una venta en una entrevista determinada. ¿Es éste un experimento binomial?

Solución:

Para determinar si éste es un experimento binomial, se debe verificar si satisface los 5 supuestos descritos en la definición anterior.

i) El experimento consiste de $n = 5$ ensayos (entrevistas) de Bernoulli, siendo los resultados posibles: el agente vende (éxito) o no vende (fracaso).

ii) La probabilidad de que el agente venda en cada entrevista es $p = 0{,}25$, esta probabilidad permanece constante de ensayo a ensayo.

iii) Los ensayos son independientes, esto es, la probabilidad de que el agente venda en una entrevista es independiente de lo que él pueda vender en otra entrevista.

iv) Interesa el número de ventas que realiza el agente, y no el orden en que ellos ocurrieron.

Por tanto, el experimento es binomial.

Suponga ahora que se realizan n ensayos de Bernoulli sucesivas e independientes y se denota por X el número total de éxitos obtenidos en las n pruebas. Los posibles valores de X son $0; 1; 2; \ldots; n$. Luego, los pares $(x; p(x))$, donde $p(x) = P[X = x]$, constituyen la llamada distribución de probabilidad.

Para encontrar la función de probabilidad $P[X = k]$, esto es, la probabilidad de obtener k éxitos (y por tanto n-k fracasos) en una sucesión de ensayos de Bernoulli, $k = 0; 1; 2; \ldots; n$, con $P[\text{éxito}] = p$ y $P[\text{fracaso}] = 1 - p = q$, se considera la siguiente sucesión particular.

$$\underbrace{E.E\ \ldots.E}_{k\ éxitos}\ \underbrace{F.F\ \ldots.F}_{n-k\ fracasos}$$

Así, la probabilidad de ocurrencia de esta sucesión es

$$p^k(1-p)^{n-k} = p^k q^{n-k}$$

debido a la independencia de los ensayos. Por tanto, el número de sucesiones distintas con k éxitos y $n - k$ fracasos que puede ocurrir es dado por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Luego,

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Así, se tiene la siguiente definición

Definición 5.- Se dice que la v.a. X correspondiente al número de éxitos en un experimento binomial, tiene distribución binomial con parámetros n y p $(X \sim b(n; p))$ si su función de probabilidad es dado por

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x = 0; 1; \ldots; n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teorema 3.- Si $X \sim b(n;\, p)$, entonces

i) $E[X] = np$ ii) $Var[X] = npq$

iii) $M_X(t) = E[e^{tX}] = (pe^t + q)^n$

Demostración. Se tiene

iii) $$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} P[X = x] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x} = [pe^t + q]^n \text{ (binomio de Newton)}$$

$$M_X'(t) = \frac{dM_X(t)}{dt} = npe^t[pe^t + q]^{n-1}$$

$$M_X''(t) = \frac{d^2M_X(t)}{dt^2} = n(n-1)p^2e^{2t}(pe^t + q)^{n-2} + npe^t(pe^t + q)^{n-1}$$

i) $E[X] = M_X'(0) = np[p + q]^{n-1} = np(1)^{n-1} = np$

ii) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$$= M_X''(0) - (np)^2 = [n(n-1)p^2 + np - (np)^2]$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$$

Observación 2.

i) Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias Bernoulli con parámetro p y si $T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, entonces T tiene distribución binomial de parámetros n y p.

ii) Si $X_1, \ldots, X_k$ son variables aleatorias independientes cada uno con distribución binomial con parámetros n_i y $p (i = 1; \ldots; k)$, entonces la suma

$$X_1 + \ldots, + X_k \sim b(n_1 + \cdots + n_k;\, p)$$

Ejemplo 4.- Se conoce que los tornillos producidos por una cierta compañía son defectuosos con probabilidad 0,01 independiente uno del otro. La compañía vende los tornillos en paquetes de 10 y garantiza que a lo más uno de los 10 tornillos es defectuoso. ¿Qué proporción de paquetes vendidos deberá la compañía reemplazar?

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de tornillos defectuosos en un paquete, entonces $X \sim b(10;\, 0{,}01)$

Luego, la probabilidad de que el paquete tenga que ser reemplazado es

$$p = P[\text{reemplazar un paquete}] = P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1]$$

$$= 1 - P[X = 0] - P[X = 1]$$

$$= 1 - \binom{10}{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{10} - \binom{10}{1}(0{,}01)(0{,}99)^9 = 0{,}007$$

Por tanto, solamente 0,7 por ciento de paquetes tiene que ser reemplazados.

Ejemplo 5.- Suponga que los motores de un avión fallan, en un vuelo, con probabilidad $1 - p$ independientemente uno del otro, suponga también que el avión realiza vuelos exitosos si por lo menos 50% de sus motores permanecen operando. ¿Para qué valores de p es un avión de 4 motores preferible a uno de 2 motores?

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de motores del avión que operan correctamente. Como cada motor falla o funciona independientemente de los otros motores, entonces $X \sim b(4;\, p)$ cuando el avión tiene 4 motores, donde p es la probabilidad de que el motor está operando correctamente. Luego, la probabilidad de que un avión de 4 motores realice un vuelo exitoso es

$$P[X \geq 2] = \binom{4}{2}p^2(1-p)^2 + \binom{4}{3}p^3(1-p) + \binom{4}{4}p^4(1-p)^0$$

$$= 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4$$

Mientras la probabilidad correspondiente para un avión de 2 motores es

$$P[X \geq 1] = \binom{2}{1}p(1-p) + \binom{2}{2}p^2 = 2p(1-p) + p^2$$

Luego, se prefiere a un avión de 4 motores cuando

$$6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4 \geq 2p(1-p) + p^2$$

Lo cual es equivalente a la siguiente desigualdad

$$6p(1-p)^2 + 4p^2(1-p) + p^3 \geq 2 - p$$

Luego, al hacer operaciones en la desigualdad se obtiene

$$3p^3 - 8p^2 + 7p - 2 \geq 0 \quad \text{ó} \quad (p-1)^2(3p-2) \geq 0$$

El cual es equivalente a

$$3p - 2 \geq 0 \quad \text{ó} \quad p \geq \frac{2}{3}$$

Por tanto, se prefiere a un avión de 4 motores cuando la probabilidad de que un motor funcione correctamente es $p \geq 2/3$.

Ejemplo 6.- Una secretaria que debe llegar a su trabajo todas las mañanas a las 8 a.m. se retarda más de 15 minutos el 20% de las veces. El gerente de la compañía, que no llega sino a las 10 a.m., llama ocasionalmente a la oficina entre las 8 y

8.15 para dictar una carta. ¿Cuál es la probabilidad de que, tres mañanas de las 6 en que el gerente llama, la secretaria no está en la oficina?

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de mañanas en que la secretaria llega a la oficina después de las 8.15 a.m. Entonces $X \sim b(6;\ 0{,}20)$.

La probabilidad de que la secretaria no está entre las 8 y 8.15 a.m. en las 3 mañanas que llama el gerente es

$$P[X = 3] = \binom{6}{3}(0{,}20)^3(0{,}80)^3 = 0{,}08192$$

Ejemplo 7.- Un estudiante de la Facultad de Ingeniería Industrial tiene la certeza de aprobar una asignatura cualquiera con probabilidad 0,8. Si lleva 6 asignaturas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga mal en todas las asignaturas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe menos de 2 cursos o más de 4 cursos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe exactamente 2 cursos si se sabe que al menos aprueba un curso?

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de asignaturas que el estudiante aprueba, entonces $X \sim b(6;\ 0{,}8)$

a) La probabilidad de que el estudiante no apruebe ninguna de las asignaturas es

$$P[X = 0] = \binom{6}{0}(0{,}8)^0(0{,}2)^6 = 0{,}000064$$

b) Sean los eventos A: el estudiante aprueba menos de 2 cursos

B: el estudiante aprueba más de 4 cursos

Luego,

$$\begin{aligned} P[A \cup B] &= P[A] + P[B] = P[X \le 1] + P[X \ge 5] \\ &= P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 5] + P[X = 6] \\ &= \binom{6}{0}(0{,}8)^0(0{,}2)^6 + \binom{6}{1}(0{,}8)(0{,}2)^5 + \binom{6}{5}(0{,}8)^5(0{,}2) \\ &\quad + \binom{6}{6}(0{,}8)^6(0{,}2)^0 = 0{,}65696 \end{aligned}$$

c) La probabilidad de que apruebe exactamente 2 cursos dado que al menos aprueba un curso es

$$P[X = 2 / X \ge 1] = \frac{P[X = 2]}{P[X \ge 1]} = \frac{P[X = 2]}{1 - P[X = 0]}$$

$$= \frac{\binom{6}{2}(0{,}8)^2(0{,}2)^4}{1 - \binom{6}{0}(0{,}8)^0(0{,}2)^6} = 0{,}015360983$$

Ejemplo 8.- Una tienda que se dedica a la venta de camisas, ofrece a sus habituales clientes dos formas de pago: "pago al contado" o "pago a plazos"; se sabe que el 30% de las unidades adquiridas de dichas camisas los son bajo la forma de "pago al contado".

Si en un periodo de tiempo determinado se han adquirido 8 unidades, determine la probabilidad de que:

a) Tres unidades o más, lo hayan sido bajo la forma de "pago al contado".

b) Seis unidades o menos, lo hayan sido bajo la forma de "pago a plazos".

Solución.

Como cada unidad vendida lo ha sido bajo la forma "pago al contado" o "pago a plazos", entonces la v.a. X_i que denota la i-ésima camisa vendida lo haya sido bajo la froma de "pago al contado" tiene distribución Bernoulli de parámetro 1 y $p = 0.30$. Luego, la distribución de X_i es dada por

x_i	0	1
$p(x_i)$	0,70	0,30

Todos los resultados posibles que pueden darse con las 8 unidades vendidas, es expresado por los valores que toma la variable Y, definida por

$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_8$ (N° de camisas vendidas bajo la forma "pago al contado")

Luego, por observación 2, $Y \sim b(8;\ 0{,}30)$. Así, se tiene

a) $P[Y \ge 3] = 1 - P[Y \le 2] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] - P[Y = 2]$

$= 1 - 0{,}5518 = 0{,}4482$

b) $P[Y \ge 2] = 1 - P[Y \le 1] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1]$

$= 1 - 0{,}2553 = 0{,}7447$

Ejemplo 9.- A dos grupos de alumnos compuestos, por 8 individuos el primero y 5 individuos el segundo, se le hace una misma pregunta. Suponga que las únicas respuestas posibles son "SI" o "NO", ambas en principio igualmente probables y que todos los consultados responden. Al suponer además la independencia para las respuestas de cada individuo y para los grupos, determine la probabilidad de que:

a) El número de respuestas afirmativas, en el primer grupo, sea inferior o igual a 6.

b) El número de respuestas afirmativas, en los dos grupos, sea mayor o igual a 11.

Solución.

a) Sea la v.a. X que denota al número de alumnos que responden "si" en el primer grupo. Como cada alumno del primer grupo responde "si" o "no", entonces $X \sim b(8;\ 0{,}5)$

Luego,

$$P[X \leq 6] = 1 - P[X > 6] = 1 - P[X = 7] - P[X = 8]$$

$$= 1 - \binom{8}{7}(0{,}5)^7(0{,}5) - \binom{8}{8}(0{,}5)^8(0{,}5)^0 = 0{,}96484$$

b) Sea la v.a. Y que denota al número de alumnos que responden "si" en el segundo grupo, entonces $Y \sim b(5;\ 0{,}5)$

Luego, todas las respuestas posibles para los dos grupos se obtendrán como la suma de los del primer grupo y los del segundo grupo, esto es, las respuestas de los dos grupos están representados por una variable definida por $Z = X + Y$ que toma los valores 0;1;2;...;13.

Como las respuestas dadas por cada grupo son independientes, entonces $Z \sim b(13;\ 0{,}5)$

Por tanto,

$$P[Z \geq 11] = P[Z = 11] + P[Z = 12] + P[Z = 13]$$

$$= \binom{13}{11}(0{,}5)^{11}(0{,}5)^2 + \binom{13}{12}(0{,}5)^{12}(0{,}5) + \binom{13}{13}(0{,}5)^{13}$$

$$= 0{,}011513$$

EJERCICIOS

1.- En un área geográfica determinada, el 40% de la población adulta pertenece al partido demócrata. Se selecciona una muestra aleatoria de 10 adultos. ¿Qué probabilidad hay de que 3 de ellos pertenezcan al partido demócrata?

R. 0,2150

2.- Suponga que un jugador de basketball tiene probabilidad de 3/4 de encestar en un tiro libre y que sus tiros son independientes. Si él consigue 5 tiros libres en un juego particular. ¿Cuál es la probabilidad de que él enceste 2 o más tiros libres?

R. 63/64

3.- De las variables descritas a continuación, señale cuales son binomiales, y para estos dé los respectivos dominios de definición y función de probabilidad. Cuando usted cree que la variable no es binomial, diga las razones de su conclusión.

a) De una urna con 10 bolas blancas y 20 negras se extraen, con reposición, 5 bolas. Sea X la variable que denota el número de bolas blancas en las 5 extracciones.

b) Suponga que se realiza una investigación en 10 ciudades peruanas, escogiendo al azar un habitante de cada una de ellas, y clasificándolo en pro o en contra de un cierto proyecto del gobierno. Suponga que X denota el número de individuos que están en contra del proyecto al final de la investigación.

c) En una industria existen 100 máquinas que fabrican determinada pieza. Cada pieza es clasificada como defectuosa o buena. Se escoge al azar un instante de tiempo, y se verifica una pieza de cada una de las máquinas. Suponga que X es el número de piezas defectuosas.

4.- Si $X \sim b(n;\ p)$, tal que $E[X] = 20$ y $Var[X] = 4$, determine:

a) n b) p c) $P[X < 20]$ d) $P[X \leq 3]$

e) $P\left[Y \leq \frac{3}{25}\right]$, si $Y = \frac{X}{n}$ f) $P\left[Y \geq \frac{20}{25}\right]$, si $Y = \frac{X}{n}$

5.- En la tabla siguiente, X denota el número de hijos hombres en familias con 12 hijos. Calcule para cada valor de la variable el número de familias que usted debería esperar, si $X \sim b(12;\ 0{,}5)$. ¿Usted cree que el modelo binomial es adecuado para explicar este fenómeno?

X	Nº observado de familias
0	6
1	29
2	160
3	521
4	1 198
5	1 921
6	2 630

X	Nº observado de familias
7	2 033
8	1 398
9	799
10	298
11	60
12	7

6.- Un fabricante de piezas de automóviles garantiza que una caja de sus piezas contendrá, como máximo, 2 defectuosos. Si la caja contiene 20 piezas, y la experiencia ha demostrado que ese proceso de fabricación produce 5% de piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que una caja satisfaga la garantía?

R. 0,924516

7.- Dos personas juegan a cara o sello, y han convenido en continuar la partida hasta que tanto la cara como el sello se hayan presentado por lo menos 3 veces. Halle la probabilidad de que el juego no termine cuando se han hecho 10 tiradas. R. 0,109375

8.- Suponiendo que los nacimientos de niño y niña son iguales, calcule la probabilidad de que un matrimonio de 6 hijos, tenga 4 niños y 2 niñas. R. 0,234375

9.- En 320 matrimonios con 4 hijos cada uno, ¿cuántos esperarían tener?

a) ninguna niña R. 20 b) 3 niños R. 80

c) 4 niños R. 20

10.- Un equipo X tiene 2/3 de probabilidad de victoria cuando juega. Si X juega 5 partidos, calcule la probabilidad de:

a) X gana exactamente 3 partidos R. 80/243

b) X gana por lo menos un partido R. 242/243

c) X gana más de la mitad de los partidos R. 64/81

11.- Un estudiante coge un examen de múltiples alternativas el cual contiene 8 preguntas, cada uno con 3 respuestas alternativas. Suponga que él responde adivinando cada pregunta. Entonces la probabilidad que él responda una respuesta correcta es 1/3 para cada pregunta. ¿Cuál es la probabilidad de que él no acierte ninguna de ellas? R. 0,039

12.- En una prueba del tipo verdadero-falso, con 100 preguntas, ¿cuál es la probabilidad de que un alumno, que responde al azar las preguntas, acierte 70% de ellas? R. $\binom{100}{70}(0,5)^{100}$

13.- Un estudiante que no se ha preparado absolutamente nada para un examen, el cual contiene 20 preguntas de verdadero-falso, decide lanzar al aire una moneda para responder. Anota verdadero si la moneda cae cara y falso si cae sello.

a) ¿Qué probabilidad hay de que apruebe el examen si para hacerlo debe contestar correctamente el 70% de las preguntas? R. 0,0577

b) ¿Qué probabilidad hay de que conteste por lo menos la mitad de las preguntas correctamente? R. 0,5881

14.- Si 5% de las lámparas de cierta marca son defectuosas, halle la probabilidad de que, en una muestra aleatoria de 100 lámparas, escogidas al azar, se tenga:

a) ninguna defectuosa R. $(0,95)^{100}$

b) 3 defectuosas

15.- Los registros de mantenimiento revelan que solamente 1 de cada 100 máquinas de escribir de cierta marca requiere de una reparación mayor durante el primer año de uso. El gerente de una oficina ordenó la compra de 10 máquinas de esta marca.

a) Encuentre la probabilidad de que ninguna de las máquinas requiera una reparación mayor durante el primer año de uso. R. 0,904

b) Encuentre la probabilidad de que dos máquinas requieran una reparación mayor durante el primer año. R. 0,004

16.- Suponga que las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ forman n ensayos de Bernoulli con parámetro p. Determine la probabilidad condicional de $X_1 = 1$ dado que $\sum_{i=1}^{n} X_i = k \ (k = 1; \ldots; n)$ R. $\frac{k}{n}$

17.- El reporte anual es uno de los documentos más importantes producidos por las empresas de propiedad pública y su producción representa un gasto de importancia considerable. Sin embargo, un estudio reciente revela que 40% de los accionistas dedican 5 minutos o menos a la lectura del reporte anual de su compañía. Suponga que se eligen al azar 100 accionistas de empresas de propiedad pública.

a) Encuentre el valor esperado del número de accionistas, que dedican 5 o más minutos a la lectura del reporte anual de su compañía. R. 40

b) Si se observa que 25 de los 100 accionistas seleccionados dedican no más de 5 minutos a la lectura del reporte anual, ¿sería razonable pensar que la proporción de accionistas que dedican 5 minutos o menos a la lectura del reporte anual es 40%? Explique R. No.

18.- Un cierto tratamiento es capaz de inmunizar 78% de los conejos contra una determinada enfermedad. Una nueva muestra de 50 conejos es probado. Sea X el número de animales que se tornaron inmunes, ¿cuál es la esperanza y la desviación estándar de X? R. 39 ; 2,9292

19.- Un agente de seguros vende pólizas a cinco individuos, todos de la misma edad. De acuerdo a las tablas actuales, la probabilidad de que un individuo con esa edad viva 30 años o más es de 3/5. Determine la probabilidad de que, dentro de 30 años, vivan:

a) los 5 individuos R. 0,07776

b) sólo 2 R. 0,2304

c) al menos 1 R. 0,01024

8.4 DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL

Un experimento binomial se convierte en experimento multinomial cuando en cada prueba se consideran más de dos resultados posibles. Por ejemplo, los tornillos fabricados por una determinada fábrica se pueden clasificar de acuerdo a la medida de su diámetro como de 1/8 pulgada, 1/4 pulgada, 3/8 pulgada, 1/2 pulgada, etc. En general, si una prueba genera k resultados $E_1, E_2, \dots, E_k$ mutuamente excluyentes con probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_k$, tal que

$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$, entonces la distribución multinomial proporciona la probabilidad de que E_1 ocurra x_1 veces, E_2 ocurra x_2 veces, ..., E_k ocurra x_k veces en n ensayos independientes, donde $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$.
La variable k-dimensional $\underline{X} = (X_1; \dots; X_k)$ se denomina variable multinomial.

Definición 6.- Se dice que la v.a. $\underline{X} = (X_1; \dots; X_k)$, donde $X_1, \dots, X_k$ corresponde al número de ocurrencias de los k resultados $E_1, \dots, E_k$ con probabilidades $p_1, \dots, p_k$, en n ensayos independientes, tiene distribución multinomial con parámetros $n, p_1, \dots, p_k$; si su función de probabilidad es dado por

$$p(x_1; \dots; x_k) = P[X_1 = x_1; \dots; X_k = x_k] = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\dots x_n}\, p_1^{x_1} . p_2^{x_2} \dots . p_k^{x_k}$$

con $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ y $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Ejemplo 10.- Un mecánico mantiene un gran número de tornillos en un depósito. El 50% de esos tornillos son de 1/4 de pulgada de diámetro, el 30% son de 1/8 de pulgada de diámetro y el 20% restante de 3/8 de pulgada de diámetro. Se supone que se eligen 10 tornillos. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 5 tornillos de 1/4 de pulgada, 4 de 1/8 de pulgada y una de 3/8 de pulgada?

Solución. Sean los eventos

E_1: número de tornillos elegidos de 1/4 de pulgada
E_2: número de tornillos elegidos de 1/8 de pulgada
E_3: número de tornillos elegidos de 3/8 de pulgada

Luego, $n = 10$, $p_1 = 0{,}50$, $p_2 = 0{,}30$, $p_3 = 0{,}20$

También, se tiene $X_1 = 5$; $X_2 = 4$, $X_3 = 1$ y $\sum_{i=1}^{3} X_i = 10$

Por tanto,

$$P[X_1 = 5\,;\, X_2 = 4\,;\, X_3 = 1] = \frac{10!}{5!\,4!\,1!}(0{,}50)^5(0{,}30)^4(0{,}20) = 0{,}06379$$

Observación 3.- Si $\underline{X} = (X_1; \dots; X_k)$ es una v.a. con distribución multinomial con parámetros n y $p = (p_1; \dots; p_k)$, entonces la distribución marginal de cada componente X_i es una binomial con parámetros n y p_i. Luego, se tiene

$$E[X_i] = np_i \ , \ Var[X_i] = np_i(1 - p_i), \qquad i = 1; 2; \dots; k$$

EJERCICIOS

1.- Se lanza un dado 8 veces. Calcule la probabilidad de que aparezcan dos números 2, dos números 5, y los demás números una sola vez. R. 0,006

2.- Las calculadoras producidas por una fábrica son 60% verdes, 30% azules y 10% amarillas. En 5 calculadoras, encuentre la probabilidad de que 2 sean verdes, 1 azul y 2 amarillas. R. 0,0324

3.- La sangre humana fue clasificada en 4 tipos: A, O, B y AB. En una cierta población las probabilidades de estos tipos son respectivamente: 0,40; 0,45; 0,10 y 0,05. ¿Cuál es la probabilidad de que en 5 individuos escogidos al azar haya:
a) dos del tipo A y uno de cada uno de los otros tipos? R. 0,0216
b) tres del tipo A y 2 del tipo O? R. 0,1298

4.- Supongamos que se lanzan 3 monedas (independientemente) n veces y definimos las variables aleatorias:
X_j: número de veces que j caras aparecen, $j = 1; 2; 3$
Determine la función de probabilidad de $\underline{X} = (X_1; X_2; X_3)$

6.- Una agencia de publicidad ha determinado que, en una encuesta televisada, la probabilidad de que una persona vote por 3 candidatos A, B y C es respectivamente 0,1; 0,4 y 0,5.
Al realizar la encuesta a 10 personas, se pide:
a) La probabilidad de que el candidato B no obtenga ningún voto y A y C igual número de votos.
b) La probabilidad de que A obtenga 5 votos.

8.5 DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Este modelo se utiliza cuando consideramos extracciones de una población que está dividida en dos características, y estas extracciones son hechas sin reposición. Para ilustrar, consideremos una población de N elementos, donde r de los cuales tienen característica A y $N-r$ tienen característica B. Un grupo de n elementos es seleccionado aleatoriamente de esta población, sin reemplazamiento, y sea X la v.a. de interés que denota el número de elementos del grupo que tienen la característica A. La distribución de esta v.a. se conoce como la distribución de probabilidad hipergeométrica y se define como sigue

Definición 7.- Se dice que una v.a. X que denota el número de elementos que poseen la característica A en una muestra aleatoria de tamaño n seleccionado de una población de N elementos de los cuales r tienen característica A y $N-r$ característica B, tiene distribución hipergeométrica si su función de probabilidad es dado por

$$p(x) = P[X = x] = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

donde $\text{máx}\{0; n - N + r\} \leq x \leq \text{mín}\{r; n\}$

La notación que se utiliza es $X \sim H(N; n; r)$.

Teorema 4.- Si X es una v.a. con distribución hipergeométrica $H(N; n; r)$, entonces

i) $E[X] = n.\frac{r}{N}$ ii) $Var[X] = n.\frac{r}{N}.\frac{N-r}{N}.\frac{N-n}{N-1}$.

Demostración. Ejercicio para el lector.

Ejemplo 11.- Un comprador de componentes eléctricos compra ellos en lotes de tamaño 10. Es su política inspeccionar 3 componentes aleatoriamente elegidos del lote y aceptar el lote solamente si los 3 componentes son no defectuosos. Si 30% de lotes tienen 4 componentes defectuosos y 70% tienen solamente uno, ¿qué proporción de lotes rechaza el comprador?

Solución.

Sea el evento A: el comprador acepta el lote. Entonces,

$$p = P[A] = P[\text{lote tiene 4 defectuosos}]P[A/\text{ lote tiene 4 defectuosos}] +$$

$$+P[\text{lote tiene 1 defectuoso}]P[A\ /\text{lote tiene 1 defectuoso}]$$

$$p = \frac{3}{10}P[A/\text{ lote tiene 4 defectuosos}] + \frac{7}{10}P[A\ /\text{lote tiene 1 defectuoso}]$$

$$= \frac{3}{10}.\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{7}{10}.\frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} = 0{,}54$$

Por tanto, el 46% de lotes son rechazados por el comprador.

Ejemplo 12.- Un determinado producto industrial es embarcado en lotes de 20 unidades. Para la Industria es demasiado costoso llevar una inspección al 100% de su producción para determinar los ítems defectuosos. Un plan de muestreo diseñado para minimizar el número de embarques defectuosos hacia los clientes, consiste en tomar una muestra aleatoria de 5 ítems de cada lote y rechazar el lote si se encuentra más de un defectuoso. Si un lote contiene 4 defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea rechazado?

Solución.

Sea X la v.a. que denota al número de ítems defectuosos en la muestra. Entonces $N = 20$, $n = 5$, $r = 4$. Luego, se tiene

$$p = P[\text{rechazar el lote}] = P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2]$$

$$= 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} - \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{4}}{\binom{20}{5}}$$

$$= 1 - 0{,}2817 - 0{,}4696 = 0{,}2487$$

EJERCICIOS

1.- Suponga que una urna contiene 5 bolas rojas y 10 bolas azules. Si 7 bolas son seleccionadas al azar sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad que al menos 3 bolas rojas sean obtenidas?

2.- Suponga que 7 bolas son seleccionadas al azar sin reemplazamiento de una caja que contiene 5 bolas negras y 10 azules. Si X denota la proporción de bolas negras en la muestra, ¿cuál es la media y la varianza de X?

$R.\ E[X] = \frac{1}{3}$ $Var[X] = \frac{8}{441}$

3.- si X es una v.a. con distribución hipergeométrica con parámetros $N = 28$, $r = 8$ y n, ¿para qué valor de n es $Var[X]$ máximo?

4.- Suponga que n estudiantes son seleccionados al azar sin reemplazamiento de una clase que contiene T estudiantes, de los culaes A son hombres y $T - A$ son mujeres. Si X denota al número de hombres que son seleccionados ¿Para qué valor de n es $Var[X]$ máximo?

R. $\frac{T-1}{2}$ ó $\frac{T+1}{2}$ si T es impar y $\frac{T}{2}$ si T es par.

5.- Suponga que en un lote grande que contiene T ítems manufacturados, 30% de los ítems son defectuosos y 70% no defectuosos. También, suponga que 10 ítems son seleccionados al azar sin reemplazamiento del lote. Determine una expresión exacta para la probabilidad de que a lo más se ha obtenido un ítem defectuoso.

$$R.\ \frac{\binom{0,7T}{10} + 0,3T\binom{0,7T}{9}}{\binom{T}{10}}$$

6.- La mesa directiva de una escuela pública está compuesta por 5 miembros de la comunidad, dos de los cuales son doctores en Matemática. El alcalde pretende elegir a dos miembros de la mesa para formar un subcomité que se entrevistará con los profesores para tratar un asunto de importancia.

a) Sea X el número de doctores en Matemática en la muestra de $n = 2$. Explique por qué X tiene distribución hipergeométrica. Dé la fórmula para la función de probabilidad

$$R.\ p(x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{3}{2-x}}{\binom{5}{2}}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el subcomité esté compuesta de por lo menos un doctor en Matemática? R. 0,70

7.- Un determinado antibiótico se envía a las farmacias en cajas de 24 botellas. El farmacéutico sospecha que la cantidad de antibiótico en algunos frascos es deficiente y decide analizar el contenido de 5 frascos. Suponga que 10 de las 24 botellas tienen cantidad deficiente de antibiótico.

a) Encuentre la probabilidad de que ninguno de los frascos analizados tenga una cantidad deficiente de antibióticos. R. 0,047

b) Encuentre la probabilidad de que exactamente un frasco analizado tenga una cantidad deficiente de antibióticos. R. 0,2355

8.6 DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Definición 8.- Se dice que una v.a. X tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0 (X \sim P(\lambda))$, si su función de probabilidad es dado por

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & si\ x = 0; 1; 2; \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es claro que $p(x) \geq 0$ para cada valor de x. A fin de verificar que la función $p(x)$ satisface los requerimientos de toda función de probabilidad, se debe probar que $\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$

Se sabe por cálculo diferencial elemental que, para cualquier número λ, se tiene

$$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Por tanto,

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}.e^{\lambda} = e^0 = 1$$

Observación 4.- La distribución de Poisson es generalmente utilizada en los problemas en que se cuentan el número de eventos de cierto tipo, que ocurren en un intervalo de tiempo, o en una región, o en un volumen. Por lo expuesto, esta distribución es llamada distribución de "eventos raros", tales como:

a) número de llamadas telefónicas recibidas por la central telefónica durante un intervalo pequeño de tiempo.

b) número de fallas de un computador en un día de operación.

c) número de relatos de accidentes enviados a una compañía de seguros en una semana.

d) número de clientes que entran a una oficina postal en un día determinado.

Teorema 5.- Si X es una v.a. con distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$, entonces

a) $E[X] = \lambda$ b) $Var[X] = \lambda$

c) $M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Demostración. Se tiene

a) $E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{xe^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda}.e^{\lambda} = \lambda$$

b) $E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1).\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}.\lambda^2.\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$

$$= \lambda^2.e^{-\lambda}.e^{\lambda} = \lambda^2$$

Luego, $E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = E[X^2] - \lambda$

Por tanto,

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

c) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tX}e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$

$$= e^{-\lambda}.e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Teorema 6.- Si las variables aleatorias $X_1, \dots, X_k$ son independientes y si X_i tiene distribución de Poisson con parámetro λ_i $(i = 1; 2; \dots; k)$, entonces la suma $T = X_1 + \dots + X_k$ tiene distribución de Posisson con parámetro $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$

Demostración.

Sea $M_{X_i}(t) = E[e^{tX_i}] = e^{\lambda_i(e^t-1)}$, la función generatriz de momentos de X_i, para $i = 1; 2; \dots; k$. Como $X_1, \dots, X_k$ son v.a. independientes, entonces

$$M_T(t) = E\left[e^{t(X_1+\dots+X_k)}\right] = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_k)(e^t-1)}$$

Por tanto,

$$T \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$$

Teorema 7.- Sea X una v.a. con distribución binomial con parámetros n y p. $(X \sim b(n; p))$. Si $n \to +\infty, p \to 0$ y $\lambda = np$ permanece constante, entonces

$$p(x) = P[X = x] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \xrightarrow{(aproxima)} P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Esto es, cuando n es grande $(n > 50)$ y p es pequeño $(p < 0{,}1)$ y $\lambda = np$ fijo, la distribución binomial se aproxima a una distribución de poisson.

Demostración. Se tiene

$$p(x) = P[X = x] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Al sustituir $p = \frac{\lambda}{n}$, se obtiene

$$p(x) = P[X = x] = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}.\frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n .\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

Luego,

$$\lim_{n\to+\infty} p(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^x}{x!}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n .\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} .\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right)$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n . \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right)$$

Dado que,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right) = 1$$

y por definición del número e, se tiene

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left\{\left[1 + \frac{1}{\left(-\frac{n}{\lambda}\right)}\right]^{-\frac{n}{\lambda}}\right\}^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}.e^{-\lambda}.1 = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0; 1; 2; \dots$$

Ejemplo 13.- Suponga que el número de errores tipográficos en una página de un libro tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 1/2$. Halle la probabilidad de que hay por lo menos un error en esta página.

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de errores en la página, entonces se tiene

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{e^{-1/2}(\frac{1}{2})^0}{0!} = 1 - e^{-1/2} = 0{,}3935$$

Ejemplo 14.- Suponga que un sistema aleatorio de patrullaje policial es proyectado de modo que el patrullero pueda visitar una calle dada de su jurisdicción $Y = 0; 1; 2; 3; \ldots$, veces en un periodo de 1/2 hora y que el sistema es convenido para que el patrullero visite cada calle en un promedio de una vez por un periodo de tiempo determinado. Suponga que Y tiene distribución aproximadamente Poisson.

a) Calcule la probabilidad de que el patrullero deja de pasar por una calle dada durante un periodo de 1/2 hora.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el patrullero visite una calle determinada al menos una vez?

Solución.

Para este ejemplo, el periodo de tiempo es 1/2 hora y el promedio de visitas en un intervalo de 1/2 hora es $\lambda = 1$. Entonces,

$$p(y) = P[Y = y] = \frac{e^{-1}}{y!}, \quad y = 0; 1; 2; \ldots$$

a) El evento de que el patrullero deja de pasar por una calle determinada en un periodo de 1/2 hora corresponde a $Y = 0$. Luego,

$$P[Y = 0] = \frac{e^{-1}}{0!} = e^{-1} = 0{,}3679$$

b) $P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] = 1 - e^{-1} = 0{,}6321$

Ejemplo 15.- Suponga que en una población grande, la proporción de personas que tienen una cierta enfermedad es 0,01. Determine la probabilidad de que en un grupo aleatorio de 400 personas, al menos 3 personas tienen la enfermedad.

Solución.

En este ejemplo, la distribución exacta del número de personas que tienen la enfermedad en el grupo aleatorio de 400 personas es binomial con parámetros $n = 400$ y $p = 0{,}01$. Luego, esta distribución puede ser aproximada a una distribución de Poisson, para el cual la media es $\lambda = np = 4$, pues satisface las condiciones del teorema 7.

Sea X la v.a. que tiene distribución con parámetro $\lambda = 4$, entonces

$$p(x) = P[X = x] = \frac{e^{-4}4^x}{x!}, x = 0; 1; 2; \ldots$$

Por tanto,

$$P[X \geq 3] = 1 - P[X < 3] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2]$$

$$= 1 - e^{-4} - 4e^{-4} - 8e^{-4} = 0{,}761892$$

Ejemplo 16.- Una compañía de seguros determina que el 0,004% de la población fallece cada año de un cierto tipo de accidente. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía tenga que pagar más de 2 de los 10 000 asegurados contra tales accidentes en un año dado?

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de personas que fallecen cada año de un cierto tipo de accidente de los 10 000. Luego, $X \sim b(10\,000;\ 0{,}00004)$

Como n es muy grande y p pequeño, se aproxima a una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np = 0{,}4$, esto es

$$p(x) = P[X = x] = \frac{e^{-0.4}(0{,}4)^x}{x!}, \quad x = 0; 1; 2; \ldots$$

Por tanto,

$$P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2]$$

$$= 1 - e^{-0.4} - 0{,}4e^{-0.4} - 0{,}08e^{-0.4} = 0{,}00793$$

Ejemplo 17.- El número medio de automóviles que llegan a una estación de suministro de gasolina es de 240 por hora. Si dicha estación puede atender a un máximo de 8 automóviles por minuto, determine la probabilidad de que, en un minuto dado, lleguen a la estación más automóviles de los que puede atender.

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de automóviles que llegan a la estación de servicio en un minuto dado.

El número medio de automóviles que llegan a la estación de suministro en un minuto es

$$\lambda = \frac{240}{60} = 4, \text{ entonces } X \sim P(4), \text{ esto es}$$

$$p(x) = P[X = x] = \frac{e^{-4}4^x}{x!}, x = 0; 1; 2; \ldots$$

Luego,

$$P[X > 8] = 1 - P[X \leq 8] = 1 - \left[e^{-4} + 4e^{-4} + \cdots + \frac{e^{-4}4^8}{8!}\right]$$

$$= 0{,}021344$$

Ejemplo 18.- En una determinada región de la selva se pretende introducir un nuevo producto del que es razonable esperar sea demandado por el 0,5% de los habitantes de dicha zona. Determine la probabilidad de que, consultados 2 000 de estos habitantes, dicho producto sea demandado por 2 o más personas.

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de individuos consultados que demanden el producto, entonces $X \sim b(2\,000;\ 0{,}005$. Al aproximar a una distribución Poisson con parámetro $\lambda = np = 10$, se obtiene

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1]$$
$$= 1 - e^{-10} - 10e^{-10} = 0{,}9995$$

EJERCICIOS

1.- Cierta oficina de bomberos recibe en promedio 3 llamadas por día. Calcule la probabilidad de que:

a) Reciba 4 llamadas en un día R. 0,168

b) Reciba 3 o más llamadas en un día R. 0,5767

2.- Suponga que el número de pernos defectuosos producidos por un cierto proceso tiene distribución Poisson con media 0,4. Si una muestra aleatoria de 5 pernos es inspeccionado, ¿cuál es la probabilidad de que todos los pernos sean defectuosos?

3.- El promedio de llamadas telefónicas en una hora es 3. ¿Cuál es la probabilidad de:

a) recibir exactamente 3 llamadas en una hora? R. 0,2241

b) recibir 4 o más llamadas en 90 minutos? R. 0,658

4.- Suponga que un libro de n páginas contiene, en promedio λ errores de impresión por página. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos m páginas contienen más de k errores de impresión?

5.- Suponga que hay en promedio 2 suicidios por año en una población de 50 000 habitantes. En una ciudad de 100 000 habitantes, encuentre la probabilidad de que en un año dado haya

a) un suicidio R. 0,0732 b) 2 o más suicidios R. 0,9085

6.- Suponga que, en promedio, una cierta tienda atiende a 15 clientes por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que la tienda atienda más de 20 clientes en un periodo de 2 horas?

$$R. \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-30}30^x}{x!}$$

7.- Suponga que hay 400 errores en la impresión distribuidos aleatoriamente en un libro de 500 páginas. Encuentre la probabilidad de que una página dada:

a) No hay ningún error R. 0,449 b) Hay exactamente 2 errores

8.- Suponga que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes, tal que $X_i \sim P(\lambda_i), i = 1; 2$. Para cualquier valor fijo k $(k = 1; 2; \ldots)$, determine la distribución condicional de X_1 dado que $X_1 + X_2 = k$.

9.- Suponga que el número total de ítems producido por una cierta máquina tiene distribución de Poisson con media λ ; todos los ítems son producidos independientemente uno del otro, y que la probabilidad de que un ítem dado cualquiera producido por la máquina sea defectuoso es p. Determine la distribución marginal del número de ítems defectuosos producidos por la máquina? R. Distribución Poisson con media $p\lambda$.

10.- Por parte de una compañía de seguros se sabe que el 0,603% de los individuos de una población fallecen cada año de un determinado tipo de accidente. Determine:

a) La probabilidad de que la compañía tenga que pagar a más de 3 de los 10 000 asegurados contra tal tipo de accidente en un año determinado. R. 0,0004

b) el número de accidentes esperados R. 0,3

11.- Si una v.a. X tiene distribución discreta con función de probabilidad $p(x)$, entonces el valor de x para el cual $p(x)$ es máximo se llama moda de la distribución. Si este mismo valor máximo es alcanzado en más de un valor de x, entonces todos aquellos valores de x son llamados modas de la distribución. Determine la moda de la distribución de Poisson con media λ.

R. Si λ no es un entero, la moda es el mayor entero de λ

Si λ es un entero, las modas son λ y $\lambda - 1$

12.- La probabilidad de trillizos en nacimientos humanos es aproximadamente 0,01. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un conjunto de trillizos en 700 nacimientos en un hospital grande? R. 0,3476

13.- Se estima que una máquina produce 150 piezas defectuosas al mes (mes de 30 días). Se pide:

a) Probabilidad de que en un día determinado produzca 3 piezas defectuosas. R. 0,14039

b) Número máximo de piezas defectuosas en un día, con una certeza aproximada del 90% R. 7 piezas.

8.7 DISTRIBUCION BINOMIAL NEGATIVA Y GEOMÉTRICA

Definición 9.- (Distribución binomial negativa) Se dice que una v.a. X que denota el número de fracasos que ocurren en una sucesión infinita de ensayos de Bernoulli con parámetró p, antes que exactamente r éxitos sean obtenidos tiene distribución binomial negativa con parámetros r y p si su función de probabilidad es dado por

$$P(x) = P[X = x] = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x} p^r q^x, & x = 0; 1; 2; \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde sus parámetros r y p satisfacen: $r = 1; 2; 3; \ldots$ y $0 < p < 1$ $(q = 1 - p)$

Definición 10.- (Distribución geométrica) Una distribución binomial negativa con parámetros $r = 1$ y p se denomina distribución geométrica, esto es, se dice que una v.a. X tiene distribución geométrica con parámetro $(0 < p < 1)$, si su función de probabilidad es dado por

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} pq^x, & x = 0; 1; 2; \ldots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $q = 1 - p$

Teorema 8.- Si $X_1, \ldots, X_r$ son v.a. independientes idénticamente distribuidas y si cada X_i tiene distribución geométrica con parámetro p, entonces la suma $T = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ tiene distribución binomial negativa con parámetro r y p.

Demostración. (Ejercicio para el lector)

Teorema 9.- Si X es una v.a. con distribución geométrica con parámetro p, entonces

a) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \dfrac{p}{1 - qe^t}$ b) $E[X] = \dfrac{q}{p}$, $Var[X] = \dfrac{q}{p^2}$

Demostración.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} pq^x = p \sum_{x=0}^{\infty} (qe^t)^x$$

Esta serie geométrica converge si $0 < qe^t < 1$, esto es, $t < \ln(1/q)$. Entonces para todo $t < \ln 1/q$, la serie geométrica $\sum_{x=0}^{\infty} (qe^t)^x$ converge al punto $\frac{1}{1-qe^t}$. Por tanto, $\forall t < \ln(1/q)$, se tiene

$$M_X(t) = p \sum_{x=0}^{\infty} (qe^t)^x = \frac{p}{1 - qe^t}$$

b) Al derivar la función generatriz de momentos, se obtiene

$$M'_X(t) = \frac{pqe^t}{(1 - qe^t)^2}, \quad M''_X(t) = \frac{pq(e^t + qe^{2t})}{(1 - qe^t)^3}$$

Luego,

$$E[X] = M'_X(0) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = M''_X(0) - \frac{q^2}{p^2} = \frac{pq(1+q)}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Teorema 10.- Si X es una v.a. con distribución binomial negativa con parámetros r y p, entonces

a) $M_X(t) = \left(\dfrac{p}{1 - qe^t}\right)^r$, para $t < \ln(1/q)$

b) $E[X] = \dfrac{rq}{p}$ y $Var[X] = \dfrac{rq}{p^2}$

Demostración.

a) Sean $X_1, \ldots, X_r$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con la distribución geométrica p, entonces por el teorema 8, $T = X_1 + \cdots + X_r$ tiene distribución binomial negativa con parámetros r y p. Luego,

$$M_T(t) = E\left[e^{t(X_1 + \cdots + X_r)}\right] = \prod_{i=1}^{r} E[e^{tX_i}]$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{p}{1 - qe^t} = \left(\frac{p}{1 - qe^t}\right)^r$$

Por tanto, T tiene distribución binomial negativa con parámetros r y p.

b) Al derivar la función generatriz de momentos, se tiene

$$M'_X(t) = \frac{rp^r qe^t}{(1 - qe^t)^{r+1}}, \quad M''_X(t) = \frac{rp^r q(e^t + rqe^{2t})}{(1 - qe^t)^{r+2}}$$

Por tanto,

$$E[X] = M'_X(0) = \frac{rp^r q}{(1-q)^{r+1}} = \frac{rq}{p}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = M''_X(0) - \frac{r^2q^2}{p^2} = \frac{rq}{p^2}$$

Observación 5.- Si X es una v.a. con distribución geométrica con parámetro p, entonces para cualquier entero no negativo k y t, se tiene

$$P[X \leq k + t / X \geq k] = P[X = t]$$

Ejemplo 19.- Un matemático fumador de pipas lleva consigo, todas las veces, dos cajas de fósforos, uno en su bolsillo izquierdo y uno en su bolsillo derecho. Cada vez que él requiere de un fósforo la toma con igual probabilidad de uno de sus bolsillos. Considere el momento cuando el matemático descubre primero que una de sus cajas de fósforo está vacía. Si se supone que cada caja de fósforo contiene inicialmente N fósforos, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente k fósforos en la otra caja, $k = 0; 1; \ldots; N$?

Solución.

Sea el evento E: el matemático descubre primero que la caja de fósforos del bolsillo derecho está vacío y que hay exactamente k fósforos en la caja del bolsillo izquierdo. Este evento ocurre si y sólo si la selección $N + 1$ de la caja del bolsillo derecho es hecho en el ensayo $N + 1 + N - k$. Luego, el experimento es un experimento binomial negativa con $p = 1/2$, $r = N + 1$, $x = N - k$. Entonces,

$$P[E] = P[X = N - k] = \binom{n + 1 + (N - k) - 1}{N - k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}$$

$$= \binom{2N - k}{N - k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1}$$

Como hay igual probabilidad de que el matemático descubra primero que la caja del bolsillo izquierdo esté vacío y que hay exactamente k fósforos en la caja del bolsillo derecho, entonces la probabilidad requerida es

$$p = 2P[E] = \binom{2N - k}{N - k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$$

Ejemplo 20.- Una urna contiene N bolas blancas y M negras. Las bolas son aleatoriamente seleccionadas de la urna, una en cada extracción, hasta obtener una bola negra. Si se supone que cada bola seleccionada es regresada a la urna antes de la siguiente extracción, ¿cuál es la probabilidad de que?:

a) exactamente N extracciones son necesarias

b) por lo menos k extracciones son necesarias

Solución.

Sea X la v.a. que denota al número de extracciones necesarias antes de obtener la bola negra, entonces X tiene distribución geométrica con parámetro

$$p = \frac{M}{N + M} \text{ y } q = 1 - p = \frac{N}{N + M}$$

Luego,

a) $P[X = n - 1] = pq^{n-1} = \dfrac{M}{N + M}\left(\dfrac{N}{N + M}\right)^{n-1} = \dfrac{MN^{n-1}}{(N + M)^n}$

b) $P[X \geq k - 1] = \displaystyle\sum_{x=k-1}^{\infty} pq^x = \sum_{x=k-1}^{\infty} \frac{M}{N + M}\left(\frac{N}{N + M}\right)^x$

$$= \frac{M}{N + M}\sum_{x=k-1}^{\infty}\left(\frac{N}{N + M}\right)^x \quad \left(\text{serie geométrica de razón } \frac{N}{N + M}\right)$$

$$= \frac{M}{N + M} \cdot \frac{\left(\frac{N}{N + M}\right)^{k-1}}{1 - \frac{N}{N + M}} = \left(\frac{N}{N + M}\right)^{k-1}$$

Ejemplo 21.- Para obtener el permiso de conducir se realiza un examen con 20 preguntas. Se sabe que una determinada persona tiene una probabilidad de 0,7 de contestar bien cada pregunta.

a) Halle la probabilidad de que la primera pregunta que contesta bien sea la tercera pregunta que hace.

b) Para aprobar el examen es necesario contestar en forma correcta 12 preguntas. ¿cuál es la probabilidad de que apruebe al contestar la quinceava pregunta?

Solución.

a) Sea X la v.a. que denota el número de preguntas que contesta mal antes de responder una correcta. Entonces X tiene distribución geométrica con parámetro $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Luego,

$$P[X = 2] = pq^2 = (0{,}7)(0{,}3)^2 = 0{,}063$$

b) Sea X la v.a. que denota el número de preguntas que contesta mal antes de que conteste r buenas, entonces X tiene distribución binomial negativa con parámetro $r = 12$, $p = 0{,}7$ y $q = 0{,}3$. Luego,

$$P[X = x] = \binom{r + x - 1}{x} p^r q^x$$

La probabilidad de que apruebe al contestar la quinceava pregunta es igual a la probabilidad de que conteste 3 malas y 12 buenas, esto es

$$P[X = 3] = \binom{12 + 3 - 1}{3}(0{,}7)^{12}(0{,}3)^3 = \binom{14}{3}(0{,}7)^{12}(0{,}3)^3$$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1.- Una bola es seleccionada de una urna que contiene 3 bolas blancas y 3 negras. Después que la primera es seleccionada, es devuelta a la urna y en seguida se selecciona otra bola y así sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que las 4 primeras bolas seleccionadas, exactamente 2 son blancas? R. 3/8

2.- La razón de suicidios en Chile es 1 suicidio por 100 000 habitantes por mes.

a) Encuentre la probabilidad de que en una ciudad de 400 000 habitantes dentro de Chile, hay 8 o más suicidios en un mes dado.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya por lo menos 2 meses durante el año en que hay 8 o más suicidios?

3.- Una moneda correcta es lanzada sucesivamente hasta que aparezca cara por décima vez. Sea X la v.a. que denota al número de sellos que ocurren. Halle la función de probabilidad de X.

4.- Una urna contiene 4 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona aleatoriamente 4 bolas. Si 2 de ellas son blancas y 2 negras, ya no se selecciona. Si no es así, se repone las bolas en la urna y nuevamente se selecciona al azar 4 bolas. Esto se continua hasta que exactamente 2 de las 4 bolas elegidas sean blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que se tome exactamente n selecciones?

$$R.\ \frac{18(17)^{n-1}}{(35)^n}$$

5.- Un comprador de transistores compra ellos en lotes de 20. Es su política inspeccionar 4 componentes del lote aleatoriamente y aceptar el lote solamente si los 4 no son defectuosos. Si cada componente en un lote es, independientemente defectuoso con probabilidad 0,1, ¿qué proporción de lotes es rechazado? R. 0,3439

6.- En un cierto tipo de fabricación de cinta magnética, ocurren cortes a una razón de 1 por 2 000 pies. ¿Cuál es la probabilidad de que un rollo con 2 000 pies de cinta magnética tenga

a) ningún corte? B) a lo más 2 cortes? C) por lo menos 2 cortes?

7.- El número de petroleros que llegan a una refinería en cada día ocurre según una distribución de Poisson, con $\lambda = 2$. Las actuales instalaciones pueden atender, a lo más, a 3 petroleros por día. Si más de 3 llegan en un día, el exceso es enviado a otro puerto.

a) En un día, ¿cuál es la probabilidad de enviar petroleros a otro puerto? R. 0,1429

b) ¿En cuánto debería ser aumentada las instalaciones para que pueda atender a todos los navíos que llegan por lo menos en 95% de los días? R. 2

c) ¿Cuál es el número promedio de petroleros que llegan por día?

8.- Determinado tipo de tornillos es vendido en cajas de 1 000 piezas. Es una característica de la fábrica producir 10% de defectuosos. Normalmente, cada caja es vendida en S/. 13,50. Un comprador hace la siguiente propuesta: De cada caja él escoge una muestra de 20 piezas, si la caja tuviera:

- 0 defectuosos, él paga S/. 20
- 1 ó 2 defectuosos, él paga S/. 10
- 3 o más defectuosos, él paga S/. 8

¿Qué alternativa es más ventajosa para el fabricante?

9.- a) Si X es una v.a. con distribución de Poisson que satisface $P[X=1] = P[X=2]$, halle $E[X]$ R. $\lambda = 2$

b) Si $E[X] = 10$ y $Var[X] = 9$, ¿puede X tener distribución binomial negativa?

c) Si X tiene distribución binomial con parámetros n y p, ¿cuál es la distribución de $Y = n - X$? R. $Y \sim b(n;\ q)$

d) Dos dados son lanzados n veces. Si la v.a. X denota el número de lanzamientos en la cual el número del primer dado excede al número del segundo dado. ¿Cuál es la distribución de X? R. $X \sim b(n;\ 15/36)$

10.- En una ciudad con 5 000 adultos, a una muestra de 100 se les solicita su opinión acerca de la propuesta de un proyecto municipal; 60 apoyan el proyecto y 40 son opuestos. Si en realidad, los adultos de la ciudad están igualmente divididos sobre la propuesta, ¿cuál es la probabilidad de obtener una mayoría de 60 o más favorables en una muestra de 100?

$$R.\ \sum_{j=60}^{100} \frac{\binom{2\,500}{j}\binom{2\,500}{100-j}}{\binom{5\,000}{100}}$$

11.- Suponga que una sucesión de lanzamientos independientes es hecho con una moneda cuya probabilidad de obtener cara en cualquier de estos lanzamientos es 1/30.

a) ¿Cuál es la esperanza del número de sellos que pueden ser obtenidos antes de que se obtenga 5 caras?

b) ¿Cuál es la varianza del número de sellos que pueden ser obtenidos antes de que se obtengan 5 caras?

12.- Sean $X_1, \ldots, X_k$ variables aleatorias independientes y que cada X_i tiene distribución binomial negativa con parámetros r_i y p $(i = 1; \ldots; k)$.
Pruebe que la suma $T = X_1 + \cdots + X_k$ tiene distribución binomial negativa con parámetros $r = r_1 + \cdots + r_k$ y p.

13.- Suponga que un sistema electrónico contiene n componentes las cuales funcionan independientemente uno del otro, y suponga que estas componentes son conectadas en serie (se dice que las componentes son conectadas en serie $\Leftrightarrow$ el sistema funciona correctamente cuando sus n componentes funcionan correctamente). Suponga también que cada componente funciona correctamente en un cierto número de periodos y luego se malogra. Finalmente, suponga que para $i = 1; \ldots; n$, el número de periodos para el cual la i-ésima componente funciona correctamente es una v.a. discreta con distribución geométrica de parámetro p_i. Determine la distribución del número de periodos para el cual el sistema funciona correctamente.

R. Distribución geométrica con parámetro $p = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i$

14.- Sea X una v.a. con distribución binomial negativa con parámetros r y p, y sea $f(x; \lambda)$ la función de probabilidad de una v.a. con distribución Poisson con parámetro λ. Pruebe que si $r \to \infty$, $q \to 0$ y que el valor $\lambda = rq$ permanece constante, la distribución binomial negativa se aproxima a la distribución Poisson con parámetro λ.

15.- Se sabe que el 75% de vacas vacunadas con un suero están protegidas contra cierta enfermedad. Si se vacunan a 3 vacas, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo dos de ellas contraigan la enfermedad? R. 0,984375

16.- Si dos dados correctos son lanzados 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de que en al menos en 2 lanzamientos se obtenga por lo menos 9 puntos en total?

$$R. \sum_{k=2}^{4} \binom{4}{2} \left(\frac{5}{18}\right)^k \left(\frac{13}{18}\right)^{4-k}$$

17.- Una fábrica emplea patrón de aceptación en los artículos producidos antes de embarcarlos. El plan consta de dos etapas. Cajas con 25 artículos son preparados para su embarque, tomándose 3 muestras para su revisión. Si se encuentra algún defectuoso, la caja se regresa para inspeccionar el 100% del contenido. En caso contrario, se embarca.

a) ¿Cuál es la probabilidad de embarcar una caja que contenga 3 artículos defectuosos? R. 0,669565

b) ¿Cuál es la probabilidad de regresar una caja que contiene sólo un artículo defectuoso? R. 0,12

18.- Una caja contiene 3 pelotas amarillas, 2 marrones y 4 rojas. Encuentre la probabilidad de que, en una muestra aleatoria de 5 pelotas, se seleccione 2 marrones y al menos una roja. R. 0,2698413

19.- Durante el estudio de un inventario de una tienda se determinó que un artículo se pide en promedio 5 veces al día. ¿Cuál es la probabilidad de que, en un día dado, el artículo:

a) sea pedido más de 5 veces R. 0,3840

b) no sea pedido R. 0,0067

20.- El gerente de una compañía que alquila automóviles compra neumáticos en lotes de 500 para aprovechar los descuentos por comprar al mayoreo. El gerente sabe, por experiencias anteriores, que el 1% de los neumáticos nuevos adquiridos en un determinado almacén salen defectuosos y se deben reemplazar durante la primera semana de uso. Encuentre la probabilidad de que en un envío de 500 neumáticos:

a) haya solamente un defectuoso R. 0,0067

b) no más de 3 defectuosos R. 0,337

21.- Entre las semillas de trigo hay 0,4% de semillas de hierbas malas. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar 5 000 semillas se descubran 5 semillas de hierbas malas? R. 0,000055

22.- Suponga que, en promedio, 1 de cada 1 000 personas comete un error al presentar su declaración jurada de ingresos. Si se selecciona al azar 10 000 declaraciones y se examinan, encuentre la probabilidad de que 6; 7 u 8 contengan errores. R. 0,2657

23.- Una cadena de bancos ha adquirido 5 minicomputadoras para ser distribuidas entre las sucursales de una ciudad. El comprador ignora que 3 de las 5 minicomputadoras están defectuosas. Antes de instalar las computadoras, un agente del banco selecciona 2 de las 5 del embarque y las prueba para determinar si son o no defectuosas.

a) Sea X el número de computadoras defectuosas en la muestra de 5. ¿Qué distribución tiene X? R. Hipergeométrica

b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos computadoras de la muestra sean defectuosas? R. 0,30

24.- Un investigador inocula a varios ratones, uno a lo vez, con el virus de una enfermedad hasta encontrar que dos la han contraído. Si la probabilidad de contagio es de 1/6. ¿Cuál es la probabilidad de que se requieran ocho ratones? R. 0,0651

25.- La probabilidad de que un tirador dé en el blanco es igual a 2/3. El tirador ha efectuado 15 disparos. Sea X la v.a. que denota el número de impactos. Halle la esperanza matemática y la varianza de X. R. 10 ; 10/3

26.- Los propietarios de una compañía privada han decidido convertirla en empresa pública, es decir, han decidido emitir acciones y ponerlas a la venta. Se sabe que el 90% de las casas de las bolsas de valores están recomendando estas acciones a sus clientes.

a) Encuentre la probabilidad de que, de dos casas de bolsas elegidas al azar, ninguna recomienda la compra de estas acciones. R. 0,01

b) Encuentre la probabilidad de que, de 4 casas de bolsas elegidas al azar, no más de dos recomiendan la compra de estas acciones. R. 0,0523

27.- Tres personas tiran monedas al aire y la dispareja paga el café. Si los tres resultados son iguales, las monedas se tiran nuevamente. Encuentre la probabilidad de que se necesiten menos de 4 intentos. R. 63/64

28.- Se sabe que el 90% de las personas que compran un televisor a color no hacen reclamaciones durante el periodo de garantía. Suponga que 20 personas compraron un televisor a color, cada una de un determinado almacén. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 de los 20 clientes hagan reclamaciones durante el periodo de garantía? R. 0,608

32.- Los costos de administración que los propietarios de fondos de pensiones pagan a los administradores están siendo analizados debido a que los directivos de fondos de pensiones han encontrado que estos costos varían mucho de un fondo a otro. Sin embargo, se ha reportado únicamente que el 70% de los consejos directivos han emprendido pláticas con sus administradores para determinar si los costos de administración son razonables. Suponga que se entrevistan 25 grupos de fondos de pensiones para investigar lo que sucede con los costos de administración que se pagan a los administradores de los fondos.

a) Encuentre la probabilidad de que no más de 5 de los 25 grupos hayan discutido el tema con sus administradores. R. 0,189

b) Encuentre la probabilidad de que al menos 20 grupos hayan discutido el tema con sus administradores. R. 0,193

9 MODELOS DE DISTRIBUCIÓN CONTINUA

9.1 MODELO UNIFORME

Definición 1.- Se dice que una v.a. continua X tiene distribución uniforme con parámetros α y β $(\alpha < \beta)$ reales, si su función de densidad es dado por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & si\ \alpha \le x \le \beta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La gráfica de la función de densidad se muestra en la figura 9.1.

La función de distribución acumulada de la v.a. uniforme X en el intervalo $[\alpha; \beta]$ es dada por

$$F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & si\ x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & si\ \alpha \le x < \beta \\ 1, & si\ x \ge \beta \end{cases}$$

La gráfica de $F(x)$ se muestra en la figura 9.2

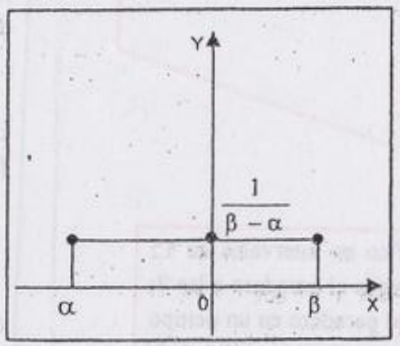


Fig. 9.1

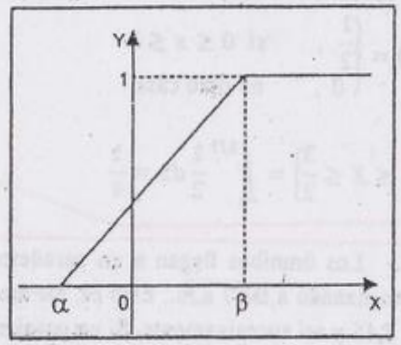


Fig. 9.2

Teorema 1.– Si X es una v.a. continua con distribución uniforme en $[\alpha;\beta]$, entonces

i) $E[X]=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; $Var[X]=\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

ii) $M_X(t)=\dfrac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{(\beta-\alpha)t}$

Demostración.

i) $E[X]=\displaystyle\int_\alpha^\beta x.\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\beta+\alpha}{2}$

$$E[X^2]=\int_\alpha^\beta x^2.\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta=\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$$

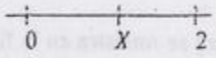
$$Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}-\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

ii) $M_X(t)=E[e^{tx}]=\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{tx}.\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{(\beta-\alpha)t}[e^{tx}]_\alpha^\beta=\frac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{(\beta-\alpha)t}$

Ejemplo 1.- Un punto es escogido al azar en el intervalo $[0;2]$. ¿Cuál es la probabilidad de que el punto escogido esté entre 1 y 3/2?

Solución.

Sea X la coordenada del punto escogido en $[0;2]$



Entonces la función de densidad de X es dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & si\ 0\le x\le 2\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Por tanto,

$$P\left[1\le X\le\frac{3}{2}\right]=\int_1^{3/2}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}$$

Ejemplo 2.- Los ómnibus llegan a un paradero específico en intervalos de 15 minutos comenzando a las 7 a.m.. Esto es, los ómnibus llegan al paradero a las 7; 7,15; 7,30; 7,45 y así sucesivamente. Si un pasajero llega al paradero en un tiempo que está uniformemente distribuido entre 7 y 7,30; encuentre la probabilidad de que el pasajero espera.

a) menos de 5 minutos por un ómnibus

b) más de 10 minutos por un ómnibus

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de minutos después de las 7 a.m. en que el pasajero llega al paradero.

Luego X tiene distribución uniforme en $[0;30]$, y su función de densidad es

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & si\ 0\le x\le 30\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

a) El pasajero espera menos de 5 minutos, cuando él llega entre las 7,10 y 7,15 ó entre 7,25 y 7,30. Luego, la probabilidad pedida es

$$P[0<X<15]+P[25<X<30]=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$

b) Similarmente, el pasajero tiene que esperar más de 10 minutos si él llega al paradero entre 7 y 7,05 ó entre 7,15 y 7,20. Así la probabilidad pedida es

$$P[0<X<5]+P[15<X<20]=\int_0^5\frac{1}{30}dx+\int_{15}^{20}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$

Ejemplo 3.- Alberto y María acuerdan encontrarse en la Plaza San Martin entre las 7 p.m. y 8 p.m. Cada uno espera al otro más de 10 minutos. Halle la probabilidad de que se encuentren.

a) Cuando Alberto llega a las 7,30

b) Cuando cualquiera de ellos llega en cualquier momento, al azar.

Solución.

Al dividir la hora de 7 a 8 p.m. en 60 minutos, y considerar que cualquiera de ellos llega en un momento entre 0 y 60, se define las variables aleatorias

X: momento de llegada de Alberto entre $[0;60]$

Y: momento de llegada de María entre $[0;60]$

Luego, X e Y son v.a. continuas con distribución uniforme entre 0 y 60, y sus funciones de densidades son

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\le x\le 60\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}\ ;\ f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\le y\le 60\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

a) Como Alberto llega a las 7,30 p.m., entonces para que se encuentren, María debe llegar entre las 7,20 y 7,40, esto es, entre el momento 20 y el momento 40. Luego la probabilidad pedida es

$$P[20\le Y\le 40]=\int_{20}^{40}\frac{1}{60}dy=\frac{1}{3}$$

b) Las v.a. X e Y son independientes. Luego, la función de densidad conjunta de X e Y es

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{1}{60^2}, & 0\le x\le 60\ ,\quad 0\le y\le 60\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

La región posible de llegada es el cuadrado de vértices $(0;0)$, $(60;0)$, $(0;60)$ y $(60;60)$. (Fig. 9.3)

Ahora, se debe encontrar la región favorable para que se encuentren.

Si $0\le x\le 10$, entonces debe ser $0\le y\le x+10$

Si $10\le x\le 50$, entonces debe ser $x-10\le y\le x+10$

Si $50<x\le 60$, entonces debe ser $x-10\le y\le 60$

Luego, la probabilidad de que se encuentren en cualquier momento es

$$p=\int_0^{10}\int_0^{x+10}\frac{1}{3600}dydx+\int_{10}^{50}\int_{x-10}^{x+10}\frac{1}{3600}dydx+\int_{50}^{60}\int_{x-10}^{60}\frac{1}{3600}dydx$$

$$=\frac{1}{3600}\left(\left[\frac{x^2}{2}+10x\right]_0^{10}+[20x]_{10}^{50}+\left[70x-\frac{x^2}{2}\right]_{50}^{60}\right)$$

$$=\frac{1}{3600}(150+800+150)=\frac{11}{36}$$

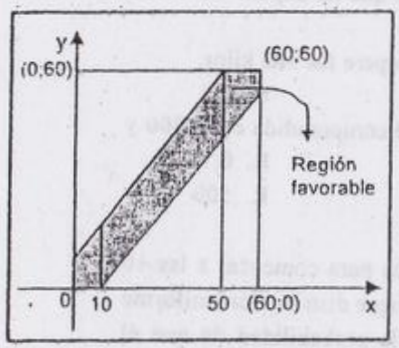


Fig. 9.3

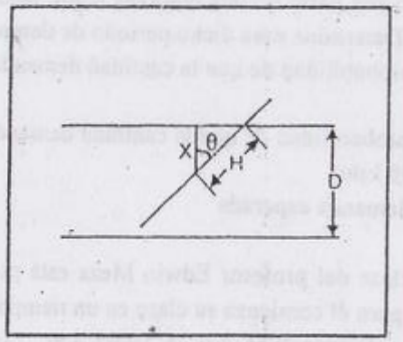


Fig. 9.4

Ejemplo 4.- En una mesa se colocan 2 rectas paralelas separadas por una distancia de D unidades. Una aguja de longitud L, donde $L\le D$, es lanzado aleatoriamente sobre la mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja intersecte a una de las rectas? (la otra posibilidad es que la aguja esté completamente contenida entre las dos rectas)

Solución.

Se determina la posición de la aguja al especificar la distancia X del punto medio de la aguja a la recta paralela más cercana, y el ángulo θ entre la aguja y la recta proyectada de longitud X (Fig. 9.4).

La aguja interseca a la recta si la hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura 9.4 es menor que $L/2$, esto es, si

$$H=\frac{X}{\cos\theta}<\frac{L}{2}\quad ó\quad X<\frac{L}{2}\cos\theta$$

Para que esto sea posible X debe variar entre 0 y $D/2$, y θ entre 0 y $\pi/2$

Luego, es razonable suponer que las variables aleatorias X y θ son independientes y tienen distribución uniforme en sus respectivos dominios, esto es

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{D}, & si\ 0<x<\dfrac{D}{2}\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}\quad ,\quad g(\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & si\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ 0\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Luego, la densidad conjunta es

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi D}, & si\ 0<x<\dfrac{D}{2}\ y\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ D\ , & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Por tanto,

$$P\left[X<\frac{L}{2}\cos\theta\right]=\iint_{x<\frac{L}{2}\cos\theta}f(x;\theta)dxd\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\frac{L}{2}\cos\theta}\frac{4}{\pi D}dxd\theta$$

$$=\frac{4}{\pi D}\int_0^{\pi/2}\frac{L}{2}\cos\theta\,d\theta=\frac{2L}{\pi D}$$

EJERCICIOS

1.- Un punto es escogido al azar en el segmento de recta $[1;4]$. Calcule

a) la probabilidad de que el punto escogido esté entre 2 y 3 R. 1/3

b) la probabilidad de que sea igual a 2

c) la media y la varianza de la distribución R. 2,5 ; 3/4

2.- Sea X una v.a. con distribución uniforme en $[-\alpha;\alpha]$ donde $\alpha>0$. Si es posible, calcule α de modo que las siguientes relaciones sean válidas

a) $P[X>1]=1/3$ R. $\alpha=3$ b) $P[X>1]=1/2$

c) $P[X<1/2]=0{,}7$ R. 5/4 d) $P[X<1/2]=0{,}3$

3.- La temperatura T de destilación del petróleo es crucial en la determinación de la calidad final del producto. Suponga que T es una v.a. con distribución uniforme en el intervalo $[150; 300]$. Suponga que el costo para producir un galón de petróleo es C_1 soles. Si el aceite es destilado a una temperatura inferior a 200°, el producto obtenido es vendido a C_2 soles; si la temperatura fuera superior a 200°, el producto es vendido a C_3 soles.

a) Trace la gráfica de la función de densidad de la v.a. T.

b) ¿Cuál es el lucro esperado por galón?

R. $0{,}33(C_2 - C_1) + 0{,}67(C_3 - C_1)$

4.- Suponga que un punto $(X; Y)$ es elegido al azar dentro del círculo S definido por $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$

a) Determine la función de densidad conjunta de X e Y, la función de densidad marginal de X, y la función de densidad marginal de Y.

b) ¿Son X e Y independientes?

5.- Suponga que el punto $(X; Y)$ es elegido al azar dentro del círculo S definido por $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9\}$.

a) Determine la función de densidad condicional de Y dado $X = x$

R. Para $-2 < x < 4$

$$f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2[9-(x-1)^2]^{1/2}}, & si\ (y+2)^2 < 9-(x-1)^2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Calcule $P[Y > 0 / X = 2]$ R. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

6.- Suponga que un punto X tiene distribución uniforme en el intervalo $[0; 1]$. Suponga también que después de que el valor $X_1 = x_1$, sea observado, el punto X_2 de la recta tiene distribución uniforme en el intervalo $[x_1; 1]$. Suponga además que las variables aleatorias adicionales $X_3, X_4, \ldots$, son generados de la misma manera. Esto es, para $j = 1; 2; \ldots$ después de que el valor $X_j = x_j$ sea observado, el punto X_{j+1} es elegido en la recta de modo que tenga distribución uniforme en el intervalo $[x_j; 1]$. Encontrar el valor de $E[X_n]$

R. $1 - \dfrac{1}{2^n}$

7.- De una estación parte un ómnibus cada 20 minutos, un pasajero llega de improviso a la estación. Halle

a) Probabilidad de que espere al ómnibus menos de 7 minutos R. 7/20

b) Esperanza y varianza de la variable aleatoria tiempo de espera

R. 10 ; 100/3

8.- Los trenes que se dirigen hacia el destino A llegan a una estación cada 15 minutos comenzando a las 7 a.m.; mientras que los trenes que se dirigen hacia el destino B llegan a la misma estación cada 15 minutos comenzando a las 7;05 a.m. Si un cierto pasajero llega a la estación en un tiempo uniformemente distribuido entre 7 y 8 a.m., y entonces aborda el primer tren que llega, ¿qué proporción de veces él va hacia el destino A? R. 2/3

9.- Usted llega a un paradero de un ómnibus interprovincial a las 10 a.m. en punto, y sabe que el ómnibus llega en un tiempo uniformemente distribuido entre 10 y 10,30. ¿Cuál es la probabilidad de que Ud. Tiene que esperar durante 10 minutos? .Si a las 10,15 el ómnibus todavía no ha llegado, ¿cuál es la probabilidad de que usted tenga que esperar por lo menos 10 minutos adicionales? R. 2/3 ; 1/3

10.- Acerca de la cantidad aleatoria demandada durante un cierto periodo de tiempo por parte de una empresa textil, sólo se sabe que no supera los 1 000 kilos. Determine para dicho periodo de tiempo:

a) la probabilidad de que la cantidad demandada no supere los 900 kilos.

R. 0,9

b) la probabilidad de que la cantidad demandada esté comprendida entre 800 y 900 kilos. R. 0,1

c) la demanda esperada R. 500

11.- La clase del profesor Edwin Meza está programada para comenzar a las 10 a.m., pero él comienza su clase en un tiempo X que tiene distribución uniforme en el intervalo 9,55 a.m. a 10,05 a.m. , ¿cuál es la probabilidad de que él comience su clase:

a) 2 minutos más temprano? R. 0,3

b) 2 minutos más tarde? R. 0,3

9.2 MODELO NORMAL

La distribución normal, que será presentado en esta sección, es con toda seguridad, la distribución de probabilidad continua más importante en todo el campo de la estadística. Hay 3 razones principales para esta posición preferente de la distribución normal.

La primera razón está relacionada directamente con las propiedades matemáticas de la distribución normal. Pues, si se selecciona una muestra aleatoria de una población que tiene distribución normal, entonces la distribución de muchas funciones importantes de los valores observados de la muestra aleatoria son también normales. Por lo tanto, es una conveniencia matemática excelente de suponer que la distribución de la población de la cual se extrae la muestra sea normal.

La segunda razón es que muchos datos que ocurren en la naturaleza, la industria, la economía y la investigación describen una distribución aproximadamente normal. Por ejemplo, la distribución de las alturas y pesos de individuos en poblaciones homogéneas de personas tienen distribución aproximadamente normal.

La tercera razón para la preferencia de la distribución normal es el Teorema del límite Central, el cuál será establecido y demostrado en esta sección. Una consecuencia importante del teorema del límite central es que muchas funciones de los valores muestrales tienen distribuciones aproximadamente normales. En particular para muestras grandes extraídas de poblaciones con cualquier distribución que tiene varianza finita, la distribución de la media muestral es aproximadamente normal.

Definición 2.- Se dice que la v.a. X tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2, y se escribe $X \sim N(\mu;\sigma^2)$, si su función de densidad es dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $-\infty < \mu < +\infty$ y $0 < \sigma^2 < \infty$

La figura 9.5 ilustra una particular curva normal, determinada por valores particulares de μ y σ^2.

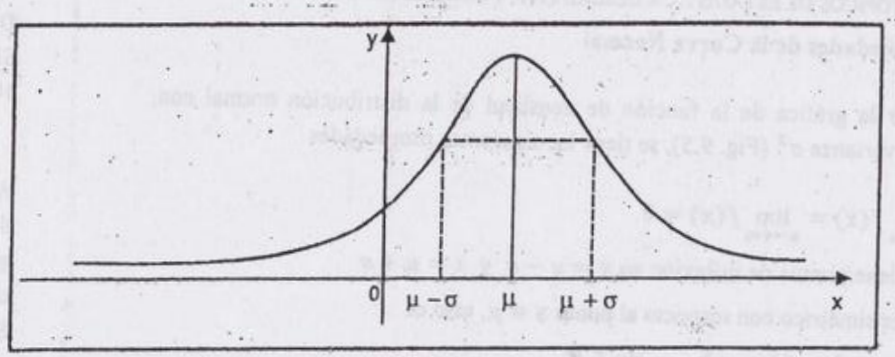


Fig. 9.5

Teorema 2.- Si X es una v.a. con distribución $N(\mu;\sigma^2)$, entonces

i) $M_X(t) = E[e^{tx}] = exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$

ii) $E[X] = \mu$, $Var[X] = \sigma^2$

Demostración.- Se tiene

i) $$M_X(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.e^{\left[tx-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}dx$$

Al completar cuadrados de la expresión que está dentro del corchete, se tiene

$$tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 - \frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2}$$

Luego,

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.e^{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2}}dx$$

La integral del segundo miembro es igual 1, pues corresponde al área bajo la curva normal con media $\mu + \sigma^2 t$ y varianza σ^2.

Por tanto,

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

ii) $$E[X] = M'_X(0) = [(\mu + \sigma^2 t)e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}]_{t=0} = \mu$$

$$Var[X] = M''_X(0) - [M'_X(0)]^2 = \sigma^2$$

9.2.1 Propiedades de la Curva Normal

Al analizar la gráfica de la función de densidad de la distribución normal con media μ y varianza σ^2 (Fig. 9.5), se tiene las siguientes propiedades

1.- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2.- $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$

3.- $f(x)$ es simétrico con respecto al punto $x = \mu$, esto es

$$f(\mu + x) = f(\mu - x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Así, el 50% del área bajo la curva normal está a la derecha de la media y el 50% a la izquierda.

4.- $f(x)$ alcanza su valor máximo en $x = \mu$, y su valor máximo es

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

5.- Para cada μ fijo, el achatamiento de la curva normal está directamente ligado al valor de σ^2 (Fig. 9.6).

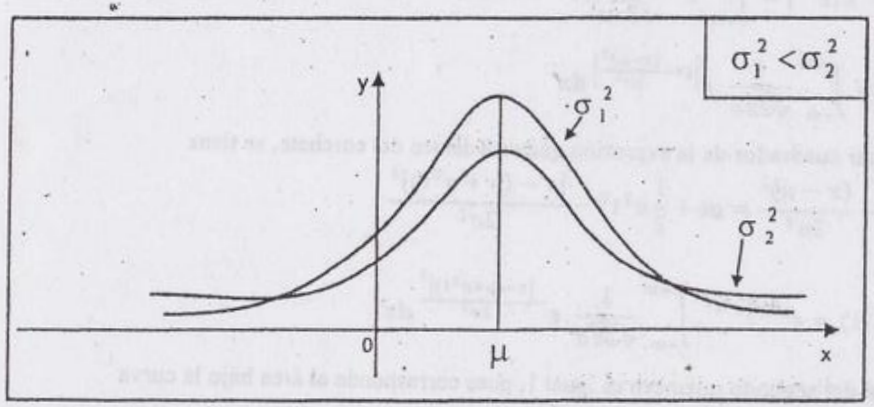


Fig. 9.6

Teorema 3.- Si $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ y si $Y = aX + b$, donde a y b son constantes dadas con $a \neq 0$, entonces $Y \sim N(a\mu + b; a^2\sigma^2)$

Demostración.

Si $M_Y(t)$ denota la función generatriz de momentos de Y, entonces por el teormea 10 del capítulo 6,se tiene

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at) = e^{bt} . e^{\mu a t + \frac{1}{2}a^2\sigma^2 t^2} = e^{(a\mu + b)t + \frac{1}{2}a^2\sigma^2 t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Al comparar la expresión de $M_Y(t)$ con la función generatriz de momentos de la distribución normal dado en el teorema 2, resulta que $M_Y(t)$ es la función generatriz de momentos de una distribución normal con media $a\mu + b$ y varianza $a^2\sigma^2$.

Por tanto, $Y \sim N(a\mu + b; a^2\sigma^2)$

9.2.2 Distribución Normal Estándar

La distribución normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$ se denomina distribución normal estándar. La función de densidad de la distribución normal estándar usualmente se denota por el símbolo ϕ, y la de su distribución acumulada por Φ.

Esto es

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \forall z \in R$$

$$\Phi(z) = P[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{z} \phi(u)du, \forall z \in \mathbb{R}$$

Las gráficas de estas funciones se ilustran en las figuras 9.7 y 9.8, respectivamente.

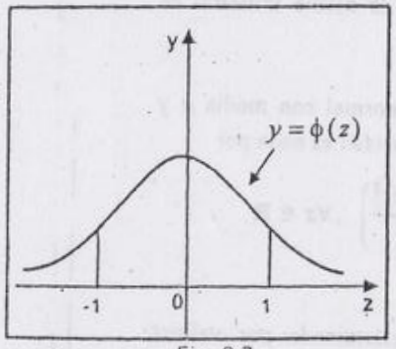


Fig. 9.7

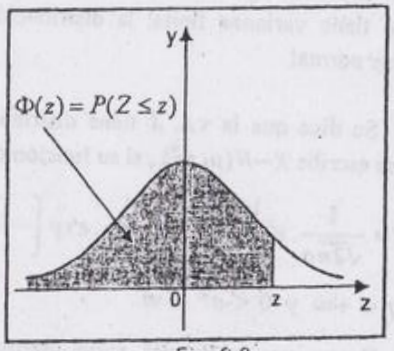


Fig. 9.8

Como la función $\phi(z)$ no puede ser expresada en términos de funciones elementales (ver Tópicos de Cálculo Vol. II), entonces las probabilidades para la distribución normal estándar o para cualquier otra distribución normal solamente

se puede calcular por aproximaciones numéricas o usando tablas de valores de $P[Z \leq z]$, como la que se da al final de este libro.

La tabla I del apéndice da el área bajo la curva normal estándar entre $z = 0$ y cualquier valor positivo de z. La simetría de la gráfica de $\phi(z)$ en torno al origen permite calcular el área entre dos valores cualesquiera de z (positivo o negativo) Fig. 9.9

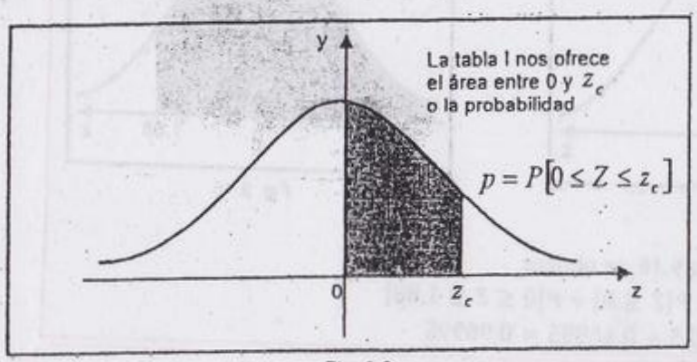


Fig 9 9

Observación 1.-. Del teorema 3 se tiene que, si $X \sim N(u; \sigma^2)$, entonces la variable aleatoria dada por

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tiene distribución $N(0; 1)$, esto es, la v.a. Z tiene distribución normal con media cero y varianza 1. Este tipo de procedimiento se denomina estandarización de la v.a. X.

Observación 2.- Si $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, entonces

$$p = P[a < X < b] = P[X < b] - P[X \leq a]$$

$$= P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right] - P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Ejemplo 5.- Si $Z \sim N(0; 1)$, encuentre

a) $P[o \leq Z \leq 1{,}82]$ b) $P[Z \geq 2{,}08]$

c) $P[-1{,}2 \leq Z \leq 0]$ d) $P[0{,}64 \leq Z \leq 2{,}2]$

e) $P[-0{,}48 \leq Z \leq 1{,}54]$ f) $P[-2{,}55 \leq Z \leq -0{,}76]$

g) $P[Z \leq 1{,}88]$

Solución.

a) La probabilidad o el área que se busca es el área sombreada en la figura 9.10. Para hallar el valor numérico de esta probabilidad, se va hacia abajo en la columna encabezada por la parte entera y primer decimal de Z_c hasta alcanzar el valor 1,8, luego por esa fila se va hacia la derecha hasta la columna encabezada por 2 (segundo decimal de Z_c) de la tabla I del Apéndice. El número que aparece en la intersección de esa fila y esa columna, 0,46562 es la probabilidad pedida, esto es

$$P[0 \leq Z \leq 1{,}82] = 0{,}46562$$

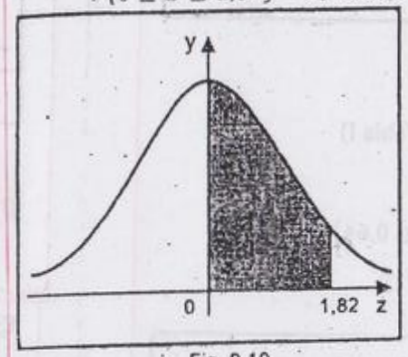


Fig. 9.10

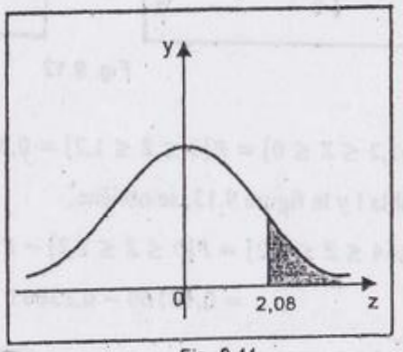


Fig. 9.11

b) En la figura 9.11 se muestra el área que se pide. Esta probabilidad o área no está dada directamente en la Tabla I. Para calcular esta probabilidad debemos hacer uso de la propiedad 3 de la curva normal, la cual afirma que el área total a la derecha de cero es 0,50000. Así, se tiene

$$P[Z \geq 2{,}08] = 0{,}5 - P[0 \leq Z \leq 2{,}08]$$

Para hallar el área entre $Z = 0$ y $z = 2{,}08$, se procede como en a), se elige la columna encabezada por la parte entera y primer decimal de Z_c y se va hacia abajo hasta el valor 2,0; luego por esa fila se va hacia la derecha hasta la columna encabezada por 8 de la Tabla I del Apéndice. El número que aparece en la intersección de la fila antes mencionada y la columna encabezada por 8 es 0,48124

Luego,

$$P[Z \geq 2{,}08] = 0{,}5 - 0{,}48124 = 0{,}01876$$

c) En virtud de la simetría de la distribución normal estándar, el área entre $-1{,}2$ y 0 es exactamente igual al área entre 0 y 1,2, como se ilustra en la figura 9.12.

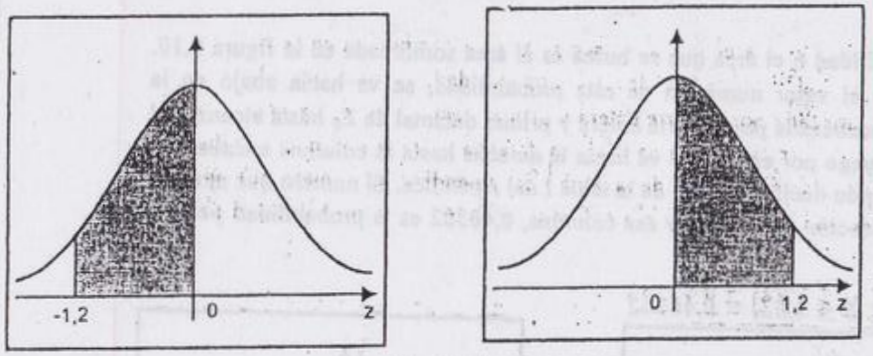


Fig. 9.12

Luego,

$$P[-1{,}2 \le Z \le 0] = P[0 \le Z \le 1{,}2] = 0{,}3849 \quad \text{(Tabla I)}$$

d) De la Tabla I y la figura 9.13, se obtiene

$$P[0{,}64 \le Z \le 2{,}2] = P[0 \le Z \le 2{,}2] - P[0 \le Z \le 0{,}64]$$
$$= 0{,}48160 - 0{,}23891 = 0{,}24719$$

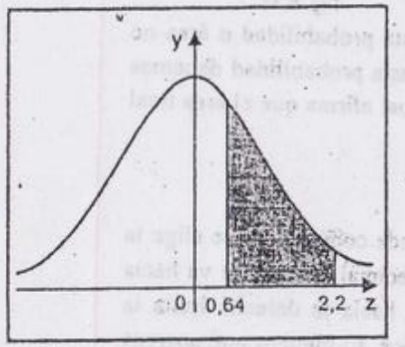


Fig. 9.13

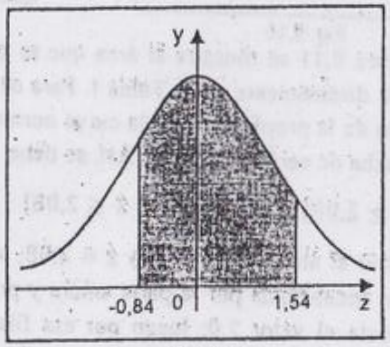


Fig. 9.14

e) En forma similar, al usar la tabla I y Fig. 9.14, se tiene

$$p = P[-0{,}48 < x < 0] + P[0 < x < 1{,}54]$$
$$= P[0 \le Z \le 0{,}48] + P[0 \le Z \le 1{,}54]$$
$$= 0{,}18439 + 0{,}43822 = 0{,}62261$$

f) De la figura 9.15 y tabla I, tenemos

$$p = P[-2{,}55 \le Z \le -0{,}76] = P[0{,}76 \le Z \le 2{,}55]$$

$$p = P[0 \le Z \le 2{,}55] - P[0 \le Z \le 0{,}76]$$
$$= 0{,}49641 - 0{,}27637 = 0{,}21824$$

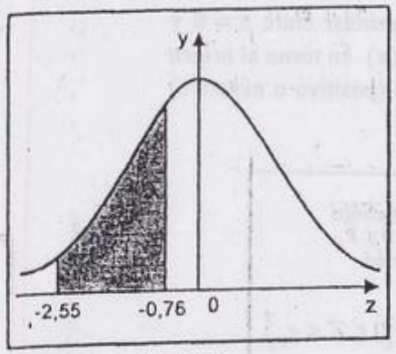


Fig. 9.15

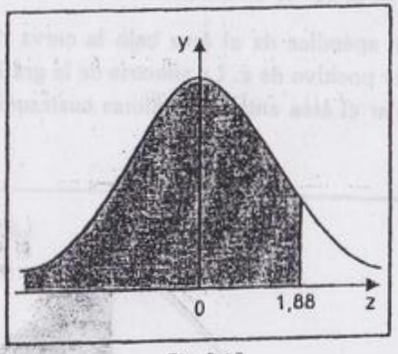


Fig. 9.16

g) De la tabla I y figura 9.16, se obtiene

$$P[Z \le 1{,}88] = P[Z \le 0] + P[0 \le Z \le 1{,}88]$$
$$= 0{,}5 + 0{,}46995 = 0{,}96995$$

Ejemplo 6.- Si $X \sim N(3; 16)$, halle

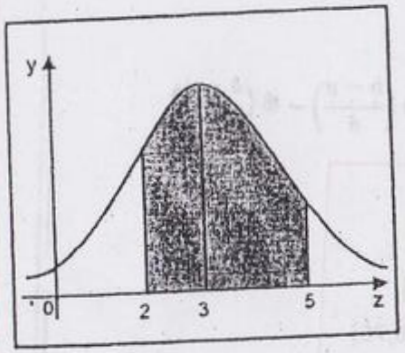
a) $P[2 < X < 5]$ b) $P[X > 0]$ c) $P[|X - 4| > 6]$

Solución.

a) Al estandarizar, se tiene

$$P[2 < X < 5] = P\left[\frac{2-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{5-3}{4}\right] = P[-0{,}25 < Z < 0{,}5]$$

Por tanto, la probabilidad de que X esté entre 2 y 5 es igual a la probabilidad de que Z esté entre $-0{,}25$ y $0{,}5$ (Fig. 9.17)



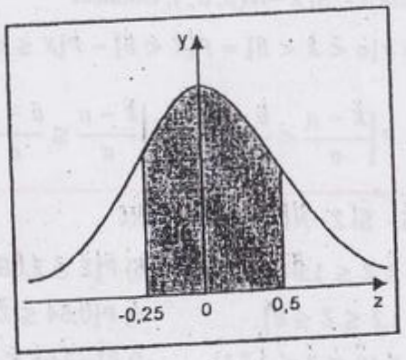


Fig. 9.17

De la tabla I y figura 9.17, resulta

$$P[2 \le X \le 5] = P[-0{,}25 \le Z \le 0{,}5] = P[0 \le Z \le 0{,}25] + P[0 \le Z \le 0{,}5]$$
$$= 0{,}09871 + 0{,}19146 = 0{,}29017$$

Al estandarizar y usar la tabla I, se obtiene

$$P[X > 0] = P\left[\frac{X-3}{4} > \frac{0-3}{4}\right] = P[Z > -0{,}75] \quad \text{(Fig. 9.18)}$$
$$= P[-0{,}75 \le Z \le 0] + P[Z \ge 0]$$
$$= P[0 \le Z \le 0{,}75] + 0{,}5 \quad \text{(Propiedad de simetría)}$$
$$= 0{,}27337 + 0{,}5 = 0{,}77337$$

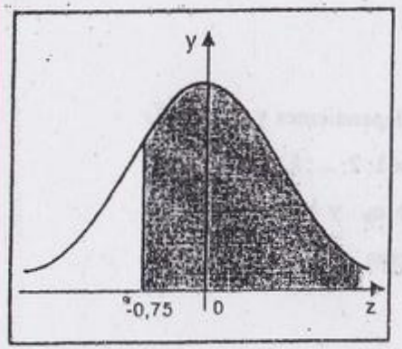


Fig. 9.18

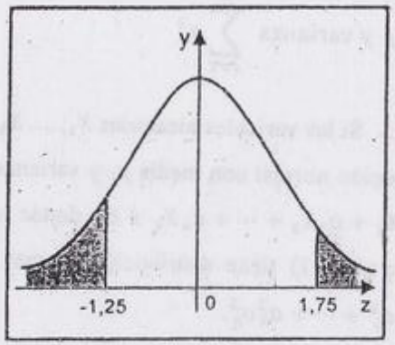


Fig 9 19

c) Por la propiedad de valor absoluto y tabla I, se tiene

$$p = P[|X-4| > 6] = P[X-4 > 6] + P[X-4 < -6]$$
$$= P[X > 10] + P[X < -2]$$
$$= P\left[\frac{X-3}{4} > \frac{10-3}{4}\right] + P\left[\frac{X-3}{4} < \frac{-2-3}{4}\right]$$
$$= P\left[Z > \frac{7}{4}\right] + P\left[Z < -\frac{5}{4}\right] = P[Z > 1{,}75] + P[Z < -1{,}25]$$
$$= (0{,}5 - P[0 \le Z \le 1{,}75]) + P[Z \ge 1{,}25]$$
$$= (0{,}5 - 0{,}45994) + (0{,}5 - 0{,}39435) = 0{,}14571$$

Ejemplo 7.- Los depósitos en el Banco de Arequipa durante el mes de Mayo último están normalmente distribuidos, con media de S/. 10 000 y una desviación estándar de S/. 1 500. Un depósito es seleccionado al azar, de los depósitos referentes al mes de Mayo. Encuentre la probabilidad de que el depósito sea de:

a) S/. 10 000 ó menos b) por lo menos S/. 10 000

c) Un valor entre S/. 12 000 y S/. 15 000

d) Mayor que S/. 20 000

Solución. Se tiene

a) $P[X \le 10\,000] = P\left[\frac{X-10\,000}{1500} \le \frac{10\,000-10\,000}{1500}\right] = P[Z \le 0] = 0{,}5$

b) $P[X \ge 10\,000] = P\left[\frac{X-10\,000}{1500} \ge \frac{10\,000-10\,000}{1500}\right] = P[Z \ge 0] = 0{,}5$

c) $P[12\,000 \le X \le 15\,000] = P\left[\frac{12\,000-10\,000}{1500} \le z \le \frac{15\,000-10\,000}{1500}\right]$

$$= P[1{,}33 \le Z \le 3{,}33]$$
$$= 0{,}49957 - 0{,}40824 = 0{,}09133$$

d) $P[X \ge 20\,000] = P\left[Z \ge \frac{20\,000-10\,000}{1500}\right] = P[Z \ge 6{,}67] \cong 0$

Ejemplo 8.- Si $Z \sim N(0;1)$, halle k para que se cumpla

a) $P[0 \le Z \le k] = 0{,}35543$ b) $P[Z > k] = 0{,}49601$

c) $P[Z \le k] = 0{,}17879$ d) $P[Z \le k] = 0{,}99886$

Solución.

a) En este caso se desea encontrar k de modo que la probabilidad de que Z esté entre $z = 0$ y $z = k$ sea igual a 0,35543. Esta situación se ilustra en la figura 9.20.

En el cuerpo de la Tabla I, el número 0,35543 se localiza a la derecha de la fila que empieza con 1.0 y bajo la columna encabezada por 6. Entonces el valor de k (abscisa de la Z) es

$k = 106$

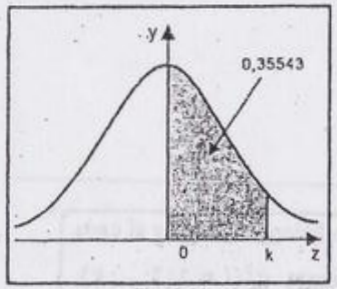


Fig. 9.20

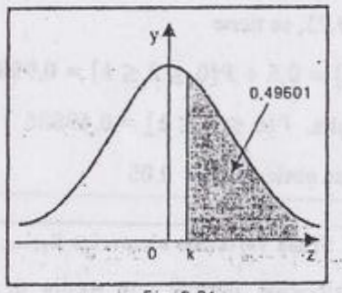


Fig. 9.21

b) Se tiene $P[Z > k] = 0{,}5 - P[0 \le Z \le k] = 0{,}49601$ (Fig. 9.21)

de donde resulta

$P[0 \le Z \le k] = 0{,}00399$

Para hallar el valor de k, se procede como en a); se busca el número 0,00399 en el cuerpo de la tabla I, que en este caso se localiza a la derecha de la fila que empieza por 0,0 y bajo la columna encabezada por 1. Luego el valor de k es $k = 0{,}01$

c) De la figura 9.22 y por simetría en torno al origen, se tiene

$P[Z \le k] = 0{,}17879$ es equivalente a $P[Z \ge -k] = 0{,}17879$

Luego,

$P[Z \ge -k] = 0{,}5 - P[0 \le Z \le -k] = 0{,}17879$

De donde resulta

$P[0 \le Z \le -k] = 0{,}32121$

Por tanto, $k = -0{,}92$.

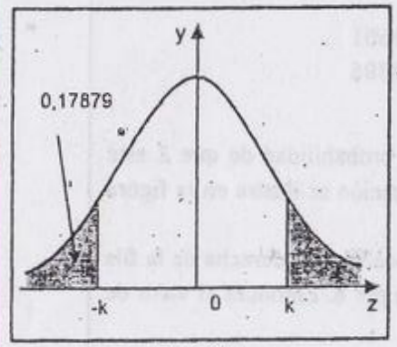


Fig. 9.22

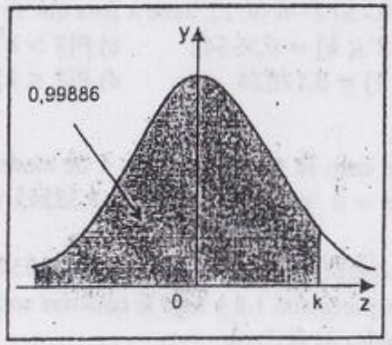


Fig. 9.23

d) De la figura 9.23, se tiene

$P[Z \le k] = 0{,}5 + P[0 \le Z \le k] = 0{,}99886$

De donde resulta, $P[0 \le Z \le k] = 0{,}49886$

De la tabla I, se obtiene $k = 3{,}05$

Teorema 4.- Si las variables aleatorias $X_1, \dots, X_k$ son independientes y si cada X_i tiene distribución normal con media μ_i y varianza $\sigma_i^2 (i = 1; 2; \dots; k)$, entonces la suma $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ tiene distribución normal con media $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ y varianza $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2$

Demostración.

Sea $M_i(t) = e^{\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2}$ la función generatriz de momentos de X_i para $i = 1; 2; \dots; k$ y sea $M(t)$ la función generatriz de momentos de $X_1 + \cdots + X_k$.

Al usar la independencia de las variables aleatorias $X_1, \dots, X_k$, se tiene

$$M(t) = E\left[e^{t(X_1 + \cdots + X_k)}\right] = \prod_{i=1}^{k} M_i(t) = \prod_{i=1}^{k} e^{\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2}$$

$$= e^{\left[\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i\right)t + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2\right)t^2\right]}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, la distribución de $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ es normal con media

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \text{ y varianza } \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2$$

Corolario 1.- Si las variables aleatorias $X_1, \dots, X_k$ son independientes y si cada X_i tiene distribución normal con media μ_i y varianza $\sigma_i^2 (i = 1; 2; \dots; k)$, entonces la variable $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k + b$, donde $a_1 + \cdots + a_k$ y b son constantes ($a_i \ne 0$ para algún i) tiene distribución normal con media $a_1\mu_1 + \cdots + a_k\mu_k$ y varianza $a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_k^2\sigma_k^2$.

Corolario 2.- Sean $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria extraída de una población con distribución normal con media μ y varianza σ^2, y sea $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ la media muestral. Entonces $\overline{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma^2}{n})$

Demostración.

Como $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces de acuerdo al corolario 1, la distribución de $\overline{X}$ es normal con

Media $E[\overline{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$

y varianza $Var[\overline{X}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

Ejemplo 9.- Suponga que las alturas, en pulgadas, de las mujeres de una cierta población tiene distribución normal con media 65 y varianza 1, y que las alturas de los hombres tiene distribución normal con media 68 y desviación estándar 2. Suponga también que una mujer es seleccionada al azar e independientemente un hombre es seleccionado al azar. Determine la probabilidad de que la mujer es más alta que el hombre.

Solución.

Sea M la v.a. que denota la altura de la mujer seleccionada, y H denota la altura del hombre seleccionado. Entonces como M y H son independientes, la variable diferencia $M - N$ tiene distribución normal con media $\mu = 65 - 68 = -3$ y varianza $\sigma^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

Por tanto, la v. a. $Z = \dfrac{(M-H)-(-3)}{\sqrt{5}} = \dfrac{M-H+3}{\sqrt{5}}$

tiene distribución $N(0;1)$. Luego, se tiene

$$P[M > H] = P[M - H > 0] = P\left[\frac{M-H+3}{\sqrt{5}} > \frac{0+3}{\sqrt{5}}\right]$$

$$= P[Z > 1{,}342] = 0{,}5 - P[0 \le Z \le 1{,}342]$$

Con el número $z = 1{,}342$ no se encuentra en el cuerpo de la tabla I, entonces la probabilidad deseada se obtiene por la siguiente interpolación lineal:

Valor de la abscisa z		Probabilidad correspondiente ($P[0 \le Z \le z]$)
1,340	$\longrightarrow$	0,40988
1,342	$\longrightarrow$	p_0
1,350	$\longrightarrow$	0,41149

Así, se tiene

$$\frac{1{,}342 - 1{,}340}{1{,}350 - 1{,}340} = \frac{p_0 - 0{,}40988}{0{,}41149 - 0{,}40988}$$

Al resolver para p_0 esta igualdad, se obtiene

$$p_0 = 0{,}410202$$

Por tanto,

$$P[M > H] = 0{,}5 - 0{,}410202 = 0{,}089798$$

Ejemplo 10.- Un producto que pesa, en promedio, 10 gr con desviación estándar de 2 gr; es embalado en cajas con 50 unidades. Se sabe que las cajas vacías pesan 500 gr , con desviación estándar de 25 gr. Suponga que las variables pesos del

producto y de la caja tienen distribución normal e independientes, calcule la probabilidad de que una caja llena pesa más de 1 050 gr.

Solución. Sean las variables aleatorias

X_i: peso del i-ésimo producto $(i = 1; \ldots; 50)$ $E[X_i] = 10$, $Var[X_i] = 4$

Y: peso de la caja $E[Y] = 500$, $Var[Y] = (25)^2 = 625$

Así se tiene $X_i \sim N(10;4)$, $i = 1; 2; \ldots; 50$

$Y \sim N(500; 625)$

Si W es la variable que denota el peso de la caja llena, entonces

$$W = X_1 + X_2 + \cdots + X_{50} + Y$$

Su media es

$$\mu_W = E[W] = E[X_1] + \cdots + E[X_{50}] + E[Y]$$

$$= \underbrace{10 + \cdots + 10}_{50\ veces} + 500 = 1\,000$$

y su varianza es

$$\sigma_W^2 = Var[W] = Var[X_1] + \cdots + Var[X_{50}] + Var[Y]$$

$$= \underbrace{4 + \cdots + 4}_{50\ veces} + 625 = 50(4) + 625 = 825$$

Luego, por el teorema 4, $W \sim N(1\,000; 825)$

Por tanto,

$$P[W > 1050] = P\left[\frac{W - 1000}{\sqrt{825}} > \frac{1050 - 1000}{\sqrt{825}}\right]$$

$$= P[Z > 1{,}74] = 0{,}5 - 0{,}45907 = 0{,}04093$$

Ejemplo 11.- Si $X \sim N(3;4)$, halle el valor de C, tal que

$$P[X > C] = 2\,P[X \le C]$$

Solución.

$$P[X > C] = P\left[\frac{X-3}{2} > \frac{C-3}{2}\right] = P\left[Z > \frac{C-3}{2}\right] = 1 - P\left[Z \le \frac{C-3}{2}\right]$$

$$P[X \le C] = P\left[\frac{X-3}{2} \le \frac{C-3}{2}\right] = P\left[Z \le \frac{C-3}{2}\right]$$

Luego,

$$1 - P\left[Z \le \frac{C-3}{2}\right] = 2P\left[Z \le \frac{C-3}{2}\right]$$

De donde resulta

$$P\left[Z \le \frac{C-3}{2}\right] = \frac{1}{3} = 0{,}33333$$

Sea $k = \dfrac{C-3}{2}$, entonces $P[Z \le k] = 0{,}33333$, el cual es equivalente a

$P[Z \ge -k] = 0{,}33333$ (Fig. 9.24). Al usar la propiedad 3, se obtiene

$$P[Z \ge -k] = 0{,}5 - P[0 \le Z \le -k] = 0{,}33333$$

De donde resulta

$$P[0 \le Z \le -k] = 0{,}16667$$

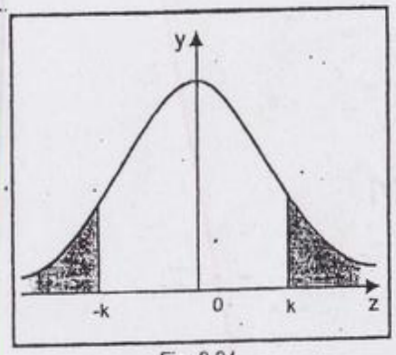


Fig. 9.24

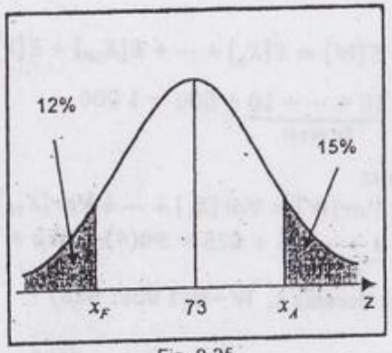


Fig. 9.25

Para hallar el valor de $-k$, se procede como en el ejemplo 8, se busca el número 0,16667 en el cuerpo de la tabla I. En este caso se localiza a la derecha de la fila que empieza por 0,4, entre los números 0,16640 y 0,17003 que están bajo las columnas encabezadas por 3 y 4, respectivamente. Luego, el valor de $-k$ se obtiene por la siguiente interpolación lineal

Valor de la abscisa z		Probabilidad correspondiente ($P[0 \le Z \le z]$)
0,43	$\longrightarrow$	0,16640
$-k$	$\longrightarrow$	0,16667
0,44	$\longrightarrow$	0,17003

Luego, se obtiene

$$\frac{-k - 0{,}43}{0{,}44 - 0{,}43} = \frac{0{,}16667 - 0{,}16640}{0{,}17003 - 0{,}16640}$$

Al despejar $-k$ de esta igualdad se obtiene $-k = 0{,}4307$

Así, se tiene $k = -0{,}4307 = \dfrac{C-3}{2}$

Por tanto,

$$C = 2(-0{,}4307) + 3 = 2{,}1386$$

Ejemplo 12.- Supongo que las notas de un examen de Matemática están normalmente distribuidas con media 73 y desviación estándar 16. El 15% de los alumnos más adelantados reciben la nota A y 12% de los más atrasados reciben nota F. Encuentre la mínima nota para recibir A y la mínima para no recibir F.

Solución.

Sea X la variable aleatoria que denota la nota de un alumno en el examen de matemática. Luego, $X \sim N(73; (16)^2)$.

Sean x_A: mínima nota para recibir A y x_F: mínima nota para no recibir F (Fig. 9.25). Así, se tiene

i) $P[X > x_A] = P\left[\dfrac{X-73}{16} > \dfrac{x_A - 73}{16}\right] = P\left[Z > \dfrac{x_A - 73}{16}\right] = 0{,}15$

Si $k = \dfrac{x_A - 73}{16}$, entonces se tiene

$P[Z > k] = 0{,}15$, el cual es equivalente a $P[0 \le Z \le k] = 0{,}35$

El valor de k se obtiene por interpolación como sigue

Valor de la abscisa z		Probabilidad correspondiente ($P[0 \le Z \le k]$)
1,03	$\longrightarrow$	0,34850
k	$\longrightarrow$	0,35
1,04	$\longrightarrow$	0,35083

Luego,

$$\frac{k - 1{,}03}{1{,}04 - 1{,}03} = \frac{0{,}35 - 0{,}34850}{0{,}35083 - 0{,}34850}$$

De donde se obtiene $k = 1{,}03644$

Por tanto, $\dfrac{x_A - 73}{16} = k = 1{,}03644 \Leftrightarrow \boxed{x_A = 89{,}58}$

ii) $P[X < x_F] = P\left[\dfrac{X-73}{16} < \dfrac{x_F - 73}{16}\right] = P\left[Z < \dfrac{x_F - 73}{16}\right] = 0{,}12$

Si $k_1 = \dfrac{x_F - 73}{16}$, entonces resulta

$P[Z < k_1] = P[Z > -k_1] = 0{,}12$

De la figura 9.26 y por la propiedad 3, se obtiene

$P[0 \leq Z \leq -k_1] = 0{,}38$

El valor de $-k_1$ se obtiene de la siguiente interpolación lineal.

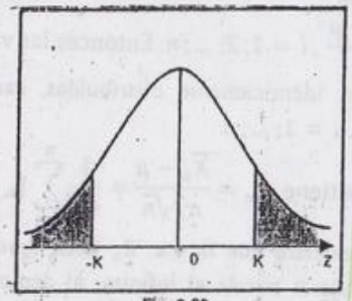


Fig. 9.26

Valor de la abscisa z		Probabilidad correspondiente
1,17	$\longrightarrow$	0,37900
$-k_1$	$\longrightarrow$	0,38
1,18	$\longrightarrow$	0,38100

Luego,

$$\frac{-k_1 - 1{,}17}{1{,}18 - 1{,}17} = \frac{0{,}38 - 0{,}37900}{0{,}38100 - 0{,}37900}$$

De donde resulta

$$-k_1 = 1{,}1705 \Leftrightarrow k_1 = -1{,}1705$$

Así, $k_1 = \dfrac{x_F - 73}{16} = -1{,}1705$

Por tanto, $x_F = 54{,}272$

Ejemplo 13.- Las ventas de un determinado producto tiene distribución aproximadamente normal, con media 500 y desviación estándar 50. Si la empresa decide fabricar 600 unidades en el mes de estudio. ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda atender a todos los pedidos de ese mes por estar con la producción agotada?

Solución.

Sea X la v.a. que denota unidades vendidas en un mes en la empresa.

Entonces $X \sim N(500; (50)^2)$

Luego, la probabilidad pedida es

$$P[X > 600] = P\left[\frac{X - 500}{50} > \frac{600 - 500}{50}\right] = P[Z > 2]$$

$$= 0{,}5 - P[0 \leq Z \leq 2] = 0{,}5 - 0{,}47725 = 0{,}02275$$

Ejemplo 14.- Los diámetros de un número grande de tuercas en un almacén están normalmente distribuidas con media 4 cm y desviación estándar 0,5 cm. Se

necesitan 8 tuercas de diámetro menor que 3,9 cm para reparar un taladro. ¿Cuál es la probabilidad de probar exactamente 15 tuercas?

Solución.

Sea X la v.a. que denota el diámetro de una tuerca cualquiera, entonces

$X \sim N(4; (0{,}5)^2)$

Luego, la probabilidad de que el diámetro de una tuerca cualquiera sea menor a 3,9 cm es

$$P[X < 3.9] = P\left[\frac{X - 4}{0{,}5} < \frac{3{,}9 - 4}{0{,}5}\right] = P[Z < -0{,}2]$$

$$= P[Z > 0{,}2] = 0{,}5 - P[0 \leq Z \leq 0{,}2] = 0{,}42074 = p$$

Sea Y la v.a. que denota el número de tuercas probadas hasta conseguir exactamente 8 con diámetro menor que 3,9 cm

Luego, la v.a. Y tiene distribución binomial negativa con función de probabilidad dada por

$$P[Y = y] = \binom{r + y - 1}{y} p^r . q^y , y = 1; 2; 3; \ldots$$

donde $r = 8$, $p = 0{,}42074$ y $q = 0{,}57926$

Por tanto, la probabilidad de probar exactamente 15 tuercas en la que haya 8 tuercas con diámetro menor que 3,9 cm es

$$P[Y = 7] = \binom{14}{7}(0{,}42074)^8(0{,}57926)^7 = 0{,}073752$$

Ejemplo 15.- El promedio de las alturas de 800 alumnos de una gran unidad escolar es 1,50 m y la desviación estándar es 0,30 m. Suponga que las alturas tienen distribución normal.

a) ¿Cuántos alumnos miden entre 1,30 m y 1,70 m ?

b) ¿Cuántos miden más de 1,65 m?

Solución.

Sea X la v.a. que denota la altura de un alumno cualquiera de la gran unidad escolar, entonces

$X \sim N(1{,}50; (0{,}30)^2)$

a) La probabilidad de que un alumno cualquiera tenga altura entre 1,30 y 1,70m es

$$P[1{,}30 \leq X \leq 1{,}70] = P\left[\frac{1{,}30 - 1{,}50}{0{,}30} \leq \frac{X - 1{,}50}{0{,}30} \leq \frac{1{,}70 - 1{,}50}{0{,}30}\right]$$

$$= P[-0{,}67 \leq Z \leq 0{,}67]$$

$$= 2P[0 \leq Z \leq 0{,}67] = 2(0{,}24857) = 0{,}49714 = p$$

Por tanto, el número de alumnos que miden entre 1,30 y 1,70 m es

$$np = 800(0{,}49714) \cong 398$$

b) La probabilidad de que un alumno cualquiera tenga altura más de 1,65 m es

$$P[X > 1{,}65] = P\left[\frac{X - 1{,}50}{0{,}30} > \frac{1{,}65 - 1{,}50}{0{,}30}\right] = P[Z \geq 0{,}50]$$

$$= 0{,}5 - P[0 \leq Z \leq 0{,}5] == 0{,}30854 = p$$

Por tanto, el número de alumnos que miden más de 1,65 m es

$$np = 800(0{,}30854) \cong 247$$

9.2.3 Teorema del Límite Central

En la sub-sección 9.2.2 fue mostrado que si una muestra aleatoria de tamaño n es extraída de una población con distribución normal con media μ y varianza σ^2, entonces la media muestral tiene distribución normal, esto es,

$$\overline{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma^2}{n})$$

En esta sección presentamos el teorema fundamental de la estadística conocida como Teorema del Límite Central, cuya versión simple es la siguiente:

Si una muestra aleatoria de tamaño n es extraída de una población con distribución dada, con media μ y varianza σ^2 (finito), entonces la distribución de la v.a. media muestral $\overline{X}$ se aproxima cada vez más a una distribución normal cuando n tiende a infinito.

Este resultado fue establecido para una muestra aleatoria (m.a.) extraída de una población con distribución Bernoulli por A. de Moivre al comienzo del siglo XVIII. La prueba para una m.a. extraída de una población con distribución arbitraria fue dado independientemente por I.W. Lindeberg y P. Lévey..

Teorema 5.- (Teorema del Límite Central Lindeberg y Lévey) Si $X_1, \ldots, X_n$ es una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, cada una con una media μ y varianza σ^2 finito $(0 < \sigma^2 < \infty)$, entonces para cualquier número fijo x se tiene

$$\lim_{n \to +\infty} P\left[\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right] = P[Z \leq x] = \Phi(x)$$

o equivalentemente $Z_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cong N(0,1)$, donde $\overline{X}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

Demostración.

Sea $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$, $i = 1; 2; \ldots; n$. Entonces las variables aleatorias $Y_1, \ldots, Y_n$ son independientes idénticamente distribuidas, cada uno con media $E[Y_i] = 0$ y $Var[Y_i] = 1$, $i = 1; \ldots; n$

Luego, se tiene $Z_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$

Ahora se demuestra que la v.a. Z_n tiene aproximadamente distribución normal estándar cuando n tiende al infinito, al demostrar que la función generatriz de momento de Z_n se aproxima a la función generatriz de momentos de la distribución normal estándar cuando n es grande:

Sea $M(t) = E[e^{tY_i}]$ la función generatriz de momentos de la v.a. $Y_i (i = 1; \ldots; n)$, entonces por la propiedad de independencia de la v.a. Y_i, la función generatriz de momentos de Z_n es

$$M_{Z_n}(t) = E[e^{tZ_n}] = E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_i}\right] = \left[M(\frac{t}{\sqrt{n}})\right]^n$$

El desarrollo en serie de Taylor de la función $M(t)$ en torno a $t = 0$ es

$$M(t) = M(0) + tM'(0) + \frac{t^2}{2!}M''(0) + \frac{t^3}{3!}M'''(0) + \cdots$$

De donde, se tiene $M(0) = 1$, $M'(0) = E[Y_i] = 0$ y $M''(0) = E[Y_i^2] = 1$

Luego,

$$M(t) = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}M'''(0) + \cdots$$

Luego, se obtiene

$$M_{Z_n}(t) = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3!\,n^{1/2}}M'''(0) + \cdots)\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{1}{n}(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!\,n^{1/2}}M'''(0) + \cdots)\right]^n$$

En cálculo avanzado se demuestra que si $\lim_{n \to \infty} a_n = b$ para alguna sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ y número b, entonces

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^b = e^b$$

En nuestro caso, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!\,n^{1/2}}M'''(0) + \cdots\right) = \frac{t^2}{2}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!\,n^{1/2}}M'''(0)+\cdots\right)\right]^n$$

$$= e^{t^2/2}$$

Como $e^{t^2/2}$ es la función generatriz de momentos de la distribución normal estándar, entonces el teorema queda demostrado.

Observación 3.- El teorema del Límite Central afirma que la distribución de $\overline{X}_n$ se aproxima a una distribución normal con media μ y varianza σ^2/n cuando n tiende al infinito. Es fácil ver, que la rapidez de esa aproximación depende de la distribución de la población de la cual fue extraída la muestra. Si la población original tiene distribución muy próxima a la de una normal, entonces su aproximación es rápida; sin embargo, si la distribución de la población tiene la forma de una V, entonces esa aproximación es muy lenta. Como regla práctica, se acepta que para muestras con más de 30 elementos la aproximación ya puede ser considerada buena.

Teorema 6.- (Teorema del Límite Central: Liapounov) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una sucesión de v.a. independientes, cada una con media $\mu_i = E[X_i]$ y varianza $\sigma_i^2 = Var[X_i]$ finitos, $i = 1; 2; \ldots; n$ y que $E[|X_i - u_i|^3] < \infty$ (finito), $\forall\, i = 1; 2; \ldots; n$

Suponga también que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} E\left[|X_i - u_i|^3\right]}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0$$

Sea $$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n}\mu_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{1/2}}$$

Entonces para cualquier número fijo x, se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} P[Y_n \le x] = \Phi(x)\text{, esto es, } Y_n \cong N(0;1)$$

Demostración.- Ejercicio para el lector.

La interpretación del teorema 6 es el siguiente.

Si (*) es verdadero, entonces para cualquier n grande, la distribución de

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ es aproximadamente normal con media $\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ y varianza $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$

Ejemplo 16.- Suponga que se extrae una m.a. de tamaño 12 de una población con distribución uniforme en el intervalo (0; 1). Calcule $P[|\overline{X} - 1/2| \le 0{,}1]$.

Solución. Sea X la v.a. con distribución uniforme en el intervalo $< 0; 1 >$, entonces se tiene

$$\mu = E[X] = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = Var[X] = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

Luego, por el teorema del Límite Central se obtiene

$$\overline{X} \sim N\left(\frac{1}{2}; \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{144}\right)$$

Por tanto,

$$P\left[\left|\overline{X} - \frac{1}{2}\right| \le 0{,}1\right] = P\left[-0{,}1 \le \overline{X} - \frac{1}{2} \le 0{,}1\right]$$

$$= P\left[\frac{-0{,}1}{1/12} \le \frac{\overline{X} - 12}{1/12} \le \frac{0{,}1}{1/12}\right] = P[-1{,}2 \le Z \le 1{,}2]$$

$$= 2P[0 \le Z \le 1{,}2] = 2(0{,}38493) = 0{,}76986$$

Ejemplo 17.- El número de estudiantes que se matriculan en el curso de Matemática I es una v.a. con distribución de Poisson con media 100.

El profesor asignado para enseñar este curso decide lo siguiente. Si el número de matriculados es 120 o más, él enseñará el curso en 2 secciones separadas, mientras que si el número de matriculados es menor que 120 él enseñará a todos los estudiantes en una sola sección. ¿Cuál es la probabilidad de que el profesor tenga que enseñar 2 secciones?

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de estudiantes matriculados en el curso de Matemática I.

Luego $X \sim P(\lambda)$, donde $\lambda = 100$ $(E[X] = \mu = 100)$

Al considerar esta v.a. Poisson con media 100 como la suma de 100 v.a. cada una con distribución Poisson con media 1, y usar el Teorema 5, se tiene

$$P[X \ge 120] = P\left[\frac{X-100}{\sqrt{100}} \ge \frac{120-100}{10}\right] = P[Z \ge 2]$$

$$= 0{,}5 - P[0 \le Z \le 2] = 0{,}5 - 0{,}47725 = 0{,}02275$$

9.2.4 Aproximación de la Distribución Binomial a una Normal

Al aplicar el Teorema de Liapounov, se establece el siguiente resultado.

Teorema 7.- (De Moivre-Laplace) Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli con parámetro p, y sea

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

donde $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Entonces para cualquier número fijo x se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} P[Y_n \le x] = \lim_{x \to +\infty} P\left[\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right] = \Phi(x)$$

esto es

$$Y_n = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \cong N(0;1) \text{ cuando } n \text{ es grande}$$

Demostración.- Ejercicio para el lector

Esta aproximación es buena cuando n es grande y el valor de p está cerca de $1/2$. En general, cuando $np > 5$ y $p < 1/2$ la aproximación es satisfactoria.

Observación 4.- Si X es una v.a. con distribución binomial, entonces para calcular la probabilidad de un valor aislado de X, esto es, $P[X = x]$, se calcula de la siguiente manera

$$P[X = x] = P[x - 0{,}5 \le X \le x + 0.5]$$

Teorema 8.- Suponga que las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ son independientes y que cada X_i tiene distribución Bernoulli con parámetro p_i $(i = 1; 2; \ldots; n)$

Suponga también que la serie infinita $\sum_{i=1}^{\infty} p_i q_i$ es divergente, y sea

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} p_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^{1/2}}$$

Entonces para cualquier número fijo x,

$$\lim_{n \to +\infty} P[Y_n \le x] = \Phi(x), \text{ esto es, } Y_n \cong N(0;1) \text{ cuando n es grande}$$

Demostración.- Se tiene

$E[X_i] = p_i$, $Var[X_i] = p_i q_i$ y

$E[|X_i - p_i|^3] = p_i q_i^3 + q_i p_i^3 = p_i q_i (p_i^2 + q_i^2) \le p_i q_i$

Luego,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} E\left[|X_i - p_i|^3\right]}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^{3/2}} \le \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^{1/2}}$$

Como $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = +\infty$, entonces $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} E\left[|X_i - p_i|^3\right]}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)^{3/2}} = 0$

Por tanto, por el teorema 6 se tiene

$$\lim_{n \to +\infty} P[Y_n \le x] = \Phi(x)$$

Ejemplo 18.- Suponga que un examen de Estadística I contiene 99 preguntas ordenadas en una secuencia de lo más fácil a lo más difícil.
Suponga también que la probabilidad de que cualquier estudiante de dicho curso resuelva correctamente la primera pregunta es 0,99, la probabilidad de que él resuelva correctamente la segunda pregunta es 0,98, en general, la probabilidad de que él resuelva correctamente la i-ésima pregunta es $1 - i/100$, $\forall\, i = 1; \ldots; 99$.
Al suponer que todas las preguntas son resueltas independientemente y que el estudiante debe responder correctamente por lo menos 60 preguntas para aprobar el curso. Determine la probabilidad de que el estudiante apruebe el curso.

Solución.

Sea $X_i = 1$ si la i-ésima pregunta es resuelto correctamente y $X_i = 0$ en otro caso.

Entonces $E[X_i] = p_i = 1 - \frac{i}{100}$ y $Var[X_i] = p_i q_i = \left(1 - \frac{i}{100}\right)\frac{i}{100}$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{99} p_i = \sum_{i=1}^{99}\left(1 - \frac{i}{100}\right) = 99 - \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{99} i = 99 - \frac{1}{100}\cdot\frac{99(100)}{2} = 49{,}5$$

$$\sum_{i=1}^{99} p_i q_i = \sum_{i=1}^{99}\frac{i}{100}\left(1 - \frac{i}{100}\right) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{99} i - \frac{1}{(100)^2}\sum_{i=1}^{99} i^2$$

$$= 49{,}5 - \frac{1}{(100)^2}\cdot\frac{(99)(100)(199)}{6} = 16{,}665$$

Luego, por el teorema 7 la distribución del número total de preguntas que son resueltas correctamente, esto es

$$\sum_{i=1}^{99} X_i$$

tiene aproximadamente distribución normal con media 49,5 y varianza 16,665

Por tanto,

$$P\left[\sum_{i=1}^{99} X_i \geq 60\right] = P\left[\frac{\sum_{i=1}^{99} X_i - 49{,}5}{\sqrt{16{,}665}} \geq \frac{60 - 49{,}5}{\sqrt{16{,}665}}\right]$$

$$= P[Z \geq 2{,}57] = 0{,}5 - P[0 \leq Z \leq 2{,}57]$$

$$= 0{,}5 - 0{,}49492 = 0{,}00508$$

Ejemplo 19.- Se tira 500 veces una moneda y se pide

a) Probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 245 y 255

b) Intervalo $[a; b]$ centrado en 250, que verifique $P[X \in [a; b]] = 0{,}95$

Solución.

a) Sea X la variable que denota el número de caras, entonces X tiene distribución binomial de parámetros $n = 500$ y $p = 0{,}5$. Luego,

$$E[X] = np = 500(0{,}5) = 250 \ , \qquad Var[X] = npq = 125$$

Por tanto, por el teorema de Moivre se tiene

$$P[245 \leq X \leq 255] = P\left[\frac{245 - 250}{\sqrt{125}} \leq \frac{X - 250}{\sqrt{125}} \leq \frac{255 - 250}{\sqrt{125}}\right]$$

$$= P[-0{,}45 \leq Z \leq 0{,}45] = 2P[0 \leq Z \leq 0{,}45]$$

$$= 2(0{,}17364) = 0{,}34728$$

b) Un intervalo centrado en 250 es de la forma $[250 - k; 250 + k]$

Luego,

$$P[X \in < 250 - k; 250 + k >] = P[250 - k \leq X \leq 250 + k]$$

$$= P\left[\frac{-k}{\sqrt{125}} \leq \frac{X - 250}{\sqrt{125}} \leq \frac{k}{\sqrt{125}}\right]$$

$$= P\left[\left[-\frac{k}{\sqrt{125}} \leq Z \leq \frac{k}{\sqrt{125}}\right]\right] = 2P\left[0 \leq Z \leq \frac{k}{\sqrt{125}}\right] = 0{,}95$$

De donde resulta

$$P\left[0 \leq Z \leq \frac{k}{\sqrt{125}}\right] = 0{,}475$$

Al usar la tabla I del apéndice se obtiene

$$\frac{k}{\sqrt{125}} = 1{,}96 \Rightarrow k = 1{,}96\sqrt{125} = 21{,}9135$$

Por tanto,

$$a = 250 - k = 228{,}0865 \ \ y \ \ b = 250 + k = 271{,}9135$$

Ejemplo 20.- De una colección grande de pernos que contiene 3% de pernos defectuosos, 1 000 pernos son elegidos al azar. Si X denota el número de pernos defectuosos entre los elegidos, ¿cuál es la probabilidad de que este número no exceda a 5% de 1 000?

Solución.

Se tiene $n = 1\,000$, $p = 0{,}03$, $q = 0{,}97$

Luego,

$$P[X \leq 50] = P\left[\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{50 - 1\,000(0{,}03)}{\sqrt{1\,000(0{,}03)(0{,}97)}}\right]$$

$$= P[Z \leq 3{,}71] = 0{,}5 + P[0 \leq Z \leq 3{,}71]$$

$$= 0{,}5 + 0{,}49990 = 0{,}99990$$

Ejemplo 21.- Los médicos residentes de la Universidad de San Marcos afirman que cierto virus ha invadido a la Universidad de San Marcos y ha atacado a 30% de los estudiantes. Para verificar la afirmación se toma una muestra de 800 estudiantes y se pide calcular.

a) La probabilidad de que en dicha muestra el 25% sean atacados por el virus.

b) La probabilidad de que 400 estudiantes presentan síntoma del virus.

Solución.

Sea X la variable que denota el número de estudiantes atacados por el virus, luego X tiene distribución binomial con parámetros $n = 800$ y $p = 0{,}30$

Así, se tiene

$$E[X] = np = 800(0{,}30) = 240 \ , \qquad Var[X] = npq = 168$$

a) El 25% de 800 es $x = 200$. Luego, al aplicar el teorema de Moivre resulta

$$p = P[X = 200] = P[200 - 0{,}5 \leq X \leq 200 + 0{,}5] \ \text{(Observación 4)}$$

$$= P[199{,}5 \leq X \leq 200{,}5] = P\left[\frac{199{,}5 - 240}{\sqrt{168}} \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{200{,}5 - 240}{\sqrt{168}}\right]$$

$$= P[-3{,}12 \leq Z \leq -3{,}05]$$

$$p = P[3{,}05 \le Z \le 3{,}12] = P[0 \le Z \le 3{,}12] - P[0 \le Z \le 3{,}05]$$
$$= 0{,}49910 - 0{,}49885 = 0{,}00024$$

b) $P[X = 400] = P[399{,}5 \le X \le 400{,}5]$

$$= P\left[\frac{399{,}5 - 240}{\sqrt{168}} \le z \le \frac{400{,}5 - 240}{\sqrt{168}}\right]$$
$$= P[12{,}31 \le Z \le 12{,}38] = 0$$

Ejemplo 22.- Una empresa dedicada a la venta de televisores, ofrece a sus habituales clientes dos formas de pago: "pago al contado" y "pago a plazos". Se sabe que el 70% de las unidades vendidas de dichos televisores lo son bajo la forma de "pago a plazos".

Si en un determinado periodo de tiempo se han vendido 500 unidades, determine la probabilidad de que 375 o menos, lo hayan sido bajo la forma de pago a plazos.

Solución.

Sea X la v.a. que denota el número de televisores vendidos a plazos en la muestra de 500. Entonces X tiene distribución binomial con parámetros $n = 500$, $p = 0{,}70$. Luego,

$E[X] = np = 350$, $Var[X] = npq = 105$

Por tanto,

$$P[X \le 375] = P\left[\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{375 - 350}{\sqrt{105}}\right] = P[Z \le 2{,}44]$$
$$= 0{,}5 + P[0 \le Z \le 2{,}44] = 0{,}5 + 0{,}49266 = 0{,}99266$$

EJERCICIOS

1.- Si Z es una variable aleatoria con distribución $N(0;1)$, calcule:

a) $P[0 \le Z \le 1{,}44]$ R. 0,42502
b) $P[-0{,}85 < Z < 0]$ R. 0,30234
c) $P[-1{,}48 < Z < 2{,}05]$ R. 0,91038
d) $P[0{,}72 < Z < 1{,}89]$ R. 0,20638
e) $P[Z \ge 1{,}08]$ R. 0,14007
f) $P[Z \ge -0{,}66]$ R. 0,74537
g) $P[|Z| \le 1{,}5]$ R. 0,86638

2.- Si $X \sim N(1\,;\,4)$. Calcule:

a) $P[X \le 3]$ b) $P[X > 1{,}5]$ c) $P[X = 1]$
d) $P[2 < X < 5]$ e) $P[X \ge 0]$ f) $P[-1 < X < 0{,}5]$
g) $P[|X| \le 2]$ h) $P[1 \le -2X + 3 \le 8]$ i) $P[X < 5X + 2{,}4]$

3.- Sea $X \sim N(100;100)$. Calcule:

a) $P[X < 115]$ b) $P[X \ge 80]$ c) $P[|X - 100| \le 10]$
d) Hallar el valor de k, tal que $P[100 - k \le X \le 100 + k] = 0{,}95$

4.- Si $X \sim N(\mu;\sigma^2)$, encuentre

a) $P[X \le \mu + 2\sigma]$ R. 0,97 b) $P[|X - 4| \le \sigma]$ R. 0,68
c) Halle el número k, tal que $P[\mu - k\sigma \le \mu + k\sigma] = 0{,}90$ R. $k = 2{,}58$
d) Halle el número k, tal que $P[X > k] = 0{,}90$ R. $k = \mu - 1{,}28\sigma$

5.- La duración de un cierto componente eléctrico está normalmente distribuido con media 850 días y desviación estándar 45 días. Calcule la probabilidad de que el componente dure:

a) entre 700 y 1 000 días R. 0,99914
b) más de 800 días R. 0,86650
c) menos de 750 días R. 0,01321
d) exactamente 1 000 días R. 0

6.- Las alturas de 10 000 alumnos de un colegio tienen distribución aproximadamente normal, con media 1,70m y desviación estándar 0,05m

a) ¿Cuál es el número esperado de alumnos con altura superior a 1,65m? R. 8 413

b) ¿Cuál es el intervalo simétrico en torno a la media, que contenga 75% de las alturas de los alumnos? R. [1,642483; 1,757517]

7.- Los pesos de 600 estudiantes están normalmente distribuidos con media 65,3 kg y desviación estándar 5,51 kg. Encuentre el número de alumnos que pesan

a) entre 60 y 70 kg R. 380 b) más de 63,2 kg R. 389

8.- Una fábrica de neumáticos hace una prueba para medir la duración de sus llantas y verificó que la duración de las llantas tenía distribución normal, con media 48 000 km y desviación estándar de 2 000 km. Calcule la probabilidad de que una llanta escogida al azar

a) dure más de 46 000 km R. 0,84134
b) dure entre 45 000 y 50 000 km R. 0,77453

9.- Las notas de Estadística I de los alumnos de una determinada Universidad se distribuyen de acuerdo a una distribución normal, con media 12,8 y desviación estándar 1,6. El profesor del curso atribuye grados A, B y C de la siguiente forma

Nota	Grado
$X < 10$	C
$10 \leq X < 15$	B
$15 \leq X \leq 20$	A

En una clase de 80 alumnos, ¿cuál es el número esperado de alumnos con grado A?, B? y C? R. 3; 70 ; 7

10.- Cierto producto tiene peso medio de 10 gr y una desviación estándar de 0,5 gr. Es embalado en cajas de 120 unidades que pesan en promedio 150 gr y desviación estándar de 8 gr. Al suponer que la distribución de los pesos es normal, ¿cuál es la probabilidad de que una caja llena pese más de 1370 gr?

R. 0,0197

11.- El gerente de Moraveco piensa que la vida útil de sus refrigeradoras está distribuida normalmente con una media de 50 000 horas. Si además, el gerente piensa que hay una probabilidad de 0,20 de que la refrigeradora dure menos de 30 000 o más de 70 000 horas, ¿cuál es la desviación estándar?

R. 15 605,49

12.- Se sabe que el 5% de los tubos producidos por cierto fabricante son defectuosos. Si el fabricante envía a un mayorista 1 000 lotes donde cada lote contiene 100 tubos, ¿en cuánto de estos lotes espera tener:

a) menos de 90 tubos defectuosos? b) 98 o más tubos buenos?

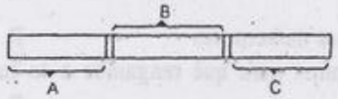
13.- El peso bruto de latas de conserva es una v.a. normal, con media 1 000 gr y desviación estándar 20 gr. Las latas tienen peso medio de 100 gr y desviación estándar 10 gr, también con distribución normal.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata contenga menos de 850 gr de peso líquido? R: 0,01255

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata contenga más de 920 gr de peso líquido? R. 0,18673

14.- Una varilla recta consiste de 3 secciones A, B y C, cada uno de los cuales es fabricado en máquinas diferentes. La longitud de la sección A, en pulgadas, tiene distribución normal con media 20 y varianza 0,04. La longitud de la sección B tiene distribución normal con media 14 pulgadas y varianza 0,01 $pulg^2$. La longitud de la sección C tiene distribución normal con media 26 pulgadas y

varianza 0,04 $pulg^2$. Como se indica en la figura posterior, la varilla está formada conectando las 3 secciones con remaches de 2 pulgadas en cada conexión. Suponga que la varilla puede ser usada en la construcción de las alas de un aeroplano si su longitud total en pulgadas está entre 55,7 y 56,3 pulg. ¿Cuál es la probabilidad de que la varilla pueda ser usada?



15.- Suponga que los diámetros de los pernos de una caja grande tiene distribución normal con media 2 cm y desviación estándar de 0,03 cm. También, suponga que los diámetros de las tuercas de otra caja grande tiene distribución normal con media 2,02 cm y desviación estándar de 0,04 cm. Suponga finalmente que un perno y una tuerca encajan si el diámetro de la tuerca es mayor que el diámetro del perno y la diferencia entre estos dos diámetros no es mayor que 0,05 cm. Si un perno y una tuerca son seleccionados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ellos encajen?

R. 0,38117

16.- Un avión de turismo de 4 asientos lleva una carga útil de 350 kg. Al suponer que los pesos de los pasajeros están normalmente distribuidos con media 70 kg y desviación estándar de 20 kg, y que los pesos de los equipajes de los pasajeros también están normalmente distribuidos con media 12 kg y desviación estándar 5 kgr. Calcule la probabilidad de:

a) haber sobrecarga si el piloto no ha pesado a los 4 pasajeros y sus equipajes. R. 0,2981

b) que el piloto tiene que botar por lo menos 50 kgr de gasolina para evitar sobrecarga R. 0,0401

17.- La distribución de los pesos de conejos criados en una granja puede muy bien ser representada por una distribución normal, con media de 5 kgr y desviación estándar de 0,8 kg . Un comerciante compra 5 000 conejos y pretende clasificarlos de acuerdo con el peso, del siguiente modo: 20% de los leves como pequeños, los 55% siguientes como medios, los 15% siguientes como grandes y los 10% más pesados como extras, ¿cuáles son los límites de peso para cada clasificación? R. 4,33; 5,54 ; 6,02

18.- En una distribución normal, 28% de los elementos son superiores a 34 y 12% inferiores a 19. Encuentre la media y la varianza de la distribución

R. $u = 29{,}03$, $\sigma^2 = 73{,}44$

19.- Suponga que el diámetro promedio de las tuercas producidas por una fábrica es de 0,25 pulgadas y una desviación estándar 0,02 pulgadas. También suponga que los diámetros de las tuercas tienen distribución normal. Una tuerca es considerada defectuosa si su diámetro es mayor que 0,28 pulgadas o menos que 0,20 pulgadas.

a) Encuentre el porcentaje de tuercas defectuosas R. 7,3%

b) ¿Cuál debe ser la medida mínima para que tengamos a lo más 12% de tuercas defectuosas? R. 0,2266

20.- Una llenadora automática de jarras de refrescos está regulada para que el volumen promedio de líquido en cada jarra sea de 1 000 cm^3 y la desviación estándar de 10 cm^3. Admitiendo que la distribución de la variable es normal.

a) ¿Cuál es el porcentaje de jarras en donde el volumen del líquido es menor que $990cm^3$?

b) ¿Cuál es el porcentaje de jarras, en donde el volumen del líquido no se desvíe de la media en más de 2 desviaciones estándares?

21.- Suponga que la duración de la vida de dos equipamientos E_1 y E_2 tienen respectivamente distribuciones: N(45; 9) y N(40; 36). Si el equipamiento tuviera que ser usado por un periodo de 45 horas, ¿cuál de ellos deber ser preferido? R. E_1

22.- Cierta máquina de embalar determinado producto ofrece variaciones de pesos con desviación estándar de 20 gr.

a) ¿En cuánto debe ser regulado el peso promedio del paquete para que solamente 10% tengan menos de 400 gr? R. 425,60

b) Calcule la probabilidad de que un paquete salga con más de 450 gr R. 0,1112

23.- El diámetro X de esferas fabricadas por cierta fábrica tiene distribución $N(0{,}6140;\ (0{,}0025)^2)$. El precio de costo T de cada esfera depende de su diámetro, y

$T = 0{,}10$ si la esfera es buena $(0{,}6100 < X < 0{,}6180)$

$T = 0{,}05$ si la esfera es recuperable $(0{,}6089 < X < 0{,}6100)$ ó $(0{,}6180 < X < 0{,}6280)$

$T = -0{,}10$ si la esfera es defectuosa $(X < 0{,}61$ ó $X > 0{,}62)$

Calcule:

a) Las probabilidades de que las esferas sean buenas, recuperables y defectuosas.

b) $E[T]$

24.- El diámetro de cierto tipo de anillo industrial es una v.a. con distribución normal con media 0,10 cm y desviación estándar de 0,02 cm. Si el diámetro de un anillo difiere de la media en más de 0,03 cm, el anillo es vendido a S/. 5, en caso contrario, es vendido a S/. 10. ¿Cuál es el precio promedio de venta de cada anillo? R. S/. 9,67

25.- Una empresa produce televisores y garantiza la devolución de la cantidad pagada si cualquier televisor que vende presenta algún defecto grave, en el plazo de 6 meses. La empresa produce televisores del tipo A común y del tipo B de lujo, con un lucro respectivo de S/. 1 000 y S/. 2 000 caso que no haya devolución, y con un perjuicio de S/. 3 000 y S/. 8 000 si hubiera devolución. Suponga que el tiempo para la ocurrencia de algún defecto grave sea, en ambos casos, una v.a. con distribución normal, respectivamente, con medias 9 meses y 12 meses, y varianzas 4 $(\text{meses})^2$ y $9(\text{meses})^2$. Si tuviera que planear una estrategia de "marketing" para la empresa, ¿Ud. Incentivaria las ventas de los aparatos del tipo A o del tipo B?

26.- Una empresa sabe que el comportamiento en probabilidad de la demanda aleatoria de un artículo que produce, viene explicada por la ley $N(10\,000; 100)$. Si la empresa decide seguir produciendo el artículo en el futuro, supuesto que la demanda está comprendida entre 9 930 y 10 170 unidades. Determine la probabilidad de que no siga produciendo el artículo R. 0,28653

27.- Un concesionario de automóviles vende a particulares vehículos de la misma marca. Si se sabe que la probabilidad de que este tipo de vehículos esté en el servicio dos años después, es de 0,8, determine la probabilidad de que de 4 000 automóviles vendidos, más de 3 120 estén en servicio dentro de dos años. R. 0,99921

28.- En una población de obreros inválidos, el 40% tiene menos de 55 años. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 15 obreros de esta población, 8 o más tengan menos de 55 años? R. 0,14686

29.- Dos tipos de monedas son producidas por una fábrica: Una moneda perfecta y una sesgada en la que aparece la cara hacia arriba en 55% de las veces. Antonio tiene una de esas monedas pero no sabe si la moneda es perfecta o sesgada. A fin de averiguar qué tipo de moneda tiene, él realiza la siguiente prueba estadística. Lanza la moneda 1 000 veces. Si la moneda cae al suelo con cara hacia arriba en 525 o más veces, entonces él concluye que la moneda es sesgada, mientras, si cae con cara hacia arriba menos de 525 veces, entonces

él concluye que la moneda es correcta. Si la moneda es realmente perfecta, ¿cuál es la probabilidad de que él llegue a una conclusión falsa? R. 0,05705

30.- Suponga que el número de accidentes por año Y, en una intersección dada tiene un distribución Poisson. Se sabe que en años anteriores, hubo un promedio de 36 accidentes por año en dicha intersección. Si el número de accidentes por año es por lo menos 45 en dicha intersección, se incluirá para ser reconstruido en un conjunto de programas de emergencia realizado por el estado. Calcule la probabilidad de que la intersección en cuestión se incluirá en el programa de emergencia al final del próximo año. R. 0,06681

31.- Un antropólogo desea estimar la altura promedio de hombres de cierta raza. Si la desviación estándar poblacional es 2,5 pulgadas y si él selecciona una m.a. de 100 hombres, encuentre la probabilidad de que la diferencia entre la media muestral y media poblacional verdadera no exceda a 0,5 pulgadas. R. 0,9545

32.- Suponga que el antropólogo del ejercicio 31; desea que la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor que 0,4 pulgadas con probabilidad de 0,95. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que consiga ese objetivo? R. 157

33.- Cincuenta dados perfectos son lanzados en una sola vez y sea X la variable que denota la suma de los puntos que aparecen hacia arriba. Encuentre aproximadamente la probabilidad de que $150 \leq X \leq 200$ R. 0,96155

34.- Suponga que 53% de los votos favorecen a cierta propuesta legislativa. ¿Cuántos votos deben ser muestreados, de modo que la frecuencia relativa observada de los votos favorables a la propuesta no difiera de la frecuencia supuesta en más de 2% con probabilidad de 0,99? R. 4 146

35.- Sean $X_1, \ldots, X_n$; $Y_1, \ldots, Y_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con $E[X_j] = E[Y_j] = \mu$ y $Var[X_j] = Var[Y_j] = \sigma^2$ ambos finitos $\forall j = 1; 2; \ldots; n$. Determine el tamaño de la muestra n tal que $P[|\overline{X} - \overline{Y}| \leq 0{,}25\sigma] = 0{,}95$ R. 123

36.- Una firma de investigación de opinión pública entrevista a 1 200 electores para estimar la proporción de los que planean votar por el candidato A. ¿Cuál debe ser la verdadera proporción p para que el candidato A pueda estar 95% seguro de que la mayoría de los entrevistados votarán por él? R. 0,523

37.- Suponga que el candidato A del problema 38, insiste que el tamaño de la muestra debe ser tal que si 51% de todos los electores lo favorecen, él puede estar 95% seguro de obtener la mayoría de votos en la muestra. ¿Cuál deber ser el valor de n? R. 6 700

38.- Si 20% de los conductores de automóviles en una cierta ciudad tienen por lo menos un accidente durante un año de manejo, ¿cuál es la probabilidad de que el porcentaje para 300 clientes de una compañía de seguros en esa ciudad exceda al 25% durante el próximo año? R. 0,015

39.- Las aerolíneas y los hoteles aseguran frecuentemente reservaciones por encima de su capacidad, con el objeto de minimizar las pérdidas ocasionadas por los pasajeros que no se presentan. Suponga que los archivos de un hotel indican que, en promedio, 10% de sus clientes no se presentan a reclamar sus reservaciones. Si el hotel acepta 215 reservaciones y sólo hay 200 habitaciones en el hotel, ¿cuál es la probabilidad de que todos los clientes lleguen a reclamar su reservación y consigan su habitación? R. 0,94408

40.- Un fabricante de medicamentos pregona que cierta droga cura una enfermedad sanguínea, en promedio, el 80% de las veces. Para comprobar lo anterior, una Oficina Gubernamental aplica la droga a una muestra de 100 individuos y decide aceptar lo enunciado si se curan 75 o más.

a) ¿Cuál es la probabilidad de rechazo de la propaganda, si la probabilidad de curación es de 0,8?

b) ¿Cuál es la probabilidad de aceptarla, si la probabilidad de curación es tan bajo como de 0,7? R. 0,13876

41.- La carga máxima (con un factor de seguridad generoso) para el elevador de un edificio de oficinas es de 2 000 libras. La distribución de frecuencias relativas de los pesos de todos los hombres y mujeres que usan el elevador tiene forma monticular (ligeramente alargada hacia los pesos grandes) con media igual a 150 libras y desviación estándar igual a 35 libras. ¿Cuál es el mayor número de personas que se debe permitir en el elevador si se quiere que el peso total exceda al peso máximo con una probabilidad pequeña de 0,01? R. 11

9.3 MODELO EXPONENCIAL Y GAMMA

9.3.1 Distribución Exponencial

Definición 3.- Se dice que una v.a. continua X tiene distribución exponencial con parámetro $\beta > 0$, si su función de densidad es dado por

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, & si\ x > 0 \\ 0, & si\ x \le 0 \end{cases}$$

La función de distribución acumulada de la v.a. X es dado por

$$F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\beta x}, & si\ x \ge 0 \end{cases}$$

Las gráficas de las funciones $f(x)$ y $F(x)$ se ilustran en las figuras 9.27 y 9.28, respectivamente.

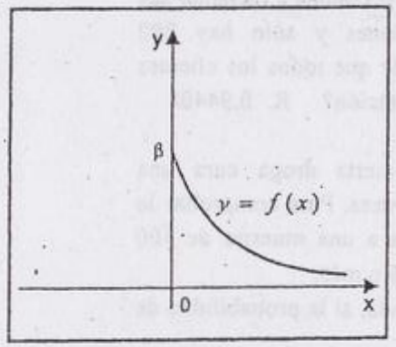


Fig. 9.27

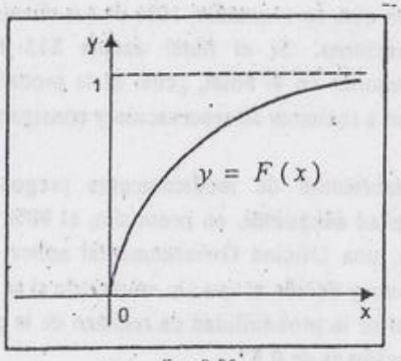


Fig. 9.28

El modelo exponencial tiene muchas aplicaciones en el campo de la estadística, especialmente en las áreas de la teoría de confiabilidad y tiempo de espera o en problemas de teoría de colas.

Teorema 9.- Si X es una v.a. con distribución exponencial con parámetro $\beta > 0$, entonces

i) $E[X] = \dfrac{1}{\beta}$, $\quad Var[X] = \dfrac{1}{\beta^2}$

ii) $M_X(t) = \dfrac{\beta}{\beta - t}$, $\quad si\ t < \beta$

Demostración. Se tiene

i) $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta x e^{-\beta x} dx = \int_{0}^{+\infty} x e^{-\beta x} = \beta \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{x}{\beta} e^{-\beta x} - \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta x} \right]_0^t$$

$$= \beta \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{t}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta^2} \right] = \beta \left(\frac{1}{\beta^2} \right) = \frac{1}{\beta}$$

$$E[X^2] = \beta \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x} dx = \beta \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{x^2}{\beta} e^{-\beta x} - \frac{2x}{\beta^2} e^{-\beta x} - \frac{2}{\beta^3} e^{-\beta x} \right]_0^t$$

$$= \beta \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{t^2}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{2t}{\beta^2} e^{-\beta t} - \frac{2}{\beta^3} e^{-\beta t} + \frac{2}{\beta^3} \right]$$

$$= \beta \left(\frac{2}{\beta^3} \right) = \frac{2}{\beta^2}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

ii) $$M_X(t) = E[e^{tx}] = \beta \int_{0}^{+\infty} e^{tx} e^{-\beta x} dx$$

$$= \beta \lim_{v \to +\infty} \left[-\frac{e^{-(\beta - t)x}}{\beta - t} \right]_0^v = \lim_{v \to +\infty} \left[-\frac{e^{-(\beta - t)v}}{\beta - t} + \frac{1}{\beta - t} \right]$$

$$= \frac{\beta}{\beta - t}, \quad si\ t < \beta$$

Ejemplo 23.- El tiempo de vida (en horas) de un transistor es una v.a. T con función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{500} e^{-\frac{1}{500}t}, & si\ t > 0 \\ 0, & si\ t \le 0 \end{cases}$$

Halle la probabilidad de que su tiempo de vida sea mayor que su media

Solución. Se tiene $E[T] = \dfrac{1}{\beta} = 500$

Por tanto,

$$P[T \ge 500] = \int_{500}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{500} \lim_{v \to +\infty} \left[-500 e^{-\frac{t}{500}} \right]_{500}^{v}$$

$$= \frac{1}{500} \lim_{v \to +\infty} \left[-500 e^{-\frac{v}{500}} + 500 e^{-1} \right]$$

$$= e^{-1} = 0{,}3679$$

Ejemplo 24.- Suponga que el número de millas que un carro pueda recorrer antes que su batería se consuma está exponencialmente distribuida con un promedio de 10 000 millas. Si una persona desea hacer una excursión de 5 000 millas, ¿cuál es la probabilidad de que él complete su excursión sin tener que reemplazar la batería del carro?

Solución.

Sea X la variable que denota el tiempo de vida de la batería, luego X tiene distribución exponencial con parámetro

$$\beta = \frac{1}{10\,000}$$

Por tanto,

$$P[X > 5\,000] = \int_{5000}^{+\infty} \frac{1}{10\,000} e^{-\frac{x}{10000}} dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[-e^{-\frac{x}{10000}}\right]_{5000}^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left[-e^{-\frac{t}{10000}} + e^{-1/2}\right]$$

$$= e^{-1/2} = 0{,}60653$$

Ejemplo 25.- La vida en años de un cierto tipo de componente de un sistema tiene distribución exponencial con parámetro $\beta = 1/10$. Si en un sistema diferente se instalan 4 de estas componentes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos continúen funcionando al término de 10 años?

Solución.

Sea T la variable que denota tiempo de duración de un componente, entonces la probabilidad de que un componente dado siga funcionando después de 10 años es

$$P[T > 10] = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}} dt = e^{-1} = 0{,}36788$$

Sea X la variable que denota al número de componentes que funcionan después de 10 años, entonces $X \sim b(4;\ 0{,}36788)$

Por tanto,

$$P[X \geq 3] = 1 - P[X < 3]$$

$$= 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2])$$

$$= 1 - 0{,}855798 = 0{,}1442$$

9.3.2 Función Gamma

Definición 4.- La función gamma denotada por $\Gamma(.)$ es dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Se demuestra que el valor de esta integral es finito $\forall\ \alpha > 0$. Por tanto, el dominio de la función gamma es

$$D_\Gamma = \langle 0;\ +\infty \rangle$$

Teorema 10.- Si $\alpha > 1$, entonces $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$

Demostración.

Al aplicar el método de integración por partes a la integral dada en la definición 4, se tiene

$$u = x^{\alpha-1}, \qquad dv = e^{-x}dx$$

$$du = (\alpha - 1)x^{\alpha-2}dx, \quad v = -e^{-x}$$

Luego,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v du$$

$$= \lim_{t\to+\infty} [-x^{\alpha-1}e^{-x}]_0^t + (\alpha - 1)\int_0^{+\infty} x^{\alpha-2}e^{-x}dx$$

$$= 0 + (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

Corolario 3.

i) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$

ii) $\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!$, para $n = 1; 2; \ldots$

iii) $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, para $n = 1; 2; \ldots$

iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

9.3.3 Distribución Gamma

Definición 5.- Se dice que la v.a. X continua tiene distribución gamma con parámetros α y β ($\alpha > 0$ y $\beta > 0$), si su función de densidad es dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha X^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} . e^{-\beta x}, & si\ x > 0 \\ 0, & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Observación 5.- Si en la función de densidad gamma, se hace $\alpha = 1$, entonces se obtiene la función de densidad exponencial con parámetro β.

Teorema 11.- Si X es una v.a. que tiene distribución gamma con parámetros α y β, entonces

i) $E[X] = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $\quad Var[X] = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

ii) $M_X(t) = \left(\dfrac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$, para $t < \beta$

Demostración. Ejercicio para el lector.

Teorema 12.- Si las variables aleatorias $X_1, \dots, X_k$ son independientes y si cada X_i tiene distribución gamma con parámetros α_i y $\beta (i = 1; \dots; k)$ entonces la suma $X_1 + \cdots + X_k$ tiene distribución gamma con parámetros $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ y β

Demostración.- De acuerdo al teorema 11, la función generatriz de momentos de X_i es

$$M_{X_i}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_i}, \text{ para todo } t < \beta$$

Luego, la función generatriz de momentos de $T = X_1 + \cdots + X_k$ es

$$M_T(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}, \text{ para } t < \beta$$

Por tanto, la suma $X_1 + \cdots + X_k$ tiene distribución gamma con parámetros $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ y β

Ejemplo 26.- Suponga que la vida en años de hombres residentes en un país dado tiene distribución gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 0{,}02$. ¿Qué proporción de hombres residentes en dicho país vivirán más de 50 años?

Solución.

Sea X la variable que denota longitud de vida en años de hombres residentes, entonces se tiene

$$p = P[X > 50] = \int_{50}^{+\infty} \beta^2 x e^{-\beta x} dx = \beta^2 \int_{50}^{+\infty} x e^{-\beta x} dx$$

$$p = \beta^2 \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{x}{\beta} e^{-\beta x} - \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta x} \right]_{50}^{t}$$

$$= \beta^2 \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{t}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta t} + \frac{50}{\beta} e^{-50\beta} + \frac{1}{\beta^2} e^{-50\beta} \right]$$

$$= \beta^2 \left[\frac{50}{\beta} e^{-50\beta} + \frac{1}{\beta^2} e^{-50\beta} \right] = 50\beta e^{-50\beta} + e^{-50\beta}$$

$$= e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1} = 0{,}735759$$

Ejemplo 27.- En la ciudad de Lima, el consumo diario de agua (en millones de litros) sigue aproximadamente una distribución gamma con $\alpha = 2$ y $\beta = 1/3$. El consumo diario de la ciudad es de 9 millones de litros de agua, ¿ cuál es la probabilidad de que, en cualquier día dado, el abastecimiento de agua sea insuficiente?

Solución.

Sea X la variable que denota el consumo diario de agua en millones de litros en la ciudad de Lima. Entonces la probabilidad de que, en cualquier día dado, el abastecimiento de agua sea insuficiente es

$$P[X > 9] = \int_{9}^{+\infty} \frac{\beta^2 x}{\Gamma(2)} e^{-\beta x} dx = \beta^2 \int_{9}^{+\infty} x e^{-\beta x} dx$$

$$= \beta^2 \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{t}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta x} \right]_{9}^{t}$$

$$= \beta^2 \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{t}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta t} + \frac{9}{\beta} e^{-9\beta} + \frac{1}{\beta^2} e^{-9\beta} \right]$$

$$= 9\beta e^{-9\beta} + e^{-9\beta} = 4e^{-3} = 0{,}19915$$

EJERCICIOS

1.- La duración de una lámpara tiene aproximadamente función de densidad dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & si\ t < 0 \\ \frac{1}{100} e^{-t/100}, & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

Determine

a) La probabilidad de que una lámpara cualquiera se queme antes de 1000 horas.

b) La probabilidad de que una lámpara cualquiera se queme después de su duración media.

c) ¿Cuál es la deviación estándar de la distribución?

2.- Suponga que un mecanismo eléctrico tiene un tiempo de vida X (en unidades de 1 000 horas) que es considerado como una v.a. continua con función de densidad dada por $f(x) = e^{-x}$, si $x > 0$

Suponga que el costo de fabricación de un ítem es S/. 2 y el precio de venta S/. 5. El fabricante garantiza total devolución si $x \leq 0.9$. ¿Cuál es la ganancia esperada por ítem? R. $5e^{-0.9} - 2$

3.- Suponga que X tiene distribución gamma con parámetros α y β, y que C es una constante positiva. Probar que CX tiene distribución gamma con parámetros β y β/C.

4.- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. extraída de una población con distribución exponencial con parámetro β. Determine la distribución de $\overline{X}$.

5.- Suponga que el número de minutos requeridos para atender a clientes en la facturación de salida de un supermercado tiene distribución exponencial con una media de 3 minutos. Usando el teorema del Límite Central, determine la probabilidad de que el tiempo total requerido para atender a la m.a. de 16 clientes excederá a 1 hora. R. 0,1587

6.- El tiempo que tarda un individuo en ser atendido en una cafetería es una v.a. que tiene una distribución exponencial con una media de 4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida en menos de 3 minutos, al menos en 4 de los 6 días siguientes?

R. $\sum_{x=4}^{6} \binom{6}{x} (1 - e^{-3/4})^x (e^{-3/4})^{6-x} = 0{,}3968$.

7.- Suponga que un cierto sistema contiene 3 componentes de modo que cada uno funciona independientemente uno del otro y están conectados en serie (se dice que los componentes de un sistema están conectados en serie si y solo si el sistema funciona si los 3 componentes funcionan).

Suponga que el tiempo de vida de la primera componente, medida en horas, tiene distribución exponencial con parámetro $\beta = 0{,}001$, el tiempo de vida de la segunda componente tiene una distribución exponencial con parámetro $\beta = 0{,}003$, y el tiempo de vida de la tercera componente tiene distribución exponencial con parámetro $\beta = 0{,}006$. Determine la probabilidad de que el sistema no falle antes de 100 horas.

R. $e^{-1} = 0{,}36788$

8.- La vida en años de cierto interruptor eléctrico tiene distribución exponencial con una razón de falla de $\beta = 1/2$. Si 100 de dichos interruptores se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que, como máximo, 30 fallen durante el primer año? R. 0,0350

9.- Suponga que un cierto examen es tomado independientemente a 5 estudiantes, y que el número de minutos requeridos por cualquier estudiante para terminar el examen tiene distribución exponencial con un promedio de 80 minutos. Suponga que el examen comienza a las 9 a.m. Determine la probabilidad de que por lo menos uno de los estudiantes terminará el examen antes de 9.40 a.m. R. $1 - e^{-5/2}$

10.- Suponga nuevamente que el examen considerado en el ejercicio 9 es dado por 5 estudiantes, y suponga también que el primer estudiante termina el examen a las 9.25 a.m. Determine la probabilidad de que por lo menos uno de los otros estudiantes termine el examen antes de las 10 a.m.

11.- Suponga nuevamente que el examen considerado en el ejercicio 9 es dado por 5 estudiantes. Determine la probabilidad de que 2 estudiantes cualesquiera no terminaron el examen a una distancia de 10 minutos uno del otro. R. $e^{-5/4}$

12.- El tiempo (en horas) requerido para reparar una máquina es una v.a. con distribución exponencial con parámetro $\beta = 1/2$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de reparación exceda a 2 horas? R. e^{-1}

b) ¿Cuál es la probabilidad condicional de que la reparación dure por lo menos 10 horas, dado que su duración excede a 9 horas? R. $e^{-1/2}$

13.- El número de años que un radio funciona tiene distribución exponencial con parámetro $\beta = 1/8$. Si Carlos compra un radio usado, ¿cuál es la probabilidad de que dicho radio funcione 8 años adicionales? R. e^{-1}

14.- Si X tiene distribución gamma con parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 1$, encuentre $P[X \leq a]$ para $a = 1; 2$. R. $P[X \leq 1] = 0{,}08$, $P[X \leq 2] = 0{,}323$

APENDICE

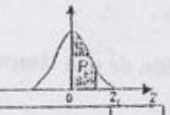


TABLA I. DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDARIZADA: $N(0;1)$

	SEGUNDO DECIMAL Z_c								
	0	1	2	3	4	5	6	7	
0,0	00000	00399	00798	01197	01596	01994	02392	02790	03188	03586	0,0
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06358	06749	07142	07535	0,1
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409	0,2
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173	0,3
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793	0,4
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240	0,5
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24216	24537	24857	25175	25490	0,6
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524	0,7
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327	0,8
0,9	31594	31859	32121	32361	32639	32894	33147	33398	33646	33891	0,9
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214	1,0
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298	1,1
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147	1,2
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774	1,3
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189	1,4
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408	1,5
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449	1,6
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327	1,7
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062	1,8
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670	1,9
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169	2,0
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574	2,1
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899	2,2
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158	2,3
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361	2,4
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520	2,5
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643	2,6
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736	2,7
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807	2,8
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861	2,9
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49866	49889	49893	49897	49900	3,0
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929	3,1
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950	3,2
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965	3,3
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976	3,4
3,5	49977	49978	49979	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983	3,5
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989	3,6
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992	3,7
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995	3,8
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997	3,9
4,0	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998	4,0
4,5	49999	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000	4,5

	SEGUNDO Y TERCER DECIMAL Z_c								
	05	15	25	35	45	55	65	75	
0,0	00199	00598	00997	01396	01795	02193	02989	03387	03784	0,0
0,1	04181	04578	04974	05369	05764	06159	06553	06946	07339	07730	0,1
0,2	08121	08512	08901	09290	09677	10064	10450	10834	11218	11600	0,2
0,3	11962	12362	12741	13119	13495	13871	14244	14617	14988	15358	0,3
0,4	15726	16093	16458	16822	17184	17545	17902	18261	18500	18970	0,4
0,5	19322	19672	20021	20368	20712	21055	21398	21735	22073	22408	0,5
0,6	22741	23072	23401	23729	24054	24377	24867	25016	25335	25647	0,6
0,7	25959	26270	26577	26885	27186	27488	27786	28083	28377	28669	0,7
0,8	28959	29246	29531	29814	30094	30372	30648	30921	31192	31461	0,8
0,9	31727	31990	32252	32511	32767	33021	33273	33522	33789	34013	0,9
	05	15	25	35	45	55	65	75		

APENDICE

TABLA II NÚMEROS ALEATORIOS - 1

58 00 28 62 57	52 11 31 62 73	30 66 41 63 27	83 91 06 03 01	15 39 42 77 26
34 62 68 94 27	15 14 84 18 29	77 57 38 41 34	75 04 14 99 01	12 25 40 45 36
52 53 17 89 34	71 95 89 97 69	15 17 16 67 40	31 08 69 20 20	81 91 04 02 75
65 46 24 16 41	83 80 92 76 36	60 40 98 95 09	51 89 71 40 39	62 38 19 76 26
78 50 50 47 66	31 58 46 62 06	76 25 88 55 75	60 26 51 99 77	
37 76 86 03 30	30 17 54 50 18	16 93 44 76 41	84 28 68 42 52	37 73 77 85 46
21 69 51 28 43	53 42 30 10 50	64 82 43 71 59	34 00 31 72 05	93 10 93 71 35
68 76 09 79 96	97 93 96 68 88	43 13 85 98 50	99 35 02 01 33	15 90 75 54 97
51 92 78 59 49	70 51 78 86 10	61 03 83 83 30	46 19 96 64 10	08 71 11 34 78
39 86 31 31 54	19 41 19 47 03	86 65 61 16 15	12 64 26 39 81	87 13 27 85 62
86 04 14 66 39	69 29 72 78 21	23 95 48 94 03	04 79 65 76 50	86 14 80 86 06
92 52 91 60 51	18 14 75 92 26	69 38 55 18 54	35 33 26 18 80	94 54 13 52 39
20 30 26 76 45	16 20 62 45 75	75 34 83 23 20	14 64 79 84 22	94 61 56 05 05
21 53 65 17 33	73 61 01 12 75	12 73 77 76 03	39 81 98 24 22	46 94 52 36 53
96 36 86 56 18	16 32 00 81 34	00 72 91 65 11	78 11 47 51 41	68 47 85 05 47
97 18 16 68 68	60 40 83 16 15	83 84 07 99 17	10 07 96 24 64	30 25 73 54 11
21 07 69 33 36	59 82 52 82 20	09 77 67 28 95	76 76 33 59 67	28 11 57 01 04
65 39 29 24 16	11 54 19 86 70	12 54 64 77 39	51 39 52 52 18	81 67 67 31 24
16 86 56 10 11	59 46 74 03 12	71 66 55 49 53	10 13 99 46 56	28 18 67 94 10
30 92 14 05 64	11 49 31 14 74	81 92 19 05 61	85 81 43 83 06	93 52 32 28 67
23 96 93 43 42	68 73 57 69 57	59 43 58 67 53	32 35 26 15 57	92 34 27 69 18
23 10 28 44 38	91 53 80 40 61	68 00 92 27 42	86 13 20 34 69	51 42 12 11 76
47 51 88 71 70	12 48 39 22 78	19 77 24 46 20	61 54 31 76 08	46 74 55 81 15
98 33 19 91 75	03 25 28 89 00	70 48 55 16 56	29 07 98 28 53	02 47 11 59 20
37 68 47 07 47	92 32 09 58 91	91 37 71 81 99	46 66 10 29 12	36 31 09 00 92
35 36 63 44 83	24 02 00 88 46	90 65 36 92 23	83 78 38 73 81	95 59 08 84 85
84 58 26 72 00	21 67 37 88 16	36 07 78 31 87	71 93 74 04 54	11 32 02 38 55
71 13 32 96 87	68 43 65 42 35	91 90 67 17 75	67 78 60 50 82	31 19 87 26 68
17 84 47 02 32	07 72 93 25 63	74 84 12 59 37	89 13 35 71 65	28 54 12 92 97
36 60 97 04 71	74 08 11 95 75	69 53 19 22 82	98 40 29 35 48	38 28 42 09 70
83 42 57 79 81	20 27 02 21 68	20 60 59 57 12	82 46 84 70 58	34 22 31 03 42
17 05 13 19 38	65 67 34 81 66	69 49 20 93 29	72 52 21 44 68	78 61 96 94 45
14 27 10 91 46	72 11 20 20 51	65 03 10 57 67	60 87 23 14 08	52 03 05 14 31
64 15 14 23 78	60 50 82 71 64	47 82 32 01 60	71 40 66 08 51	40 89 73 54 99
12 23 83 35 52	41 28 52 02 18	35 97 20 07 50	18 59 74 37 02	60 48 64 97 30
88 39 89 88 07	61 09 26 29 86	11 95 77 79 04	57 00 81 29 59	82 53 87 02 02
12 36 42 60 05	94 47 40 99 93	82 13 22 40 33	19 72 55 69 82	16 94 21 66 39
54 23 75 03 23	50 40 50 55 79	00 56 17 26 30	38 11 54 85 04	13 69 17 36 48
01 03 68 63 99	51 01 75 76 54	43 11 28 32 75	33 09 04 78 74	81 56 79 43 39
93 88 04 96 76	25 45 79 30 63	56 44 70 05 04	31 61 46 02 52	32 08 71 12 48
01 15 98 46 17	63 94 61 14 24	60 27 00 00 95	54 31 59 00 79	94 45 32 61 90
19 26 73 31 74	12 95 04 73 06	72 76 88 55 62	36 79 15 93 10	31 93 58 66 92
91 43 14 84 04	36 06 78 00 85	42 57 29 28 34	79 91 93 58 82	97 37 07 64 67
01 33 51 42 49	22 69 28 16 25	08 90 93 53 17	54 12 21 03 56	30 88 53 46 82
54 67 14 74 50	07 95 63 14 76	53 62 10 21 57	55 74 57 66 22	38 84 55 57 49
11 42 31 79 85	61 41 81 16 97	55 19 65 08 62	26 38 74 32 30	44 64 64 91 80
36 79 96 15 09	97 15 71 92 40	28 33 35 23 32	75 36 16 99 41	10 50 93 75 95
91 89 29 55 95	39 61 34 84 33	83 42 77 35 00	51 42 62 63 30	47 01 98 96 73
01 35 24 97 14	58 35 04 52 06	81 24 32 74 53	28 82 42 35 01	73 34 47 05 76
20 70 90 69 57	52 85 30 59 37	00 49 88 07 43	08 04 00 46 36	23 31 86 80 88
95 03 80 66 14	41 92 93 01 94	13 33 63 32 35	38 91 16 89 71	67 46 73 42 47
14 47 10 74 39	88 51 22 59 99	51 20 74 13 55	30 41 25 99 10	26 01 33 24 13
51 16 26 48 54	11 12 32 28 25	67 22 97 11 73	55 24 09 23 47	12 93 44 80 47
11 72 65 54 02	33 02 06 80 29	39 78 49 81 21	42 00 99 80 44	56 33 63 46 16
22 11 78 63 24	03 57 06 29 15	04 92 31 62 03	94 53 02 60 55	72 46 68 25 93
17 54 98 53 58	41 54 93 90 86	52 14 56 90 34	83 00 73 36 14	50 77 58 08 94
14 65 89 80 03	18 84 83 61 42	96 82 86 02 30	40 16 65 55 63	20 40 24 79 80
00 78 79 32 94	06 15 93 11 72	17 32 31 84 89	53 66 01 99 52	75 79 92 20 61
14 47 31 42 51	12 74 92 15 60	93 84 37 76 62	24 96 78 93 26	34 41 69 04 51
51 36 27 39 31	79 13 36 81 55	51 46 66 68 85	07 73 35 42 52	51 29 21 02 34
32 09 86 49 07	01 78 33 32 06	16 45 94 09 18	40 14 73 03 61	80 89 79 52 95
34 43 19 00 66	90 73 28 21 38	57 38 36 24 33	31 90 64 66 19	61 55 50 65 14
05 64 34 08 08	44 10 20 96 70	32 41 46 22 97	08 22 02 47 43	57 15 67 76 59
23 94 28 81 44	52 47 09 27 41	43 70 17 52 44	51 26 94 73 17	72 16 51 81 77
01 55 47 28 23	23 03 84 44 29	42 57 05 46 58	88 00 65 01 20	27 32 66 34 56

APENDICE

TABLA II NÚMEROS ALEATORIOS - 2

20 26 31 42 80	53 18 27 47 63	57 56 40 06 41	87 11 73 66 67	58 41 69 69 49
55 91 99 91 73	08 45 48 85 12	83 65 72 13 22	26 57 13 86 34	19 36 43 02 17
16 46 03 71 60	03 57 93 77 62	44 37 67 87 39	27 13 31 46 21	09 60 47 88 04
94 37 14 64 98	66 54 75 53 55	22 28 21 29 43	95 89 78 44 61	67 64 33 84 99
48 26 30 94 68	39 63 42 97 17	97 66 85 47 84	66 74 98 33 92	18 76 96 54 10
39 07 21 92 88	01 86 50 69 08	56 03 99 56 72	28 46 98 40 05	40 88 54 24 32
55 98 83 24 16	67 87 02 27 98	93 43 85 71 33	12 34 21 35 01	42 41 99 63 45
09 93 51 88 84	53 91 74 40 67	44 30 86 77 34	78 87 40 62 28	11 15 51 84 07
44 99 59 75 86	95 92 40 39 13	74 72 14 50 71	05 51 63 26 19	86 93 59 30 80
11 76 71 21 62	67 65 73 46 21	66 49 77 13 59	98 99 91 32 62	93 78 39 89 35
05 54 51 75 26	36 45 96 26 11	73 56 89 70 92	29 41 60 00 46	84 63 66 13 87
24 60 13 88 68	93 56 26 76 83	29 73 76 00 45	98 12 35 09 09	25 64 22 56 84
44 35 45 97 92	96 21 49 35 27	45 95 69 77 09	85 13 95 36 18	70 26 67 40 22
46 96 56 78 77	54 33 40 85 37	65 44 48 62 73	76 46 99 28 33	08 43 12 32 78
69 53 22 13 86	93 28 39 50 08	39 66 37 11 39	25 69 17 59 70	09 70 07 83 31
79 22 53 11 08	05 35 86 94 65	07 93 36 65 14	60 65 96 49 51	51 80 22 36 47
57 34 96 47 69	38 09 55 23 14	65 83 42 07 96	47 82 78 03 16	96 77 74 10 07
35 44 35 37 00	13 56 68 25 83	32 32 54 16 05	72 41 77 23 38	12 23 73 05 20
76 73 84 34 31	84 92 97 98 86	19 66 30 76 39	54 34 91 62 58	57 30 25 07 76
66 74 89 88 31	50 84 20 06 48	94 82 62 90 44	76 19 35 52 30	41 42 13 46 53
34 34 61 80 25	39 55 66 72 75	38 60 36 90 91	34 59 16 88 76	11 56 92 66 09
49 81 48 85 07	62 11 04 29 61	64 85 23 06 75	19 44 76 87 32	05 38 03 27 56
02 53 22 12 74	40 68 59 52 46	63 01 39 46 55	76 65 97 56 48	67 46 15 50 10
38 76 22 66 45	35 64 55 16 04	31 65 71 70 00	91 96 11 94 09	09 81 10 82 01
12 14 66 47 85	15 67 67 87 25	27 88 51 56 34	63 40 53 24 90	51 28 54 69 44
52 90 49 37 94	09 18 78 85 90	38 80 95 71 76	85 40 86 87 69	46 13 70 05 46
17 27 43 86 87	56 76 38 71 55	87 13 38 00 52	65 62 97 91 74	39 52 46 42 47
50 17 97 15 39	59 15 50 98 58	50 35 16 89 40	15 58 11 98 42	62 45 43 30 54
31 20 67 99 90	63 20 91 53 51	40 10 16 78 16	08 48 53 00 35	74 29 43 67 82
13 94 70 12 56	07 92 23 70 16	93 34 25 72 13	45 00 96 85 00	74 11 69 16 04
65 63 40 09 32	16 80 90 16 94	41 54 07 23 72	57 50 07 07 41	66 53 65 72 64
13 52 26 62 58	41 08 39 40 33	84 92 00 83 93	15 28 11 47 13	24 84 62 58 94
61 06 95 55 25	00 42 81 60 27	08 16 64 71 21	09 96 10 52 57	34 95 85 56 97
46 96 66 51 68	71 73 60 01 34	76 26 90 91 01	04 04 01 08 32	99 03 89 08 00
09 31 33 50 69	26 99 63 21 26	20 01 06 59 59	95 67 15 52 79	03 55 79 35 53
43 81 84 25 59	33 89 73 06 71	37 37 10 96 46	49 07 05 50 64	14 16 20 49 15
28 85 44 02 57	28 50 68 02 89	61 80 16 01 77	85 39 80 49 82	83 48 57 78 57
90 86 21 20 60	81 45 66 54 28	99 35 61 83 58	31 63 64 58 67	05 11 35 99 52
63 30 76 96 96	28 04 41 85 46	58 49 49 72 91	47 21 48 16 69	80 25 06 46 13
79 06 39 89 37	43 06 17 12 45	23 48 52 96 45	86 78 91 99 69	73 05 72 24 77
04 33 65 00 87	69 17 39 54 86	68 34 07 96 14	14 04 14 18 53	25 54 12 53 52
63 05 08 06 02	44 24 05 83 05	20 51 14 21 46	92 31 55 43 17	17 79 46 11 19
12 08 02 97 60	19 12 65 79 34	16 92 31 41 84	65 71 80 37 34	41 87 67 60 78
69 53 64 54 40	56 53 73 32 81	13 45 78 63 56	10 38 16 30 44	98 07 79 25 17
19 93 38 64 93	39 85 05 75 42	30 64 90 61 63	53 21 37 55 91	43 38 53 09 81
76 22 81 85 47	03 80 51 54 68	34 89 57 63 98	05 62 71 89 45	00 56 35 34 08
29 83 41 00 66	34 04 36 51 41	10 53 07 62 60	29 12 31 04 85	59 69 20 77 29
66 90 18 54 21	24 36 44 52 88	15 17 98 94 96	29 37 39 17 42	13 87 39 88 83
85 16 53 59 52	21 72 26 92 17	06 45 40 26 70	04 71 14 19 69	39 39 99 37 57
74 38 86 88 23	63 27 58 31 54	59 98 72 72 91	95 37 17 25 64	77 21 13 69 68
17 21 89 80 24	12 99 45 41 54	48 77 53 67 24	21 57 38 03 47	84 95 38 00 06
93 27 44 27 57	45 16 42 45 66	45 12 09 16 48	47 84 33 87 13	74 96 51 62 32
17 15 19 25 26	45 83 15 86 93	15 52 95 54 71	52 08 20 81 33	74 41 83 72 43
82 43 50 19 34	39 67 56 31 76	35 98 68 22 02	43 59 80 21 43	80 69 44 65 39
45 68 79 99 40	48 03 78 61 85	64 49 69 27 90	38 90 21 74 76	03 31 83 89 03
81 06 01 20 25	55 11 07 91 42	90 89 81 46 11	24 86 39 53 88	05 71 59 20 80
65 46 60 85 54	79 29 53 28 76	87 41 96 15 13	97 54 40 50 20	44 48 82 09 13
37 13 15 50 94	58 18 18 29 16	33 82 83 49 35	79 05 76 59 48	00 04 67 30 74
40 90 27 60 73	98 50 42 59 56	89 28 61 31 91	71 79 41 63 69	36 82 05 11 76
49 65 37 25 81	14 66 61 27 11	15 51 05 26 17	93 52 86 01 48	14 73 98 87 63
26 69 70 15 83	64 87 91 03 52	01 39 96 01 33	90 23 35 78 69	41 51 49 16 55
59 91 01 97 79	24 76 31 91 03	65 62 91 06 29	53 03 44 70 54	03 91 03 14 30
54 15 62 25 81	05 84 96 57 77	24 64 95 17 87	25 82 47 41 48	36 70 20 50 50
76 78 42 14 05	78 51 04 43 18	74 65 87 58 04	16 38 49 36 85	20 23 06 82 75
72 74 60 87 22	47 52 69 27 68	18 12 23 66 92	13 38 27 79 82	58 68 66 18 16

APENDICE

TABLA II NÚMEROS ALEATORIOS - 3

74	03	82	26	68	26	78	80	40	34	75	01	17	75	76	66	31	46	61	93	73	58	39	55	50
34	31	66	95	72	11	66	98	88	02	32	05	54	66	51	96	75	29	70	18	65	82	82	35	81
30	28	65	66	65	50	80	64	52	74	71	76	93	40	67	33	67	48	68	34	42	31	47	30	83
23	16	68	65	50	15	60	49	90	01	72	21	19	59	26	58	95	48	96	99	41	09	40	74	42
66	95	20	95	12	87	97	02	37	08	66	60	16	71	86										
73	45	73	41	48	63	46	24	14	66	53	46	25	35	93	81	91	46	09	45	37	61	06	73	90
29	34	40	23	02	54	77	52	33	78	83	86	60	00	28	82	68	32	97	19	86	96	56	27	42
25	27	83	75	95	95	21	12	57	69	92	45	67	84	42	74	66	08	59	88	97	62	28	86	21
90	43	33	46	45	56	87	53	27	60	92	17	13	27	16	65	45	83	94	31	27	05	20	44	27
73	32	55	03	12	22	69	18	57	65	21	89	05	66	61	90	98	06	68	61	65	09	78	42	30
78	14	78	85	23	25	45	43	03	96	81	69	24	79	74	85	81	15	78	64	06	99	06	47	99
63	95	95	57	96	90	75	54	82	49	10	23	26	30	28	77	65	44	32	76	78	62	69	74	45
12	36	19	73	87	56	09	75	62	51	09	29	13	96	49	31	53	36	45	96	57	50	10	13	30
71	68	80	20	00	90	15	68	74	51	67	04	05	55	02	50	60	79	95	12	85	29	94	75	80
74	98	49	33	13	87	51	39	49	60	82	47	73	46	08	26	07	92	31	56	49	55	43	33	17
55	49	96	94	46	75	58	66	75	77	78	93	51	64	14	56	71	05	89	66	47	86	16	09	91
06	77	53	41	90	99	61	10	20	56	64	64	35	64	82	45	50	38	01	84	99	03	86	04	63
70	87	61	29	94	72	19	64	23	24	22	05	82	31	25	86	88	00	54	06	91	31	48	64	70
87	02	81	77	68	05	41	96	34	07	00	02	47	96	52	94	42	84	54	77	48	00	05	57	17
45	19	77	40	19	26	61	92	00	34	45	15	01	72	66	96	01	78	53	85	19	13	02	37	35
94	29	92	68	83	87	30	01	20	17	29	34	91	36	43	95	12	43	11	94	72	64	00	07	64
46	55	76	39	96	08	40	17	04	47	84	32	01	49	29	43	15	22	65	26	73	12	11	73	14
49	28	68	91	98	70	20	24	66	83	25	30	77	18	99	73	51	37	45	11	33	86	23	62	28
05	34	37	56	66	76	03	84	23	77	98	57	92	61	41	85	82	22	79	44	94	45	70	50	42
43	78	46	59	51	72	64	04	48	92	77	41	27	75	59	89	85	84	26	89	18	05	72	58	54
16	78	20	83	79	84	81	89	35	34	82	72	28	26	57	77	11	36	88	97	91	97	26	12	12
40	63	69	26	49	76	91	28	38	93	09	21	46	04	12	37	43	78	89	28	47	16	75	96	73
42	95	39	73	30	26	26	12	42	57	40	45	27	67	57	73	80	64	54	80	92	97	98	46	84
87	40	13	94	01	19	36	37	02	38	76	07	22	10	70	43	26	31	33	21	84	45	91	16	29
77	76	70	06	85	52	95	85	19	98	85	31	18	95	96	29	99	99	74	27					
36	85	34	23	13	65	63	53	79	01	18	94	52	58	10	27	62	29	68	20	67	90	82	45	45
48	87	00	13	73	18	17	10	56	50	45	45	86	26	17	03	24	48	18	36	84	55	97	43	57
12	63	34	23	57	59	19	39	59	08	55	20	23	79	23	66	84	01	26	76	05	69	55	27	17
54	19	45	72	58	38	81	67	11	50	35	47	18	49	14	33	61	37	84	48	90	15	12	33	47
62	39	18	13	52	75	22	19	18	48	30	76	03	15	48	40	94	96	81	33	88	00	21	00	44
32	75	21	55	56	89	20	82	85	25	00	02	55	28	25	32	88	35	86	01	70	82	43	72	23
30	00	33	75	24	05	87	76	58	72	72	74	26	27	09	08	52	63	92	17	87	56	45	72	96
23	39	87	52	90	07	43	67	00	38	70	82	67	21	33	02	40	71	48	27	66	62	69	65	12
48	41	88	18	92	75	69	26	94	08	45	13	70	31	93	52	18	80	26	37	76	00	76	71	08
77	96	94	80	82	99	95	64	66	92	19	53	76	10	70	99	79	67	71	75	01	16	38	33	29
69	71	88	07	04	90	16	11	15	33	79	09	49	52	42	19	84	49	08	16	12	94	40	08	72
98	38	22	94	43	30	92	86	66	10	54	95	28	48	75	45	80	16	72	23	39	44	77	90	22
51	36	63	94	62	15	94	04	15	15	83	73	31	18	26	33	52	14	13	23	68	22	34	38	12
54	52	68	83	59	65	39	17	64	16	53	91	93	63	28	59	69	27	22	25	41	99	66	00	44
53	88	96	34	57	18	70	55	66	36	76	74	53	52	27	35	78	07	95	61	53	95	83	12	26
20	96	33	26	17	04	13	60	28	37	43	29	96	80	92	33	55	06	91	90	40	13	33	94	47
02	07	83	53	81	28	46	87	13	08	66	24	63	47	17	57	61	40	21	47	58	25	87	05	87
50	81	01	15	41	76	77	39	63	68	55	63	57	21	90	60	45	79	68	99	51	54	51	84	32
56	47	32	22	58	32	96	19	29	25	34	74	06	30	44	66	39	63	07	26	41	29	71	16	89
45	65	76	66	72	93	90	13	63	64	37	07	84	76	31	64	68	84	30	69	96	58	92	94	41
62	17	25	97	85	99	04	89	53	83	81	53	66	35	95	92	38	35	96	63	89	43	74	54	57
88	69	34	60	62	10	39	30	38	86	06	98	62	67	02	51	87	07	78	13	24	55	57	69	56
32	31	67	10	55	01	63	45	16	90	75	32	31	00	55	06	59	76	27	93	17	94	80	18	82
70	36	56	42	89	05	38	48	78	11	37	14	13	76	20	15	50	20	34	03	67	19	06	49	11
47	35	48	95	72	58	64	97	94	64	80	54	43	84	90	23	32	89	60	74	80	87	48	42	42
77	09	40	17	41	51	93	06	39	12	76	92	65	64	96	71	48	87	66	90	82	80	94	26	91
88	72	29	41	70	85	25	32	19	96	75	76	28	17	38	11	67	80	23	15	44	49	95	47	36
45	25	74	05	33	75	41	09	66	72	18	86	76	05	61	91	97	37	31	31	96	34	54	18	82
24	39	47	89	67	68	75	19	07	62	38	30	72	80	12	22	97	31	52	60	82	76	26	42	96
48	06	15	68	23	10	76	69	91	72	61	90	62	67	15	41	29	00	38	37	31	55	22	37	85
29	02	13	84	96	42	06	98	87	08	35	43	09	47	52	46	33	07	48	73	01	15	64	17	28
02	77	24	37	81	60	02	83	64	01	01	69	85	84	59	79	44	05	64	30	83	10	14	98	80
82	16	45	76	50	27	24	73	15	61	00	96	64	45	85	75	48	26	17	29	24	05	79	96	74
67	36	91	20	14	40	09	49	48	96	13	80	95	39	33	82	21	27	12	76	62	54	62	31	28
62	72	62	68	46	93	26	31	11	23	03	14	99	31	76	53	44	30	71	21	53	30	40	84	92