Quick Return Mechanism using a Slider Crank Linkage
(Whitworth Mechanism)

$$R_{ea} = \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta \\ s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad R_{eb} = \begin{pmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Position}}$

$$l_1 \overbrace{\begin{pmatrix} c_\theta \\ s_\theta \end{pmatrix}}^{\hat{a}_1} - s \begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \end{pmatrix} + l_0 \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\hat{e}_2} = 0$$

$$l_2 \underbrace{\begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \end{pmatrix}}_{\hat{b}_1} + l_3 \underbrace{\begin{pmatrix} c_{\varphi+\gamma} \\ s_{\varphi+\gamma} \end{pmatrix}}_{\hat{c}_1} = \begin{pmatrix} x \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Inverse kinematics

Known: x

Unknown: $\theta, \varphi, \gamma, s$

Forward kinematics

Known: θ

Unknown: φ, γ, s, x.

$\boxed{\text{Velocity}}$

$$l_1 \dot\theta \begin{pmatrix} -s_\theta \\ c_\theta \end{pmatrix} - \dot s \begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \end{pmatrix} - s\dot\varphi \begin{pmatrix} -s_\varphi \\ c_\varphi \end{pmatrix} = 0$$

$$l_2 \dot\varphi \begin{pmatrix} -s_\varphi \\ c_\varphi \end{pmatrix} + l_3 (\dot\varphi + \dot\gamma) \begin{pmatrix} -s_{\varphi+\gamma} \\ c_{\varphi+\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -l_1 s_\theta & s\, s_\varphi & 0 & -c_\varphi \\ l_1 c_\theta & -s\, c_\varphi & 0 & -s_\varphi \\ 0 & -l_2 s_\varphi - l_3 s_{\varphi+\gamma} & -l_3 s_{\varphi+\gamma} & 0 \\ 0 & l_2 c_\varphi + l_3 c_{\varphi+\gamma} & l_3 c_{\varphi+\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\theta \\ \dot\varphi \\ \dot\gamma \\ \dot s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Inverse kinematics

Known: $\dot x$

Unknown: $\dot\theta, \dot\varphi, \dot\gamma, \dot s$

Forward kinematics

Known: $\dot\theta$

Unknown: $\dot\varphi, \dot\gamma, \dot s, \dot x$

$\boxed{\text{Acceleration}}$

$$l_1 \left(\ddot\theta \begin{pmatrix} -s_\theta \\ c_\theta \end{pmatrix} - \dot\theta^2 \begin{pmatrix} c_\theta \\ s_\theta \end{pmatrix} \right) - \ddot s \begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \end{pmatrix} - 2\dot s \dot\varphi \begin{pmatrix} -s_\varphi \\ c_\varphi \end{pmatrix}$$

$$- s \left(\ddot\varphi \begin{pmatrix} -s_\varphi \\ c_\varphi \end{pmatrix} - \dot\varphi^2 \begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$l_2 \left(\ddot\varphi \begin{pmatrix} -s_\varphi \\ c_\varphi \end{pmatrix} - \dot\varphi^2 \begin{pmatrix} c_\varphi \\ s_\varphi \end{pmatrix} \right) + l_3 \left((\ddot\varphi + \ddot\gamma) \begin{pmatrix} -s_{\varphi+\gamma} \\ c_{\varphi+\gamma} \end{pmatrix} - (\dot\varphi + \dot\gamma)^2 \begin{pmatrix} c_{\varphi+\gamma} \\ s_{\varphi+\gamma} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \ddot x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -l_1 s_\theta & s\, s_\varphi & 0 & -c_\varphi \\ l_1 c_\theta & -s\, c_\varphi & 0 & -s_\varphi \\ 0 & -l_2 s_\varphi - l_3 s_{\varphi+\gamma} & -l_3 s_{\varphi+\gamma} & 0 \\ 0 & l_2 c_\varphi + l_3 c_{\varphi+\gamma} & l_3 c_{\varphi+\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot\theta \\ \ddot\varphi \\ \ddot\gamma \\ \ddot s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 \dot\theta^2 c_\theta + 2\dot s \dot\varphi s_\varphi + s\dot\varphi^2 c_\varphi \\ -l_1 \dot\theta^2 s_\theta - 2\dot s \dot\varphi c_\varphi + s\dot\varphi^2 s_\varphi \\ -l_2 \dot\varphi^2 c_\varphi - l_3 (\dot\varphi + \dot\gamma)^2 c_{\varphi+\gamma} \\ -l_2 \dot\varphi^2 s_\varphi - l_3 (\dot\varphi + \dot\gamma)^2 s_{\varphi+\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Inverse kinematics

Known: $\ddot x$

Unknown: $\ddot\theta, \ddot\varphi, \ddot\gamma, \ddot s$

Forward kinematics

Known: $\ddot\theta$

Unknown: $\ddot\varphi, \ddot\gamma, \ddot s, \ddot x$