# 6 Continuous Random Variables

# 连续随机变量

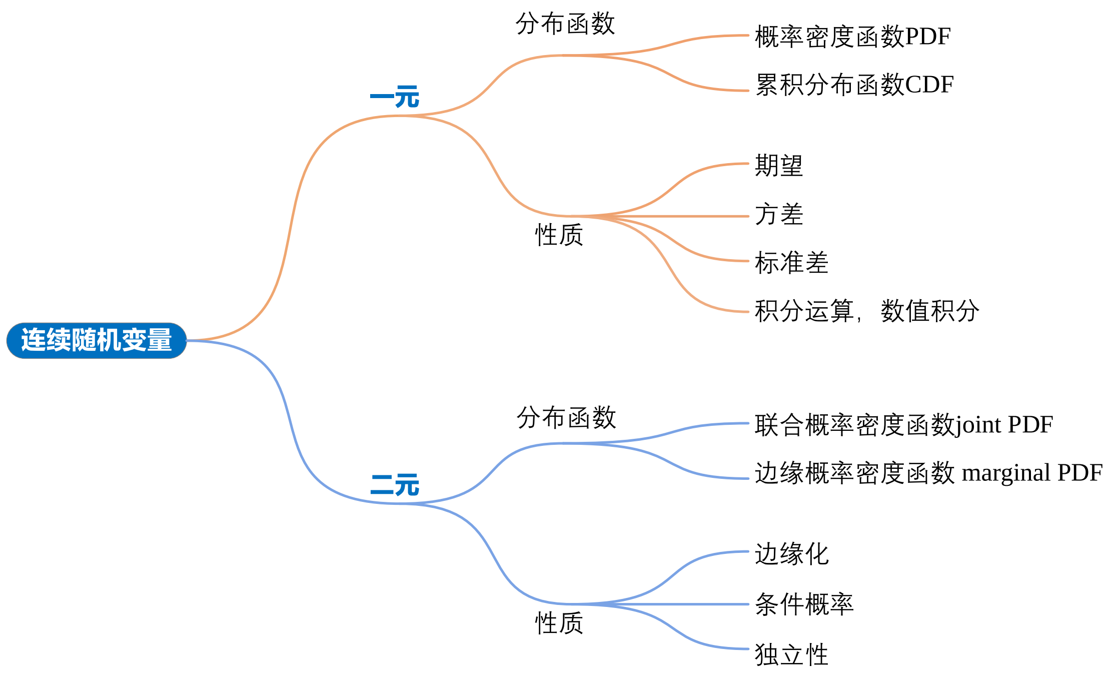
## PDF 积分得到边缘概率密度或概率值

上帝不仅玩骰子，他还有时把骰子扔到人类看不见的地方。

***Not only does God definitely play dice, but He sometimes confuses us by throwing them where they can't be seen.***

—— 史蒂芬·霍金 (Stephen Hawking) | 英国理论物理学家、宇宙学家 | 1942 ~ 2018

- matplotlib.pyplot.contour() 绘制平面等高线
- matplotlib.pyplot.contour3D() 绘制三维等高线
- matplotlib.pyplot.contourf () 绘制平面填充等高线
- matplotlib.pyplot.fill_between() 区域填充颜色
- matplotlib.pyplot.plot_wireframe() 绘制三维单色线框图
- matplotlib.pyplot.scatter() 绘制散点图
- scipy.stats.st.gaussian_kde() 高斯 KDE 函数
- seaborn.scatterplot() 绘制散点图
- statsmodels.api.nonparametric.KDEUnivariate() 一元核密度估计


连续随机变量
一元
分布函数
概率密度函数PDF
累积分布函数CDF
性质
期望
方差
标准差
积分运算，数值积分
二元
分布函数
联合概率密度函数joint PDF
边缘概率密度函数 marginal PDF
性质
边缘化
条件概率
独立性

# 6.1 一元连续随机变量

本书第 4 章区分过**离散随机变量** (discrete random variable)、**连续随机变量** (continuous random variable)。如果随机变量 $X$ 的所有可能取值不可以逐个列举出来，而是取数轴上某一区间内的任一点，我们就称 $X$ 为连续随机变量。

## 概率密度函数：积分

本书第 4 章介绍过，离散随机变量对应的数学工具为求和 Σ，连续随机变量对应积分 ∫。对于连续随机变量 $X$，如果存在非负函数 $f_X(x)$ 使得：

$$\Pr(X \in B) = \int_B f_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

则称函数 $f_X(x)$ 为 $X$ 的**概率密度函数** (probability density function, PDF)。

特别地，如图 1 所示，当 $B$ 为区间 $[a, b]$ 时，随机变量 $X$ 的概率对应定积分：

$$\Pr(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

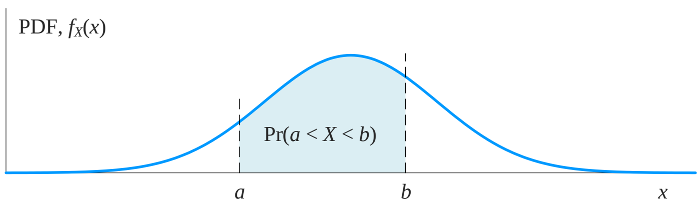



图 1. 定积分常用来计算一元连续随机变量在一定区间对应的概率

此外，本书前文提到过，PMF 和 PDF 的输入都可能是不止一个随机变量，这和多元函数一样。比如，二元连续随机变量 $(X, Y)$ 联合概率密度函数 PDF $f_{X,Y}(x,y)$ 有两个变量，三元连续随机变量 $(X_1, X_2, X_3)$ 的联合概率密度函数 PDF $f_{X1,X2,X3}(x_1,x_2,x_3)$ 有三个变量。

## 概率密度非负，面积为 1

概率密度函数 $f_X(x)$ 必须是非负 $f_X(x) \geqslant 0$，且满足：

$$\Pr(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{3}$$

上式常简写为：

$$\int_x f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{4}$$

如图 2 所示，从图像上来看，$f_X(x)$ 曲线和整个横轴包围区域的面积为 1，这也是归一化。

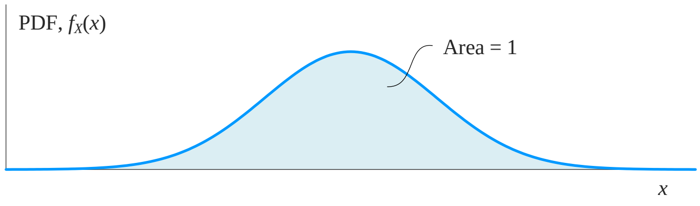



图 2. $f_X(x)$ 和横轴围成图形的面积为 1

## 单点集合：概率密度非负，但是概率为 0

利用数值积分方法，$X$ 的取值范围在 $[a, a + \Delta]$ 对应的概率为：

$$\Pr(a \le X \le a+\Delta) = \int_a^{a+\Delta} f_X(x)\,\mathrm{d}x \approx f_X(a)\Delta \tag{5}$$

当 $\Delta \to 0$ 时，$\Pr(a \leqslant X \leqslant a + \Delta) \to 0$。

也就是说，对于单点集合，$X = a$ 的概率为 0：

$$\Pr(X = a) = \int_a^a f_X(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{6}$$

即便 $f_X(a)$ 大于 0。

## 区间端点

因此，对于连续随机变量 $X$，区间端点对概率计算不起任何作用，因此以下四个概率值等价：

$$\Pr(a \le X \le b) = \Pr(a < X \le b) = \Pr(a \le X < b) = \Pr(a < X < b) \tag{7}$$

这一点，连续随机变量、离散随机变量完全不同。

## 概率密度值可以大于 1

再次强调 $f_X(x)$ 并不是概率，而是概率密度，因此 $f_X(x)$ 可大于 1。

比如，图 3 所示在 $[0, 0.5]$ 区间上连续均匀分布的概率密度函数 $f_X(x)$。很明显，$f_X(x)$ 的最大值为 2，但是长方形的面积仍为 1：

$$
\begin{aligned}
\Pr(-\infty < X < \infty) &= \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{0.5} f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0.5}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{0}^{0.5} 2\,\mathrm{d}x + 0 \\
&= 2x\Big|_{0}^{0.5} = 1
\end{aligned} \tag{8}
$$

⚠ 反复强调，图 3 中的 2 不是概率值，而是概率密度。对于一元随机变量，概率密度函数在一定区间内积分结果才是概率值。概率密度虽然不是概率值，但也量化"可能性"。

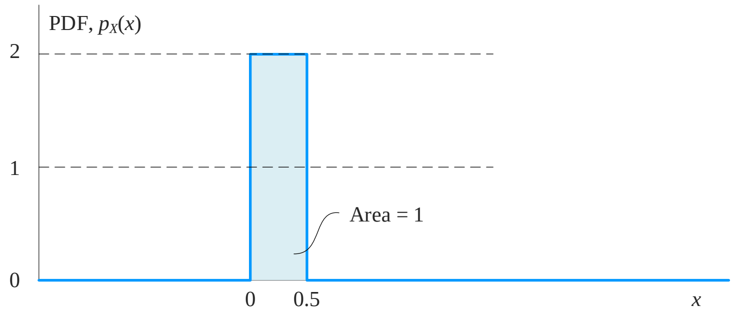



图 3. 概率密度函数 $f_X(x)$ 可以大于 1

## 累积分布函数

本书前文介绍，给定一元离散随机变量 $X$ 的概率质量函数 $p_X(x)$，求解其 CDF 时，用的是累加 Σ。

以图 4 (a) 为例，对于一元连续随机变量 $X$，求累积分布函数 CDF $F_X(x)$ 用的是积分，也就是求面积：

$$
F_X(x) = \Pr(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t \tag{9}
$$

图 4 (a) 中 $f_X(x)$ 图形的面积对应概率值，而图 4 (b) 中 $F_X(x)$ 的高度对应概率值。

随机变量 $X$ 在$[a, b]$ 区间对应的概率可以用 CDF $F_X(x)$ 计算：

$$
\Pr(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a) \tag{10}
$$

再次强调，对于一元连续随机变量，PDF 是概率密度，CDF 是概率。

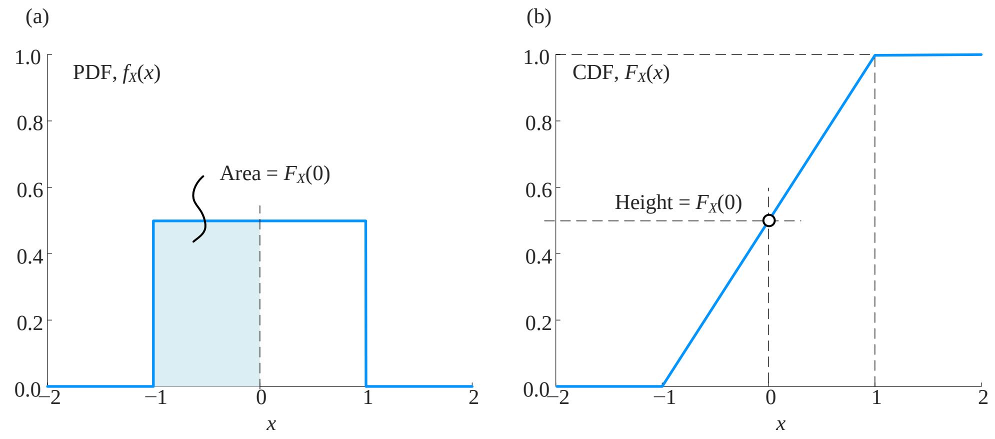



图 4. 连续均匀分布 PDF 和 CDF

# 6.2 期望、方差和标准差

## 期望值

连续随机变量 $X$ 期望定义如下：

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot \underbrace{f_X(x)}_{\text{Weight}}\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

上式也相当于加权平均。其中，$f_X(x)$ 相当于是“权重”。显然，$f_X(x)$ 非负，但是 $x$ 取值可正可负。这也就是说，$\mathrm{E}(X)$ 可正可负。

(11) 常简写为：

$$\boxed{\mathrm{E}(X)=\int_x x\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x} \tag{12}$$

权重当然满足 $\int_x f_X(x)\,\mathrm{d}x=1$。

## 连续均匀分布

如图 5 所示，如果随机变量 $X$ 在 $[a, b]$ 上服从**连续均匀分布** (continuous uniform distribution)，$X$ 的概率密度函数为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{for } a\le x\le b,\\ 0 & \text{for } x<a \text{ or } x>b\end{cases} \tag{13}$$

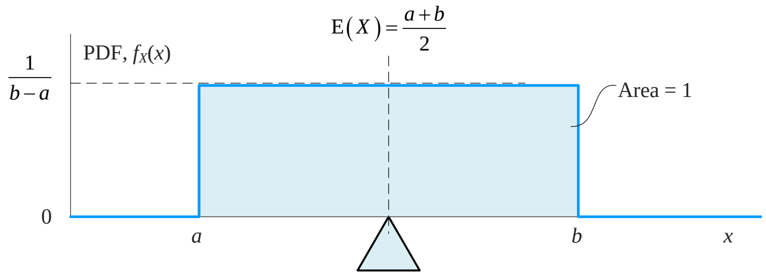



图 5. 随机变量 $X$ 在 $[a, b]$ 上为均匀分布

$X$ 的期望值为：

$$\mathrm{E}(X)=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2} \tag{14}$$

随机变量 $X$ 的取值在 $[a, b]$ 变化，对应的概率密度变化用 $f_X(x)$ 刻画。而求得的期望值 $\mathrm{E}(X)$ 则是一个标量，这相当于总结归纳。几何角度，如图 5 所示，计算 $X$ 的期望值相当于找到一块均质木板的质心在长度方向上的位置。

相比于第 4 章的离散随机变量求和运算，积分运算可以看做是“极尽细腻”的求和。

## 方差

连续随机变量 $X$ 方差的定义为：

$$\mathrm{var}(X)=\mathrm{E}\left[\left(X-\mathrm{E}(X)\right)^2\right]=\int_x\left(\underbrace{x-\mathrm{E}(X)}_{\text{Deviation}}\right)^2\cdot\underbrace{f_X(x)}_{\text{Weight}}\mathrm{d}x \tag{15}$$

同样，连续随机变量 $X$ 的方差也满足如下计算技巧：

$$\mathrm{var}(X)=\mathrm{E}\left(\left(X-\mathrm{E}(X)\right)^2\right)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\left(\mathrm{E}(X)\right)^2 \tag{16}$$

其中，

$$\mathrm{E}\left(X^2\right)=\int_x x^2\cdot f_X(x)\mathrm{d}x \tag{17}$$

## 举个例子

对于图 5 所示均匀分布，为了方便计算 $X$ 的方差，计算 $X$ 平方的期望值为：

$$\mathrm{E}\left(X^2\right)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{a^2+ab+b^2}{3} \tag{18}$$

根据 (16)，$X$ 的方差为：

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) &= \mathrm{E}\left(\left(X-\mathrm{E}(X)\right)^2\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \tag{19}$$

## 数值积分

如图 6 所示，随机变量 $X$ 在 [0, 1] 上为均匀分布。我们可以很容易通过积分得到期望值、方差。但是，并不是所有的概率密度函数都有解析式；此外，即便概率密度函数有解析式，也不代表我们能计算得到积分的解析解，比如高斯函数。

如图 7 所示，这就需要用到《数学要素》第 18 章介绍的**数值积分** (numerical integration)。当然，我们还可以用**蒙特卡洛模拟** (Monte Carlo simulation) 估算面积，这是本书后续要介绍的内容。

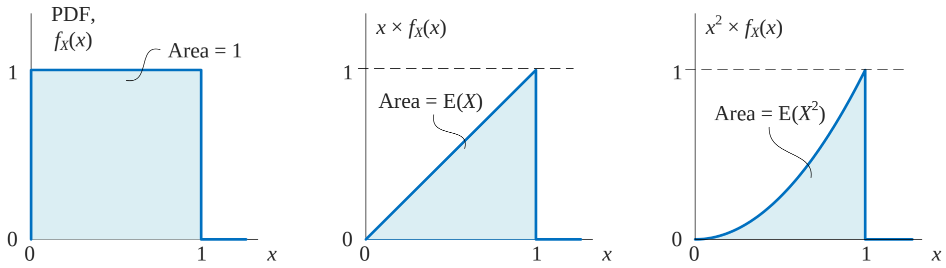



图 6. 随机变量 $X$ 在 [0, 1] 上为均匀分布

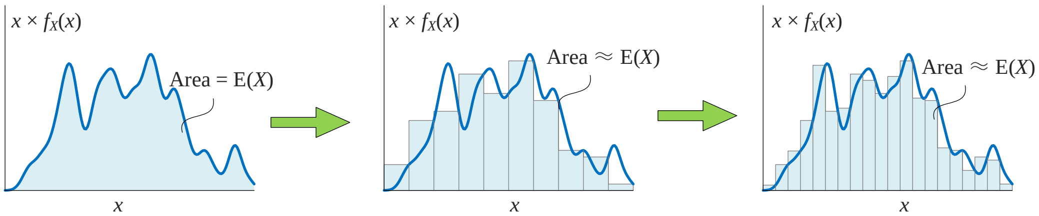



图 7. 数值积分估算期望值

# 6.3 二元连续随机变量

假设同一个试验中，有两个连续随机变量 $X$ 和 $Y$，非负二元函数 $f_{X,Y}(x,y)$ 为 $(X, Y)$ 的**联合概率密度函数** (joint probability density function 或 joint PDF)。

本章前文介绍，对于一元连续随机变量，积分得到的面积对应概率。而二元随机变量计算概率的工具是二重积分，从图像上来看，二重积分得到的体积对应概率。

如图 8 所示，给定积分区域 $A = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$，概率 $\Pr((X, Y) \in A)$ 对应的二重积分为：

$$\underbrace{\Pr\left(\left(X,Y\right)\in A\right)}_{\text{Probability}}=\int_c^d\int_a^b\underbrace{f_{X,Y}\left(x,y\right)}_{\text{Joint PDF}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{20}$$

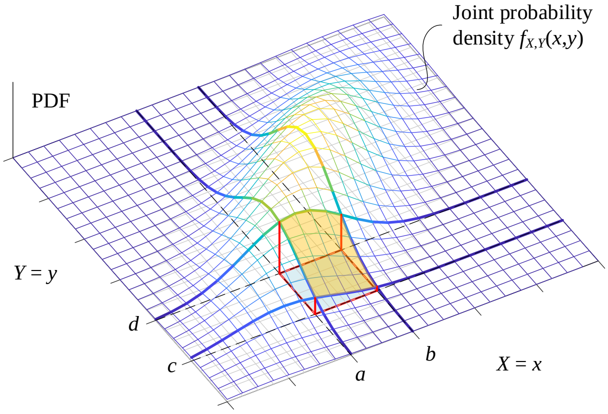



图 8. 二元 PDF $f_{X,Y}(x,y)$ 在 $A = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$ 二重积分

## 体积为 1：样本空间概率为 1

如果积分区域为整个平面，二重积分的结果为 1：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{f_{X,Y}\left(x,y\right)}_{\text{Joint PDF}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1 \tag{21}$$

也就是说，图 8 中 $f_{X,Y}(x,y)$ 曲面和水平面围成几何形状的体积为 1，代表样本空间的概率为 1。这本质上也是“穷举法”。

## 累积概率密度 CDF

二元累积概率函数 CDF $F_{X,Y}(x,y)$ 定义为：

$$\underbrace{F_{X,Y}\left(x,y\right)}_{\text{Probability}}=\Pr\left(X<x,Y<y\right)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}\underbrace{f_{X,Y}\left(s,t\right)}_{\text{Joint PDF}}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \tag{22}$$

图 9 所示等高线为某个二元累积概率函数 $F_{X,Y}(x,y)$。图 9 还绘制了两条边缘 CDF 曲线。

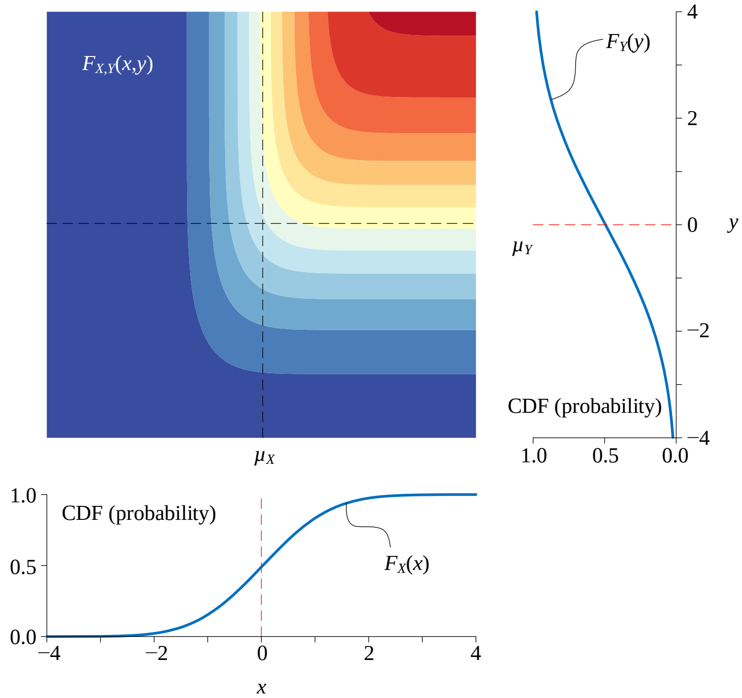



图 9. CDF 函数曲面 $F_{X,Y}(x,y)$ 平面填充等高线，边缘 CDF

## 6.4 边缘概率：二元 PDF 偏积分

图 10 所示为二元概率密度函数 $f_{X,Y}(x,y)$ 曲面和边缘概率曲线的关系。

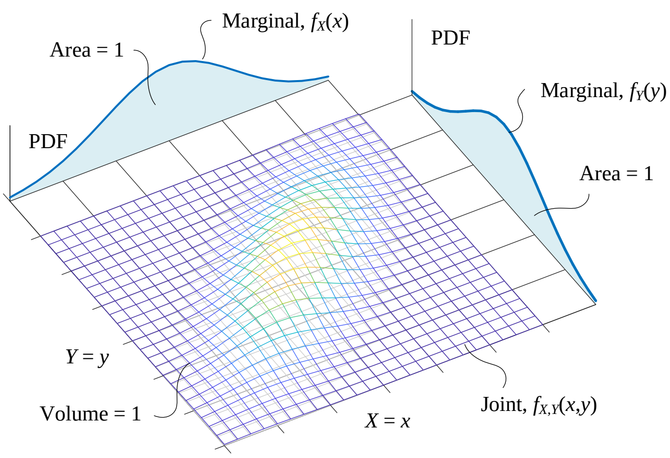



图 10. 二元联合概率密度函数曲面和边缘概率密度之间的关系

## 边缘概率密度函数 $f_X(x)$

如图 11 所示，连续随机变量 $X$ 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 可以通过 $f_{X,Y}(x,y)$ 对 $y$“偏积分”得到：

$$\underbrace{f_X(x)}_{\text{Marginal}} = \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{Joint}} \mathrm{d}\,y}^{\text{Eliminate } y} \tag{23}$$

上式，相当于消去 (降维、压扁、折叠) 变量 $y$，这和离散随机变量的“偏求和”类似。

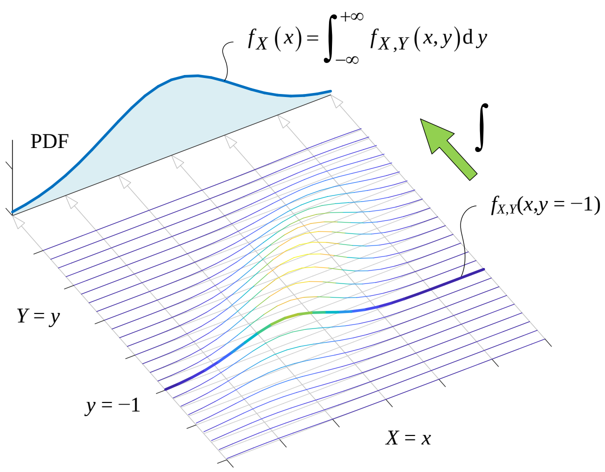



图 11. 联合概率密度 $f_{X,Y}(x,y)$ 对 $y$“偏积分”得到边缘概率密度 $f_X(x)$

(23) 可以简写为：

$$\underbrace{f_X(x)}_{\text{Marginal}} = \overbrace{\int_{y} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{Joint}} \mathrm{d}\,y}^{\text{Eliminate } y} \tag{24}$$

⚠注意，$f_X(x)$ 还是概率密度函数，而不是概率。也就是说，$f_{X,Y}(x,y)$ 二重积分得到概率，$f_{X,Y}(x,y)$ “偏积分” 得到的还是概率密度函数。

图 12 比较 $f_{X,Y}(x,y = c)$ 和 $f_X(x)$ 曲线。当 $y = c$ 取不同值时，我们可以看到 $f_{X,Y}(x,y)$ 和 $f_X(x)$ 曲线形状不同。

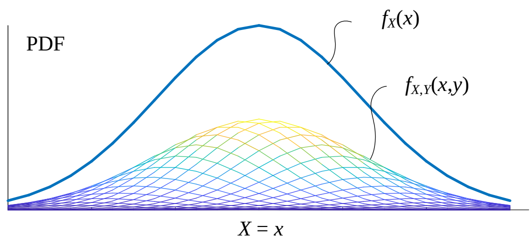



图 12. 比较联合概率密度 $f_{X,Y}(x,y)$ 和边缘概率密度 $f_X(x)$ 曲线

## 体密度 vs 面密度 vs 线密度

几何上来看，如图 13 所示，$f_{X,Y,Z}(x,y,z)$ 相当于“体密度”，$f_{X,Y}(x,y)$ 相当于“面密度”，$f_X(x)$ 相当于“线密度”。而概率值就相当于质量。

用白话说，体密度就是“铁块”的密度，计算铁块质量时会用到“体积 × 体密度”。

面密度就是“铁皮”的密度。铁皮厚度太薄，不便测量。计算铁皮质量时，我们用“面积 × 面密度”。

线密度对应“铁丝”的密度。关心铁丝横截面面积没有意义，实践中铁丝粗细有特定标准、型号。计算铁丝质量时，我们用“长度 × 线密度”。

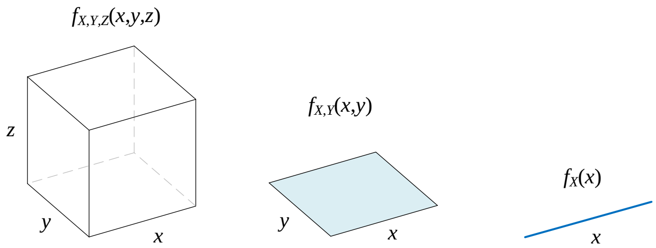



图 13. 体密度、面密度、线密度

## 边缘概率密度函数 $f_Y(y)$

同理，如图 14 所示，连续随机变量 $Y$ 的边缘分布概率密度函数 $f_Y(y)$ 可以通过 $f_{X,Y}(x,y)$ 对 $x$“偏积分”得到：

$$\underbrace{f_Y(y)}_{\text{Marginal}} = \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{Joint}} \mathrm{d}x}^{\text{Eliminate } x} \tag{25}$$

上式相当消去了变量 $x$。上式也可以简写为：

$$\underbrace{f_Y(y)}_{\text{Marginal}} = \overbrace{\int_x \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{Joint}} \mathrm{d}x}^{\text{Eliminate } x} \tag{26}$$

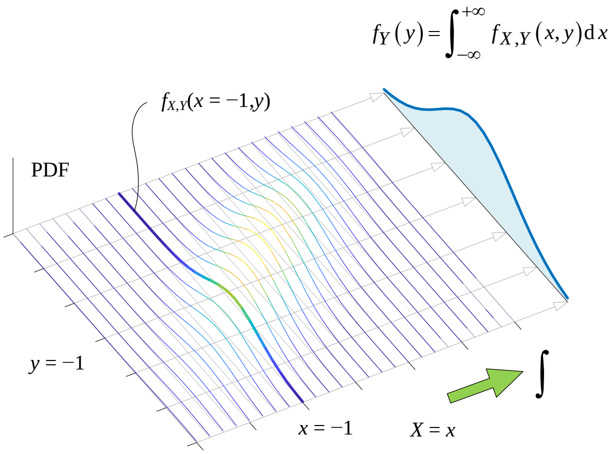



图 14. $f_{X,Y}(x,y)$ 对 $x$“偏积分”得到边缘分布概率密度函数 $f_Y(y)$

# 6.5 条件概率：引入贝叶斯定理

## 条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$

设 $X$ 和 $Y$ 为连续随机变量，联合概率密度函数为 $f_{X,Y}(x,y)$。利用贝叶斯定理，在给定 $Y=y$ 条件下，且 $f_Y(y)>0$，$X$ 的条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 为：

$$\underbrace{f_{X|Y}(x|y)}_{\text{Conditional}}=\frac{\overbrace{f_{X,Y}(x,y)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{f_Y(y)}_{\text{Marginal}}} \tag{27}$$

⚠ 再次强调，上式中，边缘 $f_Y(y)$ 也是概率密度。

图 15 中 $f_{X,Y}(x,y=-1)$ 曲线代表 $Y=-1$ 时联合概率密度函数。

$f_{X,Y}(x,y=-1)$ 对 $x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 积分的结果为边缘概率概率密度 $f_Y(y=-1)$。也就是说，$f_{X,Y}(x,y=-1)$ 曲线面积为边缘概率密度 $f_Y(y=-1)$。

下一步，$f_{X,Y}(x,y=-1)$ 经过 $f_Y(y=-1)$ 缩放得到条件概率曲线 $f_{X|Y}(x|y=-1)$。

⚠ 注意，$f_{X|Y}(x|y=-1)$ 和横轴围成图形的面积为 1，这代表 $Y=-1$ 这个新的样本空间概率为 1。

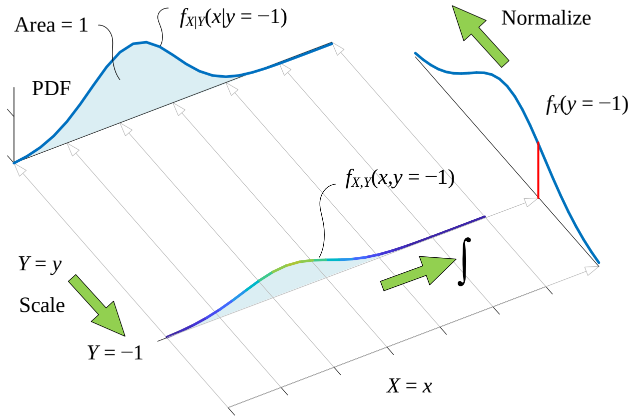



图 15. 给定 $Y = y$ 条件下且 $f_Y(y) > 0$，$X$ 的条件概率密度函数

图 16 比较 $f_X(x)$ 和 $y$ 取不同值时条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 图像。将这些曲线投影到同一个平面，得到图 17。注意，图 17 中所有曲线和横轴围成图形的面积都是 1。

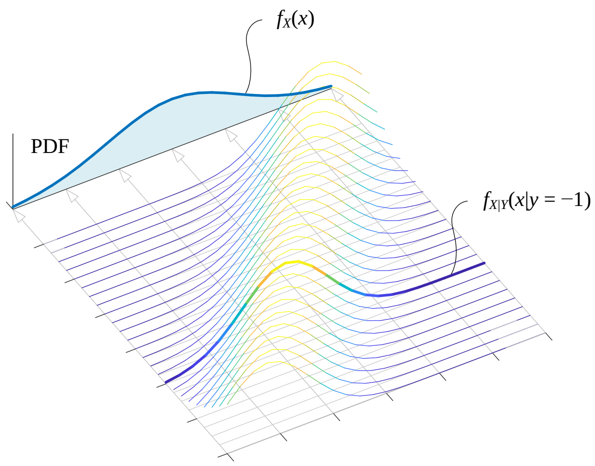



图 16. 比较边缘概率密度 $f_X(x)$ 和条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$

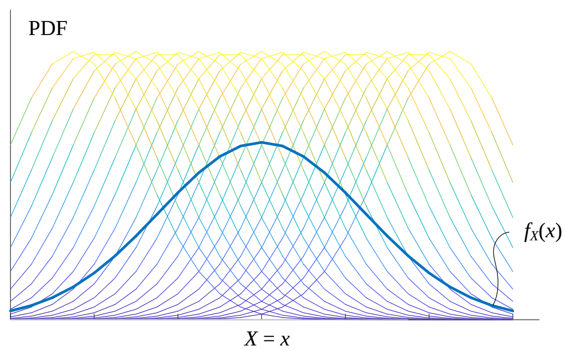



图 17. 比较边缘概率密度 $f_X(x)$ 和条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$，投影在平面上

## 条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$

给定 $X = x$ 条件下，且 $f_X(x) > 0$，条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$ 可以通过下式求得：

$$\underbrace{f_{Y|X}\left(y|x\right)}_{\text{Conditional}} = \frac{\overbrace{f_{X,Y}\left(x,y\right)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{f_X\left(x\right)}_{\text{Marginal}}} \tag{28}$$

如图 18 所示为，当 $X = -1$ 条件下，联合概率密度函数 $f_{X,Y}(x = -1,y)$ 首先对 $y$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 积分的结果为边缘概率密度值 $f_X(x = -1)$。下一步，$f_{X,Y}(x = -1,y)$ 经过 $f_X(x = -1)$ 缩放得到条件概率曲线 $f_{Y|X}(y|x = -1)$。

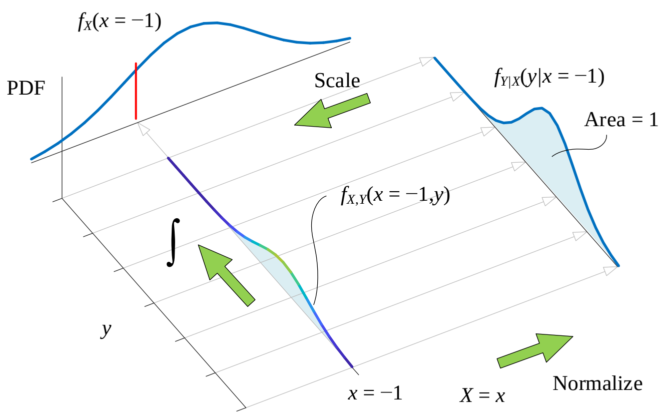



图 18. 给定 $X = x$ 条件下且 $f_X(x) > 0$，$Y$ 的条件概率密度函数

图 19 比较 $f_Y(y)$ 和 $x$ 取不同值时条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$ 图像。

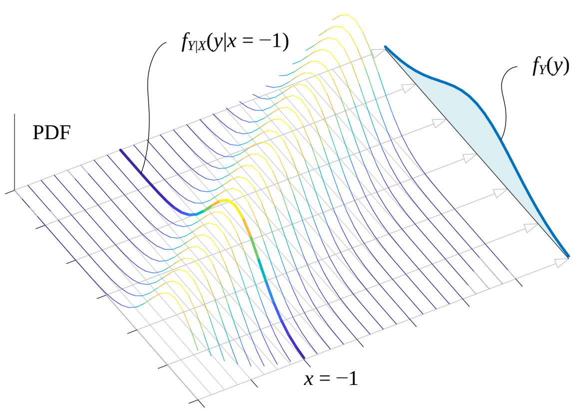



图 19. 比较边缘概率密度 $f_Y(y)$ 和条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ 图像

### 联合概率、边缘概率、条件概率

根据贝叶斯定理，联合概率、边缘概率、条件概率三者关系为：

$$\underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{Joint}} = \underbrace{f_{X|Y}(x|y)}_{\text{Conditional}} \underbrace{f_Y(y)}_{\text{Marginal}} = \underbrace{f_{Y|X}(y|x)}_{\text{Conditional}} \underbrace{f_X(x)}_{\text{Marginal}} \tag{29}$$

在 (23) 基础上，连续随机变量 $X$ 的边缘分布概率密度函数 $f_X(x)$ 可以通过下式获得：

$$\underbrace{f_X(x)}_{\text{Marginal}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{Joint}} \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_{X|Y}(x|t)}_{\text{Conditional}} \underbrace{f_Y(t)}_{\text{Marginal}} \mathrm{d}t \tag{30}$$

同理，连续随机变量 $Y$ 的边缘分布概率密度函数 $f_Y(y)$ 可以通过下式计算得到：

$$\underbrace{f_Y(y)}_{\text{Marginal}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{Joint}} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_{Y|X}(y|s)}_{\text{Conditional}} \underbrace{f_X(s)}_{\text{Marginal}} \mathrm{d}s \tag{31}$$

## 6.6 独立性：比较条件概率和边缘概率

如果连续随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立，下式成立：

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \tag{32}$$

图 20 所示为 $X$ 和 $Y$ 独立，条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 之间关系。我们发现条件概率 $f_{X|Y}(x|y)$ 的曲线和 $Y$ 的取值无关。条件概率 $f_{X|Y}(x|y)$ 的曲线形状和边缘概率 $f_X(x)$ 完全一致。这和图 16 完全不同。

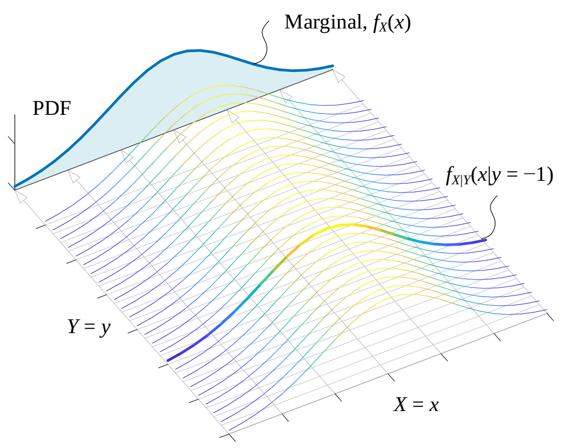



图 20. $X$ 和 $Y$ 独立，条件概率 $f_{X|Y}(x|y)$ 和边缘概率 $f_X(x)$ 之间关系

(32) 等价于:

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) \tag{33}$$

图 21 所示为 $X$ 和 $Y$ 独立，条件概率 $f_{Y|X}(y|x)$ 和边缘概率 $f_Y(y)$ 的图像完全一致。

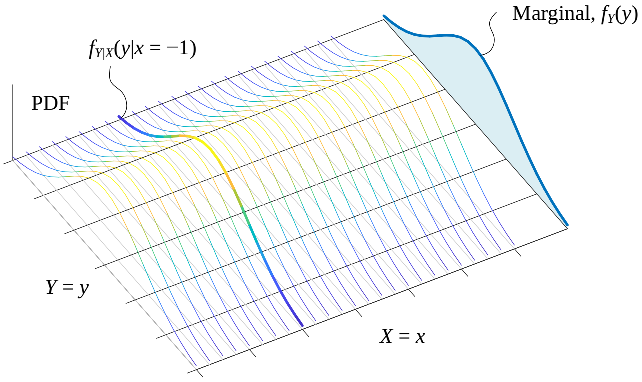



图 21. $X$ 和 $Y$ 独立，条件概率 $f_{Y|X}(y|x)$ 和边缘概率 $f_Y(y)$ 之间关系

## 独立：联合概率

对于两个连续随机变量 $X$ 和 $Y$，如果两者独立，则联合概率密度函数 $f_{X,Y}(x,y)$ 为边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的乘积:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \tag{34}$$

图 22 所示为连续随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立，联合概率 $f_{X,Y}(x,y)$ 曲面。图 23 所示为联合概率 $f_{X,Y}(x,y)$ 平面等高线。

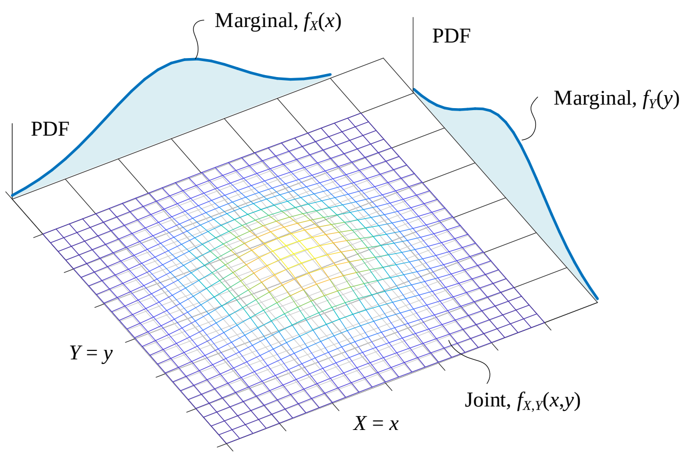



图 22. 连续随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立，联合概率密度 $f_{X,Y}(x,y)$ 曲面

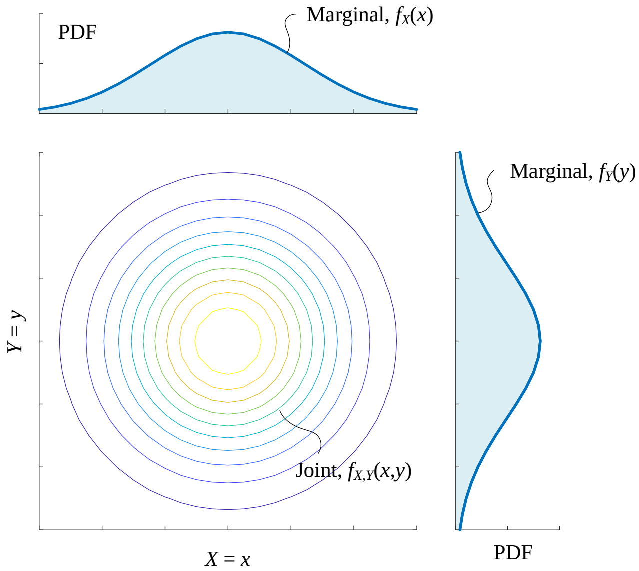



图 23. 连续随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立，联合概率密度 $f_{X,Y}(x,y)$ 曲面等高线

# 6.7 以鸢尾花数据为例：不考虑分类标签

本章以下两节还是用鸢尾花数据集花萼长度 ($X_1$)、花萼宽度 ($X_2$)、分类标签 ($Y$) 为例，讲解本章前文介绍连续随机变量主要知识点。图 24 所示为不考虑分类时，鸢尾花样本数据花萼长度、花萼宽度散点图。

这两节采用和第 5 章 9、10 两节几乎一样的结构，方便大家对照阅读。

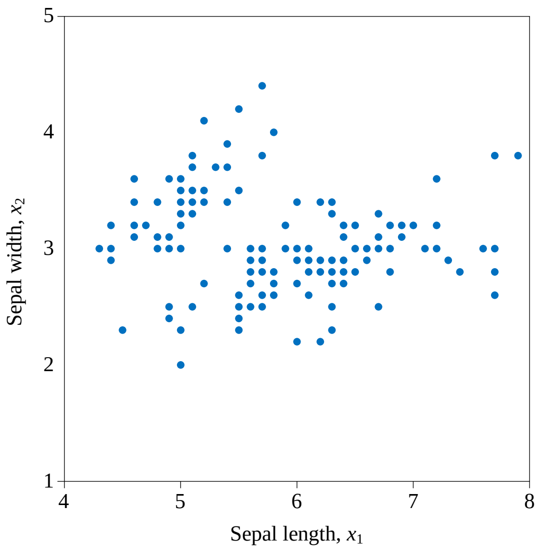


图 24. 鸢尾花数据花萼长度、花萼宽度散点图，不考虑分类

## 概率密度估计 → 联合概率密度函数 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$

基于高斯**核密度估计** (kernel density estimation, KDE)，我们可以得到如图 25 所示联合概率密度函数 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$。暖色系对应较大的概率密度值，也就是说鸢尾花样本分布更为密集。

核密度估计的基本思想是，通过在每个数据点处放置一个核函数 (如高斯核函数)，以此来估计概率密度函数。这样，在整个数据集上使用核函数后，我们可以获得一条连续的概率密度曲线，该曲线可以用来估计各种统计量，如均值和方差。

再次强调，图 25 仅仅代表 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 的一种估计。即便采用相同的 KDE，使用不同的核函数、改变算法参数会导致 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 曲面形状变化。本书第 18 章将专门讲解核密度估计方法。

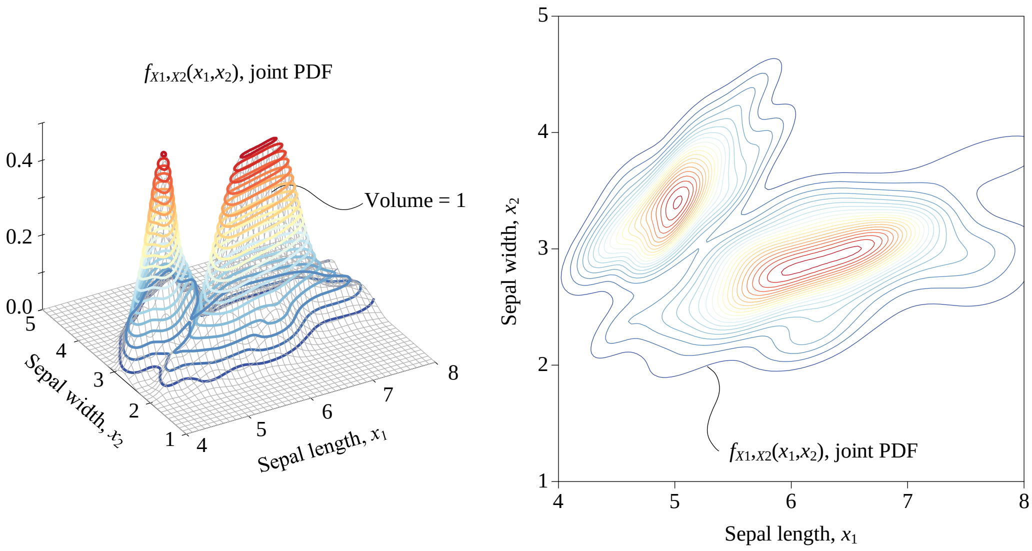



图 25. 联合概率密度函数 $f_{X1,X2}(x_1, x_2)$ 三维等高线和平面等高线，不考虑分类

举个例子，花萼长度 ($X_1$) 为 6.5、花萼宽度 ($X_2$) 为 2.0 时，联合概率密度估计为：

$$\underbrace{f_{X1,X2}\left(x_1 = 6.5, x_2 = 2.0\right)}_{\text{Joint PDF}} \approx 0.02097 \tag{35}$$

注意，0.02097 这个数值是概率密度，不是概率。也就是说，我们不能说鸢尾花取到花萼长度 ($X_1$) 为 6.5、花萼宽度 ($X_2$) 为 2.0 时对应的概率值为 0.02097，即便这个值某种程度上也代表可能性。

由于 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 有两个随机变量，对它二重积分可以得到概率值。二重积分就相当于“穷举法”。

采用“穷举法”，图 25 中 $f_{X1,X2}(x_1, x_2)$ 曲面和整个水平面围成的几何形体体积为 1，即：

$$\int_{x_2}\int_{x_1} f_{X1,X2}\left(x_1, x_2\right) \mathrm{d}\, x_1 \, \mathrm{d}\, x_2 = \underbrace{1}_{\text{Probability}} \tag{36}$$

## 联合概率密度函数 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 的剖面线

$f_{X1,X2}(x_1, x_2)$ 本质上是个二元函数。

《数学要素》第 10 章介绍过除了等高线，我们还可以使用“剖面线”分析二元函数。

如图 26 所示，当固定 $x_1$ 取值时，$f_{X1,X2}(x_1 = c, x_2)$ 代表一条曲线。将一系列类似曲线投影到竖直平面得到图 26 (b)。图 26 (b)，这些直线和整个水平轴围成的面积就是边缘概率 $f_{X1}(x_1 = c)$。而计算面积的数学工具就是“偏积分”。

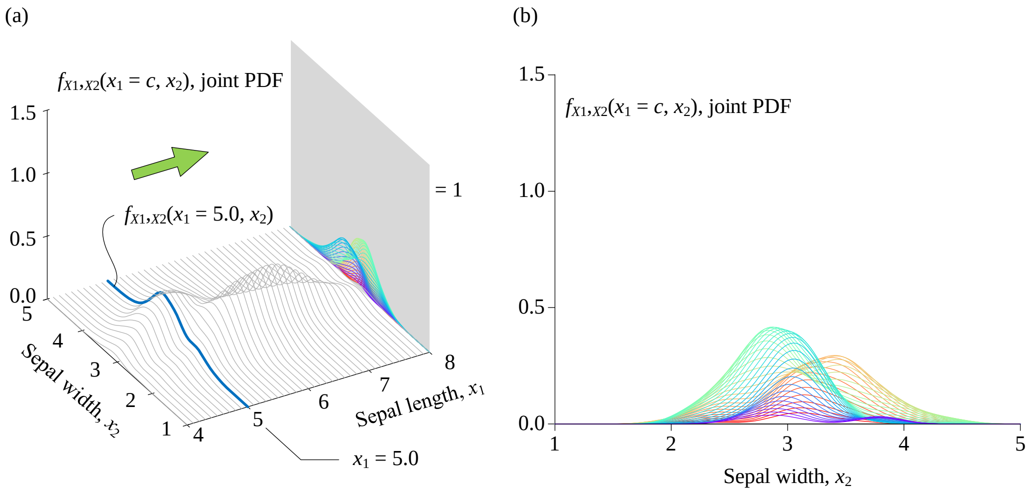



图 26. 固定 $x_1$ 时，概率密度函数 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 随 $x_2$ 变化

图 27 所示为固定 $x_2$ 时，概率密度函数 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 随 $x_1$ 变化。图 26 (b) 中直线和整个水平轴围成的面积对应边缘概率 $f_{X2}(x_2 = c)$。

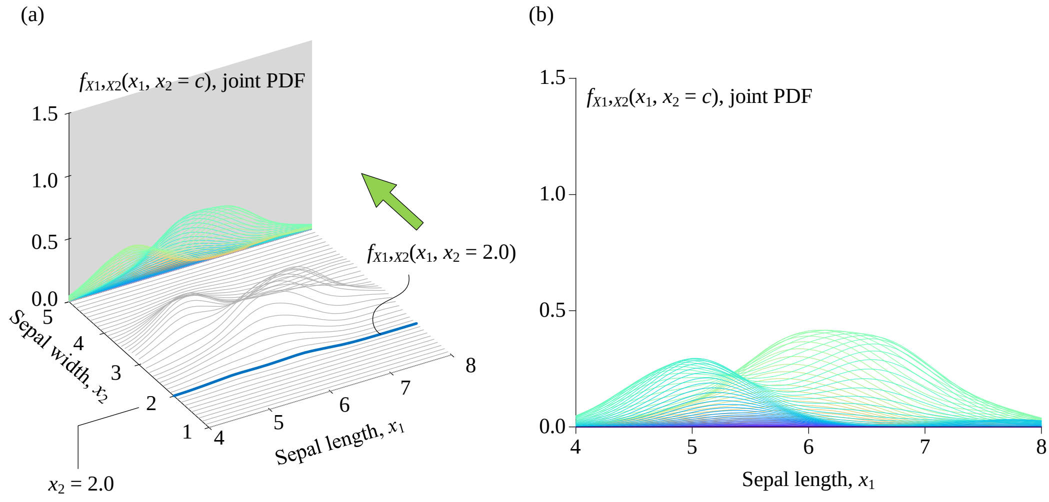



图 27. 固定 $x_2$ 时，概率密度函数 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 随 $x_1$ 变化

## 花萼长度边缘 PDF $f_{X1}(x_1)$：偏积分

图 28 所示为求解花萼长度边缘概率密度函数 $f_{X1}(x_1)$ 的过程：

$$\underbrace{f_{X1}(x_1)}_{\text{Marginal}} = \int_{x_2} \underbrace{f_{X1,X2}(x_1, x_2)}_{\text{Joint}} \mathrm{d}\, x_2 \tag{37}$$

举个例子，当花萼长度 ($X_1$) 取值为 5.0 时，对应的边缘概率 $f_{X1}(5.0)$ 可以通过如下偏积分得到：

$$f_{X1}(x_1 = 5.0) = \int_{x_2} f_{X1,X2}(x_1 = 5.0, x_2)\mathrm{d}\, x_2 \tag{38}$$

图 28 中彩色阴影面积对应边缘概率，即 $f_{X1}(x_1)$ 曲线特定一点的高度。再次强调，$f_{X1}(x_1)$ 本身也是概率密度，不是概率值。$f_{X1}(x_1)$ 再积分可以得到概率。

如图 28 (b) 所示，$f_{X1}(x_1)$ 曲线和整个横轴围成图形的面积为 1。大家可以试着用数值积分计算期望值 $\mathrm{E}(X_1)$。

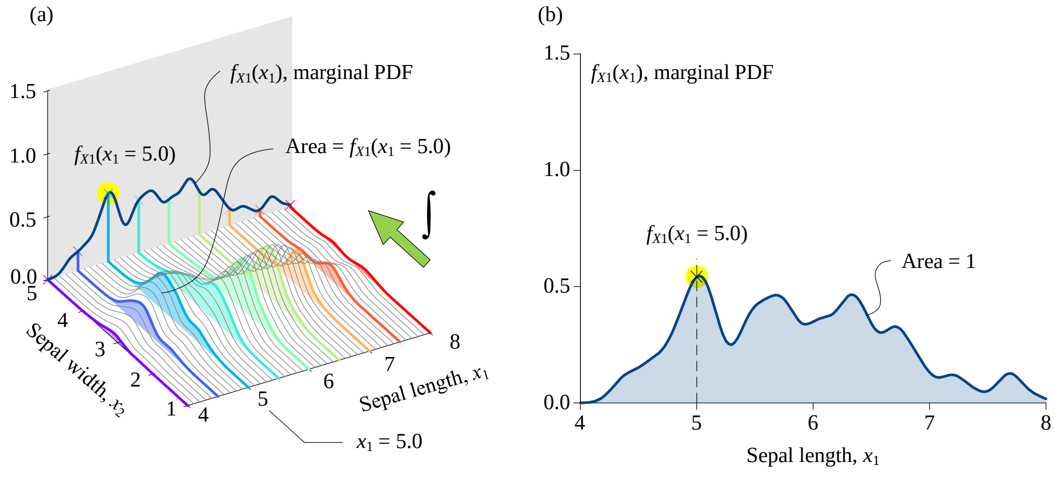



图 28. 偏积分求解边缘概率 $f_{X1}(x_1)$

## 花萼宽度边缘 PDF $f_{X2}(x_2)$：偏求和

图 29 所示为求解花萼宽度边缘概率密度函数的过程：

$$\underbrace{f_{X2}(x_2)}_{\text{Marginal}} = \int_{x_1} \underbrace{f_{X1,X2}(x_1, x_2)}_{\text{Joint}} \mathrm{d}x_1 \tag{39}$$

举个例子，当花萼宽度 ($X_2$) 取值为 2.0 时，对应的边缘概率密度 $f_{X2}(2.0)$ 可以通过如下偏积分得到：

$$f_{X2}(x_2 = 2.0) = \int_{x_1} f_{X1,X2}(x_1, x_2 = 2.0) \mathrm{d}x_1 \tag{40}$$

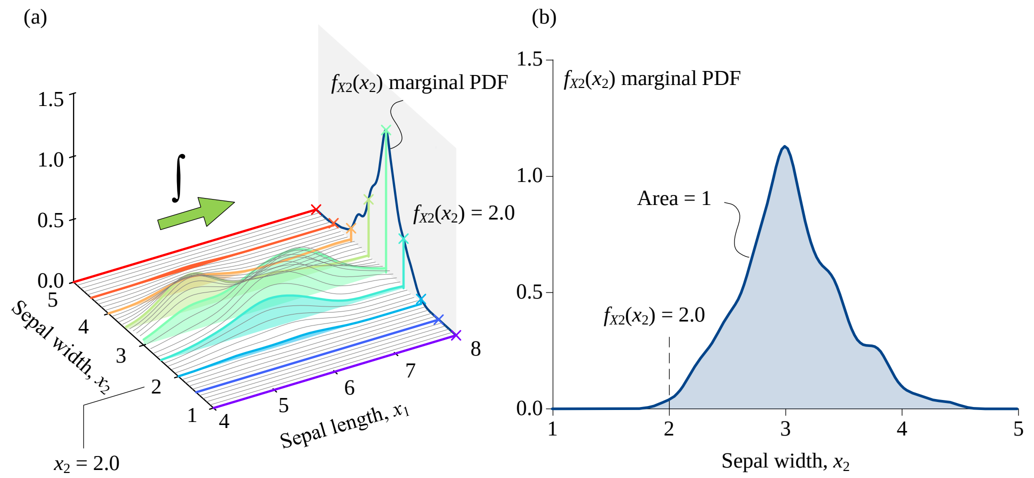



图 29. 偏积分求解边缘概率 $f_{X2}(x_2)$

### 联合 PDF vs 边缘 PDF

图 30 所示为联合 PDF 和边缘 PDF 之间关系。图中联合概率密度函数 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 采用高斯 KDE 估计得到。图 30 中的 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 比较精准地捕捉到了鸢尾花样本数据的分布特征。

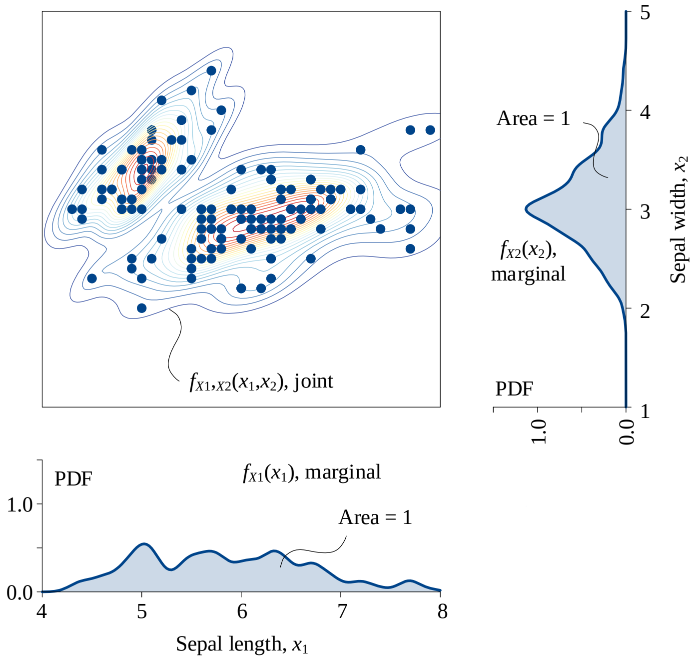



图 30. 联合 PDF 和边缘 PDF 之间关系

### 假设独立

如果假设 $X_1$ 和 $X_2$ 独立，联合概率密度 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 可通过下式计算得到：

$$f_{X1,X2}(x_1,x_2) = f_{X1}(x_1) \cdot f_{X2}(x_2) \tag{41}$$

图 31 所示为假设 $X_1$ 和 $X_2$ 独立时 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 的平面等高线和边缘 PDF 之间关系。

比较鸢尾花样本数据分布和假设 $X_1$ 和 $X_2$ 独立时估算得到的 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 等高线，很遗憾地发现图 31 这个联合概率密度函数 $f_{X1,X2}(x_1,x_2)$ 没有合理反映样本数据分布，尽管图 30 和图 31 边缘概率完全一致。

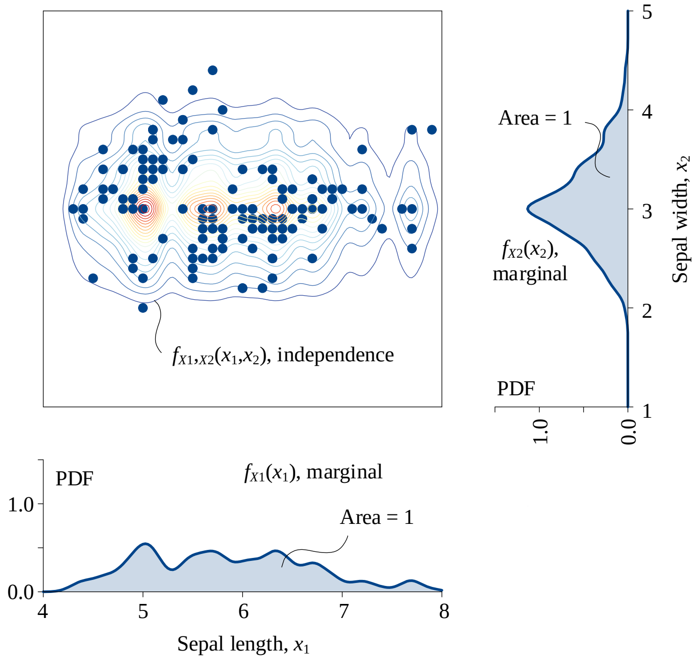



图 31. 联合概率，假设 $X_1$ 和 $X_2$ 独立

### 给定花萼长度，花萼宽度的条件 PDF $f_{X2\mid X1}(x_2\mid x_1)$

如图 32 所示，利用贝叶斯定理，条件概率密度 $f_{X2\mid X1}(x_2\mid x_1)$ 可以通过下式计算：

$$\underbrace{f_{X2\mid X1}(x_2\mid x_1)}_{\text{Conditional}} = \frac{\overbrace{f_{X1,X2}(x_1,x_2)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{f_{X1}(x_1)}_{\text{Marginal}}} \tag{42}$$

注意，上式中 $f_{X1}(x_1) > 0$。上式分母中的边缘概率 $f_{X1}(x_1)$ 起到归一化作用。

如图 32 (b) 所示，经过归一化的条件概率曲线围成的面积变为 1，即：

$$\int_{x_2} \underbrace{f_{X2\mid X1}(x_2\mid x_1)}_{\text{Conditional}}\mathrm{d}x_2 = \int_{x_2} \frac{\overbrace{f_{X1,X2}(x_1,x_2)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{f_{X1}(x_1)}_{\text{Marginal}}}\mathrm{d}x_2 = \frac{\int_{x_2} f_{X1,X2}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2}{f_{X1}(x_1)} = \frac{f_{X1}(x_1)}{f_{X1}(x_1)} = 1 \tag{43}$$

将不同位置的条件 PDF $f_{X2\mid X1}(x_2\mid x_1)$ 曲线投影到平面得到图 33。图 33 (b) 中每条曲线和横轴围成面积都是 1。请大家仔细比较图 26 和图 33。此外，$f_{X2\mid X1}(x_2\mid x_1)$ 本身也是一个二元函数。图 34 所示为 $f_{X2\mid X1}(x_2\mid x_1)$ 三维等高线和平面等高线。

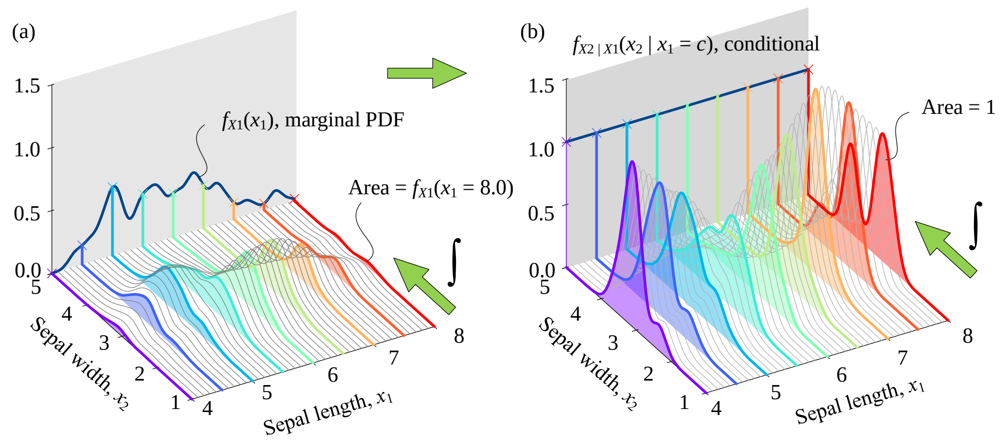



图 32. 计算条件概率 $f_{X2 | X1}(x_2 | x_1)$ 原理

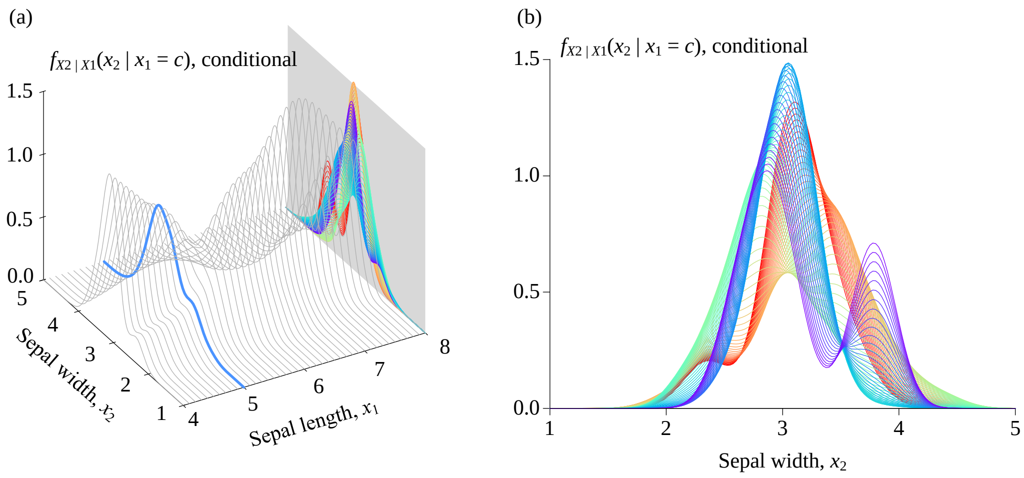



图 33. $f_{X2 | X1}(x_2 | x_1)$ 曲线投影到平面

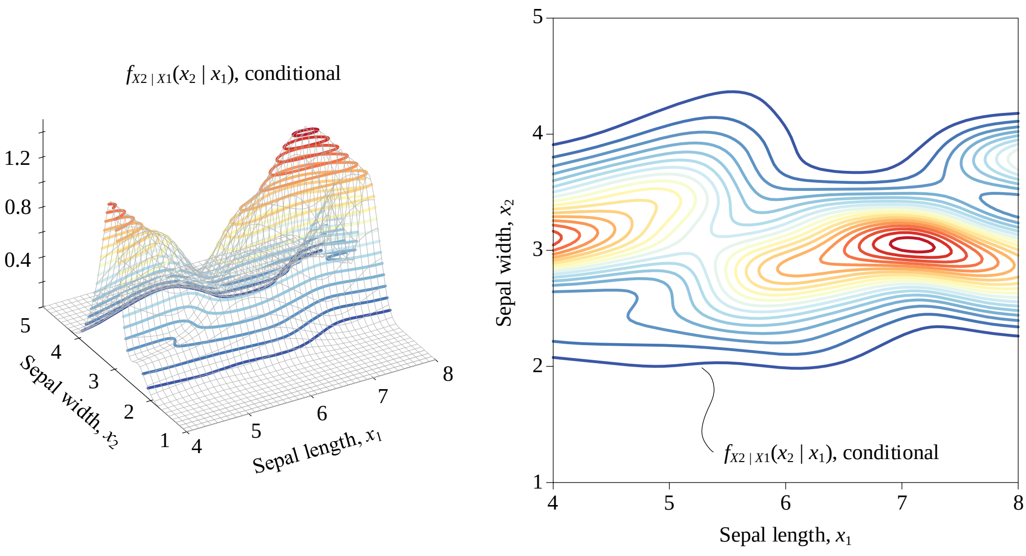



图 34. $f_{X2 | X1}(x_2 | x_1)$ 条件概率密度三维等高线和平面等高线，不考虑分类

## 给定花萼宽度，花萼长度的条件概率密度函数 $f_{X1 \mid X2}(x_1 \mid x_2)$

如图 35 所示，同样利用贝叶斯定理，条件 PDF $f_{X1 \mid X2}(x_1 \mid x_2)$ 可以通过下式计算：

$$\underbrace{f_{X1|X2}(x_1 \mid x_2)}_{\text{Conditional}} = \frac{\overbrace{f_{X1,X2}(x_1, x_2)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{f_{X2}(x_2)}_{\text{Marginal}}} \tag{44}$$

注意，上式中 $f_{X2}(x_2) > 0$。类似前文，(44) 中分母中 $f_{X2}(x_2)$ 同样起到归一化作用。如图 35 (b) 所示，经过归一化 $f_{X1 \mid X2}(x_1 \mid x_2)$ 面积变为 1，即：

$$\int_{x_1} \underbrace{f_{X1|X2}(x_1 \mid x_2)}_{\text{Conditional}} \mathrm{d}x_1 = \int_{x_1} \frac{\overbrace{f_{X1,X2}(x_1, x_2)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{f_{X2}(x_2)}_{\text{Marginal}}} \mathrm{d}x_1 = \frac{\int_{x_1} f_{X1,X2}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1}{f_{X2}(x_2)} = \frac{f_{X2}(x_2)}{f_{X2}(x_2)} = 1 \tag{45}$$

将不同位置的条件概率密度 $f_{X1 \mid X2}(x_1 \mid x_2)$ 曲线投影到平面得到图 36。图 36 (b) 中每条曲线和横轴围成面积都是 1。也请大家仔细比较图 27 和图 36。

$f_{X1 \mid X2}(x_1 \mid x_2)$ 同样也是一个二元函数，如图 37 所示的 $f_{X1 \mid X2}(x_1 \mid x_2)$ 三维等高线和平面等高线。

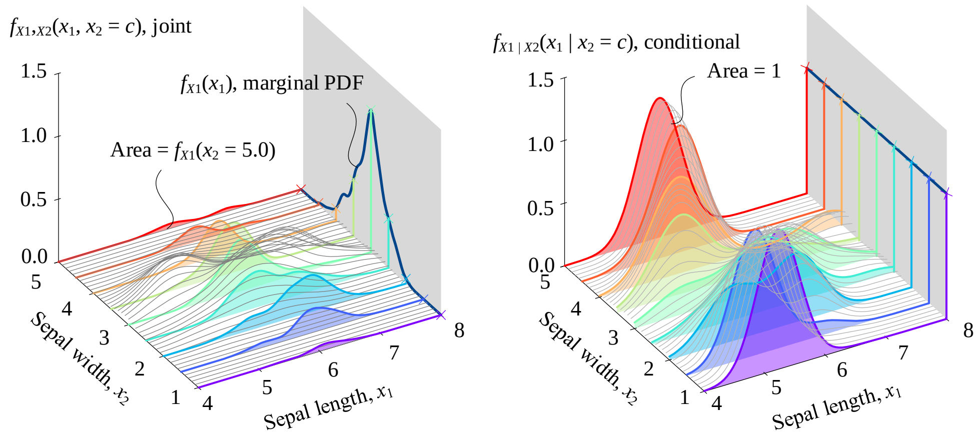



图 35. 计算条件概率 $f_{X1 \mid X2}(x_1 \mid x_2)$ 原理

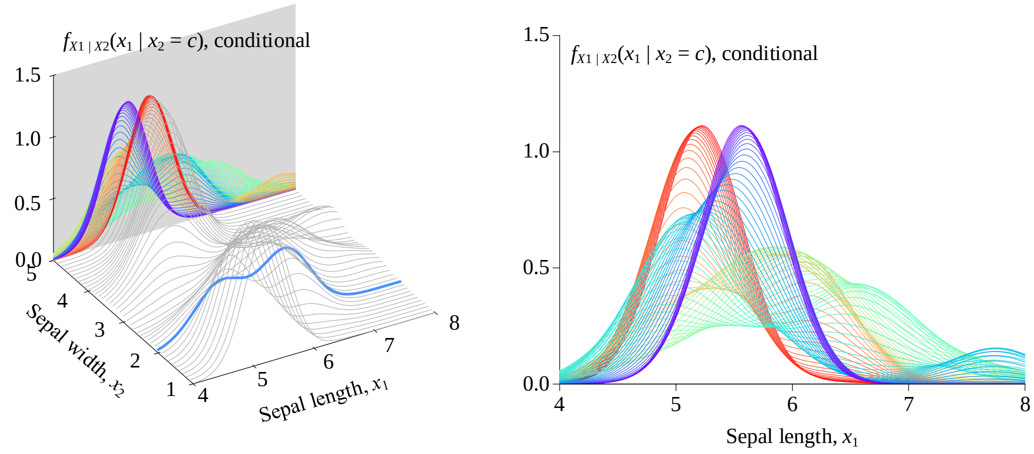



图 36. $f_{X1 | X2}(x_1 | x_2)$ 曲线投影到平面

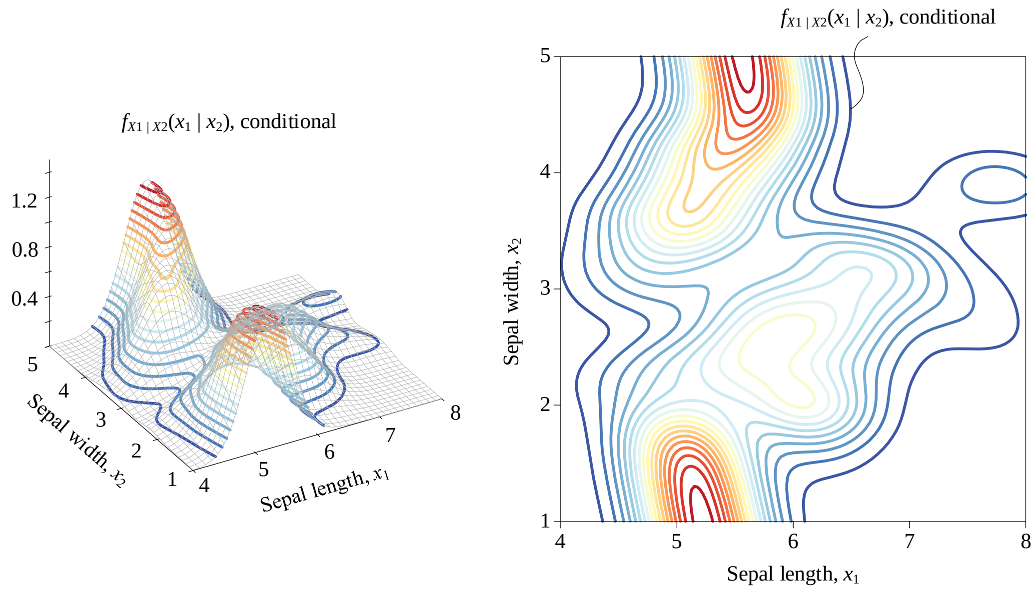



图 37. $f_{X1 | X2}(x_1 | x_2)$ 条件概率密度三维等高线和平面等高线，不考虑分类

# 6.8 以鸢尾花数据为例：考虑分类标签

本节将以鸢尾花标签为条件讨论条件概率。图 38 所示为考虑分类标签的鸢尾花数据散点图。

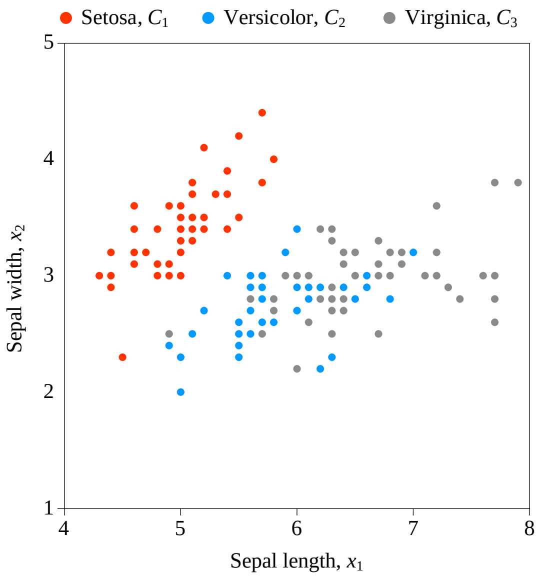



图 38. 鸢尾花数据花萼长度、花萼宽度散点图，考虑分类

## 给定分类标签 $Y = C_1$ (setosa)

图 39 所示为给定分类标签 $Y = C_1$ (setosa) 条件下，条件概率 $f_{X1,X2 \mid Y}(x_1, x_2 \mid y = C_1)$ 平面等高线和条件边缘概率密度曲线。

$f_{X1,X2 \mid Y}(x_1, x_2 \mid y = C_1)$ 曲面和整个水平面围成体积为 1，也就是说：

$$\int_{x_2}\int_{x_1} \underbrace{f_{X1,X2|Y}\left(x_1, x_2 \mid C_1\right)}_{\text{Conditional PDF}} \mathrm{d}\, x_1 \,\mathrm{d}\, x_2 = \underbrace{1}_{\text{Probability}} \tag{46}$$

用 KDE 估算 $f_{X1,X2 \mid Y}(x_1, x_2 \mid y = C_1)$ 时，我们仅仅考虑标签为 $C_1$ 的数据。同理，估算条件边缘概率曲线 $f_{X1 \mid Y}(x_1 \mid y = C_1)$、$f_{X2 \mid Y}(x_2 \mid y = C_1)$ 时，我们也不考虑其他标签数据。

图 39 中，$f_{X1 \mid Y}(x_1 \mid y = C_1)$、$f_{X2 \mid Y}(x_2 \mid y = C_1)$ 分别和 $x_1$、$x_2$ 围成的面积也是 1，即：

$$\begin{aligned} \int_{x_1} \underbrace{f_{X1|Y}\left(x_1 \mid C_1\right)}_{\text{Conditional PDF}} \mathrm{d}\, x_1 = \underbrace{1}_{\text{Probability}} \\ \int_{x_2} \underbrace{f_{X2|Y}\left(x_2 \mid C_1\right)}_{\text{Conditional PDF}} \mathrm{d}\, x_2 = \underbrace{1}_{\text{Probability}} \end{aligned} \tag{47}$$

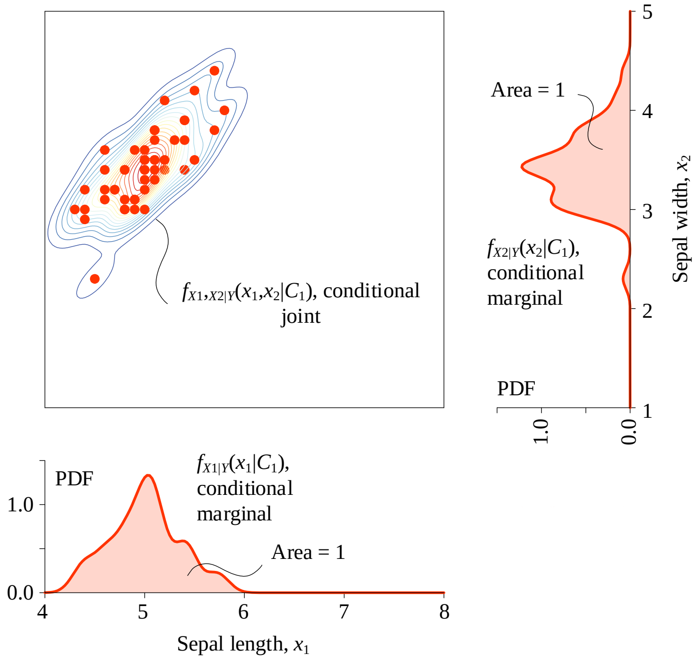



图 39. 条件概率 $f_{X1,X2\mid Y}(x_1, x_2 \mid y = C_1)$ 平面等高线和条件边缘概率密度曲线，给定分类标签 $Y = C_1$ (setosa)

## 给定分类标签 $Y = C_2$ (versicolor)

图 40 所示为，给定分类标签 $Y = C_2$ (versicolor)，条件概率 $f_{X1,X2\mid Y}(x_1, x_2 \mid y = C_2)$ 平面等高线和条件边缘概率密度曲线。请大家自行分析这幅图。

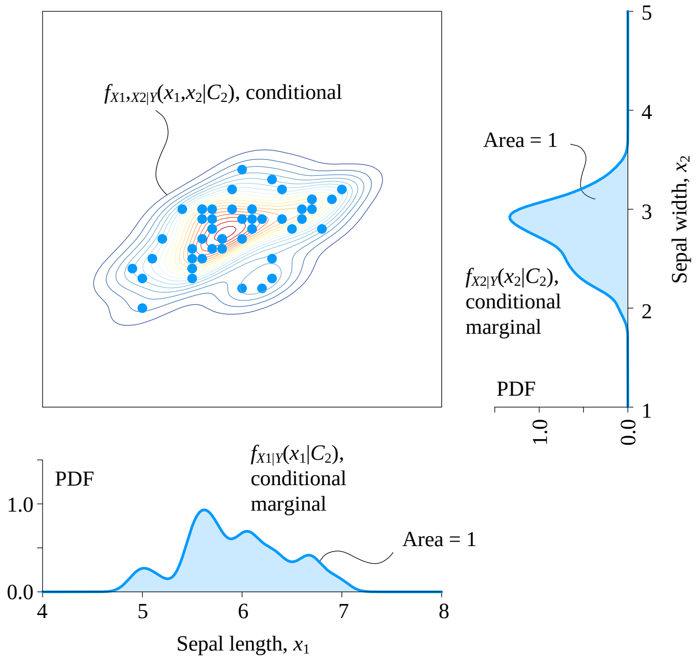



图 40. 条件 PDF $f_{X1,X2\mid Y}(x_1, x_2 \mid y = C_2)$ 平面等高线和条件边缘概率密度曲线，给定分类标签 $Y = C_2$ (versicolor)

## 给定分类标签 $Y = C_3$ (virginica)

图 41 所示为，给定分类标签 $Y = C_3$ (virginica)，条件概率 $f_{X1,X2\mid Y}(x_1, x_2 \mid y = C_3)$ 平面等高线和条件边缘概率密度曲线。也请大家自行分析这幅图。

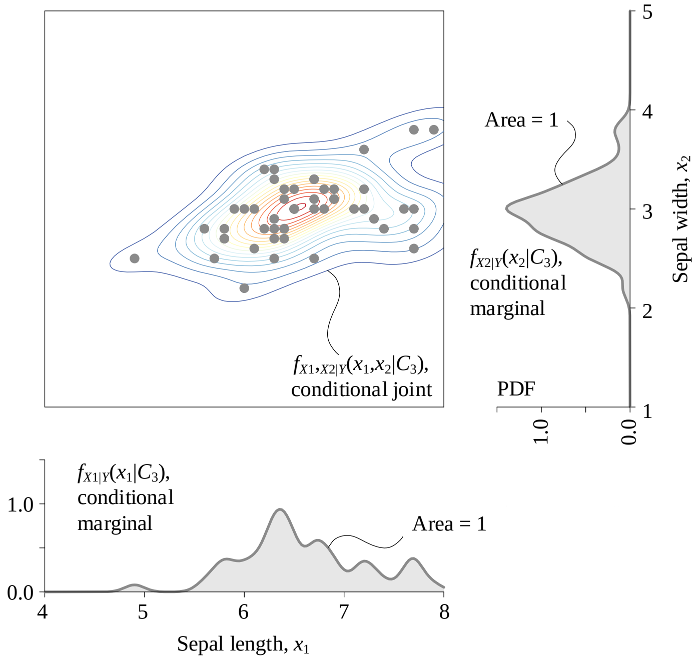



图 41. 条件 PDF $f_{X1,X2\mid Y}(x_1, x_2 \mid y = C_3)$ 平面等高线和条件边缘概率密度曲线，给定分类标签 $Y = C_3$ (virginica)

## 全概率定理：穷举法

如图 42 所示，利用全概率定理，三幅条件概率等高线叠加可以得到联合概率密度，即：

$$
\begin{aligned}
f_{X1,X2}(x_1,x_2) = & f_{X1,X2|Y}(x_1,x_2 | y = C_1) p_Y(C_1) + \\
& f_{X1,X2|Y}(x_1,x_2 | y = C_2) p_Y(C_2) + \\
& f_{X1,X2|Y}(x_1,x_2 | y = C_3) p_Y(C_3)
\end{aligned}
\tag{48}
$$

此外，请大家思考 $f_{X1}(x_1)$、$f_{X1\mid Y}(x_1 \mid y = C_1)$、$f_{X1\mid Y}(x_1 \mid y = C_2)$、$f_{X1\mid Y}(x_1 \mid y = C_3)$ 四者关系。

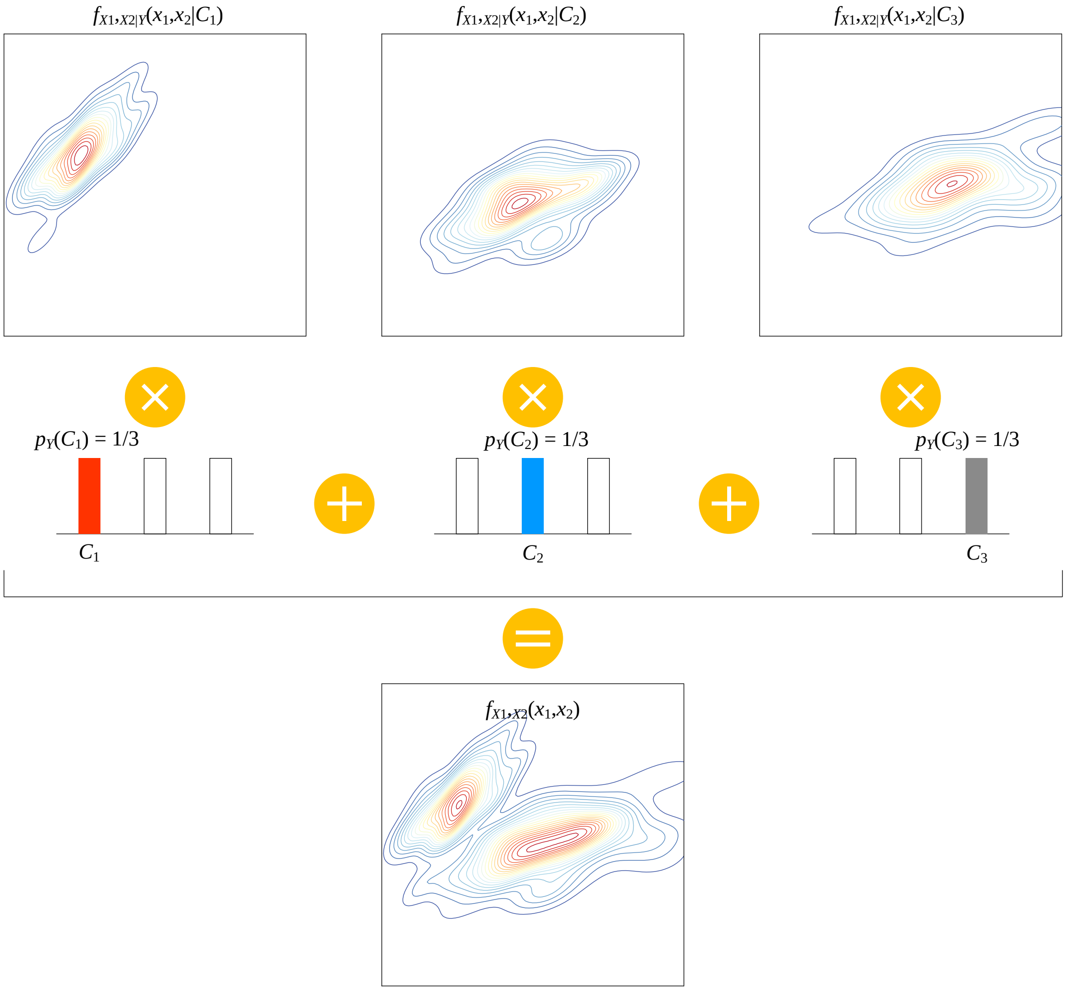



图 42. 利用全概率定理，计算 $f_{X1,X2}(x_1, x_2)$

## 给定 $X_1$ 和 $X_2$，$Y$ 的条件概率：后验概率

根据贝叶斯定理，当 $f_{X1,X2}(x_1,x_2) > 0$ 时，**后验** (posterior) PDF $f_{Y|X1,X2}(C_k \mid x_1,x_2)$ 可以根据下式计算得到：

$$\overbrace{f_{Y|X1,X2}\left(C_k \mid x_1, x_2\right)}^{\text{Posterior}} = \frac{\overbrace{f_{X1,X2,Y}\left(x_1, x_2, C_k\right)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{f_{X1,X2}\left(x_1, x_2\right)}_{\text{Evidence}}} \tag{49}$$

从分类角度来看，这相当于已知某个样本鸢尾花花萼长度和花萼宽度，该样本对应不同分类的概率。请大家修改代码自行绘制不同的后验概率 PDF 曲面。

本书第 19、20 章将从这个角度探讨若何判定鸢尾花分类。

## 假设条件独立

如图 43 所示，如果假设条件独立，$f_{X1,X2\,|\,Y}(x_1, x_2\,|\,y = C_1)$ 可以通过下式计算得到：

$$\underbrace{f_{X1,X2|Y}\left(x_1, x_2 \middle| y = C_1\right)}_{\text{Conditional joint}} = \underbrace{f_{X1|Y}\left(x_1 \middle| y = C_1\right)}_{\text{Conditional marginal}} \cdot \underbrace{f_{X2|Y}\left(x_2 \middle| y = C_1\right)}_{\text{Conditional marginal}} \tag{50}$$

同理我们可以计算得到 $f_{X1,X2\,|\,Y}(x_1, x_2\,|\,y = C_2)$、$f_{X1,X2\,|\,Y}(x_1, x_2\,|\,y = C_3)$，具体如图 44、图 45 所示。

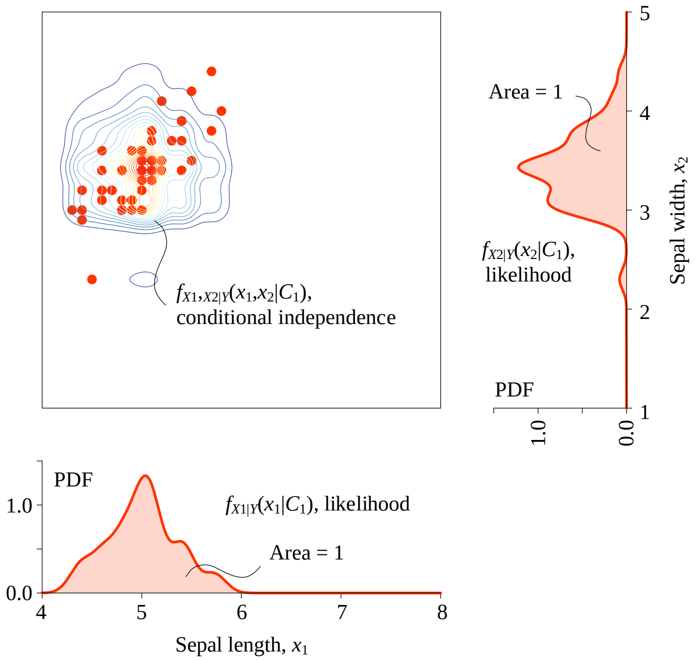



图 43. 给定 $Y = C_1$，$X_1$ 和 $X_2$ 条件独立，估算条件概率 $f_{X1,X2\,|\,Y}(x_1, x_2\,|\,y = C_1)$

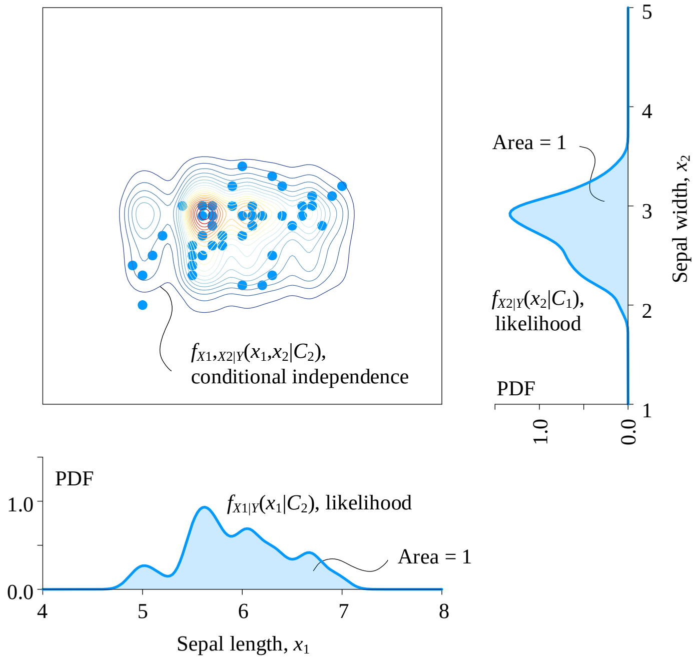



图 44. 给定 $Y = C_2$，$X_1$ 和 $X_2$ 条件独立，估算条件概率 $f_{X1,X2\,|\,Y}(x_1, x_2\,|\,y = C_2)$

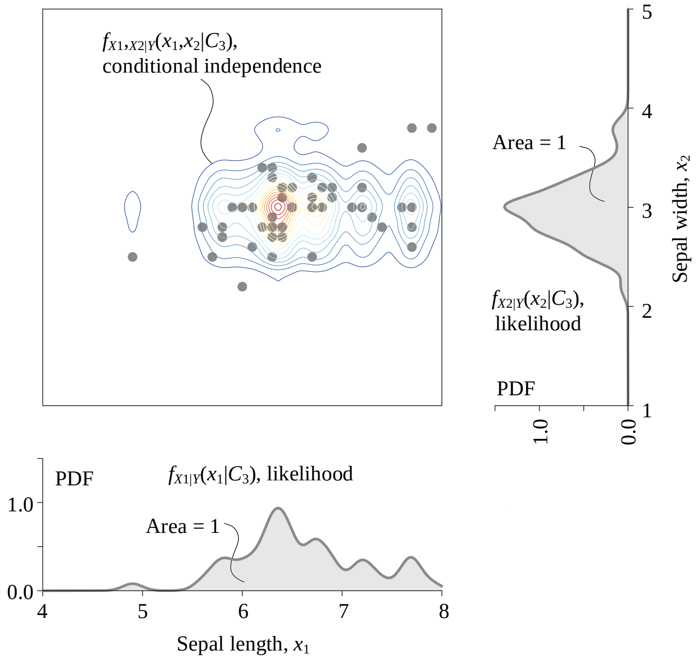



图 45. 给定 $Y = C_3$，$X_1$ 和 $X_2$ 条件独立，估算条件概率 $f_{X1,X2\,|\,Y}(x_1, x_2\,|\,y = C_3)$

如图 46 所示，并利用全概率定理，我们也可以估算 $f_{X1,X2}(x_1, x_2)$：

$$
\begin{aligned}
f_{X1,X2}\left(x_1,x_2\right) = & f_{X1,X2|Y}\left(x_1,x_2\left|y=C_1\right.\right) p_Y\left(C_1\right) + \\
& f_{X1,X2|Y}\left(x_1,x_2\left|y=C_2\right.\right) p_Y\left(C_2\right) + \\
& f_{X1,X2|Y}\left(x_1,x_2\left|y=C_3\right.\right) p_Y\left(C_3\right) \\
= & f_{X1|Y}\left(x_1\left|y=C_1\right.\right) f_{X2|Y}\left(x_2\left|y=C_1\right.\right) p_Y\left(C_1\right) + \\
& f_{X1|Y}\left(x_1\left|y=C_2\right.\right) f_{X2|Y}\left(x_2\left|y=C_2\right.\right) p_Y\left(C_2\right) + \\
& f_{X1|Y}\left(x_1\left|y=C_3\right.\right) f_{X2|Y}\left(x_2\left|y=C_3\right.\right) p_Y\left(C_3\right) +
\end{aligned}
\tag{51}
$$

这是**朴素贝叶斯分类器** (Naive Bayes classifier) 的重要技术细节之一。本系列丛书《机器学习》一册将讲解朴素贝叶斯分类器。

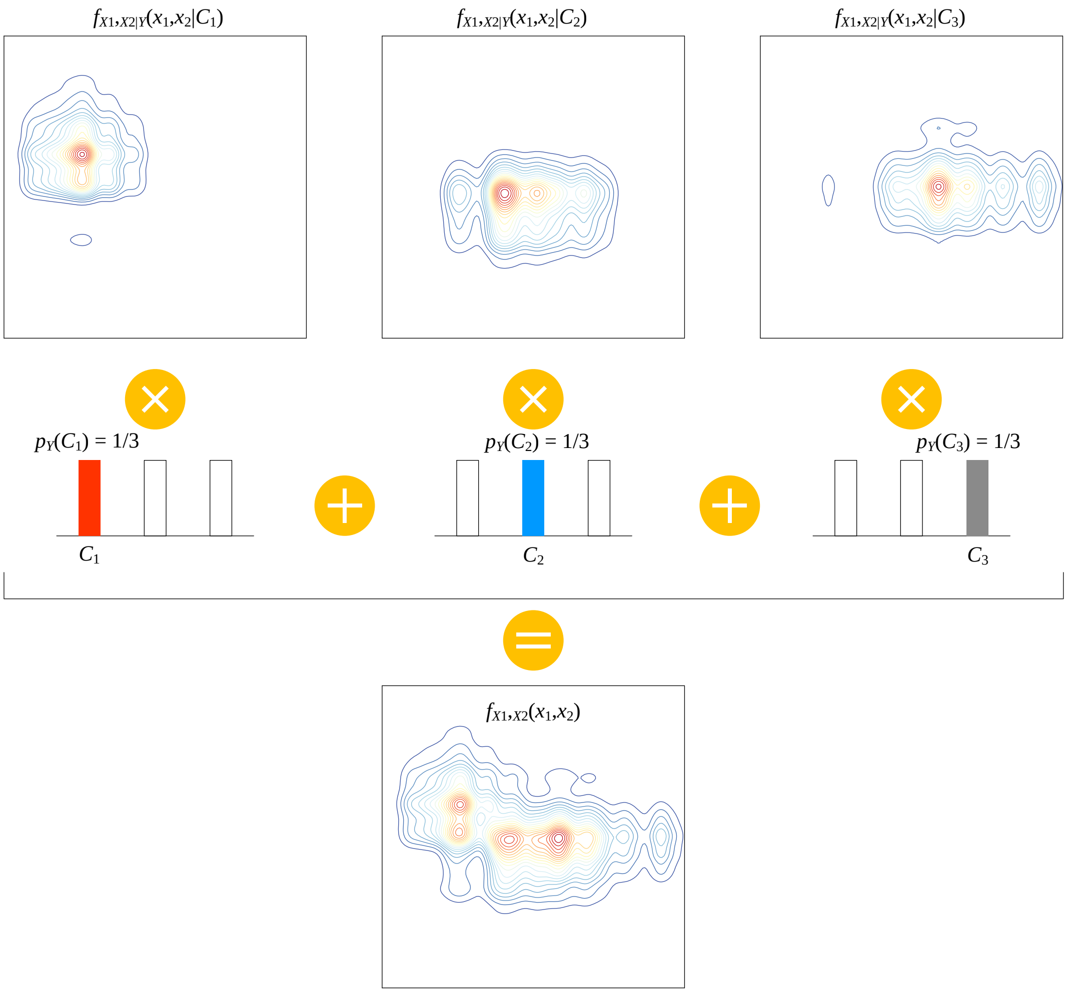



图 46. 利用全概率定理，估算 $f_{X1,X2}(x_1, x_2)$，假设条件独立

Bk5_Ch06_01.py 绘制本章大部分图像。

为了帮助大家更容易发现离散随机变量、连续随机变量的区别和联系，本章最后特地做了如下表格。请大家逐行对比学习。下一章介绍常见连续随机变量的概率分布。

表 1. 比较离散和连续随机变量

| | 离散 | 连续 |
|---|---|---|
| 随机变量 | 取值可以一一列举出来，有限个或可数无穷个，比如 {0, 1}，{非负整数} | 取值不可以一一列举出来，比如闭区间 [0, 1] 或 {非负实数} |
| 一元随机变量概率质量/密度函数 | 概率质量函数 PMF，$p_X(x)$<br>PMF 本身就是概率值<br>$0 \le p_X(x) \le 1$<br>计算工具：Σ | 概率密度函数 PDF，$f_X(x)$<br>PDF 本身为概率密度<br>$0 \le f_X(x)$<br>注意 $f_X(x)$ 可以大于 1<br>计算工具：∫ |
| 归一化数学工具 | $\sum_x p_X(x) = 1$ | $\int_x f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$ |
| 概率质量/密度函数图像 | 火柴梗图 | 曲线 |
| 计算概率 CDF | 求和<br>$F_X(x) = \Pr(X \le x) = \sum_{t \le x} p_X(t)$ | 积分<br>$F_X(x) = \Pr(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ |
| 期望 | $\mathrm{E}(X) = \sum_x x \cdot p_X(x)$ | $\mathrm{E}(X) = \int_x x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$ |
| 方差 | $\mathrm{var}(X) = \sum_x (x - \mathrm{E}(X))^2 p_X(x)$ | $\mathrm{var}(X) = \int_x (x - \mathrm{E}(X))^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$ |
| 常见分布 | 离散均匀分布，伯努利分布，二项分布，多项分布，泊松分布，几何分布，超几何分布 | 连续均匀分布，高斯分布，逻辑分布，学生 $t$-分布，对数正态分布，指数分布，卡方分布，Beta 分布 |
| 二元随机变量联合概率 | 概率质量函数 PMF，$p_{X,Y}(x,y)$ | 概率密度函数 PDF，$f_{X,Y}(x,y)$ |
| 边缘概率<br>求和法则 | $p_{X,Y}(x,y)$ 偏求和结果为边缘 PMF<br>$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$<br>$p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$ | $f_{X,Y}(x,y)$ 偏积分结果为边缘 PDF<br>$f_X(x) = \int_y f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y$<br>$f_Y(y) = \int_x f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x$ |
| 条件概率<br>$p_Y(y) > 0, p_X(x) > 0$<br>$f_Y(y) > 0, f_X(x) > 0$ | $p_{X\mid Y}(x\mid y) = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$<br>$p_{Y\mid X}(y\mid x) = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$ | $f_{Y\mid X}(y\mid x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$<br>$f_{X\mid Y}(x\mid y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 条件概率归一化 | $\sum_{x} p_{X\mid Y}(x\mid y)=1$ <br> $\sum_{y} p_{Y\mid X}(y\mid x)=1$ | $\int_{x} f_{X\mid Y}(x\mid y)\,\mathrm{d}x=1$ <br> $\int_{y} f_{Y\mid X}(y\mid x)\,\mathrm{d}x=1$ |
| 随机变量独立 | $p_{X\mid Y}(x\mid y)=p_X(x)$ <br> $p_{Y\mid X}(y\mid x)=p_Y(y)$ | $f_{X\mid Y}(x\mid y)=f_X(x)$ <br> $f_{Y\mid X}(y\mid x)=f_Y(y)$ |
| 随机变量独立条件下，联合概率 | $p_{X,Y}(x,y)=p_X(x)\,p_Y(y)$ | $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$ |
| 随机变量条件独立，条件联合概率 | $p_{X_1,X_2\mid Y}(x_1,x_2\mid y)=p_{X_1\mid Y}(x_1\mid y)\cdot p_{X2\mid Y}(x_2\mid y)$ | $f_{X_1,X_2\mid Y}(x_1,x_2\mid y)=f_{X_1\mid Y}(x_1\mid y)\cdot f_{X2\mid Y}(x_2\mid y)$ |