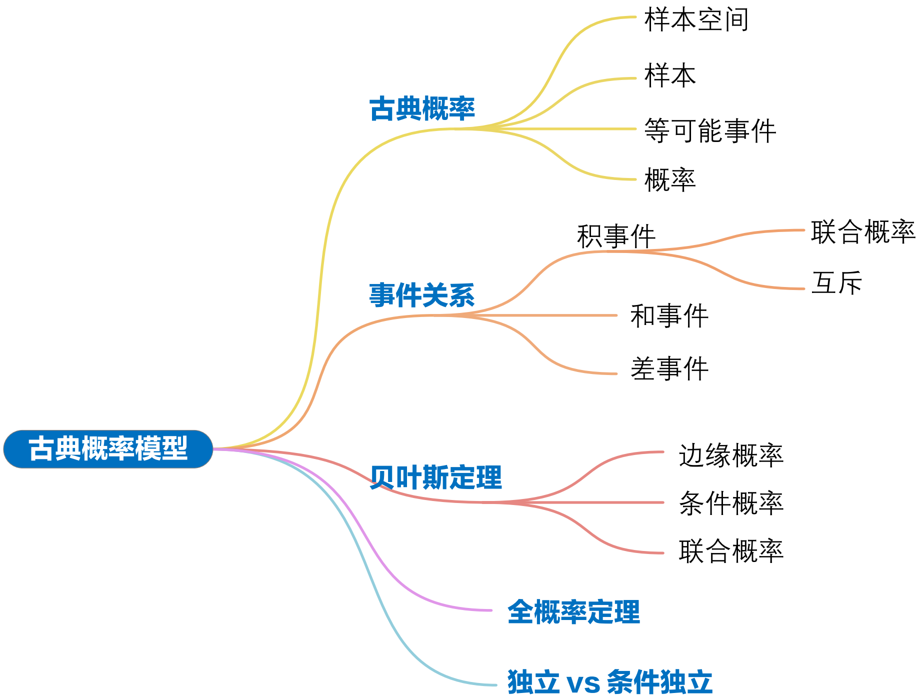
3 Classical Probability 古典概率模型

归根结底，概率就是量化的生活常识

> 真是耐人寻味，一门以赌博为起点的学科本应该是人类知识体系中最重要研究对象。
>
> ***It is remarkable that a science which began with the consideration of games of chance should have become the most important object of human knowledge.***
>
> —— 皮埃尔-西蒙·拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace) | 法国著名天文学家和数学家 | 1749 ~ 1827

- `numpy.array()` 构造一维序列，严格来说不是行向量
- `numpy.cumsum()` 计算累计求和
- `numpy.linspace()` 在指定的间隔内，返回固定步长的数据
- `numpy.random.gauss()` 产生服从正态分布的随机数
- `numpy.random.randint()` 产生随机整数
- `numpy.random.seed()` 确定随机数种子
- `numpy.random.shuffle()` 将序列的所有元素重新随机排序
- `numpy.random.uniform()` 产生服从均匀分布的随机数


古典概率模型
古典概率
样本空间
样本
等可能事件
概率
事件关系
积事件
联合概率
互斥
和事件
差事件
贝叶斯定理
边缘概率
条件概率
联合概率
全概率定理
独立 vs 条件独立

3.1 无处不在的概率

自然界的随机无处不在，没有两朵完全一样的鸢尾，没有两片完全一样的雪花，也没有两个完全一样的人生。而概率则试图量化随机事件发生的可能性。概率的研究和应用深刻影响着人类科学发展进程，本节介绍孟德尔和道尔顿两个例子。

孟德尔的豌豆试验

孟德尔 (Gregor Mendel, 1822 ~ 1884) 之前，生物遗传机制主要是基于猜测，而不是试验。

在修道院蔬菜园里，孟德尔对不同豌豆品种进行了大量异花授粉试验。比如，孟德尔把纯种圆粒豌豆 和纯种皱粒豌豆 杂交，他发现培育得到的子代豌豆都是圆粒 ，如图 1 所示。

实际情况是，决定皱粒 的基因没有被呈现出来，因为决定皱粒 的基因相对于圆粒 基因来讲是隐性。

如图 1 所示，当第一代杂交圆粒豌豆 自花传粉或者彼此交叉传粉，它们的后代籽粒显示出 3:1 的固定比例，即 3/4 的圆粒 和 1/4 的皱粒 。

从精确的 3:1 的比例来看，孟德尔不仅仅推断出基因中离散遗传单位的存在，而且意识到这些离散的遗传单位在豌豆中成对出现，并且在形成配子的过程中分离。3:1 的比例背后的数学原理就是本章要介绍的古典概率模型。

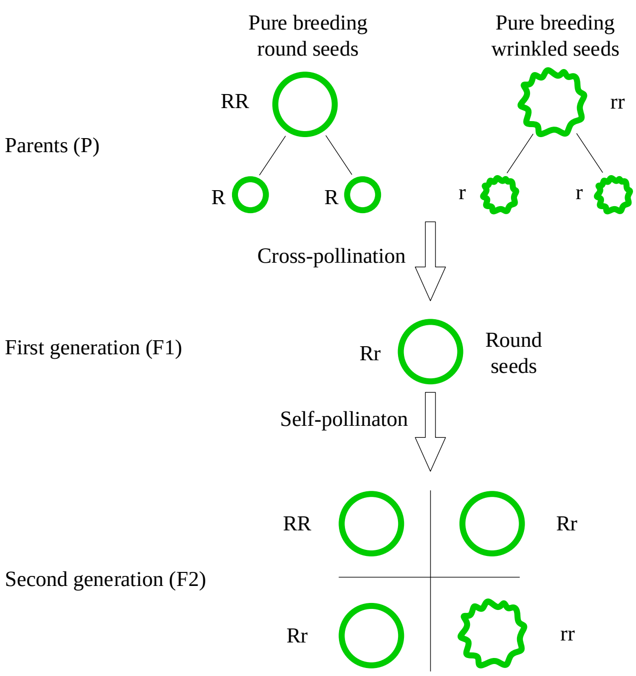


图 1. 孟德尔的豌豆试验

道尔顿发现红绿色盲

18 世纪英国著名的化学家**道尔顿** (John Dalton, 1766 ~ 1844) 偶然发现红绿色盲。道尔顿给母亲选了一双“棕灰色”的袜子作为圣诞礼物。但是，母亲对袜子的颜色不是很满意，她觉得“樱桃红”过于艳丽。

道尔顿十分疑惑，他问了家里的亲戚，发现只有弟弟和自己认为袜子是“棕灰色”。道尔顿意识到红绿色盲必然通过某种方式遗传。

现代人已经研究清楚，红绿色盲的遗传方式是 X 连锁隐性遗传。男性 ♂ 仅有一条 X 染色体，因此只需一个色盲基因就表现出色盲。

女性 ♀ 有两条 X 染色体，因此需有一对色盲等位基因，才会表现异常。而只有一个致病基因的女性 ♀ 只是红绿色盲基因的携带者，个体表现正常。

下面，我们从概率的角度分几种情况来思考红绿色盲的遗传规律。

情况 A

一个女性 ♀ 红绿色盲患者和一个正常男性 ♂ 生育。后代中，儿子 ♂ 都是红绿色盲；女儿 ♀ 虽表现正常，但从母亲 ♀ 获得一个红绿色盲基因，因此女儿 ♀ 都是红绿色盲基因的携带者。

不考虑性别的话，后代中发病可能性为 50%。这个可能性就是**概率** (probability)。它和生男、生女的概率一致。

给定后代为男性 ♂，发病比例为 100%。给定后代为女性 ♀，发病比例为 0%，但是携带红绿色盲基因的比例为 100%。反过来，给定后代发病这个条件，可以判定后代 100%为男性 ♂。这就是本章后文要介绍的**条件概率** (conditional probability)。

条件概率的概念在概率论和统计学中非常重要，它允许我们在一些已知信息的情况下对事件的发生概率进行更精确的估计和预测。例如，在医学诊断中，医生可以根据病人的症状和体征，计算出某种疾病在不同条件下的发病率，从而帮助判断病人是否患有这种疾病。

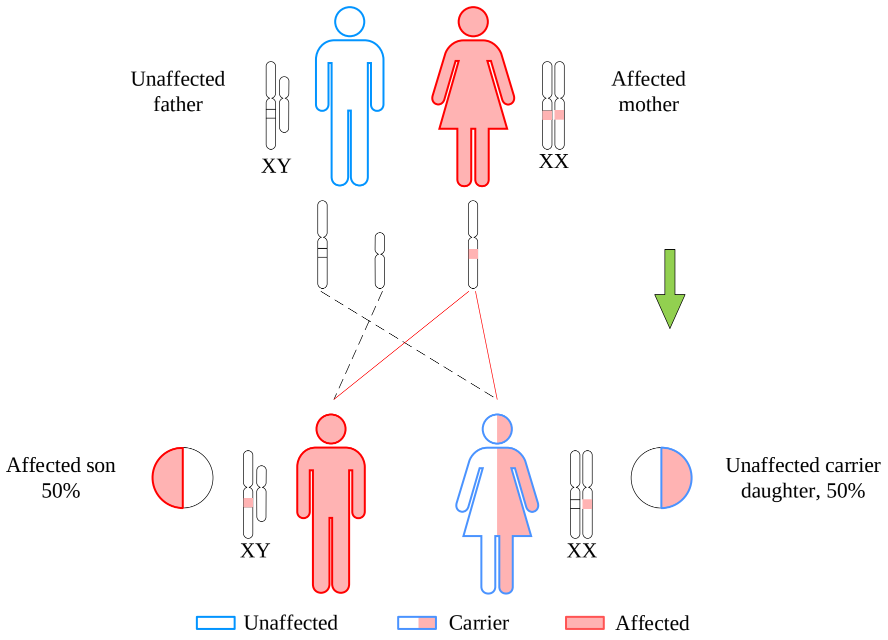


图 2. 红绿色盲基因遗传机制，情况 A

情况 B

一个女性♀红绿色盲基因携带者和一个正常男性♂生育。后代中，整体考虑，后代患病的概率为 25%。

其中，儿子♂中，50%概率为正常，50%概率为红绿色盲。女儿都不是色盲，但有 50%概率是色盲基因的携带者。这些数值也都是条件概率。

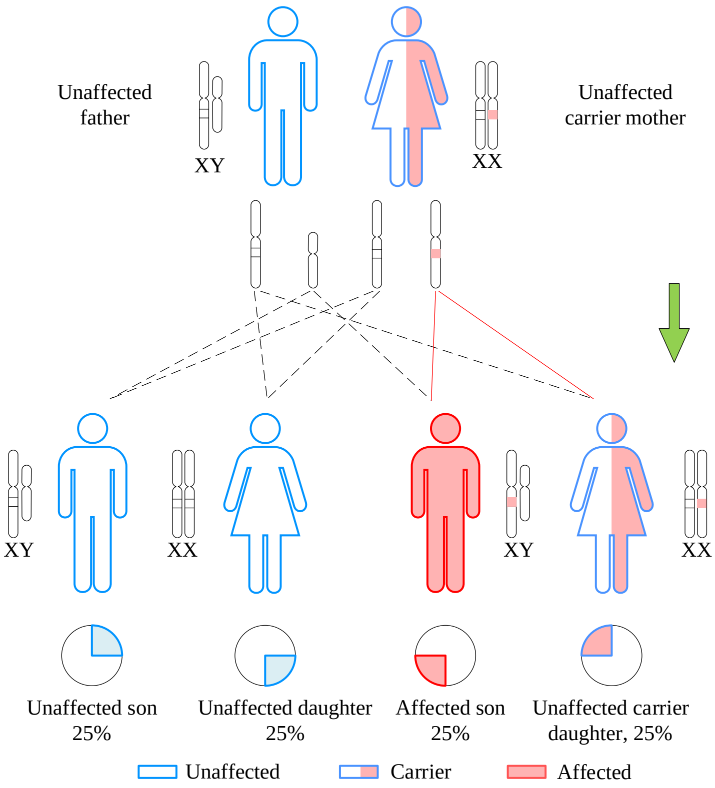


图 3. 红绿色盲基因遗传机制，情况 B

情况 C

一个女性♀红绿色盲基因的携带者和一个男性♂红绿色盲患者生育。整体考虑来看，不分男女的话，后代发病的概率为 50%。

其中，儿子♂50%概率正常，50%的概率为红绿色盲。女儿♀有 50%概率为红绿色盲，50%概率是色盲基因的携带者。

换一个条件，如果已知后代为红绿色盲患者，后代 50%概率为男性♂，50%概率为女性♀。

除了以上三种情况，请大家思考还有哪些组合情况并计算后代患病概率。

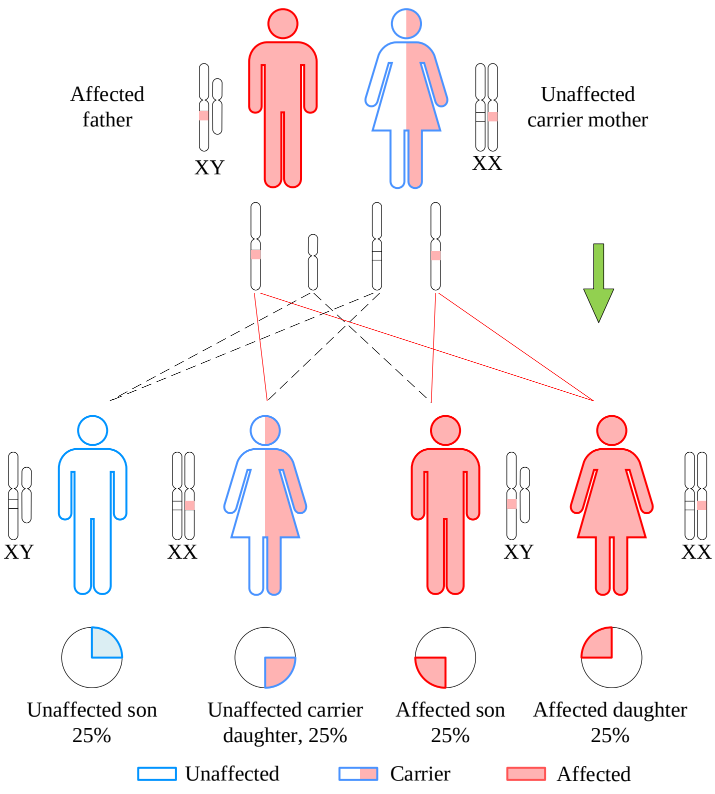


图 4. 红绿色盲基因遗传机制，情况 C

建议大家学完本章所有内容之后，回头再琢磨孟德尔和道尔顿这两个例子。

3.2 古典概率：离散均匀概率律

概率模型是对不确定现象的数学描述。本章的核心是古典概型。古典概型，也叫**等概率模型** (equiprobability)，是最经典的一种概率模型。古典模型中基本事件为有限个，并且每个基本事件为等可能。古典概型广泛应用集合运算，本节一边讲解概率论，一边回顾集合运算。

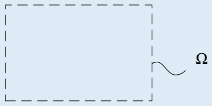
《数学要素》第 4 章介绍过集合相关概念，建议大家回顾。

给定一个随机试验，所有的结果构成的集合为**样本空间** (sample space) Ω。样本空间 Ω 中的每一个元素为一个**样本** (sample)。不同的随机试验有各自的样本空间。样本空间作为集合，也可以划分成不同**子集** (subset)。

概率

整个样本空间 Ω 的概率为 1，即：

$$\Pr(\Omega) = 1 \tag{1}$$

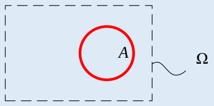


样本空间概率为 1，从这个视角来看，本书后续内容似乎都围绕着如何将 1“切片、切块”、“切丝、切条”。

⚠ 注意，本书表达概率的符号 Pr 为正体。再次请大家一定注意，不同试验的样本空间 Ω 不同。

给定样本空间 Ω 的一个**事件** (event) A，$\Pr(A)$ 为**事件 A 发生的概率** (the probability of event A occurring 或 probability of A)。$\Pr(A)$ 满足：

$$\underbrace{\Pr\left(\overbrace{A}^{\text{Event}}\right)}_{\text{Probability}} \geq 0 \tag{2}$$



大家看到任何概率值时一定要问一嘴，它的样本空间是什么。

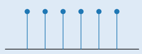
空集 ∅ 不包含任何样本点，也称作**不可能事件** (impossible event)，因此对应的概率为 0：

$$\Pr(\varnothing) = 0 \tag{3}$$

等可能

设样本空间 Ω 由 n 个**等可能事件** (equally likely events 或 events with equal probability) 构成，事件 A 的概率为：

$$\Pr(A) = \frac{n_A}{n} \tag{4}$$



其中，n_A 为含于事件 A 的试验结果数量。等可能事件是指在某一试验中，每个可能的结果发生的概率相等的事件。简单来说，就是每个结果发生的可能性是一样的。例如，对于一枚硬币的抛掷，假设正面和反面的出现概率是相等的，因此正面和反面出现是等可能事件。同样地，掷一个六面骰子，假设每个面出现的概率都是相等的，因此每个面的出现也是等可能事件。

以鸢尾花数据为例

举个例子，从 150 (n) 个鸢尾花数据中取一个样本点，任何一个样本被取到的概率为 1/150 ($1/n$)。

再举个例子，鸢尾花数据集的 150 个样本均分为 3 类——setosa (C_1)、versicolour (C_2)、virginica (C_3)。如图 5 所示，从 150 个样本中取出任一样本，样本标签为 C_1、C_2、C_3 对应的概率相同，都是：

$$\Pr(C_1)=\Pr(C_2)=\Pr(C_3)=\frac{50}{150}=\frac{1}{3} \tag{5}$$

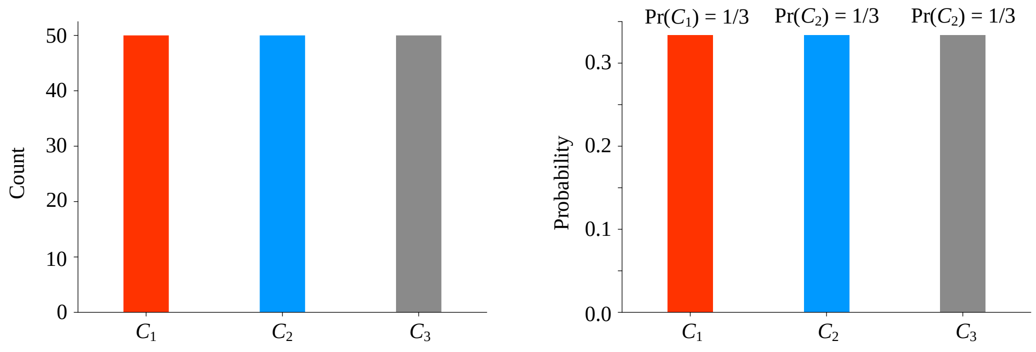


图 5. 鸢尾花 150 个样本数据均分为三类

抛一枚硬币

抛一枚硬币，1 代表正面，0 代表反面。抛一枚硬币可能结果的样本空间为：

$$\Omega=\{0,1\} \tag{6}$$

假设硬币质地均匀，获得正面和反面的概率相同，均为 1/2，即：

$$\Pr(0)=\Pr(1)=\frac{1}{2} \tag{7}$$

把 {0, 1} 标记在数轴上，用火柴梗图可视化上述概率值，我们便得到图 6。

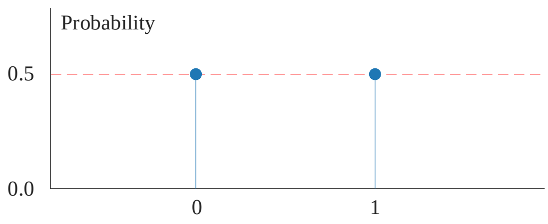


图 6. 抛一枚硬币结果和对应的理论概率值

图 7 所示为反复抛一枚硬币，正面 (1)、反面 (0) 平均值随试验次数变化。可以发现平均结果不断靠近 1/2，也就是说正反面出现的概率几乎相同。

从另外一个角度，(7) 给出的是用古典概率模型 (等可能事件和枚举法) 得出的**理论概率** (theoretical probability)。也称为公式概率或数学概率，是一种基于理论推导的概率计算方法。它一般基于假设所有可能的结果是等可能的，并使用数学公式计算概率。

而图 7 是采用试验得到的统计结果，印证了概率模型结果。根据大量的、重复的统计试验结果计算随机事件中各种可能发生结果的概率，称为**试验概率** (experimental probability)。试验概率是一种基于实际试验的概率计算方法。它通过多次重复试验来统计某个事件发生的频率，然后将频率作为概率的估计值。

理论概率可以作为试验概率的基础，即在假设所有可能的结果是等可能的情况下，理论概率可以预测事件发生的概率，而试验概率则可以验证这一预测是否准确。

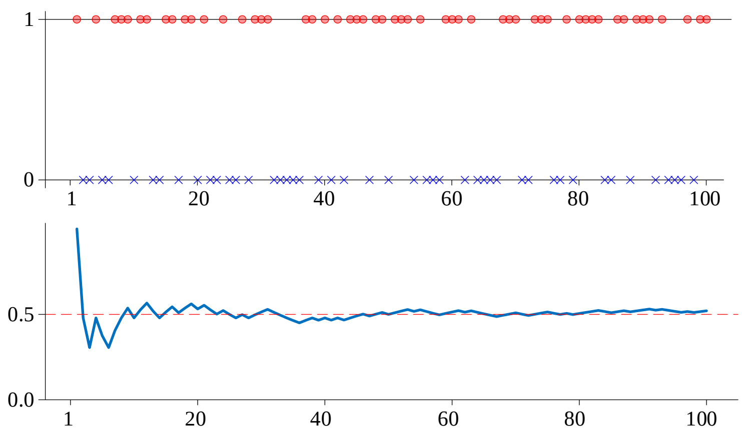


图 7. 抛硬币 100 次试验结果变化

掷色子

如图 8 所示，掷一枚色子试验可能结果的样本空间为：

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \tag{8}$$

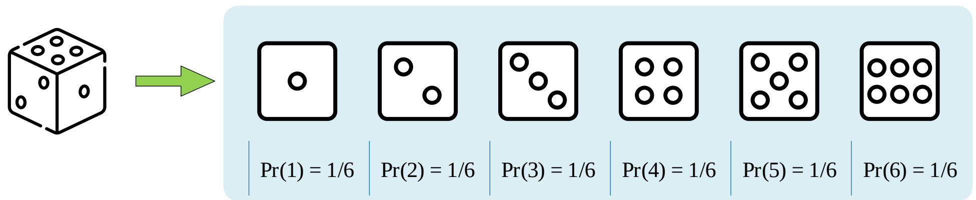


图 8. 投色子试验

试验中，假设获得每一种点数的可能性相同。掷一枚色子共 6 种结果，每种结果对应的概率为：

$$\Pr(1) = \Pr(2) = \Pr(3) = \Pr(4) = \Pr(5) = \Pr(6) = \frac{1}{6} \tag{9}$$

同样用火柴梗图把上述结果画出来，得到图 9。这也是抛一枚色子得到不同点数对应概率的理论值。

然而实际情况可能并非如此。想象一种特殊情况，某一枚特殊的色子，它的质地不均匀，可能产生点数 6 的概率略高于其他点数。这种情况下，要想估算不同结果的概率值，一般只能通过试验。

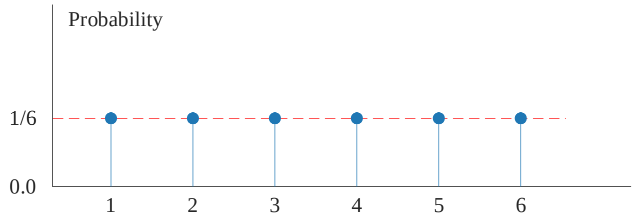


图 9. 抛一枚色子结果和对应的理论概率值

抛两枚硬币

下面看两个稍复杂的例子——每次抛两枚硬币。

比如，如果第一枚硬币正面、第二枚硬币反面，结果记做 (1, 0)。这样，样本空间由以下 4 个点构成：

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (0,0) & (0,1) \\ (1,0) & (1,1) \end{Bmatrix} \tag{10}$$

图 10 (a) 所示为用二维坐标系展示试验结果。图中横轴代表第一枚硬币点数，纵轴为第二枚硬币对应点数。

假设，两枚硬币质地均匀，抛一枚硬币获得正、反面的概率均为 1/2。而抛两枚硬币对应结果的概率如图 10 (b) 所示。

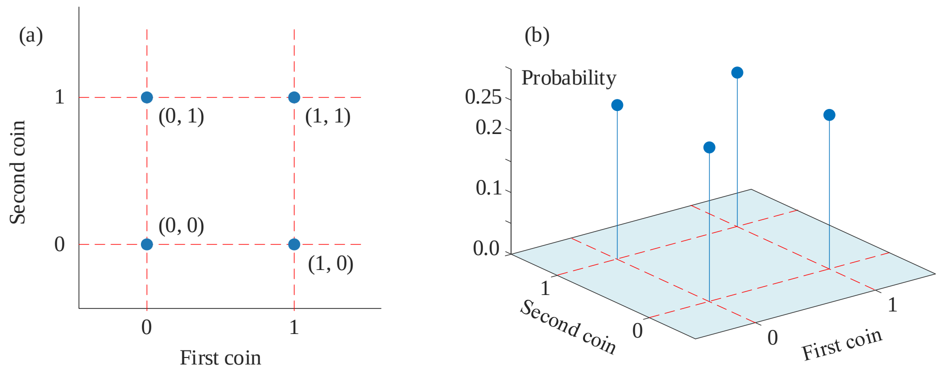


图 10. 抛两枚硬币结果和对应的理论概率值

抛两枚色子

同理，每次抛 2 枚色子，样本空间 Ω 的等可能试验结果数量为 6 × 6：

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix} \tag{11}$$

图 11 (a) 所示为上述试验的样本空间。图 11 (b) 中，假设色子质地均匀，每个试验结果对应的概率均为 1/36。

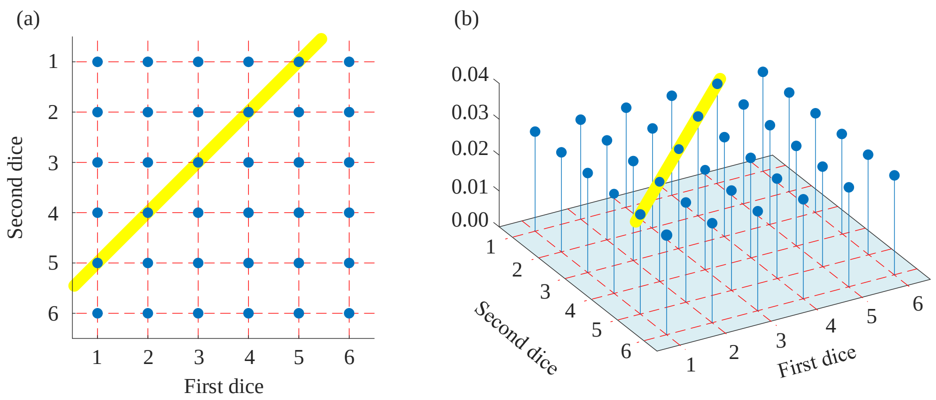


图 11. 抛两枚色子结果和对应的理论概率值

抛两枚色子：点数之和为 6

下面，我们看一种特殊情况。如图 12 所示，如果我们关心两个色子点数之和为 6 的话，发现一共有五种结果满足条件。这五种结果为 1 + 5、2 + 4、3 + 3、4 + 2、5 + 1。该事件对应概率为：

$$\Pr(\text{sum} = 6) = \frac{5}{6 \times 6} \approx 0.1389 \tag{12}$$

图 11 (a) 中黄色背景所示样本便代表抛两枚色子点数之和为 6 的事件。

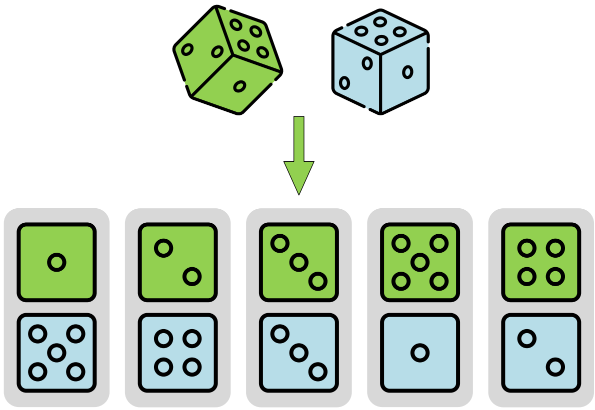


图 12. 投两个色子，点数之和为 6

编写代码进行 10,000,000 次试验，累计"点数之和为 6"事件发生次数，并且计算该事件当前概率。图 13 所示"点数之和为 6"事件概率随抛掷次数变化曲线。

比较 (12) 和图 13，通过古典概率模型得到的理论结论和试验结果相互印证。

图 13 横轴为对数刻度。《数学要素》第 12 章介绍过对数刻度，大家可以回顾。

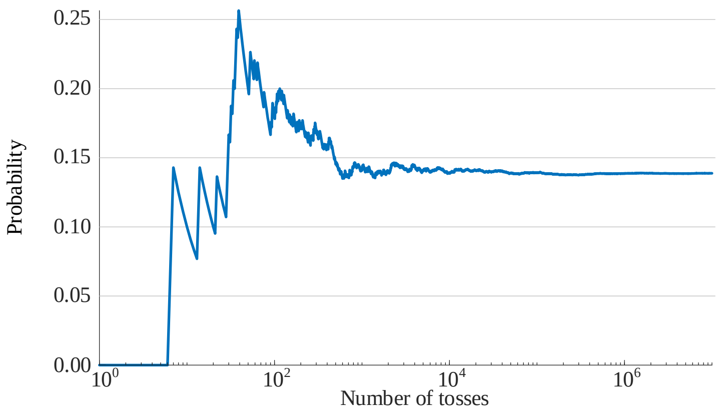


图 13. "色子点数之和为 6"事件概率随抛掷次数变化

代码 Bk5_Ch03_01.py 模拟抛色子试验并绘制图 13。请大家把这个代码改写成一个 Streamlit App，并用抛掷次数作为输入。

抛两枚色子：点数之和的样本空间

接着上一个例子，如果我们对抛两枚色子"点数之和"感兴趣，首先要知道这个事件的样本空间。如图 14 所示，彩色等高线对应两枚色子点数之和。由此，得到两个色子点数之和的样本空间为 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$。

而等高线线上灰色点 ● 的横纵坐标代表满足条件的色子点数。计算某一条等高线上点 ● 的数量，再除 36 (= 6 × 6) 便得到不同"点数之和"对应的概率值。

图 14 (b) 所示样本空间所有结果概率值的火柴梗图。观察图 14 (b)，容易发现结果非等概率；但是，这些概率值也是通过等概率模型推导得到。

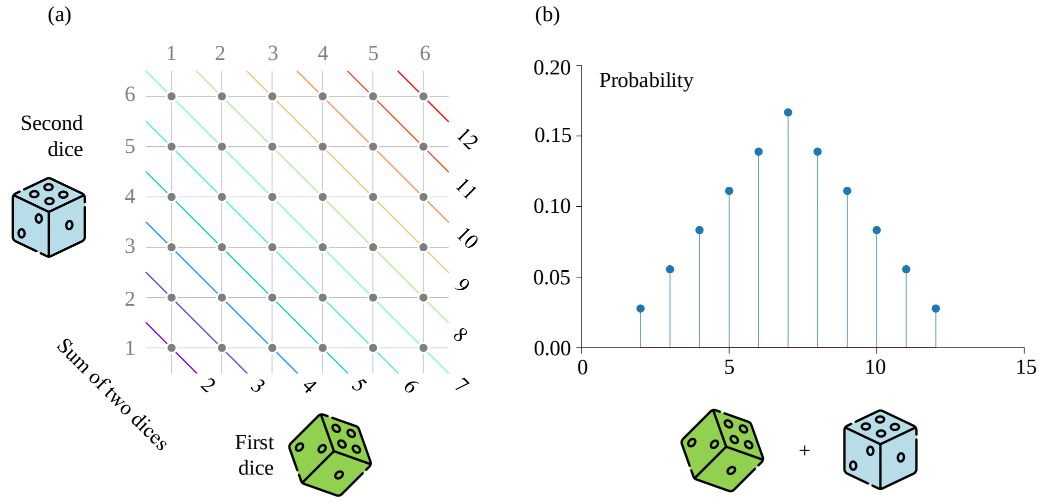


图 14. 两个色子点数之和

更多"花样"

接着上面抛两枚色子算点数之和的试验，我们玩出更多"花样"！

如表 1 所示，抛两枚色子，我们可以只考虑第一只色子的点数、第一只色子点数平方值，也可以计算两个色子的点数平均值、乘积、商、差、差的平方等等。

这些不同的花式玩法至少告诉我们以下几层信息：

- 抛两枚色子，第一枚色子和第二枚色子的结果可以独立讨论；换个视角来看，一次试验中，第一、二枚色子点数结果相互不影响；
- 第一枚和第二枚色子的点数结果还可以继续运算；
- 用文字描述这些结果太麻烦了，我们需要将它们代数化！比如，我们定义第一个色子结果为 X_1，第二个色子点数为 X_2，两个点数数学运算结果为 Y。这便是下一章要探讨的**随机变量** (random variable)。
- 显然表 1 中每种花式玩法有各自的样本空间 Ω。样本空间的样本并非都是等概率。但是，样本空间中所有样本的概率之和都是 1。

表 1 所示为基于抛两枚色子试验结果的更多花式玩法。请大家试着找到每种运算的样本空间，并计算每个样本对应的概率值。我们将在下一章揭晓答案。

表 1. 基于抛两枚色子试验结果的更多花式玩法

随机变量	描述	例子											
X_1	第一个色子点数	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
X_2	第二个色子点数	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
$Y = X_1$	只考虑第一个色子点数	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
$Y = X_1^2$	第一个色子点数平方	1	4	9	16	25	36	1	4	9	16	25	36
$Y = X_1 + X_2$	点数之和	2	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7	8
$Y = \frac{X_1 + X_2}{2}$	点数平均值	1	1.5	2	2.5	3	3.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$Y = \frac{X_1 + X_2 - 7}{2}$	中心化点数之和，再求平均	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5
$Y = X_1 X_2$	点数之积	1	2	3	4	5	6	2	4	6	8	10	12
$Y = \frac{X_1}{X_2}$	点数之商	1	2	3	4	5	6	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$Y = X_1 - X_2$	点数之差	0	1	2	3	4	5	-1	0	1	2	3	4
$Y = \lvert X_1 - X_2 \rvert$	点数之差的绝对值	0	1	2	3	4	5	1	0	1	2	3	4
$Y = (X_1 - 3.5)^2 + (X_2 - 3.5)^2$	中心化点数平方和	12.5	8.5	6.5	6.5	8.5	12.5	8.5	4.5	2.5	2.5	4.5	8.5

抛三枚色子

为了大家习惯“多元”思维，我们再进一步将一次抛掷色子的数量提高至三枚。

第一枚点数定义为 X_1，第二枚 X_2，第三枚 X_3。

图 15 (a) 所示为抛三枚色子点数的样本空间，这显然是个三维空间。比如，坐标点 (3, 3, 3) 代表三枚色子的点数都是 3。

图 15 (a) 这个样本空间有 216 (= 6 × 6 × 6) 个样本。假设这三个色子质量均匀，获得每个点数为等概率，则图 15 (a) 中每个样本对应的概率为 1/216。

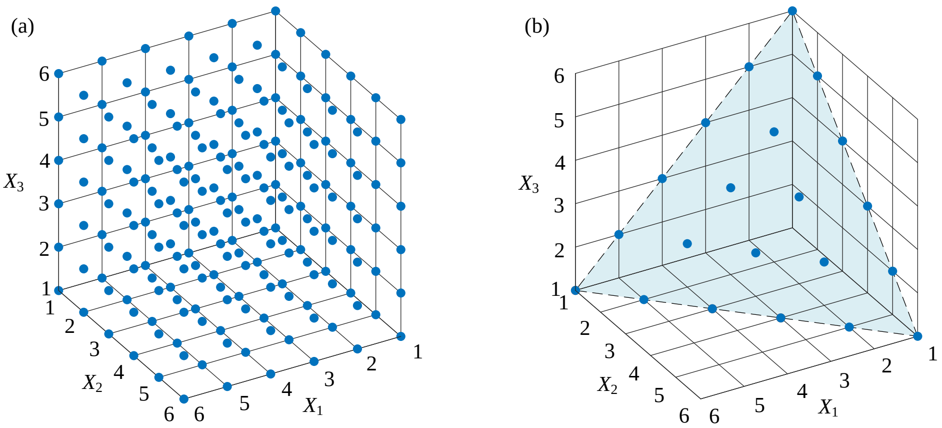


图 15. 抛三枚色子点数的样本空间

定义事件 A 为三枚色子的点数之和为 8，即 $X_1 + X_2 + X_3 = 8$。事件 A 对应的样本集合如所图 15 (b) 所示，一共有 21 个样本点，容易发现这些样本在同一个斜面上。相对图 15 (a) 这个样本空间，事件 A 的概率为 21/216。

大家可能已经发现，实际上，我们可以用水平面来可视化事件 A 的样本集合。如图 16 所示，将散点投影在平面上得到图 16 (b)。能够完成这种投影是因为 $X_1 + X_2 + X_3 = 8$ 这个等式关系。

通过这个例子，大家已经发现多元统计中，几何思维的重要性。

这种投影思路将会用到本书后续要介绍的多项分布 (第 5 章)、Beta 分布 (第 7 章)。

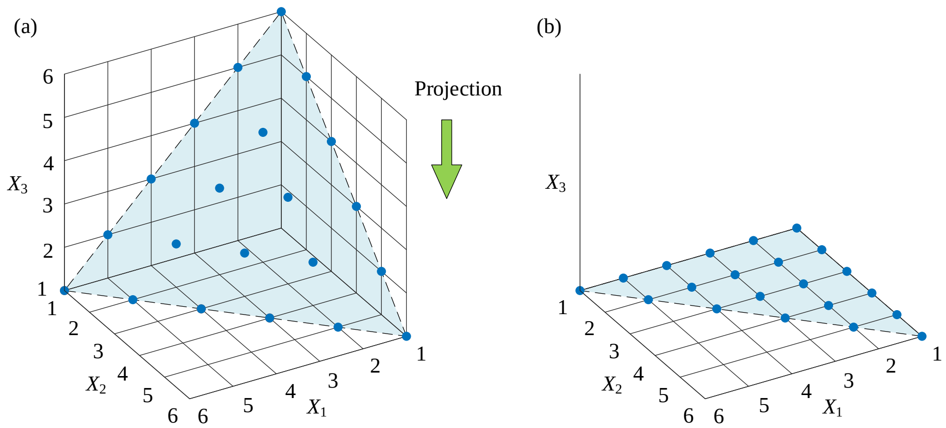


图 16. 将事件 A 的样本点投影到平面上

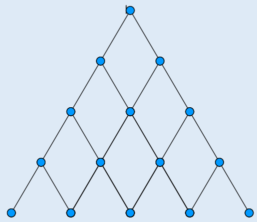
3.3 回顾：杨辉三角和概率

杨辉三角

《数学要素》第 20 章介绍过杨辉三角和古典概率模型的联系，本节稍作回顾。

杨辉三角又叫**帕斯卡三角** (Pascal's triangle)，是二项式系数的一种写法。$(a + b)^n$ 展开后，按单项 a 的次数从高到低排列得到：

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}
\tag{13}
$$



其中，a 和 b 均不为 0。

抛硬币

把二项式展开用在理解抛硬币的试验。$(a + b)^n$ 中 n 代表一次抛掷中硬币数量，a 可以理解为“硬币正面朝上”对应概率，b 为“硬币反面朝上” 对应概率。如果硬币质地均匀，$a = b = 1/2$。

举个例子，如果硬币质地均匀，每次抛 10 (n) 枚硬币，正好出现 6 次正面对应概率为：

$$
\Pr(\text{heads}=6) = C_{10}^{6}\frac{1}{2^{10}} = \frac{210}{1024} = \frac{210}{1024} \approx 0.20508 \tag{14}
$$

每次抛 10 枚硬币，至少出现 6 次正面的概率为：

$$
\Pr(\text{heads}\geq 6) = \frac{C_{10}^{6}+C_{10}^{7}+C_{10}^{8}+C_{10}^{9}+C_{10}^{10}}{2^{10}} = \frac{210+120+45+10+1}{1024} = \frac{386}{1024} \approx 0.37695 \tag{15}
$$

编写代码，一共抛 10000 次，每次抛 10 枚硬币。分别累计“正好出现 6 次正面”、“至少出现 6 次正面”两个事件的次数，并且计算两个事件当前概率。图 17 所示两事件概率随抛掷次数变化曲线。

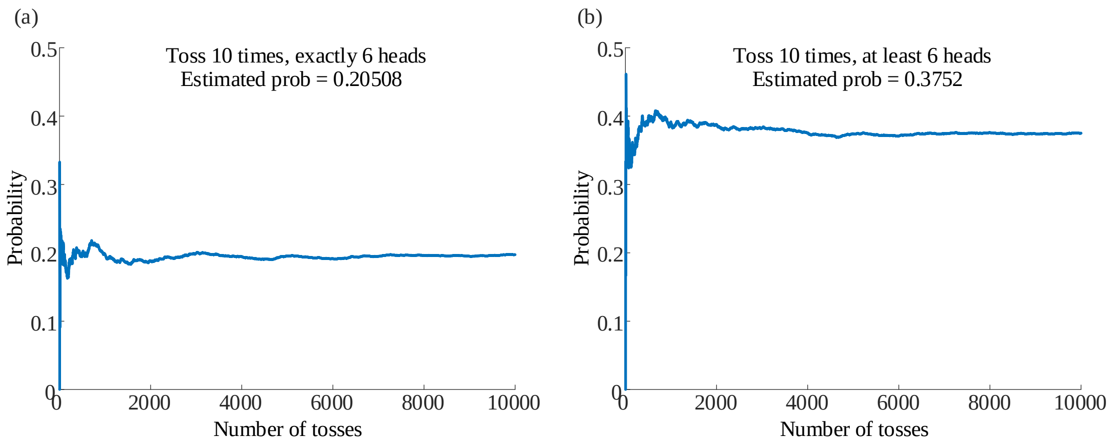


图 17. 试验概率随抛掷次数变化：a) 正好出现 6 次正面；b) 至少出现 6 次正面

Bk5_Ch03_02.py 完成上述两个试验并绘制图 17。

回忆二叉树

《数学要素》第 20 章还介绍过杨辉三角和二叉树的联系，如图 18 所示。站在中间节点处，向上走、还是向下走对应的概率便分别对应“硬币正面朝上”、“硬币反面朝上”概率。

假设，向上走、向下走的概率均为 1/2。图 18 右侧的直方图展示了两组数，分别是达到终点不同节点的路径数量、概率值。请大家回忆如何用组合数计算这些概率值。

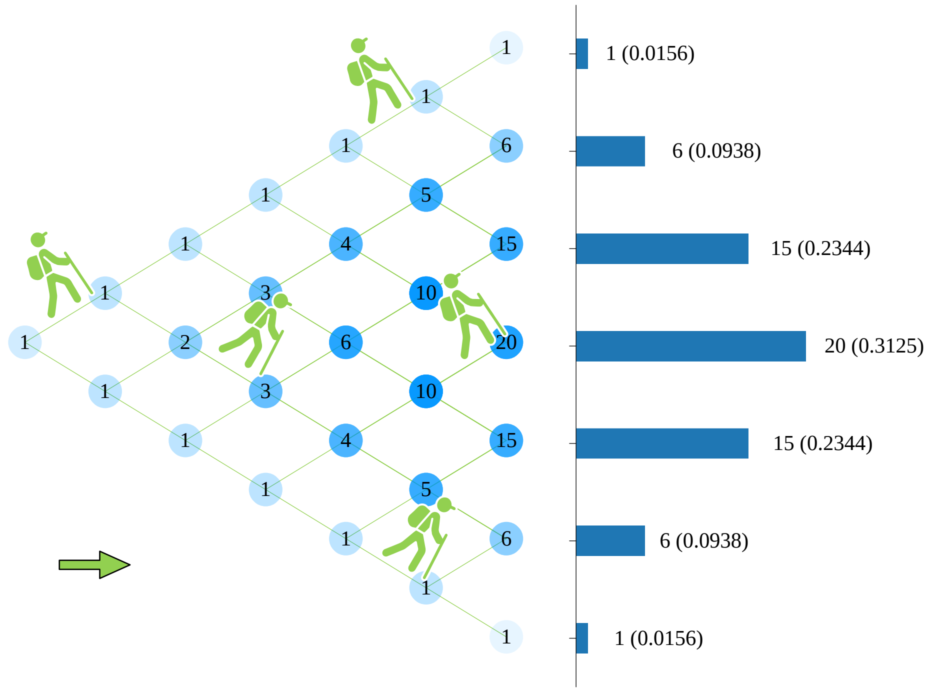


图 18. 杨辉三角逆时针旋转 90 度得到一个二叉树，图片基于《数学要素》第 20 章

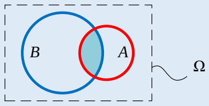
3.4 事件之间的关系：集合运算

积事件

事件 A 与事件 B 为样本空间 Ω 中的两个事件， $A \cap B$ 代表 A 和 B 的**积事件** (the intersection of events A and B)，指的是某次试验时，事件 A 和事件 B 同时发生。

$\Pr(A \cap B)$ 代表 A 和 B **积事件概率** (probability of the intersection of events A and B 或 joint probability of A and B)。$\Pr(A \cap B)$ 也叫做 A 和 B **联合概率** (joint probability)。 $\Pr(A \cap B)$ 也常记做 $\Pr(A, B)$：

$$\Pr\underbrace{\left(A\cap B\right)}_{\text{Joint}}=\Pr\underbrace{\left(A,B\right)}_{\text{Joint}} \tag{16}$$

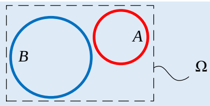


互斥

如果事件 A 与事件 B 为两者交集为空 $A\cap B=\varnothing$，则称**事件 A 和事件 B 互斥** (events A and B are disjoint)，或称 **A 和 B 互不相容** (two events are mutually exclusive)。

白话说，事件 A 与事件 B 不可能同时发生，也就是说 $\Pr(A\cap B)$ 为 0：

$$\underbrace{A\cap B}_{\text{Joint}}=\varnothing \quad\Rightarrow\quad \Pr\underbrace{\left(A\cap B\right)}_{\text{Joint}}=\Pr\underbrace{\left(A,B\right)}_{\text{Joint}}=0 \tag{17}$$

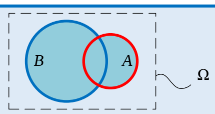


和事件

事件 $A\cup B$ 为 A 和 B 的**和事件** (union of events A and B)。具体来说，当事件 A 和事件 B 至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生。$\Pr(A\cup B)$ 代表事件 A 和 B **和事件概率** (probability of the union of events A and B 或 probability of A or B)。

$\Pr(A\cup B)$ 和 $\Pr(A\cap B)$ 之间关系为：

$$\underbrace{\Pr\left(A\cup B\right)}_{\text{Union}}=\Pr\left(A\right)+\Pr\left(B\right)-\underbrace{\Pr\left(A\cap B\right)}_{\text{Joint}} \tag{18}$$



如果事件 **A 和 B 互斥** (events A and B are mutually exclusive)，即 $A\cap B=\varnothing$。对于这种特殊情况，$\Pr(A\cup B)$ 为：

$$\Pr\left(A\cup B\right)=\Pr\left(A\right)+\Pr\left(B\right) \tag{19}$$

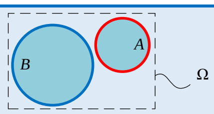
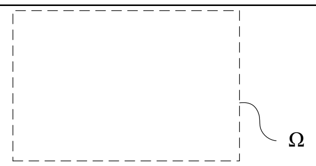
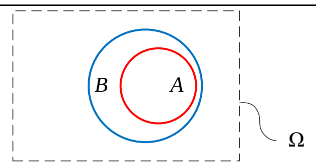
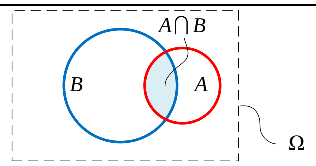
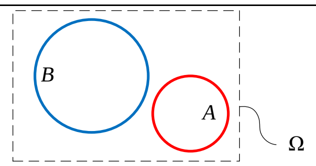
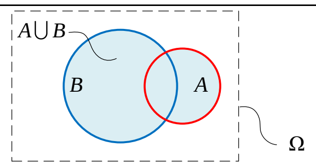
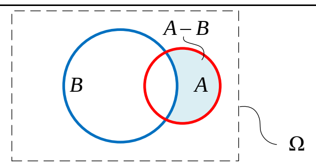
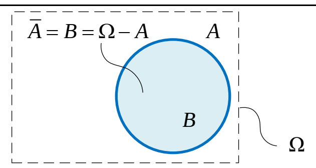


表 2 总结常见集合运算维恩图。

表 2. 常见集合运算和维恩图

符号	解释	维恩图

Ω	必然事件，即整个样本空间 (sample space)	
$\varnothing$	不可能事件，即空集 (empty set)	
$A \subset B$	事件 B 包含事件 A (event A is a subset of event B) 即，事件 A 发生，事件 B 必然发生	
$A \cap B$	事件 A 和事件 B 的积事件 (the intersection of events A and B) 即，某次试验时，当事件 A 和事件 B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生	
$A \cap B = \varnothing$	事件 A 和事件 B 互斥 (events A and B are disjoint)，两个事件互不相容 (two events are mutually exclusive) 即，事件 A 和事件 B 不能同时发生	
$A \cup B$	事件 A 和事件 B 的和事件 (the union of events A and B) 即，当事件 A 和事件 B 至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生	
$A - B$	事件 A 与事件 B 的差事件 (the difference between two events A and B) 即，事件 A 发生、事件 B 不发生， $A - B$ 发生	
$A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$ 也可以记做 $\bar{A} = B = \Omega - A$ (complement of event A)	事件 A 与事件 B 互为逆事件 (complementary events)，对立事件 (collectively exhaustive) 即，对于任意一次试验，事件 A 和事件 B 有且仅有一个发生	

3.5 条件概率：给定部分信息做推断

条件概率 (conditional probability) 是在给定部分信息基础上对试验结果的一种推断。条件概率是机器学习、数学科学中至关重要概念，本书大多数内容都是围绕条件概率展开，请大家格外留意。

三个例子

下面给出三个例子说明哪里会用到“条件概率”。

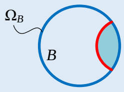
在抛两个色子试验中，事件 A 为其中一个色子点数为 5，事件 B 为点数之和为 6。给定事件 B 发生条件下，事件 A 发生的概率多少？

给定花萼长度为 5 厘米，花萼宽度为 2 厘米。根据 150 个鸢尾花样本数据，鸢尾花样本最可能是哪一类 (setosa、versicolor、virginica)？对应的概率大概是多少？

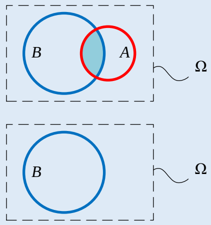
根据 150 个鸢尾花样本数据，如果某一朵鸢尾花的花萼长度为 5 厘米，它的花萼宽度最可能多宽？

条件概率

A 和 B 为样本空间 Ω 中的两个事件，其中 $\Pr(B) > 0$。那么，**事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率** (conditional probability of event A occurring given B occurs 或 probability of A given B) 可以通过下式计算得到：



$$\underbrace{\Pr\left(A \middle| \overset{\text{Given } B}{B}\right)}_{\text{Conditional}} = \frac{\overbrace{\Pr\left(A \cap B\right)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{\Pr\left(B\right)}_{\text{Marginal}}} \tag{20}$$



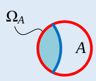
其中，$\Pr(A\cap B)$ 为 A 和 B 事件的联合概率，$\Pr(B)$ 也叫 B 事件边缘概率。

⚠ 注意，我们也可以这么理解 $\Pr(A|B)$，B 实际上是“新的样本空间”——Ω_B！$\Pr(A|B)$ 是在 Ω_B 中计算得到的概率值。

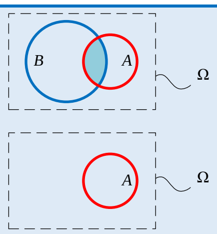
$\Pr(B)$、$\Pr(A\cap B)$ 都是在 Ω 中计算得到的概率值。

Ω_B 是的子集 Ω，两者的联系正是 $\Pr(B)$，即 B 在 Ω 中对应的概率。$\Pr(B)$ 也可以写成“条件概率”的形式 $\Pr(B \mid \Omega)$。

类似地，事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率为：



$$\underbrace{\Pr\left(B \middle| \overset{\text{Given } A}{A}\right)}_{\text{Conditional}} = \frac{\overbrace{\Pr\left(A \cap B\right)}^{\text{Joint}}}{\underbrace{\Pr\left(A\right)}_{\text{Marginal}}} \tag{21}$$

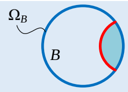


其中，$\Pr(A)$ 为 A 事件边缘概率，$\Pr(A) > 0$。

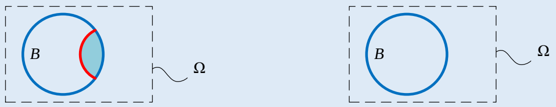
类似地，$\Pr(B|A)$ 也可以理解为 B 在“新的样本空间”Ω_A 中的概率。

联合概率

利用 (20)，联合概率 $\Pr(A \cap B)$ 可以整理为：



$$\underbrace{\Pr(A \cap B)}_{\text{Joint}} = \underbrace{\Pr(A, B)}_{\text{Joint}} = \underbrace{\Pr(A|B)}_{\text{Conditional}} \cdot \underbrace{\Pr(B)}_{\text{Marginal}} \tag{22}$$



上式相当于“套娃”。首先在 Ω_B 中考虑 A (实际上是 $A \cap B$)，然后把 $A \cap B$ 再放回 Ω 中。也就是说，把 $\Pr(A \mid B)$ 写成 $\Pr(A \cap B \mid B)$ 也没问题。因为，A 只有 $A \cap B$ 这部分在 B (Ω_B) 中。

同样，$\Pr(A \cap B)$ 也可以写成：

$$\underbrace{\Pr(A \cap B)}_{\text{Joint}} = \underbrace{\Pr(A, B)}_{\text{Joint}} = \underbrace{\Pr(B|A)}_{\text{Conditional}} \underbrace{\Pr(A)}_{\text{Marginal}} \tag{23}$$

举个例子

掷一颗色子，一共有 6 种等概率结果 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

事件 B 为“点数为奇数”，事件 C 为“点数小于 4”。事件 B 的概率 $\Pr(B) = 1/2$，事件 C 的概率 $\Pr(C) = 1/2$。

如图 19 所示，$B \cap C$ 事件发生的概率 $\Pr(B \cap C) = \Pr(B, C) = 1/3$。

在事件 B (点数为奇数) 条件下，事件 C (点数小于 4) 发生的条件概率为：

$$\Pr(C|B) = \frac{\Pr(B \cap C)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B, C)}{\Pr(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3} \tag{24}$$

图 19 也告诉我们一样的结果。请大家回顾本章最初给出孟德尔豌豆试验和道尔顿红绿色盲，计算其中的条件概率。

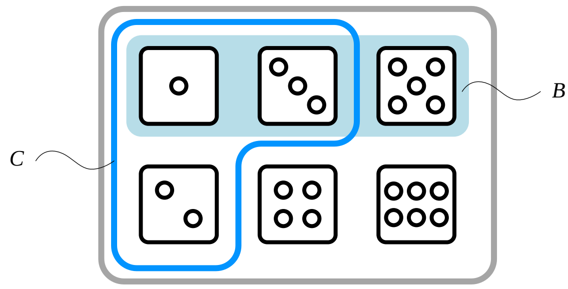


图 19. 事件 B 发生条件下事件 C 发生的条件概率

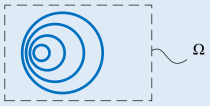
推广

(22) 可以继续推广，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个事件，它们的联合概率可以展开写成一系列条件概率的乘积：

$$\begin{aligned}\Pr\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) &= \Pr\left(A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}, A_n\right) \\ &= \Pr\left(A_n \mid A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}\right)\Pr\left(A_{n-1} \mid A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-2}\right)\cdots\Pr\left(A_2 \mid A_1\right)\Pr\left(A_1\right)\end{aligned} \tag{25}$$

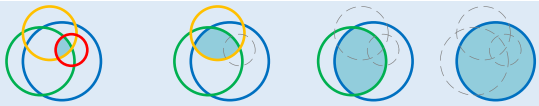
这也叫做条件概率的**链式法则** (chain rule)。

比如，$n = 4$ 时，上式可以写成：



$$\begin{aligned}\underbrace{\Pr\left(A_1, A_2, A_3, A_4\right)}_{\text{Joint}} &= \underbrace{\Pr\left(A_4 \mid A_1, A_2, A_3\right)}_{\text{Conditional}} \cdot \underbrace{\Pr\left(A_1, A_2, A_3\right)}_{\text{Joint}} \\ &= \underbrace{\Pr\left(A_4 \mid A_1, A_2, A_3\right)}_{\text{Conditional}} \cdot \underbrace{\Pr\left(A_3 \mid A_1, A_2\right)}_{\text{Conditional}} \cdot \underbrace{\Pr\left(A_1, A_2\right)}_{\text{Joint}} \\ &= \underbrace{\Pr\left(A_4 \mid A_1, A_2, A_3\right)}_{\text{Conditional}} \cdot \underbrace{\Pr\left(A_3 \mid A_1, A_2\right)}_{\text{Conditional}} \cdot \underbrace{\Pr\left(A_2 \mid A_1\right)\Pr\left(A_1\right)}_{\text{Conditional}}\end{aligned} \tag{26}$$

大家可以把上式想成多层套娃。上式配图假设事件相互之间完全包含，这样方便理解。实际上，事件求积的过程已经将“多余”的部分切掉：



$$\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right) \subset \left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \subset \left(A_1 \cap A_2\right) \subset A_1 \tag{27}$$

3.6 贝叶斯定理：条件概率、边缘概率、联合概率关系

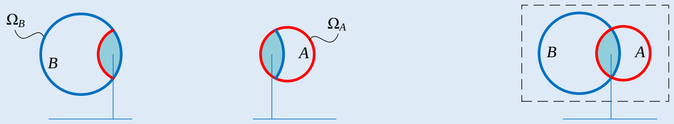
贝叶斯定理 (Bayes' theorem) 是由**托马斯·贝叶斯** (Thomas Bayes) 提出。贝叶斯定理可以说撑起机器学习、数据科学经典算法的半边天。

贝叶斯定理的基本思想是根据先验概率和新的证据来计算后验概率。在实际应用中，我们通常根据一些已知的先验知识，来计算事件的先验概率。然后，当我们获取新的证据时，就可以利用贝叶斯定理来计算事件的后验概率，从而更新我们的信念或概率。

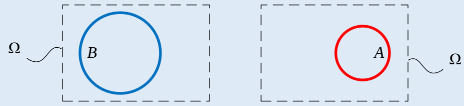
本书后续将见缝插针地讲解贝叶斯定理和应用，特别是在贝叶斯分类、贝叶斯推断两个话题中。

托马斯·贝叶斯 (Thomas Bayes) | 英国数学家 | 1702 ~ 1761
贝叶斯统计的开山鼻祖，以贝叶斯定理闻名于世。
关键词：• 贝叶斯定理 • 贝叶斯派 • 贝叶斯推断 • 朴素贝叶斯分类 • 贝叶斯回归

贝叶斯定理描述的是两个条件概率的关系：



$$\underbrace{\Pr(A|B)}_{\text{Conditional}}\underbrace{\Pr(B)}_{\text{Marginal}}=\underbrace{\Pr(B|A)}_{\text{Conditional}}\underbrace{\Pr(A)}_{\text{Marginal}}=\underbrace{\Pr(A\cap B)}_{\text{Joint}}=\underbrace{\Pr(A,B)}_{\text{Joint}} \tag{28}$$



其中：

- Pr(A|B) 是指在 B 发生条件下 A 发生的**条件概率** (conditional probability)；也就是说，Pr(A|B) 的样本空间为 Ω_B；
- Pr(B|A) 是指在 A 发生条件下 B 发生的条件概率；也就是说，Pr(B|A) 的样本空间为 Ω_A；
- Pr(A) 是 A 的**边缘概率** (marginal probability)，不考虑事件 B 的因素，样本空间为 Ω；
- Pr(B) 是 B 的边缘概率，不考虑事件 A 的因素，样本空间为 Ω；
- Pr(A∩B) 是事件 A 和 B 的联合概率，样本空间为 Ω。

图 20 给出理解贝叶斯原理的图解法。

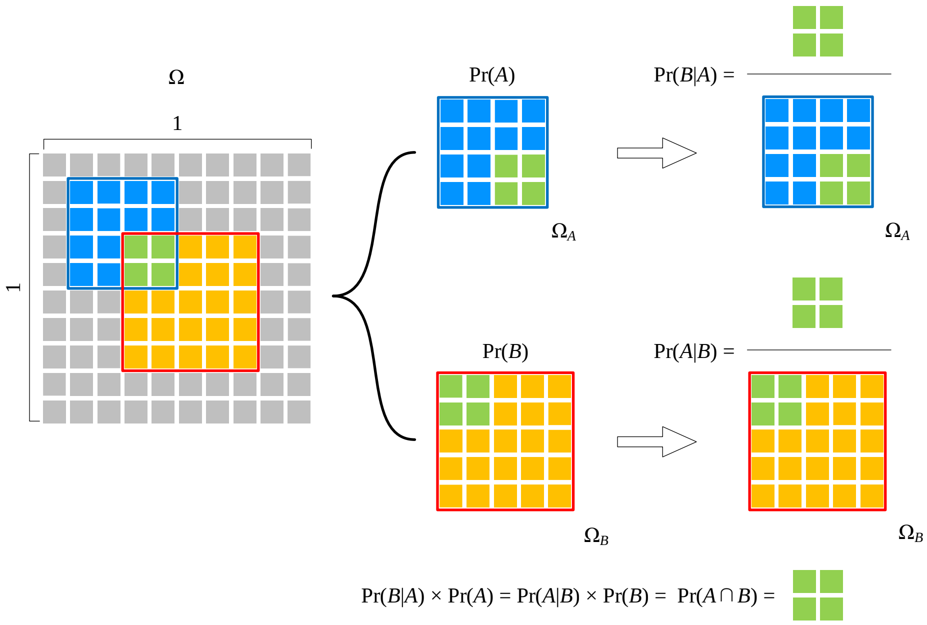


图 20. 贝叶斯原理图解

抛色子试验

现在，我们就用抛色子的试验来解释本节介绍的几个概率值。

根据本章前文内容，抛一枚色子可能得到 6 种结果，构成的样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。假设每一种结果等概率，即 $\Pr(1) = \Pr(2) = \Pr(3) = \Pr(4) = \Pr(5) = \Pr(6) = 1/6$。

设"色子点数为偶数"事件为 A，因此 $A = \{2, 4, 6\}$，对应概率为 $\Pr(A) = 3/6 = 0.5$。

A 事件的补集 B 对应事件"色子点数为奇数"，$B = \{1, 3, 5\}$，事件 B 的概率为 $\Pr(B) = 1 - \Pr(A) = 0.5$。

事件 A 和 B 交集 $A \cap B$ 为空集 $\varnothing$，因此：

$$\Pr\left(A \cap B\right) = \Pr\left(A, B\right) = 0 \tag{29}$$

而 A 和 B 两者的并集 $A \cup B = \Omega$，因此对应的概率为 1：

$$\Pr\left(A \cup B\right) = 1 \tag{30}$$

C 事件被定为"色子点数小于 4"，因此 $C = \{1, 2, 3\}$，事件 C 的概率 $\Pr(C) = 0.5$。

图 22 展示的是 A、B 和 C 事件的关系。

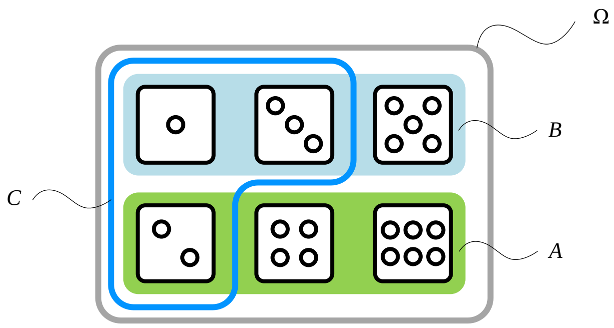


图 21. A、B、C 事件定义

如图 22 (a) 所示，事件 A 和 C 的交集 $A \cap C = \{2\}$，因此 $A \cap C$ 的概率：

$$\Pr(A \cap C) = \Pr(A, C) = \frac{1}{6} \tag{31}$$

如图 22 (b) 所示，事件 B 和 C 的交集 $B \cap C = \{1, 3\}$，因此 $B \cap C$ 的概率：

$$\Pr(B \cap C) = \Pr(B, C) = \Pr(\{1\}) + \Pr(\{3\}) = \frac{1}{3} \tag{32}$$

A 和 C 的并集 $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$，对应的概率为：

$$\Pr(A \cup C) = \Pr(A) + \Pr(C) - \Pr(A, C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \tag{33}$$

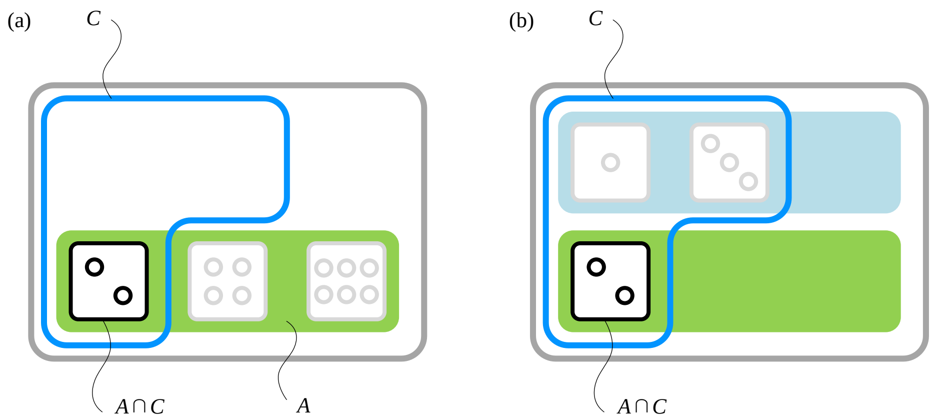


图 22. 条件概率 $\Pr(C|A)$ 和条件概率 $\Pr(A|C)$

简单来说，条件概率 $\Pr(C|A)$ 代表在 A 事件发生的条件下，C 事件发生概率。用贝叶斯公式可以求解 $\Pr(C|A)$：

$$\Pr(C|A) = \frac{\Pr(A, C)}{\Pr(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \tag{34}$$

类似的，在 C 事件发生的条件下，A 事件发生的条件概率 $\Pr(A|C)$ 为：

$$\Pr\left(A|C\right)=\frac{\Pr\left(A,C\right)}{\Pr\left(C\right)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3} \tag{35}$$

请大家自行计算图 23 所示的 $\Pr(C|B)$ 和 $\Pr(B|C)$ 这两个条件概率。

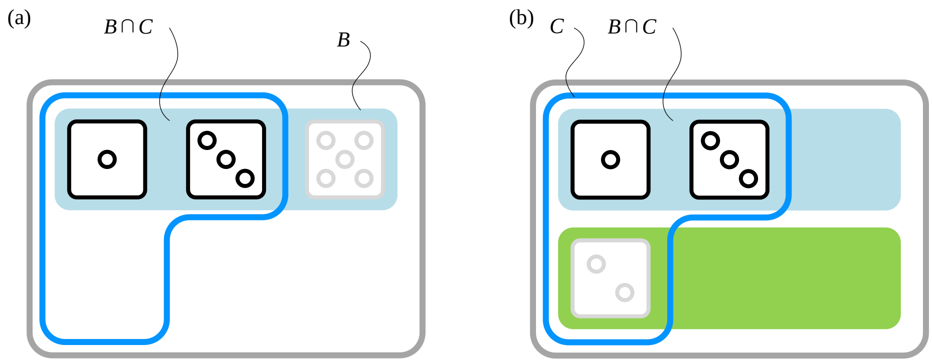
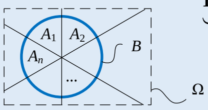


图 23. 条件概率 $\Pr(C|B)$ 和 $\Pr(B|C)$

3.7 全概率定理：穷举法

假设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容，形成对样本空间 Ω 的**分割** (partition)，也就是说每次试验事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中有且仅有一个发生。

假定 $\Pr(A_i) > 0$，对于空间 Ω 中任意事件 B，下式成立：



$$\begin{aligned}\underbrace{\Pr\left(B\right)}_{\text{Marginal}}&=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\Pr\left(A_i\cap B\right)}_{\text{Joint}}=\Pr\left(A_1\cap B\right)+\Pr\left(A_2\cap B\right)+\cdots+\Pr\left(A_n\cap B\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\Pr\left(A_i,B\right)}_{\text{Joint}}=\Pr\left(A_1,B\right)+\Pr\left(A_2,B\right)+\cdots+\Pr\left(A_n,B\right)\end{aligned} \tag{36}$$

上式就叫做**全概率定理** (law of total probability)。这本质上就是穷举法，也叫枚举法。

举个例子，图 24 给出的例子是三个互不相容事件 A_1、A_2、A_3 对 Ω 形成分割。通过全概率定理，即穷举法，$\Pr(B)$ 可以通过下式计算得到：

$$\underbrace{\Pr\left(B\right)}_{\text{Marginal}}=\underbrace{\Pr\left(A_1,B\right)}_{\text{Joint}}+\underbrace{\Pr\left(A_2,B\right)}_{\text{Joint}}+\underbrace{\Pr\left(A_3,B\right)}_{\text{Joint}} \tag{37}$$

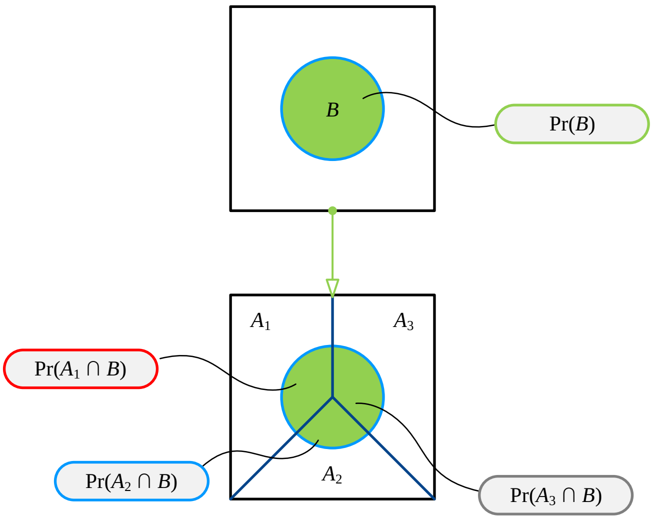


图 24. A_1, A_2, A_3 对空间 Ω 分割

引入贝叶斯定理

利用贝叶斯定理，以为 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 条件，展开 (36)：

$$
\begin{aligned}
\Pr(B) &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\Pr(A_i, B)}_{\text{Joint}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\Pr(B|A_i)}_{\text{Conditional}} \underbrace{\Pr(A_i)}_{\text{Marginal}} \\
&= \Pr(B|A_1)\Pr(A_1) + \Pr(B|A_2)\Pr(A_2) + \cdots + \Pr(B|A_n)\Pr(A_n)
\end{aligned} \tag{38}
$$

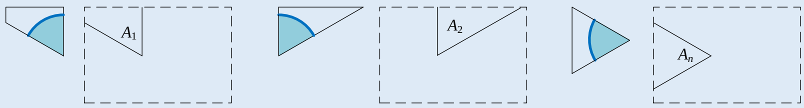


图 25 所示为分别给定 A_1, A_2, A_3 条件下，事件 B 发生的情况。

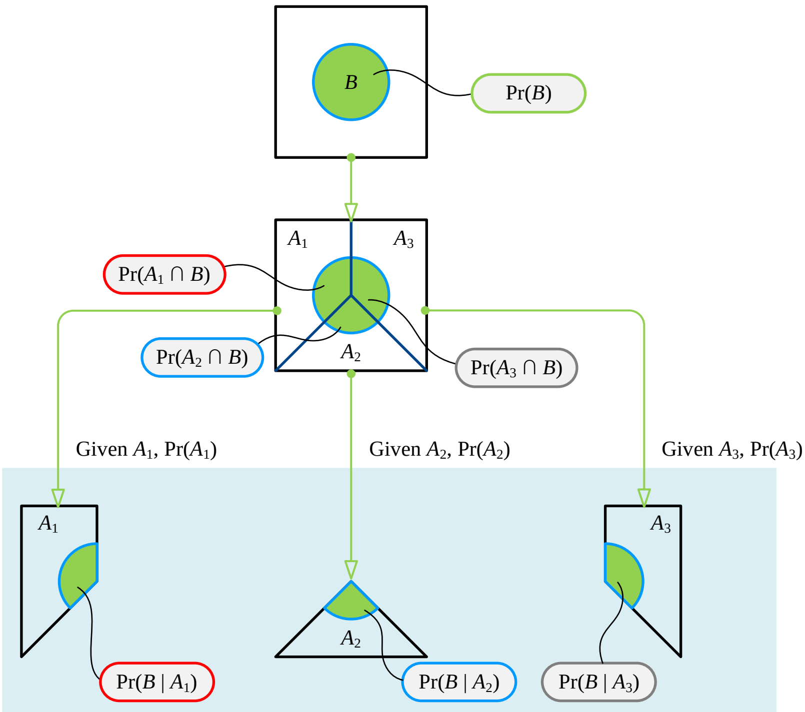


图 25. 分别给定 A_1, A_2, A_3 条件下，事件 B 发生的情况

反过来，根据贝叶斯定理，在给定事件 B 发生条件下 ($\Pr(B) > 0$)，任意事件 A_i 发生的概率为：

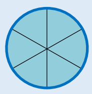
$$\Pr\left(A_i \middle| B\right) = \frac{\Pr\left(A_i, B\right)}{\Pr\left(B\right)} = \frac{\Pr\left(B \middle| A_i\right) \cdot \Pr\left(A_i\right)}{\Pr\left(B\right)} \tag{39}$$

利用贝叶斯定理，以为 B 条件，进一步展开 (36)：

$$\begin{aligned}\Pr\left(B\right) &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\Pr\left(A_i, B\right)}_{\text{Joint}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\Pr\left(A_i \middle| B\right)}_{\text{Conditional}} \underbrace{\Pr\left(B\right)}_{\text{Marginal}} \\ &= \Pr\left(A_1 \middle| B\right)\Pr\left(B\right) + \Pr\left(A_2 \middle| B\right)\Pr\left(B\right) + \cdots + \Pr\left(A_n \middle| B\right)\Pr\left(B\right)\end{aligned} \tag{40}$$

(40) 等式左右消去 $\Pr(B)$ ($\Pr(B) > 0$)，得到：

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr\left(A_i \middle| B\right) = \Pr\left(A_1 \middle| B\right) + \Pr\left(A_2 \middle| B\right) + \cdots + \Pr\left(A_n \middle| B\right) = 1 \tag{41}$$



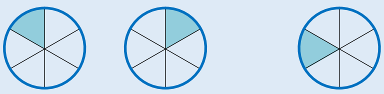


图 26 所示为给定 B 条件下，事件 A_1、A_2、A_3 发生的情况。

看到这里，对贝叶斯定理和全概率定理还是一头雾水的读者不要怕，本书后续会利用不同实例反复讲解这两个定理。

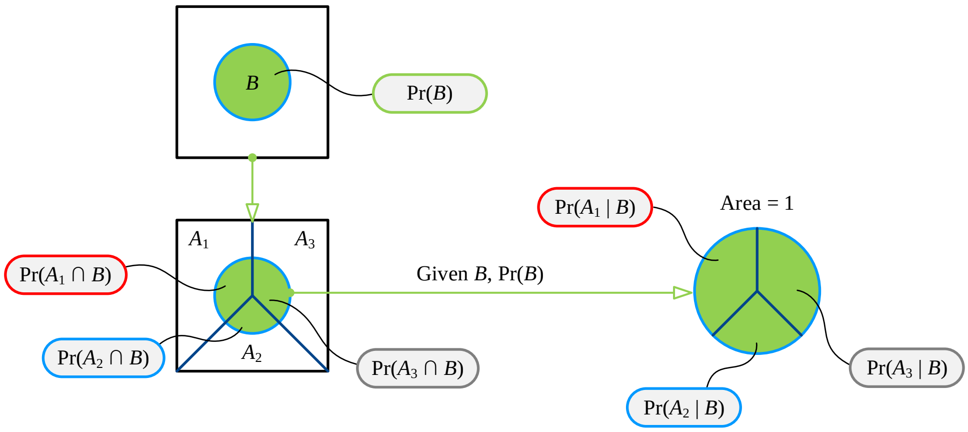


图 26. 给定 B 条件下，事件 A_1、A_2、A_3 发生的情况

3.8 独立、互斥、条件独立

独立

上一节介绍的条件概率 $\Pr(A|B)$ 刻画了在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的可能性。

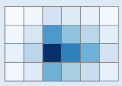
有一种特殊的情况，事件 B 发生与否，不会影响事件 A 发生的概率，也就是如下等式成立：

$$\underbrace{\Pr\left(A|B\right)}_{\text{Conditional}} = \underbrace{\Pr\left(A\right)}_{\text{Marginal}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\Pr\left(B|A\right)}_{\text{Conditional}} = \underbrace{\Pr\left(B\right)}_{\text{Marginal}} \tag{42}$$

如果 (42) 给出的等式成立，则称**事件 A 和事件 B 独立** (events A and B are independent)。

如果 A 和 B 独立，联立 (28) 和 (42) 可以得到：

$$\Pr\left(A \cap B\right) = \underbrace{\Pr\left(A,B\right)}_{\text{Joint}} = \underbrace{\Pr\left(A\right)}_{\text{Marginal}} \cdot \underbrace{\Pr\left(B\right)}_{\text{Marginal}} \tag{43}$$



如果一组事件 A_1、A_2… A_n，它们两两相互独立，则下式成立：

$$\Pr\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) = \Pr\left(A_1, A_2, \cdots, A_n\right) = \Pr\left(A_1\right) \cdot \Pr\left(A_2\right) \cdots \Pr\left(A_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \Pr\left(A_i\right) \tag{44}$$

抛三枚色子

接着本章前文“抛三枚色子”的例子。大家应该清楚，一次性抛三枚色子，这三枚色子点数互不影响，也就是“独立”。

如图 27 所示，第一枚色子的点数 (X_1) 取不同值 (1 ~ 6) 时，相当于把样本空间这个立方体切成 6 个“切片”。每个切片都有 36 个点，因此每个切片对应的概率均为：

$$\frac{6\times 6}{6\times 6\times 6}=\frac{1}{6} \tag{45}$$

也就相当于把概率“1”，均分为 6 份。而 1/6 对应第一枚色子的点数 (X_1) 取不同值的概率。

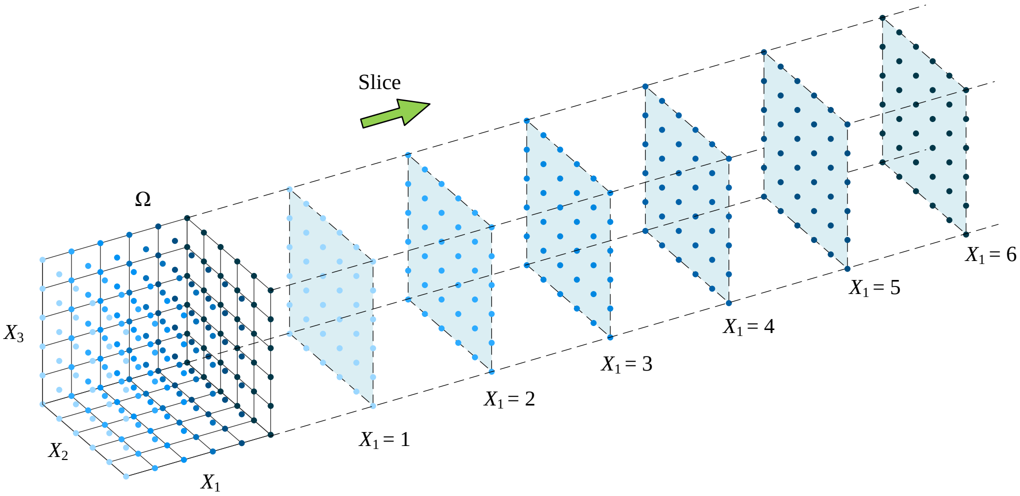


图 27. X_1 视角下的“抛三枚色子结果”

(3, 3, 3) 这个结果在整个样本空间中对应的概率为 1/216。如图 28 所示，1/216 这个数值可以有四种不同的求法：

$$\frac{1}{216}=\underbrace{\frac{1}{6}}_{X_1=3}\times\underbrace{\frac{1}{36}}_{(X_2,X_3)=(3,3)}=\underbrace{\frac{1}{6}}_{X_2=3}\times\underbrace{\frac{1}{36}}_{(X_1,X_3)=(3,3)}=\underbrace{\frac{1}{6}}_{X_3=3}\times\underbrace{\frac{1}{36}}_{(X_1,X_2)=(3,3)}=\underbrace{\frac{1}{6}}_{X_1=3}\times\underbrace{\frac{1}{6}}_{X_2=3}\times\underbrace{\frac{1}{6}}_{X_3=3} \tag{46}$$

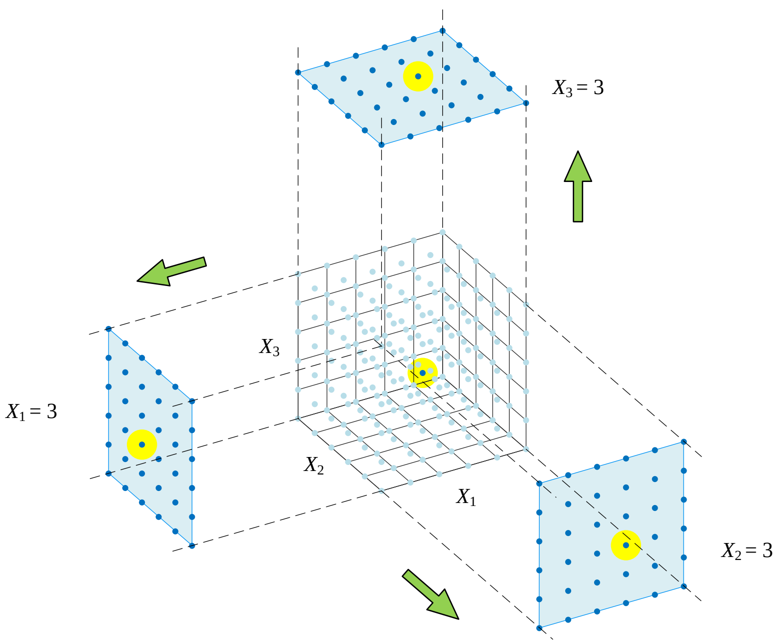


图 28. (3, 3, 3) 结果在样本空间和三个各方向切片上的位置

再换个角度，图 28 中立方体代表概率为 1，而 X_1、X_2、X_3 这三个随机变量独立，并将“1”均匀地切分成 216 份：

$$\left(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}_{X_1=1\sim6}}^{=1}\right)\times\left(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}_{X_2=1\sim6}}^{=1}\right)\times\left(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}_{X_3=1\sim6}}^{=1}\right)=1 \tag{47}$$

上式体现的就是乘法分配律。从向量角度来看，上式相当于三个向量的张量积，撑起一个如图 28 所示的三维数组。再次强调，之所以能用这种方式计算联合概率，就是因为“独立”。

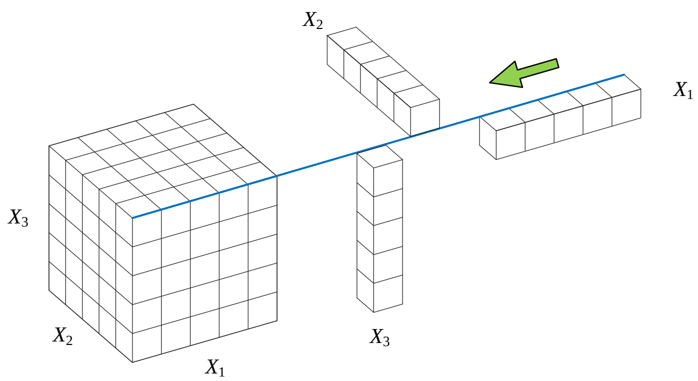


图 29. 三个向量的张量积

请大家格外注意，互斥不同于独立。表 3 对比一般情况、互斥、独立之间的主要特征。

表 3. 比较一般情况、互斥、独立

A 和 B	$\Pr(A \text{ and } B)$ $\Pr(A \cap B) = \Pr(A, B)$	$\Pr(A \text{ or } B)$ $\Pr(A \cup B)$	$\Pr(A \mid B)$	$\Pr(B \mid A)$
一般情况 $\Pr(A) > 0$ $\Pr(B) > 0$	$\Pr(A) \times \Pr(B \mid A)$ $\Pr(B) \times \Pr(A \mid B)$	$\Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$	$\Pr(A \cap B)/\Pr(B)$	$\Pr(A \cap B)/\Pr(A)$
互斥	0	$\Pr(A) + \Pr(B)$	0	0
独立	$\Pr(A) \times \Pr(B)$	$\Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A) \times \Pr(B)$	$\Pr(A)$	$\Pr(B)$

条件独立

在给定事件 C 发生条件下，如果如下等式成立，则称**事件 A 和事件 B 在 C 发生条件下条件独立** (events A and B are conditionally independent given an event C)：

$$\Pr\left(A \cap B \middle| C\right) = \Pr\left(A, B \middle| C\right) = \Pr\left(A \middle| C\right) \cdot \Pr\left(B \middle| C\right) \tag{48}$$

请大家格外注意，A 和 B 相互独立，无法推导得到 A 和 B 条件独立。而 A 和 B 条件独立，也无法推导得到 A 和 B 相互独立。本书后文还会深入讨论独立、条件独立。

古典概率有效地解决抛硬币、抛色子、口袋里摸球这些简单的概率问题，等概率模型、全概率定理、贝叶斯定理等重要的概率概念也随之产生。随着研究不断深入，概率统计工具的应用场景也开始变得更加多样。

基于集合论的古典概率模型渐渐地显得力不从心。引入随机变量、概率分布等概念，实际上就是将代数思想引入概率统计，以便于对更复杂的问题抽象建模、定量分析。这是下一章要讲解的内容。