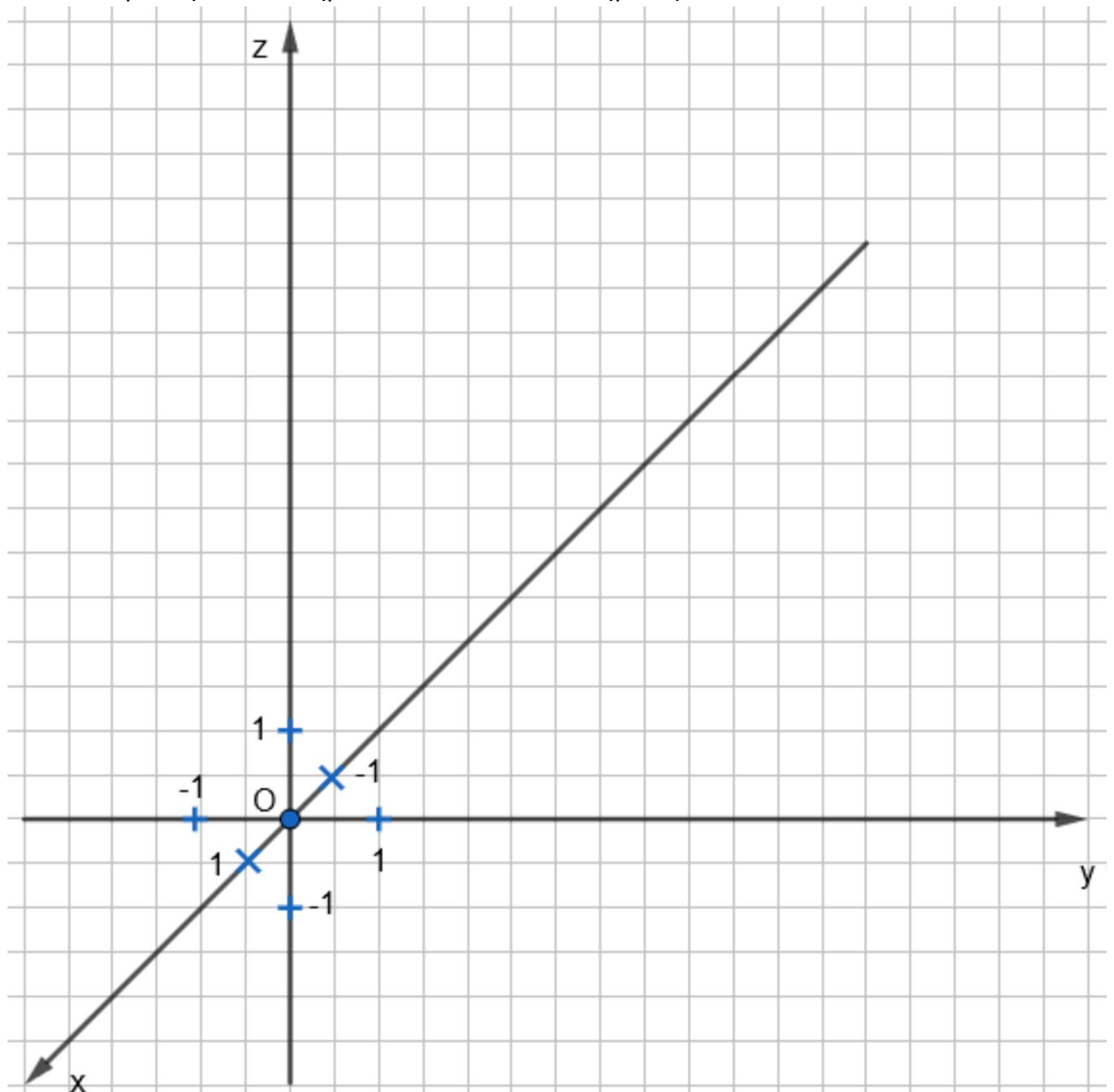
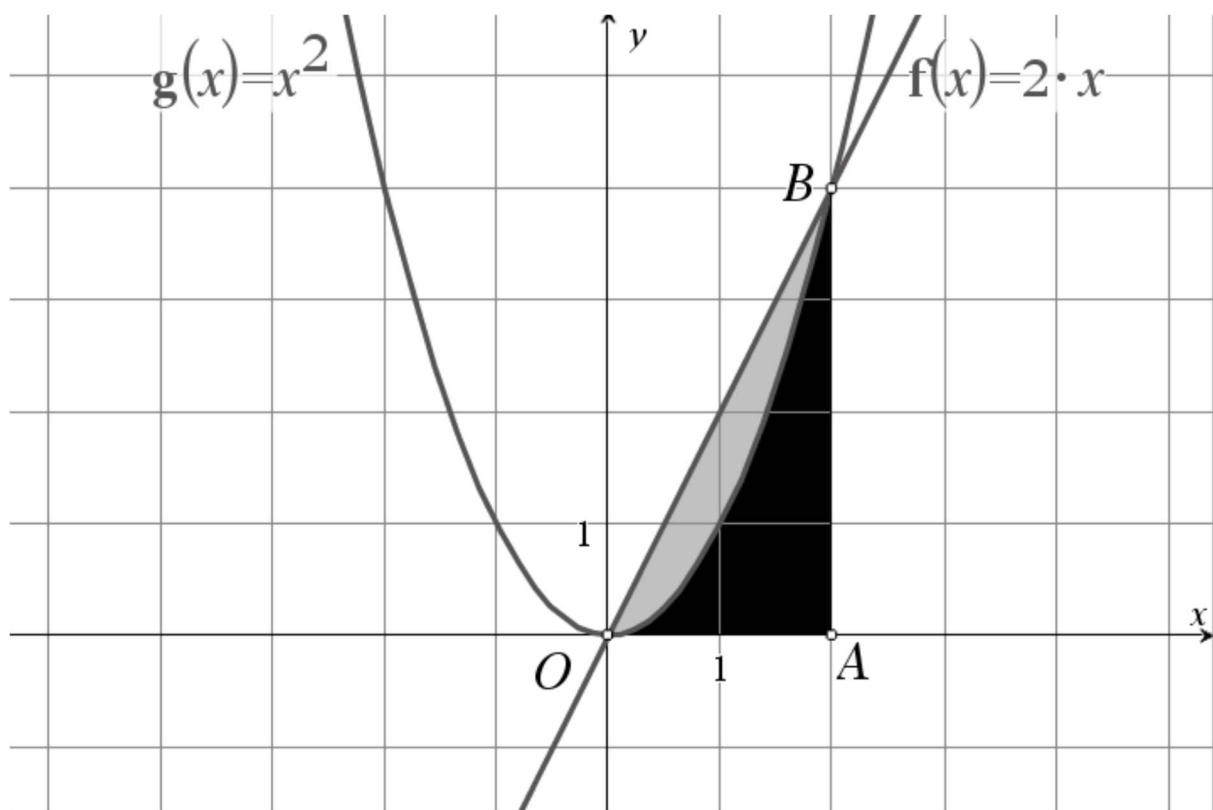


1. Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας ο τύπος είναι $f(x) = (x - 3)e^{\frac{x}{2}}$. Με το γράμμα F συμβολίζουμε τη γραφική της παράσταση.
 - i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (1 μονάδα)
 - ii. Βρείτε τα όρια της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της και προσδιορίστε τις ασύμπτωτες (αν υπάρχουν). (4 μονάδες)
 - iii. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης και να βρείτε τα ακρότατα που έχει
 - iv. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης. (4 μονάδες)
 - v. Σε ένα σύστημα αξόνων θεωρούμε τη γραφική παράσταση της f και τη γραφική παράσταση G της συνάρτησης $g(x) = (-x^2 + 3x)e^{\frac{x}{2}}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα που μας δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις F και G . (4 μονάδες)
2. Ένα κτήριο έχει για βάση ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $OAB\Gamma$ με $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(4,6,0)$ και $\Gamma(0,6,0)$. Η στέγη του κτηρίου είναι το τετράπλευρο ΔEZH με $\Delta(4,0,4)$, $E(4,6,1)$, $Z(0,6,5)$ και $H(0,0,8)$
 - i. Να αναπαράστήσετε το κτήριο στο ακόλουθο σύστημα αξόνων



(4 μονάδες)

- ii. Να αποδείξετε ότι η στέγη έχει σχήμα παραλληλόγραμμου (3 μονάδες)
- iii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ και Η βρίσκονται πάνω στο επίπεδο $2x+y+2z-16=0$ (4 μονάδες)
- iv. Θέλουμε να βιδώσουμε μια λάμπα στο εσωτερικό του κτηρίου στο σημείο Λ(d,d,d) έτσι ώστε η απόσταση της λάμπας από το έδαφος να είναι ίση με την απόστασή της από το ταβάνι. Να βρείτε την τιμή της σταθεράς d. (4 μονάδες)
3. Για τον προσδιορισμό της θέσης των αεροπλάνων χρησιμοποιούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (Ο,x,y,z) όπου το επίπεδο Οxy αντιστοιχεί στην επιφάνεια του εδάφους. Η τροχιά ενός αεροπλάνου Α περνά από τα σημεία Γ(0,15,8) και Δ(2,13,8). Η τροχιά ενός αεροπλάνου Β περνά από τα σημεία Ε(15,-2.5,k/2) και Ζ(30,-10,k) όπου $0 \leq k \leq 20$.
- i. Γράψτε το σύστημα παραμετρικών εξισώσεων της ευθείας ΓΔ (2 μονάδες)
- ii. Δείξτε ότι ένα σύστημα παραμετρικών εξισώσεων της ευθείας ΕΖ είναι το
- $$\begin{cases} x = 15 + 15q \\ y = -2,5 - 7,5q \\ z = \frac{k}{2} + \frac{k}{2}q \end{cases} \quad q \in \mathbb{R}$$
- (2 μονάδες)
- iii. Έστω k=12. Βρείτε το σημείο τομής των τροχιών των αεροπλάνων Α και Β (3 μονάδες)
- iv. Κάποια χρονική στιγμή το αεροπλάνο βρίσκεται στο σημείο Ε. Να προσδιορίσετε τις τιμές του k για τις οποίες το αεροπλάνο είναι ορατό από τον πύργο ελέγχου που βρίσκεται στο σημείο Ο(0,0,0) δεδομένου ότι η ορατότητα φτάνει μέχρι τις 18 μονάδες μήκους. (4 μονάδες)
- v. Δείξτε ότι η απόσταση ανάμεσα στις τροχιές ΓΔ και ΕΖ δίνεται από το $\frac{10|k-12|}{\sqrt{2k^2+225}}$ (4 μονάδες)
- vi. Θεωρούμε ότι η απόσταση ανάμεσα στα 2 αεροπλάνα, για λόγους ασφαλείας δεν πρέπει ποτέ να είναι μικρότερη από 1 μονάδα μήκους. Χρησιμοποιήστε τον τύπο της προηγούμενης ερώτησης και βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης ανάμεσα στα 2 αεροπλάνα. (2 μονάδες)
4. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $w = z\bar{z} - 2z + 3\bar{z} - 2$ και $z=x+iy$.
- i. Να αποδείξετε ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του w δίνονται από τις σχέσεις $\text{Re}(w)=x^2+y^2+x-2$ και $\text{Im}(w)=-5y$ (3 μονάδες)
- ii. Βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους $w=z$. (2 μονάδες)
- iii. Έστω ο w πραγματικός. Να προσδιορίσετε τις πιθανές θέσεις του z στο μιγαδικό επίπεδο (δηλ. τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών αριθμών z) (2 μονάδες)
- iv. Έστω ο w φανταστικός. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των z είναι ένας κύκλος του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. (4 μονάδες)
5. Η ευθεία $\Delta: y=16x-9$ είναι εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 2$ στο σημείο με συντεταγμένες (1,7). Να βρείτε τα a και b (5 μονάδες)
6. Να αποδείξετε ότι το γκρι εμβαδό είναι το μισό από το μαυρισμένο εμβαδό.



(5 μονάδες)