

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL
BÀI 18. TÌM NHANH NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ

1) MỞ ĐẦU VỀ NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Hôm nay mình nhận được 1 câu hỏi của thầy Bình Kami, một câu hỏi về tính quãng đường của một vật chuyển động thẳng biến đổi đều, câu hỏi đã được xuất hiện trong đề thi minh họa của BGD-ĐT năm 2017

[Câu 24 đề minh họa 2017] Một ô tô đang chạy với vận tốc $10(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 15 m B. 20 m C. 25 m D. 40 m

Xem nào, khi xe dừng lại vận tốc sẽ về 0 hay $0 = -2t + 10$ vậy thời gian xe còn di chuyển thêm được là $5(s)$. Vậy quãng đường $s = v.t = 10.5 = 50(m)$ mà xe chạy chậm dần vậy sẽ phải nhỏ hơn $50(m)$, chắc là $40(m)$ phải không nhỉ?

Để chắc chắn, có lẽ mình phải lập 1 bảng mô tả quãng đường:

Mốc 0	Hết giây thứ 1	Hết giây thứ 2	Hết giây thứ 3	Hết giây thứ 4	Hết giây thứ 5
Vận tốc	$10 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 0$
Quãng đường	9	7	5	3	1

Như vậy tổng quãng đường xe đi được khi vận tốc giảm đến 0 là $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25(m)$


Cách này có vẻ tin cậy hơn nhiều, nhưng mất của mình thời gian đến hơn 2 phút !!! Vậy còn cách gì nhanh hơn không nhỉ?


Thầy BìnhKami e làm được rồi.

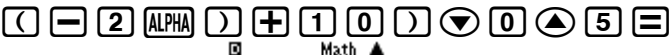
Minh Nguyệt đã giải được bài toán và tìm ra đáp án chính xác $25(m)$, rất tốt về mặt kết quả nhưng về mặt thời gian tính lại hơi lâu. Bài này ta có thể hoàn thành trong thời gian $20(s)$ nhờ 1 công cụ gọi là tích phân

$$S = \int_0^5 (-2t + 10) dt = 25(m)$$

Ta bấm máy tính như sau:

Khởi động chức năng tính tích phân: 

Nhập biểu thức cần tính tích phân và nhấn nút 



$$\int_0^5 (-2x + 10) dx = 25$$

Máy tính sẽ cho chúng ta kết quả là $25(m)$. Chỉ mất $20(s)$ thật tuyệt vời phải không nào !!!

Thầy BìnhKami, Tích phân là công cụ gì mà hay vậy ạ ???

Tích phân là 1 trong những công cụ tuyệt vời nhất mà nền toán học đã tạo ra, sử dụng tích phân có thể tính được quãng đường, vận tốc của 1 vật thể hoặc có thể tính được diện tích của 1 hình rất phức tạp ví dụ như hình tròn, hình tam giác, hình e líp ... thì còn có công thức nhưng diện tích của mặt ao hồ hình thù phức tạp thì chỉ có tích phân mới xử lý được, hoặc tính thể tích của 1 khoang tàu thủy có hình dạng phức tạp thì lại phải nhờ đến tích phân.

Tích phân hiện đại được nhà toán học Anh Isac Newton và nhà toán học Pháp Laibonit công bố khoảng cuối thế kỉ 17 nhưng người đặt nền móng cho sự hình thành và phát triển của Tích phân là nhà toán học, vật lý học, triết học, thiên văn học thiên tài người Hi Lạp Ac-si-met

Tích phân chia làm 2 dạng : Tích phân bất định (không cận) thường được biết tới tên là Nguyên hàm và Tích phân xác định (có cận) thường được biết đến với tên Tích phân mà các e sẽ được học ở học kì 2 lớp 12.

2) CÁCH TÍNH NGUYÊN HÀM

❖ Xây dựng công thức tính nguyên hàm :

Ta có $(x^5)' = 5x^4$ vậy ta nói nguyên hàm của $5x^4$ là x^5 kí hiệu $\int 5x^4 dx = x^5 + C$

Tương tự $(\sin x)' = \cos x$ vậy ta nói nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x$, kí hiệu

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\text{Tổng quát : } \int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

VD1-[Sách BT Nâng cao 12] Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào :

- A. $f(x) = e^{2x}$ B. $f(x) = 2x.e^{2x}$ C. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$ D.

$$f(x) = x^2 e^{x^2} \quad 1$$

GIẢI

Thưa thầy, bài này e làm được ạ !

- Đầu tiên e tính đạo hàm của $F(x)$, vì $F(x)$ là một hàm hợp của e nên em áp dụng công thức $(e^u)' = e^u \cdot u'$ ạ.
- Khi đó : $F'(x) = (e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2x.e^{x^2}$
- Vậy $F(x)$ là nguyên hàm của hàm của hàm $f(x) = 2x.e^{x^2}$ và ta chọn đáp án **B** ạ.

VD2-[Đề thi minh họa ĐHQG 2016] Nguyên hàm của hàm số $y = x.e^{2x}$ là :

- A. $2e^{2x}(x-2) + C$ B. $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$
 C. $2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ D. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$

GIẢI

Thưa thầy, chúng ta sẽ thử lần lượt, với đáp án A thì $F(x) = 2e^{2x}(x-2)$. Nhưng việc tính đạo hàm của $F(x)$ là $2e^{2x}(x-2)$ thì e thấy khó quá ạ, e quên mất công thức ạ !!

Trong phòng thi gặp nhiều áp lực, nhiều khi chúng ta đột nhiên bị quên công thức đạo hàm hay bản thân chúng ta chưa học phần này thì làm sao ?? Thầy sẽ cho các e một thủ thuật Casio để các e quên công thức vẫn biết đâu là đáp án đúng :

- Ta biết $F'(x) = f(x)$ việc này đúng với mọi x thuộc tập xác định
- Vậy sẽ đúng với $x=1$ chẳng hạn . Khi đó $F'(1) = f(1)$
- Tính giá trị $f(1) = 7,3890...$

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\times 10^x} \boxed{x^\square} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{=}$

$$Xe^{2x}$$

$$7.389056099$$

- Tính đạo hàm $F'(1)$ với từng đáp án , bắt đầu từ đáp án A là $F(x) = 2e^{2x}(x-2)$

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\int} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\times 10^x} \boxed{x^\square} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{1} \boxed{=}$

$$\frac{d}{dx}(2e^{2x}(x-2))|_{x=1}$$

$$-14.7781122$$

Vậy ta được kết quả $F'(1) = -14.7781...$ đây là 1 kết quả khác với $f(1) \Rightarrow$ Đáp án A sai

- Tính đạo hàm $F'(1)$ của đáp án B với $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\int} \boxed{\frac{1}{\square}} \boxed{1} \boxed{\nabla} \boxed{2} \boxed{\rightarrow} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\times 10^x} \boxed{x^\square} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{\frac{1}{\square}} \boxed{1} \boxed{\nabla} \boxed{2} \boxed{\rightarrow} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{1} \boxed{=}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)|_{x=1}$$

$$7.389056099$$

Ta thu được kết quả giống hệt $f(x)$ vậy $F'(x) = f(x)$ hay $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow$ Đáp án B là đáp án chính xác

❖ Bình luận :

- Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$ cũng là 1 nguyên hàm của hàm $f(x)$ vì $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$
- Việc sử dụng Casio để tính nguyên hàm đặc biệt hữu ích đối với với những bài phức tạp, áp dụng nhiều công thức tính đạo hàm cùng một lúc , và tránh nhầm lẫn trong việc tính toán !!

VD3-[Câu 23 Đề minh họa năm 2017] Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$:

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$

GIẢI

❖ Cách 1 : CASIO

- Nhắc lại 1 lần nữa công thức quan trọng của chúng ta. Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(x) = f(x)$

Khi đó ta chọn 1 giá trị $x = a$ bất kì thuộc tập xác định thì $F(a) = f(a)$

- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn (thỏa điều kiện $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$)

Khi đó $f(2) = 1,732...$

$$\sqrt{\square} \quad 2 \quad \text{ALPHA} \quad) \quad - \quad 1 \quad \text{CALC} \quad 2 \quad = \quad \text{S}\cdot\text{D}$$

$$\sqrt{2x-1}$$

$$1.732050808$$

- Theo đúng quy trình ta sẽ chọn đáp án $F(x)$ ở 4 đáp án A, B, C, D nếu đáp án nào thỏa mãn $F'(2) = f(2) = 1,732...$

Thử với đáp án A khi đó $F(x) = \frac{2}{3}(2x - 1)\sqrt{2x - 1}$

$$\text{SHIFT} \quad \int \quad \text{S}\cdot\text{D} \quad 2 \quad \nabla \quad 3 \quad \text{D}\cdot\text{S} \quad (\quad 2 \quad \text{ALPHA} \quad) \quad - \quad 1 \quad) \quad \sqrt{\square} \quad 2 \quad \text{ALPHA} \quad) \quad - \quad 1 \quad \text{D}\cdot\text{S} \quad \text{D}\cdot\text{S}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} \right)$$

$$3.464101615$$

Vậy $F'(2) = 3,4641...$ là một giá trị khác $f(2) = 1,732...$ điều đó có nghĩa là điều kiện $F'(x) = f(x)$ không được đáp ứng. Vậy đáp án A là sai.

- Ta tiếp tục thử nghiệm với đáp án B. Khi này $F(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)\sqrt{2x - 1}$

$$\text{SHIFT} \quad \int \quad \text{S}\cdot\text{D} \quad 1 \quad \nabla \quad 3 \quad \text{D}\cdot\text{S} \quad (\quad 2 \quad \text{ALPHA} \quad) \quad - \quad 1 \quad) \quad \sqrt{\square} \quad 2 \quad \text{ALPHA} \quad) \quad - \quad 1 \quad \text{D}\cdot\text{S} \quad \text{D}\cdot\text{S}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} \right)$$

$$1.732050808$$

Ta được $F'(2) = 1,732...$ giống hệt $f(2) = 1,732...$ có nghĩa là điều kiện

$F'(x) = f(x)$ được thỏa mãn. Vậy đáp án chính xác là B

❖ Cách tham khảo : Tự luận

- Dựa vào đặc điểm của hàm $f(x)$ ta thấy $\sqrt{2x - 1}$ về mặt bản chất sẽ có dạng

$$(2x - 1)^{\frac{1}{2}}. \text{ Ta nghĩ ngay đến công thức đạo hàm } (u^n)' = n.u^{n-1}.u'$$

+) Trong công thức đạo hàm này số mũ của u bị giảm đi 1. Vậy hàm $F(x)$ có số mũ

lớn hơn hàm $f(x)$ là 1 đơn vị. Vậy $F(x)$ phải có số mũ là $\frac{3}{2}$

+) Vậy chỉ có đáp án A hoặc B là thỏa mãn vì $(2x - 1)\sqrt{2x - 1} = (2x - 1)^{\frac{3}{2}}$

- Ta thực hiện phép đạo hàm $\left[(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}(2x-1)' = 3\sqrt{2x-1}$
- Cân bằng hệ số ta được $\frac{1}{3}\left[(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]' = \sqrt{2x-1}$. Điều này có nghĩa nguyên hàm $F(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} \Rightarrow \mathbf{B}$ là đáp án đúng.

❖ **Bình luận :**

- Nếu chúng ta có một chút kiến thức cơ bản về đạo hàm thì việc sử dụng máy tính Casio để tìm đáp án sẽ nhẹ nhàng hơn. Chúng ta chỉ việc thử với đáp án **A** và **B** vì 2 đáp án này mới có số mũ là $\frac{3}{2}$
- Điều đặc biệt của dạng này là số mũ của nguyên hàm $F(x)$ lúc nào cũng lớn hơn số mũ của hàm số $f(x)$ là 1 đơn vị.
+) Chúng ta có thể áp dụng 1 cách linh hoạt. Ví dụ tìm nguyên hàm của hàm số $y = \frac{m}{\sqrt{x}}$ thì cũng vô cùng đơn giản. Ta thấy $y = m \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ về mặt bản chất thì $\frac{1}{\sqrt{x}}$ là x mũ $-\frac{1}{2}$ vậy chắc chắn nguyên hàm phải là x mũ $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ hay là \sqrt{x}
- +) Ta xét đạo hàm gốc $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (*) Việc còn lại chỉ là cân bằng hệ số, để tạo thành $\frac{m}{\sqrt{x}}$ ta nhân cả 2 vế của (*) với $2m$ là xong. Khi đó $(2m\sqrt{x})' = \frac{m}{\sqrt{x}}$ Thật đơn giản phải không !!

VD4- Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x}$ là :

A. $2x^2 + 3x - 2\ln x$

B. $\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \ln x$

C. $\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + 1$

D. $\frac{x^2 + x}{x^2}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta chọn 1 giá trị x thuộc tập xác định ($x \neq 0$) là $x = 5$
 Khi đó $f(5) = 7.6$

 ALPHA $)$ x^2 $+$ 3 ALPHA $)$ $-$ 2 ∇ ALPHA $)$ CALC 5 $=$ (S \rightarrow D

$$\frac{x^2+3x-2}{x}$$

7.6

- Với đáp án C ta có $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + 1$ có

SHIFT $\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x}$ ALPHA) x^2 ∇ 2 \blacktriangleright + 3 ALPHA) - 2 ln ALPHA)) + 1 \blacktriangleright
5 =

Math ▲

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln(x) \right)$$

7.6

Ta được $F'(5) = 7.6 = f(5)$. Vậy đáp án **C** là đáp án chính xác.

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Hàm $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x}$ có tên gọi là hàm phân thức hữu tỉ với bậc của tử là bậc 2 lớn hơn bậc của mẫu là bậc 1

- Phương pháp giải : Thực hiện 1 phép chia tử số cho mẫu số ta được: $f(x) = x + 3 - \frac{2}{x}$. Khi đó hàm số trở thành dạng đơn giản và ta dễ dàng tìm được nguyên hàm.

+) Có $\left(\frac{x^2}{2} + 3x \right)' = x + 3$ vậy $\frac{x^2}{2} + 3x$ là nguyên hàm của $x + 3$

+) Có $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Cân bằng hệ số ta có : $(-2 \ln x)' = -\frac{2}{x}$ vậy $-2 \ln x$ là nguyên hàm của $-\frac{2}{x}$

Tổng kết $\left(\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x \right)' = x + 3 - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 3x - 2}{x}$

Hay $\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x$ là một nguyên hàm cần tìm thì $\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C$ cũng là một nguyên hàm

- Cân bằng hệ số ta được $\frac{1}{3} \left[(2x - 1)^{\frac{3}{2}} \right]' = \sqrt{2x - 1}$. Điều này có nghĩa nguyên hàm

$$F(x) = \frac{1}{3} (2x - 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2x - 1) \sqrt{2x - 1} \Rightarrow \mathbf{B} \text{ là đáp án đúng.}$$

❖ **Bình luận :**

- Tìm nguyên hàm của 1 hàm phân thức hữu tỉ là 1 dạng toán hay nếu chúng ta biết nguyên tắc tư duy, và nếu không biết thì sẽ rất khó khăn.
- Ta phải nhớ thể này, nếu **phân thức hữu tỉ có bậc ở tử lớn hơn hoặc bằng bậc ở mẫu thì ta sẽ thực hiện 1 phép chia tử số cho mẫu số** thì sẽ thu được 1 hàm số cực kì dễ tính nguyên hàm.
- Ngoài ra còn 1 dạng hay nữa khi **phân thức hữu tỉ có mẫu số phân tích được thành nhân tử thì ta sẽ xử lý thế nào ?** Mời các bạn xem ví dụ tiếp theo .

VD5 - Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$ là :

A. $\ln(x - 2) - 2 \ln(x + 2) + C$

B. $2 \ln(x - 2) + \ln(x + 2) + C$

C. $\ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$

D. $\ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta chọn 1 giá trị x thuộc tập xác định ($x \neq 0$) là $x = 5$

Khi đó $f'(5) = 7.6$

Calculator interface showing the expression $\frac{x^2 + 3x - 2}{x}$ and the result 7.6.

➤ Với đáp án C ta có $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + 1$ có

Calculator interface showing the derivative of $F(x)$ and the result 7.6.

Ta được $F'(5) = 7.6 = f'(5)$. Vậy đáp án **C** là đáp án chính xác.

❖ Cách tham khảo : Tự luận

- Hàm $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$ có tên gọi là hàm phân thức hữu tỉ có mẫu số phân tích được thành nhân tử
- Phương pháp giải : Chia phân thức phức tạp ban đầu thành các phân thức phức tạp

+) Có $\frac{4}{x^2 - 4} = \frac{4}{(x - 2)(x + 2)}$

+) Ta sẽ tách phân thức lớn này thành 2 phân thức nhỏ đơn giản :

$$\frac{4}{x^2 - 4} = m \cdot \frac{1}{x - 2} + n \cdot \frac{1}{x + 2}$$

+) Để tách được ta lại dùng **phương pháp hệ số bất định**:

$$\frac{4}{x^2 - 4} = m \cdot \frac{1}{x - 2} + n \cdot \frac{1}{x + 2} \Leftrightarrow \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{m(x + 2) + n(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$\Leftrightarrow 4 = m(x - 2) + n(x + 2) \Leftrightarrow 0x + 4 = x(m + n) + 2m - 2n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m + n \\ 4 = 2m - 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -1 \end{cases}$$

Vậy $\frac{4}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}$

- Thành công trong việc đưa về 2 phân số đơn giản, ta nhớ đến công thức

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

Để dàng áp dụng :

$$[\ln(x - 2)]' = \frac{1}{x - 2} \cdot (x - 2)' = \frac{1}{x - 2} \quad \text{và} \quad [\ln(x + 2)]' = \frac{1}{x + 2} \cdot (x + 2)' = \frac{1}{x + 2}$$

$$\text{Tổng hợp } [\ln(x - 2) - \ln(x + 2)]' = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} \left(\Leftrightarrow \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| \right)' = \frac{4}{x^2 - 4}$$

Vậy nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C$

❖ **Bình luận :**

- Qua ví dụ trên chúng ta thấy được sự hữu hiệu của phương pháp hệ số bất định, 1 phân số phức tạp sẽ được chia thành 2 hoặc 3 phân số đơn giản.
- Về nguyên tắc thì có thể ra 1 bài tích phân hàm phân thức được chia thành hàng chục phân số đơn giản nhưng trong trường hợp THPT thì cùng lắm là chia làm 3 phân thức con. Chúng ta hãy cùng theo dõi phép chia sau :

$$\frac{4x^2 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{4x^2 - 5x - 1}{(x-2)(x^2-1)} = \frac{4x^2 - 5x - 1}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x-2} + \frac{n}{x-1} + \frac{p}{x+1}$$

⇔ Tử số vế trái = Tử số vế phải

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x - 1 = m(x^2 - 1) + n(x^2 - x - 2) + p(x^2 - 3x + 2)$$

$$\begin{cases} 4 = m + 2n + p \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = n - 3p \\ n = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = m - 2p \\ n = 1 \end{cases}$$

Cuối cùng ta thu được : $\frac{4x^2 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

Và ta dễ tính được nguyên hàm của $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ là

$$\ln(x-2) + 2\ln(x-1) + \ln(x+1) + C$$

Thật hiệu quả phải không !!

VD6-[Báo toán học tuổi trẻ tháng 12-2016] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ trên tập số thực là:

A. $\frac{1}{4} \cos 2x + C$

B. $\frac{1}{4} \cos 2x + C$

C. $\sin x \cdot \cos x$

D.

$\frac{1}{4} \sin 2x + C$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Chuyển máy tính Casio về chế độ Radian (khi làm các bài toán liên quan đến lượng giác)

- Chọn 1 giá trị x bất kì ví dụ như $x = \frac{\pi}{6}$

- Khi đó giá trị của $f(x)$ tại $x = \frac{\pi}{6}$ là $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,4330...$

$\sin(\text{ALPHA}) \text{)) } \cos(\text{ALPHA}) \text{)) } \text{CALC} \text{ SHIFT } \times 10^x \div \text{ 6 } = \text{ S+D}$

$\sin(X)\cos(X)$

0.4330127019

- Theo đáp án A thì $F(x) = \frac{1}{4} \cos 2x$. Nếu đáp án A đúng thì $F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Ta tính được $F'(2) = 0,4430...$ là một giá trị khác $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Vậy đáp án A sai

$\text{SHIFT } \int \frac{1}{x} \text{ 1 } \nabla \text{ 4 } \blacktriangleright \cos \text{ 2 } \text{ALPHA} \text{)) } \blacktriangleright \int \text{ SHIFT } \times 10^x \nabla \text{ 6 } =$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4} \cos(2x) \right) \Big|_{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$-0.4330127019$$

➤ Ta tiếp tục thử nghiệm với đáp án B.

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{4} \cos(2x) \right) \Big|_{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$0.4330127019$$

Ta được $F' \left(\frac{\pi}{6} \right) = 0,4430... = f' \left(\frac{\pi}{6} \right)$. Vậy đáp án chính xác là **B**

❖ Cách tham khảo : Tự luận

- Để thấy cụm $\sin x \cos x$ rất quen thuộc và ta nhớ đến công thức có nhân đôi :
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- Từ đó ta rút gọn $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$
- Cái gì đạo hàm ra \sin thì đó là \cos !! Ta nhớ đến công thức : $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
 Áp dụng $(\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2 \sin 2x$

Cân bằng hệ số bằng cách chia cả 2 vế cho -4 ta được : $\left(\frac{1}{4} \cos 2x \right)' = \frac{1}{2} \sin 2x$

- Từ đây ta biết được $F(x) = \frac{1}{4} \cos 2x$

❖ Bình luận :

- Khi sử dụng máy tính Casio để làm bài tập liên quan đến hàm lượng giác thì ta nên đổi sang chế độ Radian để phép tính của chúng ta đạt độ chuẩn xác cao..
- Ngoài cách gộp hàm $f(x)$ theo công thức góc nhân đôi, ta có thể tư duy như sau :
 Nếu ta coi $\sin x = u$ thì $\cos x = u'$ vậy ta nhớ tới công thức $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

Ta thiết lập quan hệ $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$ hay $\left(\frac{1}{2} \sin^2 x \right)' = \sin x \cos x$

Vậy ta biết $F(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$ tuy nhiên so sánh đáp án thì lại không có đáp án giống.

Vậy ta tiếp tục biến đổi 1 chút. $\frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \Rightarrow F(x)$ cũng

là $\frac{1}{4} \cos 2x$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên 2017] Nguyên hàm $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ bằng :

A. $\tan^2 x + C$

B. $\frac{1}{3}\tan x + C$

C. $3\tan^3 x + C$

D.

$\frac{1}{3}\tan^3 x + C$

Bài 2-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình 2017] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2016^x$ là :

A. $\frac{2016^x}{\ln 2016} + C$

B. $2016^x \cdot \ln 2016 + C$

C. $x \cdot 2016^x \cdot \ln 2016 + C$

D. $\frac{x \cdot 2016^{x-1}}{\ln 2016} + C$

Bài 3-[THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa 2017] Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$:

A. $\frac{x^2 + x - 1}{x+1}$

B. $\frac{x^2 - x - 1}{x+1}$

C. $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$

D. $\frac{x^2}{x+1}$

Bài 4-[THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa 2017] Tìm nguyên hàm của hàm số

$\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx$

A. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

B. $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

C. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

D. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

Bài 5-[THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ 2017] Không tồn tại nguyên hàm :

A. $\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx$

B. $\int \sqrt{x^2 + 2x - 2} dx$

C. $\int \sin 3x dx$

D. $\int e^{3x} dx$

Bài 6-[Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2017] $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ bằng :

A. $2(\ln x)^{\frac{1}{2}} + C$

B. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$

C. $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} + C$

D.

$\frac{3}{2}\sqrt{(\ln x)^3} + C$

Bài 7-[Báo Toán học tuổi trẻ T11 năm 2016] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x (1 - 2017e^{-2x})$ là :

A. $e^x + 2017e^{-x} + C$

B. $e^x - 2017e^{-x} + C$

C. $e^x + \frac{2017}{2}e^{-x} + C$

D. $e^x - \frac{2017}{2}e^{-x} + C$

Bài 8-[THPT Triệu Sơn – Thanh Hóa 2017] Họ nguyên hàm của $\int \frac{2x+3}{2x^2 - x - 1} dx$:

A. $\frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

B. $\frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

C. $\frac{2}{3}\ln|2x+1| - \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

D. $\frac{1}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên 2017] Nguyên hàm $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ bằng :

- A. $\tan^2 x + C$ B. $\frac{1}{3} \tan x + C$ C. $3 \tan^3 x + C$ D. $\frac{1}{3} \tan^3 x + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn chế độ Radian cho máy tính Casio rồi chọn giá trị $x = \frac{\pi}{6}$ chẳng hạn.

- Ta có $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{9}$

$\text{[SHIFT] [MODE] [4] [=] [sin] [ALPHA] [)] [)] [x^2] [\text{v} \text{]} [\cos] [\text{v} \text{]} [)] [)] [x^4] [4] [\text{CALC}] [\text{SHIFT}] [\times 10^x] [\div] [6] [=]$

$$\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^4} = \frac{4}{9}$$

- Tính đạo hàm của $F(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$ ta được $F'(x) = 0,44(4) = \frac{4}{9}$

$\text{[SHIFT] [f(x)] [=] [1] [\text{v} \text{]} [3] [\text{v} \text{]} [\tan] [\text{v} \text{]} [)] [)] [x^3] [3] [\text{v} \text{]} [\text{v} \text{]} [=] [\text{SHIFT}] [\times 10^x] [\text{v} \text{]} [6] [=]$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} \tan(x)^3 \right) \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = 0.4444444444$$

- Vậy $F'(x) = f(x) = \frac{4}{9} \Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Biến đổi $\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

- Theo công thức đạo hàm $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$. Với $u = \tan x$ và $n = 3$

Ta có $(\tan^3 x)' = 3 \cdot \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \tan^3 x\right)' = \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$. Vậy $F(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x$ là 1 nguyên hàm $\Rightarrow \frac{1}{3} \tan^3 x + C$ là họ nguyên hàm cần tìm.

Bài 2-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình 2017] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2016^x$ là :

- A. $\frac{2016^x}{\ln 2016} + C$ B. $2016^x \cdot \ln 2016 + C$
 C. $x \cdot 2016^x \cdot \ln 2016 + C$ D. $\frac{x \cdot 2016^{x-1}}{\ln 2016} + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x) = 2016^x$ và $F(2) = 4064256$

2 0 1 6 x^{\square} ALPHA \square CALC 2 \equiv

2016 x

4064256

- Tính đạo hàm của $F(x) = \frac{2016^x}{\ln 2016}$ tại 2 ta được $F'(2) = 4064256$

SHIFT $\int \frac{\square}{\square}$ 2 0 1 6 x^{\square} ALPHA \square ∇ ln 2 0 1 6 \square \rightarrow \rightarrow 2 \equiv

$\frac{d}{dx} \left(\frac{2016^x}{\ln(2016)} \right) \Big|_{x=2}$

4064256

- Vậy $F'(x) = f(x) = 4064256 \Rightarrow A$ là đáp án chính xác

❖ Cách tham khảo: Tự luận

- Theo công thức đạo hàm $(a^x)' = a^x \cdot \ln x$. Với $a = 2016$

Ta có $(2016^x)' = 2016^x \cdot \ln 2016 \Leftrightarrow \left(\frac{2016^x}{\ln 2016} \right)' = 2016^x$. Vậy $F(x) = \frac{2016^x}{\ln 2016}$ là 1 nguyên

hàm $\Rightarrow \frac{2016^x}{\ln 2016} + C$ là họ nguyên hàm cần tìm.

Bài 3-[THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa 2017] Hàm số nào sau đây không phải là

nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$:

A. $\frac{x^2 + x - 1}{x+1}$

B. $\frac{x^2 - x - 1}{x+1}$

C. $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$

D. $\frac{x^2}{x+1}$

GIẢI

❖ Cách 1: CASIO

- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.

- Ta có $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ và $f(2) = \frac{8}{9}$

$\int \frac{\square}{\square}$ ALPHA \square (ALPHA \square + 2 \square ∇ (ALPHA \square + 1 \square x^2 CALC 2 \equiv

$\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$\frac{8}{9}$

- Tính đạo hàm của $F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x+1}$ tại 2 ta được $F'(2) = 1.111(1) = \frac{10}{9}$

SHIFT $\int \frac{\square}{\square}$ ALPHA \square x^2 + ALPHA \square - 1 \square ∇ ALPHA \square + 1 \square \rightarrow \rightarrow 2 \equiv

$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x+1} \right) \Big|_{x=2}$

1.111111111

- Vậy $F'(x) \neq f(x) \Rightarrow F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x+1}$ không phải là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow A$ là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

▪ Biến đổi $\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$

▪ Theo công thức đạo hàm $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$. Với $u = x+1$

Ta có $\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2}$ và $x' = 1 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x+1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)' = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

Vậy $F(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ là 1 nguyên hàm \Rightarrow Đáp số **C** đúng

▪ $F(x) - 2 = \frac{x^2+x+1}{x+1} - 2$ cũng là 1 nguyên hàm \Rightarrow Đáp số **B** đúng

▪ $F(x) - 1 = \frac{x^2+x+1}{x+1} - 1$ cũng là 1 nguyên hàm \Rightarrow Đáp số **D** đúng

Bài 4-[THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa 2017] Tìm nguyên hàm của hàm số

$$\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx$$

A. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

B. $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

C. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

D. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

▪ Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.

▪ Ta có $f(x) = x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$ và $f(2) = \frac{11 - 4\sqrt{2}}{2}$

ALPHA) x^2 + $\frac{3}{x}$ - 2 \sqrt{x}) Math $\frac{11-4\sqrt{2}}{2}$

$x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$

$\frac{11-4\sqrt{2}}{2}$

▪ Tính đạo hàm của $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ tại 2 ta được $F'(2) = 2.6715... = \frac{11 - 4\sqrt{2}}{2}$

SHIFT $\frac{d}{dx}$ $\left(\frac{x^3}{3} + 3\ln(x) - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} \right)$) Math 2.671572875

$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} + 3\ln(x) - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} \right)$
2.671572875

▪ Vậy $F'(x) = f(x) = \frac{11 - 4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\ln(x)^3} \right) \Big|_{x=2}$$

0.4162773056

- Vậy $F'(x) = f(x) = 0.4162... \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3}$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow \mathbf{B}$ là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Theo công thức $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$ với $u = \ln x$

$$\Rightarrow \left(\ln x^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2} \cdot \ln x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right)' = \ln x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3} \right)' = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$$
- Vậy $\left(\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3} \right)' = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ hay $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3}$ là 1 nguyên hàm

Bài 7-[Báo Toán học tuổi trẻ T11 năm 2016] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x (1 - 2017e^{-2x})$ là :

A. $e^x + 2017e^{-x} + C$

B. $e^x - 2017e^{-x} + C$

C. $e^x + \frac{2017}{2}e^{-x} + C$

D. $e^x - \frac{2017}{2}e^{-x} + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x) = e^x (1 - 2017e^{-2x})$ và $f(2) = -265.5822...$

ALPHA $\times 10^x$ x^y ALPHA \rightarrow \rightarrow (1 - 2 0 1 7 ALPHA $\times 10^{-x}$ x^y - 2 ALPHA \rightarrow \rightarrow) CALC

$$e^x (1 - 2017e^{-2x})$$

-265.5822102

- Tính đạo hàm của $F(x) = e^x + 2017e^{-x}$ tại 2 ta được $F'(2) = -265.5822...$

SHIFT \int ALPHA $\times 10^x$ x^y ALPHA \rightarrow \rightarrow + 2 0 1 7 ALPHA $\times 10^x$ x^y - ALPHA \rightarrow \rightarrow 2 =

$$\frac{d}{dx} (e^x + 2017e^{-x}) \Big|_2$$

-265.5822102

- Vậy $F'(x) = f(x) = -265.5822... \Rightarrow F(x) = e^x + 2017e^{-x}$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow \mathbf{A}$ là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Biến đổi $e^x (1 - 2017e^{-2x}) = e^x - 2017e^{-x}$
- Theo công thức $(e^x)' = e^x$ và $(e^{-x})' = -e^{-x} \Rightarrow (2017e^{-x})' = -2017e^{-x}$

Vậy $(e^x + 2017e^{-x})' = e^x - 2017e^{-x}$ hay $F(x) = e^x + 2017e^{-x} = e^x (1 + 2017e^{-2x})$ là 1 nguyên hàm

Bài 8-[THPT Triệu Sơn – Thanh Hóa 2017] Họ nguyên hàm của $\int \frac{2x+3}{2x^2-x-1} dx$:

A. $\frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

B. $\frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

C. $\frac{2}{3}\ln|2x+1| - \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

D. $\frac{1}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.

- Ta có $f(x) = \frac{2x+3}{2x^2-x-1}$ và $f(2) = \frac{7}{5}$

$$\frac{2x+3}{2x^2-x-1}$$

$$\frac{7}{5}$$

- Tính đạo hàm của $F(x) = \frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1|$ tại 2 ta được $F'(2) = 1.4 = \frac{7}{5}$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} \ln(2x+1) + \frac{5}{3} \ln(x-1) \right)$$

$$1.4$$

- Vậy $F'(x) = f(x) = \frac{7}{5} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1|$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow B$ là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Vì mẫu số tách được thành nhân tử : $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$ nên ta sử dụng phương pháp hệ số bất định để tách phân số :

$$\frac{2x+3}{2x^2-x-1} = m \cdot \frac{1}{x-1} + n \cdot \frac{1}{2x+1} \Leftrightarrow 2x+3 = m(2x+1) + n(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 = (2m+n)x + m - n \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+n=2 \\ m-n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{5}{3} \\ n=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy ta tách được $\frac{2x+3}{2x^2-x-1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2x+1}$

- Theo công thức $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| \right)' = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2x+1}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} \text{ là 1 nguyên hàm.}$$