

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 1. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1) PHƯƠNG PHÁP

- **Bước 1:** Để tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền $[a; b]$ ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (Lập bảng giá trị)

- **Bước 2:** Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max, giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min

- **Chú ý:**

Ta thiết lập miền giá trị của biến x Start a End b Step $\frac{b-a}{19}$ (có thể làm tròn để

Step đẹp)

Khi đề bài liên có các yếu tố lượng giác $\sin x, \cos x, \tan x \dots$ ta chuyển máy tính về chế độ Radian

2) VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$

A. $\max = \frac{67}{27}$

B. $\max = 2$

C. $\max = 7$

D. $\max = 4$

Hướng dẫn giải

❖ Cách 1: CASIO

- Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập Start 1 End 3 Step $\frac{3-1}{19}$

MODE 7 ALPHA) x^n 3 ► - 2 ALPHA) x^2 - 4 ALPHA) + 1 = = 1 =
3 = (3 - 1) ÷ 1 9 =
Math
1
1 | 2 | 3 | F(X)
2 | 1.1052 | -4.514 |
3 | 1.2105 | -4.998 |

- Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(3) = 2$

Math
19 | 2.8947 | F(X)
20 | 2.8947 | -3.081 |
21 | 2.8947 | -2 |

Vậy $\max = 2$, dấu = đạt được khi $x = 3 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là B

❖ Cách tham khảo: Tự luận

- Tính đạo hàm $y' = 3x^2 - 4x - 4$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$
- Lập bảng biến thiên

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y'			0		
y		$f(1) = -4$		$f(3) = -2$	

- Nhìn bảng biến thiên ta kết luận $\max = f(3) = -2$

❖ Bình luận:

- Qua ví dụ 1 ta đã thấy ngay sức mạnh của máy tính Casio, việc tìm Max chỉ cần quan sát bảng giá trị là xong.
- Phương pháp tự luận tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số được tiến hành theo 3 bước:
 - + Bước 1: Tìm miền xác định của biến x .
 - + Bước 2: Tính đạo hàm và xác định khoảng đồng biến nghịch biến.
 - + Bước 3: Lập bảng biến thiên, nhìn vào bảng biến thiên để kết luận.
- Trong bài toán trên đề bài đã cho sẵn miền giá trị của biến x là $[1; 3]$ nên ta bỏ qua bước 1.

Ví dụ 2. [Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Hàm số $y = |3\cos x - 4\sin x + 8|$ với $x \in [0; 2\pi]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó tổng $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$

B. $7\sqrt{3}$

C. $8\sqrt{3}$

D. 16

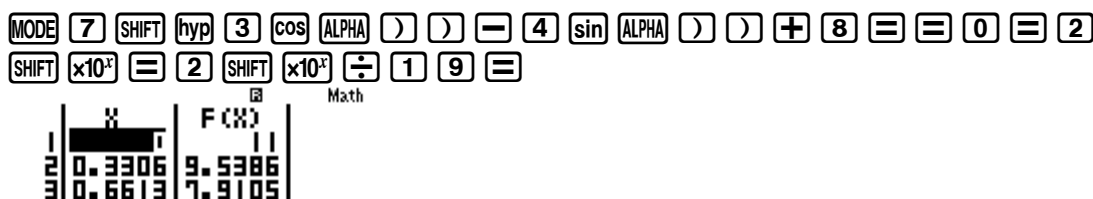
Hướng dẫn giải

❖ Cách 1: CASIO

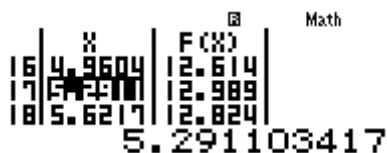
- Để tính toán các bài toán liên quan đến lượng giác ta chuyển máy tính về chế độ Radian

qw4

- Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập Start 0 End 2π Step $\frac{2\pi}{19}$



- Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(5.2911) = 12.989 \approx 13 = M$



Ta thấy giá trị nhỏ nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(2.314) = 3.0252 \approx 3 = m$

Vậy $M + m = 16 \Rightarrow$ Đáp số **D** là chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được :

$$(3 \cos x - 4 \sin x)^2 \leq (3^2 + (-4)^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 25$$

$$\Rightarrow |3 \cos x - 4 \sin x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 3 \cos x - 4 \sin x \leq 5 \Leftrightarrow 3 \leq 3 \cos x - 4 \sin x + 8 \leq 13$$

- Vậy $3 \leq |3 \cos x - 4 \sin x + 8| \leq 13$

❖ **Bình luận:**

- Nếu bài toán liên quan đến các đại lượng lượng giác ta nên chuyển máy tính về chế độ Radian để được kết quả chính xác nhất.

- Trong Bất đẳng thức Bunhiacopxki có dạng $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Dấu

= xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Ví dụ 3. [Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Cho các số x, y thỏa mãn điều kiện $y \leq 0, x^2 + x - y - 12 = 0$ Tìm giá trị nhỏ nhất : $P = xy + x + 2y + 17$

A. 12

B. 9

C. 15

D. 5

Hướng dẫn giải

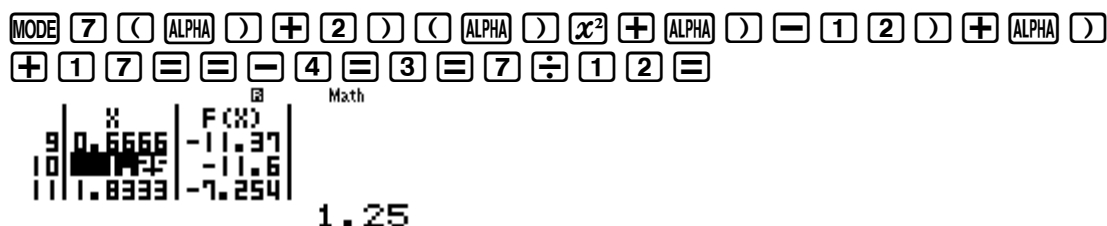
❖ **Cách 1: CASIO**

- Từ $x^2 + x - y - 12 = 0$ ta rút được $y = x^2 + x - 12$ Lấp vào P ta được :

$$P = (x + 2)(x^2 + x - 12) + x + 17$$

- Để tìm Min của P ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7, tuy nhiên việc còn thiếu của chúng ta là miền giá trị của x . Để tìm điều này ta xét $y \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 3$

Sử dụng MODE 7 với thiết lập Start -4 End 3 Start $\frac{7}{19}$ ta được:



Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất là $f(1.25) = 11.6 \approx 12$

Vậy đáp số chính xác là **A**

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Dùng phương pháp dồn biến đưa biểu thức P chứa 2 biến trở thành biểu thức P chứa 1 biến x

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

$$\Rightarrow P = (x+2)(x^2 + x - 12) + x + 17 = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$$

- Tìm miền giá trị của biến x ta có : $y \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 3$
- Khảo sát hàm $f(x)$ ta có : $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

$$\text{So sánh } f(1) = -12; f(-3) = 20; f(-4) = 13; f(3) = 20$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất } f(\max) = -12 \text{ đạt được khi } x = 1$$

❖ Bình luận:

- Một bài tìm Min max sử dụng phương pháp dồn biến hay. Việc tìm cận và tìm giá trị nhỏ nhất có sự đóng góp rất lớn của Casio để tiết kiệm thời gian.

Ví dụ 4. [Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2mx+1}{m-x}$ trên đoạn $[2;3]$ là $\frac{1}{3}$ khi m nhận giá trị bằng :

A. 5

B. 1

C. 0

D. 2

Hướng dẫn giải

❖ Cách 1: CASIO

- Ta hiểu nếu giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{1}{3}$ trên đoạn $[2;3]$ có nghĩa là phương trình $y + \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;3]$
- Thử nghiệm đáp án A với $m = 5$ ta thiết lập $\frac{10x+1}{5-x} + \frac{1}{3} = 0$. Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE

Ta thấy khi $y = \frac{1}{3}$ thì $x = -0.064...$ không phải là giá trị thuộc đoạn $[2;3]$ vậy đáp án A sai

- Tương tự như vậy ta thấy đáp án C đúng với $m = 0$ khi đó y có dạng $\frac{1}{x}$

Ta thấy khi $y = \frac{1}{3}$ khi $x = 3$ là giá trị thuộc đoạn $[2;3] \Rightarrow$ đáp án C chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Tính đạo hàm $y' = \frac{2m(m-x)(2mx+1)(-1)}{(m-x)^2} = \frac{2m^2+1}{(m-x)^2} > 0$ với mọi $x \in D$

\Rightarrow Hàm y luôn đồng biến

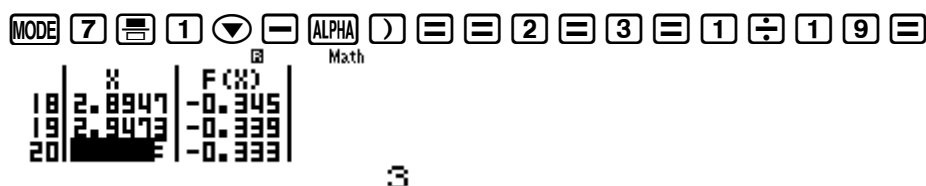
\Rightarrow Hàm y đạt giá trị lớn nhất tại cận trên $x=3$

- Vậy $y(3) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{6m+1}{m-3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow m=0$

❖ **Bình luận:**

- Ta có thể sử dụng máy tính Casio theo VD1 và VD2 với chức năng MODE 7

Ta thấy với phím ấn C hàm số $y = \frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất $\frac{1}{3}$ khi $x=3$



Ví dụ 5. [Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Cho hàm số $y = a \sin x + b \cos x + x$ ($0 < x < 2\pi$) đạt cực đại tại các điểm $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \pi$

. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b\sqrt{3}$

A. $T = 2\sqrt{3}$

B. $T = 3\sqrt{3} + 1$

C. $T = 2$

D. $T = 4$

Hướng dẫn giải

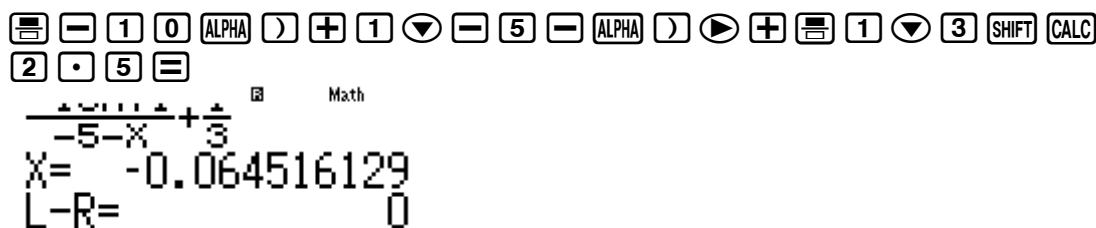
❖ **Cách 1: CASIO**

- Ta hiểu hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì x_0 là nghiệm của phương trình $y' = 0$
- Tính $y' = a \cos x - b \sin x + 1$.

Ta có $y'(\frac{\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\pi}{3} = 0$ (1)

Lại có $y'(\pi) = 0 \Leftrightarrow a + \pi = 0 \Rightarrow a = -\pi$. Thế vào (1) ta được

- SHIFT SOLVE



Ta thấy khi $y = \frac{1}{3}$ thì $x = 0.064...$ không phải là giá trị thuộc đoạn $[2;3]$ vậy đáp án A sai

- Tương tự như vậy ta thấy đáp án C đúng với $m=0$ khi đó y có dạng $\frac{1}{x}$



Math

30

A. $m = \frac{2}{6}$

B. $m = \frac{4}{5}$

C. $m = \frac{3}{4}$

D. $m = \frac{6}{7}$

Bài 5. [Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu – Nam Định lần 1 năm 2017]

Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 1|$ trên đoạn $[-2; 1]$ thì :

A. $M = 19; n = 1$

B. $M = 0; n = 19$

C. $M = 0; n = 19$

D. Kết quả khác

Bài 6. [Thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc lần 1 năm 2017]

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$ là :

A. $\min y = 0$

B. $\min y = 1$

C. $\min y = \sqrt{4} - 2\sqrt{2}$

D. Không tồn tại GTNN

Bài 7. [Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng :

A. 1.

B. 7

C. 1

D. 3

Bài 8. [Thi HK1 THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHSP năm 2017]

Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ trên đoạn $[0; 2]$. Giá trị của biểu thức $P = (m^2 - 4M)^{2016}$ là :

A. 0

B. e^{2016}

C. 1

D. 2^{2016}

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[1; 1]$.

Khi đó

A. $M = \frac{1}{e}; m = 0$

B. $M = e; m = 0$

C. $M = e, m = \frac{1}{e}$

D.

$M = e; m = 1$

Hướng dẫn giải

- Lập bảng giá trị cho $y = f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ với lệnh MODE 7 Start 1 End 1 Step $\frac{2}{19}$

MODE 7 ALPHA) x² ALPHA x10^x x² ALPHA) = = = 1 = 1 = 2 ÷ 1 9 =

X	F(X)
1	2.7182
2	1.9587
3	1.3725

- 1

X	F(X)
10	2.9183
11	2.6183
12	0.0212

0.05263157895

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

- Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M = 2.7182 = e$ đạt được khi $x = 1$ và $m = 2.6 \times 10^{-3} \approx 0$ Sử dụng Casio
 \Rightarrow Đáp số chính xác là **B**

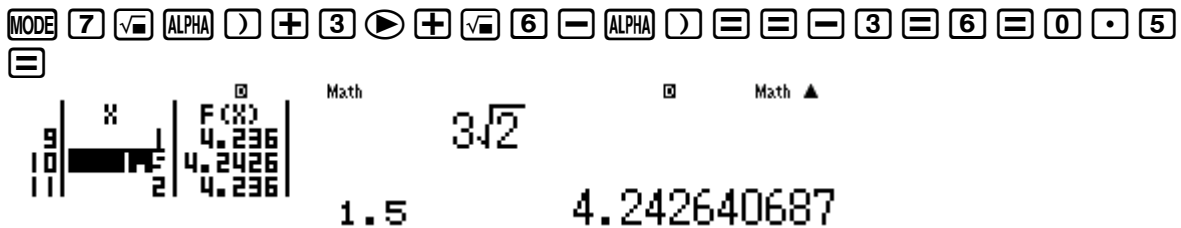
Bài 2. [Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$

- A. $M = 3$ B. $M = 3\sqrt{2}$ C. $M = 2\sqrt{3}$ D. $M = 2 + \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

- Theo điều kiện xác định thì $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$
- Lập bảng giá trị cho $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$ với lệnh MODE 7 Start 3 End 6 Step 0.5



- Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M = 4.2421 = 3\sqrt{2}$ đạt được khi $x = 1$ và $m = 2.6 \times 10^{-3} \approx 0$ Sử dụng Casio
 \Rightarrow Đáp số chính xác là **B**

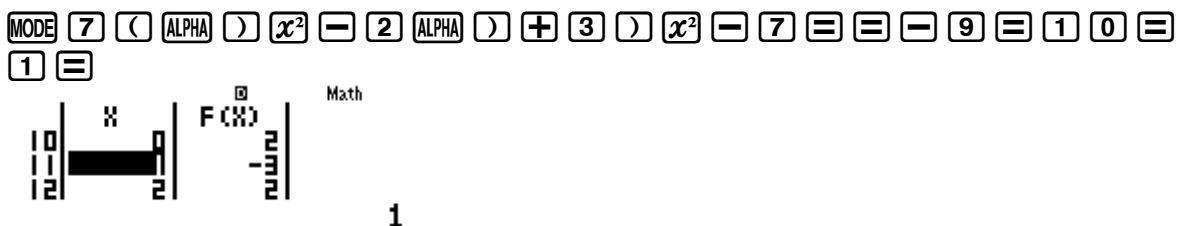
Bài 3. [Thi thử chuyên Vĩ Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 7$

- A. $\min y = 5$ B. $\min y = 7$
 C. $\min y = 3$ D. Không tồn tại min

Hướng dẫn giải

- Đề bài không nói gì đến miền giá trị của x . Khi đó ta chọn Start 9 End 10 Step 1
- Lập bảng giá trị cho $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 7$ với lệnh MODE 7



- Quan sát bảng giá trị thấy ngay $\min y = 3$ đạt được khi $x = 1$
 \Rightarrow Đáp số chính xác là **C**

Bài 4. [Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm m để hàm số $y = \frac{mx}{x+m} - 4$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên $[2;6]$

A. $m = \frac{2}{6}$

B. $m = \frac{4}{5}$

C. $m = \frac{3}{4}$

D. $m = \frac{6}{7}$

Hướng dẫn giải

- Thử với $m = \frac{2}{6}$ thì giá trị lớn nhất là 25 \Rightarrow A sai

MODE 7 2 ALPHA) ÷ 6 - 4 ▼ ALPHA) + 2 ÷ 6 = = - 2 = 6 =

0 . 5 =

Math

Y=

X

F(X)

6.5

25

-12

-0.5

- Tương tự như vậy với $m = 34$ thì giá trị lớn nhất là 5. \Rightarrow Đáp số C chính xác

MODE 7 3 4 ALPHA) - 4 ▼ ALPHA) + 3 4 = = - 2 = 6 = 0 .

5 =

Math

Y=

X

F(X)

4.2564

4.6329

5

6

Bài 5. [Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu – Nam Định lần 1 năm 2017]

Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 1|$ trên đoạn $[2;1]$ thì :

A. $M = 19; m = 1$

B. $M = 0; m = 19$

C. $M = 0; m = 19$

D. Kết quả khác

Hướng dẫn giải

- Hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối ta thêm lệnh SHIFT HYP. Sử dụng MODE 7 với Start -2 End 1 Step $\frac{3}{19}$

MODE 7 SHIFT hyp ALPHA) x^3 3 ► - 3 ALPHA) x^2 + 1 = = - 2 = 1 = 3

÷ 1 9 =

Math

Y=

X

F(X)

19

15.43

12.287

-2

Math

Y=

X

F(X)

0.0841

0.5302

0.6842105263

- Quan sát bảng giá trị thấy $M = 19; m = 0 \Rightarrow$ Đáp số C chính xác

Bài 6. [Thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc lần 1 năm 2017]

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$ là :

A. $\min y = 0$

B. $\min y = 1$

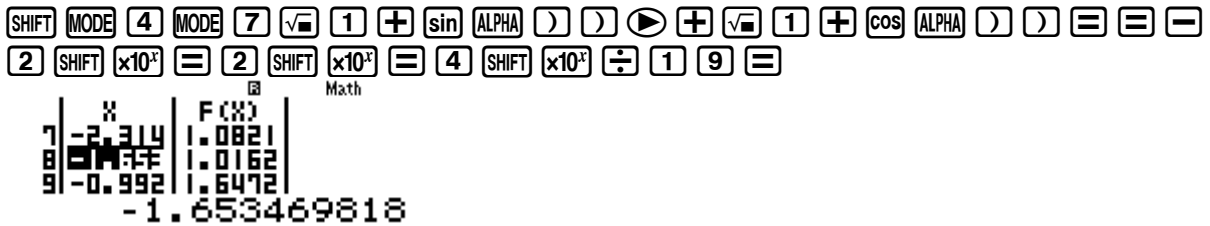
C. $\min y = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

D. Không tồn tại GTNN

Hướng dẫn giải

- Vì chu kỳ của hàm \sin, \cos là 2π nên ta chọn Start 2π End 2π Step $\frac{4\pi}{19}$

- Lập bảng giá trị cho $y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$ với lệnh MODE 7



Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M = 1.0162 \approx 1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 7. [Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng :

A. 1.

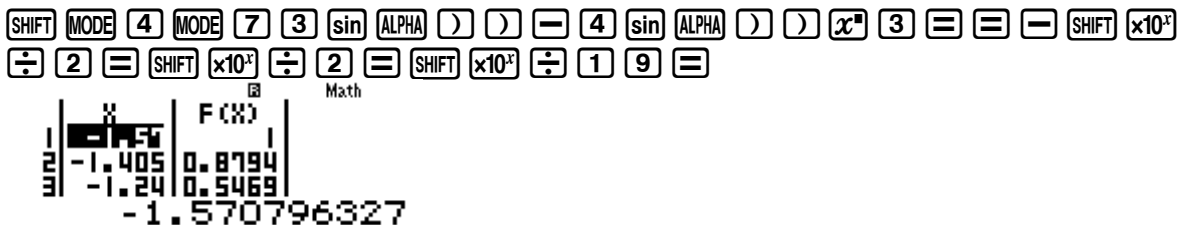
B. 7

C. 1

D. 3

Hướng dẫn giải

- Lập bảng giá trị cho $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ với lệnh MODE 7 Start $\frac{\pi}{2}$ End $\frac{\pi}{2}$ Step $\frac{\pi}{19}$



Quan sát bảng giá trị lớn nhất là 1 \Rightarrow Đáp số chính xác là **A**

Bài 8. [Thi HK1 THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHSP năm 2017]

Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ trên đoạn $[0; 2]$. Giá trị của biểu thức $P = (m^2 - 4M)^{2016}$ là :

A. 0

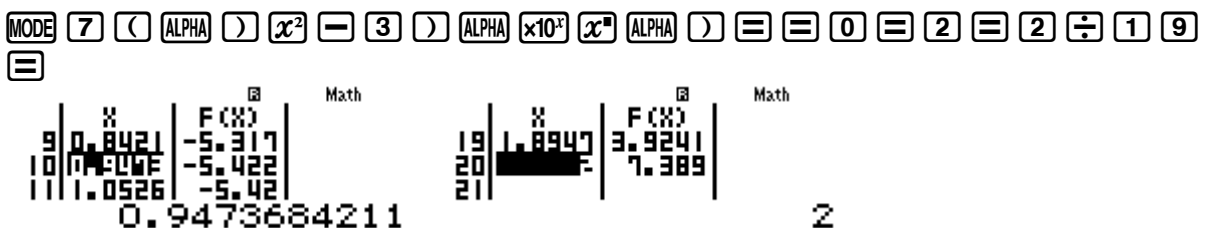
B. e^{2016}

C. 1

D. 2^{2016}

Hướng dẫn giải

- Lập bảng giá trị cho $y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$ với lệnh MODE 7 Start 0 End 2 Step $\frac{2}{19}$



PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

- Quan sát bảng giá trị ta thấy $m = 5.422$ và $M = 7.389$
 $\Rightarrow P = (m^2 - 4M)^{2016} = (-0.157916)^{2016} \approx 0$
 \Rightarrow Đáp số chính xác là **A**.