PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL BÀI 17. TÍNH NHANH BÀI TOÁN CÓ THAM SỐ MŨ – LOGARIT

1) PHƯƠNG PHÁP

- **Bước 1 :** Cô lập m đưa về dạng $m \ge g(x)$ hoặc $m \le g(x)$
- Bước 2: Đưa bài toán ban đều về bài toán giải phương trình, bất phương trình đã học.

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên KHTN lần 2 năm 2017]

Tìm tập hợp tất các các giá trị của m để phương trình $\log_2 x \log_2 (x + 2) = m$ có nghiệm :

A.
$$1 \le m < +\infty$$

B.
$$1 < m < +\infty$$

C.
$$0 \le m < +\infty$$

D.

 $0 < m < +\infty$

GIÅI

❖ Cách 1 : CASIO

- ightharpoonup Đặt $\log_2 x$ $\log_2 (x \ 2) = f(x)$ khi đó m = f(x) (1). Để phương trình (1) có nghiệm thì m thuộc miền giá trị của f(x) hay $f(\min) \le m \le f(\max)$
- Tới đây bài toán tìm tham số *m* được quy về bài toán tìm min, max của một hàm số. Ta sử dụng chức năng Mode với miền giá trị của *x* là Start 2 End 10 Step 0.5



9.5 0.341

P Quan sát bảng giá trị F(X) ta thấy $f(10) \approx 0.3219$ vậy đáp số $\bf A$ và $\bf B$ sai. Đồng thời khi x càng tăng vậy thì F(X) càng giảm. Vậy câu hỏi đặt ra là F(X) có giảm được về 0 hay không.

Ta tư duy nếu F(X) giảm được về 0 có nghĩa là phương trình f(x) = 0 có nghiệm.

Để kiểm tra dự đoán này ta sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE

[AC] :Cancel
[4][#]:Goto

Máy tính Casio báo phương trình này không có nghiệm. Vậy dấu 🖃 không xảy ra

- From lại $f(x) > 0 \iff m > 0$ và **D** là đáp án chính xác
- ❖ Cách tham khảo: Tự luận
- Điều kiện : x > 2
- Phương trình $\Leftrightarrow m = \log_2\left(\frac{x}{x-2}\right) \Leftrightarrow m = \log_2\left(1 + \frac{2}{x-2}\right)$
- Vì x > 2 nên x $2 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{2}{x + 2} > 1 \Rightarrow \log_2\left(1 + \frac{2}{x + 2}\right) > \log_2 1 = 0$ Vậy $m = \log\left(1 + \frac{2}{x + 2}\right) > 0$

❖ Bình luận:

- Một bài toán mẫu mực của dạng tìm tham số m ta giải bằng cách kết hợp chức năng lập bảng giá trị MODE 7 và chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE một cách khéo léo
- Chú ý : m = f(x) mà f(x) > 0 vậy m > 0 một tính chất bắc cầu hay và thường xuyên gặp

VD2-[Thi thử chuyên KHTN lần 2 năm 2017]

Tìm tham số m để phương trình $\ln x = mx^4$ có đúng một nghiệm :

A.
$$m = \frac{1}{4e}$$

B.
$$m = \frac{1}{4e^4}$$

C.
$$\frac{e^4}{4}$$

D.
$$\frac{4}{\sqrt[4]{e}}$$

GIÅI

❖ Cách 1: CASIO

$$ightharpoonup$$
 Cô lập $m = \frac{\ln x}{x^4} = f(x) \ (m > 0)$

Tới đây bài toán tìm m trở thành bài toán sự tương giao của 2 đồ thị. Để phương trình ban đầu có đúng 1 nghiệm thì hai đồ thị $y = \frac{\ln x}{x^4}$ và y = m có đúng 1 giao điểm.

Dể khảo sát sự biến thiên của hàm $y = \frac{\ln x}{x^4}$ ta sử dụng chức năng MODE với thiết lập Start 0 End 5 Step 0.3



1.5

Quan sát sự biến thiên của F(X) ta thấy $f(0.3)\approx 148.6$ tăng dần tới $F(1.2)\approx 0.0875$ rồi giảm xuống $F(5)\approx 2,9.10^{-3}\approx 0$

Ta thấy f cực đại ≈ 0.875 . Để hai đồ thị $y = \frac{\ln x}{x^4}$ và y = m có đúng 1 giao điểm thì đường thẳng y = m tiếp xúc với đường cong $y = \frac{\ln x}{x^4}$ tại điểm cực đại

$$\Rightarrow m \approx 0.875 \approx \frac{1}{4e}$$

Vậy đáp án A là đáp án chính xác

* Cách tham khảo: Tự luận

• Diều kiện : x > 2

• Phương trình
$$\Leftrightarrow m = \log_2\left(\frac{x}{x-2}\right) \Leftrightarrow m = \log_2\left(1 + \frac{2}{x-2}\right)$$

Vì
$$x > 2$$
 nên $x = 2 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{2}{x - 2} > 1 \Rightarrow \log_2\left(1 + \frac{2}{x - 2}\right) > \log_2 1 = 0$
Vậy $m = \log\left(1 + \frac{2}{x - 2}\right) > 0$

❖ Bình luận:

• Một bài toán mẫu mực của dạng tìm tham số *m* ta giải bằng cách kết hợp chức năng lập bảng giá trị MODE 7 và chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE một cách khéo léo

Chú ý : m = f(x) mà f(x) > 0 vậy m > 0 một tính chất bắc cầu hay và thường xuyên gặp VD3-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017] Tìm m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng (0;1) ? C. $0 < m \le \frac{1}{4}$ **D**. $m \leq \frac{1}{4}$ **A.** $1 \le m \le \frac{1}{4}$ **B.** $m < \frac{1}{4}$ GIÅI ❖ Cách 1 : CASIO Đặt $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_{\frac{1}{2}} x = f(x)$ khi đó m = f(x) (1). Để phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng (0,1) thì m thuộc miền giá trị của f(x) hay $f(\min) \le m \le f(\max)$ khi x chạy trên khoảng (0,1) Bài toán tìm tham số m lai được quy về bài toán tìm min, max của một hàm số. Ta sử dụng chức năng Mode với miền giá trị của x là Start 0 End 1 Step 0.1 $7 - 4 \times 0.0 2 \times 1.0 \times$ Quan sát bảng giá trị F(X) ta thấy $F(X) \le f(0.7) \approx 0.2497 \approx \frac{1}{4}$ vậy đáp án đúng chỉ có thể là B hoặc D Tuy nhiên vấn đề là $m = \frac{1}{4}$ có nhận hay không. Nếu nhận thì đáp số D là đúng, nếu không nhận thì đáp số B là đúng. Để kiểm tra tính chất này ta thế $m = \frac{1}{4}$ vào phương tình $4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 \quad \log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{4} = 0$ rồi dùng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để xem có nghiệm x thuộc khoảng (0;1) không là xong. X= 0.7071066456 |-R= 0 Máy tính Casio báo có nghiệm x = 0.7071... thuộc khoảng (0;1). Vậy dấu \blacksquare có xảy

Cách tham khảo: Tự luận

Tóm lại $m \le \frac{1}{4}$ và **D** là đáp án chính xác

ra

- Điều kiện : x > 0
- Ta có $m = 4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_{\frac{1}{2}} x = 4(\frac{1}{2}\log_2 x)^2 \quad \log_2 x = (\log_2 x)^2 \quad \log_2 x$ Vây $m = \frac{1}{4} \left(\log_2 x + \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

Dấu = xảy ra
$$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

❖ Bình luận:

• Để xem dấu = xảy ra hay không thì ta sẽ thử cho dấu = xảy ra và sử dụng chức năng dò nghiệm. Nếu xuất hiện nghiệm thỏa mãn yêu cầu đề bài thì dấu = xảy ra.

VD4-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\log_{\frac{1}{2}}|x|$ 2 $\log_{\frac{2}{3}}(x+1)=m$ có 3 nghiệm

phân biệt ?

A. m > 3

 \mathbf{B} . m < 2

C. m > 0

D. m = 2

GIÁI

❖ Cách 1: CASIO

► Đặt $\log_{\frac{1}{2}} |x \ 2| \log_{\frac{2}{3}} (x+1) = f(x)$ khi đó m = f(x) (1).

Bài toán tìm tham số m trở lại bài toán sự tương giao của 2 đồ thị. Để phương trình ban đầu có 3 nghiệm thì đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số y = f(x) tại 3 điểm phân biệt

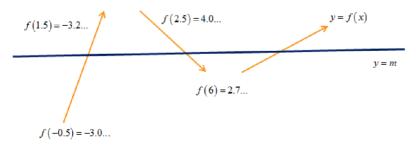
- Ta có y = m là đường thẳng song song với trục hoành
- ightharpoonup Để khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số y = f(x) ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị TABLE với thiết lập Start 1 End 8 Step 0.5

MODE 7 [09.] = 1 ▼ 2 ▶ SHFT [hyp ALPHA) - 2 ▶ → [09.] = 2 ▼
3 ▶ ALPHA) + 1 = - 1 = 8 = 0 • 5 =

| X - | F(X) |

| Kath | F(X) |

Quan sát bảng giá trị ta mô tả được sự biến thiên của hàm f(x) như sau



- ▶ Rỗ ràng m < 2 thì 2 đồ thị trên cắt nhau tại 1 điểm ⇒ Đáp số **B** sai m = 2 cũng cắt nhau tại 1 điểm ⇒ Đáp án **C** và **D** cùng sai Vậy đáp số chính xác là **A**
- ❖ Bình luận:

 Bài toán thể hiện được sức mạnh của máy tính Casio đặc biệt trong việc khảo sát các hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối. Cách tự luận rất rắc rối vì phải chia làm nhiều khoảng để khảo sát sự biến thiên nên tác giả không đề cập.

VD5-[Thi HK1 THPT Chu Văn An -HN năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình 9^x $3^{x+2} + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu

A.
$$m < 0$$

B.
$$0 < m < 8$$

C.
$$m \in \left(0; \frac{81}{4}\right)$$

D. Không

tồn tai m

GIÅI

* Cách 1: CASIO

ightharpoonup Cô lập $m = 9^x + 3^{x+2}$

Đặt $9^x + 3^{x+2} = f(x)$ khi đó m = f(x) (1). Bài toán quy về dạng tương giao của 2 đồ thi.

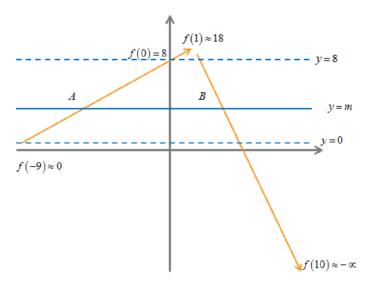
Để khảo sát sự biến thiên của hàm số y = f(x) và đường đi của đồ thị ta sử dụng chức năng lập bảng giá tri MODE 7 với thiết lập Start -9 End 10 Step 1.





- 1

P Quan sát bảng giá trị ta mô tả đường đi của đồ thị hàm y = f(x) như sau :



Nhìn sơ đồ ta thấy để đường thẳng y = m cắt đồ thị y = f(x) tại 2 điểm A và B có hoành độ trái dấu thì 0 < m < 8

 \Rightarrow C là đáp án chính xác

- ❖ Cách tham khảo: Tự luận
- Đặt $3^x = t (t > 0)$. Phương trình $\Leftrightarrow f(t) = t^2$ 9t + m = 0 (1)
- Khi x > 0 thì $t > 3^0 = 1$. Khi x < 0 thì t < 1. Vậy để phương trình ban đầu có 2 nghiệm trái dấu thì phương trình (1) có 2 nghiệm dương thỏa mãn $t_1 < 1 < t_2$

$$\begin{cases}
\Delta > 0 & \{81 \quad 4m > 0\} \\
S > 0 & \{9 > 0\} \\
P > 0 & \{m > 0\} \\
af(1) < 0 & \{1.(m \quad 8) < 0\}
\end{cases}$$

Dấu = xảy ra
$$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

❖ Bình luận:

- Hai giao điểm có hoành độ trái dấu thì phải nằm về 2 phía của trục tung
- Đáp án A sai vì 2 đồ thị chỉ cắt nhau tại 1 điểm nằm ở bên phải trục tung
- Nếu 18 > m > 8 thì 2 đồ thị cắt nhau tại 2 điểm đều nằm bên phải trục tung vậy đáp án C sai.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A.
$$m = 3$$

B.
$$m > 2$$

C.
$$2 \le m \le 3$$

2 < m < 3

<u>Bài 2</u>-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}$ $(m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm ?

Bài 3-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Tập giá trị của tham số m để phương trình 5.16^x $2.81^x = m.36^x$ có đúng 1 nghiệm?

A.
$$m > 0$$

$$\mathbf{B}. \frac{\int_{m \le \sqrt{2}} \sqrt{2}}{m \ge \sqrt{2}}$$

$${\bf C}$$
. Với mọi m

tồn tại *m*

Bài 4-[Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]

Phương trình $\log_3 x - \log_3 (x-2) = \log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

A.
$$m > 1$$

B.
$$m < 0$$

C.
$$0 < m \le 1$$

D.
$$m \le 1$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình 4^{x^2} $2^{x^2+2}+6=m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A.
$$m = 3$$

B.
$$m > 2$$

C.
$$2 \le m \le 3$$

2 < m < 3

GIÅI

Cách 1: CASIO

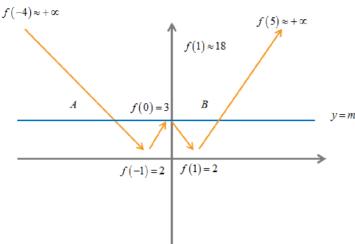
- Đặt $f(x) = 4^{x^2}$ $2^{x^2+2} + 6$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số y = f(x) với thiết lập Start 4 End
 5 Step 0.5

MODE 7 4 x^* ALPHA) x^2 \longrightarrow 2 x^* ALPHA) x^2 + 2 \bigcirc + 6 = = 4 = 5 = 0 \bigcirc 5 =



- 1

Quan sát bảng biến thiên ta vẽ đường đi của hàm số



Rõ ràng y = 3 cắt đồ thị hàm số y = f(x) tại 3 điểm phân biệt vậy đáp án A là chính xác

❖ Cách tham khảo: Tự luận

- Đặt $2^{x^2} = t$ khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow t^2$ 4t + 6 m = 0 (1)
- Ta để ý tính chất sau : Nếu t = 1 thì x = 0 còn nếu t > 0;t ≠ 1 thì x = ±√log₂t . Vậy để phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt thì (1) có 2 nghiệm trong đó có 1 nghiệm t = 0 và 1 nghiệm t > 0
- Với $t = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 3$ $m = 0 \Leftrightarrow m = 3$

Bài 2-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}$ $(m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m + 1 = 0$ có nghiệm ?

A. 20

B. 35

C. 30

D. 25

GIÅI

❖ Cách 1: CASIO

- Cô lập m ta được $m = \frac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}} \frac{2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}}{2} + 1$
- Đặt $f(x) = \frac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}} \frac{2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{2}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số y = f(x) với thiết lập Start 1 End 1 Step 2



- 1

• Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x) \le f(0) = 25.043...$ hay $m \le f(0)$ vậy m nguyên dương lớn nhất là $25 \Rightarrow D$ là đáp án chính xác

* Cách tham khảo: Tự luận

- Điều kiện 1 $x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 1$. Ta có 1 $x^2 \le 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1 + x^2} \le 2$ Đặt $5^{1+\sqrt{1+x^2}} = t \Rightarrow 5^1 \le t \le 5^2 \Leftrightarrow 5 \le t \le 25$
- Phương trình ban đầu trở thành t^2 $(m+2)t+2m+1=0 \Leftrightarrow m=\frac{t^2-2t+1}{t-2}=f(t)$ Vậy $m \le f(\max)$
- Khảo sát sự biến thiên của hàm f(x) trên miền (5;25) ta được $f(\max) = f(25) = 25.043$ Vậy m nguyên dương lớn nhất là 25

Bài 3-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Tập giá trị của tham số m để phương trình 5.16^x $2.81^x = m.36^x$ có đúng 1 nghiệm ?

A.
$$m > 0$$

$$\mathbf{B}. \int_{m \leq \sqrt{2}}^{m \leq \sqrt{2}}$$

C. Với mọi m

D. Không

tồn tai m

GIÅI

* Cách 1: CASIO

- Cô lập m ta được $m = \frac{5.16^x 2.81^x}{36^x}$
- Đặt $f(x) = \frac{5.16^x 2.81^x}{36^x}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số y = f(x) với thiết lập Start 9 End 10 Step 1



Quan sát bảng biến thiên ta thấy f(x) luôn giảm hay hàm số y = f(x) luôn nghịch biến. Điều này có nghĩa là đường thẳng y = m luôn cắt đồ thị hàm số y = f(x) tại 1 điểm \Rightarrow \mathbf{C} chính xác

Cách tham khảo: Tự luận

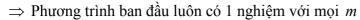
Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow 5.16^x$ $m.36^x$ $2.81^x = 0$ (1) Chia cả 2 vế của (1) cho 81^x ta được:

$$5.\left(\frac{16}{81}\right)^{x} m.\left(\frac{36}{81}\right)^{x} 2 = 0 \Leftrightarrow 5\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} m\left(\frac{4}{9}\right)^{x} 2 = 0 (2)$$

$$\operatorname{Dat}\left(\frac{4}{9}\right)^{x} = t \quad (t > 0) \quad (2) \Leftrightarrow 5t^{2} \quad mt \quad 2 = 0 \quad (3)$$

Phương trình (3) có 5.(2) = 10 < 0 tức là (3) luôn có 2 nghiệm trái dấu

 \Rightarrow (3) luôn có 1 nghiệm dương 1 nghiệm âm



Bài 4-[Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]

Phương trình $\log_3 x \log_3 (x 2) = \log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

A. m > 1

 $\mathbf{B} \quad m < 0$

C. $0 < m \le 1$

 \mathbf{D} . $m \leq 1$

GIÅI

Cách 1: CASIO

■ Điều kiện : x > 2. Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{x-2}\right) = 2\log_3 m \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{x}{x-2}\right) = \log_3 m$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \log_3 m \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

Để phương trình ban đầu vô nghiệm thì đường thẳng y = m không cắt đồ thị hàm số

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x}{x - 2}}$$

Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số y = f(x) với thiết lập Start 2 End 10 Step 0.5



2

• Để khảo sát chính xác hơn ta tính giới hạn của hàm f(x) khi x tiến tới 2 cận là 2 và $+\infty$

$$\sqrt{\frac{X}{X-2}}$$

1.0000000001

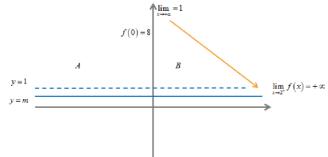
 $V_{ay} \lim_{x \to +\infty} = 1$

$$\sqrt{\frac{X}{X-2}}$$

4472.136067

$$V_{ay} \lim_{x \to 2^{+}} f(x) = +\infty$$

• Quan sát bảng giá trị và 2 giới hạn ta vẽ đường đi cả đồ thị hàm số y = f(x) và sự tương giao



Ta thấy ngay $m \le 1$ thì 2 đồ thị không cắt nhau hay phương trình ban đầu vô nghiệm