

BÀI 5. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Quy ước tính giới hạn vô định :

- $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x = 10^9$
- $x \rightarrow -\infty \Rightarrow x = -10^9$
- $x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow x = x_0 + 10^{-6}$
- $x \rightarrow x_0^- \Rightarrow x = x_0 - 10^{-6}$
- $x \rightarrow x_0 \Rightarrow x = x_0 + 10^{-6}$

2. Giới hạn hàm lượng giác : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

3. Giới hạn hàm siêu việt : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

4. Lệnh Casio : **ALPHA**

2) VÍ DỤ MINH HỌA

Bài 1-[Thi thử THPT chuyên Ngữ lần 1 năm 2017] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{x+4} - 2}$ bằng :

A. 1

B. 8

C. 2

D. 4

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Vì $x \rightarrow 0 \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$ Sử dụng máy tính Casio với chức năng CALC

ALPHA **x10^x** **x^y** **2** **ALPHA** **)** **►** **-** **1** **▼** **√** **ALPHA** **)** **+** **4** **►** **-** **2** **CALC** **0** **+**

1 **0** **x^y** **-** **6** **)** **=**

Math ▲

$$\frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{x+4} - 2} = \frac{1000001}{125000}$$

➤ Ta nhận được kết quả $\frac{1000001}{125000} \approx 8$

\Rightarrow **B** là đáp án chính xác

Chú ý : Vì chúng ta sử dụng thủ thuật để tính giới hạn , nên kết quả máy tính đưa ra chỉ xấp xỉ đáp án , nên cần chọn đáp án gần nhất.

Bài 2-[Thi thử chuyên Amsterdam lần 1 năm 2017] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ bằng :

A. 1

B. 1

C. 0

D. $+\infty$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Vì $x \rightarrow 0 \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$ Sử dụng máy tính Casio với chức năng CALC

CALC **ALPHA** **x10^x** **x^y** **sin** **ALPHA** **)** **)** **►** **-** **1** **▼** **ALPHA** **)** **CALC** **0** **+** **1** **0** **x^y**

- **6** **)** **=**

$$\frac{e^{\sin(X)} - 1}{X}$$

$$1.00000049$$

- Ta nhận được kết quả $1.00000049 \approx 1$
 \Rightarrow A là đáp án chính xác

Bài 3: Tính giới hạn : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7}$

A. $\frac{1}{3}$

B. 1

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Đề bài không cho x tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số và $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{X^3 + 4X - 5}{3X^3 + X^2 + 7}$$

$$0.333333332$$

- Ta nhận được kết quả $0.333333332 \approx \frac{1}{3}$
 \Rightarrow A là đáp án chính xác

Bài 4: Kết quả giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 5^{n+2}}{3^n + 2 \cdot 5^n}$ là :

A. $\frac{25}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. 1

D. $\frac{5}{2}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Đề bài không cho x tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số và $x \rightarrow +\infty$. Tuy nhiên chúng ta chú ý, bài này liên quan đến lũy thừa (số mũ) mà máy tính chỉ tính được số mũ tối đa là 100 nên ta chọn $x = 100$

$$\frac{2 - 5X + 2}{3X + 2 \times 5X}$$

$$-\frac{25}{2}$$

- Ta nhận được kết quả $\frac{25}{2}$

\Rightarrow A là đáp án chính xác

Chú ý : Nếu bạn nào không hiểu tính chất này của máy tính Casio mà cố tình cho $x = 10^9$ thì máy tính sẽ báo lỗi

$$\text{CALC } 10^9 \text{ ERROR}$$

Math ERROR
[AC] : Cancel
[◀][▶]: Goto

Bài 5: Tính giới hạn : $\lim \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta không thể nhập vào máy tính Casio cả biểu thức n số hạng ở trong ngoặc được, vì vậy ta phải tiến hành rút gọn.

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{2}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)}$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

- Đề bài không cho x tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số và $x \rightarrow +\infty$

$$2 - \frac{1}{x+1}$$

1.999999999

- Ta nhận được kết quả $1.999999999 \approx 2$
 \Rightarrow C là đáp án chính xác

Bài 6: Cho $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots + \frac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{3^n}$. Giá trị của S bằng :

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta hiểu giá trị của S bằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} S$

- Ta quan sát dãy số là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{3}$ và $u_1 = \frac{1}{3}$

$$\text{Vậy } S = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - (\frac{1}{3})}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{4}$$

➤ Ta nhận được kết quả $\frac{1}{4}$

⇒ **B** là đáp án chính xác

Chú ý : Trong tự luận ta có thể sử dụng công thức của cấp số nhân lùi vô hạn để tính

Bài 7: Tính giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{x}}{5x - \sqrt{x}}$

- A. $+\infty$ B. $\frac{2}{5}$ C. ∞ D. 1

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Đề bài cho $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$

$$\frac{2x + \sqrt{x}}{5x - \sqrt{x}} = -\frac{1002}{995}$$

➤ Ta nhận được kết quả $\frac{1002}{999} \approx 1$

⇒ **D** là đáp án chính xác

Bài 8: Tính giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1 - x^3}{3x^2 + x}}$

- A. ∞ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. 0 D. 1

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Đề bài cho $x \rightarrow 1 \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$

$$\sqrt{\frac{1 - x^3}{3x^2 + x}} = 8.660257287 \times 10^{-4}$$

❖ Ta nhận được kết quả chứa $10^{-4} \approx 0$

⇒ **C** là đáp án chính xác

Bài 9: Tính giới hạn : $L = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\cot x}$

- A. $L = \infty$ B. $L = 1$ C. $L = e$ D. $L = e^2$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Đề bài cho $x \rightarrow 0 \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$. Phím cot không có ta sẽ nhập phím tan



$(\cos(X) + \sin(X))^{-1}$
2.718279083

- ❖ Ta nhận được kết quả chứa $2.718... \approx e$
 $\Rightarrow C$ là đáp án chính xác.