PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL BÀI 27. TÍNH NHANH THỂ TÍCH CHÓP, DIỆN TÍCH TAM GIÁC

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Úng dụng tích có hướng tính diện tích tam giác

- Cho tam giác ABC có diện tích tam giác ABC tính theo công thức $S = \frac{1}{2} \left[A\vec{B}; A\vec{C} \right]$
- Úng dụng tính chiều cao AH của tam giác ABC: $AH = \frac{2.S_{ABC}}{BC} = \frac{\left[A\vec{B}; A\vec{C}\right]}{\left|B\vec{C}\right|}$

2. Ứng dụng tích có hướng tính thể tích hình chóp

- Thể tích hình chóp ABCD được tính theo công thức $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| A\vec{E} \left[A\vec{C}; A\vec{D} \right] \right|$
- Úng dụng tính chiều cao AH của hình chóp ABCD: $AH = \frac{3 V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{\left| \overrightarrow{AB} \left[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD} \right] \right|}{\left\| \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD} \right\|}$

3. Lệnh Caso

- Lênh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

<u>VD1</u>-[Câu 41 đề minh họa vào ĐHQG HNnăm 2016]

Cho 4 điểm A(1;0;1), B(2;2;2), C(5;2;1), (4;3;2). Tính thể tích tứ diện ABCD

A.6 **B.**12 **C.**4**D**. 2

GIÅI

Nhập thông số ba vecto \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} vào máy tính Casio

$$2 - 0 = 1 - 1 = 10000 = 1000 = 1000 = 1000 = 1000 = 10000 = 10000 = 10000 = 10000 =$$

-3

ightharpoonup Áp dụng công thức tính thể tích $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| A\vec{B} \left[A\vec{C}; A\vec{D} \right] \right| = 4$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 \times SHIFT 5 5)) \div 6 \equiv

Abs(VctA•(VctB×⊳

4

⇒ Đáp số chính xác là C

VD2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho A(2;1;1), B(3;0;1), C(2;1;3). Điểm D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện ABCD bằng 5. Toa đô của D là:

A.
$$(0; 7; 0)$$
 B. $(0; 7; 0)$ **C**. $(0; 8; 0)$ **D**. $(0; 7; 0)$ **D**. $(0; 7; 0)$

- Ta có: $V = \frac{1}{6} |A\vec{D}[A\vec{B}; A\vec{C}]| = 5 \Leftrightarrow A\vec{D}[A\vec{B}; A\vec{C}] = \pm 30$
- Tính $\begin{bmatrix} A\vec{B}; A\vec{C} \end{bmatrix}$ bằng Casio ta được $\begin{bmatrix} A\vec{B}; A\vec{C} \end{bmatrix} = (0; 4; 2)$

SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =



Điểm D nằm trên Oy nên có tọa độ $D(0; y; 0) \Rightarrow A\vec{D}(2; y 1; 1)$

Nếu $A\vec{D} \left[A\vec{B}; A\vec{C} \right] = 30$

 $\boxed{MODE} \ 1 \ 0 \ \times (-2) - 4(APHA) - 1) - 2 \times 1 - 3 \ 0$

SHIFT CALC 1 =

$$0 \times (-2) - 4(X-1) - 2$$

 $X = -7$
 $L-R = 0$

Ta thu được $y = 7 \Rightarrow D(0; 7;0)$

Nếu $A\vec{D} \left[A\vec{B}; A\vec{C} \right] = 30$

O DEL + SHIFT CALC 1 =

$$0 \times (-2) - 4(X-1) - 2 \times X = 8$$
L-R= 0

Ta thu được $y = 8 \Rightarrow D(0;8;0)$

⇒ Đáp số chính xác là **B**

<u>VD3</u>-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho A(1,2,0), B(3,1,1), C(1,1,1). Tính diện tích Scủa tam giác ABC

A.
$$S = \sqrt{3}$$
 B. $S = \sqrt{2}$ **C**. $S = \frac{1}{2}$ **D**. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ $S = 1$

GIÅI

Nhập 2 vecto \vec{AB} , \vec{AC} vào máy tính Casio

Diện tích tam giác ABC được tính theo công thức: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left[A\vec{B}; A\vec{C} \right] = 1.732... = \sqrt{3}$

1

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 \times SHIFT 5 4) \div 2 \equiv

Abs(VctAxVctB)÷2

1.732050808

⇒ Đáp số chính xác là **A**

VD4-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Cho hai điểm A(1,2,0), B(4,1,1). Độ dài đường cao OH của tam giác OAB là:

$$\mathbf{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}}$$

B.
$$\sqrt{\frac{86}{19}}$$

B.
$$\sqrt{\frac{86}{19}}$$
 C. $\sqrt{\frac{19}{86}}$

D.
$$\sqrt{\frac{54}{11}}$$

Tính diện tích tam giác ABC theo công thức $S_{OAB} = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB} \right]$

SHIFT 5 3 **X** SHIFT 5 4) **÷** 2 **≡**

Abs(VctA×VctB)÷2

3.674234614

Vì giá trị diện tích này lẻ nên ta lưu vào biến A cho dễ nhìn SHFT RCL (-)

Ans∍A

3.674234614

- Gọi h là chiều cao hạ từ O đến đáy AB ta có công thức $S_{OAB} = \frac{1}{2}h.AB \Leftrightarrow h = \frac{2S}{AB}$
- Tính độ dài cạnh AB = |AB|

MODE 8 1 1 3 = - 1 = 1 = 0N SHIFT hyp SHIFT 5 3) =

Abs(VctA)

3.31662479

Giá trị này lẻ ta lại lưu vào biến B

SHIFT RCL 999

Ans∍R

3.31662479

$$\Rightarrow h = \frac{2A}{B} = 2.2156... =$$

2 (ALPHA) (-) : (ALPHA) • • • • =

VCT**©**

Vα**τ⊚**

2A÷B

2.215646838

⇒ Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho tứ diện ABCD có

A(2;3;1), B(4;1; 2), C(6;3;7), D(5; 4;8). Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là:

A.11**B**.
$$\frac{45}{7}$$
 C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D**. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

GIÅI

Ta tính được thể tích cả tứ diện *ABCD* theo công thức $V = \frac{1}{6} |A\vec{E}[A\vec{C}; A\vec{D}]| = \frac{154}{3}$

MODE 8 1 1 2 = - 2 = - 3 = MODE 8 2 1 4 = 0 = 6 =

MODE 831-7=7=7=0N SHIFT (hyp) SHIFT 53

SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)) ÷ 6 =

Abs(VctA•(VctB×⊳

51.33333333

- For including high part of the property of th
- Finh S_{ABC} theo công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left[A\vec{B}; A\vec{C} \right] = 14$

SHIFT (hyp) SHIFT 5 3 \times (SHIFT 5 4) \div 2 =

Abs(VctA×VctB)÷2

14

Khi đó
$$h = \frac{154}{14} = 11$$

⇒ Đáp số chính xác là A

<u>VD6</u>-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho A(1;5;0), B(3;3;6) và $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$. Điểm M thuộc d để tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất có tọa độ là :

A. M(1;1;0) **B**. M(3;1;4) **C**. M(3;2;2) **D**. M(1;0;2)

Diện tích tam giác ABM được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{2} \left[A\vec{B}; A\vec{M} \right] \Leftrightarrow 2S = \left[A\vec{B}; A\vec{M} \right]$$

Với M(1;1;0) ta có 2S = 29.3938...

SHIFT (5) (3) (X) SHIFT (5) (4) () (=)

Abs(VctA×VctB)

29, 39387691

Với M(3; 1; 4) ta có 2S = 29.3938...

> MODE 8212 = 6 = 4 = 00 SHFT byp SHFT 53×0 SHFT 54) = 0Abs(VctA×VctB)

> > 29.39387691

Với M(3;2;2) ta có 2S = 32.8633...

MODE 8 2 1 - 4 = - 3 = - 2 = ON SHIFT (hyp) SHIFT 5 3

X SHIFT (5) (4) () (=)

Abs(VctA×̈VctB)

32.86335345

Với M(1,0,2) ta có 2S = 28.1424...

MODE 8 2 1 0 = - 5 = 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT hyp 4

DEL DEL SHIFT 5 4) =

Abs(VctAxVctB)

28.14249456

So sánh 4 đáp số \Rightarrow Đáp án chính xác là C

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 1 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho A(2; 1;6), B(3; 1; 4), C(5; 1;0), D(1;2;1). Thể tích tứ diện ABCD bằng:

A. 30 **B**. 40 **C**. 50 **D**. 60

Bài 2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho bốn điểm A(a; 1; 6), B(3; 1; 4), C(5; 1; 0), D(1; 2; 1) và thể tích của tứ diện ABCD bằng 30. Giá tri của a là:

A.1B.2 C. 2 hoặc 32 D. 32

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M(1,2,4) và cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $V_{OABC} = 36$

$$\mathbf{A} \cdot \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1$$

B.
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$$

A.
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1$$
 B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ **C**. $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{12} = 1$ **D**. Đáp án khác

Bài 4-[Thi thử THPT Nho Quan - Ninh Bình lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho A(0;1;0), B(2;2;2), C(2;3;1) và đường thẳng

 $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho thể tích tứ diện MABC bằng 3

$$\mathbf{A}.\left(\begin{array}{ccc} \frac{3}{2}; & \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right); \left(\begin{array}{ccc} \frac{15}{2}; \frac{9}{4}; & \frac{11}{2} \right) \\ \mathbf{C}.\left(\frac{3}{2}; & \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2} \right) \\ \mathbf{D}.\left(\frac{3}{5}; & \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2} \right) \\ \mathbf{D}.\left(\frac{3}{5}; & \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2} \right) \\ \end{array}$$

B.
$$\left(\frac{3}{5}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$$
, $\left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$

$$\mathbf{C} \cdot \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$$

D.
$$\left(\frac{3}{5}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$$

Bài 5-[Câu 4 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho A(0;0;2) , B(3;0;5) , C(1;1;0) , D(4;1;2) . Độ dài đường cao của tứ diện ABCD hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) là :

A.
$$\sqrt{11}$$
 B. $\frac{1}{\sqrt{11}}$ **C**. 1 **D**. 11

LỚI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỀN

Bài 1-[Câu 1 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho A(2; 1;6), B(3; 1; 4), C(5; 1;0), D(1;2;1). Thể tích tứ diện ABCD bằng:

A. 30 **B**. 40 **C**. 50 **D**. 60

GIÅI

■ Thể tích tứ diện ABCD được tính theo công thức $V = \frac{1}{6} |A\vec{B}| |A\vec{C}; A\vec{D}| = 30$

[MODE] 8 3 1 — 1 = 3 = — 5 = ON SHIFT (hyp) SHIFT 5 3 SHIFT 5 7

(SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)) ÷ 6 =

Abs(VctA•(VctB×⊳

30

Vây đáp số chính xác là A

Bài 2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho bốn điểm A(a; 1;6), B(3; 1; 4), C(5; 1;0), D(1;2;1) và thể tích của tứ diện ABCD bằng 30. Giá trị của a là:

A.1B.2

C. 2 hoặc 32 **D**. 32

GIÁI

- Vì điểm A chứa tham số nên ta ưu tiên vecto \vec{BA} tính sau cùng. Công thức tính thể tích ABCD ta sắp xếp như sau : $V = \frac{1}{6} \left| B\vec{A} \left[B\vec{C}; B\vec{D} \right] \right|$
- Tính $\begin{bmatrix} B\vec{C}; B\vec{D} \end{bmatrix} = (12; 24; 24)$



-12

■ Ta có
$$V = \frac{1}{6} \left| \vec{BA} \left[\vec{BC}; \vec{BD} \right] \right| = 30 \Leftrightarrow \vec{BA} \left[\vec{BC}; \vec{BD} \right] = \pm 180$$

Với
$$\vec{BA} \left[\vec{BC}; \vec{BD} \right] = 180 \Leftrightarrow \vec{BA} \left[\vec{BC}; \vec{BD} \right] - 180 = 0 \Rightarrow a = 2$$

- 1 8 0 SHIFT CALC 1 =

Với
$$\overrightarrow{BA} \left[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD} \right] = -180 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \left[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD} \right] + 180 = 0 \Rightarrow a = 32$$

● ● ● DEL + SHIFT CALC 1 =

⇒ Đáp án chính xác là C

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh - Phú Yên lần 1 năm 2017]

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M(1,2,4) và cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $V_{OABC} = 36$

$$\mathbf{A}.\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1$$

B.
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$$

A.
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1$$
 B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ **C**. $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{12} = 1$ **D**. Đáp án khác

- Trong các đáp án chỉ có mặt phẳng ở đáp án A đi qua điểm M(1,2,4) cho nên ta chỉ đi kiểm tra tính đúng sai của đáp án A
- Theo tính chất của phương trình đoạn chắn thì mặt phẳng $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A(3;0;0), B(0;6;0), C(0;0;12). Hơn nữa 4 điểm O, A, B, Clập thành một tứ diện vuông đỉnh O
- Theo tính chất của tứ diện vuông thì $V_{OABC} = \frac{1}{6}|OA||OB||OC| = \frac{1}{6}.3.6.12 = 36$ (đúng)
 - ⇒ Đáp án chính xác là A

Bài 4-|Thi thử THPT Nho Quan – Ninh Bình lần 1 năm 2017|

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho A(0;1;0), B(2;2;2), C(2;3;1) và đường thẳng

 $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho thể tích tứ diện MABC bằng 3

$$\mathbf{A}. \left(\begin{array}{ccc} \frac{3}{2}; & \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right); \left(\begin{array}{ccc} \frac{15}{2}; \frac{9}{4}; & \frac{11}{2} \right) \\ \end{array} \quad \mathbf{B}. \left(\begin{array}{ccc} \frac{3}{5}; & \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right); \left(\begin{array}{ccc} \frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2} \right) \\ \end{array} \right)$$

$$\mathbf{C}.\left(\frac{3}{2}; \ \frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$$

$$\mathbf{D}.\left(\frac{3}{5}; \ \frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$$

GIÅ

- Điểm M thuộc d nên có tọa độ M(1+2t; 2 t; 3+2t)
- Thể tích tứ diện MABC được tính theo công thức $V = \frac{1}{6} \left| A\vec{M} \left[A\vec{B}; A\vec{C} \right] \right|$

Tính $\left[\vec{AB}; \vec{AC} \right] = (3; 6; 6)$

ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

-3

■ Ta có $V = \frac{1}{6} |A\vec{M}[A\vec{B}; A\vec{C}]| = 3 \Leftrightarrow A\vec{M}[A\vec{B}; A\vec{C}] = \pm 18$ Với $A\vec{M}[A\vec{B}; A\vec{C}] = 18 \Leftrightarrow A\vec{M}[A\vec{B}; A\vec{C}]$ 18 = 0

MODE 1 - 3 (1 + 2 ALPHA)) - 6 (- 2 - ALPHA) - 1)

+ 6 (3 + 2 ALPHA)) - 1 8 SHIFT CALC 1 = SHIFT RCL (-)

$$-3(1+2X)$$
 $-6(-2-X)$ Ans $+A$
 $X = -1.25$
 $L-R = 0$

Ta được $t = \frac{5}{4} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Với $\overrightarrow{AM} \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] = 18 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] + 18 = 0$

Rõ ràng chỉ có đáp số ${\bf A}$ chứa điểm M trên $\Rightarrow {\bf A}$ là đáp số chính xác

Bài 5-[Câu 4 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho A(0;0;2), B(3;0;5), C(1;1;0), D(4;1;2). Độ dài đường cao của tứ diện ABCD hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) là :

A.
$$\sqrt{11}$$
 B. $\frac{1}{\sqrt{11}}$ **C**. 1 **D**. 11

GIÅI

- Tính thể tích tứ diện ABCD theo công thức $V = \frac{1}{6} |A\vec{E}[A\vec{C}; A\vec{D}]| = 0.5$

 - MODE 8314=1=0=0 SHIFT 153 SHIFT 57

(SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)) ÷ 6 ≡

0.5

• Gọi h là chiều cao cần tìm . Khi đó $V_{ABCD} = \frac{1}{3}h.S_{ABC} \Leftrightarrow h = \frac{3S}{S_{ABC}}$

Tính diện tích tam giác ABC theo công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left[A\vec{B}; A\vec{C} \right]$

ON SHIFT (hyp) SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ 2 = SHIFT (C)

Abs(VctA×VctB)÷2 Ans→A

4.974937186 4.974937186

Vậy $h = \frac{3V}{S_{ABC}} = 0.3015... = \frac{1}{\sqrt{11}}$. \Rightarrow Đáp số chính xác là **B.**