Chuyên đề hình học không gian

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TAM TUYẾN

Tác giả : BÙI THẾ VIỆT

A – GIỚI THIỆU

Như chúng ta đã biết, kỳ thi THPT Quốc Gia môn Toán được thi dưới hình thức trắc nghiệm nên chúng ta cần phải trang bị kiến thức đầy đủ, tư duy nhanh nhạy, một số mẹo tính nhanh và cả máy tính cầm tay CASIO hoặc VINACAL nữa.

Trong chuyên đề này, tôi sẽ giới thiệu cho bạn đọc "phương pháp tọa độ tam tuyến" và ứng dụng trong việc tìm nhanh tọa độ trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, … trong tam giác khi biết tọa độ các đỉnh.

Không những vậy, phương pháp này còn có thể giúp chúng ta tìm tọa độ chân đường cao, chân đường phân giác, tâm đường tròn chín điểm, điểm đối trung, …

B – Ý TƯỞNG

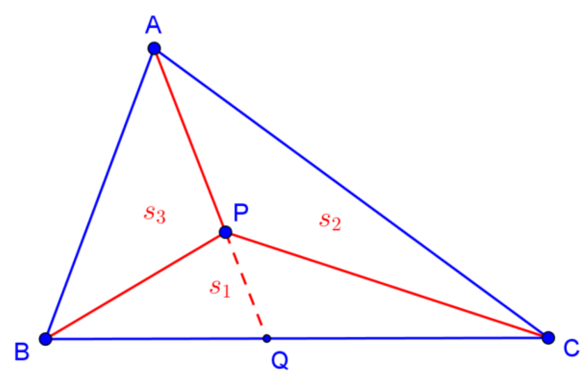
Trước hết, chúng ta thử tìm hiểu bài toán cơ bản sau :

Bài toán. Cho tam giác ABC và P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi $s_1 = S_{PBC}$, $s_2 = S_{PCA}$, $s_3 = S_{PAB}$. Chứng minh rằng :

$$s_1\overrightarrow{PA} + s_2\overrightarrow{PB} + s_3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

Lời giải

Gọi Q là giao điểm của AP và BC. Đặt $s = s_1 + s_2 + s_3$. Khi đó :



Vì $\overrightarrow{PA} = \frac{PA}{QA}\overrightarrow{QA}$ và $\overrightarrow{QA} = \frac{QC}{BC}\overrightarrow{BA} + \frac{QB}{BC}\overrightarrow{CA}$ nên :

$$\overrightarrow{PA} = \frac{PA}{QA}\left(\frac{QC}{BC}\overrightarrow{BA} + \frac{QB}{BC}\overrightarrow{CA}\right) = \frac{s_2+s_3}{s}\left(\frac{s_2}{s_2+s_3}\overrightarrow{BA} + \frac{s_3}{s_2+s_3}\overrightarrow{CA}\right) = \frac{s_2}{s}\overrightarrow{BA} + \frac{s_3}{s}\overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow s_1\overrightarrow{PA} + s_2\overrightarrow{PB} + s_3\overrightarrow{PC} = \frac{s_1s_2}{s}\overrightarrow{BA} + \frac{s_1s_3}{s}\overrightarrow{CA} + \frac{s_2s_3}{s}\overrightarrow{CB} + \frac{s_2s_1}{s}\overrightarrow{AB} + \frac{s_3s_1}{s}\overrightarrow{AC} + \frac{s_3s_2}{s}\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Bài toán được giải quyết.

Nhận xét

Giả sử trong hệ trục tọa độ, các điểm đều có tọa độ của riêng nó thì vector $\overrightarrow{PA}$ có tọa độ bằng tọa độ điểm A trừ đi tọa độ điểm P. Chúng ta quy ước là $\overrightarrow{PA} = A - P$. Vậy :

$$s_1(A-P)+s_2(B-P)+s_3(C-P)=0$$
$$\Leftrightarrow s_1A+s_2B+s_3C=P(s_1+s_2+s_3)$$
$$\Leftrightarrow P=\frac{s_1A+s_2B+s_3C}{s_1+s_2+s_3}$$

Đây chính là mấu chốt của vấn đề. Nếu chúng ta biết được s_1, s_2, s_3 và tọa độ các điểm A, B, C thì chúng ta sẽ tìm được P một cách nhanh chóng.

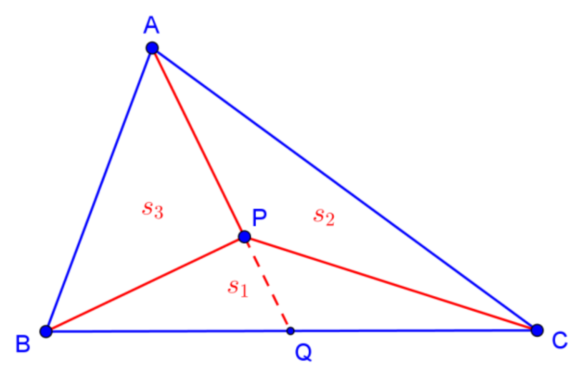
Tuy nhiên, hãy để ý rằng : Nếu $s_1 : s_2 : s_3$ có cùng tỷ lệ với $p_1 : p_2 : p_3$, tức tồn tại k sao cho $\begin{cases} s_1 = kp_1 \\ s_2 = kp_2 \\ s_3 = kp_3 \end{cases}$ thì $P=\dfrac{kp_1A+kp_2B+kp_3C}{kp_1+kp_2+kp_3}=\dfrac{p_1A+p_2B+p_3C}{p_1+p_2+p_3}$ không phụ thuộc vào k.

Tóm lại : Nếu ta biết được tỷ lệ $p_1 : p_2 : p_3$ của điểm P thì ta sẽ có $P=\dfrac{p_1A+p_2B+p_3C}{p_1+p_2+p_3}$.

C – ỨNG DỤNG

Lưu ý : Quy ước $a = BC, b = CA, c = AB$

1. Tìm trọng tâm tam giác :



Khi P là trọng tâm ΔABC thì $\dfrac{s_2}{s_3}=\dfrac{CQ}{BQ}=\dfrac{1}{1}\Rightarrow s_1 : s_2 : s_3 = 1:1:1$.

Vậy :

$$P=\frac{A+B+C}{1+1+1}=\frac{A+B+C}{3}$$

Áp dụng :

Ví dụ 1. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho ΔABC với $A(1,2,5)$, $B(3,-1,-2)$ và $C(2,2,3)$. Tìm tọa độ trọng tâm ΔABC.

Lời giải

Ta có : $P=\dfrac{A+B+C}{3}=(2,1,2)$

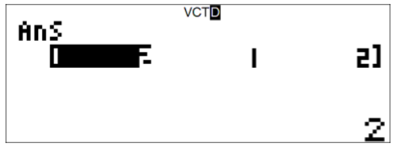
Mẹo 1 : Để giải nhanh bằng CASIO, ta vào MODE VECTOR, nhập tọa độ :

$$\text{VctA} = [1,2,5],\ \text{VctB} = [3,-1,-2],\ \text{VctC} = [2,2,3].$$

Khi đó tọa độ trọng tâm ΔABC là :

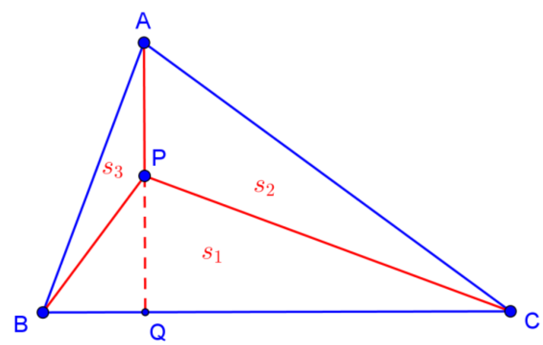
$$(\text{VctA} + \text{VctB} + \text{VctC}) \div 3$$

Ta được đáp án :



Mẹo 2 : Để nhập nhanh tọa độ các Vector, sau khi nhập xong tọa độ VctA thì bạn đọc chỉ cần ấn Shift + STO + B là có thể chuyển qua VctB hoặc Shift + STO + C để vào VctC.

2. Tìm trực tâm tam giác :



Khi P là trực tâm ΔABC thì :

$$\frac{s_2}{s_3} = \frac{CQ}{BQ} = \frac{AQ/\tan C}{AQ/\tan B} = \frac{\tan B}{\tan C} \Rightarrow s_1 : s_2 : s_3 = \tan A : \tan B : \tan C.$$

Tuy nhiên, sử dụng $\tan A$ không được tự nhiên cho lắm nên ta sẽ đưa về a, b, c.

Ta có : $AB^2 - BQ^2 = AC^2 - CQ^2 \Rightarrow c^2 - BQ^2 = b^2 - (a - BQ)^2 \Rightarrow BQ = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$

Chứng minh tương tự ta có : $CQ = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$. Vậy :

$$\frac{s_2}{s_3} = \frac{CQ}{BQ} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2 + a^2 - b^2} \Rightarrow s_1 : s_2 : s_3 = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

Hay

$$s_1 : s_2 : s_3 = h_a : h_b : h_c$$

Với

$$h_a = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2},\ h_b = \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2},\ h_c = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

Áp dụng :

Ví dụ 2. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho ΔABC với $A(1,2,5)$, $B(3,-1,-2)$ và $C(2,2,3)$. Tìm tọa độ trực tâm ΔABC.

Lời giải

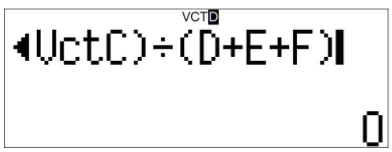
Ta có : $\begin{cases} a=\sqrt{35} \\ b=\sqrt{5} \\ c=\sqrt{62} \end{cases} \Rightarrow h_a=\dfrac{1}{32}, h_b=\dfrac{1}{92}, h_c=-\dfrac{1}{22} \Rightarrow H=\dfrac{h_aA+h_bB+h_cC}{h_a+h_b+h_c}=\left[\dfrac{73}{9},\dfrac{106}{9},\dfrac{5}{9}\right]$

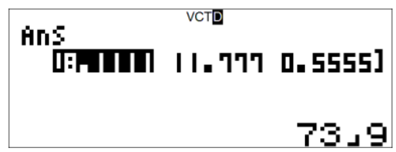
Mẹo 1 : Để giải nhanh bằng CASIO, ta lần lượt làm như sau :

- Vào Mode VECTOR và nhập $VctA, VctB, VctC$
- Tính a,b,c bằng cách lưu $\begin{cases} Abs(VctA-VctB)\to C \\ Abs(VctB-VctC)\to A \\ Abs(VctC-VctA)\to B \end{cases}$
- Tính h_a,h_b,h_c bằng cách lưu $\begin{cases} 1\div(B^2+C^2-A^2)\to D \\ 1\div(C^2+A^2-B^2)\to E \\ 1\div(A^2+B^2-C^2)\to F \end{cases}$
- Tính tọa độ trực tâm bằng cách ấn :

$$(DVctA+EVctB+FVctC)\div(D+E+F)$$

- Ấn "=" ta được đáp án.

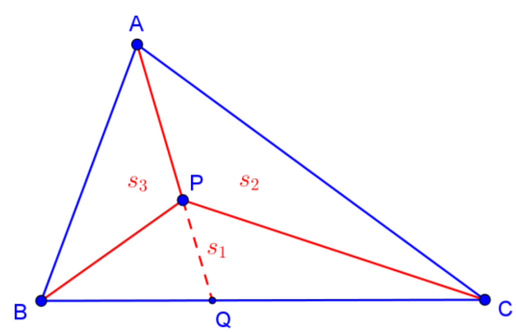




Mẹo 2 : Điều gì xảy ra nếu $B^2+C^2-A^2=0$ hoặc $C^2+A^2-B^2=0$ hoặc $A^2+B^2-C^2=0$? Khi đó ΔABC là tam giác vuông. Bạn đọc có thể dễ dàng tìm được trực tâm của tam giác. Tuy nhiên, để cho tỷ lệ $s_1:s_2:s_3$ thật chính xác thì ta lấy :

$$s_1:s_2:s_3=(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-a^2):(b^2+c^2-a^2)(b^2+a^2-c^2):(c^2+a^2-b^2)(c^2+b^2-a^2)$$

3. Tìm tâm đường tròn nội tiếp tam giác :



Khi P là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì :

$$\frac{s_2}{s_3}=\frac{rb/2}{rc/2}=\frac{b}{c}\Rightarrow s_1:s_2:s_3=a:b:c$$

Vậy :

$$P=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$$

Áp dụng :

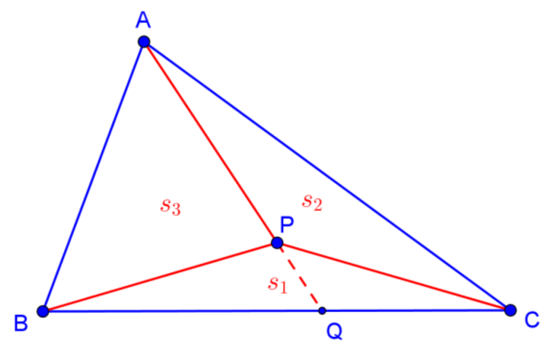
Ví dụ 3. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho ΔABC với $A(1,2,5)$, $B(3,-1,-2)$ và $C(2,2,3)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Lời giải

Ta có : $\begin{cases} a=\sqrt{35} \\ b=\sqrt{5} \\ c=\sqrt{62} \end{cases} \Rightarrow I=\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}$

Đáp án : $I=\left[\dfrac{\sqrt{35}+3\sqrt{5}+2\sqrt{62}}{\sqrt{35}+\sqrt{5}+\sqrt{62}},\dfrac{2\sqrt{35}-\sqrt{5}+2\sqrt{62}}{\sqrt{35}+\sqrt{5}+\sqrt{62}},\dfrac{5\sqrt{35}-2\sqrt{5}+3\sqrt{62}}{\sqrt{35}+\sqrt{5}+\sqrt{62}}\right]$

4. Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác :



Khi P là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì :

$$\frac{s_2}{s_3}=\frac{R^2\sin 2B/2}{R^2\sin 2C/2}=\frac{\sin 2B}{\sin 2C}=\frac{2\sin B\cos B}{2\sin C\cos C}=\frac{\frac{b}{R}}{\frac{c}{R}}\cdot\frac{\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}$$

$$\Rightarrow s_1:s_2:s_3=a^2\left(b^2+c^2-a^2\right):b^2\left(c^2+a^2-b^2\right):c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)$$

Vậy

$$s_1:s_2:s_3=k_a:k_b:k_c$$

Với

$$k_a=a^2\left(b^2+c^2-a^2\right),\ k_b=b^2\left(c^2+a^2-b^2\right),\ k_c=c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)$$

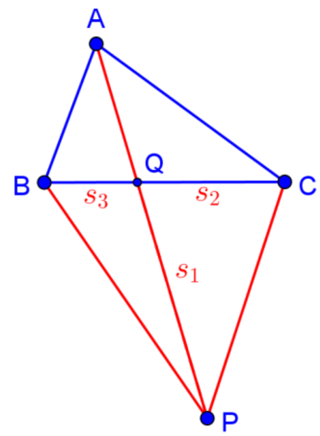
Ví dụ 4. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho ΔABC với $A(1,2,5)$, $B(3,-1,-2)$ và $C(2,2,3)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Lời giải

Ta có : $\begin{cases} a=\sqrt{35} \\ b=\sqrt{5} \\ c=\sqrt{62} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_a=1120 \\ k_b=460 \\ k_c=-1364 \end{cases} \Rightarrow O=\dfrac{k_aA+k_bB+k_cC}{k_a+k_b+k_c}=\left[-\dfrac{19}{18},-\dfrac{79}{18},\dfrac{49}{18}\right]$

Đáp án : $O=\left[-\dfrac{19}{18},-\dfrac{79}{18},\dfrac{49}{18}\right]$

1. Tâm đường tròn bàng tiếp :



Khi P là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC thì :

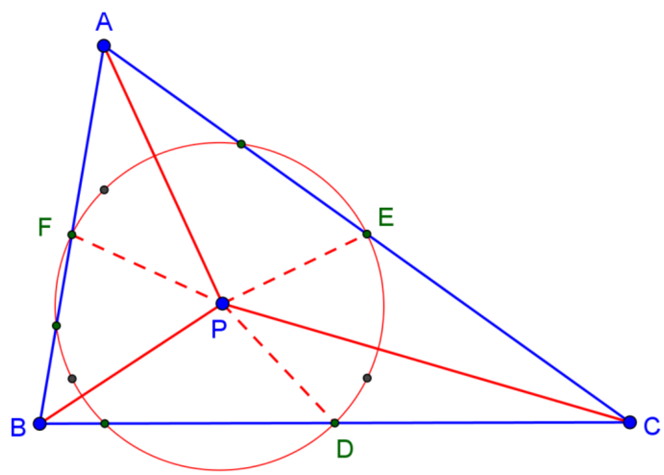
$$-s_1\overrightarrow{PA}+s_2\overrightarrow{PB}+s_3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

Vậy tương tự như tâm đường tròn nội tiếp, bạn đọc có thể tìm tỷ lệ của tâm đường tròn bàng tiếp góc A là $-a:b:c$

Nếu P là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của ΔABC thì tỷ lệ là $a:-b:c$

Nếu P là tâm đường tròn bàng tiếp góc C của ΔABC thì tỷ lệ là $a:b:-c$

2. Tâm đường tròn Euler



Đường tròn Euler đi qua 9 điểm, bao gồm chân đường cao, trung điểm các cạnh, trung điểm đoạn thẳng nối từ trực tâm tới các đỉnh.

Gọi điểm như hình vẽ. Ta có P là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF nên ta được :

$$P=\frac{k_dD+k_eE+k_fF}{k_d+k_e+k_f}$$

Lại có $\begin{cases} EF=\dfrac{a}{2}, FD=\dfrac{b}{2}, DE=\dfrac{c}{2} \\ D=\dfrac{B+C}{2}, E=\dfrac{C+A}{2}, F=\dfrac{A+B}{2} \end{cases}$ và :

$$k_d:k_e:k_f=\sin 2D:\sin 2E:\sin 2F=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$$

Vậy :

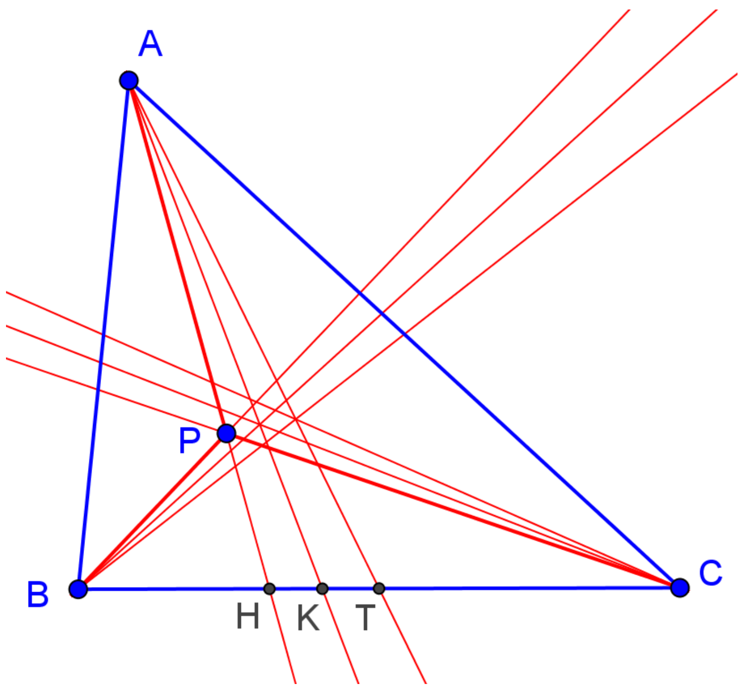
$$D=\frac{1}{2}\frac{(B+C)\sin 2A+(C+A)\sin 2B+(A+B)\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$
$$=\frac{(\sin 2B+\sin 2C)A+(\sin 2C+\sin 2A)B+(\sin 2A+\sin 2B)C}{\sin 2B+\sin 2C+\sin 2C+\sin 2A+\sin 2A+\sin 2B}$$

Tóm lại tỷ lệ ở đây là :

$$(\sin 2B+\sin 2C):(\sin 2C+\sin 2A):(\sin 2A+\sin 2B)$$
$$=\sin A\cos(B-C):\sin B\cos(C-A):\sin C\cos(A-B)$$
$$=a\cos(B-C):b\cos(C-A):c\cos(A-B)$$
$$=(1+\cos B\cos C):(1+\cos C\cos A):(1+\cos A\cos B)$$
$$=a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2:b^2(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2:c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2$$

Bài toán được giải quyết.

3. Điểm đối trung



Điểm đối trung là giao của 3 đường thẳng đối xứng của trung tuyến qua phân giác của mỗi đỉnh.

Gọi điểm như hình vẽ. Theo tính chất của đường đối trung, ta có :

$$\frac{BH}{CH}=\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{c^2}{b^2}$$

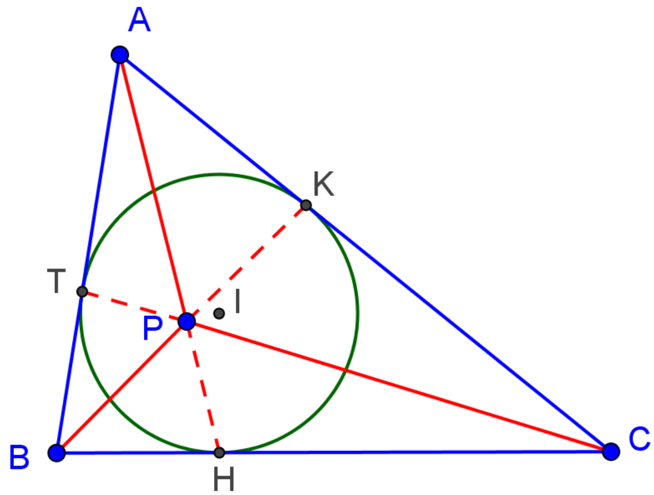
Lưu ý rằng $\frac{s_2}{s_3}=\frac{d_{C/AH}}{d_{B/AH}}=\frac{CH}{BH}=\frac{b^2}{c^2}$. Vậy :

$$s_1:s_2:s_3=a^2:b^2:c^2$$

Hay nói cách khác :

$$P=\frac{a^2A+b^2B+c^2C}{a^2+b^2+c^2}$$

4. Điểm Gergonne

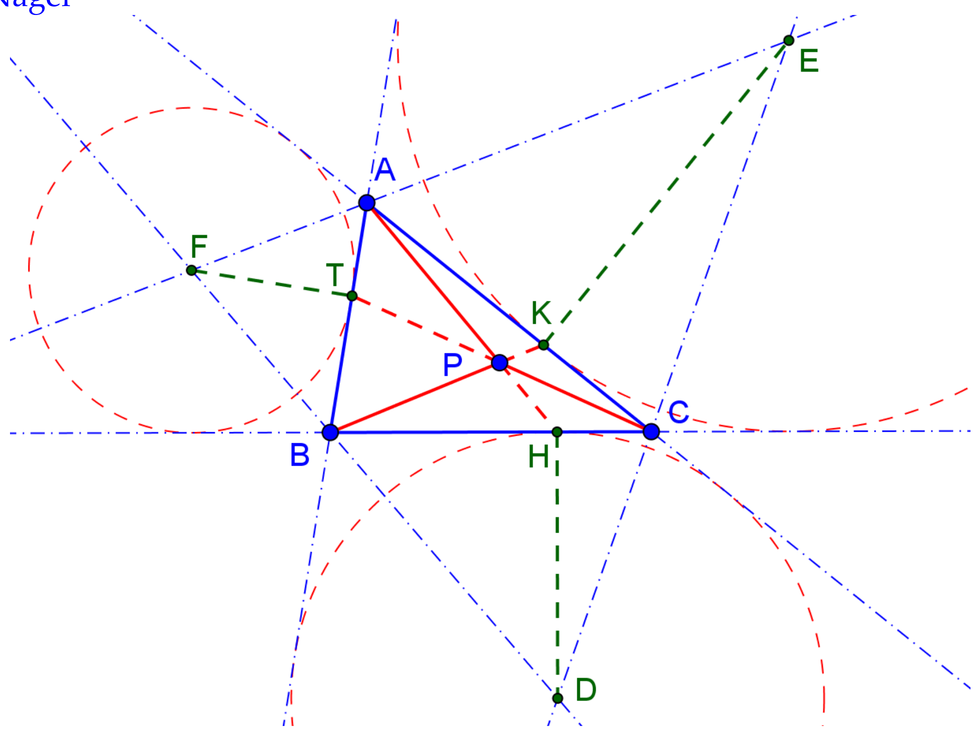


Đường tròn nội tiếp tam giác ABC cắt BC, CA, AB tại H, K, T thì AH, BK, CT đồng quy tại một điểm được gọi là điểm Gergonne.

Khi đó $\frac{s_2}{s_3} = \frac{d_{C/AH}}{d_{B/AH}} = \frac{CH}{BH} = \frac{a+b-c}{c+a-b} = \frac{1/(c+a-b)}{1/(a+b-c)}$. Vậy :

$$s_1 : s_2 : s_3 = \frac{1}{b+c-a} : \frac{1}{c+a-b} : \frac{1}{a+b-c}$$

5. Điểm Nagel



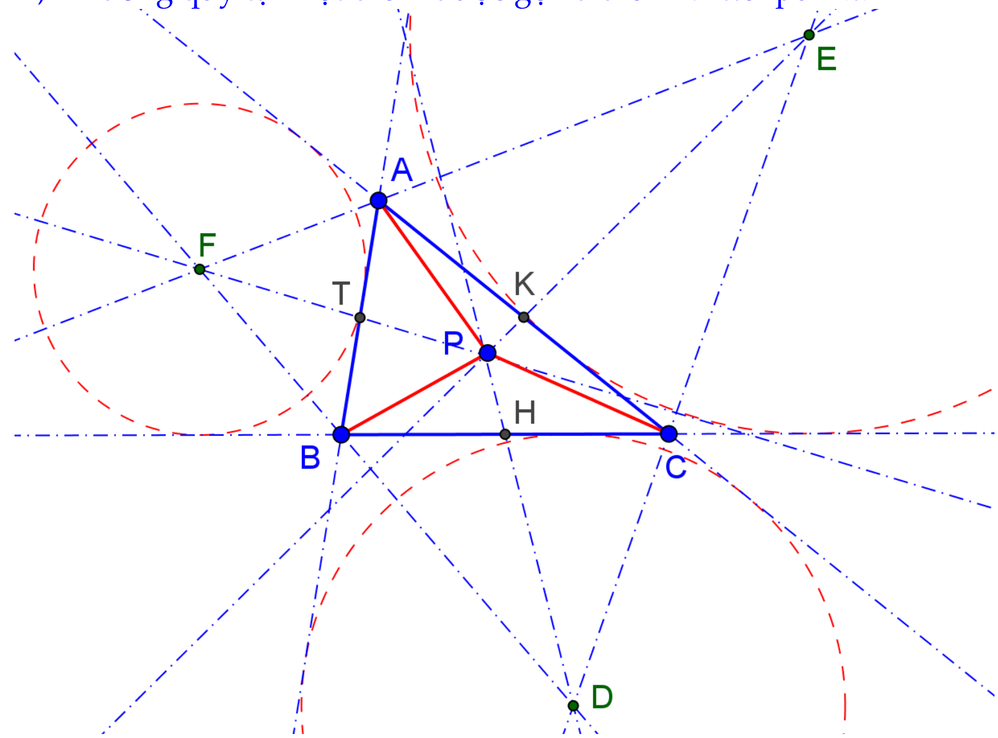
Đường tròn bàng tiếp các đỉnh tiếp xúc với BC, CA, AB tại H, K, T thì AH, BK, CT đồng quy tại một điểm được gọi là điểm Nagel.

Khi đó $\frac{s_2}{s_3} = \frac{d_{C/AH}}{d_{B/AH}} = \frac{CH}{BH} = \frac{HD/\tan BCD}{HD/\tan CBD} = \frac{\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}} = \frac{r/(a+b-c)}{r/(c+a-b)} = \frac{c+a-b}{a+b-c}$. Vậy :

$$s_1 : s_2 : s_3 = b+c-a : c+a-b : a+b-c$$

6. Điểm Mittenpunkt

Đường tròn bàng tiếp các đỉnh A, B, C là D, E, F và H, K, T là trung điểm BC, CA, AB thì DH, EK, FT đồng quy tại một điểm được gọi là điểm Mittenpunkt.



Tỷ lệ :

$$s_1 : s_2 : s_3 = a\left(b+c-a\right) : b\left(c+a-b\right) : c\left(a+b-c\right)$$

7. Điểm Spieker

Điểm Spieker là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác tạo từ ba trung điểm của ΔABC.

Tỷ lệ :

$$s_1 : s_2 : s_3 = b+c : c+a : a+b$$

8. Điểm Feuerbach

Điểm Feuerbach là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp và đường tròn Euler của ΔABC.

Tỷ lệ :

$$s_1 : s_2 : s_3 = \left(b+c-a\right)\left(b-c\right)^2 : \left(c+a-b\right)\left(c-a\right)^2 : \left(a+b-c\right)\left(a-b\right)^2$$

9. Điểm Fermat

Điểm Fermat là điểm thỏa mãn tổng khoảng cách từ nó đến các đỉnh ΔABC là bé nhất.

Có một điểm Fermat F_1 nằm trong và một điểm Fermat F_2 nằm ngoài ΔABC.

Tỷ lệ :

$$s_1 : s_2 : s_3 = f\left(a,b,c\right) : f\left(b,c,a\right) : f\left(c,a,b\right)$$

Với F_1 thì $f\left(a,b,c\right) = a^4 - 2\left(b^2-c^2\right)^2 + a^2\left(b^2+c^2+4\sqrt{3}S_{ABC}\right)$

Với F_2 thì $f\left(a,b,c\right) = a^4 - 2\left(b^2-c^2\right)^2 + a^2\left(b^2+c^2-4\sqrt{3}S_{ABC}\right)$

10. Điểm Isodynamic :

Điểm thứ nhất : $s_1 : s_2 : s_3 = a\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right) : b\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right) : c\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$

Điểm thứ hai : $s_1 : s_2 : s_3 = a\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right) : b\sin\left(B-\frac{\pi}{3}\right) : c\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$

11. Điểm Napoleon :

Điểm thứ nhất : $s_1 : s_2 : s_3 = \frac{a}{\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)} : \frac{b}{\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)} : \frac{c}{\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)}$

Điểm thứ hai : $s_1 : s_2 : s_3 = \frac{a}{\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)} : \frac{b}{\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)} : \frac{c}{\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)}$

12. Điểm Clawson : $s_1 : s_2 : s_3 = a\tan A : b\tan B : c\tan C$

13. Điểm De Longchamps :

$$s_1 : s_2 : s_3 = \tan B + \tan C - \tan A : \tan C + \tan A - \tan B : \tan A + \tan B - \tan C$$

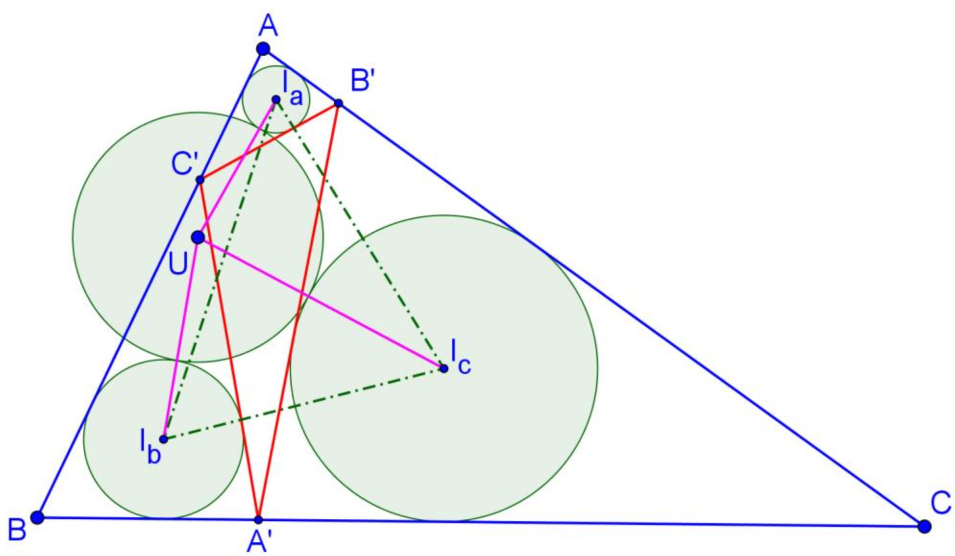
14. Điểm Schiffler : $s_1 : s_2 : s_3 = \frac{a}{\cos B + \cos C} : \frac{b}{\cos C + \cos A} : \frac{c}{\cos A + \cos B}$

15. Điểm Exeter : $s_1 : s_2 : s_3 = a^2\left(b^4 + c^4 - a^4\right) : b^2\left(c^4 + a^4 - b^4\right) : c^2\left(a^4 + b^4 - c^4\right)$

Còn rất rất nhiều điểm đặc biệt của tam giác. Theo thống kê tới thời điểm hiện tại, đã có ít nhất 12109 điểm đặc biệt đã được đặt tên và tất nhiên chúng đều có tỷ lệ $s_1 : s_2 : s_3$.

Ví dụ như trong hai ngày trước, tức ngày 04/03/2017, Đào Thanh Oai cùng với Peter Moses đã đặt tên cho điểm đặc biệt thứ 12109 (ký hiệu X12109) :

Cho tam giác ABC. Gọi A′, B′, C′ lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên BC, CA, CA. Gọi I_a, I_b, I_c là đường tròn nội tiếp tam giác AB′C′, BC′A′, CA′B′. Gọi U là đường tròn nhỏ nhất tiếp xúc với I_a, I_b, I_c. Khi đó tâm của U là điểm X12109.



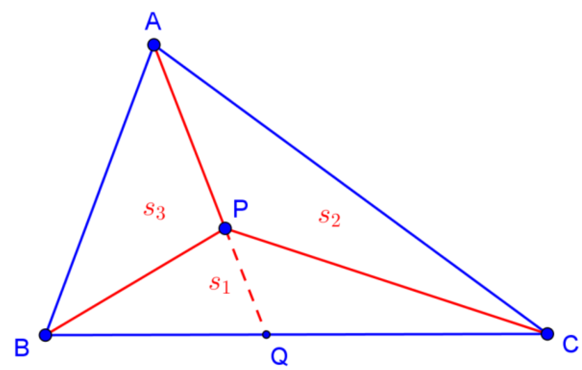
Điểm X12109 có tỷ lệ $s_1 : s_2 : s_3 = f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$ với :

$$f(a,b,c) = 6a^2b^2c^2 - a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left((b+c)^3 + a\left(b^2 + c^2\right)\right)$$

Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm tại "Bách khoa toàn thư về các tâm của tam giác".
Và tất nhiên, ứng dụng của phương pháp tọa độ tam tuyến trong kỳ thi THPT Quốc Gia môn Toán không dừng lại ở đó.

E – MỞ RỘNG 2

Chúng ta cũng có thể tìm tọa độ chân đường cao, chân đường phân giác, … trực tiếp bằng Vector rất nhanh bằng máy tính CASIO. Ý tưởng như sau :



Nếu điểm P có tỷ lệ $s_1 : s_2 : s_3$ thì giao điểm của AP và BC có tỷ lệ $0 : s_2 : s_3$.
Tương tự vậy, giao điểm của BQ và AC có tỷ lệ $s_1 : 0 : s_3$; giao điểm của CQ và AB có tỷ lệ $s_1 : s_2 : 0$.

Ví dụ 5. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho ΔABC với $A(1,2,5)$, $B(3,-1,-2)$ và $C(2,2,3)$. Gọi H, I, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. Tìm tọa độ giao điểm của :

a) AH và BC
b) BI và AC
c) CO và AB

Lời giải

a) Ta có : $\begin{cases} a = \sqrt{35} \\ b = \sqrt{5} \\ c = \sqrt{62} \end{cases} \Rightarrow h_b = \dfrac{1}{92}, h_c = -\dfrac{1}{22} \Rightarrow AH \cap BC = \dfrac{h_b B + h_c C}{h_b + h_c} = \left[\dfrac{59}{35}, \dfrac{103}{35}, \dfrac{32}{7}\right]$

b) Ta có : $BI \cap AC = \dfrac{aA + cC}{a + c} = \left[\dfrac{\sqrt{35} + 2\sqrt{62}}{\sqrt{35} + \sqrt{62}}, \dfrac{2\sqrt{35} + 2\sqrt{62}}{\sqrt{35} + \sqrt{62}}, \dfrac{5\sqrt{35} + 3\sqrt{62}}{\sqrt{35} + \sqrt{62}}\right]$

c) Ta có : $k_a = 1120, k_b = 460 \Rightarrow CO \cap AB = \dfrac{k_a A + k_b B}{k_a + k_b} = \left[\dfrac{125}{79}, \dfrac{89}{79}, \dfrac{234}{79}\right]$

Tới đây chắc bạn đọc đã hình dung ra được phương pháp tọa độ tam tuyến rồi. Hy vọng phương pháp sẽ giúp ích cho bạn đọc giải nhanh trắc nghiệm môn Toán.
Không những vậy, tôi thấy còn rất nhiều điều thú vị từ phương pháp này. Có thể chúng ta sử dụng nó để chứng minh tính đồng quy, hoặc cũng có thể áp dụng nó trong tọa độ hóa và vector để giải các bài toán hình phẳng Oxy. Ngoài ra đối với tứ diện, chúng ta có thể dựa vào tỷ lệ thể tích $v_1 : v_2 : v_3 : v_4$ để tìm tọa độ các điểm đặc biệt như trọng tâm, trực tâm, tâm mặt cầu ngoại tiếp, … Các bạn thử xem !