

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL
BÀI 7. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Phương pháp đồ thị tìm số nghiệm của phương trình : Cho phương trình $f(x) = g(x)$ (1), số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hàm số $y = g(x)$

Chú ý : Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành

2. Bài toán tìm nghiệm của phương trình chứa tham số : Ta tiến hành cô lập m và đưa phương trình ban đầu về dạng $f(x) = m$ (2) khi đó số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Chú ý : Đường thẳng $y = m$ có tính chất song song với trục hoành và đi qua điểm có tọa độ $(0; m)$

3. Lệnh Casio : Để tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm ta dùng lệnh SHIFT SOLVE

2) VÍ DỤ MINH HỌA**VD1-[Thi thử chuyên KHTN lần 2 năm 2017]**

Tìm tập hợp tất các các giá trị của m để phương trình $\log_2 x \cdot \log_2(x-2) = m$ có nghiệm :

A. $1 \leq m < +\infty$

B. $1 < m < +\infty$

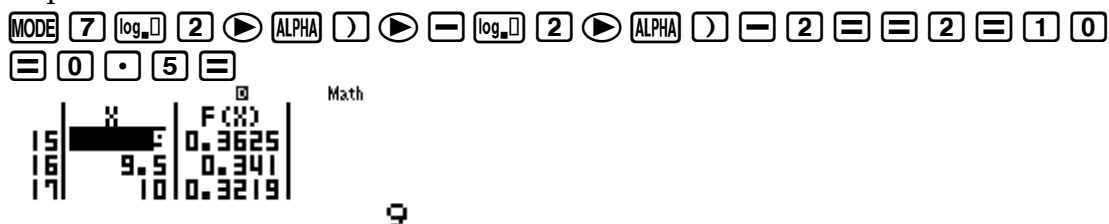
C. $0 \leq m < +\infty$

D.

$0 < m < +\infty$

GIẢI❖ **Cách 1 : CASIO**

- Đặt $\log_2 x \cdot \log_2(x-2) = f(x)$ khi đó $m = f(x)$ (1). Để phương trình (1) có nghiệm thì m thuộc miền giá trị của $f(x)$ hay $f(\min) \leq m \leq f(\max)$
- Tới đây bài toán tìm tham số m được quy về bài toán tìm min, max của một hàm số. Ta sử dụng chức năng Mode với miền giá trị của x là Start 2 End 10 Step 0.5



- Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy $f(10) \approx 0.3219$ vậy đáp số A và B sai. Đồng thời khi x càng tăng vậy thì $F(X)$ càng giảm. Vậy câu hỏi đặt ra là $F(X)$ có giảm được về 0 hay không.

Ta tư duy nếu $F(X)$ giảm được về 0 có nghĩa là phương trình $f(x)=0$ có nghiệm. Để kiểm tra dự đoán này ta sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE


Can't solve

[AC] :Cancel

[left][right]:Goto

Máy tính Casio báo phương trình này không có nghiệm. Vậy dấu = không xảy ra

➤ Tóm lại $f(x) > 0 \Leftrightarrow m > 0$ và D là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

▪ Điều kiện : $x > 2$

▪ Phương trình $\Leftrightarrow m = \log_2\left(\frac{x}{x-2}\right) \Leftrightarrow m = \log_2\left(1 + \frac{2}{x-2}\right)$

▪ Vì $x > 2$ nên $x-2 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{2}{x-2} > 1 \Rightarrow \log_2\left(1 + \frac{2}{x-2}\right) > \log_2 1 = 0$

Vậy $m = \log\left(1 + \frac{2}{x-2}\right) > 0$

❖ **Bình luận :**

- Một bài toán mẫu mực của dạng tìm tham số m ta giải bằng cách kết hợp chức năng lập bảng giá trị MODE 7 và chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE một cách khéo léo
- Chú ý : $m = f(x)$ mà $f(x) > 0$ vậy $m > 0$ một tính chất bắt cầu hay và thường xuyên gặp

VD2-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

A. $4 < m < 0$

B. $4 \leq m \leq 0$

C. $0 \leq m \leq 4$

D.

$0 < m < 1$

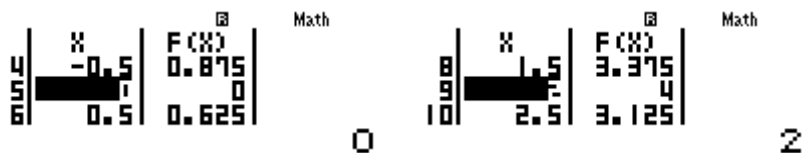
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

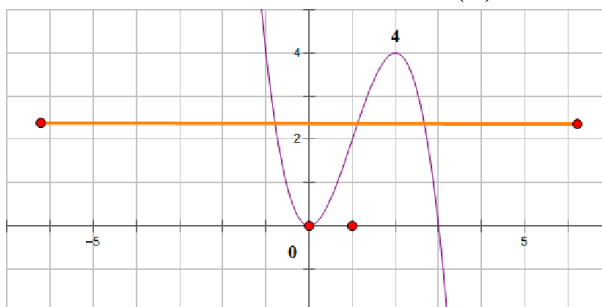
➤ Cô lập m , đưa phương trình ban đầu về dạng $m = -x^3 + 3x^2$. Đặt $-x^3 + 3x^2 = f(x)$ khi đó $m = f(x)$ (1), số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và $y = m$

➤ Để khảo sát hàm số $y = f(x)$ ta sử dụng chức năng MODE 7 Start 2 End 5 Step 0.5





Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị cực tiểu là 0 và giá trị cực đại là 4 vậy ta có sơ đồ đường đi của $f(x)$ như sau :



- Rõ ràng hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt nếu $0 < m < 4$

VD3-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

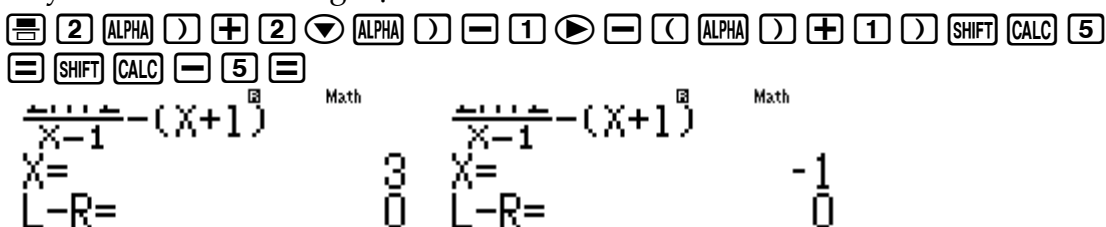
Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $(d): y = x+1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt M, N thì tung độ điểm I của đoạn thẳng MN bằng :

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 2

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x+2}{x-1} = x+1$. Nhập phương trình này vào máy tính Casio và dò nghiệm :



Ta có ngay 2 nghiệm $\begin{cases} x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = x_1 + 1 = 4 \\ x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_I = \frac{y_1 + y_2}{2} = 2$

\Rightarrow Đáp số chính xác là D

VD4-[Thi thử chuyên Vĩ Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 16$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

- A. $m > 12$ B. $m < 12$ C. $m < 0$ D. Không

có m thỏa

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 16$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^3 + mx + 16 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt
- Với $m = 14$ sử dụng lệnh giải phương trình bậc 3 MODE 5

MODE 5 4 1 = 0 = 1 4 = 1 6 = = = =
 $X_1 =$ $X_2 =$

-1.058213891 0.5291069456+3.▶

Ta thấy nghiệm $x_2; x_3$ là nghiệm ảo \Rightarrow không đủ 3 nghiệm thực $\Rightarrow m = 14$ không thỏa \Rightarrow A sai

- Với $m = 14$ sử dụng lệnh giải phương trình bậc 3 MODE 5

MODE 5 4 1 = 0 = 4 DEL 1 4 = 1 6 = = = =
 $X_1 =$ $X_2 =$

-4.218186702 2.918522599

$X_3 =$

1.299664103

Ta thấy ra 3 nghiệm thực \Rightarrow Đáp án đúng có thể là B hoặc C

Thử thêm một giá trị $m = 1$ nữa thì thấy $m = 1$ không thỏa

\Rightarrow Đáp số chính xác là B

VD5-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ có đồ thị là (C). Biết đường thẳng $y = 4x + 3$ tiếp xúc với (C) tại điểm A và cắt (C) tại điểm B. Tìm tung độ của điểm B

A. 1

B. 15

C. 3

D. 1

GIẢI

❖ Cách 1 : CASIO

- Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} = 4x + 3$. Sử dụng

SHIFT SOLVE để dò 2 nghiệm phương trình trên

MODE 1 2 ALPHA) x^4 4 = 3 ALPHA) x^2 + MODE 3 2 2 +
 4 ALPHA) = 3 = SHIFT CALC 5 = SHIFT CALC = 5 =
 $\frac{1}{2}X^4 - 3X^2 + \frac{3}{2} = -4X + 3$ $\frac{1}{2}X^4 - 3X^2 + \frac{3}{2} = -4X + 3$
 $X =$ 1 $X =$ -3
 $L-R =$ 0 $L-R =$ 0

- Nếu A là tiếp điểm thì $y'(x_A) = 0$, B là giao điểm $\Rightarrow y'(x_B) \neq 0$.

SHIFT \int MODE ALPHA) x^4 4 2 2 = 3 ALPHA) x^2 + MODE 3 2 2 2
 1 =

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{3}{2} \right) \Big|_{x=1} = -4$$

$$\Rightarrow x_B = 1 \Rightarrow y_B = 4x_B + 3 = 7$$

\Rightarrow Đáp số chính xác là **D**

VD6-[Thi HK1 THPT HN-Amsterdam năm 2017]

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 4$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị (C) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm có hoành độ lớn hơn 1?

- A. $3 < m < 4$ B. $2 < m < 3$ C. $2 < m < 3$ D. $m < 1$
 $\lceil m < 1$
 $\lfloor m > 3$

GIẢI

❖ **Cách 1 : T. CASIO**

- Số nghiệm của đồ thị (C) và trục hoành là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm. $x^4 - 2mx^2 + m^2 - 4 = 0$ (1). Đặt $x^2 = t$ thì (1) $\Leftrightarrow t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0$ (2)
- Ta hiểu 1 nghiệm $t > 0$ sẽ sinh ra 2 nghiệm $x = \pm\sqrt{t}$. Khi phương trình (2) có 2 nghiệm $t_1 > t_2 > 0$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1} < -\sqrt{t_2} < \sqrt{t_2} < \sqrt{t_1}$. Vậy để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm có hoành độ lớn hơn 1 (tức là 1 điểm có hoành độ nhỏ hơn 1) thì $0 < t_2 \leq 1 < t_1$ (*)

Thử với $m = 2.5$ Xét phương trình $t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0$

MODE 5 3 1 = - 5 = 2 . 5 x^2 - 4 = = =

$X_1 =$

$X_2 =$

$\frac{9}{2}$

$\frac{1}{2}$

Thỏa mãn (*) $\Rightarrow m = 2.5$ thỏa \Rightarrow **C** là đáp số chính xác

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Vĩ Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 + 3x^2 - 12x = m$ có đúng 1 nghiệm dương

- A. $\lceil m < 7$
 $\lfloor m > 0$ B. $\lceil m = 7$
 $\lfloor m > 0$ C. $\lceil m < -7$
 $\lfloor m > 20$ D. Không có m thỏa

Bài 3-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả giá trị m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{2}$

A. $0 < m < 2$

B. $2 < m < 2$

C. $\frac{9}{8} < m < 2$

D.

$2 \leq m \leq 2$

Bài 3-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. $m = 3$

B. $m > 2$

C. $2 \leq m \leq 3$

D.

$2 < m < 3$

Bài 4-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} (m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm ?

A. 20

B. 35

C. 30

D. 25

Bài 5-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Tập giá trị của tham số m để phương trình $5 \cdot 16^x - 2 \cdot 81^x = m \cdot 36^x$ có đúng 1 nghiệm ?

A. $m > 0$

B. $\begin{cases} m \leq \sqrt{2} \\ m \geq \sqrt{2} \end{cases}$

C. Với mọi m

D. Không

tồn tại m

Bài 6-[Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]

Phương trình $\log_3 x - \log_3 (x-2) = \log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

A. $m > 1$

B. $m < 0$

C. $0 < m \leq 1$

D. $m \leq 1$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 + 3x^2 - 12x = m$ có đúng 1 nghiệm dương

A. $\begin{cases} m < 7 \\ m > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 7 \\ m > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m < 7 \\ m > 20 \end{cases}$

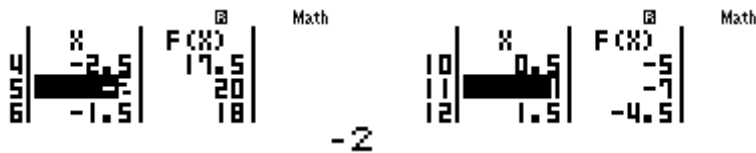
D. Không

có m thỏa

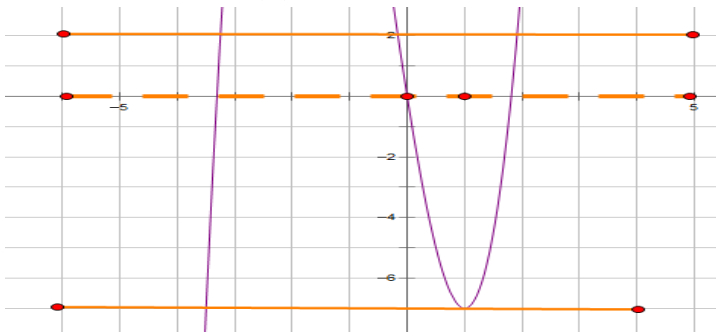
GIẢI

- Đặt $f(x) = 4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$ (1). Để (1) có đúng 1 nghiệm dương thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ dương.
- Khảo sát hàm số $y = f(x)$ với chức năng MODE 7

MODE **7** **2** **ALPHA** **)** **x²** **3** **►** **+** **3** **ALPHA** **)** **x²** **-** **1** **2** **ALPHA** **)** **=** **=** **-** **4** **=** **5**
= **0** **.** **5** **=**



- Ta thấy đồ thị có giá trị cực đại là 20 và giá trị cực tiểu là -7 và ta sẽ mô tả được đường đi của $f(x)$ như sau :



Rõ ràng $\begin{cases} y = m > 0 \\ y = -7 \end{cases}$ thì hai đồ thị cắt nhau tại đúng 1 điểm có hoành độ dương. \Rightarrow

Đáp án **B** chính xác

Bài 3-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả giá trị m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{2}$

A. $0 < m < 2$

B. $2 < m < 2$

C. $\frac{9}{8} < m < 2$

D.

$2 \leq m \leq 2$

GIẢI

- Số giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm số trên là số giao điểm của phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 - m = 0$
- Thử với $m = 2$. Giải phương trình bậc 3 với tính năng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = - 3 = 0 = 2 = (- 2) = = =

$X_1 =$

$X_2 =$

-1

2

Ta thấy chỉ có 2 nghiệm \Rightarrow 2 giao điểm $\Rightarrow m = 2$ không thỏa mãn \Rightarrow Đáp án **D** sai

- Thử với $m = 1$. Giải phương trình bậc 3 với tính năng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = - 3 = 0 = 3 = = =

$X_1 =$

-0.8793852416

Ta thấy có nghiệm $< \frac{1}{2} \Rightarrow m = 1$ không thỏa mãn \Rightarrow Đáp án **B** sai

- Thử với $m = 1$. Giải phương trình bậc 3 với tính năng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = - 3 = 0 = 3 = = =

$X_3 =$

Math ▲

 -0.5320888862

Ta thấy có nghiệm $< \frac{1}{2} \Rightarrow m=1$ không thỏa mãn \Rightarrow Đáp án A sai

\Rightarrow Đáp án C còn lại là đáp án chính xác

Bài 3-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. $m = 3$ B. $m > 2$ C. $2 \leq m \leq 3$

D.

 $2 < m < 3$

GIẢI

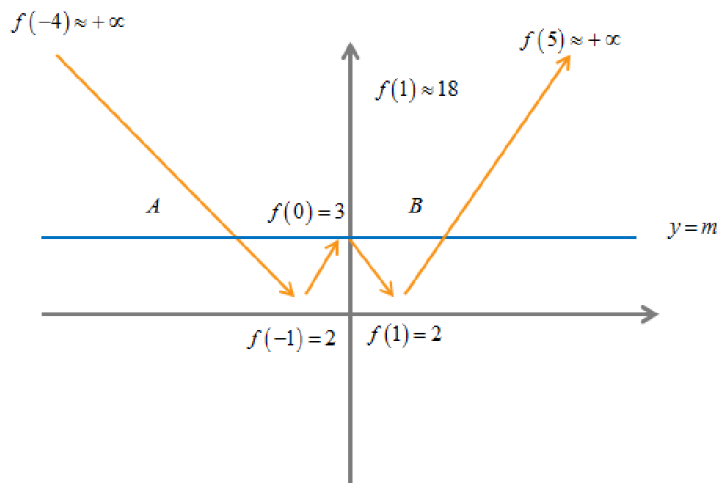
- Đặt $f(x) = 4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start

4 End 5 Step 0.5

MODE 7 4 x^y ALPHA \square x^2 \rightarrow $-$ 2 x^y ALPHA \square x^2 $+$ 2 \rightarrow $+$ 6 $=$ $=$ $-$ 4 $=$
 5 $=$ 0 \cdot 5 $=$



- Quan sát bảng biến thiên ta vẽ đường đi của hàm số



Rõ ràng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt vậy đáp án A là chính xác

Bài 4-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} (m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm ?

A. 20

B. 35

C. 30

D. 25

GIẢI

- Cô lập m ta được $m = \frac{25^{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot 2.5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot 2}$
- Đặt $f(x) = \frac{25^{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot 2.5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot 2}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start

1 End 1 Step 2

MODE 7 2 5 x^y 1 + $\sqrt{\square}$ 1 - ALPHA \square x^2 \rightarrow \rightarrow - 2 \times 5 x^y 1 + $\sqrt{\square}$ 1 - ALPHA \square x^2 \rightarrow \rightarrow + 1 ∇ 5 x^y 1 + $\sqrt{\square}$ 1 - ALPHA \square x^2 \rightarrow \rightarrow - 2 \square \square - 1 \square 1 \square 0 \square 2 \square

Math

X	F(X)
-1	5.3333
-0.8	13.2222
-0.6	18.1818

- 1

- Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x) \leq f(0) = 25.043...$ hay $m \leq f(0)$ vậy m nguyên dương lớn nhất là 25 \Rightarrow D là đáp án chính xác

Bài 5-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Tập giá trị của tham số m để phương trình $5.16^x \cdot 2.81^x = m.36^x$ có đúng 1 nghiệm ?

- A. $m > 0$ B. $\begin{cases} m \leq \sqrt{2} \\ m \geq \sqrt{2} \end{cases}$ C. Với mọi m D. Không

tồn tại m

GIẢI

- Cô lập m ta được $m = \frac{5.16^x \cdot 2.81^x}{36^x}$
- Đặt $f(x) = \frac{5.16^x \cdot 2.81^x}{36^x}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start

9 End 10 Step 1

MODE 7 5 \times 1 6 x^y ALPHA \square \rightarrow - 2 \times 8 1 x^y ALPHA \square ∇ 3 6 x^y ALPHA \square \square \square - 9 \square 1 0 \square 1 \square

Math

X	F(X)
-9	7389.4
-8	3284.2
-7	1459.6

- 9

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ luôn giảm hay hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến.

Điều này có nghĩa là đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm \Rightarrow C chính xác

Bài 6-[Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]

Phương trình $\log_3 x \cdot \log_3(x-2) = \log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

A. $m > 1$

B. $m < 0$

C. $0 < m \leq 1$

D. $m \leq 1$

GIẢI

- Điều kiện : $x > 2$. Phương trình ban đầu

$$\Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{x}{x-2} \right) = 2 \log_3 m \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 \left(\frac{x}{x-2} \right) = \log_3 m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \log_3 m \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

Để phương trình ban đầu vô nghiệm thì đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start 2 End 10 Step 0.5

MODE 7 $\sqrt{\square}$ $\frac{\square}{\square}$ ALPHA \rightarrow ∇ ALPHA \rightarrow $-$ 2 $=$ $=$ 2 $=$ 1 0 $=$ 0 \cdot 5 $=$



- Để khảo sát chính xác hơn ta tính giới hạn của hàm $f(x)$ khi x tiến tới 2 cận là 2 và

$+\infty$

$\sqrt{\square}$ $\frac{\square}{\square}$ ALPHA \rightarrow ∇ ALPHA \rightarrow $-$ 2 CALC 1 0 x^{\square} 9 \rightarrow $=$

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

1.000000001

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 1$

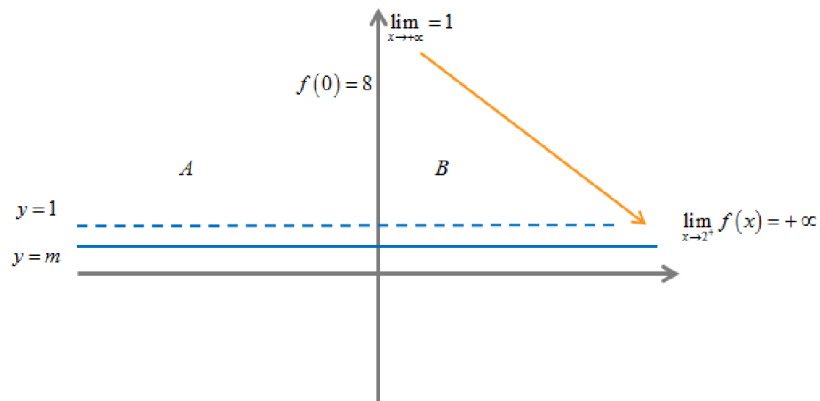
$\sqrt{\square}$ $\frac{\square}{\square}$ ALPHA \rightarrow ∇ ALPHA \rightarrow $-$ 2 CALC 2 $+$ 0 \cdot 0 0 0 0 0 0 0 0 1 $=$

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

4472.136067

Vậy $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

- Quan sát bảng giá trị và 2 giới hạn ta vẽ đường đi cả đồ thị hàm số $y = f(x)$ và sự tương giao



Ta thấy ngay $m \leq 1$ thì 2 đồ thị không cắt nhau hay phương trình ban đầu vô nghiệm.