

# PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

## BÀI 30. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

### I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

#### 1. Các khái niệm thường gặp

- Hệ trục thực ảo gồm có 2 trục vuông góc với nhau : Trục nằm ngang là trục thực, trục đứng dọc là trục ảo
- Số phức  $z = a + bi$  khi biểu diễn trên hệ trục thực ảo là điểm  $M(a; b)$
- Môđun của số phức  $z = a + bi$  là độ lớn của vectơ  $\vec{OM}$

#### 2. Lệnh Caso

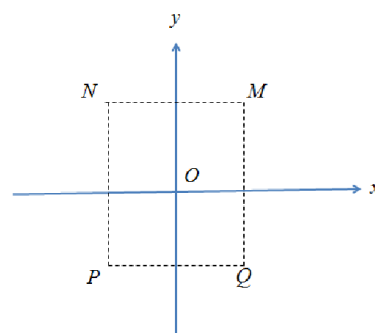
- Để xử lý số phức ta sử dụng lệnh tính số phức MODE 2
- Lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3
- Lệnh giải phương trình bậc ba MODE 5 4

### II) VÍ DỤ MINH HỌA

#### VD1-[Câu 31 Đề minh họa THPT Quốc Gia lần 1 năm 2017]

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(1+i)z = 3-i$ . Hỏi điểm biểu diễn số phức  $z$  là điểm nào trong các điểm  $M, N, P, Q$

A. điểm  $P$       B. điểm  $Q$       C. điểm  $M$       D. điểm  $N$



**GIẢI**

➤ Cô lập  $z = \frac{3-i}{1+i}$

Sử dụng máy tính Casio trong môi trường CMPLX để tìm  $z$

**MODE** **2** **1/i** **3** **=** **ENG** **▼** **1** **+** **ENG** **=**

CMPLX

**□**

Math ▲

$$\frac{3-i}{1+i}$$

$$1-2i$$

⇒  $z = 1 - 2i$  và điểm biểu diễn  $z$  trong hệ trục thực ảo có tọa độ  $(1; -2)$ . Điểm có thực dương và ảo âm sẽ nằm ở góc phần tư thứ IV

⇒ Điểm phải tìm là  $Q$  và đáp án chính xác là **B**

#### VD2-[Thi thử trung tâm Diệu Hiền – Cần thơ lần 1 năm 2017]

Điểm biểu diễn số phức  $z = 7 + bi$  với  $b \in \mathbb{R}$ , nằm trên đường thẳng có phương trình là :

A.  $x = 7$       B.  $y = x$       C.  $y = x + 7$       D.  $y = 7$

**GIẢI**

➤ Điểm biểu diễn số phức  $z = 7 + bi$  là điểm  $M$  có tọa độ  $M(7; b)$

Ta biết điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d$  nếu tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn phương trình đường thẳng  $d$

➤ Thử đáp án A ta có  $x = 7 \Leftrightarrow 1.x + 0.y - 7 = 0$ . Thế tọa độ điểm  $M$  vào ta được :  $1.7 + 0.b - 7 = 0$  (đúng)

Vậy điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $x = 7 \Rightarrow$  Đáp án **A** là chính xác

#### VD3-[Thi thử Group Nhóm toán – Facebook lần 5 năm 2017]

Các điểm  $M, N, P$  lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức

$$z_1 = \frac{4i}{i-1}; z_2 = (1-i)(1+2i); z_3 = 1+2i$$

A. Tam giác vuông

B. Tam giác cân

C. Tam giác vuông cân

D. Tam giác đều

GIẢI

- Rút gọn  $z_1$  bằng Casio

$\frac{4i}{i-1}$

$$\frac{4i}{i-1}$$

CMPLX

B

Math ▲

$$2-2i$$

Ta được  $z_1 = 2 - 2i$  vậy điểm  $M(2; -2)$

- Rút gọn  $z_2$  bằng Casio

$(1-i)(1+2i)$

$$(1-i)(1+2i)$$

CMPLX

B

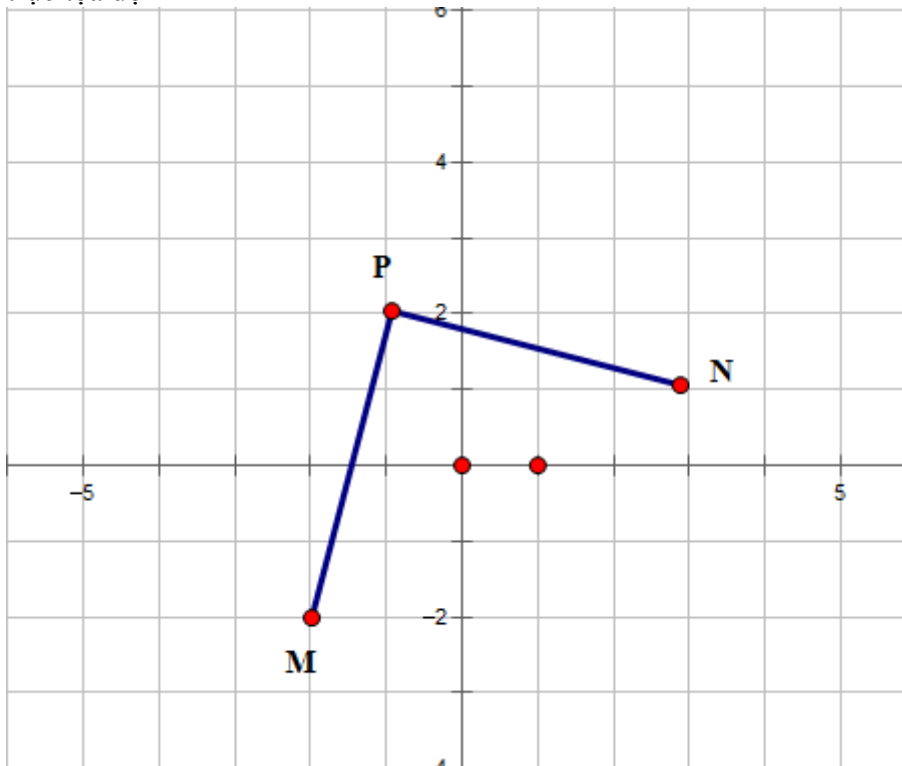
Math ▲

$$3+i$$

Ta được  $z_2 = 3 + i$  vậy điểm  $N(3;1)$

Tương tự  $z_2 = 1 + 2i$  và điểm  $P(1;2)$

- Để phát hiện tính chất của tam giác  $MNP$  ta nên biểu diễn 3 điểm  $M, N, P$  trên hệ trục tọa độ



Để thấy tam giác  $MNP$  vuông cân tại  $P \Rightarrow$  đáp án C chính xác

#### VD4-[Thi thử báo Toán học Tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong mặt phẳng  $Oxy$ , gọi các điểm  $M, N$  lần lượt là điểm biểu diễn số phức

$z_1 = 1 - i, z_2 = 3 + 2i$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $OMN$ , với  $O$  là gốc tọa độ. Hỏi  $G$  là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây.

- A.  $5 - i$       B.  $4 + i$       C.  $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}i$       D.  $2 + \frac{1}{2}i$

### GIẢI

➤ Điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z_1 = 1 - i \Rightarrow$  tọa độ  $M(1; -1)$

Điểm  $N$  biểu diễn số phức  $z_2 = 3 + 2i \Rightarrow$  tọa độ  $N(3; 2)$

Gốc tọa độ  $O(0; 0)$

➤ Tọa độ điểm  $G\left(\frac{x_M + x_N + x_O}{3}, \frac{y_M + y_N + y_O}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Vậy  $G$  là điểm biểu diễn của số phức  $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}i \Rightarrow \mathbf{C}$  là đáp án chính xác

### VD5-[Thi thử THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , gọi  $M$  là điểm biểu diễn số phức  $z = 3 - 4i$ , điểm  $M'$  là điểm biểu diễn số phức  $z' = \frac{1+i}{2}z$ . Tính diện tích  $\Delta OMM'$

A.  $S_{\Delta OMM} = \frac{25}{4}$       B.  $S_{\Delta OMM} = \frac{25}{2}$       C.  $S_{\Delta OMM} = \frac{15}{4}$       D.  $S_{\Delta OMM} = \frac{15}{2}$

### GIẢI

➤ Điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z_1 = 3 - 4i \Rightarrow$  tọa độ  $M(3; -4)$

Điểm  $M'$  biểu diễn số phức  $z' = \frac{1+i}{2}z \Rightarrow$  tọa độ  $N\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1+i}{2} \times (3-4i) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$$

Gốc tọa độ  $O(0; 0)$

➤ Để tính diện tích tam giác  $OMM'$  ta ứng dụng tích có hướng của 2 vectơ trong không gian. Ta thêm cao độ 0 cho tọa độ mỗi điểm  $O, M, M'$  là xong

$$\vec{OM}(3; -4; 0), \vec{OM'}\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \left| [\vec{OM}; \vec{OM'}] \right|$$

Tính  $[\vec{OM}; \vec{OM'}]$

$$\text{VctA} \cdot \text{VctB} = 12.5$$

$$\text{Vậy } \left| [\vec{OM}; \vec{OM'}] \right| = 12.5 = \frac{25}{2} \Rightarrow S_{OMM} = \frac{1}{2} \left| [\vec{OM}; \vec{OM'}] \right| = \frac{25}{4}$$

$\Rightarrow \mathbf{A}$  là đáp án chính xác

### VD6-[Đề thi minh họa bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Kí hiệu  $z_0$  là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình  $4z^2 - 16z + 17 = 0$ . Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức  $w = iz_0$

A.  $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$  B.  $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$  C.  $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$  D.  $M\left(\frac{1}{4}; 1\right)$

**GIẢI**

- Sử dụng lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3 để giải phương trình

$$4z^2 - 16z + 17 = 0$$

MODE 5 3 4 = - 1 6 = 1 7 = = =

$$X_1 =$$

$$2 + \frac{1}{2}i$$

$$X_2 =$$

$$2 - \frac{1}{2}i$$

Vậy phương trình  $4z^2 - 16z + 17 = 0$  có hai nghiệm  $z = 2 + \frac{1}{2}i$  và  $z = 2 - \frac{1}{2}i$

- Để  $z_0$  có phần ảo dương  $\Rightarrow z = 2 + \frac{1}{2}i$ . Tính  $w = z_0 i$

MODE 2 ( 2 + = 1 ( 2 ( ENG ) ENG =

$$\left(2 + \frac{1}{2}i\right)i$$

$$-\frac{1}{2} + 2i$$

Vậy phương trình  $w = -\frac{1}{2} + 2i \Rightarrow$  Điểm biểu diễn số phức  $w$  là  $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

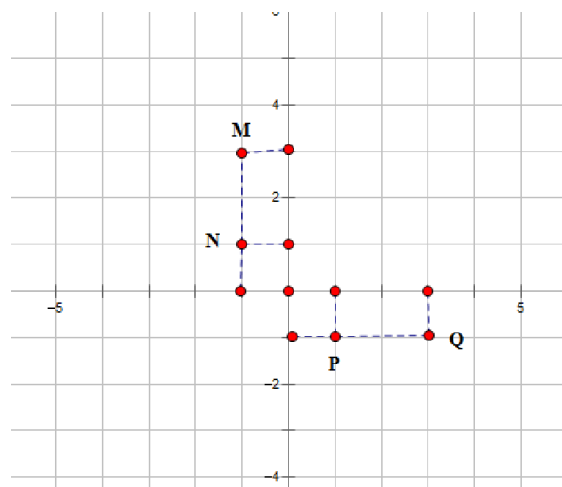
$\Rightarrow$  B là đáp án chính xác

## II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức  $z = 2 + i$ . Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức  $w = (1 - i)z$

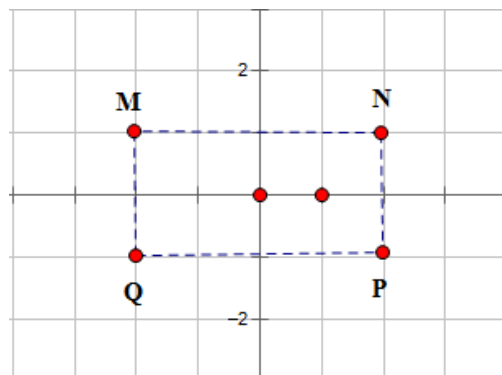
- A. Điểm M B. Điểm N  
C. Điểm P D. Điểm Q



### Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(2-i)z = 4z + 5$ . Hỏi điểm biểu diễn của  $z$  là điểm nào trong các điểm  $M, N, P, Q$  ở hình bên.

- A. Điểm  $N$     B. Điểm  $P$   
C. Điểm  $M$     D. Điểm  $Q$



**Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]**

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm  $A, B, C$  lần lượt là điểm biểu diễn của số phức  $\frac{4}{2+\frac{4}{5}i}$ ,

$(1-i)(1+2i)$ ,  $2i^3$  Khi đó tam giác  $ABC$

- A. Vuông tại  $C$     B. Vuông tại  $A$     C. Vuông cân tại  $B$     D. Tam giác đều

**Bài 4-**Các điểm  $A, B, C, A', B', C'$  trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :

$1-i, 2+3i, 3+i$  và

$3i, 3-2i, 3+2i$  có  $G, G'$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Khẳng định nào sau đây đúng

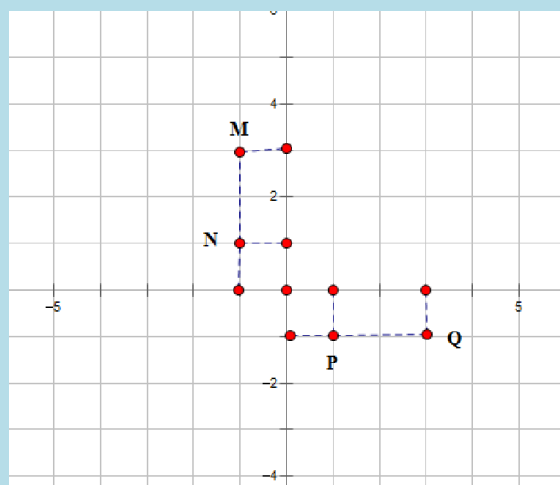
- A.  $G$  trùng  $G'$     B. Vecto  $\vec{GG'} = (1; 1)$   
C.  $\vec{GA} = 3\vec{GA'}$     D. Tứ giác  $GAG'B$  lập thành một hình bình hành

**LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]**

Cho số phức  $z = 2+i$ . Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức  $w = (1-i)z$

- A. Điểm  $M$     B. Điểm  $N$   
C. Điểm  $P$     D. Điểm  $Q$



GIẢI

- Tính số phức  $w = (1 - i)z$  bằng máy tính Casio

$\boxed{(\boxed{1} \boxed{-} \boxed{ENG} \boxed{)} \boxed{(\boxed{2} \boxed{+} \boxed{ENG} \boxed{)} \boxed{=}}$   
 $(1-i)(2+i)$   
 $3-i$

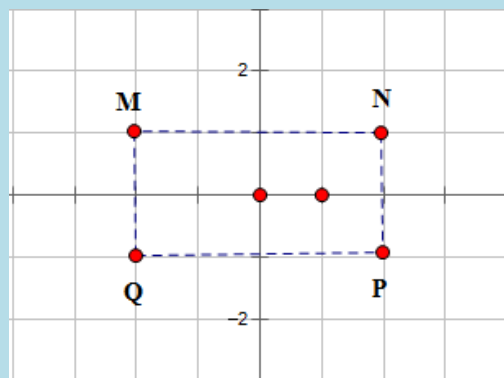
Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức  $w$  là  $(3; -1)$ . Đây là tọa độ điểm  $Q$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

### **Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]**

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(2 - i)z = 4z + 5$ . Hỏi điểm biểu diễn của  $z$  là điểm nào trong các điểm  $M, N, P, Q$  ở hình bên.

- A. Điểm  $N$                       B. Điểm  $P$   
 C. Điểm  $M$                       D. Điểm  $Q$



**GIẢI**

- Cô lập  $(2 - i)z - 4z = 5 \Leftrightarrow (2 + i)z = 5 \Leftrightarrow z = \frac{5}{2 + i}$

- Tìm số phức  $z = \frac{5}{2 + i}$

$\boxed{\boxed{=}} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{ENG} \boxed{=}$   
 $\frac{-5}{2+i}$   
 $-2+i$

Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức  $z$  là  $(-2; 1)$ . Đây là tọa độ điểm  $M$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **C**

### **Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]**

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm  $A, B, C$  lần lượt là điểm biểu diễn của số phức  $\frac{4}{2 + \frac{4}{5}i}$ ,

$(1 - i)(1 + 2i)$ ,  $2i^3$  Khi đó tam giác  $ABC$

- A. Vuông tại  $C$  B. Vuông tại  $A$  C. Vuông cân tại  $B$  D. Tam giác đều

**GIẢI**

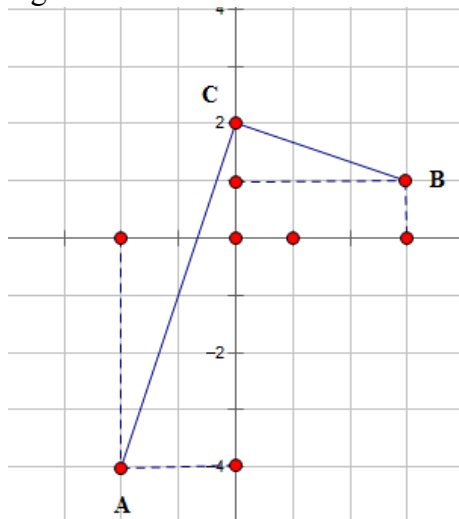
- Rút gọn  $\frac{4}{2 + \frac{4}{5}i}$  được  $2 - 4i$  vậy tọa độ điểm  $A(-2; 4)$

$$\frac{4}{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i} = -2 - 4i$$

- Rút gọn  $(1 - i)(1 + 2i)$  được  $3 + i$  vậy tọa độ điểm  $B(3;1)$

$$(1 - i)(1 + 2i) = 3 + i$$

- Rút gọn  $2i^3 = 2i \cdot i^2 = 2i$  vậy tọa độ điểm  $C(0;2)$
- Để phát hiện tính chất của tam giác  $ABC$  ta chỉ cần biểu diễn trên hệ trục tọa độ là thấy ngay



Để thấy tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **A**

**Bài 4**-Các điểm  $A, B, C, A', B', C'$  trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :

$1 - i, 2 + 3i, 3 + i$  và

$3i, 3 - 2i, 3 + 2i$  có  $G, G'$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Khẳng định nào sau đây đúng

**A.**  $G$  trùng  $G'$

**B.** Vecto  $\vec{GG'} = (1; 1)$

**C.**  $\vec{GA} = 3\vec{GA'}$

**D.** Tứ giác  $GAG'B$  lập thành một hình bình hành

**GIẢI**

- Ta có tọa độ các đỉnh  $A(1; -1), B(2;3), C(3;1) \Rightarrow$  Tọa độ trọng tâm  $G(2;1)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1 \end{cases}$$

- Ta có tọa độ các đỉnh  $A'(0;3), B'(3; -2), C'(3;2) \Rightarrow$  Tọa độ trọng tâm  $G(2;1)$

---


$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1 \end{cases}$$

Rõ ràng  $G \equiv G' \Rightarrow$  Đáp số chính xác là **A**.