

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL
BÀI 28. TÍNH NHANH GÓC GIỮA VECTO, ĐƯỜNG VÀ MẶT

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Góc giữa hai vecto

- Cho hai vecto $\vec{u}(x; y; z)$ và $\vec{v}(x'; y'; z')$, góc giữa hai vecto \vec{u}, \vec{v} được tính theo công thức :

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

- Góc giữa hai vectơ thuộc khoảng $[0^\circ; 180^\circ]$

2. Góc giữa hai đường thẳng

- Cho hai đường thẳng d và d' có hai vecto chỉ phương \vec{u}_d và $\vec{u}_{d'}$. Góc α giữa hai đường thẳng d, d' được tính theo công thức : $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}) \right| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{u}_{d'}|}$ (tích vô hướng chia tích độ dài)
- Góc giữa hai đường thẳng thuộc khoảng $[0^\circ; 90^\circ]$

3. Góc giữa hai mặt phẳng

- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có hai vecto pháp tuyến \vec{n}_P và \vec{n}_Q . Góc α giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ được tính theo công thức : $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_P; \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|}$
- Góc giữa hai đường thẳng thuộc khoảng $[0^\circ; 90^\circ]$

4. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

- Cho đường thẳng d có vecto chỉ phương \vec{u} và mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến \vec{n} . Góc α giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) được tính theo công thức $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}; \vec{n}) \right|$
- Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng thuộc khoảng $[0^\circ; 90^\circ]$

5. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;1;0)$, $B(3;0;4)$, $C(0;7;3)$. Khi đó $\cos(\vec{AB}; \vec{BC})$ bằng :

- A. $\frac{14\sqrt{118}}{354}$ B. $\frac{14}{3\sqrt{118}}$ C. $\frac{\sqrt{798}}{57}$ D. $\frac{\sqrt{798}}{57}$

GIẢI

- Nhập hai vecto \vec{AB}, \vec{BC} vào máy tính Casio

MODE **8** **1** **1** **=** **-** **1** **=** **4** **=** **MODE** **8** **2** **1** **3** **=** **7** **=** **-** **1** **=**

VCT

A **[** **-** **1** **-** **1** **]** **B** **[** **3** **0** **7** **-** **1** **]**

4 **-** **1**

- Tính $\cos(\vec{AB}; \vec{BC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}| |\vec{BC}|} = 0.4296... = \frac{14}{3\sqrt{118}}$

ON **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **7** **SHIFT** **5** **4** **÷** **(** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **)** **×** **SHIFT** **hyp**

SHIFT **5** **4** **)** **)** **=**

VCT

VctA **·** **VctB** **÷** **(** **Abs** **(** **▶**

-0.4296014884

⇒ Đáp số chính xác là **B**

VD2-[Câu 37 đề minh họa vào ĐHQG HN năm 2016]

Góc giữa hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$ là :

- A. 45° B. 90° C. 60° D. 30°

GIẢI

- Đề bài yêu cầu tính góc theo đơn vị độ nên ta chuyển máy tính về chế độ độ

SHIFT **MODE** **3**

Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}(1; 1; 2)$, đường thẳng d' có vecto chỉ phương $\vec{u'}(2; 1; 1)$

- Gọi α là góc giữa hai đường thẳng $d; d'$ thì $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u'}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u'}|}{|\vec{u}| |\vec{u'}|}$

MODE **8** **1** **1** **1** **=** **-** **1** **=** **2** **=** **MODE** **8** **2** **1** **2** **=** **1** **=** **1** **=** **ON**

SHIFT **hyp** **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **7** **SHIFT** **5** **4** **)** **÷** **(** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **)** **×** **SHIFT** **hyp**

SHIFT **5** **4** **)** **)** **=**

VCT

Abs **(** **VctA** **·** **VctB** **)** **÷** **▶**

0.5

- Ta có $\cos \alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

Áp dụng công thức tính thể tích $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \vec{AB} [\vec{AC}; \vec{AD}] \right| = 4$

$$\cos^{-1}(\text{Ans})$$

60

⇒ Đáp số chính xác là C

VD3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Tìm m để góc giữa hai vecto $\vec{u}(1; \log_3 5; \log_m 2)$, $\vec{v}(3; \log_5 3; 4)$ là góc nhọn

- A. $1 > m > \frac{1}{2}$ B. $\begin{cases} m > 1 \\ 0 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$ C. $0 < m < \frac{1}{2}$ D. $m > 1$

GIẢI

- Gọi góc giữa 2 vecto \vec{u}, \vec{v} là α thì $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Để góc α nhọn thì

$$\cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 3 + \log_3 5 \cdot \log_5 3 + 4 \cdot \log_m 2 < 0 \Leftrightarrow \log_m 2 + 1 < 0 \quad (1)$$

- Để giải bất phương trình (1) ta sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start 2 End 2 Step 0.5

MODE 7 log_□ ALPHA) ► 2 ► + 1 = = - 0 . 5 = 1 . 5 =
0 . 2 5 =

Ta thấy $f(0.25) = 0.5 > 0 \Rightarrow$ Đáp án C sai

X	F(X)
0.25	0.5
0.75	-1.409

0.25

Ta thấy $f(1.25) = 4.1062 > 0 \Rightarrow$ Đáp số B và D sai

X	F(X)
1.25	4.1062
2.7095	2.7095

1.25

⇒ Đáp số chính xác là A

VD4-[Câu 42a trang 125 Sách bài tập nâng cao hình học 12]

Tìm α để hai mặt phẳng (P): $x - \frac{1}{4}y - z + 5 = 0$ và

(Q): $x \sin \alpha + y \cos \alpha + z \sin^3 \alpha + 2 = 0$ vuông góc với nhau

- A. 15° B. 75° C. 90° D. Cả A, B, C đều đúng

GIẢI

- Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P(1; -\frac{1}{4}; -1)$, mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q(\sin \alpha; \cos \alpha; \sin^3 \alpha)$

Để hai mặt phẳng trên vuông góc với nhau \Leftrightarrow góc giữa \vec{n}_P và \vec{n}_Q bằng

$$90^\circ \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha - \sin^3 \alpha = 0. \text{ Đặt } P = \sin \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha - \sin^3 \alpha$$

- Vì đề bài đã cho sẵn đáp án nên ta sử dụng phương pháp thử đáp án bằng chức năng CALC của máy tính Casio

Với $\alpha = 15^\circ \Rightarrow P = 0 \Rightarrow$ Đáp án **A** đúng

SIN **ALPHA** **)** **)** **=** **1** **▼** **4** **▶** **COS** **ALPHA** **)** **)** **=** **SIN** **ALPHA** **)** **)**
x[□] **3** **CALC** **1** **5** **=**

$$\sin(X) - \frac{1}{4} \cos(X) - \sin^3(X)$$

Với $\alpha = 75^\circ \Rightarrow P = 0 \Rightarrow$ Đáp án **B** đúng

CALC **7** **5** **=**

$$\sin(X) - \frac{1}{4} \cos(X) - \sin^3(X)$$

\Rightarrow Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Điểm $H(2; 1; 2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (P) . Tìm số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 6 = 0$

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

GIẢI

- Mặt phẳng (P) vuông góc với OH nên nhận $\vec{OH}(2; 1; 2)$ là vecto pháp tuyến

$$\Rightarrow (P): 2(x - 2) - 1(y + 1) - 2(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2z - 9 = 0$$

Mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến là $\vec{n}_Q(1; 1; 0)$

- Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(Q) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{OH} \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{OH}| \cdot |\vec{n}_Q|}$

MODE **8** **1** **1** **2** **=** **-** **1** **=** **-** **2** **=** **MODE** **8** **2** **1** **1** **=** **-** **1** **=** **0** **=**
ON **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **7** **SHIFT** **5** **4** **)** **÷** **(** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **)**
× **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **4** **)** **)** **=**

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot \text{VctB}) \div$$

$$0.7071067812$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = 0.7071... = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

= **SHIFT** **COS** **Ans** **)** **=**

$$\cos^{-1}(\text{Ans})$$

$$45$$

\Rightarrow Đáp số chính xác là **B**

VD6-[Câu 47 trang 126 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Mặt phẳng (Q) nào sau đây đi qua hai điểm $A(3;0;0)$ và $B(0;0;1)$ đồng thời tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc là 60°

- A. $\begin{cases} x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \\ x - 5y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + 5y + 3z - 3 = 0 \\ x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} x - 5y + 3z - 3 = 0 \\ x + 5y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \\ x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

GIẢI**❖ Cách Casio**

Để thực hiện cách này ta sẽ làm các phép thử. Ta thấy tất cả các mặt phẳng xuất hiện trong đáp án đều đi qua 2 điểm A, B . Vậy ta chỉ cần tính góc giữa mặt phẳng xuất hiện trong đáp án và mặt phẳng (Oxy) là xong.

- Với mặt phẳng $(Q): x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; -\sqrt{26}; 3)$, mặt phẳng (Oxy) có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (0; 0; 1)$

Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng trên $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_Q \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

MODE 8 1 1 1 = - √ 2 6) = 3 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 =
ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3)
X SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

Abs(VctA.VctB)÷▶

0.5

\Rightarrow Đáp án chắc chắn phải chứa mặt phẳng $(Q): x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$.

- Tiếp tục thử với mặt phẳng $x - 5y + 3z - 3 = 0$ nếu thỏa thì đáp án A đúng nếu không thì đáp án D đúng

❖ Cách tự luận

- Gọi mặt phẳng (Q) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$

(Q) qua $A \Rightarrow 3A + D = 0$, (Q) qua $B \Rightarrow C + D = 0$. Chọn $D = 1 \Rightarrow C = -1; A = -\frac{1}{3}$

Khi đó $(Q): \frac{1}{3}x + By - z + 1 = 0$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q \left(\frac{1}{3}; B; -1 \right)$

- Góc giữa hai mặt phẳng trên là $60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_Q \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_Q \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left| \frac{1}{3} \cdot 0 + B \cdot 0 - 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3} \right)^2 + B^2 + 1} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{B^2 + \frac{10}{9}}} = \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{B^2 + \frac{10}{9}} = 2 \Leftrightarrow B^2 + \frac{10}{9} = 4 \Leftrightarrow B^2 = \frac{26}{9} \Leftrightarrow B = \pm \frac{\sqrt{26}}{3}$$

\Rightarrow Đáp án chính xác là C

VD7-[Câu 71 trang 134 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+5=0$

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

GIẢI

- Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;1;1)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;2;-1)$

Gọi β là góc giữa 2 vectơ \vec{u}, \vec{n} . Ta có $|\cos(\beta)| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 1 = 2 = - 1 =
ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3)
X SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

Abs(VctA.VctB)÷

0.5

- Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng $(P) \Rightarrow \sin \alpha = |\cos \beta| = 0.5$

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$

SHIFT sin Ans) =

sin⁻¹(Ans)

30

\Rightarrow Đáp án chính xác là A

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 21 trang 119 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho bốn điểm $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Tính góc giữa 2 đường thẳng AB và CD :

A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

Bài 2-[Câu 8 trang 142 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $\vec{u}(1;1;2)$ và $\vec{v}(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ \vec{u}, \vec{v} là 45°

A. $\begin{cases} m=2 \\ m=2+\sqrt{6} \end{cases}$ B. $m=2-\sqrt{6}$ C. $m=2+\sqrt{6}$ D. Không có m thỏa mãn

Bài 3-[Câu 14 trang 143 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho hai mặt phẳng $(P): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $2x + m^2y - 2z + 1 = 0$ vuông góc với nhau:

A. $|m|=2$ B. $|m|=1$ C. $|m|=\sqrt{2}$ D. $|m|=\sqrt{3}$

Bài 4-[Câu 94 trang 140 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Xét hai điểm là trung điểm $B'C'$.
 Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AP và BC'

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 5-[Câu 47a trang 126 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x - y + \sqrt{5}z = 0$ một góc 60°

- A. $\begin{cases} x+3y=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x-3y=0 \\ -3x+y=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 3x+y=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 3x+y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}$

Bài 6-[Câu 19 trang 145 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $(P): 3x+4y+5z+8=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+1=0$, $(\beta): x-2z-3=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Khi đó:

- A. $\varphi = 30^\circ$ B. $\varphi = 45^\circ$ C. $\varphi = 60^\circ$ D. $\varphi = 90^\circ$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 21 trang 119 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho bốn điểm $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Tính góc giữa 2 đường thẳng AB và CD :

- A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

GIẢI

- Đường thẳng AB nhận vectơ $\vec{AB}(-1;1;1)$ là vectơ chỉ phương, đường thẳng CD nhận $\vec{CD}(0;1; -1)$ là vectơ chỉ phương

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB, CD và được tính theo công thức:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{AB}; \vec{CD}) \right| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|}$$

- Nhập các vectơ \vec{AB}, \vec{CD} vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 - 1 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 1 = - 1 =
 VECT VECT
 A [- 1 | 1 | 1] B [0 | 1 | -1]
 1 -1

- Tính $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{AB}; \vec{CD}) \right| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3)
 X SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

0

Trang 8/11

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Xét hai điểm là trung điểm $B'C'$.
 Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AP và BC'

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

GIẢI

- Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là đỉnh A , tia Ox chứa AB , tia Oy chứa AD , tia Oz chứa AA' . Chọn $a = 1$ khi đó: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$, $B'(1;0;1)$, $C'(1;1;1)$

$$\Rightarrow P\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), \vec{AP}\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), \vec{BC'}(0;1;1)$$

- Góc giữa 2 đường thẳng AP, BC' là α thì $\cos \alpha = \frac{|\vec{AP}; \vec{BC'}|}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{BC'}|} = 0.7071... = \frac{\sqrt{2}}{2}$

MODE 8 1 1 1 = 0 . 5 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 1 = 1 = ON
 SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) X
 SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

Abs(VctA.VctB)÷▶

0.7071067812

\Rightarrow D là đáp số chính xác

Bài 5-[Câu 47a trang 126 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60°

A. $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

- Với mặt phẳng $(P): x + 3y = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n_p} = (1;3)$, mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n_Q} = (2;1; \sqrt{5})$

Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng trên $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n_p}; \vec{n_Q}|}{|\vec{n_p}| \cdot |\vec{n_Q}|} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

MODE 8 1 1 1 = 3 = 0 = MODE 8 2 1 2 = 1 = - √ 5) = ON
 SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) X
 SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

Abs(VctA.VctB)÷▶

0.5

\Rightarrow Đáp án chắc chắn phải chứa mặt phẳng $x + 3y = 0$.

- Tiếp tục thử với mặt phẳng $x - 3y = 0$ nếu thỏa thì đáp án A đúng nếu không thì đáp án C đúng

❖ **Cách tự luận**

- Gọi mặt phẳng (P) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$. (P) chứa trục Oz thì (P) chứa 2 điểm thuộc trục Oz . Gọi hai điểm đó là $A(0;0;0)$ và $B(0;0;1)$

(P) qua $A \Rightarrow D = 0$, (P) qua $B \Rightarrow C + D = 0 \Rightarrow C = D = 0$ Chọn $A = 1$

Khi đó $(P): x + By = 0$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q(1; B; 0)$

- Góc giữa hai mặt phẳng trên là $60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_P; \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_Q; \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{|1 \cdot 2 + B \cdot 1 + 0 \cdot (\sqrt{5})|}{\sqrt{1^2 + B^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (\sqrt{5})^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|B + 2|}{\sqrt{10} \sqrt{B^2 + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|B + 2| = \sqrt{10} \sqrt{B^2 + 1} \Leftrightarrow 4(B^2 + 4B + 4) = 10(B^2 + 1) \Leftrightarrow 6B^2 - 16B - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

\Rightarrow Đáp án chính xác là C

Bài 6-[Câu 19 trang 145 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $(P): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha): x - 2y + 1 = 0$, $(\beta): x - 2z - 3 = 0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Khi đó:

A. $\varphi = 30^\circ$ B. $\varphi = 45^\circ$ C. $\varphi = 60^\circ$ D. $\varphi = 90^\circ$

GIẢI

- d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ nên nhận d vuông góc với hai vecto pháp tuyến của hai mặt phẳng này

\Rightarrow Vecto chỉ phương $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (4; 4; 4)$

MODE 8 1 1 1 = - 2 = 0 = MODE 8 2 1 1 = 0 = - 2 = ON

SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans [] 2 2]

4

- Gọi γ là góc giữa $\vec{u}_d; \vec{n}_P$ ta có $|\cos \gamma| = \frac{|\vec{u}_d; \vec{n}_P|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_P|} = 0.8660... = \frac{\sqrt{3}}{2}$

MODE 8 1 1 4 = 2 = 2 = MODE 8 2 1 3 = 4 = 5 = ON

SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) X

SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot \text{VctB}) \div \triangleright$$

0.8660254038

Ta có $\sin \varphi = |\cos \gamma| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$

SHIFT **sin** **Ans** **)** **=**

$$\sin^{-1}(\text{Ans})$$

60

\Rightarrow Đáp số chính xác là **C**
Chính xác là **B**.