PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL BÀI 24. TÍNH NHANH VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG – MẶT

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Vị trí tương đối của 2 đường thẳng

- Cho hai đường thẳng d và d' có hai vecto chỉ phương u_d và u_d và có hai điểm M, M' thuộc hai đường thẳng trên.
- $d \parallel d'$ nếu $\overrightarrow{u_d} = k.\overrightarrow{u_d}$ và có không có điểm chung
- $d \equiv d'$ nếu $\vec{u_d} = k \vec{u_d}$ và có một điểm chung
- $d \operatorname{c\acute{a}t} d' \operatorname{n\acute{e}u} \overrightarrow{u_d} \operatorname{không song song } \overrightarrow{u_d} \operatorname{v\`{a}} MM' [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_d}] = 0$
- d chéo d' nếu $\overrightarrow{u_d}$ không song song $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{MM'} [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_d}] \neq 0$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

- Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có vecto chỉ phương $\vec{u_d}$ và vecto pháp tuyến $\vec{n_P}$
- $d \parallel (P)$ nếu $\vec{u_d} \perp \vec{n_P}$ và không có điểm chung
- d = (P) nếu $\vec{u_d} \perp \vec{n_P}$ và có điểm chung
- $d \perp (P)$ nếu $\overrightarrow{u_d} = k.\overrightarrow{n_P}$

3. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto: vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

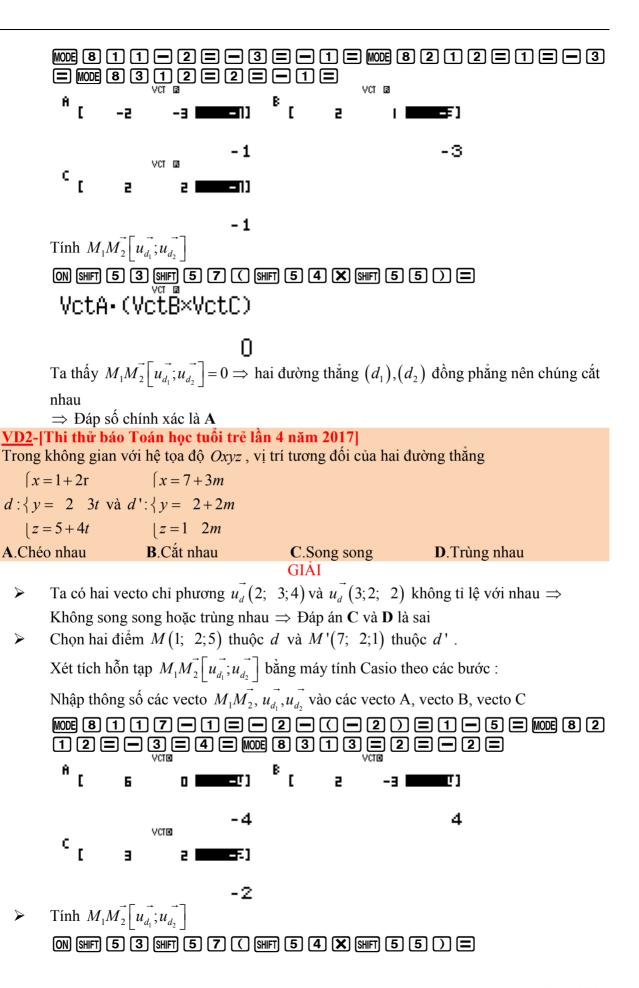
Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$ và đường thẳng

$$d_2: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{1}$$
. Vị trí tương đối của d_1, d_2 là:

A.Cắt nhau B.Song song C.Chéo nhauD. Vuông góc

GIÁI

- Ta thấy $\vec{u_{d_1}}(2;1;3)$ không tỉ lệ $\vec{u_{d_2}}(2;2;1) \Rightarrow (d_1), (d_2)$ không song song hoặc trùng nhau



VctA•(VctB×VctC)

-64

Ta thấy $M_1 M_2 \left[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}} \right] = 64 \neq 0 \Rightarrow$ hai đường thẳng (d), (d') không đồng phẳng nên chúng chéo nhau

⇒ Đáp số chính xác là **A**

VD3-[Đề minh họa bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{1}$ và mặt phẳng

(P): 3x 3y + 2z + 6 = 0. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

 \mathbf{A} . d cắt và không vuông góc với (P)

 $\mathbf{B}.d\perp(P)$

C. d song song với (P)

 \mathbf{D} . d nằm trong (P)

GIÅI

ightharpoonup Ta có u_d (1; 3; 1) và n_P (3; 3;2) . Nhập hai vecto này vào máy tính Casio

· 1

Xét tích vô hướng $\vec{u_d} \cdot \vec{n_P} = 10 \Rightarrow \vec{u_d}$ không vuông góc với $\vec{n_P} \Rightarrow d$, (P) không thể song song hoặc trùng nhau \Rightarrow Đáp số đúng chỉ có thể là $\bf A$ hoặc $\bf B$ $(\bf A)$ SHIFT $\bf 5$ $\bf 7$ SHIFT $\bf 5$ $\bf 4$ $\bf 6$

VotA-VotŘ

10

Lại thấy $\vec{u_d}$, $\vec{n_P}$ không song song với nhau $\Rightarrow d$ không thể vuông góc với (P) \Rightarrow Đáp số $\bf B$ sai

Vậy đáp án chính xác làA

<u>VD4</u>-[Câu 63 Sách bài tập hình học nâng cao trang 132]

Xét vị trí tương đối của đường thẳng $d: \frac{x-9}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z=3}{3}$ và đường thẳng

 (α) : x+2y 4z+1=0

 \mathbf{A} . d cắt và không vuông góc với (P)

B. $d \perp (P)$

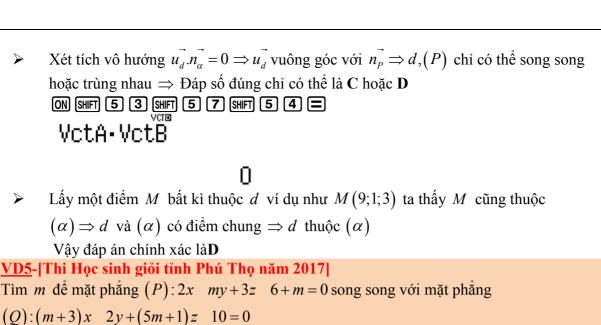
C. d song song với (P)

D. d nằm trong (P)

GIÅI

ightharpoonup Ta có u_d (8;2;3) và n_P (1;2;4) . Nhập hai vecto này vào máy tính Casio

3 -4



$$\mathbf{A}. m = 1$$
 $\mathbf{B}. m \neq 1$ $\mathbf{C}. m = \frac{9}{10}$ $\mathbf{D}.$ Không tồn tại m

Ta có hai vecto pháp tuyến $\vec{n_p}(2; m, 3)$ và $\vec{n_Q}(m+3; 2; 5m+1)$ $\vec{\text{Dê}}(P) || (Q) \Leftrightarrow \vec{n_P} = k \cdot \vec{n_Q} \Leftrightarrow \frac{2}{m+3} = \frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} = k (1)$

Với m = 1 ta có k = 2 thỏa (1) Thử lại ta thấy hai mặt phẳng có dạng $\begin{cases} (P): 2x & y+3z & 5=0\\ (Q): 2x & 2y+6z & 10=0 \end{cases}$

Nhận thấy $(P) \equiv (Q) \Rightarrow \text{Đáp án } \mathbf{A} \text{ sai}$

Với $m = \frac{9}{10}$ ta có $k = \frac{20}{21}$ không thỏa mãn (1) $\Rightarrow m = \frac{9}{10}$ không nhận \Rightarrow C và **B** đều sai

⇒ Đáp án **D** là chính xác

<u>VD6</u>-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

 $\int x = 1 + 2t$

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d: \{y=1\}$ và mặt phẳng $|z = 2 \quad 3t$

(P): 2x + y + z 2 = 0. Giao điểm M của d và P có tọa độ:

A. M(3;1; 5) **B**. M(2;1; 7) **C**. M(4;3;5) **D**. M(1;0;0)

GIÁI

- Điểm M thuộc d nên có tọa độ M(1+2t;1; 2 2t). Điểm M cũng thuộc mặt phẳng (P) nên tọa độ điểm M phải thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) $\Leftrightarrow 2(1+2t)+1+(2 3t) 2=0$
- Công việc trên là ta sẽ nhẩm ở trong đầu, để giải bài toán ta dùng máy tính Casio luôn 2 (1 + 2 ALPHA)) + 1 + (- 2 - 3 ALPHA)) - 2 SHIFT CALC 1 =

Ta tìm được luôn t = 1 vây x = 1 + 2t = 3

⇒ Đáp án chính xác làA

VD7-[Đề minh họa bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;0;2) và đường thẳng

 $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A vuông góc và cắt d

A.
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$
 B. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

B.
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

C.
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

C.
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$
 D. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$

- Đường thẳng Δ cắt d tại điểm B . Vì B thuộc d nên có tọa độ $B(1+t;t;\ 1+2t)$
- Ta có : $\Delta \perp d \Rightarrow \vec{u_{\Lambda}} \perp \vec{u_{d}} \Leftrightarrow \vec{u_{\Lambda}} \vec{u_{d}} = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u_{d}} = 0$ Với $\vec{AB}(1+t-1;t-0;-1+2t-2)$ và $\vec{u_d}(1;1;2)$ ta có : $\vec{AB}.\vec{u_d}=0$ $\Leftrightarrow 1.(1+t \ 1)+1(t \ 0)+2(1+2t \ 2)=0$

Đó là việc nhẩm ở trong đầu hoặc viết ra nháp, nhưng nếu dùng máy tính Casio ta sẽ bâm luôn:

(— 1 + 2 ALPHA) — 2) SHIFT CALC 1 =

Ta được luôn $t = 1 \Rightarrow B(2;1;1) \Rightarrow \vec{u_A} = A\vec{B}(1;1;1)$

⇒ Đáp án chính xác là**B**

VD8-[Câu 74 Sách bài tập hình học nâng cao 12 năm 2017]

Cho hai điểm A(3;1;0), B(9;4;9) và mặt phẳng $(\alpha):2x y+z+1=0$. Tìm tọa độ của M trên (α) sao cho $|MA \ MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\mathbf{A}.\,M\left(1;1;\ \frac{5}{2}\right)$$

$$\mathbf{B}.M\left(2;\frac{1}{2};\ 2\right)$$

$$\mathbf{C}.M\left(1;\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$\mathbf{D}.M\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4};3\right)$$

GIĂI

Nếu A, B, M không thẳng hàng sẽ thì ba điểm trên sẽ lập thành một tam giác. Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có |MA MB| < AB

Nếu ba điểm trên thẳng hàng thì ta có $|MA \ MB| = AB$ nếu A, B nằm khác phía với (α) (điều này đúng). Theo yêu cầu của đề bài thì rõ ràng A, B, M thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thắng AB và (α)

$$\int x = 3$$
 12t

Ta có: $AB: \{ y=1+3t \Rightarrow M(3 \ 12t; 1+3t; \ 9t) \}$ |z=9t|

Tìm t bằng máy tính Casio:

2 (3 - 1 2 APHA)) - (1 + 3 APHA)) + - 9 APHA)

- + 1 SHIFT CALC 1 =
- 2(3-12X)-(1+3X) b

Ta được $t = \frac{1}{6} \Rightarrow M\left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

⇒ Đáp án chính xác là C

<u>III) BÀI TẬP</u> TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho đường thẳng d:x $1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ và mặt

phẳng (α) : 2x + 4y + 6z + 2017 = 0. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- **A**. $d \parallel (\alpha)$ **B**. d cắt nhưng không vuông góc với (α)
- C. $d \perp (\alpha)$ D. d nằm trên (α)

Bài 2-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiếu – Bình Định lần 1 năm 2017]

$$\begin{cases} x = 1 + t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 + t' \end{cases}$$

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $d: \{y=2 \ t \ \text{và } d': \{y=1 \ t' \ . \ \text{Vị trí tương đối} \ |z=2 \ 2t \ |z=1 \$

của hai đường thẳng là:

A.Chéo nhau B.Cắt nhau

C.Song song

D.Trùng nhau

Bài 3-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng Δ có phương trình :

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Xét mặt phẳng (P):10x+2y+mz+11=0 với m là tham số thực . Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ

A.
$$m = 2$$
 B. $m = 2$ **C**. $m = 52$ **D**. $m = 52$

Bài 4-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

$$\int x = 1 + 2t$$

Cho mặt phẳng (P): x + 3y + z = 0 và đường thẳng Δ : $\begin{cases} y = 2 & t \\ z = 1 + t \end{cases}$

điểm có tọa độ

- A.(1;2; 1) B.(0; 1;3) C.(1;3; 2) D.(3;1;0)
- <u>Bài 5</u>-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3) và

$$\int x = t$$

đường thẳng $d: \{y=2+t : \text{Cao độ giao điểm của } d \text{ và mặt phẳng } (ABC) \text{ là : }$

$$|z = 3 + t$$

A. 3

Bài 6-[Thi thử THPT Vĩnh Chân - Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai mặt phẳng $(P): nx + 7y \quad 6z + 4 = 0$,

(Q): 3x + my 2z 7 = 0 song song với nhau. Khi đó giá trị m, n thỏa mãn là:

A.
$$m = \frac{7}{3}, n = 1$$

A.
$$m = \frac{7}{3}, n = 1$$
 B. $m = 9, n = \frac{7}{3}$ **C**. $m = \frac{3}{7}, n = 9$ **D**. $m = \frac{7}{3}, n = 9$

D.
$$m = \frac{7}{3}, n = 9$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỀN

Bài 1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho đường thẳng d:x $1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ và mặt

phẳng (α) : 2x + 4y + 6z + 2017 = 0. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $d \parallel (\alpha)$ **B.** d cắt nhưng không vuông góc với (α)

C. $d \perp (\alpha)$ D. d nằm trên (α)

GIÅI

• Nhập vecto chỉ phương $\overline{u_d}(1;2;3)$ và vecto pháp tuyến $n_{\alpha}(2;4;6)$ vào máy tính Casio



Tính tích vô hướng $\vec{u_d} \cdot \vec{n_\alpha} = 28 \neq 0 \Rightarrow \vec{u_d}$ không vuông góc $\vec{n_\alpha} \Rightarrow d$ và (α) không thể song song và không thể trùng nhau

ON SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 =

VotA-VotB

• Lại thấy tỉ lệ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \Rightarrow \vec{u_d} \parallel \vec{n_\alpha} \Rightarrow d \perp (\alpha)$

Vậy đáp số chính xác là C

Bài 2-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

$$\int x = 1 + t \qquad \qquad \int x = 2 + t'$$

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $d: \{y=2 \ t \ và \ d': \{y=1 \ t' \ . \ Vị trí tương đối$

$$|z = 2 \quad 2t \qquad |z = 1|$$

của hai đường thẳng là:

A.Chéo nhau

B.Cắt nhau

C.Song song

D.Trùng nhau

GIAI

- Vì Xét hai vecto chỉ phương $\vec{u_d}(1; 1; 2)$ và $\vec{u_d}(1; 1; 0)$ không tỉ lệ với nhau \Rightarrow Hai đường thẳng d và d' không thể song song hoặc trùng nhau \Rightarrow Đáp án \mathbb{C} và \mathbb{D} loại
- Lấy hai điểm thuộc hai đường thẳng là M(1;2;2) và M'(2;1;1). Nhập ba vecto vào casio



0

• Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{MM'} \left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_d} \right] = 0$

ON SHIFT 5 3 SHIFT
$$\bullet$$
 DEL SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 \times SHIFT 5 5) = VCtA \bullet (VCtB×VCtC)

0

 $\Rightarrow d, d'$ đồng phẳng (nằm trên cùng một mặt phẳng) $\Rightarrow d$ cắt d'

 \Rightarrow Đáp án chính xác là ${f B}$

Bài 3-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng Δ có phương trình

$$:\frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Xét mặt phẳng (P):10x+2y+mz+11=0 với m là tham số thực . Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ

A.
$$m = 2$$
 B. $m = 2$ **C**. $m = 52$ **D**. $m = 52$

GlA

- Ta có vecto chỉ phương $\vec{u_{\Delta}}(5;1;1)$ và vecto pháp tuyến $\vec{n_{P}}(10;2;m)$
- Để mặt phẳng $(P) \perp \Delta$ thì $\vec{n_P}$ tỉ lệ với $\vec{u_{\Lambda}}$ (song song hoặc trùng nhau)

$$\Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{m}{1} \Rightarrow m = 2$$

Vậy đáp số chính xác là **B**

Bài 4-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

 $\int x = 1 + 2t$

Cho mặt phẳng (P): x = 3y + z = 0 và đường thẳng Δ : $\{y = 2 \mid t \mid P\}$ và Δ cắt nhau tại |z| = 1 + t

điểm có toa đô

A.(1;2; 1) B.(0; 1;3) C.(1;3; 2) D.(3;1;0)

GIÅI

• Gọi giao điểm là M, vì M thuộc Δ nên M(1+2t;2 t; 1+t)

•	Tọa độ $\it M$	thỏa mã	n phương trìnl	n mặt phẳng	g(P)	nên ta	a có thể	sử dụ	ng máy tí	nh (Casio	tìm
	luôn ra t											

$$\begin{array}{c} \text{MODE} \ 1 \ 1 \ (\ 1 \ + \ 2 \ \text{M.PHA} \) \) \ - \ 3 \ (\ 2 \ - \ \text{M.PHA} \) \) \ + \ (\ - \ 1 \ + \ \text{M.PHA} \) \) \\ \text{CONTROL OF } \\ \text{CONTROL OF } \end{array}$$

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(3;1;0)$$

⇒ Đáp số chính xác là **D**

Bài 5-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiếu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3) và

$$\int x = t$$

đường thẳng $d: \{y=2+t : \text{Cao độ giao điểm của } d \text{ và mặt phẳng } (ABC) \text{ là : }$

$$z = 3 + t$$

A. 3

B. 6

C.9

D. 6

• Mặt phẳng (ABC) đi qua 3 điểm thuộc 3 trục tọa độ vậy sẽ có phương trình là :

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z \quad 1 = 0$$
.

• Gọi giao điểm là M(t;2+t;3+t). Sử dụng máy tính Casio tìm t

$$V_{ay} z = 3 + t = 9$$

⇒ Đáp số chính xác là C

Bài 6-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai mặt phẳng $(P): nx + 7y \quad 6z + 4 = 0$,

(Q): 3x + my 2z 7 = 0 song song với nhau. Khi đó giá trị m, n thỏa mãn là:

A.
$$m = \frac{7}{3}, n = 1$$

A.
$$m = \frac{7}{3}, n = 1$$
 B. $m = 9, n = \frac{7}{3}$ **C**. $m = \frac{3}{7}, n = 9$ **D**. $m = \frac{7}{3}, n = 9$

D.
$$m = \frac{7}{3}, n =$$

■ Để 2 mặt phẳng song song với nhau thì 2 vecto chỉ phương của chúng song sóng hoặc trùng nhau $\Leftrightarrow \vec{n_P}(n;7;-6)$ tỉ lệ với $\vec{n_Q}(3;m;2) \Leftrightarrow \frac{n}{3} = \frac{7}{m} = \frac{6}{3} = k$

- Ta thu được tỉ lệ k = 3 từ đó suy ra n = 9; $m = \frac{7}{2}$
 - \Rightarrow Đáp số chính xác là **D**.