<u>Situation du problème :</u>

Soit une barre solide de langueur L, étant comme un conducteur thermique, de coefficient de diffusion thermique D.

Condition initiale : $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}=0)=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$

Le problème est supposé à 1D.

A un instant t les extrémités de la barre son mises en contact avec deux sources de température identique :

$$\boldsymbol{T}_{\acute{e}xtr}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{t})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{L},\boldsymbol{t})$$

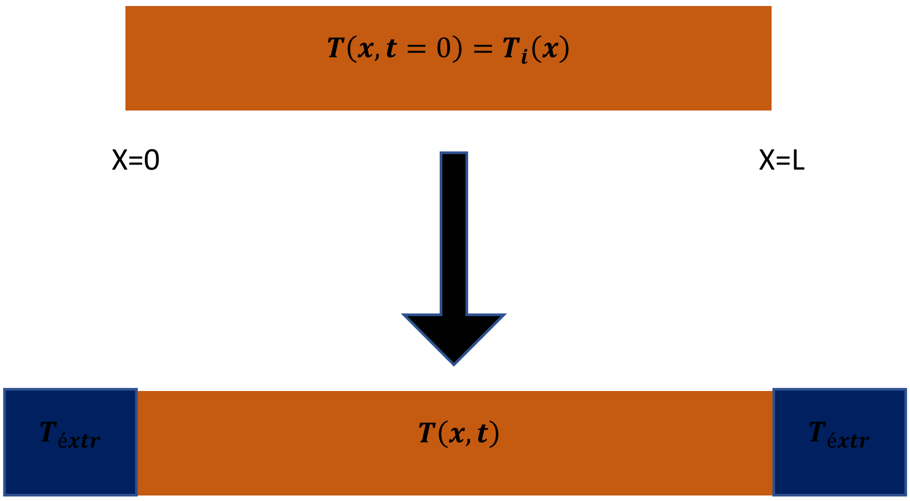


Figure 1 : Choc thermique sur une barre de longueur L

La température T(x) est solution de l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{t}}=\boldsymbol{D}\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{x}^2}$$

<u>Principe de la résolution numérique :</u>

A l'aide de la méthode des éléments finies on cherche une solution numérique de l'équation**.**

Supposons que nous cherchions une solution sur une durée totale $\boldsymbol{\tau}$**.**

Faisons une discrétisation à la barre en $\boldsymbol{n_x}$ tronçons de longueur égale à $\Delta\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{n_x}}$. Ainsi l'abscisse discrète x_m est :

$$\boldsymbol{x_m}=\boldsymbol{m}\Delta\boldsymbol{x}\ \textbf{ avec m} \in [\mathbf{0},\boldsymbol{n_x}]$$

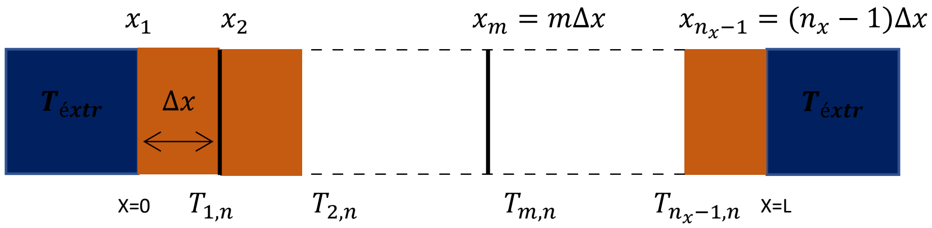
De même, la durée totale d'évolution est discrétisée en n_t intervalles de la durée $\Delta\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{n_t}}$.

Ainsi l'instant discret t_n est :

$$t_n = n\Delta t \quad \textbf{avec} \;\; \mathbf{n} \in [0, n_t]$$

Par conséquent on définit la température discrétisée comme suit :

$$T_{m,n} = T(m.\delta x, n.\Delta t)$$



Discrétisation de la température de la barre Tm,n

En développant la température au er ordre discret sur le temps au voisinage de t_n à l'abscisse x_m ,il vient donc :

$$T_{m,n+1} = T_{m,n} + \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right|_{x_m} .\Delta t + o(\Delta t)$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right|_{x_m} \simeq \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t}$$

De même en développant la température au 2sd ordre au voisinage de x_{m+1} et x_{m-1} à la date t_n :

$$T_{m+1,n} = T_{m,n} + \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{t_n} .\Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t_n} .(\Delta x)^2 + o(\Delta x^2)$$

$$T_{m-1,n} = T_{m,n} - \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{t_n} .\Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t_n} .(\Delta x)^2 + o(\Delta x^2)$$

En sommant les deux équations on obtient :

$$\left.\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t_n} \simeq \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2}$$

Ainsi l'équation de la diffusion discrétisée s'écrit :

$$\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta x^2}(T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n})$$

Finalement la relation de récurrence permettant d'obtenir la température en x_m à l'instant t_{n+1} en fonction des températures $t_{m,n}$, $t_{m+1,n}$ et $t_{m-1,n}$ calculées à l'instant t_n :

$$\mathbf{T_{m,n+1} = T_{m,n} + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left[T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}\right]}$$

- ***<u>Implémentation du code en python</u>***

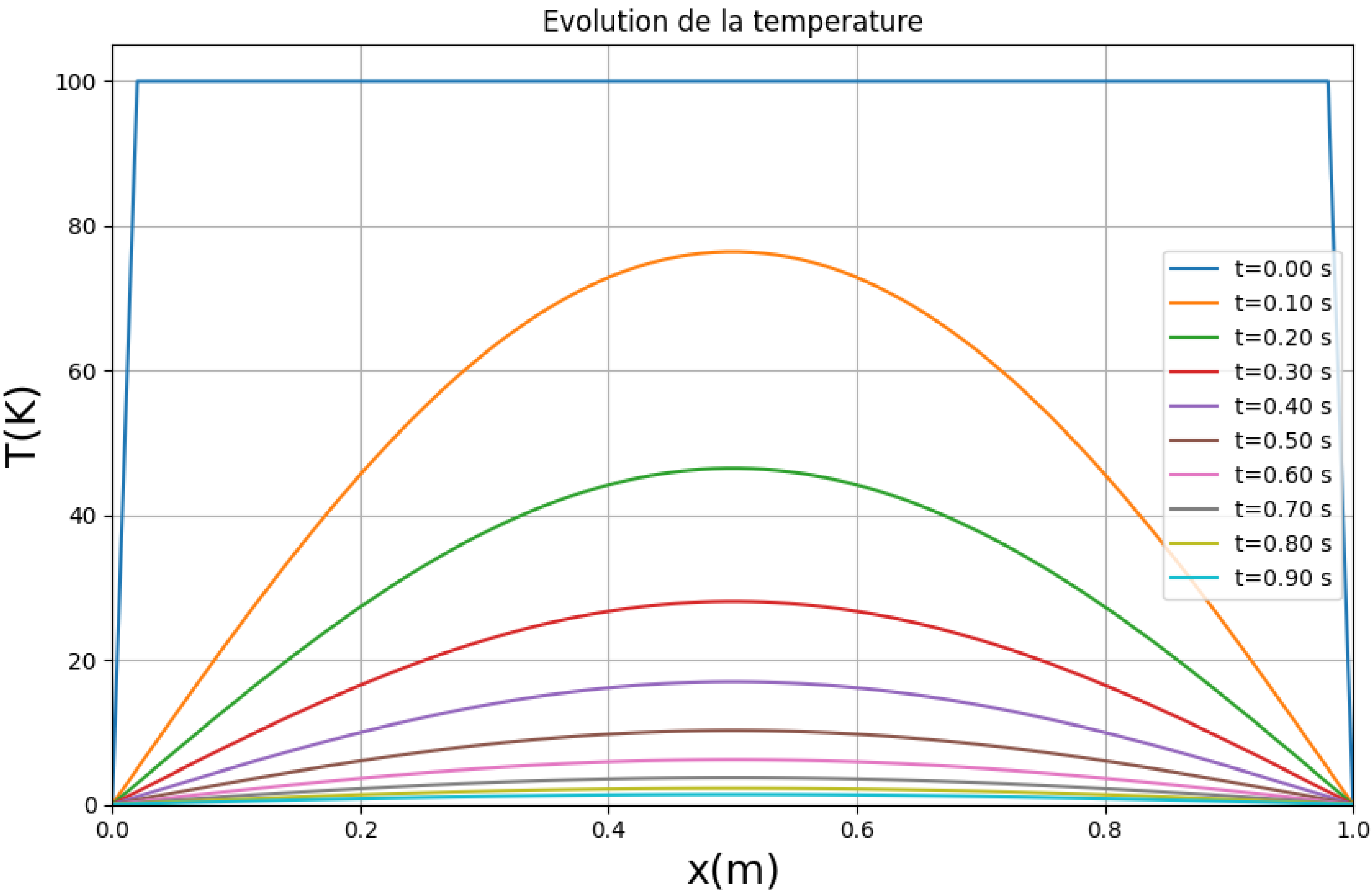
```python
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L=1         #Longueur de la barre
tau=1       #Duree totale evolution
nx=100      #Nombre de tronçons
nt=10000    #Nombre intervalles de temps
Dx=L/nx     #Longueur tronçon
Dt=tau/nt   #Intervalle elementaire de temps
D=0.5       #Coefficient de difusion thermique
T0=100      #Temperature initiale de la barre
Tex=0       #Temperature des extremites

x=np.linspace(0,L,nx)
T=100*[T0]
T[0],T[-1]=Tex,Tex
accroissT=np.zeros(nx)

for n in range(nt):
    for m in range(1,nx-1):
        a=(Dt*D)/(Dx**2)
        accroissT[m]=a*(T[m+1]+T[m-1]-2*T[m])
    for m in range(1,nx-1):
        T[m]+=accroissT[m]
    if (n%1000==0):
        plotlabel= 't=%1.2f s'%(n*Dt)
        plt.plot(x,T,label=plotlabel)

plt.title('Evolution de la temperature')
plt.axis([0,L,0,105])
plt.legend()
plt.xlabel('x(m)',fontsize=18)
plt.ylabel('T(K)',fontsize=18)
plt.grid()
plt.show()
```


Evolution de la temperature
T(K)
x(m)
100
80
60
40
20
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t=0.00 s
t=0.10 s
t=0.20 s
t=0.30 s
t=0.40 s
t=0.50 s
t=0.60 s
t=0.70 s
t=0.80 s
t=0.90 s