$$\begin{bmatrix} M & A & T & R \\ I & C & E & S \end{bmatrix}$$

I) Introduction

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{1}{3} \\ -5 & -\frac{3}{4} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

A est une matrice comportant 2 lignes et 3 colonnes.
Plus généralement, une matrice est un tableau de nombres
Son <u>format</u> est défini par le couple $(n ; p)$, où

n : nombre de lignes, p : nombre colonnes

Par la suite, on notera $\mathcal{M}(n;p)$ l'ensemble des matrices de format $(n;p)$

Quand $n = p$, on dit que la matrice est <u>carrée d'ordre n</u>. On notera $\mathcal{M}(n)$ l'ensemble de ces matrices.

Une matrice n'ayant qu'une ligne s'appelle une <u>matrice ligne</u>
Une matrice n'ayant qu'une colonne s'appelle une <u>matrice colonne</u>

Les nombres figurant ds la matrice sont appelés les <u>termes</u> de cette matrice.

Chaque terme peut ê identifié par un couple (i, j), où i est son n° de ligne et j son n° de colonne.

<u>Exemple:</u> dans la matrice A ci-dessus, on a

$$a_{11} = 3$$

(rigoureusement, vu qu'il y a 2 dimensions et moins de 10 col/rang. on peut écrire $a_{1,1}$ mais pg si pas ambiguïté)

$a_{11} = 3 \quad a_{12} = 2 \quad a_{13} = \frac{1}{3}$

$a_{21} = -5 \quad a_{22} = -\frac{3}{4} \quad a_{23} = \sqrt{2}$

II) Règles de calcul

1) Sommes de matrices

Pour pouvoir additionner deux matrices doivent être de même f[illegible]

La matrice somme est alors du m̂ format

Maths exp. 8 déc 2021

.. Matrices

II) Règles de calcul

1) Somme de matrices

Pour pouvoir additionnées, deux matrices doivent être de même format.

La matrice somme est alors du même format que les deux précédentes.

Si on a $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$

avec $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$ $(n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*)$

alors

$$\boxed{C = A+B \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice nulle est une matrice dont tous les termes sont nuls. On la note 0, ou 0_{np} en cas d'ambiguïté.

- Si $A \in \mathcal{M}(n,p)$ et $0 = 0_{n,p}$, alors

$$\boxed{A + 0 = A}$$

L'addition est <u>commutative</u>.

$$\forall A \in \mathcal{M}(n,p), \ \forall B \in \mathcal{M}(n,p)$$

on a $\boxed{A+B = B+A}$.

- <u>2) Produits de matrices par un réel.</u>

Si $A \in \mathcal{M}(n,p)$, $A = (a_{ij})$,

on définit la matrice kA par

$$\boxed{(kA)_{ij} = k a_{ij}}$$

Ex.

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

alors $-3A = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$

Si $k = -1$, la M $-1 \times A$ est notée $-A$, appelée la <u>matrice opposée</u> de A.

On définit alors la différence de deux M A et B de m format par $A - B = A + (-B)$

De façon immédiate, on a $A - A = 0$

- <u>3) Produit de deux matrices</u>

Deux matrices A et B ne peuvent être multipliées entre elles que si $A \in \mathcal{M}(m,n)$ et $B \in \mathcal{M}(n,p)$

| Le produit AB appartient alors à $\mathcal{M}(m,p)$.

Si on a $C=(c_{ij})=AB$, on a

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\times b_{kj} \qquad \text{si } A\in\mathcal{M}(m,n),\ B\in\mathcal{M}(n,p)}$$

<u>Exemple</u>:

On pose $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

et $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$A\in\mathcal{M}(2,\underset{n}{3})$ et $B\in\mathcal{M}(\underset{n}{3},2)$

Donc AB est définie, son format sera : $(2,2)$

$c_{11}=(a_{11}\times b_{11})+(a_{12}\times b_{21})+(a_{13}\times b_{31})$

$=5\times4+7\times(-1)+0\times2=13$

$c_{12}=(a_{11}\times b_{12})+(a_{12}\times b_{22})+(a_{13}\times b_{32})$

$=5\times0+7\times2+0\times3=14$

$c_{21}=(a_{21}\times b_{11})+(a_{22}\times b_{21})+(a_{23}\times b_{31})$

$=(-1)\times4+1\times(-1)+3\times2$

$=1$

$c_{22}=(a_{21}\times b_{12})+(a_{22}\times b_{22})+(a_{23}\times b_{32})$

$=(-1)\times0+1\times2+3\times3=11$

Donc $AB = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$

Il est commode d'adopter une disposition particulière des matrices pour mener les calculs.

$$\begin{array}{cc} & B\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} AB \end{array}$$

$c_{11} = 5 \times 4 + 7 \times (-1) + 0 \times 2$

Prof Montrer que BA est définie et la calculer.

$$\begin{array}{cc} & A\begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ B\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 & 28 & 0 \\ -7 & -5 & 6 \\ 7 & 17 & 9 \end{pmatrix} BA \end{array}$$

$B \in \mathcal{M}(3, \boxed{2})$ et $A \in \mathcal{M}(\boxed{2}, 3)$

Donc BA définie et $BA \in \mathcal{M}(3,3)$

21p190)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0,5 & -1,5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & 2,5 & -3 \\ -8 & 2 & -0,5 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 11 & 0,5 & -4 \\ -7,5 & 0,5 & 5,5 \end{pmatrix}$ $\quad A-B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -3 & -4,5 & 2 \\ 8,5 & -3,5 & 6,5 \end{pmatrix}$

$-2A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -4 \\ -8 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -12 \end{pmatrix}$ $\quad 3B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 12 \\ 21 & 7,5 & -9 \\ -24 & 6 & -1,5 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prof

Prouver que si $A \in \mathcal{M}_n$

& $I = I_n \Rightarrow AI = IA = A$

III) Matrices carrées

On note $\mathcal{M}_n$ l'emesemble des matrices de format (n,n).

Dans $\mathcal{M}_n$, tous les produits sont possibles aussi bien à g. qu'à dr

Dans le cas général, on a pas $AB = BA$ $(A, B \in \mathcal{M}_n)$

$\boxed{\text{La multiplication n'est pas commutative.}}$

Quand l'égalité $AB = BA$ est vraie, on dit que les matrices commutent.

La matrice unité, notée I_n ou I en absence d'ambiguité, est d
par :

$$\boxed{\begin{cases} I_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ I_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

ex :

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\boxed{AI = IA = A}$ (si $A \in \mathcal{M}_n$ et $I \in \mathcal{M}_n$)

Scanned with CamScanner