CARLISI Nolan DM 1

Exercice 1: Suites

1a)

$$
\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_{n+1}}{u_n} \\
&= \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{2^n \times 2} \times \frac{2^n}{n^2} \\
&= \frac{(n^2+2n+1) \times 2^n}{2^n \times 2 \times n^2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{v_n = \frac{(n+1)^2}{2n^2}}$$

1b)

$$
\begin{aligned}
v_n &> \frac{1}{2} \\
\frac{(n+1)^2}{2n^2} - \frac{1}{2} &> 0 \\
\frac{(n+1)^2 - n^2}{2n^2} &> 0 \\
\frac{n^2+2n+1-n^2}{2n^2} &> 0 \\
\boxed{\frac{2n+1}{2n^2} > 0}
\end{aligned}
$$

c)
p égal 5, car $v_5 < \frac{3}{4} < v_6$

d)
pour $n \geq 5$
$v_n \leq \frac{3}{4}$

$$v_n \leq \frac{3}{4}$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$$
$$\boxed{u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n}$$

2a)

$$P(n) = « \, u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5 \, »$$

<u>Initialisation:</u>

$$u_5 \leq (\frac{3}{4})^{5-5} \times u_5$$
$$\leq 1 \times u_5$$
$$\boxed{u_5 \leq u_5}$$

$P(5)$ est Vrai

<u>Hérédité:</u>
<u>HR:</u>$(\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$
<u>CCL:</u>$(\frac{3}{4})^{n+1-5} \times u_5 = (\frac{3}{4})^{n-4} \times u_5$

$$u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$$
$$\frac{3}{4}u_n \leq (\frac{3}{4})(\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$$
$$\boxed{u_{n+1} \leq (\frac{3}{4})^{n-4} \times u_5}$$

$P(n)$ est Vrai, $\forall n \geq 5$

2b)

$$u_5 \leq (\frac{3}{4})^{5-5} \times u_5$$
$$u_5 + u_6 \leq (\frac{3}{4})^0 \times u_5 + (\frac{3}{4})^{6-5} \times u_5$$
$$u_5 + u_6 + u_7 \leq 1 \times u_5 + (\frac{3}{4})^1 \times u_5 + (\frac{3}{4})^{7-5} \times u_5$$
$$u_5 + u_6 + u_7 + \cdots + u_n \leq 1 \times u_5 + \frac{3}{4} \times u_5 + (\frac{3}{4})^2 \times u_5 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$$
$$u_5 + u_6 + u_7 + \cdots + u_n \leq [1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5}] \times u_5$$
$$\boxed{S_n \leq [1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5}] \times u_5}$$

c)
$1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5}$ est la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5} &= \frac{1 - (\frac{3}{4})^{n+1-5}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1 - (\frac{3}{4})^{n-4}}{\frac{1}{4}} \\ &= (1 - (\frac{3}{4})^{n-4}) \times 4 \\ &= 4 - 4(\frac{3}{4})^{n-4} \end{aligned}$$

Or $-4(\frac{3}{4})^{n-4}$ est négatif

Donc $1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5} \leq 4$
$[1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5}]u_n \leq 4u_n$
$S_n \leq 4u_n$

3.)

$$S_{n+1} - S_n = [1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5} + (\frac{3}{4})^{n-4}] \times u_5 - [1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5}] \times u_5$$

$$S_{n+1} - S_n = \left([1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5} + (\frac{3}{4})^{n-4}] - [1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5}]\right) \times u_5$$
$$S_{n+1} - S_n = \left([\cancel{1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5}} + (\frac{3}{4})^{n-4}] - [\cancel{1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5}}]\right) \times u_5$$
$$\boxed{S_{n+1} - S_n = (\frac{3}{4})^{n-4} \times u_5}$$

Or $(\frac{3}{4})^{n-4} \times u_5$ est positif, donc la suite est croissante

Exercice 2:

Partie A)

1.)
$g(x) = x + 2 - e^x$
$g'(x) = 1 - e^x$

GRAPHIQUE

2.)

Si $g(x) = 0$, pour $\alpha[0; +\infty[$
$1,146 \leq \alpha \leq 1,147$

3.)

GRAPHIQUE

Partie B)

1a)
$f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + xe^x} = \frac{u}{v}$
Avec

$$\begin{aligned} u &= e^x - 1 \\ v &= 1 + xe^x \\ u' &= e^x \\ v' &= e^x x + e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{e^x(1 + xe^x) - (e^x - 1)(e^x x + e^x)}{(1 + xe^x)^2} \\ &= \frac{e^x[1 + xe^x - (x - 1)(e^x - 1)]}{(1 + xe^x)^2} \\ &= \frac{e^x[1 + \cancel{xe^x - xe^x} + x - e^x + 1]}{(1 + xe^x)^2} \\ &= \frac{e^x[2 + x - e^x]}{(1 + xe^x)^2} \\ &\boxed{= \frac{e^x \times g(x)}{(1 + xe^x)^2}} \end{aligned}$$

1b)

GRAPHIQUE

2a)
<u>CCL:</u> $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

$$\begin{aligned} \alpha + 2 - e^\alpha &= 0 \\ \alpha &= e^\alpha - 2 \\ e^\alpha &= \alpha + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{e^\alpha - 1}{1+\alpha e^\alpha} \\ &= \frac{\alpha+2-1}{1+\alpha(\alpha+2)} \\ &= \frac{\alpha+2-1}{1+\alpha^2+2\alpha} \\ &= \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \end{aligned}$$

2b)

$1,146 \leq \alpha \leq 1,147$

3.)
$y : f'(a)(x-a) + f(a)$
$(T)\ y : f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = \frac{e^0 \times g(0)}{(e^0+1)^2} = \frac{1\times(0+2-e^0)}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$
$f(0) = \frac{e^0-1}{1+0e^0} = \frac{1-1}{1+0} = 0$

$(T)y : 1(x-0) + 0 = x$
$\boxed{(T)y = x}$

4a)

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x-1}{1+xe^x} - x \\ &= \frac{e^x-1}{1+xe^x} - \frac{x(1+xe^x)}{1+xe^x} \\ &= \frac{e^x+1-x-x^2e^x}{1+xe^x} \\ &= \frac{xe^x+e^x-x^2e^x-xe^x-x-1}{1+xe^x} \\ &= \frac{(e^x-xe^x-1)(x+1)}{1+xe^x} \\ &= \frac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1} \end{aligned}$$

4b)

$u'(x) = e^x - xe^x + e^x = 2e^x - xe^x = \boxed{e^x(2-x) = u'(x)}$

Signe de u'(x) est le même que 2-x

$$\begin{aligned} 2-x &> 0 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

GRAPHIQUES

4c)

$u(2) = e^2 - 2e^2 - 1 = -e^2 - 1 = \boxed{-(e^2 + 1) = u(2)}$

Or $e^2 + 1$ positif donc $-(e^2 + 1)$ négatif donc $u(2)$ négatif dans $[0; +\infty[$

4d)
GRAPHIQUES
$f(x) - y < 0$
$f(x) < y, \forall x \in [0; +\infty[$

Donc Cf est endessous de T, pour tout x dans $[0; +\infty[$