CHAPITRE SUITES ARITHMETIQUE ; GEOMETRIQUES :APPLICATIONS

1. Paragraphe1 : suites arithmétiques

1) Définition : Soit (u_n) une suite de nombres réels

On dit que cette suite est une suite **arithmétique** s'il existe **un nombre réel noté r** tel que :

$$\boldsymbol{pour\ tout\ n}\ ,\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1}} = \boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{r}$$

Le nombre r est appelé **raison** de cette suite arithmétique .

2)Propriétés:Dans la suite : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

PropriétéN°1 : **expression de $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de n** :

$$pour\ tout\ n\ , n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{nr}$$

Indication de preuve :de proche en proche :

$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \ldots\ldots\ldots . u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n$:il y a n étapes

On passe ainsi de u_0 à u_n en ajoutant n fois r .

PropriétéN°2 : relation entre deux termes quelconques :

$$Pour\ tout\ n \in \mathbb{N}\ \ et\ tout\ p \in \mathbb{N}, on\ a : u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Indication de preuve D'après la propriété N°1 : $u_n - u_p = (u_0 + nr) - (u_0 + pr) = (n - p) \times r$

Propriété N°3 : **sens de variation**

Premier cas :r est strictement positif, la suite est strictement croissante

Deuxième cas : r est strictement négatif , la suite est strictement décroissante

Troisième cas : r est nulle , la suite est constante

Indication de preuve :$u_{n+1} - u_n = r$

3) Les sommes :

a) Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots . + (n-1) + n = \sum_{i=0}^{n} i \quad = \frac{n(n+1)}{2}$$

A noter que cette somme désigne aussi la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

Preuve du théorème :On écrit cette somme de manière différente du plus grand nombre , n au plus petit nombre 1 . Ainsi $s_n = n + (n-1) + \cdots . . +3 + 2 + 1 = \sum_{i=0}^{n} (n - i)$.

Puis $2 \times s_n = \sum_{i=0}^{n} i \quad + \sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n}(i+n-i) = \sum_{i=0}^{n} n = (n+1) \times n$: car la dernière somme comporte exactement n+1 termes tous égaux à n .

On déduit alors que : $s_n \quad = \frac{n(n+1)}{2}$

b) conséquences : on va pouvoir déduire d'autres simplifications de sommes

Propriété N°4 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

$$\boldsymbol{S_n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \quad = (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\frac{(\boldsymbol{u_0}+\boldsymbol{u_n})}{\mathbf{2}}$$

Preuve : On utilise l'expression de $u_n \; en\, fonction\; de\; n : u_n = u_0 + nr$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n}(u_0 + ir) = \sum_{i=0}^{n} u_0 + r\sum_{i=0}^{n} i$$

Par propriétés des sommes déjà étudiées en exercices.

Or d'après le théorème : $\sum_{i=0}^{n} i \quad = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=0}^{n}(u_0) = (n+1)u_0$ car cette somme comporte n+1 termes égaux à u_0.

Puis $S_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = (n+1) \times \left(\frac{u_0+u_0+nr}{2}\right) = (n+1) \times \frac{(u_0+u_n)}{2}$.

Propriété 5 : Elle généralise la propriété précédente . Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$soit\; p \in \mathbb{N}\; et \; \in \mathbb{N}\; tel\; que : p \leq n$ On pose $T_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$

On a : $T_n = (n-p+1)(\frac{u_p+u_n}{2})$

Preuve : On veut simplifier cette sommeT_n, en utilisant la propriété précédente .

$Soit\; p \in \mathbb{N}$, fixé.

On considère alors la suite (v_n) $telle\; que : pour\; tout\; n \; \in \mathbb{N}, v_n = u_{p+n}$

Sans difficulté on montre que cette suite est arithmétique de raison r également.

Puis $T_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-p} = (n-p+1) \times \frac{(v_0+v_{n-p})}{2}$,

en appliquant la propriété 4 à la suite (v_n) .Ainsi : $T_n = (n-p+1)(\frac{u_p+u_n}{2})$.

Cette propriété doit être retenue ainsi :

Pour calculer la somme S de N termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$\boxed{\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{Moyenne\;\; des\; termes\; extr\hat{e}mes}) \times \boldsymbol{N}}$

2 Paragraphe2 : suites géométriques

1) Définition : Soit (u_n) une suite de nombres réels

On dit que cette suite est une suite **géométrique** ,s'il existe **un nombre réel noté q** tel que :

$$\boldsymbol{pour\ tout\ n\ , n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q}$$

Le nombre q est appelé **raison** de cette suite géométrique.

2)Propriétés : Dans la suite : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

PropriétéN°1 : expression de u_n en fonction de n :

$$pour\ tout\ n\ , n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

Indication de preuve :de proche en proche

$u_0 \overset{\times q}{\rightarrow} u_1 \overset{\times q}{\rightarrow} u_2 \ldots \ldots \ldots . u_{n-1} \overset{\times q}{\rightarrow} u_n$:il y a n étapes

On passe ainsi de u_0 à u_n en multipliant n fois par q .

Propriété N°2 : relation entre deux termes

$$Pour\ tout\ n \in \mathbb{N}\ \ et\ tout\ p \in \mathbb{N}, on\ a: u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Indication de preuve D'après la propriété N°1 : Lorsque on peut calculer ce quotient :

$$\frac{u_n}{u_p} = \frac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^p} = q^{n-p}$$

3) Les sommes :

a) Théorème : Soit $q \in \mathbb{R}\ , q \neq 0\ et\ q \neq 1$ .Soit $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = 1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i \quad = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Indication de preuve du théorème :$(1-q) \times s_n = (1-q) \times (1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n)$ puis en développant les termes s'annulent deux à deux exceptés 1 et q^{n+1} .

Donc :$(1-q) \times s_n = 1 - q^{n+1}$.On obtient le résultat en divisant par $1-q$.

b) conséquences : on va pouvoir déduire d'autres simplifications de sommes

Propriété N°3

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q , $q \neq 0, q \neq 1$ et de premier terme u_0 .

On pose : $\boldsymbol{S_n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$

On a : $\boldsymbol{S_n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \quad = \boldsymbol{u_0} \times \boldsymbol{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

Preuve : On utilise l'expression de u_n $en\ fonction\ de\ n : u_n = u_0 \times q^n$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} (u_0 \times q^i) = u_0 \sum_{i=0}^{n} q^i = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Propriété 4 : Elle généralise la propriété précédente .

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . , $q \neq 0, q \neq 1$

$soit\ p \in \mathbb{N}\ et\ \in \mathbb{N}\ tel\ que : p \leq n$ On pose $T_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$

On a : $T_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Preuve : On veut simplifier cette somme T_n, en utilisant la propriété précédente .

$Soit\ p \in \mathbb{N}$, fixé.

On considère alors la suite (v_n) $telle\ que : pour\ tout\ n \in \mathbb{N}, v_n = u_{p+n}$

Sans difficulté on montre que cette suite est géométrique de raison q également.

Puis $T_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-p} = v_0 \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$,

en appliquant la propriété 3 à la suite (v_n) .Ainsi : $T_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Cette propriété doit être retenue ainsi :

Pour calculer la somme S de N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q

$$\boxed{\boldsymbol{S = (premier\ terme) \times \frac{1-q^N}{1-q}}}$$

4) Sens de variation : a)Etude :

Soit q un nombre réel strictement positif .Soit n un entier naturel.

On a : $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$. Sachant que $q^n\ est\ strictement\ positif$, on a le signe de $q^{n+1} - q^n$: c'est celui de $q - 1$.

Ainsi :Pour $0 < q < 1$, $q^{n+1} - q^n < 0$, $donc\ q^{n+1} < q^n$

Pour $1 < q$,$0 < q^{n+1} - q^n$, $donc\ q^n < q^{n+1}$

b**) Théorème**

Soit q un nombre réel strictement positif .Soit n un entier naturel.

Pour $0 < q < 1$, $on\ a$: $q^{n+1} < q^n$

Pour $1 < q$, $on\ a$: $q^n < q^{n+1}$

c) application :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 , de raison q , strictement positive

Premier cas **Pour $\mathbf{0 < q < 1}$**

- Lorsque $0 < u_0$, la suite (u_n) est strictement décroissante
- Lorsque $0 > u_0$, la suite (u_n) est strictement croissante

Deuxième cas **Pour $\mathbf{1 < q}$**

- Lorsque $0 < u_0$, la suite (u_n) est strictement croissante
- Lorsque$0 > u_0$, la suite (u_n) est strictement décroissante

(appliquer le théorème précédent et $pour\ tout\ n\ , n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$)

d) Remarques:

- Pour une suite géométrique de raison q strictement négative et de premier terme non nul , , on peut dire que cette suite n'est pas strictement monotone puisque deux termes consécutifs ont des signes opposés .
- Vous avez possibilité aussi d'étudier directement le signe de $u_{n+1} - u_n$ Et en utilisant $pour\ tout\ n\ , n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$ de façon générale .