

Note de lecture sur le papier sur l'Entropie croisée

27 mars 2020

CE = Cross-entropy

La CE est un modèle utilisé pour estimer des probabilités d'événements rares (permet d'avoir moins d'itérations que pour les méthodes classiques d'estimation). Ce modèle peut aussi être utilisé pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire (COPs). C'est fait en transformant l'optimisation « déterministe » en une optimisation « stochastique » pour ensuite utiliser les méthodes de modélisation d'événements rares.

La méthode de CE est une méthode itérative dont chaque itération peut être décomposée en deux étapes :

1. Génération d'un échantillon aléatoire selon un mécanisme spécifique
2. Mise à jour du paramètre de ce mécanisme en se basant sur les données qui donnent les meilleurs résultats.

Pour estimer des probabilités d'événements rares, on pourrait penser à la méthode d'*Important sampling*. Un des désavantages de cette méthode est que les paramètres optimaux (*tilting*) sont difficiles à obtenir. Au contraire, l'avantage de la méthode de CE est d'avoir une procédure simple pour estimer les paramètres optimaux.

Première partie

Exemple d'un problème d'optimisation combinatoire

On suppose que l'on a un vecteur binaire $y = (y_1, \dots, y_n)$ qu'on cherche à deviner. On ne connaît pas y mais on a un « oracle » qui pour chaque *input* nous donne une *réponse* ou *performance*. Par exemple : $S(x) = n - \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$ qui donne le nombre d'éléments de $x = (x_1, \dots, x_n)$ égaux à y .

Une méthode naïve est de générer des vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ de façon à ce que X_1, \dots, X_n soient des Bernoulli indépendantes de paramètre p_1, \dots, p_n . Donc $X \sim \mathcal{B}(p)$ et si $p = y$ (loi dégénérée) on a $S(X) = n$ et $X = y$. L'algorithme de CE consiste à transformer le problème en un événement rares, créer une séquence de paramètres $\hat{p}_0, \hat{p}_1, \dots$, et des niveaux (*levels*) $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots$ de telles sorte que $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots$ converge vers la valeur optimale (ici n) et que la suite $\hat{p}_0, \hat{p}_1, \dots$ converge vers le paramètre optimal (ici y). L'algorithme est donc le suivant :

1. On commence avec un certain \hat{p}_0 , par exemple $\hat{p}_0 = (1/2, \dots, 1/2)$ et $t := 1$
2. On génère des échantillons X_1, \dots, X_N selon une loi de bernoulli de paramètre \hat{p}_{t-1} . On calcule le score $S(X_i)$ et on trie ces données du plus petit au plus grand : $S_{(1)} \leq \dots \leq S_{(N)}$. On note $\hat{\gamma}_{t-1}$ le quantile $1 - \rho$ du score : $\hat{\gamma}_{t-1} = S_{\lceil (1-\rho)N \rceil}$.
3. On utilise le même échantillon pour calculer $\hat{p}_t = (\hat{p}_{t,1}, \dots, \hat{p}_{t,n})$ avec la formule : $\hat{p}_{t,j} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{S(X_i) \geq \hat{\gamma}_t} \mathbb{1}_{X_{i,j}=1}}{\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{S(X_i) \geq \hat{\gamma}_t}}$. Cette condition s'interprète de la façon suivante : pour mettre à jour la jème probabilité, on compte le nombre de vecteurs de X qui ont un score plus grand que $\hat{\gamma}_t$ et dont la jème composante est égale à 1 et on divise ce nombre par le nombre de vecteurs de X qui ont un score plus grand que $\hat{\gamma}_t$.
4. On arrête si on rencontre le critère d'arrêt ($\hat{\gamma}_t$ constant ou \hat{p}_t loi dégénérée), sinon $t := t + 1$.

Deuxième partie

La méthode de CE