Université Montpellier
Faculté des Sciences Montpellier
Département de Mathématiques et Informatique

Module : Estimation à Posteriori

Master 2 : Modélisation et Analyse Numérique (MANU)

Rapport du séance 2 et 3

Réalisé par : NAOUAL Arkhouch

Année universitaire
2024/2025

Table des matières

Introduction

Le but de ce projet est de résoudre numériquement une équation différentielle partielle (EDP) pour modéliser un phénomène physique, en utilisant des méthodes numériques telles que la méthode d'Euler explicite ou le schéma de Runge-Kutta. L'objectif est de comparer la solution numérique obtenue avec une solution analytique connue afin de vérifier l'exactitude et la convergence de la méthode. Cela implique également d'analyser la précision des résultats en calculant les normes H_2 et L_2 pour différentes tailles de maillage, tout en étudiant l'évolution de ces normes avec la finesse du maillage. En outre, le projet inclut la visualisation des résultats à travers des graphiques pour mieux comprendre le comportement de la solution et les erreurs associées. Enfin, il vise à développer une compréhension approfondie des concepts de discrétisation, de stabilité numérique et de conditions aux limites, renforçant ainsi les compétences en mathématiques appliquées, en programmation et en analyse numérique.

0.1 Rôle des Expressions et Quantités dans le Modèle de l'Équation aux Dérivées Partielles

L'équation aux dérivées partielles (EDP) donnée par

$$\begin{cases} u_t + V(t,s)u_s - \nu u_{ss} = -\lambda u + f(t,s), \quad s \in \Omega =]0, L[\;\; t \geq 0, \\ u(t,0) = u_g, \;\; u(t,L) = u_d \;\; \text{conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \\ u(0,s) = u_0(s) \;\; \text{donnée : condition initiale} \end{cases} \tag{1}$$

comprend plusieurs termes, chacun jouant un rôle essentiel dans la dynamique du modèle. Voici une description détaillée des expressions et des quantités présentes dans le modèle :

1.$u(t,s)$:
Description : Fonction inconnue dépendant du temps t et de la position s.
Rôle : Représente la quantité physique d'intérêt (ex. température, concentration) que l'on cherche à déterminer.

2.u_t :
Description :Dérivée partielle de u par rapport au temps.
Rôle :Indique le taux de changement de u au cours du temps. Un terme positif signifie une augmentation, tandis qu'un terme négatif indique une diminution.
3.v :
Description : Constante représentant la vitesse de transport ou de convection.
Rôle : Modifie la façon dont u est transporté dans la direction de s. Un v positif favorise un transport vers la droite (augmentation de s).
4.u_s :
Description : Dérivée partielle de u par rapport à la variable spatiale s.
Rôle : Représente le gradient spatial de u, indiquant comment u varie dans l'espace. Un gradient positif indique une augmentation de u avec s, tandis qu'un gradient négatif indique une diminution.

5. ν :

Description : Coefficient de diffusion.

Rôle : Indique le degré de diffusion des variations de u dans l'espace.

6. $.u_{ss}$:

Description : Dérivée seconde de u par rapport à s.
Rôle : Représente la concavité du profil de u. Ce terme contribue à la diffusion : un terme positif indique une augmentation du gradient, tandis qu'un terme négatif indique une diminution.

7. λ :

Description : Coefficient de réaction ou de rétroaction.
Rôle : Modifie u par une interaction linéaire. Un λ positif amplifie u, tandis qu'un λ négatif l'atténue.

0.2 Discrétisation d'Euler explicite

Considérons le problème (1), et choisissons les approximations classiques des dérivées première et seconde par différences finies, on aura le schéma d'Euler explicite suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{dt} + V(t_n,s_i)\dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - \nu\dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = -\lambda u_i^n + f(t_n,s_i) \\ u_1^n = u_g, \ \ u_N^n = u_d \ \ \forall n \quad \text{: conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \\ u_i^0 = u_0(x_i) \ \ \text{donnée : condition initiale} \end{cases} \tag{2}$$

Dans ce qui suit on prendra $V(t,s) = 1 \ \ \forall t, s \ \ \nu = 1$ et $\lambda = 1$. Alors d'après (2) on aura :

$$u_i^{n+1} = au_{i+1}^n + bu_i^n + cu_{i-1}^n + f_i^n \quad \forall i \in [2, N-1] \tag{3}$$

avec :

$$a = dt\left(\frac{-1}{h} + \frac{1}{h^2}\right),$$
$$b = 1 + dt\left(\frac{1}{h} - \frac{2}{h^2} - 1\right),$$
$$c = \frac{dt}{h^2}.$$

0.3 Calcul de la fonction f

On va donner une solution exacte pour trouver la fonction f, après on peut trouver la solution explicite de notre problème
Dans le cas stationnaire, notre équation devient :

$$u_s - u_{ss} = -u + f(s), \ \ s \in \Omega =]0, L[, \tag{4}$$

On définit la solution exacte par :

$$U_{\text{ex}}(s) = \exp\left(-10\left(s - \frac{L}{2}\right)^2\right)$$

Après le calcul de la dérivée première et seconde de la solution exacte, on remplace dans (4), donc après un calcul simple on aura :

$$f(s) = \exp\left(-10\left(s - \frac{L}{2}\right)^2\right) \cdot \left(21 - 20\left(-\frac{L}{2} + s\right) - 400\left(-\frac{L}{2} + s\right)^2\right)$$

0.4 La solution explicite

Dans la figure 1, elle représente le Code Python pour la solution numérique du schéma d'Euler explicite (3) .

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Génération de données d'exemple
espace = np.linspace(0, 1, 100)
erreur = np.sin(np.pi * espace)  # Exemple d'une fonction d'erreur

# Création du graphique
plt.plot(espace, erreur, color='purple', label='Solution Explicite')

# Ajout des labels et titre
plt.xlabel('espace')
plt.ylabel('Erreur')
plt.title('Erreur par rapport à l\'espace')
plt.legend()

# Affichage de la grille
plt.grid()

# Affichage du graphique
plt.show()
```

Dans la figure 2 , elle représente la solution numérique du schéma d'Euler explicite (3).

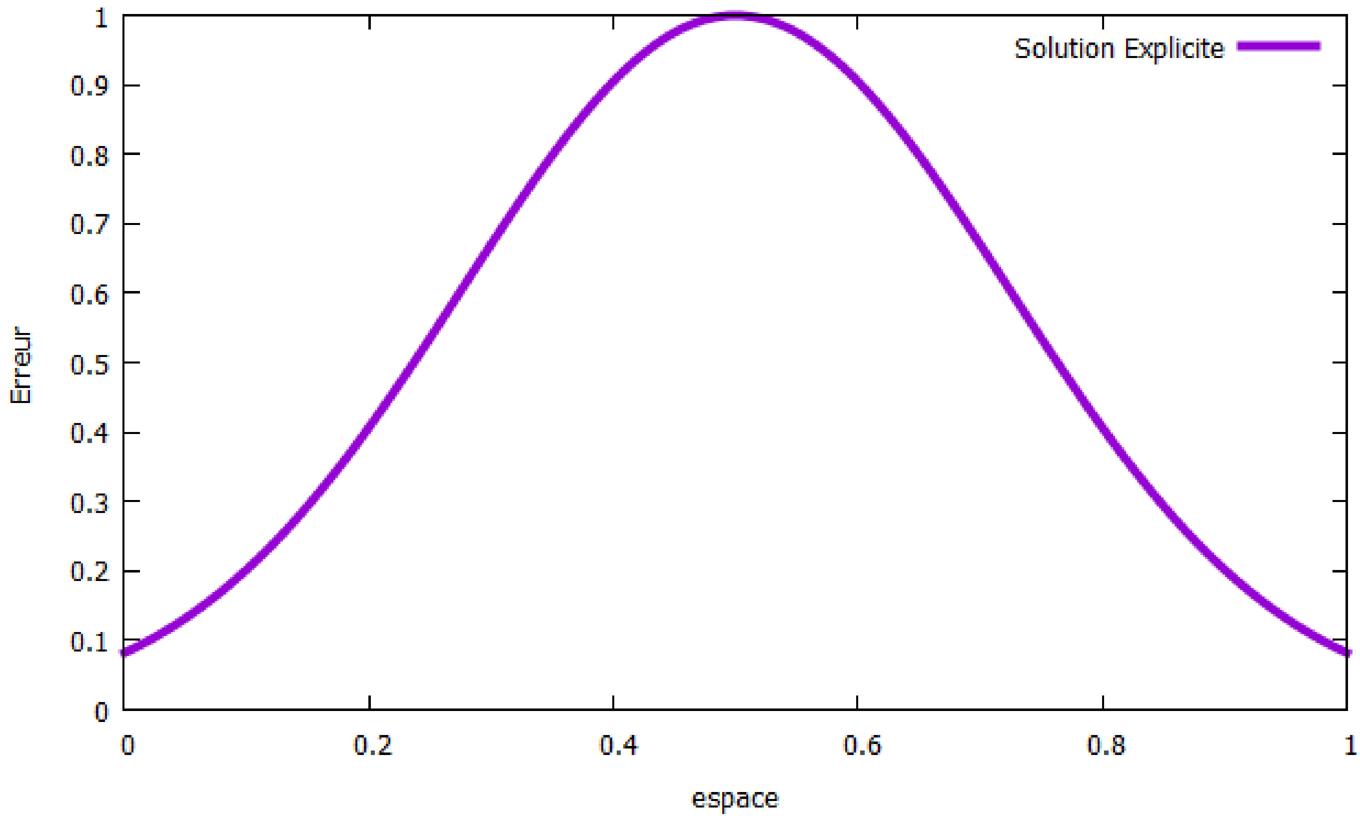

FIGURE 1 – La solution du schéma d'Euler explicite

0.5 L'erreur entre la solution exacte et numérique

0.5.1 L'erreur en norme L^2

Dans cette partie, nous allons tracer la variable $\|u_{\mathrm{ex}} - u_h\|_{0,2}$ dans le cadre d'une analyse stationnaire . Pour cela, nous utiliserons cinq maillages réguliers avec des tailles de maille décroissantes : 20, 40, 60, 80 et 100.

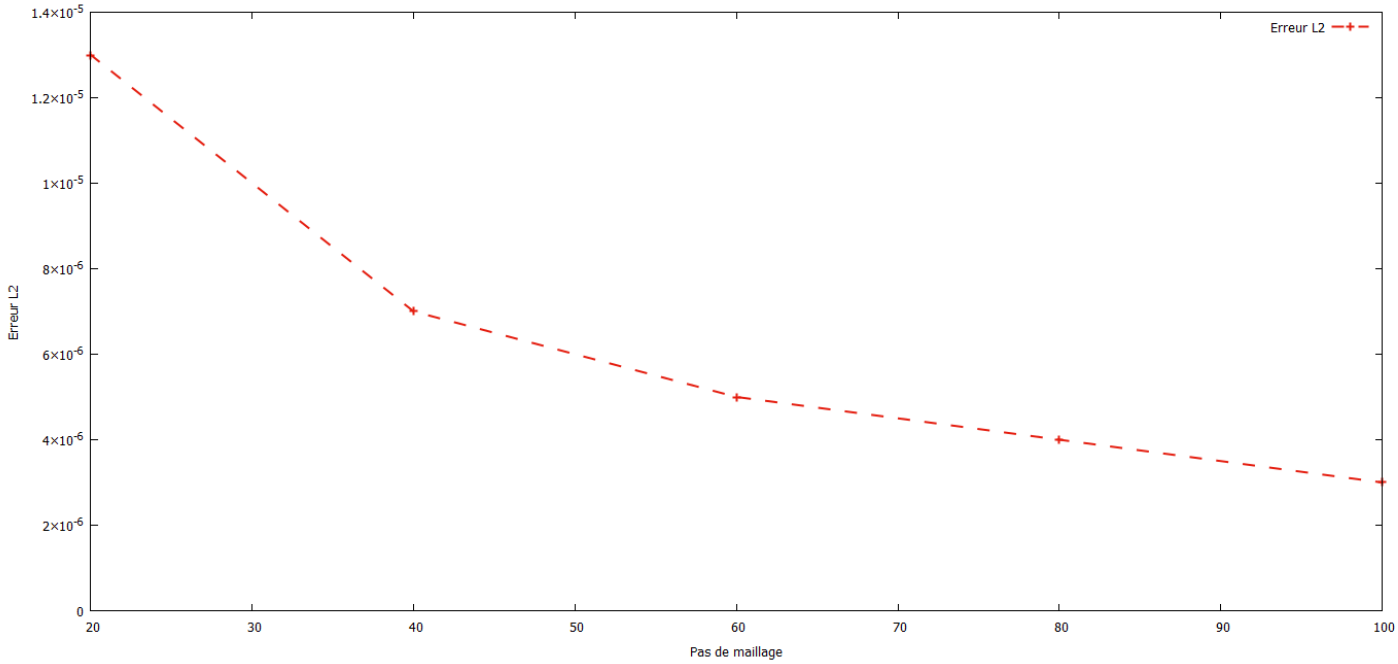

FIGURE 2 – La solution du schéma d'Euler explicite

0.5.2 L'erreur en norme H^1

Dans cette partie, nous allons tracer la variable $\|u_{\text{ex}} - u_h\|_{1,2}$ dans le cadre d'une analyse stationnaire . Pour cela, nous utiliserons cinq maillages réguliers avec des tailles de maille décroissantes : 20, 40, 60, 80 et 100.

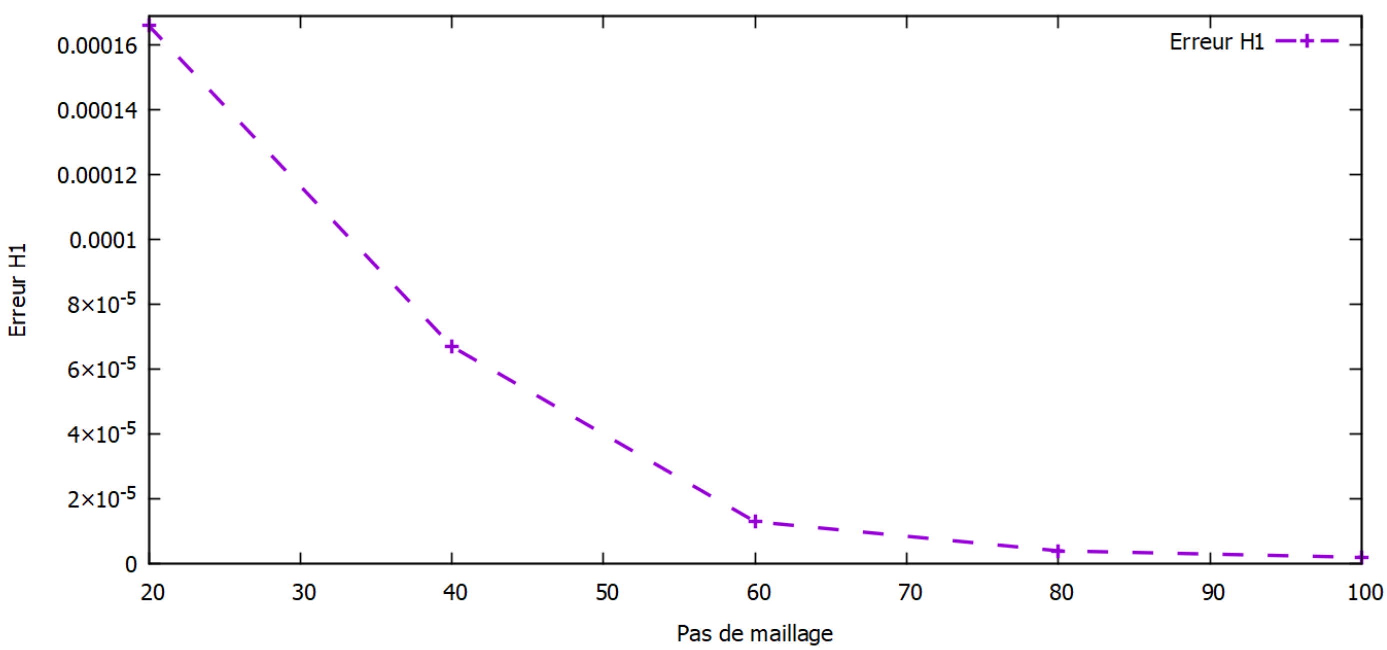

FIGURE 3 – La solution du schéma d'Euler explicite

0.5.3 Analyse de la convergence

Diminution de l'erreur enL^2 : Cela indique que la solution numérique u_h approche la solution exacte u_{ex} dans un sens globale. Diminution de l'erreur en H^1 : Cela signifie que non seulement les valeurs de la solution se rapprochent, mais aussi que les dérivées (gradients) se rapprochent, ce qui montre la précision dans la capture des variations locales de la solution.

Lorsque la taille du maillage spatial N augmente (c'est-à-dire que le maillage devient plus fin), l'erreur entre la solution exacte u_{ex} et la solution numérique u_h diminue dans les normes L^2 et H^1 . Cela indique que le schéma d'Euler explicite que vous utilisez converge vers la solution exacte .

0.6 Contrôle local de métrique

On cherchera la métrique qui équirépartira l'erreur d'interpolation. Présentons cette technique dans le cadre de la dimension 1. On dispose de la majoration suivante pour l'erreur d'interpolation en élémentP_1 (voir ci-dessus) :

$$\|u - \Pi_h u\|_{0,2} \leq ch^2 |u|_{2,2}, \tag{5}$$

où $\Pi_h u$ est l'interpolation linéaire de u, h la taille des éléments. La majoration en norme $\|\cdot\|_{0,2}$ fait apparaître une définition homogène au carré d'une longueur dans une certaine métrique :

$$\|h\|^2_{\mathcal{M}} = (h,h)_{\mathcal{M}} = h^t \mathcal{M} h. \tag{6}$$

La métrique locale en chaque noeud x du maillage est définie par :

$$\mathcal{M}_i = \min(\max(\frac{1}{\varepsilon}|\partial_s^2 u_h(s_i)|, \frac{1}{h^2_{\text{min}}}), \frac{1}{h^2_{\text{max}}}), \tag{7}$$

où $0 < \varepsilon <<$ et h_{min} et h_{max} sont respectivement l'erreur et les longueurs minimale et maximale désirées des mailles.

0.6.1 Identification du définition de la métrique dans le code

```
100  ! local mesh size definition for next refinement
101  uxx(1)=uxx(2)
102  uxx(n)=uxx(n-1)
103  hloc(:)=min(max(hmin,sqrt(err/(abs(uxx(:))+1.e-6))),hmax)
```

FIGURE 4 – Partie du code utilisé

la ligne 103 identifie la définition du métrique, ce qui équivalent :

$$\mathcal{M}_i = \min\left(\max\left(h_{\text{min}}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{|\partial_s^2 u_h(s_i)|}}, h_{\text{max}}\right)\right) \tag{8}$$

Quelle loi est en place ?

D'après la fonction "**meshadapinterp**" on trouve que :

$$d(s_i, s_{i+1}) = \frac{\mathcal{M}_i(s_{i+1} - s_N) + \mathcal{M}_{i+1}(s_N - s_i)}{s_{i+1} - s_i} \tag{9}$$

avec $d(s_i, s_{i+1})$ la longueur du segment (s_i, s_{i+1}).

Implémentation du loi (3)

Dans la loi (3), on a la longueur du segment (s_i, s_{i+1}) dans la métrique $\mathcal{M}$ est définie par :

$$l(s_i, s_{i+1}) = (s_{i+1} - s_i)^2 \frac{\mathcal{M}_{i+1} + \mathcal{M}_i}{2} = 1 \tag{10}$$

Pour l'implémentation du loi (3), on fait les modifications suivantes dans le code ; on remplace **hloc** et **hll** par :

hll=(hloc(i)*(x(i+1)-xnew(nnew))+hloc(i+1)*(xnew(nnew)-x(i)))/(x(i+1)-x(i)),

et

hloc(:)=min(max(hmin,sqrt(err/abs(uxx(:)))),hmax)

0.7 Tracé l'évolution de N_x en fonction ε, pour ε=0.04-0.02-0.01-0.005-0.0025

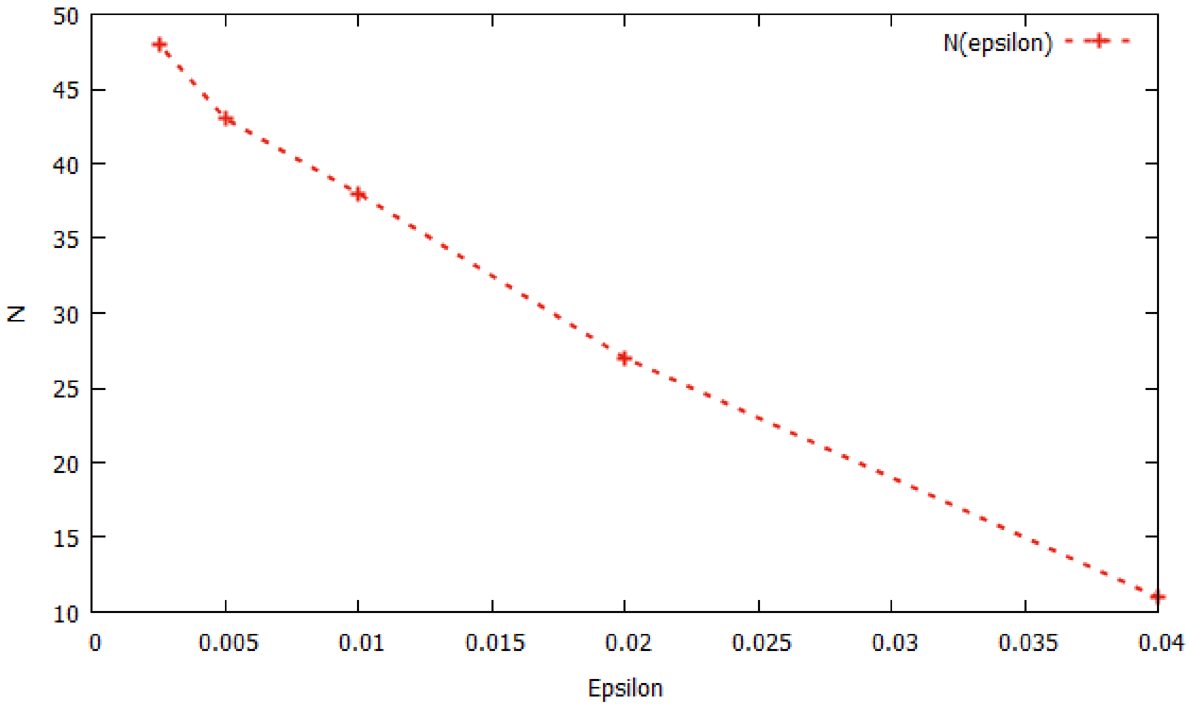

FIGURE 5 – N_x en fonction de ε

Remarque

Lorsque l'erreur diminue, cela indique que le nombre de pointsN_x doit augmenter. En d'autres termes, pour obtenir des résultats plus précis, il est nécessaire d'augmenterN_x afin d'améliorer la qualité de l'erreur.