Université Abdelmalek Essaadi
Faculté des Sciences et Techniques d'Al Hoceima
Département de Mathématiques et Informatique

Support de cours

La propriété d'extension à valeurs unique (S.V.E.P)

Réalisé par : NAOUAL Arkhouch

Année universitaire
2021/2022

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, j'envoie mes remerciements à Monsieur le Professeur ***Ahmed-TOUKMATI*** pour son encadrement et son soutien tout au long de la préparation de cet exposé, je lui exprime ma haute gratitude pour sa disponibilité, ses encouragements et ses conseils qui ont joué un rôle capital dans l'achèvement de ce travail.

Introduction

Dans cet exposé, nous allons introduire une propriété importante pour opérateurs sur les espaces de Banach complexes, C'est la propriété de l'extension à valeurs unique. Cette propriété remonte aux débuts de la théorie spectrale locale et est apparu en premier dans Dunford [1] and [2]. Par la suite cette propriété a reçu un traitement plus systématique dans les textes classiques de Dunford et Schwartz [3], ainsi que celles de Colojoarã et FoiaŞ [4], de Vasilescu [5] et, plus récemment par Laursen et Neumann [6].
La propriété d'extension à valeur unique a une importance fondamentale dans les théories spectrale car elle est satisfaite par une grande variété d'opérateurs linéaires bornées .
Dans le premier chapitre, on rappelle tous les outils nécessaire pour l'élaboration. On commence par la définition de spectre d'un opérateur, noyau et rang d'un opérateur, ainsi que les partie quasi-nilpotente et le noyau analytique de $\lambda_0.I - T$, et finalement Quelques propriétés sur l'adjoint d'opérateur T.
Dans le deuxiéme chapitre on a définie La propriété d'extension à valeur unique (S.V.E.P), et on a etudié les cas où la propriété d'extension à valeur unique de T en un point λ_0 est satisfaite.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Résolvante et spectre

1.1.1 Définitions :(*Spectre d'un opérateur*)

Soit un opérateur $T \in L(X)$ et X un espace de Banach . On définit :

1. $\sigma(T)= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda.I - T)$ n'est pas bijective. $\}$
2. ***l'ensemble résolvante*** de T noté $\rho(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(\lambda.I - T)$ est bijective et $(\lambda.I - T)^{-1}$ est continu, dans ce cas $(\lambda.I - T)^{-1}$ est appellé résolvante de T , noté $R_\lambda(T)$, Nous savons que l'application $\lambda \longmapsto (\lambda.I - T)^{-1}$ est holomorphe sur $\rho(T)$. C-à-d le complémentaire de $\sigma(T)$ dans $\mathbb{C}$.

le spectre $\sigma(T)$ se décompose en trois parties disjointes :

— ***l*e spectre ponctuel** $\sigma_p(T)$:
$\sigma_p(T)= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda.I - T)$ n'est pas injectif. $\}$
— ***l*e spectre continue** $\sigma_c(T)$:
$\sigma_c(T)= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda.I - T)$ est injectif et $R_\lambda(T)$ dense dans X . $\}$
— ***l*e spectre résiduel** $\sigma_r(T)$:
$\sigma_r(T)= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda.I - T)$ est injectif et $R_\lambda(T)$ n'est pas dense dans X . $\}$

l'ensemble $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$ forment une partition de $\sigma(T)$ c-à-d :

$$\sigma(T)= \sigma_p(T) \bigcup \sigma_c(T) \bigcup \sigma_r(T).$$

1.1.2 Définition

Etant donné un opérateur $T \in L(X)$ et X un espace de Banach.

Soit $\rho_T(x)$ l'ensemble de tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe un voisinage ouvert U_λ de λ dans $\mathbb{C}$ et une fonction analytique $f : U_\lambda \longmapsto X$ telle que l'équation :

$$\forall \mu \in U_\lambda, \qquad (\mu.I - T)f(\mu) = x$$

1.1.3 Définition

Si la fonction f est définie sur l'ensemble $\rho_T(x)$ alors
on l'appelle une fonction locale résolvante de T en x.

1.1.4 Propriétés

Etant donné un opérateur $T \in L(X)$ et X un espace de Banach.

1. $\sigma_T(0) = \emptyset$
2. $\sigma_T(\alpha x+\beta y) \subseteqq \sigma_T(x) \bigcup \sigma_T(y)$, $x, y \in X$
3. $\sigma_{(\lambda.I-T)}(x) \subseteqq \{0\}$ ssi $\sigma_T(x) \subseteqq \{\lambda\}$, $x \in X$.
4. $\sigma_T(Sx) \subseteqq \sigma_T(x)$, pour tout $S \in L(X)$ qui commutes avec T.

1.1.5 Théorème

Soit $T \in L(X)$, X est un espace de banach. Soient $x \in X$ et U est un voisinage ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose que $f : U \longmapsto X$ est une fonction analytique telle que l'équation :

$$\forall \mu \in U, \qquad (\mu.I-T)f(\mu) = x. \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in U, \qquad U \subseteqq \rho_T(f(\lambda))$$
$$\text{De plus} \quad \sigma_T(x) = \sigma_T(f(\lambda)) \qquad \forall \lambda \in U.$$

1.1.6 Preuve

Soit $\lambda \in U$. On définit :

$$h(\mu) = \begin{cases} \frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\mu-\lambda} & si \ \ \mu \neq \lambda \\ -f'(\lambda) & si \ \ \mu = \lambda \end{cases}$$

$\forall \mu \in U$. il est clair que h est analytique et on voit facilement que :

$$\forall \mu \in U \backslash \{\lambda\}, \qquad (\mu.I-T)h(\mu) = f(\lambda)$$

Par la continuité la dernière égalité est aussi vraie pour $\mu = \lambda$ donc :

$$\forall \mu \in U, \qquad (\mu.I-T)h(\mu) = f(\lambda)$$

cela montre que $\forall \mu \in U$, $\lambda \in \rho_T f(\lambda)$ et puisque $\lambda\mu \in U$ alors :

$$\forall \mu \in U, \qquad U \subseteqq \rho_T(f(\lambda))$$

Pour montrer $\sigma_T(f(\lambda)) \subset \sigma_T(x)$ ou bien $\rho_T(x) \subset \rho_T(f(\lambda))$ $\forall \lambda \in U$.
Si $w \in U$ alors $w \in \rho_T(f(\lambda))$ $\forall \lambda \in U$.
Par la premiére partie de la preuve. Supposons que $w \in \rho_T(x) \backslash U$. Puisque $w \in \rho_T(x)$ il existe un voisinage ouvert W de w tel que $\lambda \neq w$ et une fonction analytique $g : W \longmapsto X$ tel que :

$$\forall \mu \in W, \qquad (\mu.I-T)g(\mu) = x$$

Si on définit :

$$\forall \mu \in W, \ \ k(\mu) = \frac{f(\lambda)-g(\mu)}{\mu-\lambda}$$

On a

$$\forall \mu \in W, \qquad (\mu.I-T)k(\mu) = f(\lambda)$$

Alors $w \in \rho_T(f(\lambda))$ et donc :

$$\sigma_T(f(\lambda)) \subset \sigma_T(x)$$

Il reste à prouver l'inclusion inverse $\sigma_T(x) \subset \sigma_T(f(\lambda))$
Soit $\eta \notin \sigma_T(f(\lambda))$ c-à-d $\eta \in \rho_T(f(\lambda))$.
Soit $h : V \longmapsto X$ une fonction analytique définie sur le voisinage ouvert V de η, pour laquelle l'identité :

$$\forall \mu \in V, \qquad (\mu.I-T)h(\mu) = f(\lambda). \text{ Alors :}$$
$$\forall \mu \in V, \quad (\mu.I-T)(\lambda.I-T)h(\mu) = (\lambda.I-T)(\mu.I-T)h(\mu) = (\lambda.I-T)f(\lambda) = x$$

Alors $\eta \notin \sigma_T(x)$. finalement $\sigma_T(x) \subset \sigma_T(f(\lambda))$.

1.2 Noyau et Rang d'un opérateur

1.2.1 Définition

Etant donné un espace de banach X et un opérateur linéaire T sur X.
le rang de T est le sous espace :

$$T^{\infty}(X) = \bigcap T^n(X) \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

le kernel de T est le sous espace :

$$N^{\infty}(T) = \cup \ker T^n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

1.3 Partie quasi-nilpotente d'un opérateur

1.3.1 Définition

Soit $T \in L(X)$, X est un espace de banach.
Le quasi-nilpotent c'est une partie de T est définie comme Etant l'ensemble :

$$H_0(T) = \{x \in X, \lim_{n \to +\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}}\} = 0$$

$T \in L(X)$, est dit quasi-nilpotent si son rayon spectral :

$$r(T) = inf\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$$

$H_0(T)$ est un sous- espace linéaire de X non fermé.

1.3.2 Lemme

Pour tout $T \in L(X)$ et X est un espace de banach.

1. $\ker(T^m) \subseteq N^{\infty}(T) \subseteq H_0(T), \quad m \in \mathbb{N}$
2. $x \in H_0(T) \Longleftrightarrow Tx \in H_0(T)$
3. $\ker(\lambda.I - T) \cap H_0(T) = \{0\}, \quad \lambda \neq 0$

1.3.3 Preuve

1. $x \in \ker(T^m)$ alors $T^m x = 0$ alors $T^n x = 0$ pour tout $n \geq m$
2. Si $x \in H_0(T)$ et d'aprés l'inégalité :
$$\|T^n T x\| \leq \|T\| \|T^n x\|.$$
il est facile de montrer que $Tx \in H_0(T)$.
Si $Tx \in H_0(T)$. alors :
$$\|T^{n-1} T x\|^{\frac{1}{n-1}} = (\|T^n x\|^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}}.$$
Alors : $x \in H_0(T)$.
3. Si $x \neq 0$ est un élément de $\ker(\lambda.I - T)$ alors :
$$T^n x = \lambda^n x$$
donc :
$$\lim_{n \to +\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} |\lambda| \|x\|^{\frac{1}{n}} = |\lambda|$$
d'où $x \notin H_0(T)$

1.3.4 Théorème

Soit X est un espace de banach. Alors $T \in L(X)$ est quasi-nilpotent ssi $H_0(T) = X$.

1.3.5 Preuve

Si T est quasi-nilpotent alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$$

Donc On a $\|T^n x\| \leq \|T^n\| \|x\|$ On obtient que $\lim_{n \to +\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0 \ \forall x \in X$. On suppose que $H_0(T) = X$. A la racine n-ième on a la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n x\|}{|\lambda|^{n+1}} \quad converge \quad pour \quad chaque \quad x \ \in \ X \ et \ \lambda \neq 0.$$

Définissons

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}$$

Donc : $(\lambda.I - T)y = x$
alors $(\lambda.I - T)$ est surjectif pour tout $\lambda \neq 0$.
Par contre pour tout $\lambda \neq 0$. on a $\{0\} = \ker(\lambda.I - T) \bigcap H_0(T) = \ker(\lambda.I - T) \bigcap X = \ker(\lambda.I - T)$ d'où $(\lambda.I - T)$ est inversible et $\sigma(T) = \{0\}$.

1.4 Le sous- espace spectral local de T associé à Ω

1.4.1 Définition

Pour tout sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$. Le sous espace spectral local de T associé à Ω est l'ensemble :

$$X_T(\Omega) = \{x \in X, \sigma_T(x) \subseteq \Omega\}$$
$$\text{Si} \quad \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{C} \quad \text{Alors} \quad X_T(\Omega_1) \subseteq X_T(\Omega_2).$$

1.4.2 Théorème

Soit $T \in L(X)$, X est un espace de banach. Et Ω le sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $S(X_T(\Omega)) \subseteq X_T(\Omega)$ Avec S est un opérateur borné qui commute avec T.
2. $X_T(\Omega) = X_T(\Omega \cap \sigma(T))$.
3. Si $\lambda \notin \ \ \Omega \subseteq \mathbb{C}$ alors $(\lambda.I - T)(X_T(\Omega)) = X_T(\Omega)$
4. On suppose que $\lambda \in \Omega$ et $(\lambda.I - T)x \in X_T(\Omega)$ $alors$ $\forall x \in X$ alors $x \in X_T(\Omega)$.
5. Pour toute famille $(\Omega_j)_{j \in J}$ de $sous-ensemble$ de $\mathbb{C}$ on a : $X_T(\bigcap \Omega_j)_{j \in J} = \bigcap X_T(\Omega_j)_{j \in J}$

1.4.3 Remarque

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$, $\ker{(\lambda.I - T)}^n \subseteq X_T(\{\lambda\})$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$, $N^{\infty}(\lambda.I - T) \subseteq X_T(\{\lambda\})$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$, $H_0(\lambda.I - T) \subseteq X_T(\{\lambda\})$.

1.5 Noyau analytique d'un opérateur

1.5.1 définition

Soit X un espace de banach et $T \in L(X)$. Le noyau analytique de T est l'ensemble $K(T)$ pour tout $x \in X$ il existe une suite $(U_n) \subset X$ et une constante $\delta > 0$ telle que :

1. $x = U_0$ et $TU_{n+1} = U_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$.
2. $\|u_n\| \leq \delta^n \|x\|$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$.

1.5.2 Théorème

Soit X un espace de banach et $T \in L(X)$ alors :

1. $K(T)$ est un sous-espace linéaire de X.
2. $T(K(T)) = K(T)$
3. $K(T) = X_T(\mathbb{C} \backslash \{0\})$

1.6 Quelques propriétés sur l'adjoint d'opérateur T

1.6.1 Théorème

Etant donné un espace de banach X et un opérateur linéaire T sur X. on a :

1. $H_0(T) \subseteq {}^{\perp}K(T^*)$ et $K(T) \subseteq {}^{\perp}H_0(T^*)$
2. $H_0(T^*) \subseteq K(T)^{\perp}$ et $K(T^*) \subseteq H_0(T)^{\perp}$
3. $\ker T = (ImT^*)^{\perp}$.
4. $\ker T^* = (ImT)^{\perp}$

Chapitre 2

Propriété de l'extension à valeur unique (S.V.E.P)

2.1 Le spectre local et (S.V.E.P)

2.1.1 Définition

Soit X un espace de banach complexe et $T \in L(X)$. On dit que l'opérateur T admet la propriété de l'extension unique (en abrégé S.V.E.P) en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Si pour tout voisinage U en λ_0. la seule fonction analytique $f : U \longmapsto X$ qui verifie :

$$(\lambda.I - T).f(\lambda) = 0 \qquad \forall \lambda \in U.$$

est la fonction nulle.
On dit que $T \in L(X)$ possède la (S.V.E.P) si l'opérateur T a la (S.V.E.P) en tout point λ de $\mathbb{C}$.

2.1.2 Remarque

1. Si T a la (S.V.E.P) en $\lambda_0 \in \rho_T(x)$ alors il existe un voisinage U de λ_0 et une unique fonction analytique $f : U \longmapsto X$ qui verifie :
$$(\lambda.I - T).f(\lambda) = x \qquad \forall \lambda \in U.$$
2. Si $\lambda_0 \notin \sigma_p(T)$ alors T a la (S.V.E.P) en λ_0
3. $int(\sigma_p(T)) = \emptyset \Longrightarrow T$ est a la (S.V.E.P) en λ_0

2.1.3 Preuve

Pour la deuxiéme remarque. Si $\lambda_0 \notin \sigma_p(T)$ alors il existe un voisinage U de λ_0 tel que : $(\lambda.I - T)$ soit injectif pour tout $\lambda \in U, \lambda_0 \neq \lambda$.
Soit $f : V \longmapsto X$ une fonction analytique définie sur un autre voisinage V de λ_0 pour laquelle l'équation :

$$(\lambda.I - T).f(\lambda) = 0 \qquad \forall \lambda \in V.$$

On suppose que $V \subseteq U$. Alors $f(\lambda) \in \ker(\lambda.I - T) = \{0\}$, Pour tout $\lambda \in V$, $\lambda \neq \lambda_0$
Donc $f(\lambda) = 0$. $\qquad \forall \lambda \in V, \lambda \neq \lambda_0$.
A partir de la continuité de f en λ_0, on conclut que $f(\lambda_0) = 0$ donc $f \equiv 0$.
Finalement T a la (S.V.E.P) en λ_0.

2.1.4 Théorème

Soit $T \in L(X)$, X est un espace de banach alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T a la (S.V.E.P)
2. $X_T(\emptyset) = \{0\}$
3. $X_T(\emptyset)$ est fermée.

2.1.5 Preuve

1. On suppose que T a la (S.V.E.P) et $\sigma_T(x) = \emptyset$ alors $\rho_T(x) = \mathbb{C}$ donc il existe une fonction analytique $f : U \longmapsto X$ tel que :
$$(\lambda.I - T).f(\lambda) = x \qquad\qquad \forall \lambda \in U.$$
Si $\lambda \in \rho(T)$ alors $f(\lambda) = (\lambda.I - T)^{-1}x$ et par suite $\|\lambda.I - T\|^{-1} \longrightarrow 0$ quand $|\lambda| \longrightarrow +\infty$ donc $f(\lambda)$ est une fonction bornée sur $\mathbb{C}$ donc $f(\lambda)$ est alors constante et alors puisque $(\lambda.I - T)^{-1}x \longrightarrow 0$ quand $|\lambda| \longrightarrow +\infty$ alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{C}$ cela prouve que $x = 0$. Puisque $x \in X_T(\emptyset)$ alors $X_T(\emptyset) = \{0\}$.
Inversement : Soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que pour tout $x = 0 \in X$, on a $\sigma_T(x) = \emptyset$. Considérons toute fonction analytique $f : U \longmapsto X$ définie sur un voisinage U de λ_0 tel que :$(\lambda.I - T).f(\lambda) = 0$ soit vérifié pour tout $\lambda \in U$ on a l'inégalité : $\sigma_T(f(\lambda)) = \sigma_T(0) = \emptyset$, on déduit que $f(\lambda) = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$. d 'où $f \equiv 0$ sur U donc T a la (S.V.E.P) en λ_0.
2. $2 \Rightarrow 3$ est évident .

2.1.6 Théorème

Pour tout opérateur borné $T \in L(X)$ et X est un espace de banach on a :

$$X_T(D_\epsilon) = \{x \in X, \lim_{n \to +\infty} \sup \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} \leq \epsilon\}$$

En particulier $H_0(T) = X_T(\{0\})$ et si T a la (S.V.E.P) alors :

$$H_0(T) = X_T(\{0\}) = \{x \in X, \sigma_T(x) \subseteq \{0\}\}$$

2.1.7 Théorème

Supposons que $T \in L(X)$, X est un espace de banach,alors les conditions sont équivalentes :

1. T a la (S.V.E.P) en λ_0.
2. $\ker(\lambda_0.I - T) \bigcap X_T(\emptyset) = \{0\}$
3. $\ker(\lambda_0.I - T) \bigcap K(\lambda_0.I - T) = \{0\}$
4. Pour tout $x \neq 0 \in \ker(\lambda_0.I - T)$ on a $\sigma_T(x) = \{\lambda_0\}$

2.1.8 Preuve

1. $1 \Rightarrow 2$. On suppose que T a la (S.V.E.P) en 0.
Soit $x \in \ker T$ on a $\sigma_T(x) = \emptyset$ alors $0 \in \rho_T(x)$ donc il existe un disque ouvert et une fonction analytique $f : D(0, \epsilon) \longmapsto X$ tel que :
$$(\lambda.I - T).f(\lambda) = x \qquad\qquad \forall \lambda \in D(0, \epsilon).$$
Alors :
$$T((\lambda.I - T).f(\lambda)) = (\lambda.I - T)T(f(\lambda)) = Tx = 0 \qquad\qquad \forall \lambda \in D(0, \epsilon).$$
Puisque T a la (S.V.E.P) en 0 alors $T(f(\lambda)) = 0$ et alors $T(f(0)) = x = 0$.
On suppose que pour $x \neq 0 \in \ker T$ on a $\sigma_T(x) \neq \emptyset$.
Soit $f : D(0, \epsilon) \longmapsto X$ une fonction analytique tel que :
$$(\lambda.I - T).f(\lambda) = 0 \qquad\qquad \forall \lambda \in D(0, \epsilon).$$
Alors
$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \; pour \; (u_n) \subset \; X \; est \; une \; suite.$$
Clairement que $TU_0 = T(f(0)) = 0$ donc $U_0 \in \ker T$.
De plus à partir de l'égalité $\sigma_T(f(\lambda)) = \sigma_T(0) = \emptyset \qquad \forall \lambda \in D(0, \epsilon)$.

On obtient $\sigma_T(f(0)) = \sigma_T(u_0) = \emptyset$.
Et par suite on conclut que $u_0 = 0$. $\forall \neq 0 \in D(0, \epsilon)$ on a :

$$0 = (\lambda.I - T).f(\lambda) = (\lambda.I - T)\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$$

$$= (\lambda.I - T)\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_{n+1}$$

Alors $\lambda(\lambda.I - T)\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_{n+1} = 0$ pour tout $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in D(0, \epsilon)$.
Par continuité ceci est toujours vrai pour $\lambda \in D(0, \epsilon)$. En utilisant le même argument que dans la premiére partie de la preuve, il est possible de demontrer que : $u_1 = 0$ et $u_2 = u_3 = u_4 = ... = 0$.
Cela montre que $f \equiv 0$ sur $D(0, \epsilon)$ et T a la (S.V.E.P) en 0.

2. $2 \Rightarrow 3$. On montre que $\ker(T) \cap X_T(\emptyset) = \ker(T) \cap K(T)$.
   On a :
   $$\ker(T) \subseteq H_0(T) \subseteq X_T(\{0\})$$
   alors :
   $$\ker(T) \cap K(T) = \ker(T) \cap X_T(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \subset X_T(\{0\}) \cap X_T(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = X_T(\emptyset)$$
   Puisque :
   $$X_T(\emptyset) \subseteq X_T(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = K(T)$$
   D'où :
   $$\ker(T) \cap K(T) = \ker(T) \cap K(T) \cap X_T(\{0\}) = \ker(T) \cap X_T(\{0\})$$
3. $2 \Rightarrow 4$. Puisque :
   $$\ker(T) \subseteq H_0(T).$$
   Par Théorème 2.1.6
   $$\sigma_T(x) \subseteq \{0\}$$
   Alors pour tout $0 \neq x \in \ker T$ et par l'hypothése $\sigma_T(x) \neq \emptyset$ finalement :
   $$\sigma_T(x) = \{0\}.$$

2.1.9 Corollaire

Soit $T \in L(X)$ et X est un espace de banach. Alors T n'a pas la (S.V.E.P) ssi il existe $\lambda \in \sigma_p(T)$ et il existe $x_0 \neq 0$ tel que : $\sigma_T(x_0) = \emptyset$.

2.1.10 Corollaire

Soit $T \in L(X)$ et X est un espace de banach tel que :$\lambda_0.I - T$ est surjective.
Alors T a la (S.V.E.P) en λ_0 ssi : $\lambda_0.I - T$ est injective.

2.1.11 Preuve

On suppose que T a la (S.V.E.P) en 0 et puisque $\lambda_0.I - T$ est surjective alors $K(T) = X$. Et on :

$$\ker(T) \cap K(T) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(T) \cap X = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\}$$

d'où T est injective.

2.1.12 Proposition

Soit $T \in L(X)$ et X est un espace de banach. Et soit f une fonction analytique définie sur le voisinage ouvert de $\sigma(T)$. Nous avons :

1. $f(\sigma_T(x)) \subseteq \sigma_{f(T)}(x)$, pour tout $x \in X$
2. Si T a la (S.V.E.P) ou si la fonction f est non constante sur chacune des composantes connexes de$U$ alors :

$$f(\sigma_T(x)) = \sigma_{f(T)}(x).$$

2.2 Partie quasi-nilpotente d'un opérateur et (S.V.E.P)

2.2.1 Corollaire

On suppose que $T \in L(X)$ et X est un espace de banach. Vérifiés les assertions suivantes :

1. $N^\infty(\lambda_0.I - T) \cap (\lambda_0.I - T)^\infty(X) = \{0\}$.
2. $N^\infty(\lambda_0.I - T) \cap K(\lambda_0.I - T) = \{0\}$.
3. $N^\infty(\lambda_0.I - T) \cap X_T(\emptyset) = \{0\}$.
4. $H_0(\lambda_0.I - T) \cap K(\lambda_0.I - T) = \{0\}$.
5. $\ker(\lambda_0.I - T) \cap (\lambda_0.I - T)(X) = \{0\}$.

Alors :
T a la (S.V.E.P) en λ_0.

2.2.2 Théorème

Soit $T \in L(X)$ et X est un espace de banach. Alors : T a la (S.V.E.P) SSi :

$$H_0(\lambda.I - T) \cap K(\lambda.I - T) = \{0\} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

2.2.3 Preuve

Soit $T \in L(X)$. On suppose que T a la (S.V.E.P).

$$\begin{aligned} K(\lambda.I - T) &= X_{\lambda.I-T}(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \\ &= X_T(\mathbb{C}\backslash\{\lambda\}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Et d'aprés le Théorème 2.1.6

$$\begin{aligned} H_0(\lambda.I - T) &= X_{\lambda.I-T}(\{0\}) \\ &= X_T(\{\lambda\}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} H_0(\lambda.I - T) \cap K(\lambda.I - T) &= X_T(\{\lambda\}) \cap X_T(\mathbb{C}\backslash\{\lambda\}) \\ &= X_T(\emptyset) = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

2.2.4 Corollaire

Soit $T \in L(X)$ et X est un espace de banach. Si T quasi-nilpotent et T a la (S.V.E.P) alors $K(T) = \{0\}$.

2.2.5 Preuve

Si T quasi-nilpotent alors : $H_0(T) = X$.
d'autre part puisque T est a la (S.V.E.P) alors : $H_0(T) \cap K(T) = \{0\}$.
c -à-d $X \cap K(T) = \{0\}$.
Donc $K(T) = \{0\}$.

2.2.6 Théorème

On suppose que $T \in L(X)$ et X est un espace de banach. a une partie fermée quasi-nilpotent $H_0(\lambda_0.I - T)$ où que $H_0(\lambda_0.I - T) \cap K(\lambda_0.I - T)$ est fermée alors $H_0(\lambda_0.I - T) \cap K(\lambda_0.I - T) = \{0\}$.
Donc T a la (S.V.E.P).

2.2.7 Preuve

On considére $\lambda_0 = 0$.
Supposons d'abord que $H_0(T)$ est fermé . Soit $\widetilde{T}$ la restriction de T à l'espace de banach $H_0(T)$. Clairement que $H_0(T) = H_0(\widetilde{T})$ donc $\widetilde{T}$ est quasi-nilpotent et par suite $K(\widetilde{T}) = \{0\}$. Comme $H_0(T) \cap K(T) = \{0\}$ on déduit que $H_0(T) \cap K(T) = K(\widetilde{T})$.
Supposons que $Y = H_0(T) \cap K(T)$ est fermé.
Clairement que Y est invariant sous T. Donc on considére la restriction $S = T/Y$.
Si $y \in Y$ alors :

$$\|S^n y\|^{\frac{1}{n}} = \|T^n y\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow \ 0 \ quand \ n \ \rightarrow +\infty$$

Donc : $y \in H_0(S)$ donc $H_0(S) = Y$.
Finalement S est quasi-nilpotent et donc $K(S) = \{0\}$.
Nous montrons que $Y = K(S)$.
Pour prouver cela. Choisir $y \in H_0(T) \cap K(T)$.
par la définition de $K(T)$, il y a alors une suite $(y_n) \subset Y$ et $\delta > 0$ tels que $y_0 = y$, $Ty_n = y_{n-1}$, et $\|y_n\| \leq \delta^n \|y\|$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$, puisque $y \in Y \subseteq H_0(T)$. on obtient que $y_n \in H_0(T)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De plus puisque $y \in K(T) = X_T(\mathbb{C} \backslash \{0\})$. Alors $y_n \in K(T) = X_T(\mathbb{C} \backslash \{0\})$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$, de sorte que $y_n \in Y$, finalement $y \in K(S)$. Cela montre que $Y \subseteq K(S)$.
L'inclusion inverse est claire puisque :
$K(S) = K(T) \cap Y \subseteq Y$.
Donc $Y = K(T) \cap H_0(T) = K(S) = \{0\}$.
D'où T a la (S.V.E.P).

2.2.8 Théorème

Soit $T \in L(X)$ et X est un espace de banach. Soit $f : U \longmapsto \mathbb{C}$ être une fonction analytique sur le voisinage ouvert U de $\sigma(T)$. Supposons que f est non constante sur chacune des composantes connexes de U. Alors $f(T)$ a la (S.V.E.P) en $\lambda \in \mathbb{C}$ ssi T a la (S.V.E.P) en tout point $\mu \in \sigma(T)$ où $f(\mu) = \lambda$.

2.2.9 Preuve

On suppose que $f(T)$ a la (S.V.E.P) en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Alors :
$\ker(\lambda_0.I - f(T)) \cap X_{f(T)}(\emptyset) = \{0\}$.
On suppose que $\mu_0 \in \sigma(T)$ on a $f(\mu_0) = \lambda_0$.
On montre que T a la (S.V.E.P) en tout point μ_0 il suffit de montrer que $\ker(\mu_0.I - T) \cap X_T(\emptyset) = \{0\}$.
Soit $x \in \ker(\mu_0.I - T) \cap X_T(\emptyset)$, on définie la fonction analytique h par :

$$h(\mu) = \lambda_0 - f(\mu) \qquad\qquad \forall \mu \in U.$$

Alors :
$h(T) = \lambda_0$ et par suite $h(\mu_0) = 0$. On écrit :

$$h(\mu) = (\mu - \mu_0) g(\mu).$$

où g est une fonction analytique dans U. Clairement que :

$$h(T) = (\mu_0.I - T) g(T) = g(T)(\mu_0.I - T)$$

De sorte que :

$$x \in \ker(h(T)) = \ker(\lambda_0.I - f(T)).$$

D'autre part de $x \in X_T(\emptyset)$ on obtient que $\sigma_T(x) = \emptyset$, donc d'aprés 2. de la proposition 2.1.12 :

$$f(\sigma_T(x)) = \sigma_{f(T)}(x).$$
$$= f(\emptyset) = \emptyset.$$

Alors :

$$x \in X_{f(T)}(\emptyset).$$

Alors :

$$\ker(\mu_0.I - T) \cap X_T(\emptyset) \subseteq \ker(\lambda_0.I - f(T)) \cap X_{f(T)}(\emptyset) = \{0\}$$

Donc :
T a la (S.V.E.P) en tout point μ_0.
Soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que T a la (S.V.E.P) en tout point $\mu_0 \in \sigma(T)$, avec $f(\mu_0) = \lambda_0$.
On écrit

$$h(\mu) = \lambda_0.I - f(\mu) \qquad\qquad \forall \mu \in U.$$

Par l'hypothése f non constante sur chaque composante connexe U donc par la théorème d'identité pour les fonctions analytiques.
la fonction h n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\sigma(T)$ ces zéros de multiplicité finie. Il existe donc une fonction analytique g définie sur U ces zéros dans $\sigma(T)$ et une polynôme P de la forme :

$$P(\mu) = (\mu_1 - \mu)........(\mu_n - \mu)$$

avec des éléments non nécessairement distincts $\mu_1, \mu_2, ...\mu_n \in \sigma(T)$ tel que :

$$h(\mu) = \lambda_0 - f(\mu) = P(\mu)g(\mu) \qquad\qquad \forall \mu \in U.$$

On suppose que

$$x \in \ker(\lambda_0.I - f(T)) \cap X_{f(T)}(\emptyset).$$

Afin de montrer que $f(T)$ a la (S.V.E.P) en λ_0. Il suffit de montrer que $x = 0$.
D'aprés le Théorème de cartographie nous savons que g est inversible donc on a l'égalité :

$$\lambda_0.I - f(T) = P(T)g(T) = g(T)P(T) \qquad\qquad \forall \mu \in U.$$

Alors :

$$P(T).x \in \ker g(T) = \{0\}.$$

Si on pose

$$q(\mu) = (\mu_2 - \mu)........(\mu_n - \mu) \quad et \quad y = q(T).x$$

Alors :

$$(\mu_1.I - T)y = 0.$$

D'autre part, $x \in X_{f(T)}(\emptyset)$ et f est non constante sur chacune composantes de U.
Finalement d'aprés 2. de la proposition 2.1.12 :

$$f(\sigma_T(x)) = \sigma_{f(T)}(x).$$

Puisque T et $q(T)$ commute Alors :

$$\sigma_T(y) = \sigma_T(q(T).x) \subseteq \sigma_T(x) = \emptyset$$

Puisque T a la (S.V.E.P) en μ_1, par hypothèse. Par une répétition de cet argument pour $\mu_2, ..., \mu_n$ alors $x = 0$, donc $f(T)$ a la (S.V.E.P) en λ_0.

2.2.10 Corollaire

Pour tout opérateur borné sur un espace de banach X les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T a la (S.V.E.P) en λ_0
2. T^n a la (S.V.E.P) en λ_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. $N^\infty(\lambda_0.I - T) \cap X_T(\emptyset) = \{0\}$.
4. $N^\infty(\lambda_0.I - T) \cap K(\lambda_0.I - T) = \{0\}$.

2.3 l'adjoint d' un opérateur T et (S.V.E.P)

2.3.1 Théorème

On suppose que pour un opérateur borné $T \in L(X)$ et X est un espace de banach .
Si $H_0(\lambda_0.I - T) + (\lambda_0.I - T)(x)$ est dense dans X. Alors T^* a la (S.V.E.P) en λ_0.

2.3.2 Preuve

On suppose que $\lambda_0 = 0$. D'aprés le Théorème 1.6.1 :

$$K(T^*) \subseteq \quad H_0(T)^{\perp}$$

Et

$$\ker(T^*) = (ImT)^{\perp}$$

Alors :

$$\ker(T^*) \cap K(T^*) \subseteq T(X)^{\perp} \cap H_0(T)^{\perp} = (T(X) + H_0(T))^{\perp}$$

Si le sous- espace $H_0(T) + T(X)$ est dense dans X.
Alors :

$$\ker(T^*) \cap K(T^*) = \{0\}$$

Donc T^* a la (S.V.E.P) .

2.3.3 Théorème

On suppose que pour un opérateur borné $T \in L(X)$ et X est un espace de banach .
Si $H_0(\lambda_0.I^* - T^*) + (\lambda_0.I^* - T^*)(x)$ est dense dans X^*. Alors T a la (S.V.E.P) en λ_0.

2.3.4 Preuve

On suppose que $\lambda_0 = 0$. D'apré le Théorème 1.6.1 :

$$K(T) \subseteq \quad {}^{\perp}H_0(T^*)$$

Et

$$\ker(T) =^{\perp} (ImT^*)$$

Alors :

$$\ker(T) \cap K(T) \subseteq^{\perp} T^*(X^*) \cap^{\perp} H_0(T^*) =^{\perp} (T^*(X^*) + H_0(T^*))$$

Si le sous- espace $H_0(T^*) + T^*(X^*)$ est dense dans X^*.
Alors :

$$\ker(T) \cap K(T) = \{0\}$$

Donc T a la (S.V.E.P) .

Bibliographie

[1] **N. Dunford**,(1952). Spectral theory II. Resolution of the identity., Pacific J. Math.$2, 559-614$.

[2] **N. Dunford**, (1954). Spectral operators., Pacific J. Math. 4, 321-54.

[3] **N. Dunford, J.T. Schwartz,** (1971). Linear operators., Part I (1967), Part II (1967), Part III, Wiley, New York.

[4] **I. Colojoarã et FoiaŞ,** (1968). Theory of generalized spectral operators., Gordon and Breach, New York.

[5] **F.-H. Vasilescu,** (1982). Analytic functional calculus and spectral decompositions., Editura Academiei and D. Reidel Publishing Company, Bucharest and Dorrecht.

[6] **K.B. Laursen, M.M. Neumann,** (2000). An introduction to local spectral theory., London Math. Soc. Monographs 20, Clarendon Press, Oxford.

[7] **P. Aiena Fredholm** and local spectral theory, with application to multipliers. (2004), Kluwer Acad. Publishers.

[8] **P. Aiena, E. Rosas** The single valued extension property at the points of the approximate point spectrum, J. Math. Anal. Appl. 279 (1), (2003), 180-88.

[9] **C, Benhida, E.H. Zerouali** Local spectral theory of linear operators RS and SR. Integr. Equa. Oper. Theory 54 (2006), 1-8.

[10] **P.AIENA et O.MONSALVE**, Operator swhich do not have the single valued extension property. J .Math. Anal. Appl 250 (2000), 435-448.

[11] **J. K. Finch** The single valued extension property on a Banach space Pacific J. Math. 58 (1975), 61-69.