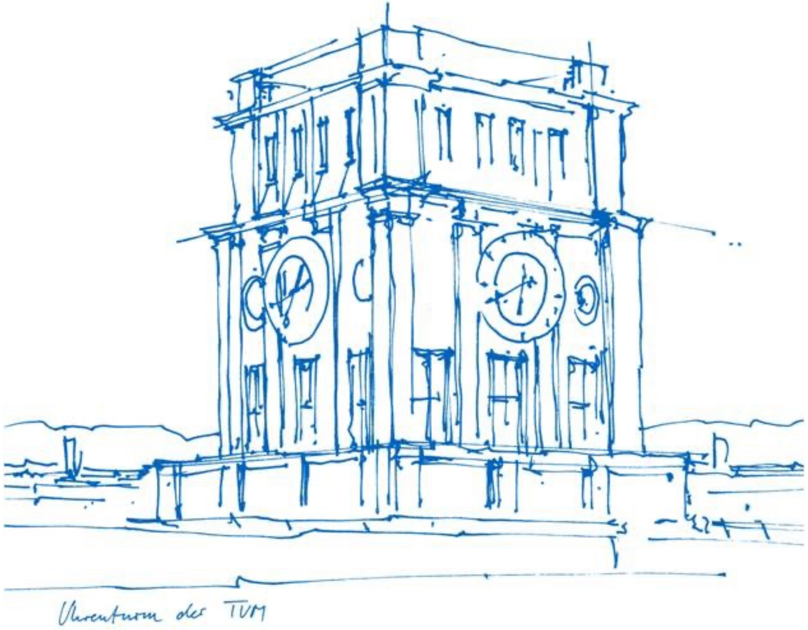
Grundlagenpraktikum: Rechnerarchitektur

Technische Universität München

TUM School of Computation, Information and Technology

Prof. Dr. rer. nat. Martin Schulz

München, 29. August 2023



Arithmetik in Zahlensystemen mit ungewöhnlicher Basis

Alireza Kamalidehghan, Sina Mozaffari Tabar, Mostafa Nejati Hatamian

München, 29. August 2023

Inhaltsübersicht

Basisumwandlung

Umrechnung von Zahlen in unterschiedlichen Basen

Funktion f() zur Berechnung des Wertes:

$$f(a, g, n) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i * g^i)$$

Beispiel:

- Basis: $g = 10$
- Ziffern: $a \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- Beispiel: 2023_{10}

$$\begin{aligned} f((2,0,2,3), 10,4) &= \sum_{i=0}^{3} (a_i * 10^i) \\ &= 3 * 10^0 + 2 * 10^1 + 0 * 10^2 + 2 * 10^3 \\ &= 2023 \end{aligned}$$

Zahlen in der komplexen Basis

Funktion f() zur Berechnung des Wertes:

$$f(a,g,n) \ = \sum_{z=0}^{n-1} (a_z * b^z)$$

Beispiel:

- Basis: $g = -1 + i$
- Ziffern: $a \in \{0,1\}$
- Beispiel: 1001_{10}

$$f((1,0,0,1),(-1+i),4) \ =$$

$$\sum_{z=0}^{3} (a_i * (-1+i)^z)$$

$$= 1 * (-1 + \mathrm{i})^0 + 0 * (-1 + \mathrm{i})^1 + 0 * (-1 + \mathrm{i})^2 + 1 * (-1 + \mathrm{i})^3$$
$$= 3 + 2\,i$$

Implementierung der Basisumwandlung Funktionen

to_carthesian Methode - Variante I

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -8 & \dots & -2^{64} \end{pmatrix}_{1\times 128} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ \vdots \\ a_{127} \end{pmatrix} = (Real)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -4 & 8 & -8 & \dots & -2^{64} \end{pmatrix}_{1\times 128} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ \vdots \\ a_{127} \end{pmatrix} = (Imag)$$

- a_i i-te Ziffer der Eingabe
- Relation zwischen jede achte Potenz

to_carthesian Methode - Variante I

n mod 8	Real $(-1+i)^n$	Imag $(-1+i)^n$
0	2^{4k}	0
1	-2^{4k}	2^{4k}
2	0	-2^{4k+1}
3	2^{4k+1}	2^{4k+1}
4	-2^{4k+2}	0
5	2^{4k+2}	-2^{4k+2}
6	0	2^{4k+3}
7	-2^{4k+3}	-2^{4k+3}

$*k = \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor$

to_carthesian Methode - Variante II

SIMD-Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 2 \\ -4 & 0 \\ 4 & -4 \\ 0 & 8 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} a_0 & a_8 & \dots & a_{120} \\ a_1 & a_9 & \dots & a_{121} \\ a_2 & a_{10} & \dots & a_{122} \\ a_3 & a_{11} & \dots & a_{123} \\ a_4 & a_{12} & \dots & a_{124} \\ a_5 & a_{13} & \dots & a_{125} \\ a_6 & a_{14} & \dots & a_{126} \\ a_7 & a_{15} & \dots & a_{127} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^0 \\ 2^4 \\ 2^8 \\ 2^{12} \\ 2^{16} \\ 2^{20} \\ 2^{24} \\ 2^{28} \\ 2^{32} \\ 2^{36} \\ 2^{40} \\ 2^{44} \\ 2^{48} \\ 2^{52} \\ 2^{56} \\ 2^{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Real \\ Imag \end{pmatrix}$$

to_bm1pi Methode

Beispiel (Input $3 + 2i$) :

		(Division by $(-1+i)) * 2$		Modified		
Real	Imag	Real	Imag	Real	Imag	Remainder
3	2	-1	-5	0	-4	1
0	-2	-2	2	-2	2	0
-1	1	2	0	2	0	0
1	0	-1	-1	0	0	1

to_bm1pi Methode - Korrektheit

Division der Zahl durch die gewählte Basis:

$$\frac{n+im}{-1+i} = \frac{(n+im)(-1-i)}{2} = \frac{m-n}{2} - i\frac{n+m}{2}$$

Fallunterscheidung:

- Wenn n und m beide gerade oder ungerade sind:

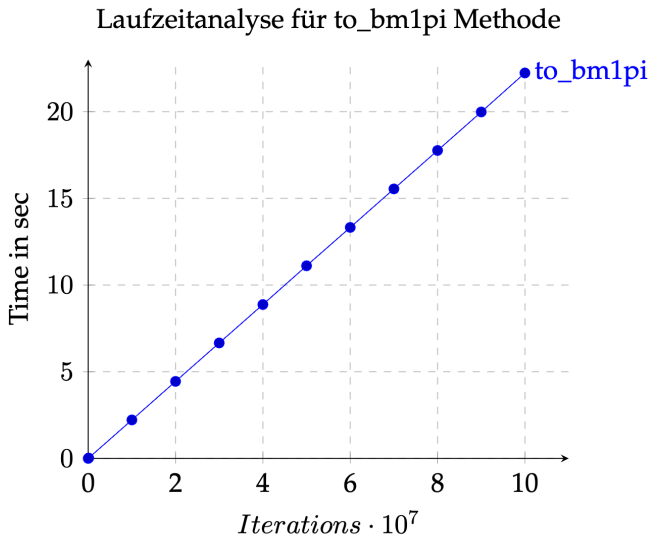
$$\frac{m-n}{2} - i\frac{n+m}{2}$$

- Wenn nur eins von n oder m gerade(bzw. das andere ungerade) ist:

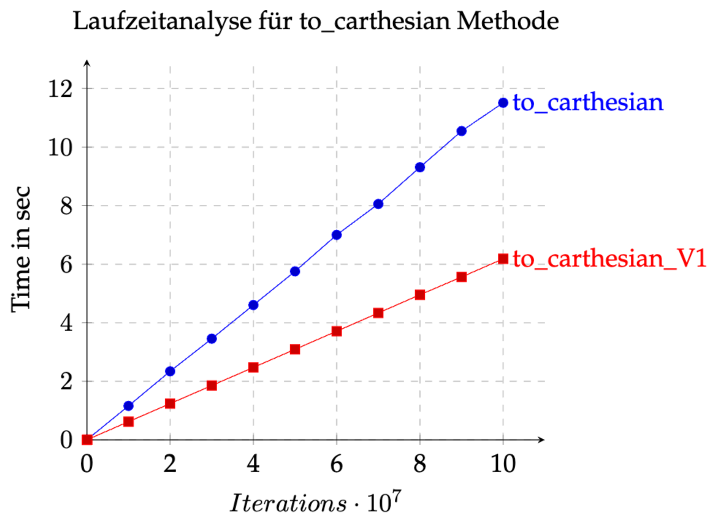
$$\frac{m-n+1}{2} - i\frac{n+m-1}{2}$$

Performanzanalyse

Performanzanalyse



- $\mathcal{O}(1)$
- Iterationen: 128 mal



- $\mathcal{O}(1)$
- Iterationen: 16 mal

Unabhängigkeit von der Eingabegröße

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!