IO – Introducció als Ordinadors

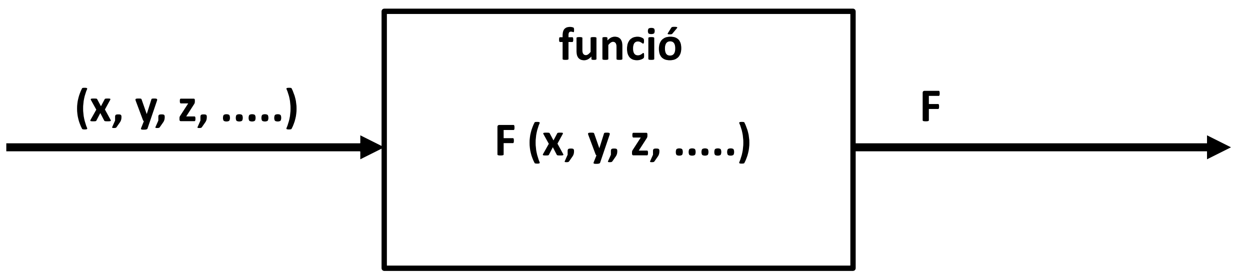
GRUP A – Sessió 07-08

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques (II)

2.2. Funcions booleanes

Funcions booleanes:

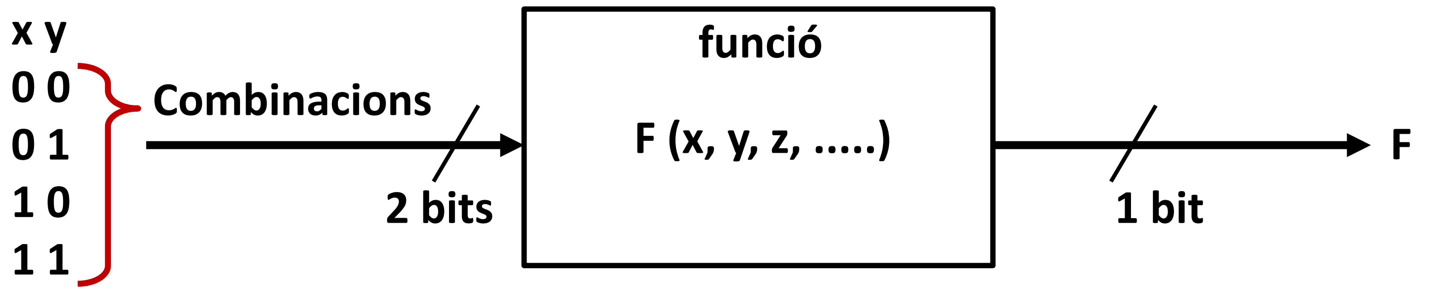
- Funcions a on **una variable booleana** depèn del valor que adopten **altres variables booleanes** relacionades entre si mitjançant operacions booleanes: suma, producte, complement.



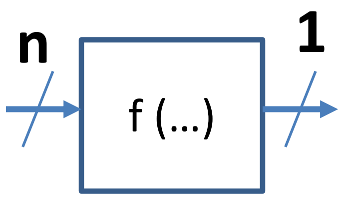
2.2. Funcions booleanes

Funcions booleanes:

- Funcions a on **una variable booleana** depèn del valor que adopten **altres variables booleanes** relacionades entre si mitjançant operacions booleanes: suma, producte, complement.



2.2. Funcions booleanes



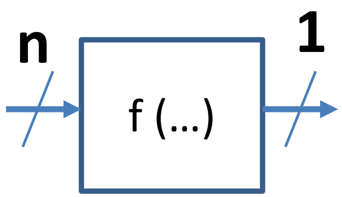
Funcions booleanes

Maneres de..

- representar-les,
- descriure-les,
- operar-les,
- implementar-les

1. **Expressió algebraica (Tema 2)**
    - **Concepte** *(1)*
    - **Expressió algebraica canònica** *(2)*
    - **Expressió algebraica simplificada** *(3)*
2. **Taula de la veritat (Tema 2)**
3. **Taula o diagrama de Karnaugh (Tema 3)**
4. **Diagrama de portes lògiques (Tema 2)**
5. **Llenguatges descriptius (Tema 2)**

2.2. Funcions booleanes



Funcions booleanes

Maneres de..

- representar-les,
- descriure-les,
- operar-les,
- implementar-les

1. **Expressió algebraica (Tema 2)**
   - **Concepte** *(1)*
   - **Expressió algebraica canònica** *(2)*
   - **Expressió algebraica simplificada** *(3)*
2. **Taula de la veritat (Tema 2)**
3. **Taula o diagrama de Karnaugh (Tema 3)**
4. **Diagrama de portes lògiques (Tema 2)**
5. **Llenguatges descriptius (Tema 2)**

2.2. Funcions booleanes

1. Expressió algebraica

1. **Concepte** *(1)*
2. **Expressió algebraica “canònica”** *(2)*
   - **“Producte” de conjunts de termes (MAXTERMS)**
   - **“Suma” de conjunts de termes (MINTERMS)**
3. **Expressió algebraica simplificada** *(3)*

2.2. Funcions booleanes

1. Expressió algebraica

Descriu una funció mitjançant una expressió que relaciona diferents **variables** amb **operacions booleanes**.

Un exemple: **f(a,b,c) =** $a + b \times \bar{c}$, a on **'a', 'b', i 'c'** són variables d'entrada.

Exemple: suposem que {a, b, c} prenen els valors {0, 1, 0}

$$\rightarrow \quad q = a + b \times \bar{c} = 0 + 1 \times 1 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Postulat 4} \rightarrow \bar{0} = 1 \\ \text{Postulat 2} \rightarrow 1 \times 1 = 1, \text{ i } 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} \text{Postulats que hem aplicat}$$

2.2. Funcions booleanes

1. Expressió algebraica

Expressió algebraica canònica *(1)*

Dos tipus:

1) **Producte de conjunts de termes** on cada terme apareixen totes les variables d'entrada operades com a sumes (**maxterms**)

   $q = a + b \times \bar{c} = (a + b + c) \times (a + b + \bar{c}) \times (a + \bar{b} + \bar{c})$

2) **Suma de conjunts de termes** en els quals en cada terme apareixen totes les variables d'entrada operades per producte (**minterms**)

   $q = a + b \times \bar{c} = (\bar{a} \times b \times \bar{c}) + (a \times \bar{b} \times \bar{c}) + (a \times \bar{b} \times c) + (a \times b \times \bar{c}) + (a \times b \times c)$

Expressió algebraica simplificada *(2)*

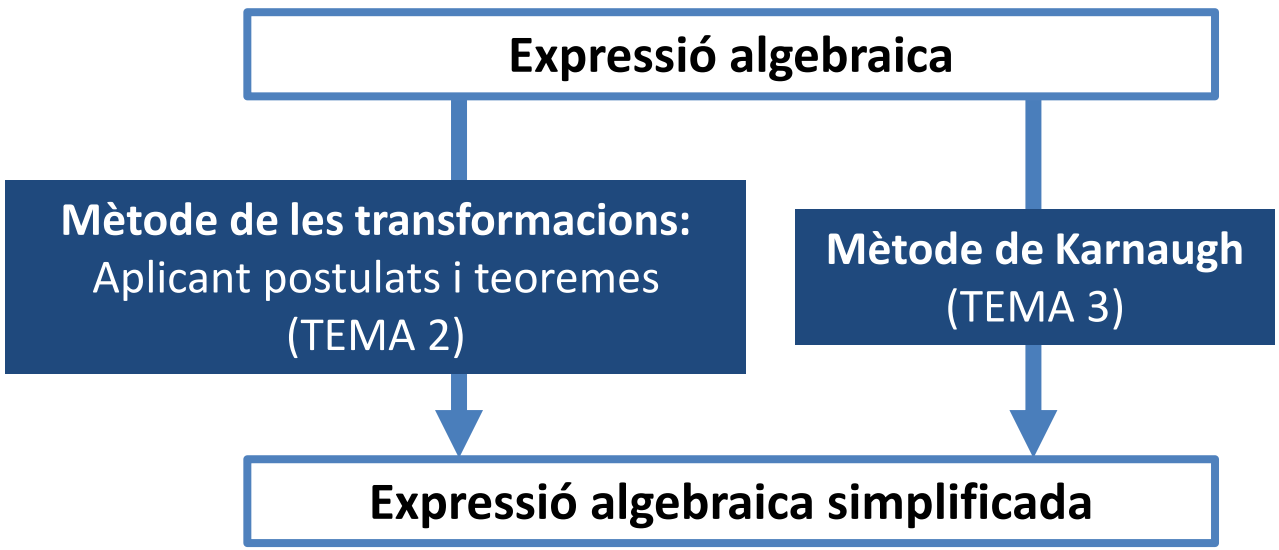
$q = a + b \times \bar{c}$ ← ***impossible obtenir una altra expressió amb menys termes***
(* veurem teoremes per aconseguir-la)

2.2. Funcions booleanes

1. Expressió algebraica

Expressió algebraica simplificada *(3)*

$q = a + b \times \bar{c}$ ← ***impossible obtenir una altra expressió amb menys termes***
(* veurem teoremes per aconseguir-la)

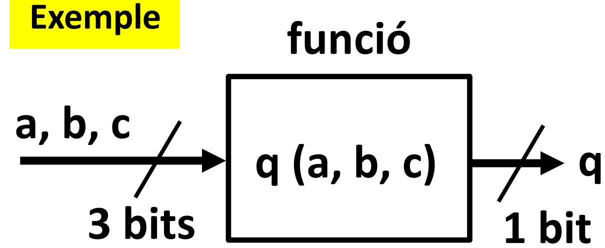


2.2. Funcions booleanes

2. Taula de la veritat

Serveixen per expressar una funció mitjançant una taula que inclou totes les combinacions possibles que poden adoptar les **variables d'entrada** amb la corresponent **sortida**.

Exemple

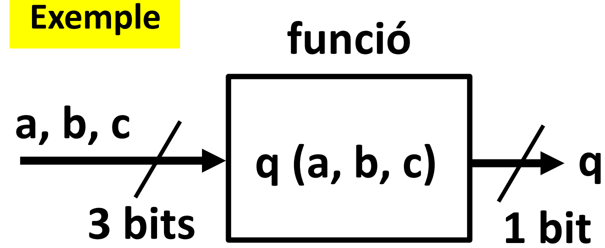


variables d'entrada **Sortida**

a	b	c	q
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

****habitualment les combinacions s'ordenen segons el codi binari natural***

Exemple



2.2. Funcions booleanes

2. Taula de la veritat

Serveixen per expressar una funció mitjançant una taula que inclou totes les combinacions possibles que poden adoptar les **variables d'entrada** amb la corresponent **sortida**.

Tenen dues parts:

- Esquerra: combinacions que poden adoptar les variables d'entrada.
- Dreta: representació del valor resultant.

Amb l'exemple anterior q = a + b x $\bar{c}$, si apliquem totes les combinacions possibles, obtenim la següent taula de la veritat a on hem calculat el valor que adopta la sortida 'q' per a cada una de les 8 possibles combinacions d'entrada.

variables d'entrada			**Sortida**
a	b	c	q
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Funció → q = a + b x $\bar{c}$

****habitualment les combinacions s'ordenen segons el codi binari natural***

2.2. Funcions booleanes

3. Taula o diagrama de Karnaugh

Un altre mecanisme que facilita l'obtenció d'expressions algèbriques a partir d'una taula de la veritat.

Es basa en un representació fen ús del codi GRAY.

(ho veurem en el següent tema)

Ho farem servir en el tema 3

n4	n3	n2	n1	n0	S
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
….					

n1, n0 \ n4, n3, n2	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	1	1	X	1	1	1
01	0	1	0	1	X	X	1	0
11	1	0	1	0	X	X	0	0
10	0	1	0	1	X	X	0	1

S (n0, n1, n2, n3, n4) =

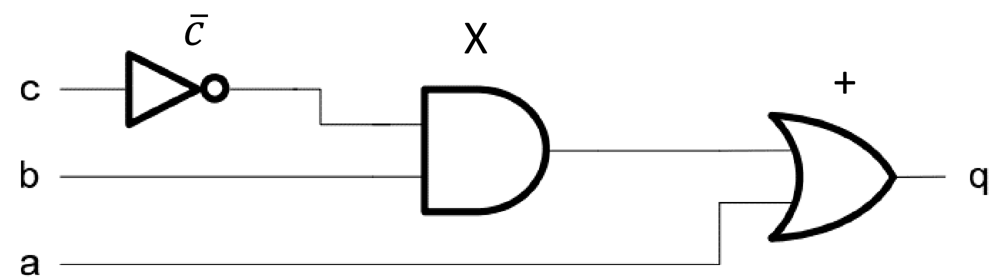
$$(n3 \cdot n2 \cdot \overline{n1}) + (n3 \cdot \overline{n2} \cdot \overline{n1}) + (n3 \cdot \overline{n2} \cdot \overline{n0}) + (n4 \cdot \overline{n2} \cdot \overline{n0}) + (n2 \cdot \overline{n1} \cdot \overline{n0}) + (n3 \cdot n2 \cdot n1 \cdot n0) + (\overline{n4} \cdot \overline{n3} \cdot n2 \cdot \overline{n0}) + (\overline{n4} \cdot \overline{n3} \cdot \overline{n2} \cdot n1 \cdot n0)$$

2.2. Funcions booleanes

4. Diagrama de portes lògiques

- És un diagrama en el que es representen gràficament les diferents operacions mitjançant símbols anomenats **PORTES LÒGIQUES** que denoten aquestes operacions.
- A mode d'exemple, l'expressió anterior q = a + b x $\bar{c}$ es representaria de la següent manera:

Funció → q = a + b x $\bar{c}$

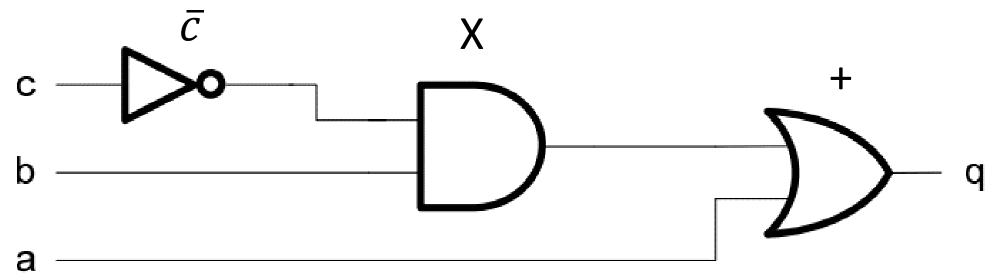


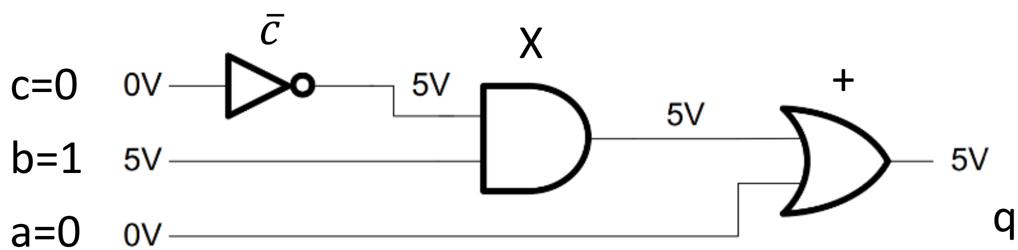
2.2. Funcions booleanes

4. Diagrama de portes lògiques

- És un diagrama en el que es representen gràficament les diferents operacions mitjançant símbols anomenats **PORTES LÒGIQUES** que denoten aquestes operacions.
- A mode d'exemple, l'expressió anterior q = a + b x $\bar{c}$ es representaria de la següent manera:

Funció → q = a + b x $\bar{c}$





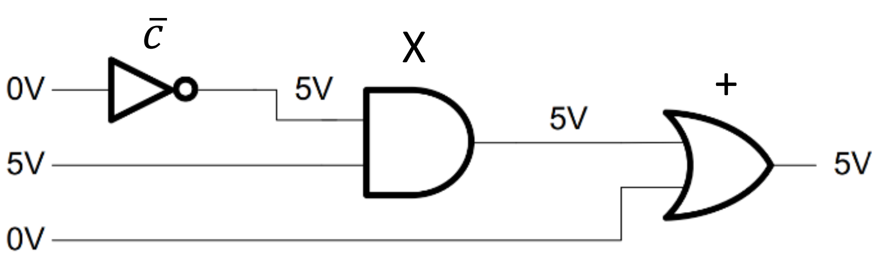
2.2. Funcions booleanes

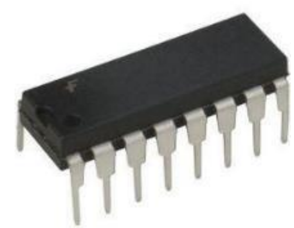
4. Diagrama de portes lògiques.

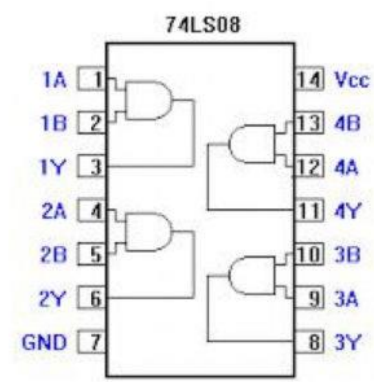
- Aquests diagrames representen una possible implementació real mitjançant portes lògiques en dispositius electrònics.
- Els **circuits integrats** estan formats per una sèrie de portes lògiques, els quals es connecten entre ells segons el cablejat que indica el mateix diagrama de ports lògics.

SN74LS08 (Portes AND)

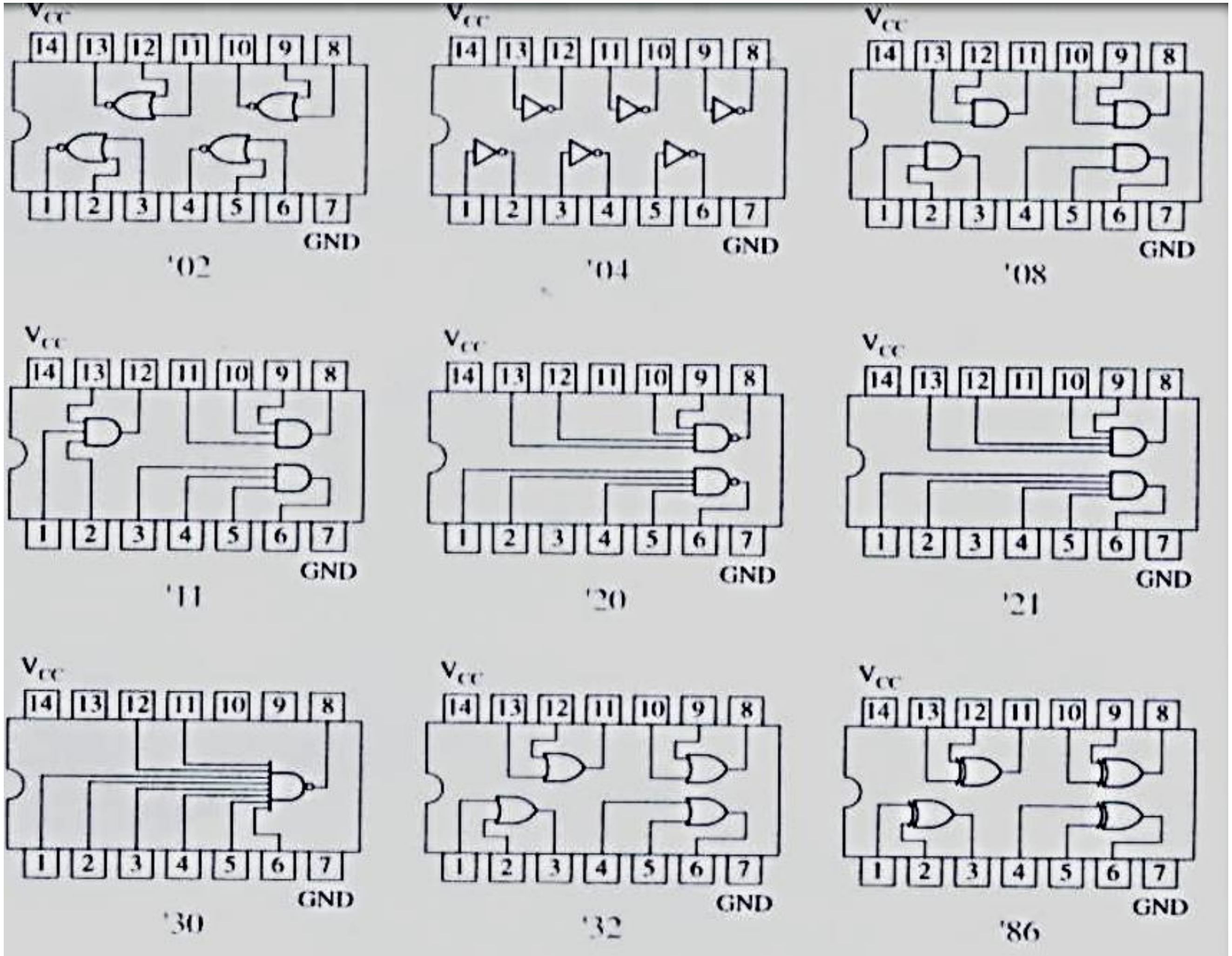
Funció → $q = a + b \times \bar{c}$







Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques



2.2. Funcions booleanes

5. **Llenguatges descriptius de Hardware (maquinari) d'alt nivell.**

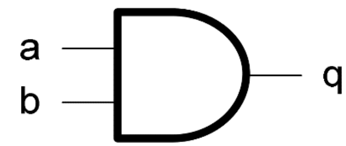
- Un exemple son el **VHDL** o el Verilog, que utilitzen una sintaxi i construccions similars a les de llenguatges de programació d'alt nivell (com C o Java) per a descriure el comportament dels sistemes digitals descrits mitjançant booleanes funcions.
- Aquests llenguatges **estan pensats** per descriure sistemes digitals més **complexos** que simples funcions booleanes.
- Però també permeten representar sistemes senzills que implementen **poques o una única equació booleana**.
- Més endavant veurem a mode d'exemple com s'implementaria la expressió q = a + b x $\bar{c}$ en **VHDL.**
- La idea d'utilitzar un llenguatge de programació és poder implementar el comportament d'un circuit digital sense necessitat de fer-ho físicament (connectant cables i soldant components).

2.3. Operacions booleanes
(Portes lògiques)

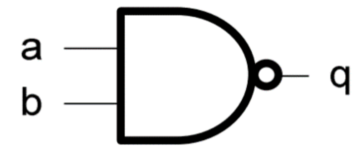
2.3. Operacions booleanes

*Concepte de portes lògiques per **implementar les funcions algebraiques**:*

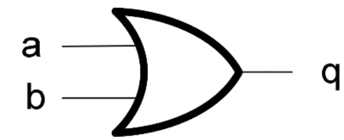
- **AND (multiplicació)** ***Funció:*** q = ab



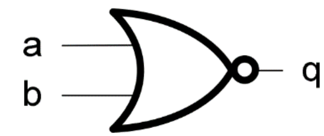
- **NAND (multiplicació negada)** ***Funció:*** q = $\overline{ab}$



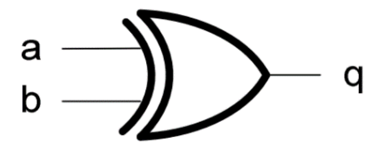
- **OR (suma)** ***Funció:*** q = a + b



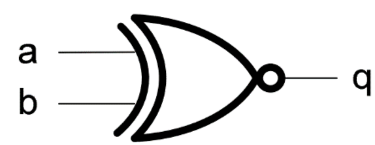
- **NOR (suma negada)** ***Funció:*** q = $\overline{a + b}$



- **XOR (suma eXclusiva)** ***Funció:*** q = a $\oplus$ b



- **XNOR (suma eXclusiva negada)** ***Funció:*** q = $\overline{a \oplus b}$



2.3. Operacions booleanes

AND (multiplicació)

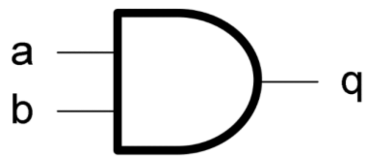
Exemple de funció amb dues variables d’entrada ‘a’ i ‘b’.

- ***Expressions:*** $q = a \times b$ $q = a \cdot b$ $q = ab$ $q = a \wedge b$
- Taula de la veritat:

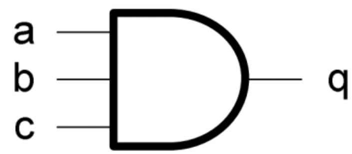
variables d’entrada *Sortida*

a	*b*	*q*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Símbol



Representació segons diagrama de portes de l’operació AND.



Porta AND amb 3 variables
$q = a \cdot b \cdot c$

2.3. Operacions booleanes

OR (suma)

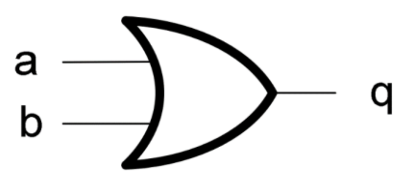
- ***Expressions:*** $q = a + b$ $q = a \vee b$

Taula de la veritat:

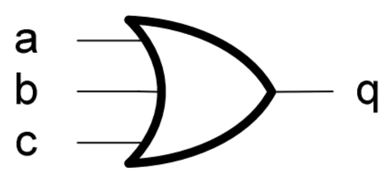
variables d'entrada *Sortida*

a	b	q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Símbol



Representació segons diagrama de portes de l'operació OR.



Porta OR amb 3 variables
$q = a + b + c$

**** Normalment és fàcil trobar en el mercat circuits integrats que implementen ORs i ANDs de 2,3 i 4 entrades.***

2.3. Operacions booleanes

NOT (negada)

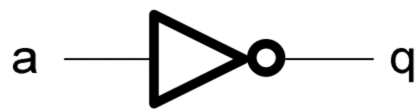
- ***Expressions:*** $q = \bar{a}$ q = !a

Taula de la veritat:

variables d'entrada *Sortida*

a	q
0	1
1	0

Símbol

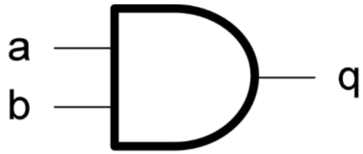


Representació segons diagrama de portes de l'operació NOT.

2.3. Operacions booleanes

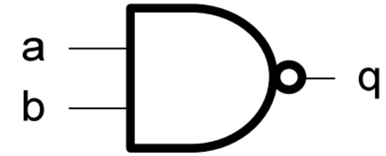
NAND (multiplicació negada)

IDEA:



+

Porta NAND amb 3 variables
q = $\overline{abc}$



- ***Expressions:*** q = $\overline{a \ x \ b}$ q = $\overline{a \cdot b}$ q = $\overline{ab}$

Taula de la veritat:

a	b	q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

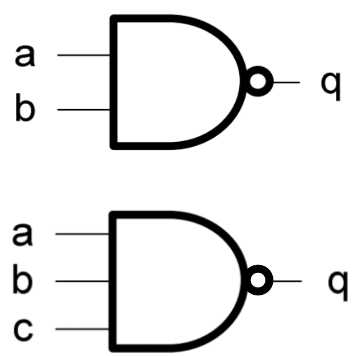
AND

variables d'entrada *Sortida*

a	b	q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

Símbol



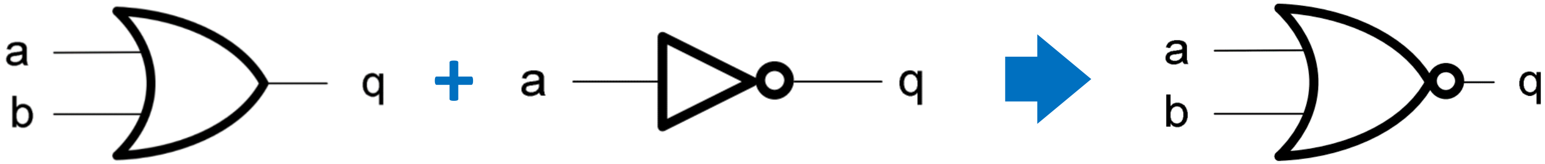
Representació segons diagrama de portes de l'operació NAND.

Porta NAND amb 3 variables
q = $\overline{abc}$

2.3. Operacions booleanes

NOR (suma negada)

IDEA:



- ***Expressions:*** $q = \overline{a + b}$

Taula de la veritat:

variables d'entrada *Sortida*

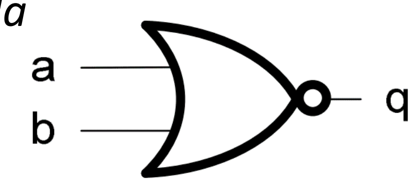
a	b	q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

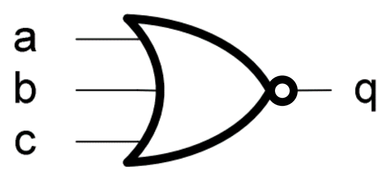
a	b	q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR

Símbol



Representació segons diagrama de portes de l'operació NOR.



Porta NOR amb 3 variables
$q = \overline{a + b + c}$

2.3. Operacions booleanes

X-OR (suma eXclusiva)

Quan haguem **d'operar** en una equació algebraica usarem **SEMRPE** la forma descomposta

- ***Expressions:*** $q = a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$

Taula de la veritat:

a	b	q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

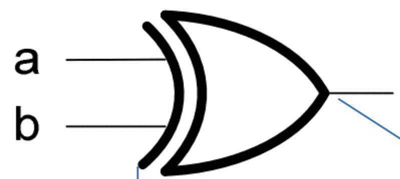
OR

variables d'entrada *Sortida*

a	b	q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

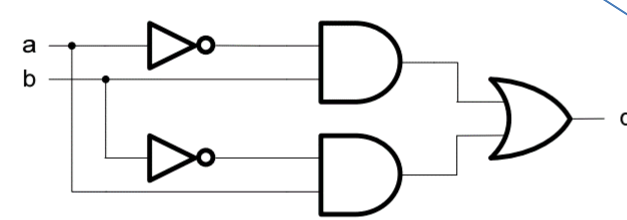
X-OR

Símbol



Representació interna

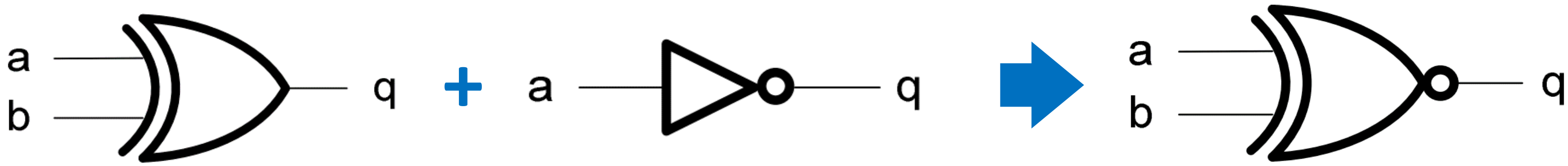
$q = a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$



2.3. Operacions booleanes

XNOR (suma eXclusiva negada)

IDEA:



Funció: $q = \overline{a \oplus b}$ (amb dues variables d'entrada, únic cas)

Taula de la veritat:

a	b	q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

a	b	q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

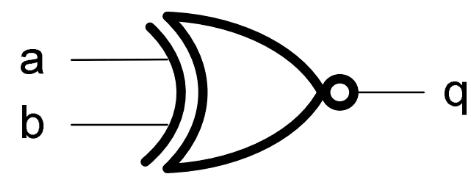
XOR

variables d'entrada Sortida

a	b	q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

XNOR

Símbol

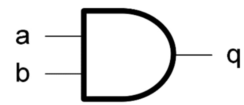


Representació segons diagrama de portes de l'operació NXOR.

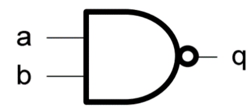
2.3. Operacions booleanes

Resum:

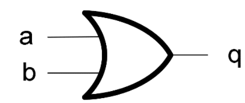
- **AND (multiplicació)** — ***Funció:*** $q = ab$



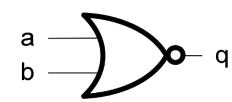
- **NAND (multiplicació negada)** — ***Funció:*** $q = \overline{ab}$



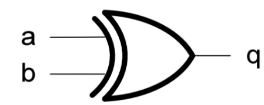
- **OR (suma)** — ***Funció:*** $q = a + b$



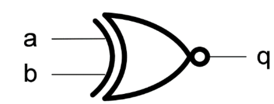
- **NOR (suma negada)** — ***Funció:*** $q = \overline{a + b}$



- **XOR (suma eXclusiva)** — ***Funció:*** $q = a \oplus b$



- **XNOR (suma eXclusiva negada)** — ***Funció:*** $q = \overline{a \oplus b}$



Qualsevol expressió booleana hauria de poder representar-se com una combinació d'aquestes operacions. De fet, només NANDs o NORs es pot representar qualsevol funció.