laSalle
UNIVERSITAT RAMON LLULL

2. FUNCIONS

Marc Freixes

Setembre 2022

Continguts

2.1 Definicions

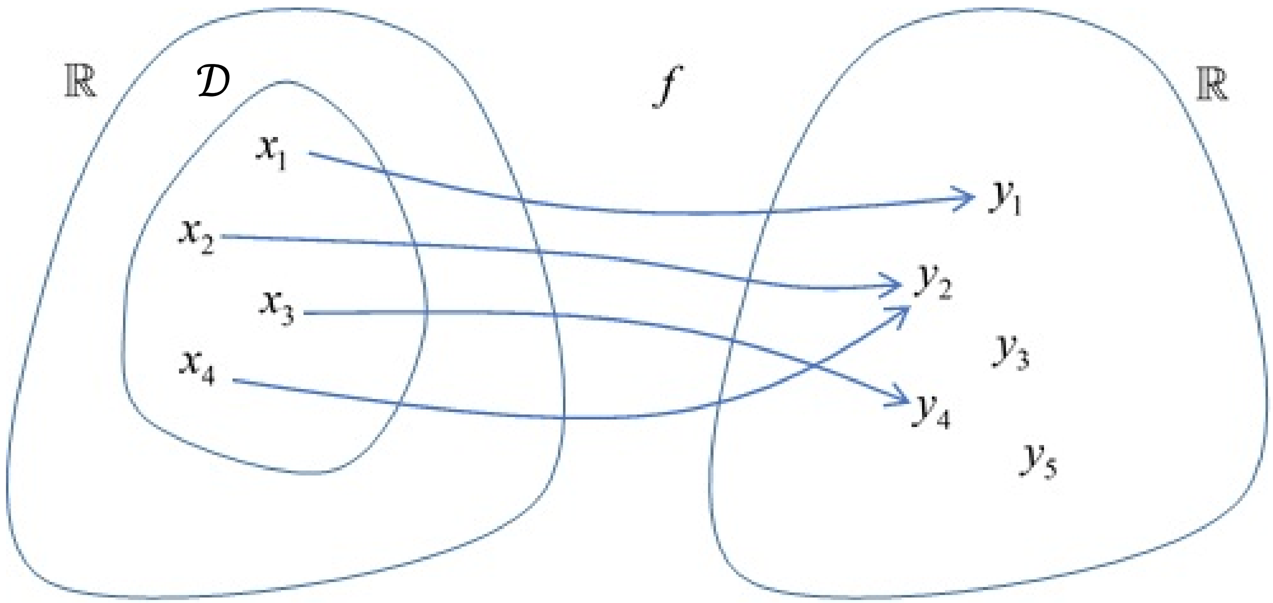
- **Funció real de variable real.**

Def: una funció real de variable real es una aplicació

$$\begin{aligned} f\colon\ & \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow f(x) = y \end{aligned}$$

en la que a cada $x \in \mathcal{D}$ li correspon un valor $f(x) \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{D}$ és el domini de la funció, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

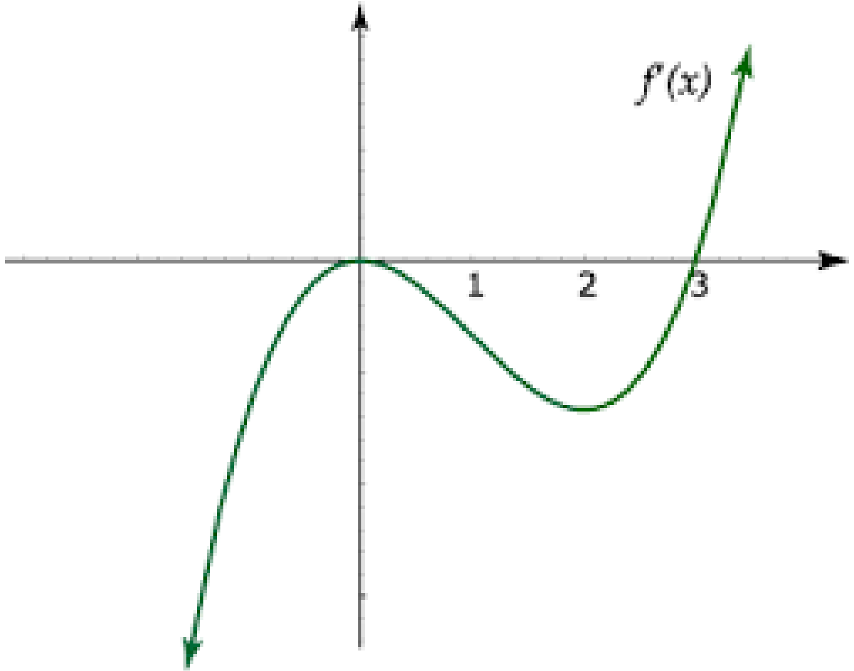


Una funció es pot expressar de diferents maneres:

a) Tabulada:

x	$y = f(x)$
–3	10
–2	5
–1	2
0	1
+1	2
+2	5
+3	10

b) Gràfica:



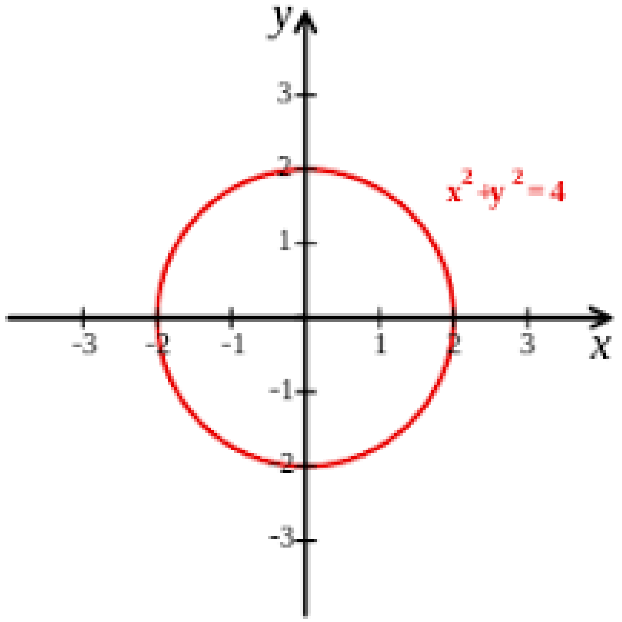
c) **Analítica**:

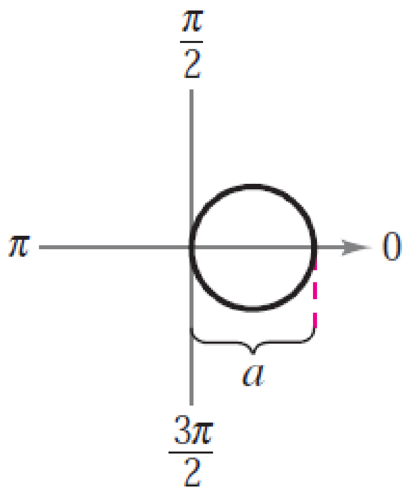
- Explícita: $y = f(x)$, ex: $y = x^2$

- Implícita: $f(x, y) = 0$, ex: $x^2 + y^2 = R^2$

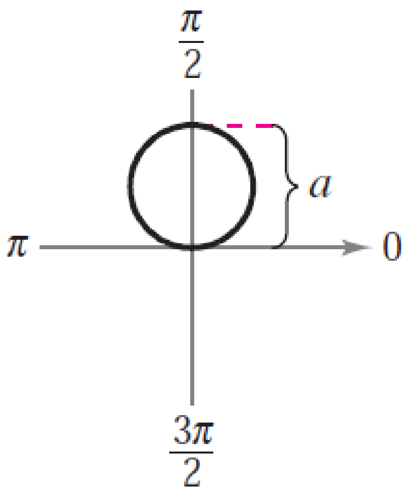
- Paramètrica: $\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = f(t) \end{array}\right\}$, ex: $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}\right\}$

- Polar: $\rho = \rho(\theta)$, ex: $\rho = b + 2a\cos\theta$

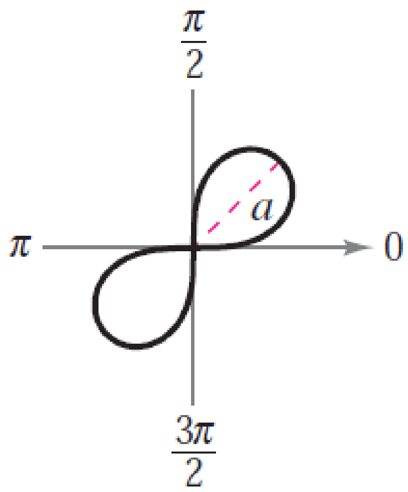




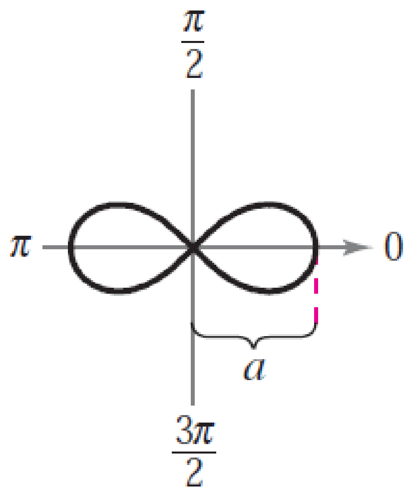
$r = a\cos\theta$
Círculo



$r = a\,\text{sen}\,\theta$
Círculo



$r^2 = a^2\,\text{sen}\,2\theta$
Lemniscata



$r^2 = a^2\cos 2\theta$
Lemniscata

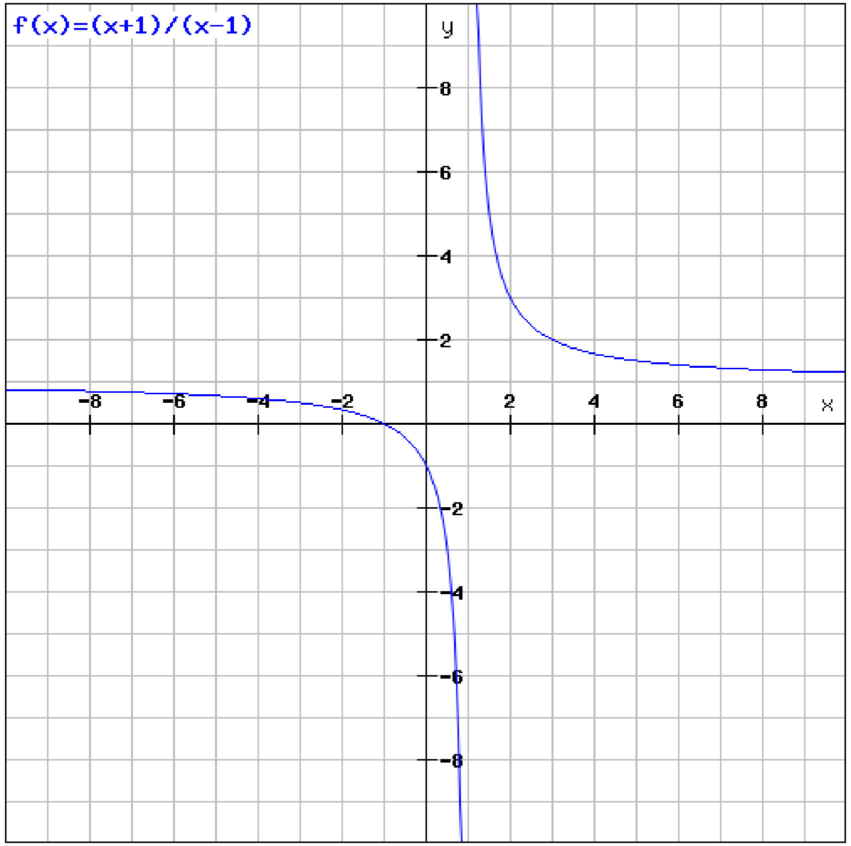
- **Domini i imatge.**

<u>Def</u>: el **domini** d'una funció, $\mathcal{D}$, és el conjunt de valors reals $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ per als quals la funció existeix.

<u>Def</u>: la **imatge** (o recorregut) d'una funció és el conjunt de valors de $\boldsymbol{y}$, per als quals existeix $x \in \mathbb{R}$ amb $y = f(x)$.

Exemple:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$



$Im(f)$

$\mathcal{D}(f)$

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}om(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$Im(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

- **Funció creixent i decreixent.**

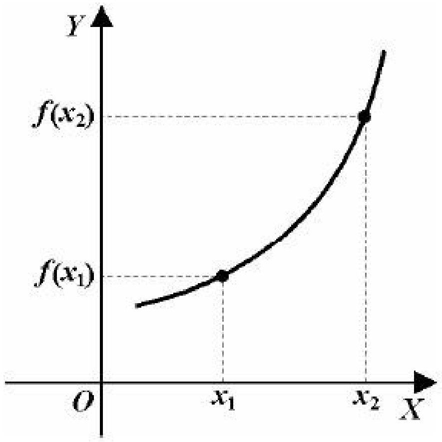
Una funció es:

a) **creixent** si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ amb $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$.

b) **estrictament creixent** si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ amb $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.

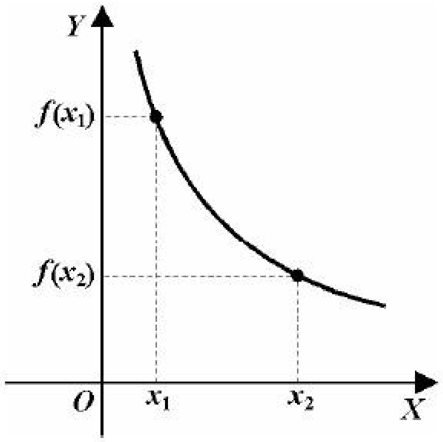
c) **decreixent** si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ amb $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$.

d) **estrictament decreixent** si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ amb $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.



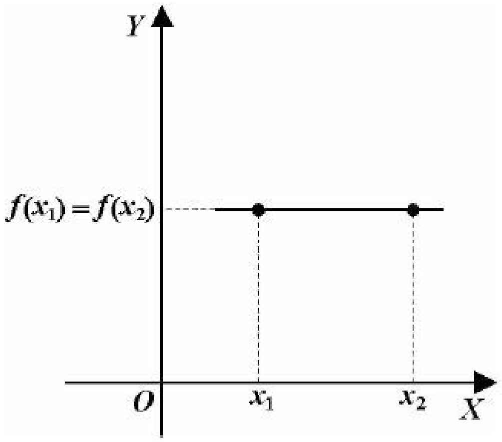
Función creciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



Función decreciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

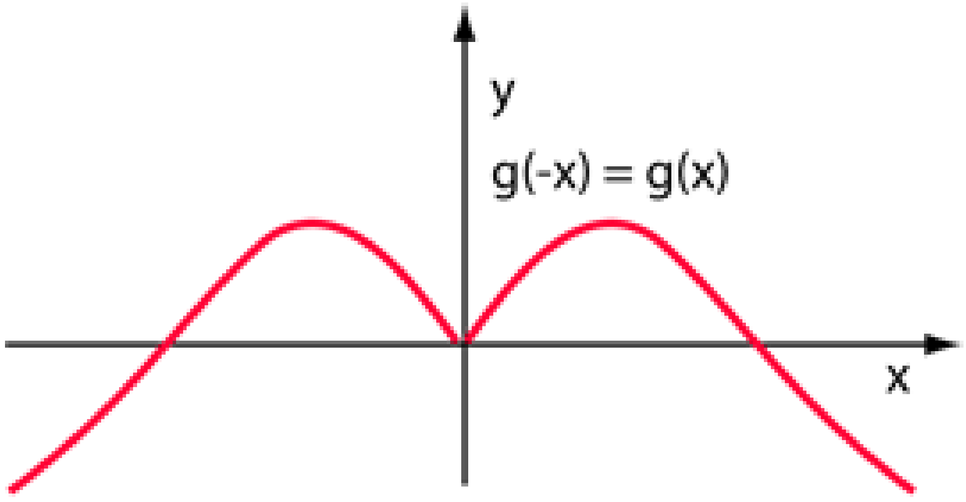


Función constante

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

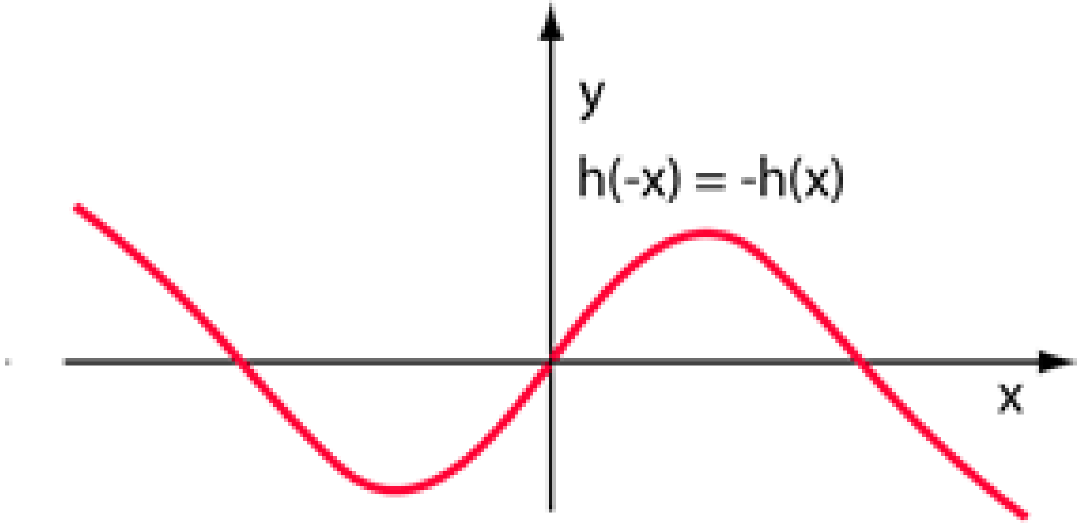
- **Funció parell i imparell.**

a) Una funció és **parell** si
$f(-x) = f(x), \forall x \in \mathcal{D}.$
Es simètrica respecte l'eix y.



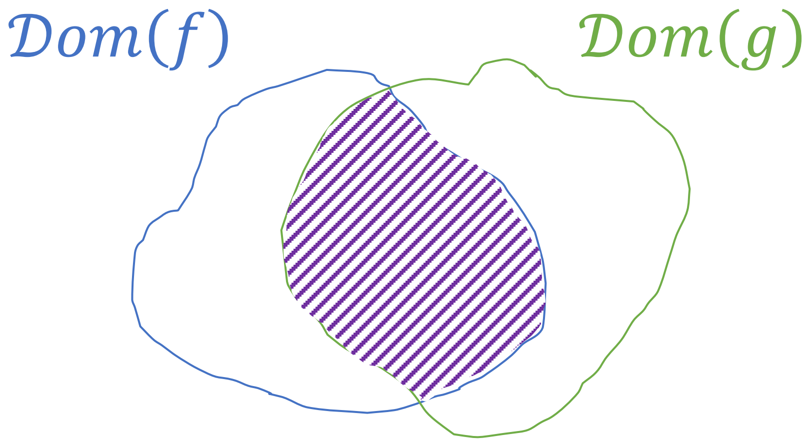
Función par

b) Una funció es **imparell** si
$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathcal{D}.$
Es simètrica respecte l'origen.



Función impar

2.2 Operacions entre funcions



a) Suma:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\mathcal{D}om(f+g) = \mathcal{D}om(f) \ \cap \ \mathcal{D}om(g)$$

Exemple

$\cap$ vol dir intersecció

$$\ln x + x$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{D}om(\ln x) &= (0,\infty) \\ \mathcal{D}om(x) &= \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \mathcal{D}om(\ln x + x) = \mathcal{D}om(\ln x) \cap \mathcal{D}om(x) = (0,\infty) \cap \mathbb{R} = (0,\infty)$$

b) Producte:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\mathcal{D}om(f \cdot g) = \mathcal{D}om(f) \ \cap \ \mathcal{D}om(g)$$

c) Quocient:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\mathcal{D}om\left(\frac{f}{g}\right) = \mathcal{D}om(f) \ \cap \ \mathcal{D}om(g) - \{x|g(x) = 0\}$$

d) Composició de funcions:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

$$x \longrightarrow \boxed{g} \xrightarrow{\quad g(x) \quad} \boxed{f} \longrightarrow f\big(g(x)\big)$$

$$\mathcal{D}om(f \circ g) = \left\{ \begin{array}{r} x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{D}om\big(g(x)\big) \ \text{ i} \\ g(x) \in \mathcal{D}om\big(f(x)\big) \end{array} \right\}$$

Exemple

$$x \longrightarrow \boxed{g} \xrightarrow{g(x)} \boxed{f} \longrightarrow f\big(g(x)\big)$$

$f(x) = x^2 + 1,$

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \left(\frac{x+1}{x^2}\right)^2 + 1$$

$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}$
$\mathcal{D}om(g) = \mathbb{R} - \{0\}$
$\mathcal{D}om(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$

Observació: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

Exemple: $f(x) = x + 2 \quad g(x) = x^2$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = x^2 + 2$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x+2) = (x+2)^2$$

e) Funció inversa respecte la composició:

$$\underbrace{(f \circ f^{-1})(x)}_{f(f^{-1}(x))} = \underbrace{(f^{-1} \circ f)(x)}_{f^{-1}(f(x))} = \underbrace{i(x) = x}_{\text{Funció identitat}}$$

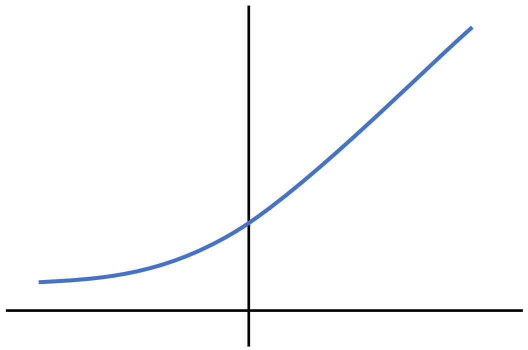
<u>Observació</u>:

f té inversa **només** si es injectiva:

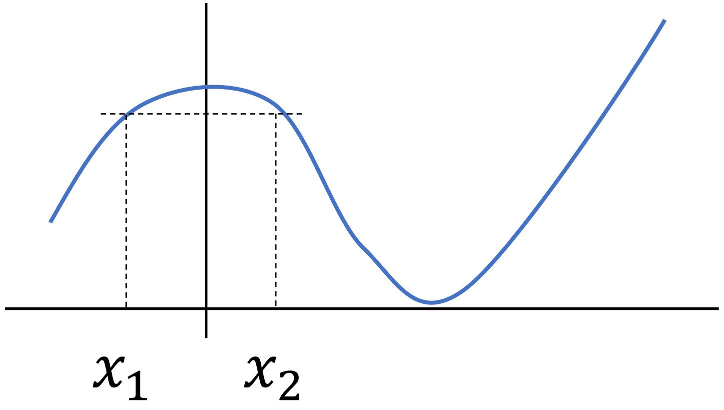
Si $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$

tal que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

<u>Exemple</u>



Funció injectiva



Funció no injectiva

<u>Observació</u>:

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$$

En altres paraules, f ha de ser estrictament creixent o estrictament decreixent.

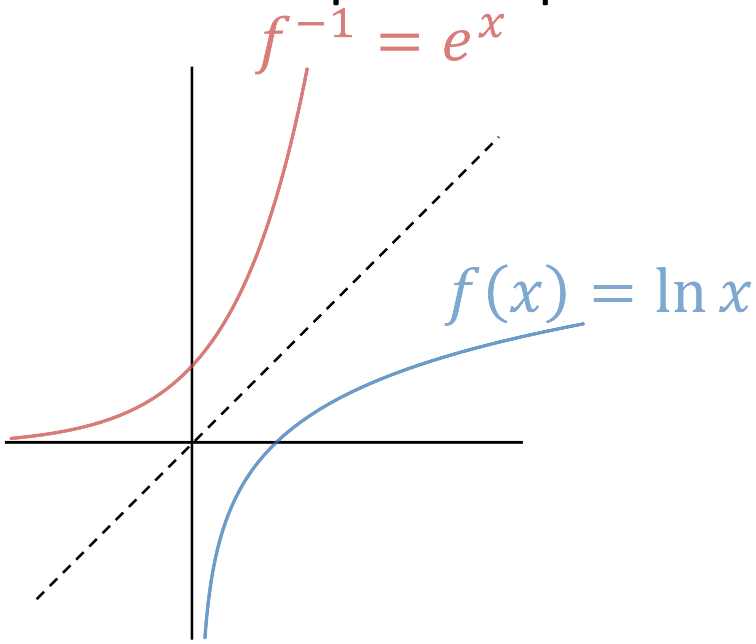
Com calculem la funció inversa?

i. Gràficament

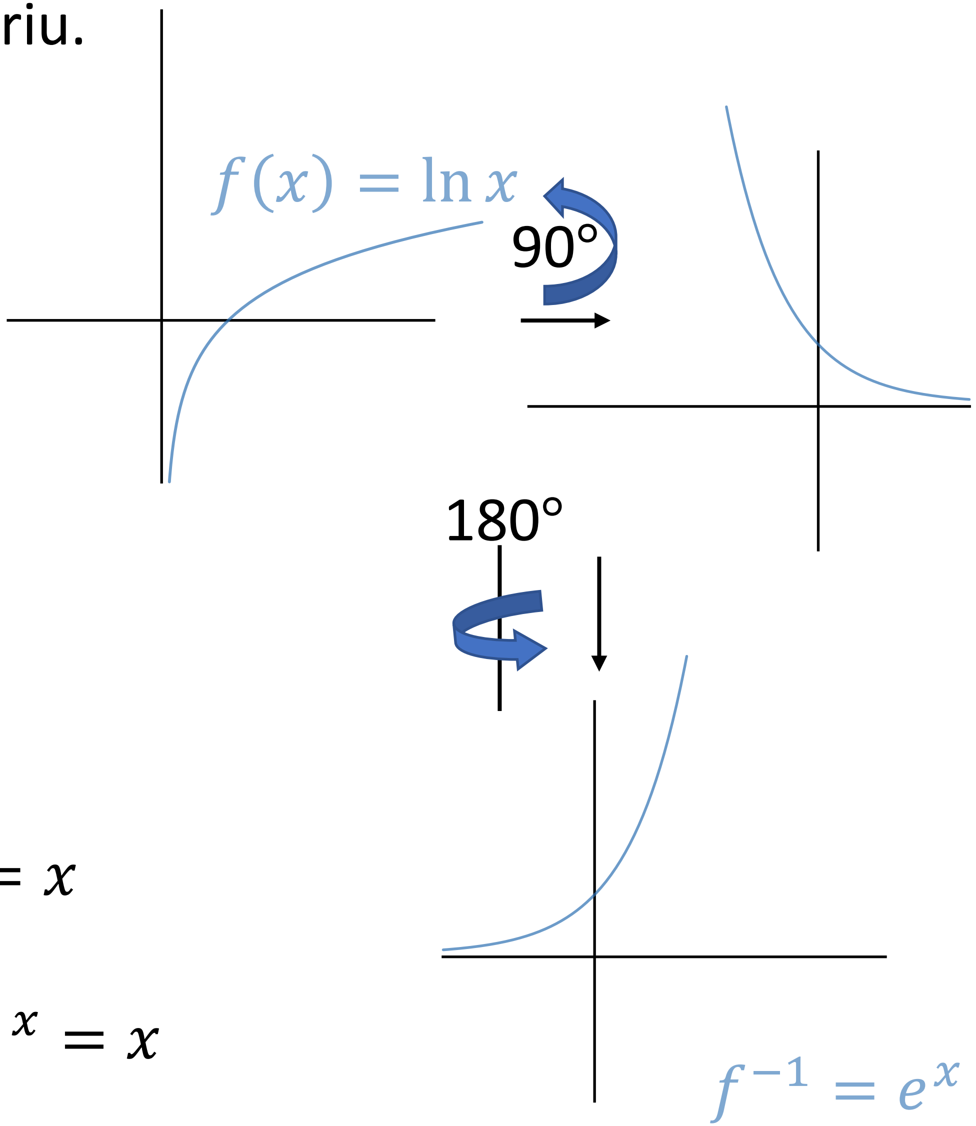
Tracem la bisectriu del 1r quadrant ($y = x$).

La inversa és simètrica respecte aquesta bisectriu.

Exemple



Apliquem a la funció original un gir de 90° en sentit antihorari, i a continuació girem 180° al voltant de l'eix y



$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(e^x) = \ln e^x = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(\ln x) = e^{\ln x} = x$$

ii. Analíticament

Apliquem els següents passos:

1. Canviem $x \leftrightarrow y$
2. Aïllem $\mathrm{y} = f(x)$

Exemple

$\mathrm{y} = e^x$

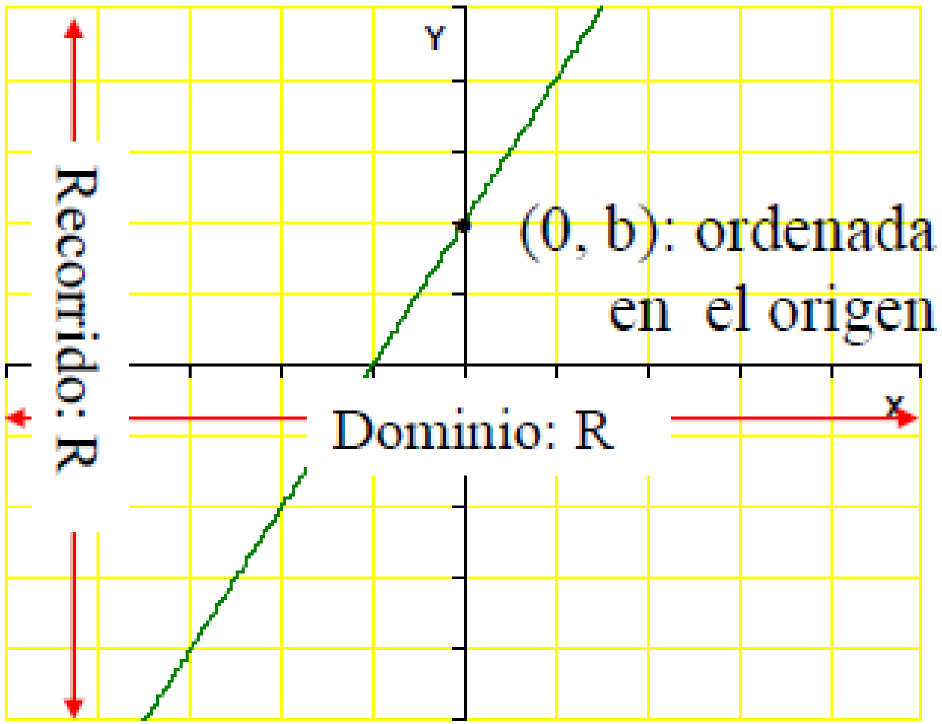
Pas 1: $x = e^y$

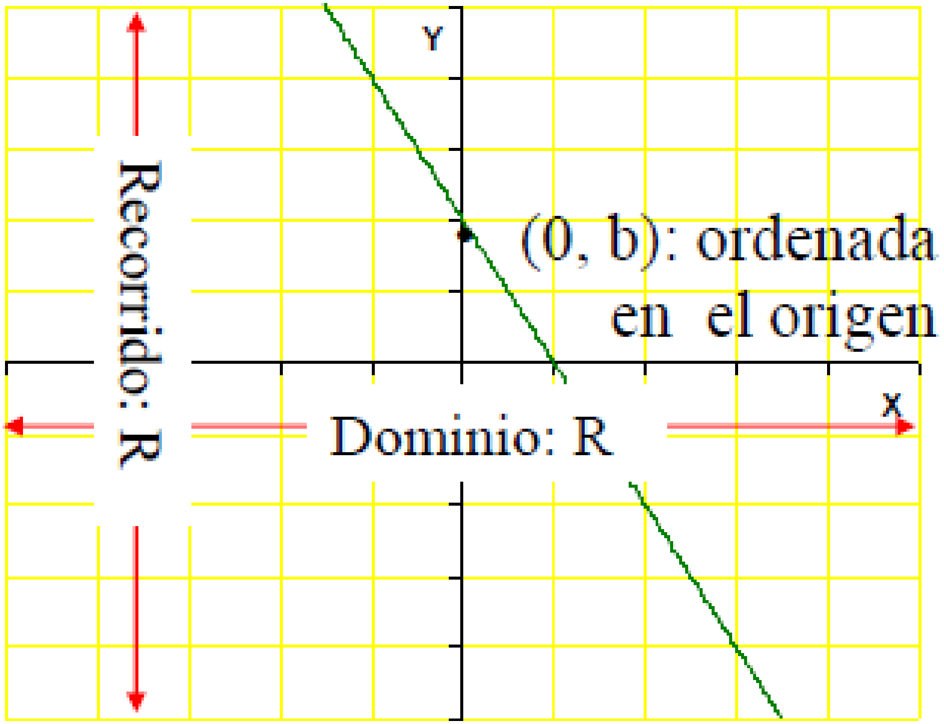
Pas 2: $\ln x = \ln e^y \Rightarrow y = \ln x$

$f^{-1} = \ln x$

2.3 Funcions elementals

- **Funcions lineals** $f(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$



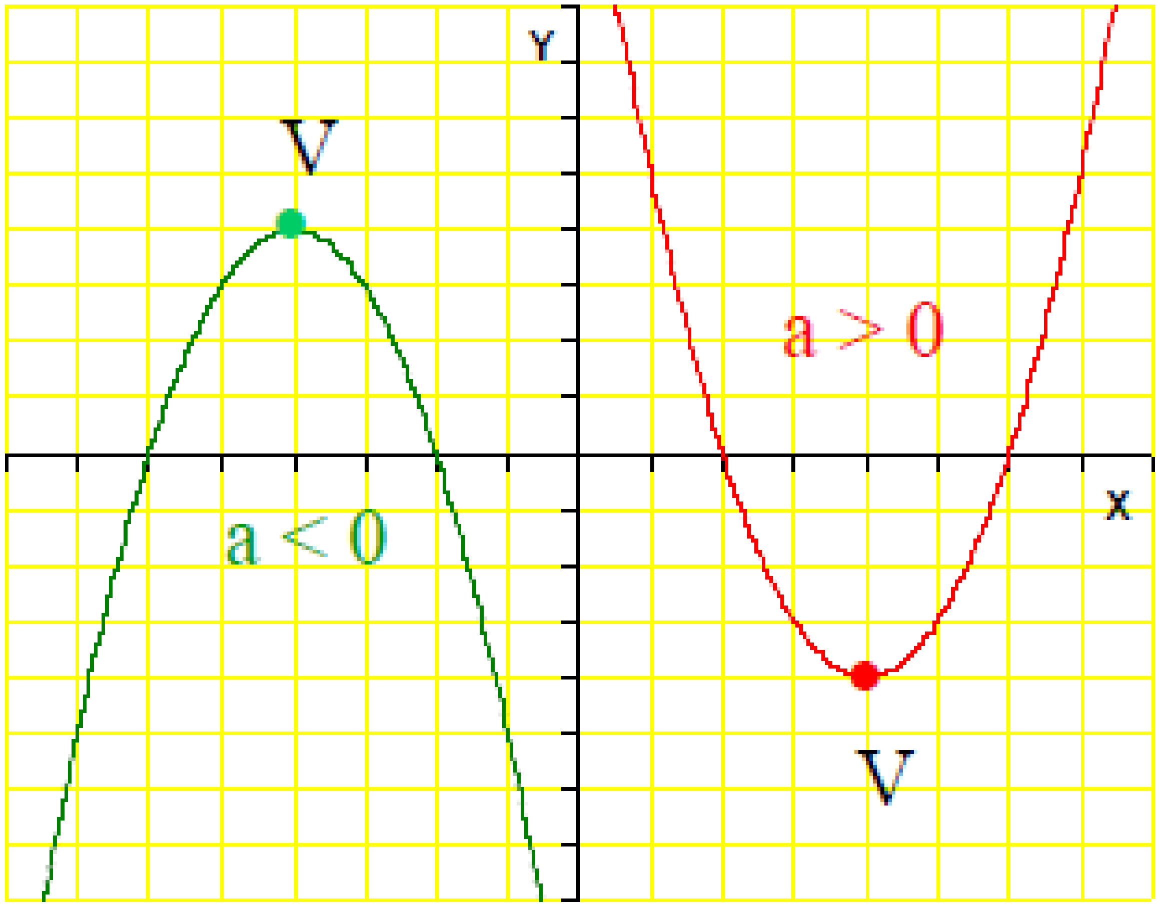


$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

- **Funcions quadràtiques**

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$



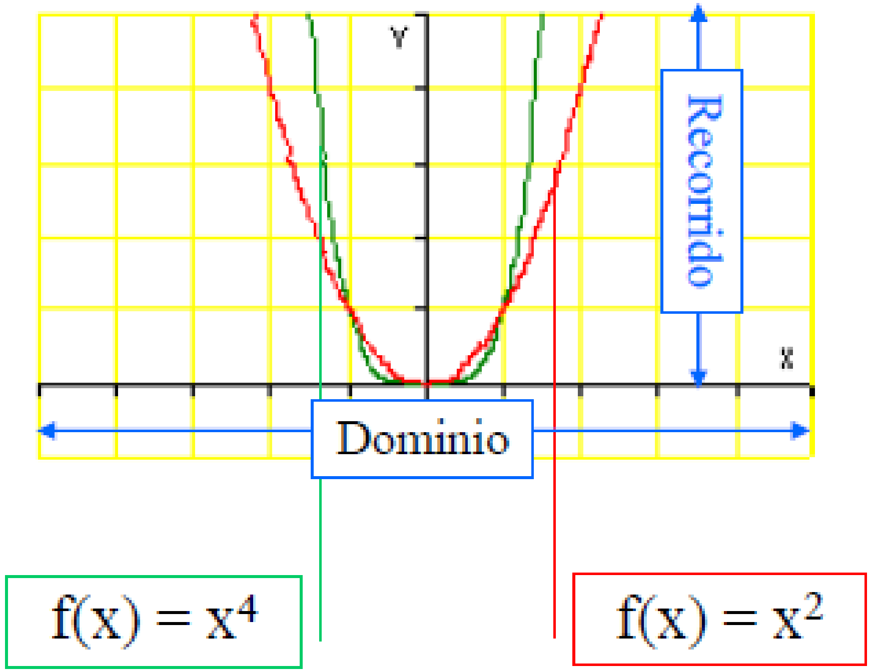
Paràbola amb vèrtex a

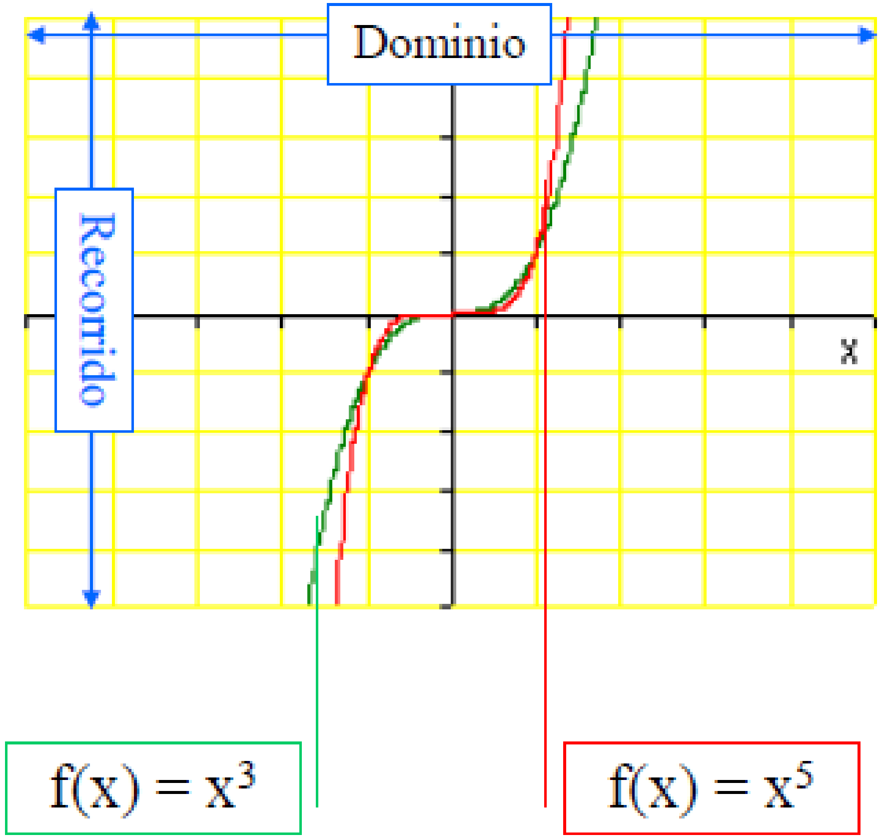
$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}$$

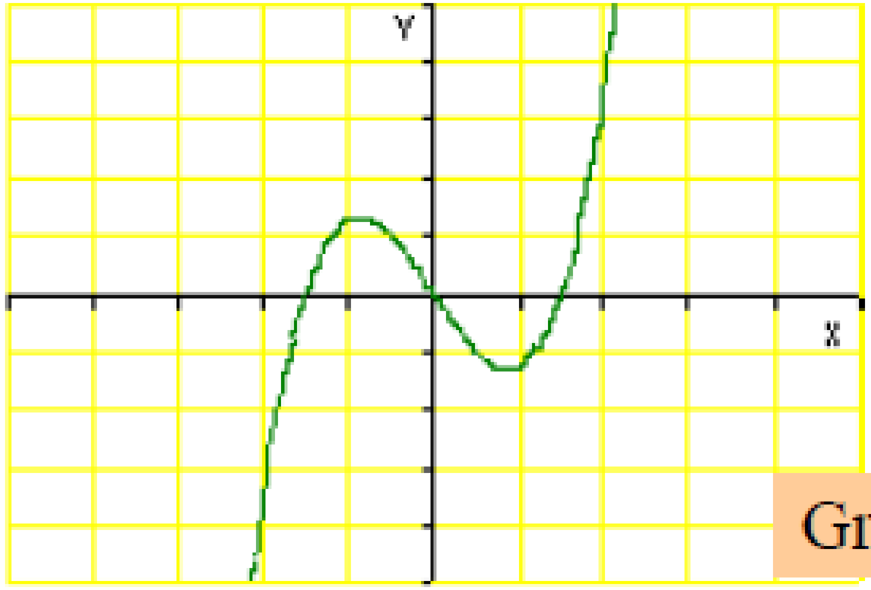
- **Funcions polinòmiques**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$$

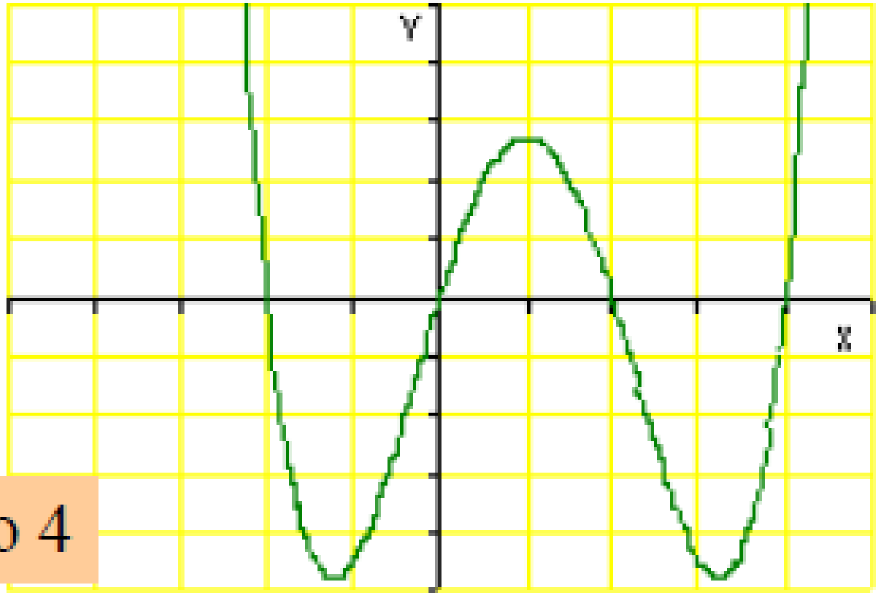




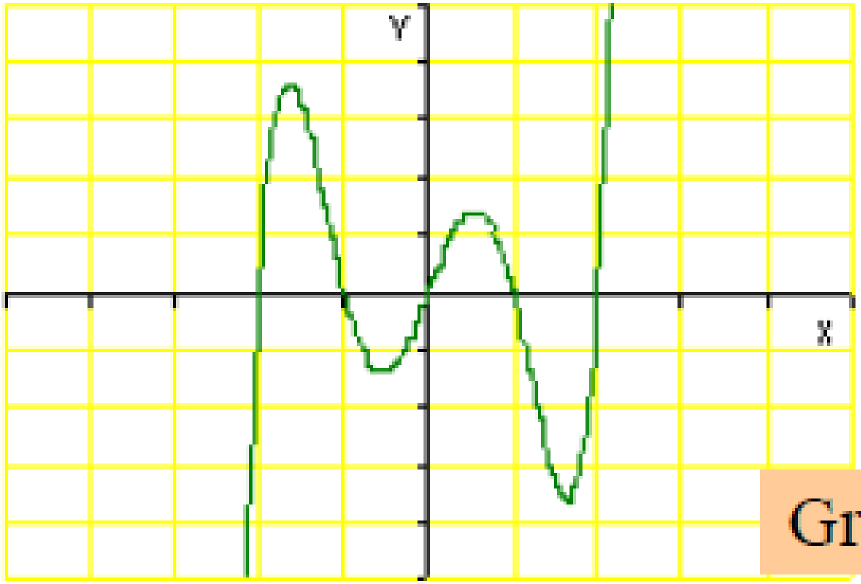
$$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}$$



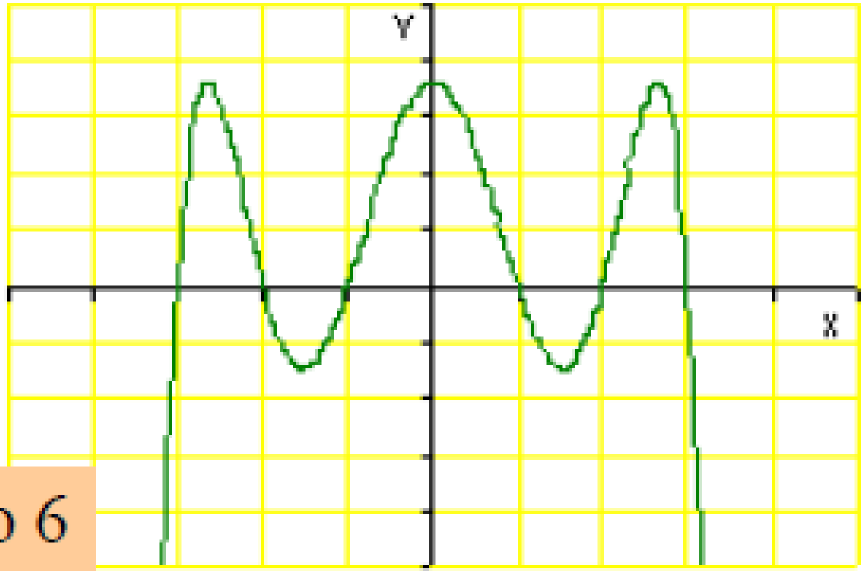
Grado 3



Grado 4



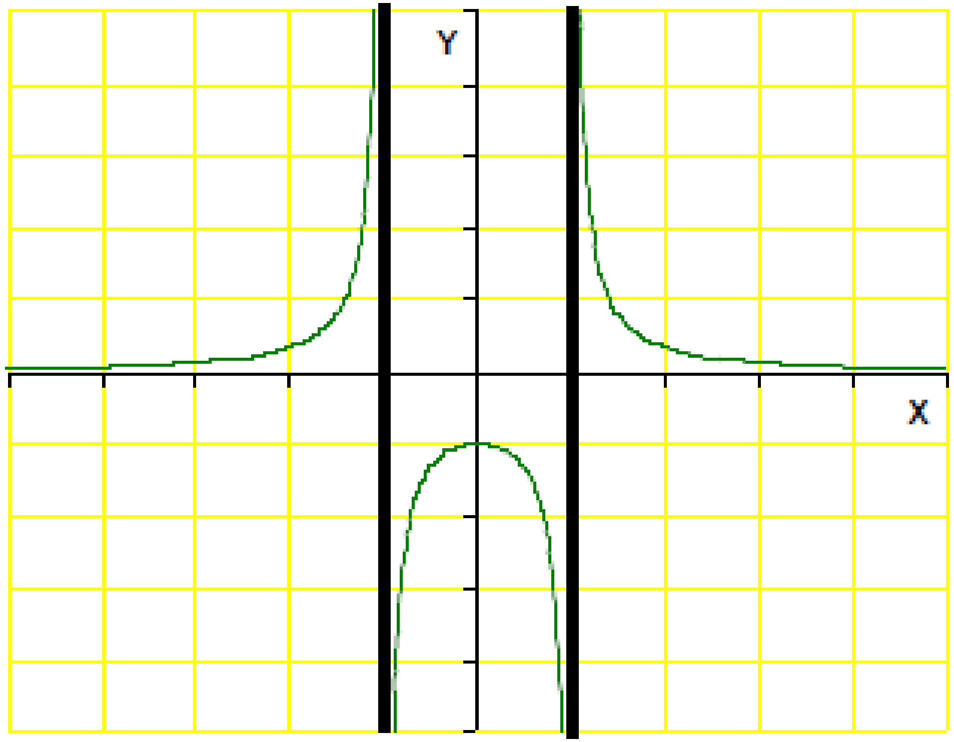
Grado 5



Grado 6

- **Funcions racionals**

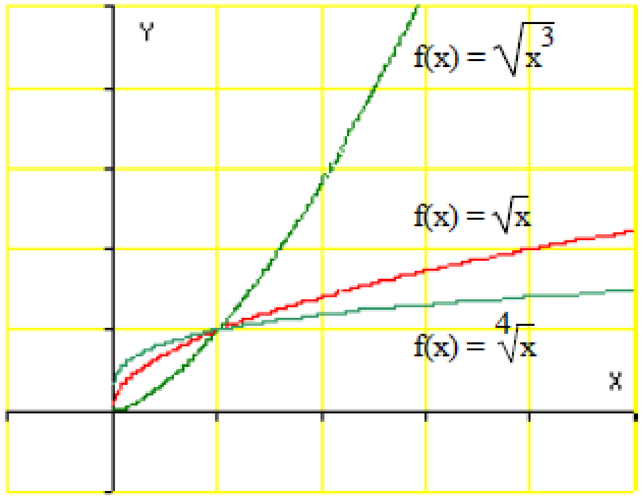
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{on } P(x), Q(x) \text{ són polinomis}$$



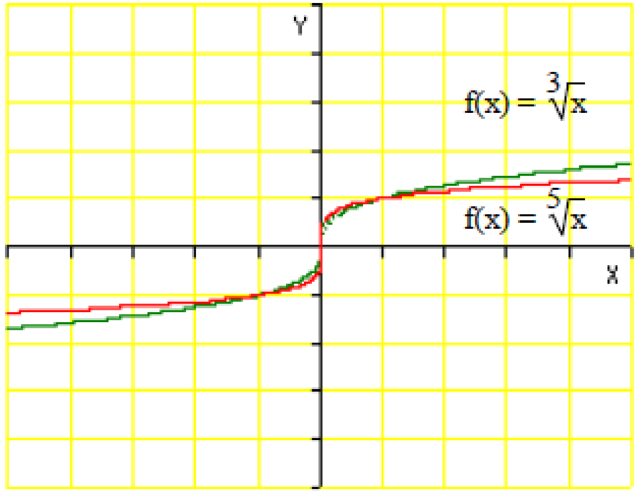
$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}om(f) = \mathbb{R} - \{\text{valors on s'anul·la el denominador}\} \longrightarrow Q(x) = 0$$

- **Funcions amb radicals** $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, $n, m \in \mathbb{N}$

$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}^+$



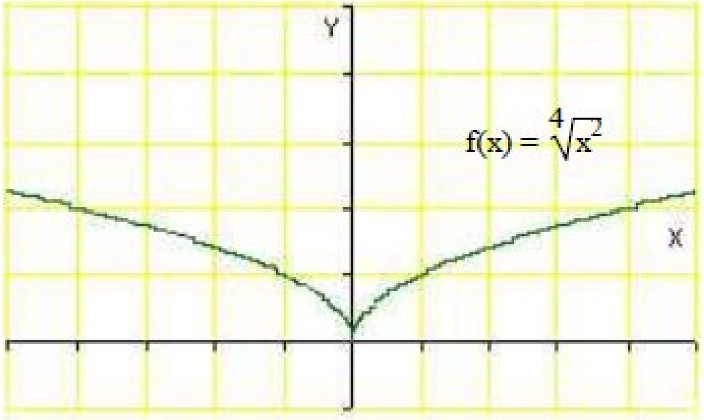
Si m es impar y n es par



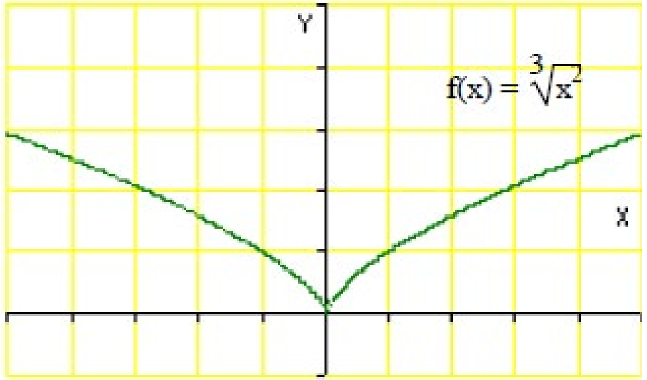
Si m es impar y n es impar

$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}$

$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}$



Si m es par y n es par

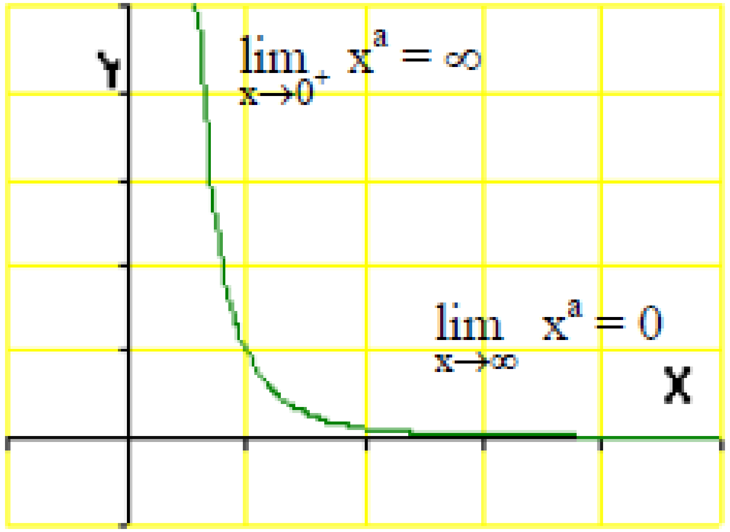


Si m es impar y n es impar

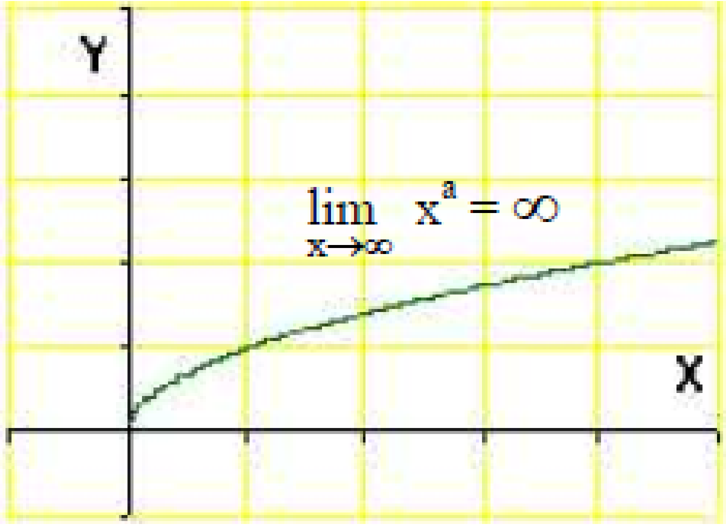
$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}$

- **Funcions potencials**

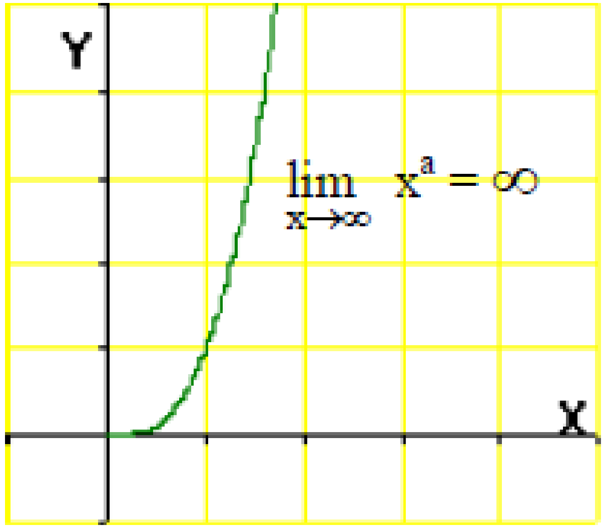
$$f(x) = x^a, \qquad a \in \mathbb{R}$$



a < 0



0 < a < 1

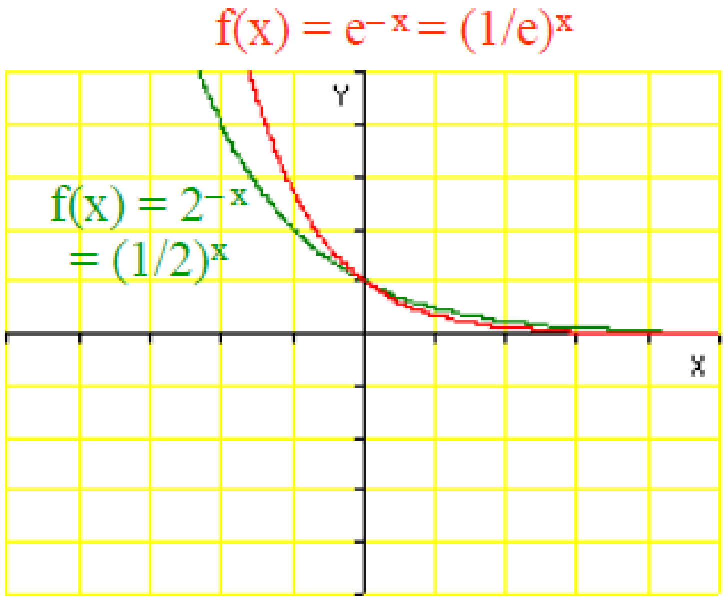


a > 1

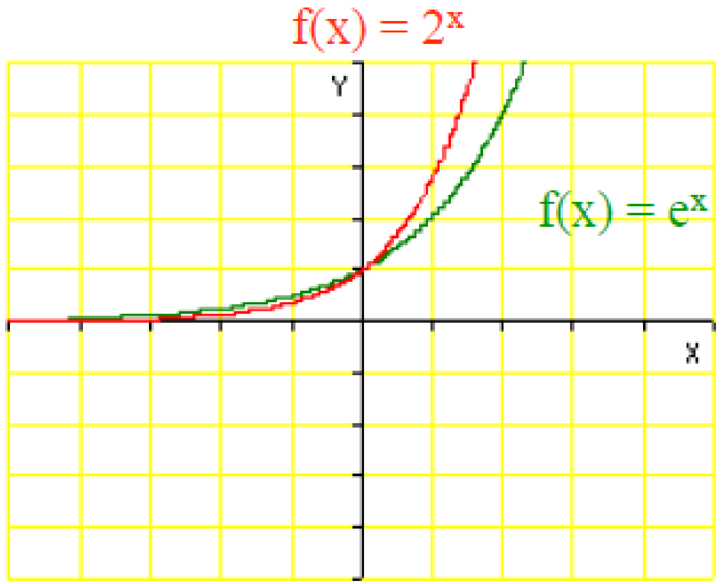
$$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$$

- **Funcions exponencials**

$$f(x) = a^x, \qquad a \in \mathbb{R}$$



0 < a < 1



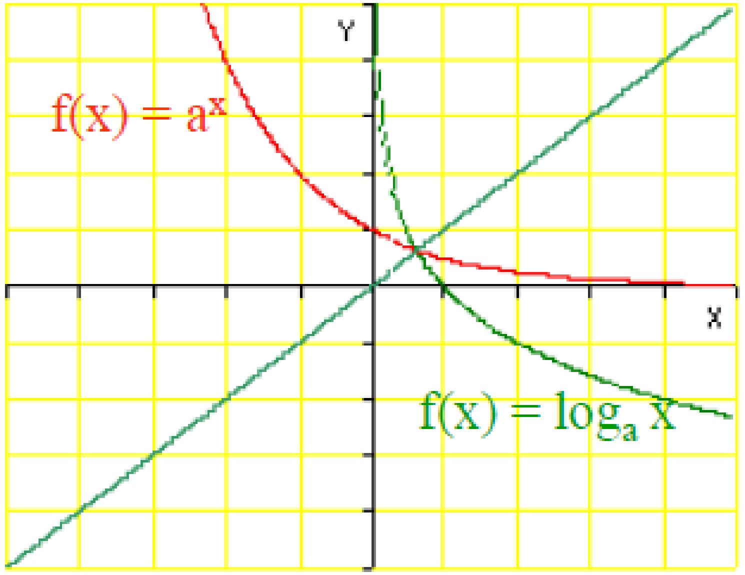
a > 1

Totes passen pel punt (0,1) $\quad \mathcal{Dom}(f) = \mathbb{R}$

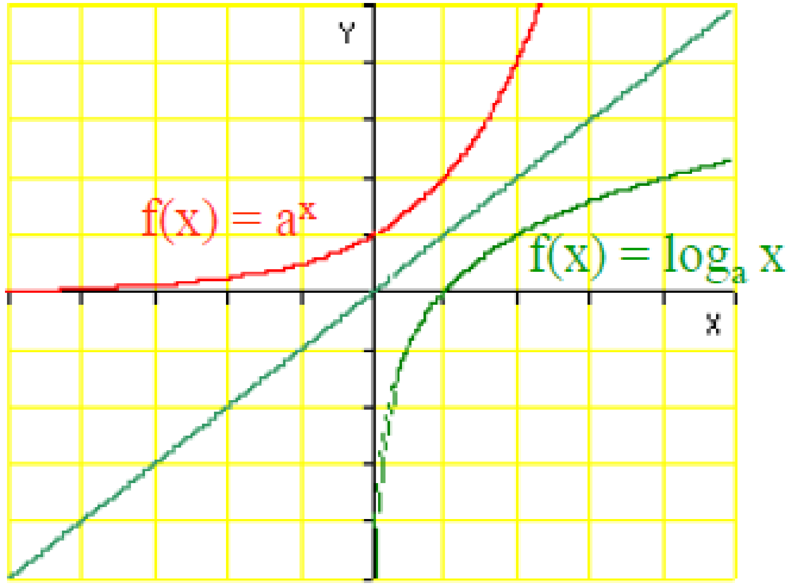
- **Funcions logarítmiques**

$$f(x) = log_a x, \qquad a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

Inversa de l'exponencial



0 < a < 1



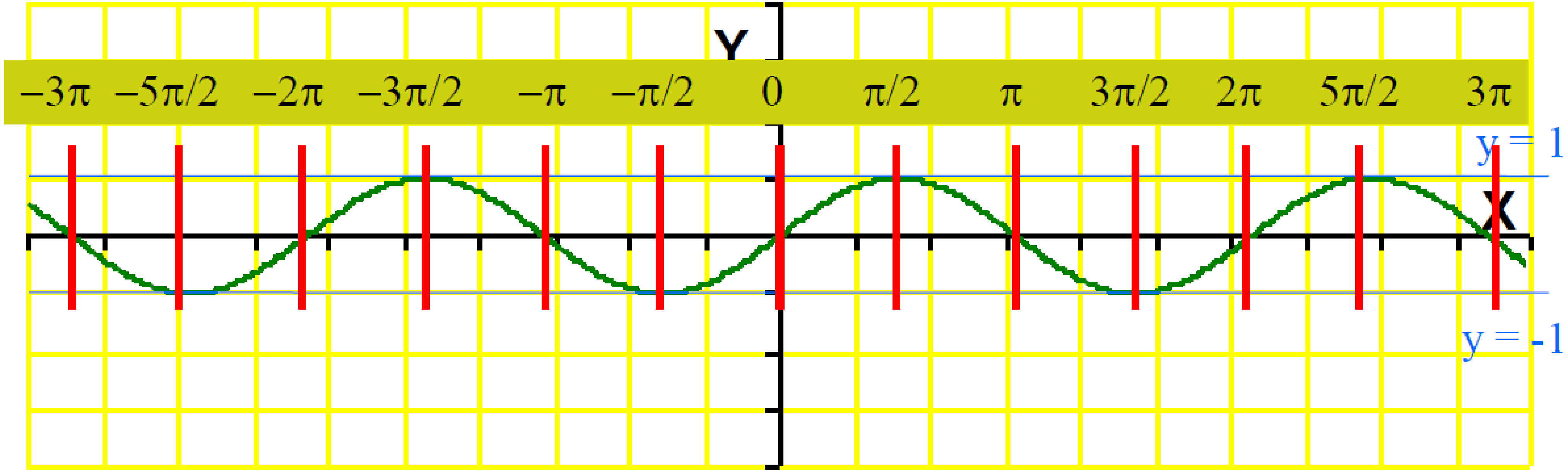
a > 1

Totes passen pel punt (1,0) $\mathcal{D}om(f) = (0, \infty)$

- **Funcions trigonomètriques**

$$f(x) = \sin x\ ,\quad \text{etc.}$$

$$\mathrm{f(x)} = \sin x$$



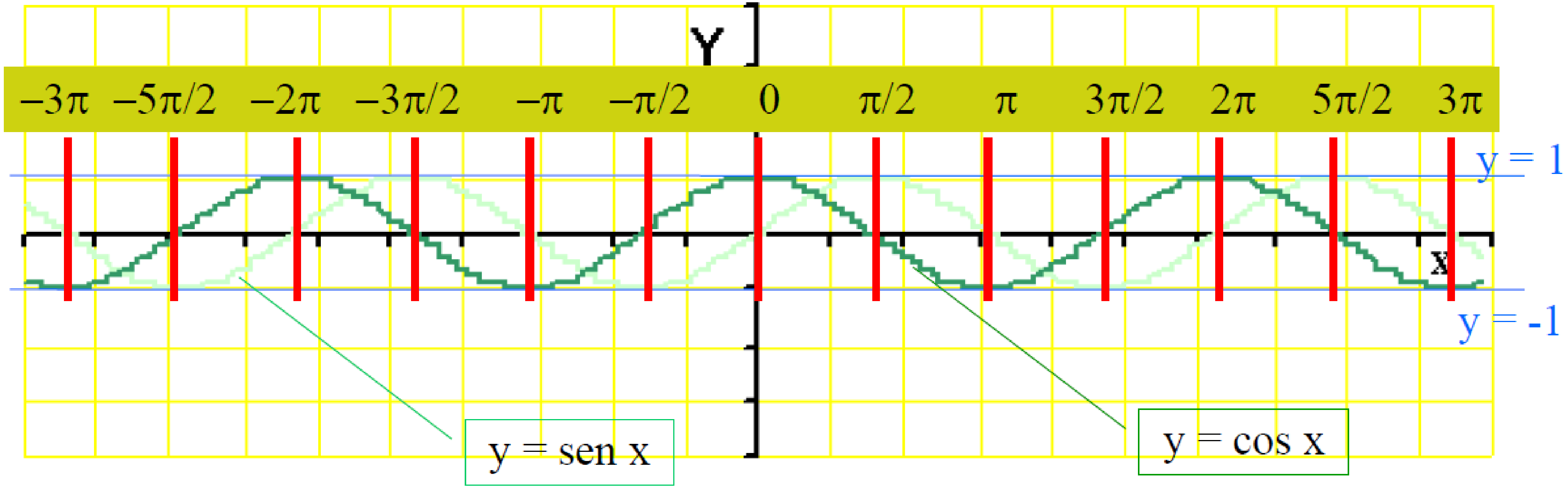
$$\mathcal{Dom}(f) = \mathbb{R}$$
$$Im(f) = [-1, 1]$$

Periòdica en 2π

Senar: $\sin x = -\sin(-x)$

- **Funcions trigonomètriques**

$f(x) = \cos x$



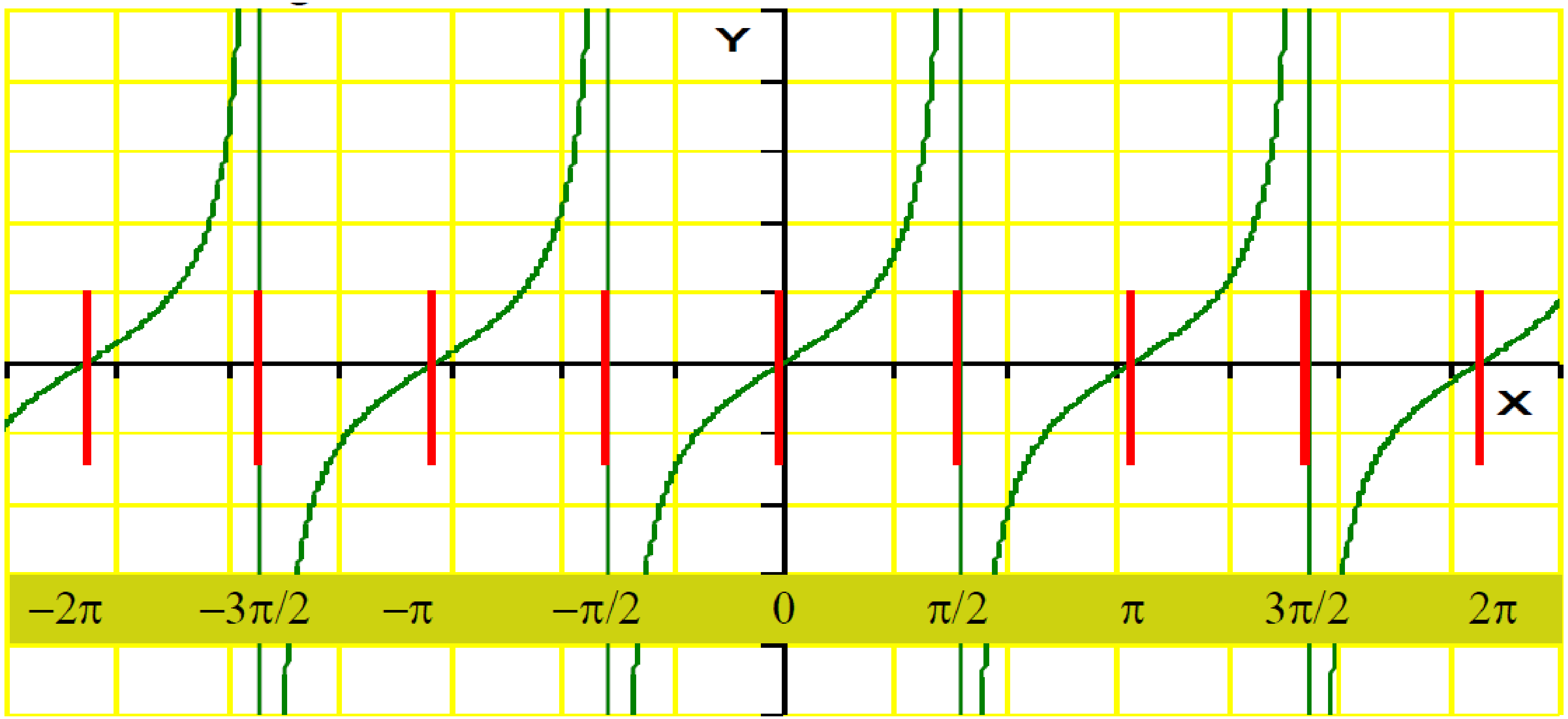
$Dom(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [-1, 1]$

Periòdica en 2π

Parella: $\cos x = \cos(-x)$

- **Funcions trigonomètriques**

$$f(x) = \tan x$$



$$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$
$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Periòdica en π

Senar: $\tan x = -\tan(-x)$

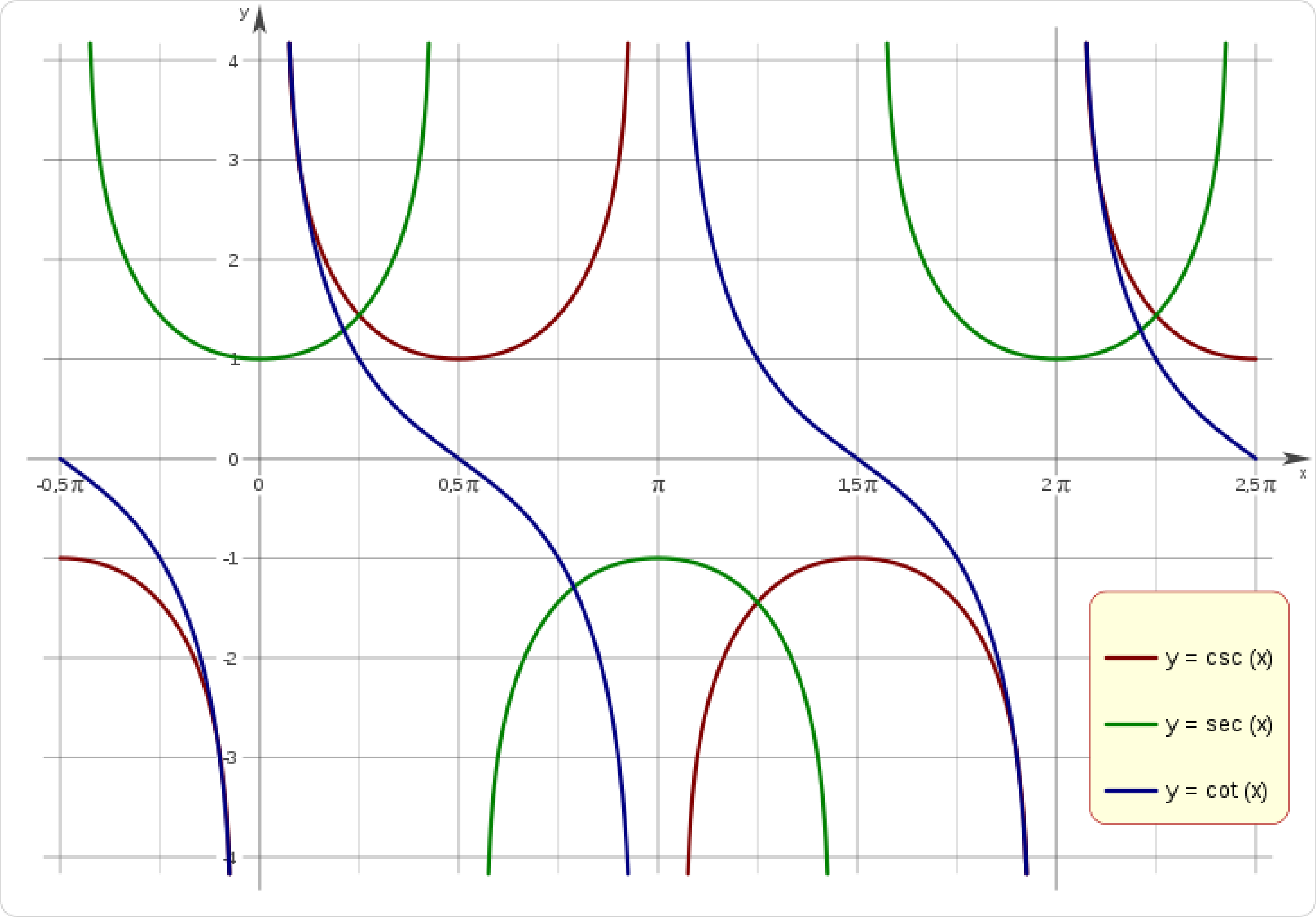
- **Funcions trigonomètriques**

Secant, cosecant, cotangent:

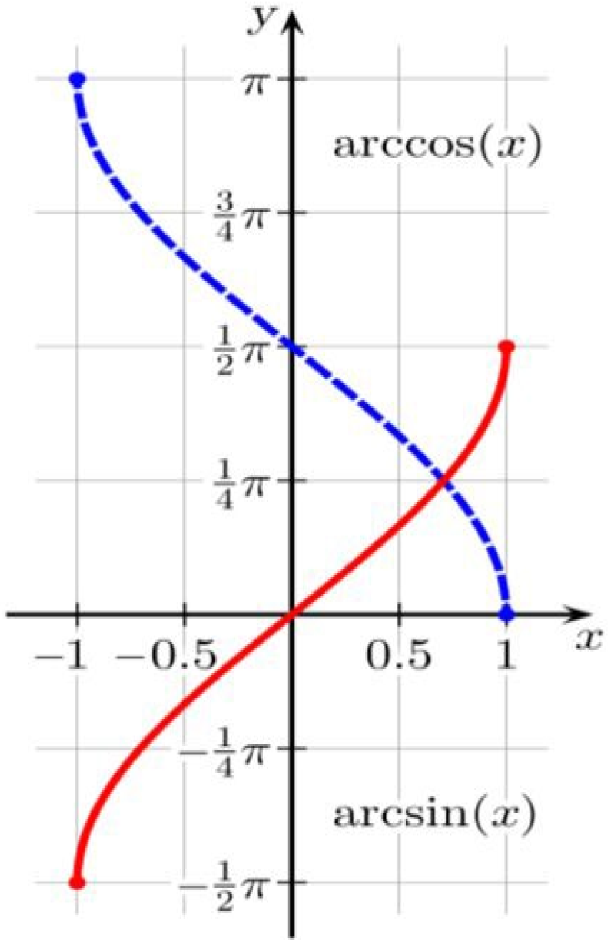
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

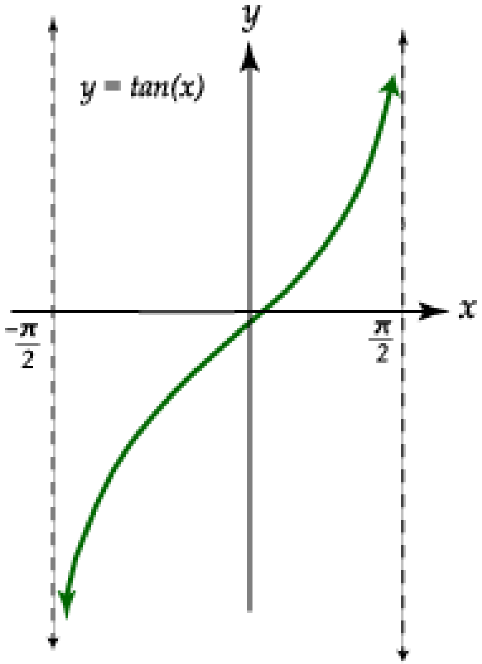
$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

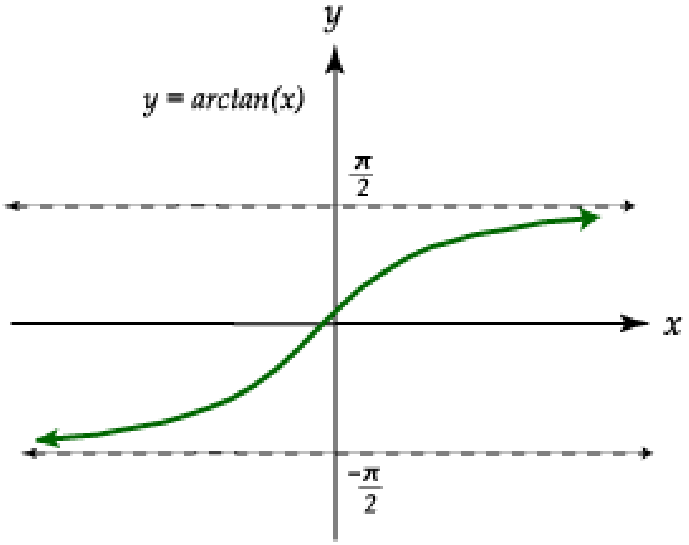
$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$



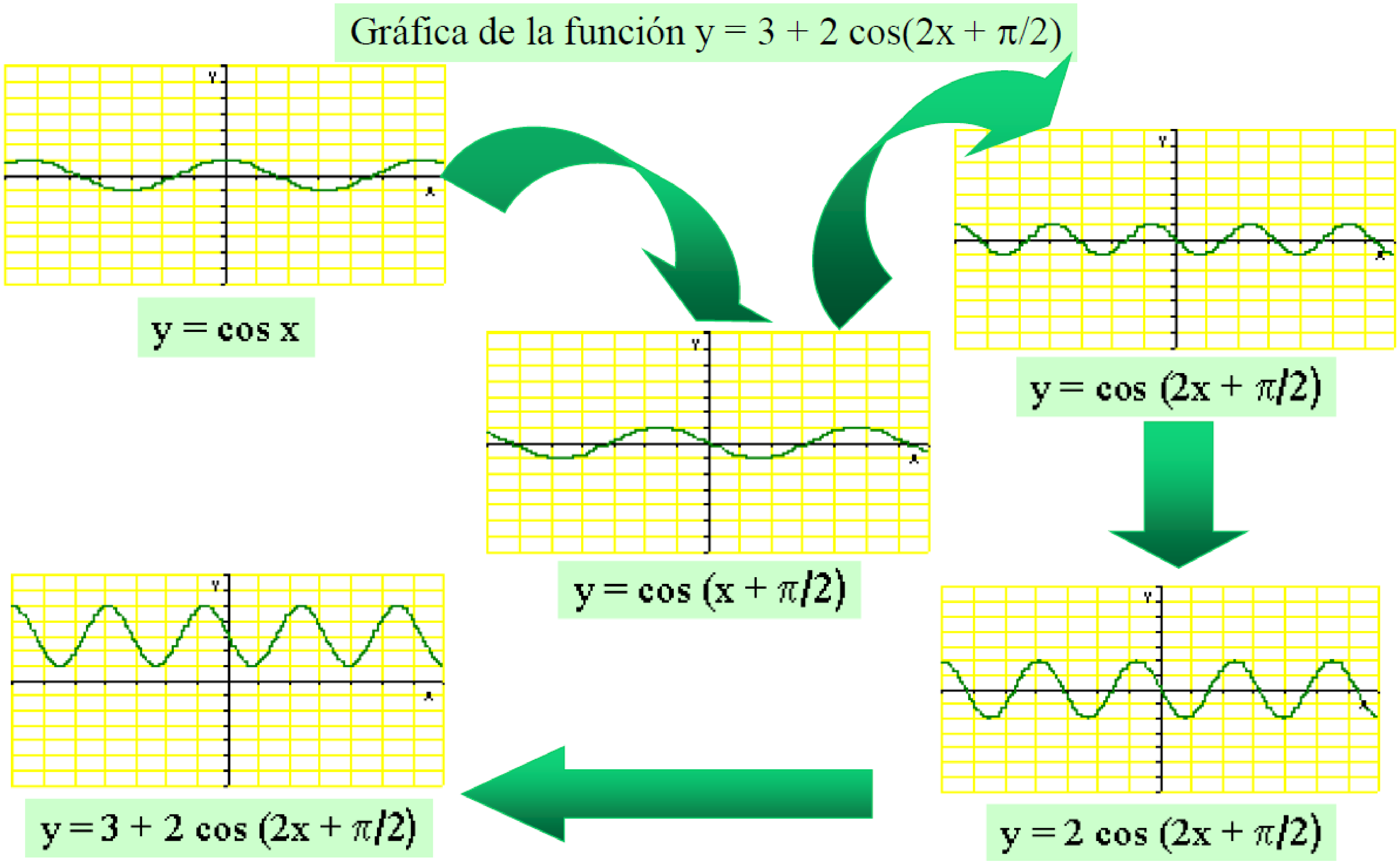
• **Funcions trigonomètriques inverses**







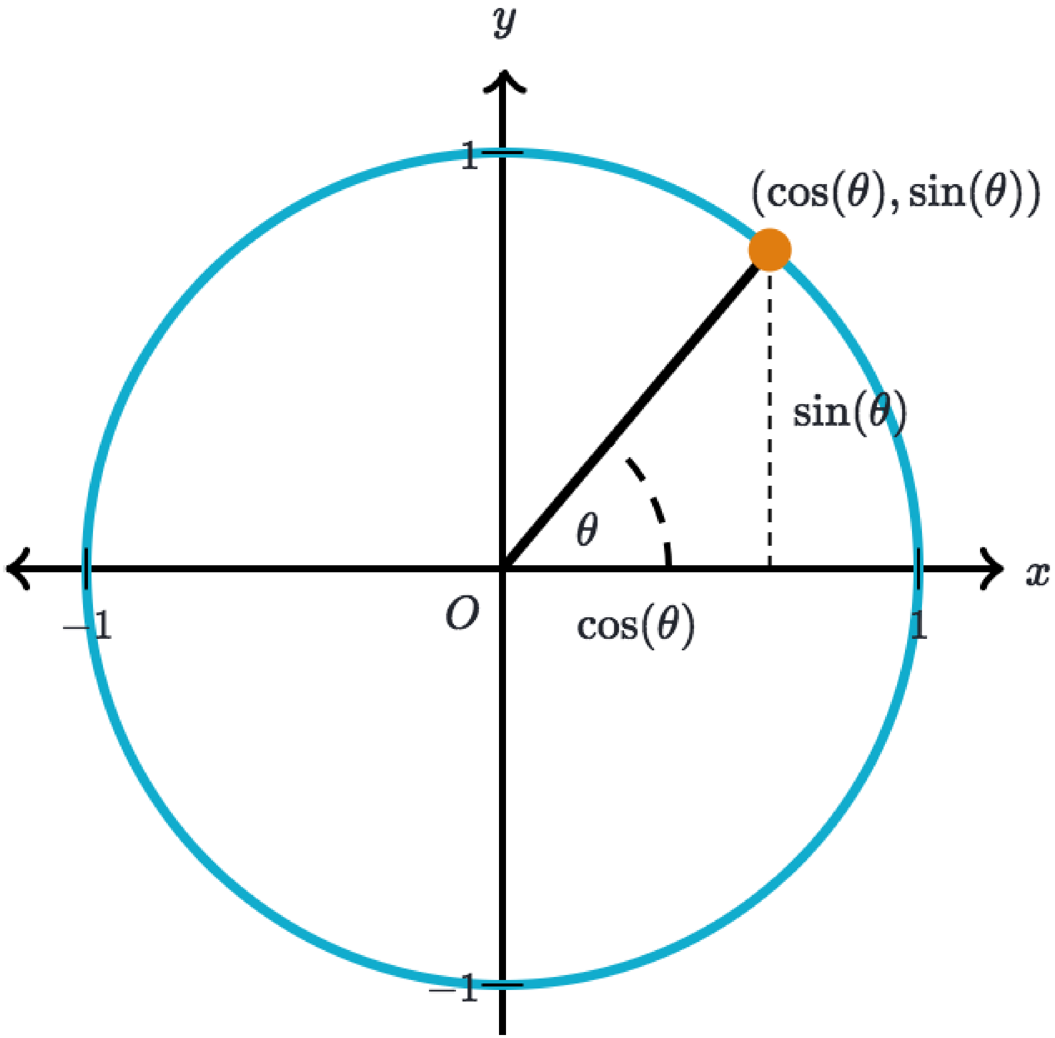
Exemple de translació i dilatació:



- **Funcions hiperbòliques**

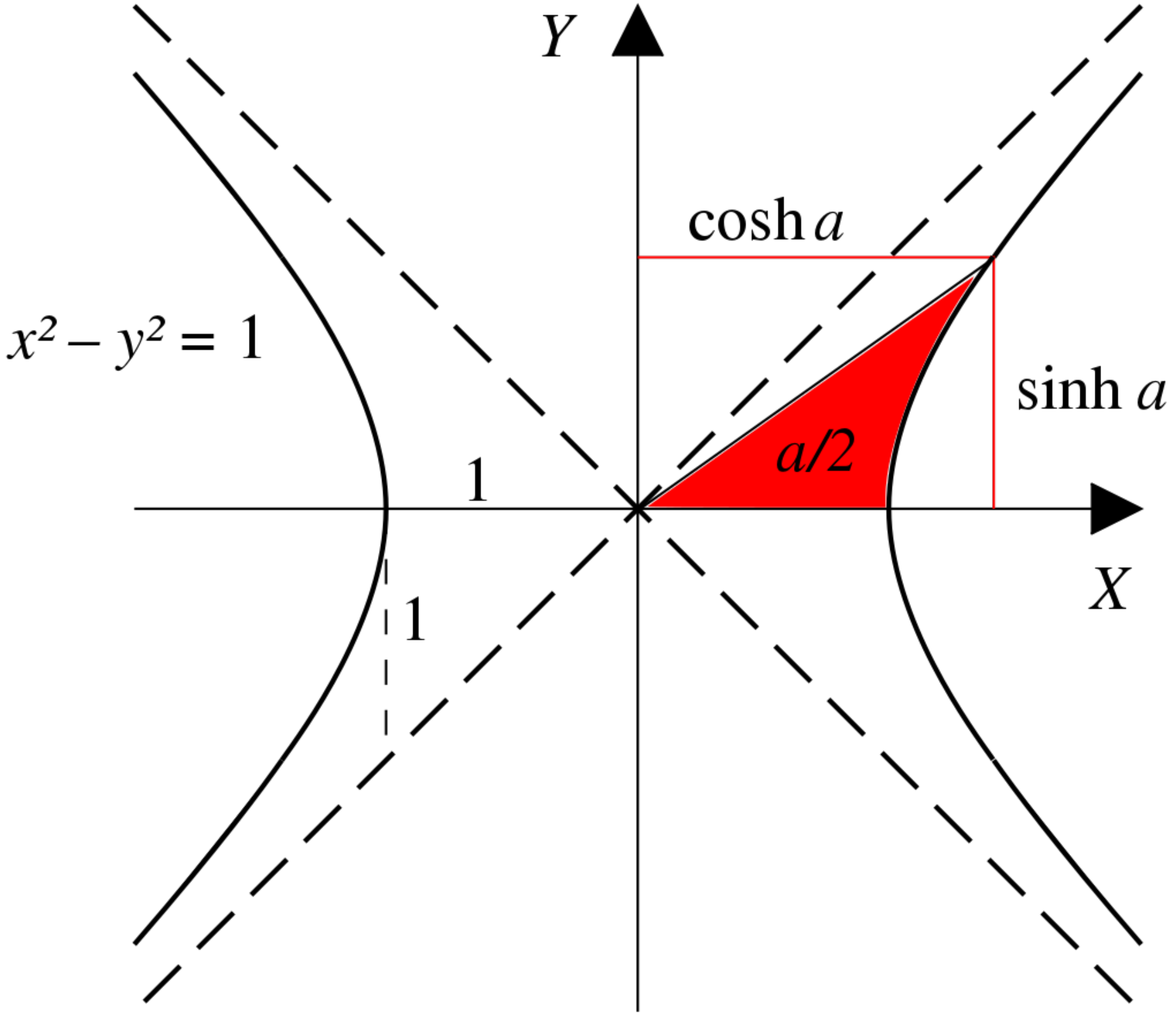
Igual que $(\cos\theta\,, \sin\theta)$ parametritza la circumferència de radi 1,

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$



$(\cosh a\,, \sinh a)$ parametritza la hipèrbola:

$$x^2 - y^2 = 1 \rightarrow cosh^2 a - sinh^2 a = 1$$



Recordem les fórmules de Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x \quad (1)$$
$$e^{-jx} = \cos x - j\sin x \quad (2)$$

$$e^{-jx} = \cos(-x) + j\sin(-x)$$

(1)+(2) $\quad e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x \Rightarrow \cos x = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

(1)-(2) $\quad e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x \Rightarrow \sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

De forma similar:

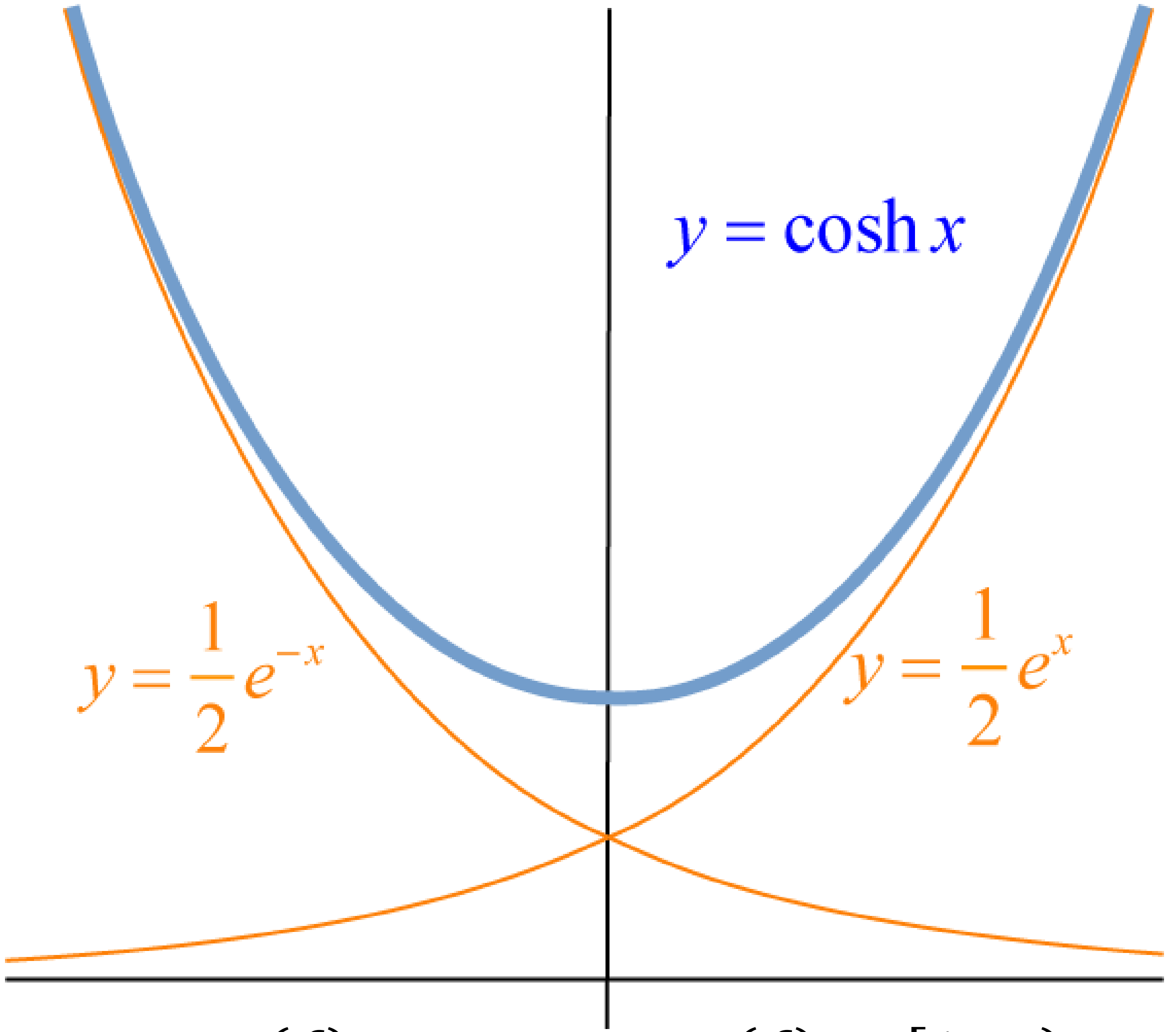
$$e^{x} = \cosh x + \sinh x \quad (1)$$
$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x \ (2)$$

$$e^{-x} = \cosh(-x) + \sinh(-x)$$

(1)+(2) $\quad e^{x} + e^{-x} = 2\cosh x \Rightarrow \cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

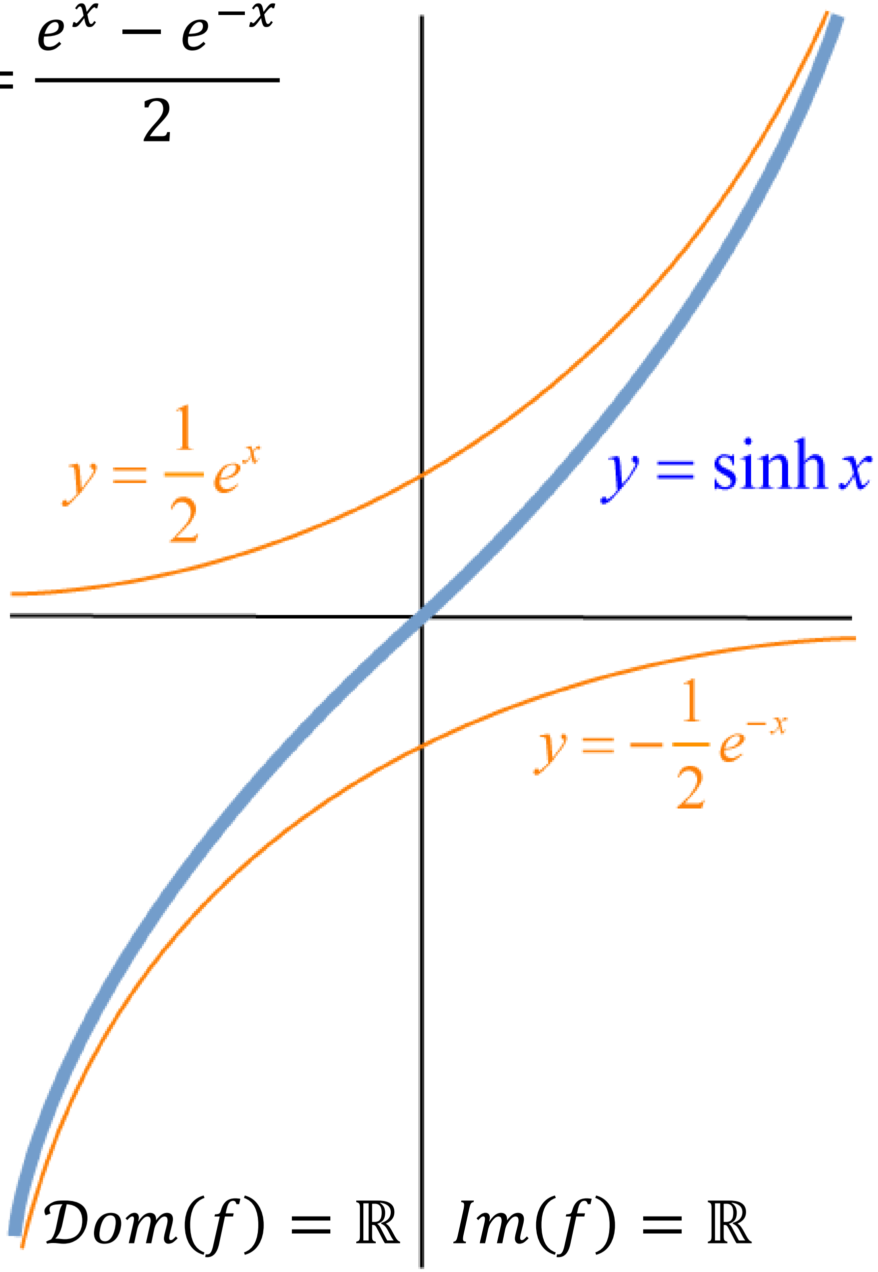
(1)-(2) $\quad e^{x} - e^{-x} = 2\sinh x \Rightarrow \sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

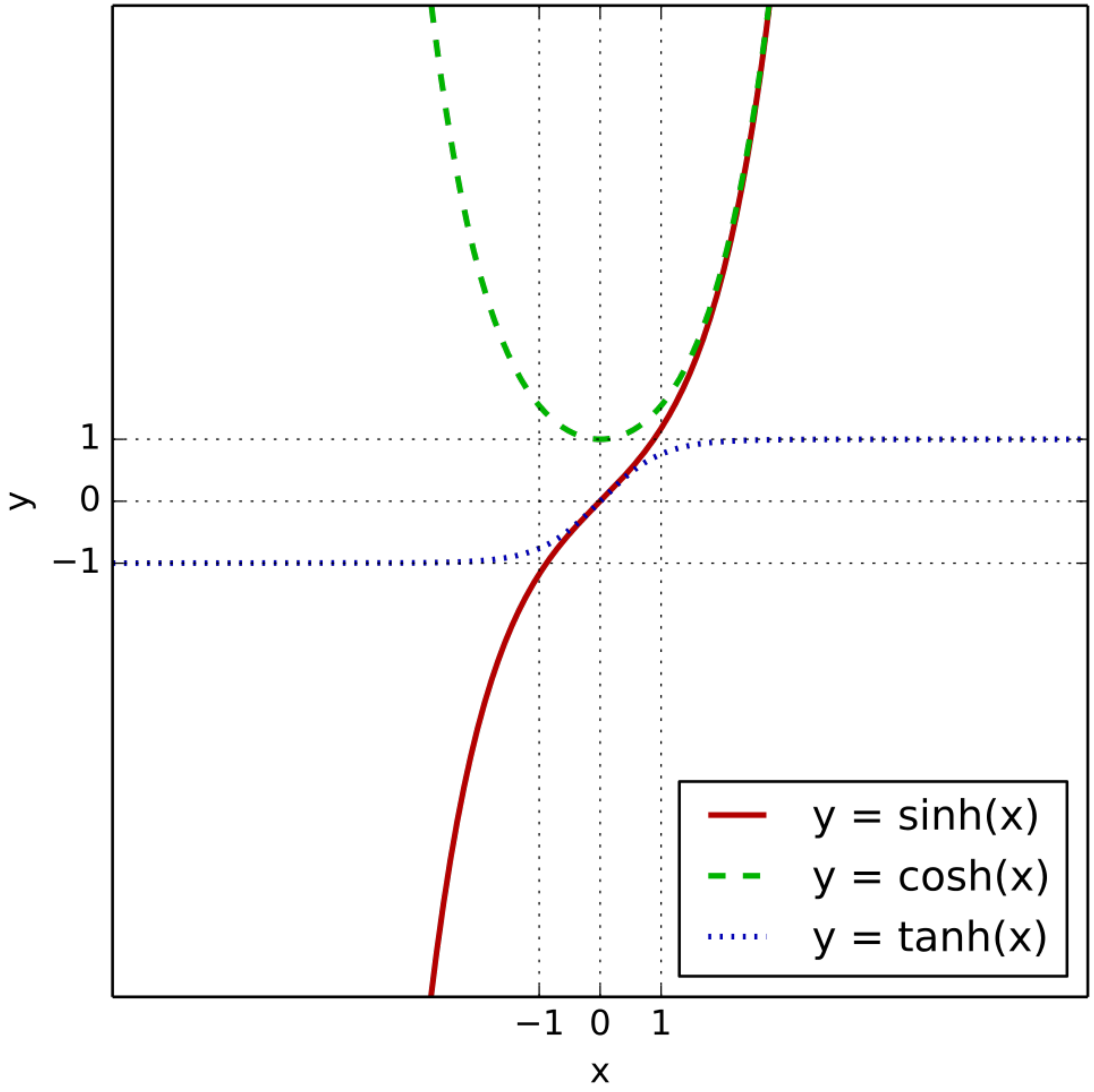


$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [1, \infty)$

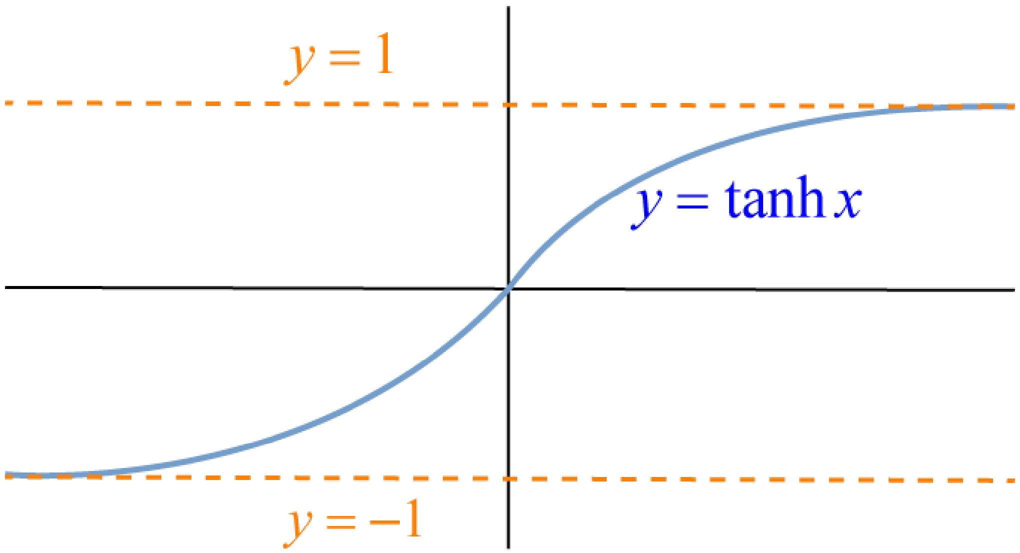
$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$



$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

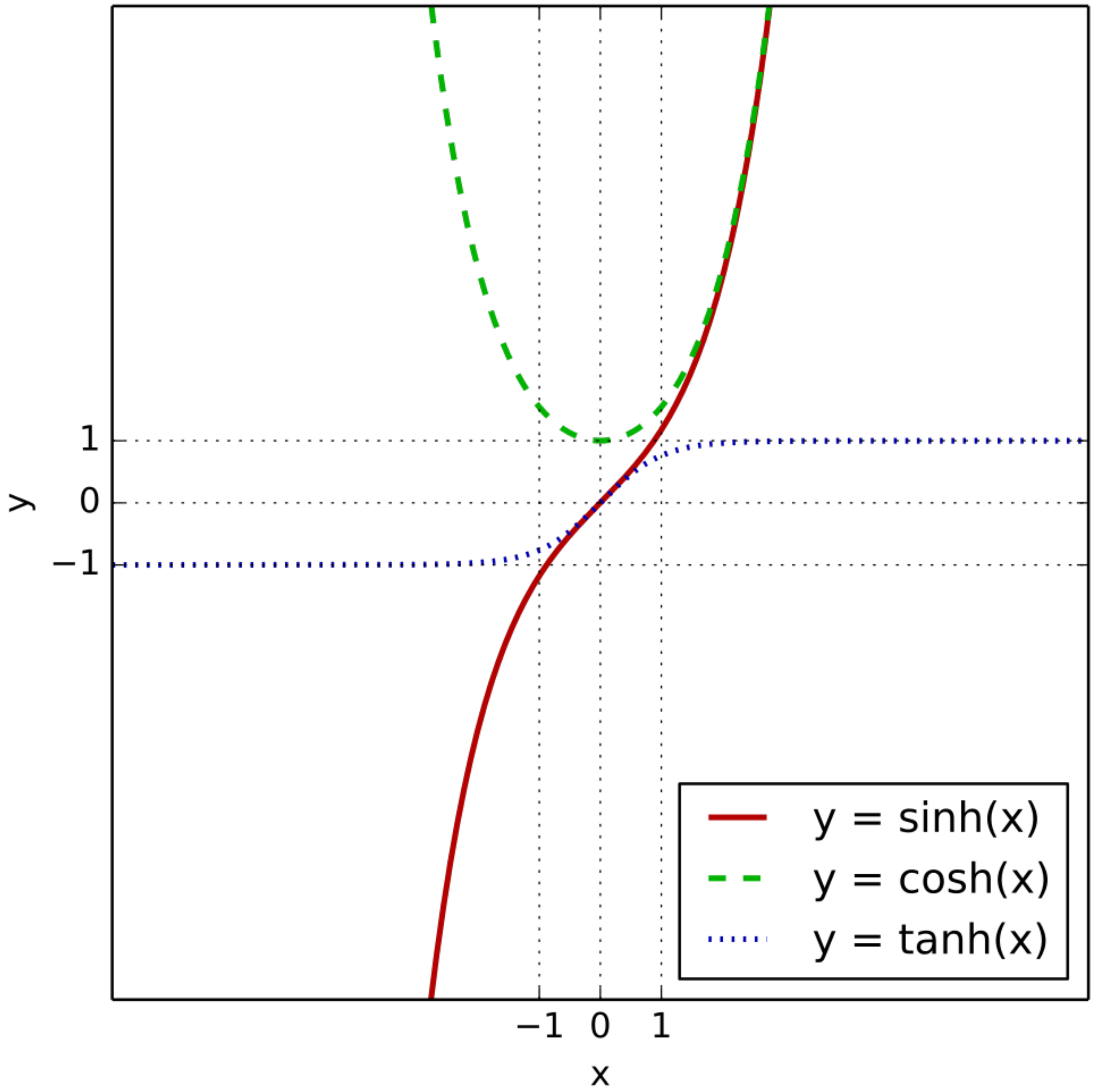


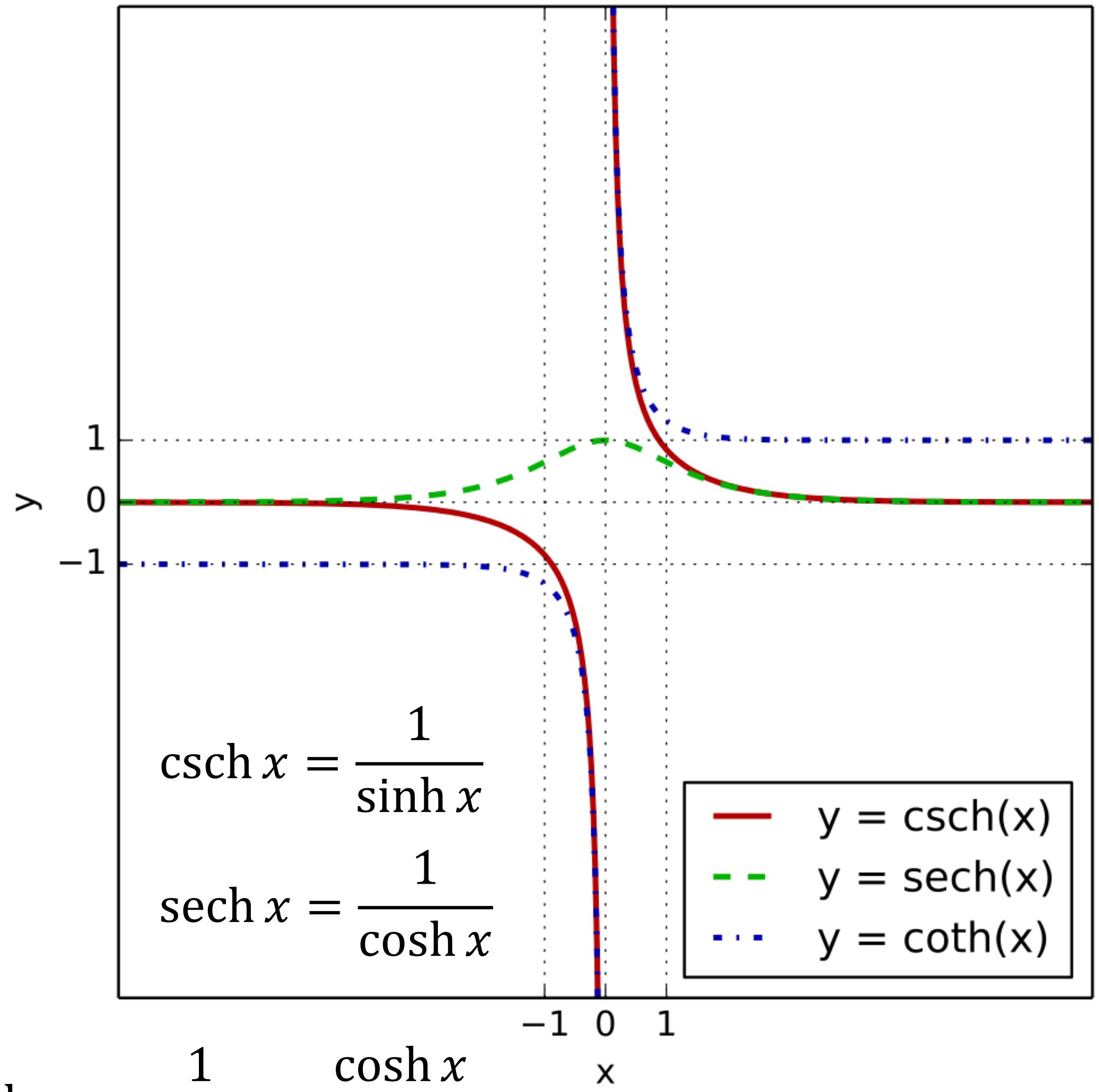
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R} \qquad Im(f) = (-1,1)$$

- **Funcions hiperbòliques**





$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

- **Funcions inverses hiperbòliques**

Prenem com a exemple $y = \sinh x$

Com $\sinh x$ és injectiva, podem calcular la seva inversa en tot el seu domini.

Pas 1: $x \leftrightarrow y \quad \Rightarrow \boxed{x = \sinh y}$

Pas 2: hem d'aïllar y, $y = \operatorname{arcsinh} x = \sinh^{-1} x$,

per a fer-ho, utilitzarem que $e^y = \sinh y + \cosh y$, aplicant $\ln$ en ambdós costats:

$$\ln(e^y) = \ln(\sinh y + \cosh y)$$

$$y = \operatorname{arcsinh} x = \ln(\boxed{\sinh y} + \boxed{\cosh y})$$

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

$$\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$$

$$\boxed{\cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y}}$$

$$\boxed{x = \sinh y}$$

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(\boxed{\sinh y} + \boxed{\sqrt{1 + \boxed{\sinh^2 x}}}\right)$$

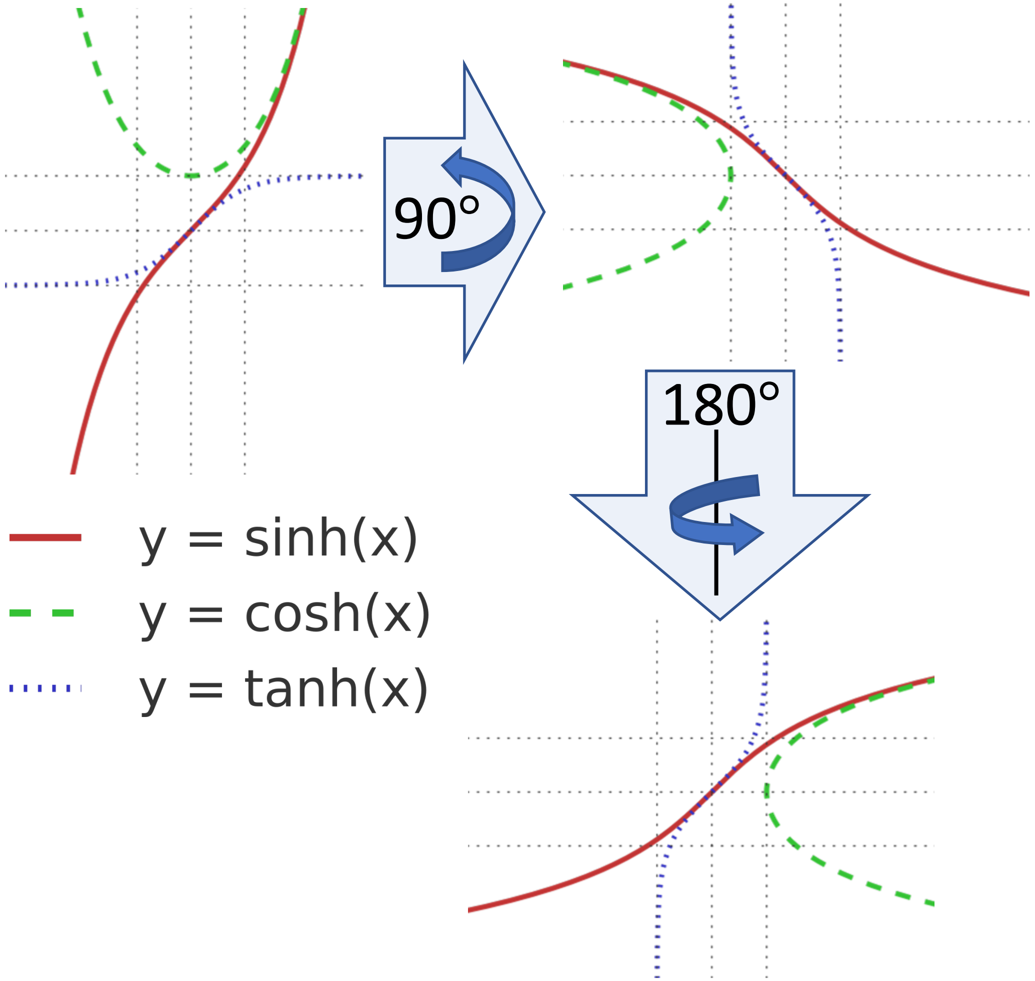
$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

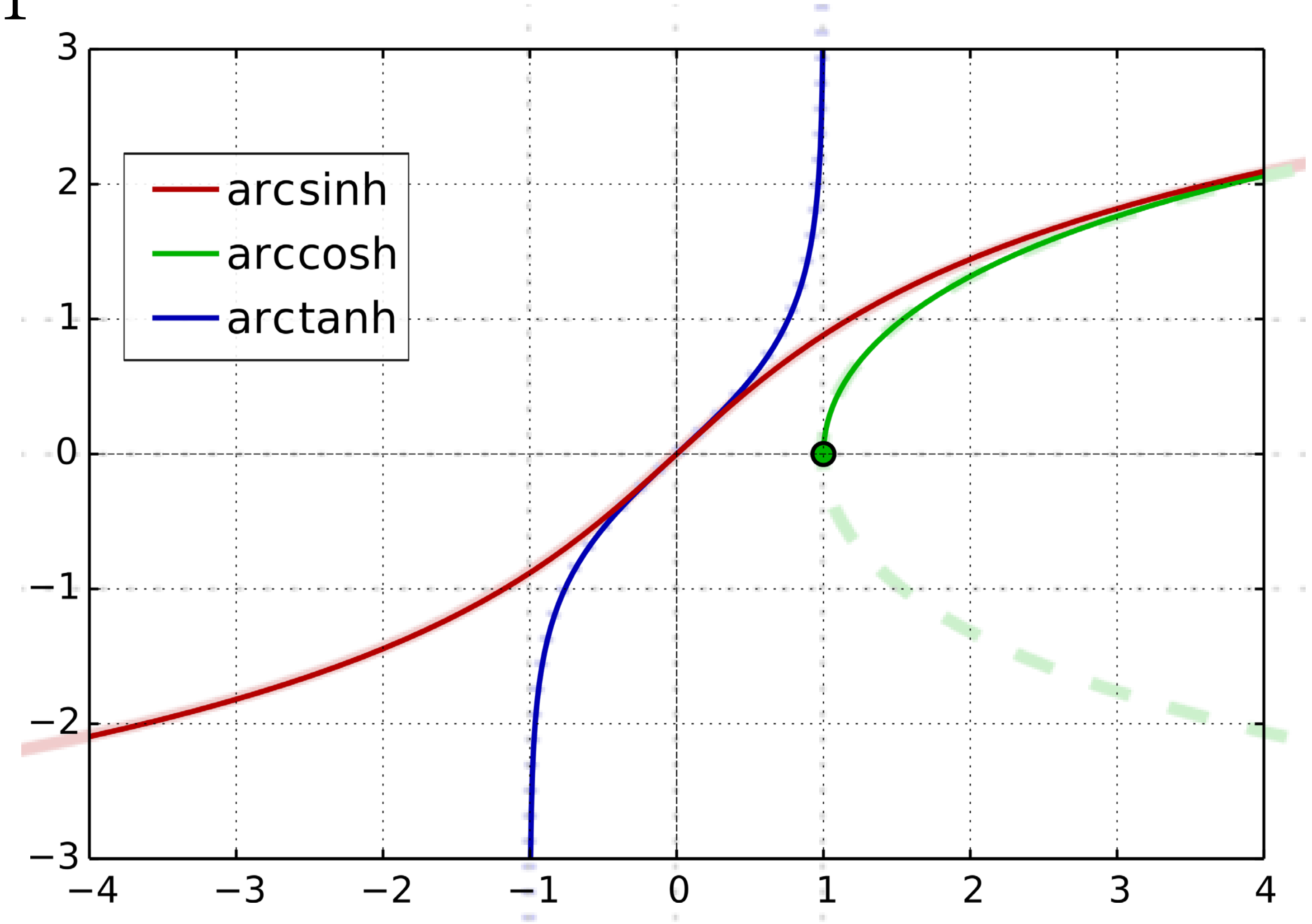
- **Funcions inverses hiperbòliques**

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), x \geq 1$$

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1$$





- **Propietats de les funcions hiperbòliques**

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

$$\sinh(2\alpha) = 2\sinh\alpha\cosh\alpha$$

$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \boxed{+} \sinh\alpha\sinh\beta$$

$$\cosh(2\alpha) = cosh^2\alpha \boxed{+} sinh^2\alpha$$

$$\tanh(\alpha+\beta) = \frac{\tanh\alpha + \tanh\beta}{1 \boxed{+} \tanh\alpha\tanh\beta}$$

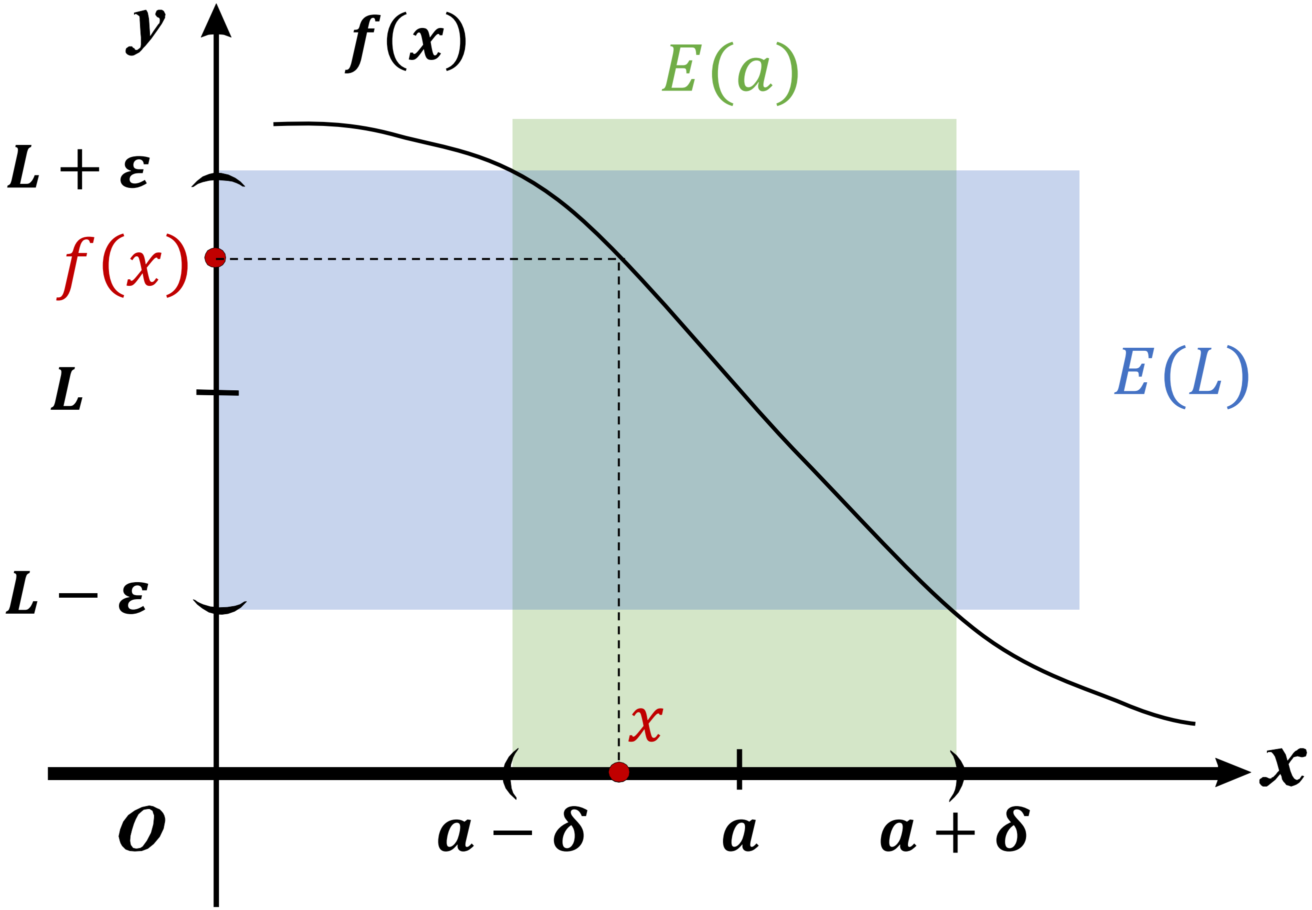
$$\tanh(2\alpha) = \frac{2\tanh\alpha}{1 \boxed{+} tanh^2\alpha}$$

He marcat aquells signes que canvien respecte las raons trigonomètriques (revisar slide del tema 1 de repàs de trigonometria).

2.4 Límits de funcions

2.4.1 Definicions

- **Límit d'una funció en un punt**



Direm que el límit quan $x \to a$ de $f(x)$ és L ,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

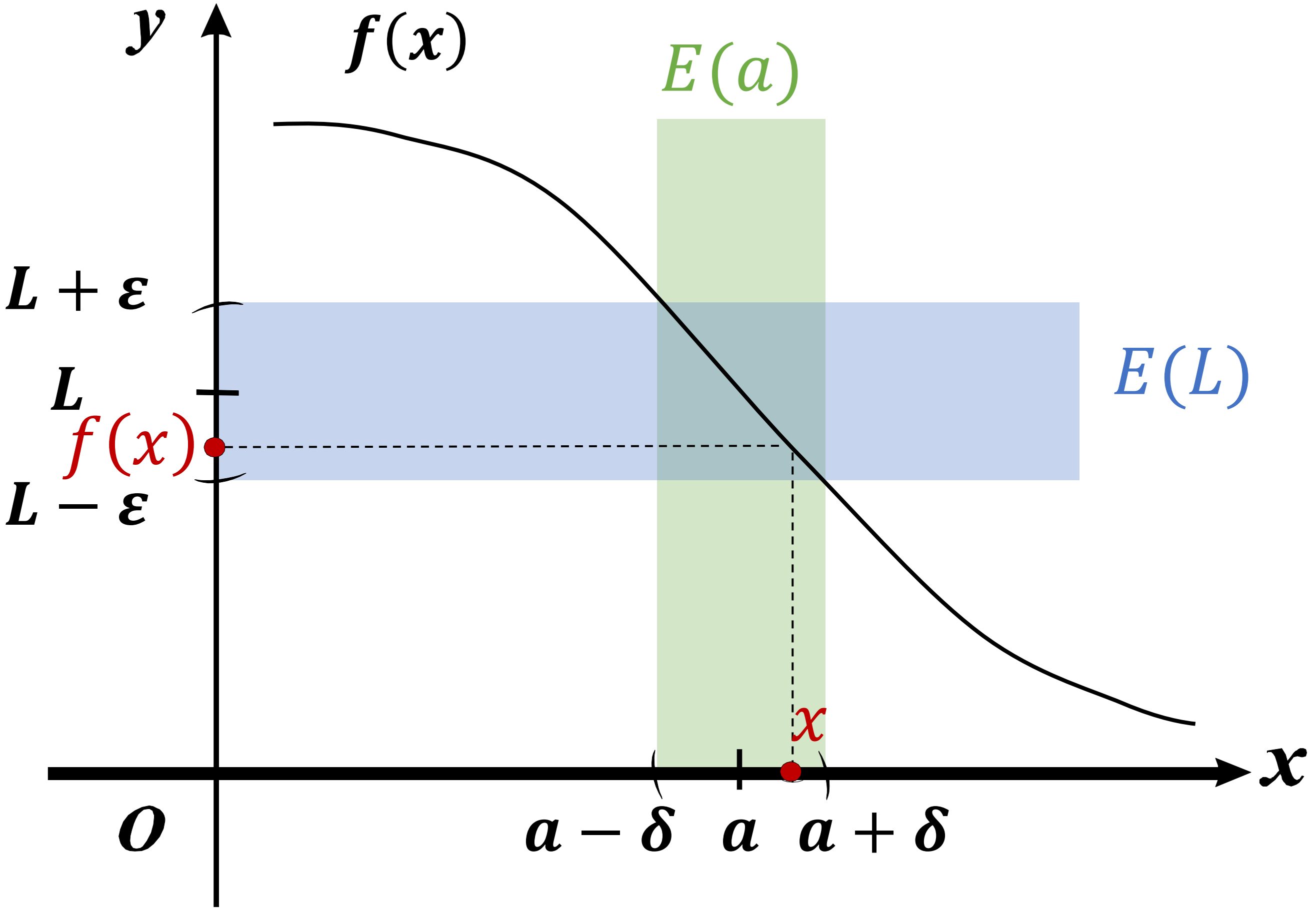
si per cada entorn de L, $E(L)$, existeix un entorn de a, $E(a)$,

tal que si $x \in E(a)$ i $x \neq a$ llavors $f(x) \in E(L)$.

2.4 Límits de funcions

2.4.1 Definicions

- **Límit d'una funció en un punt**



Direm que el límit quan $x \to a$ de $f(x)$ és L ,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

si per cada entorn de L, $E(L)$, existeix un entorn de a, $E(a)$,

tal que si $x \in E(a)$ i $x \neq a$ llavors $f(x) \in E(L)$.

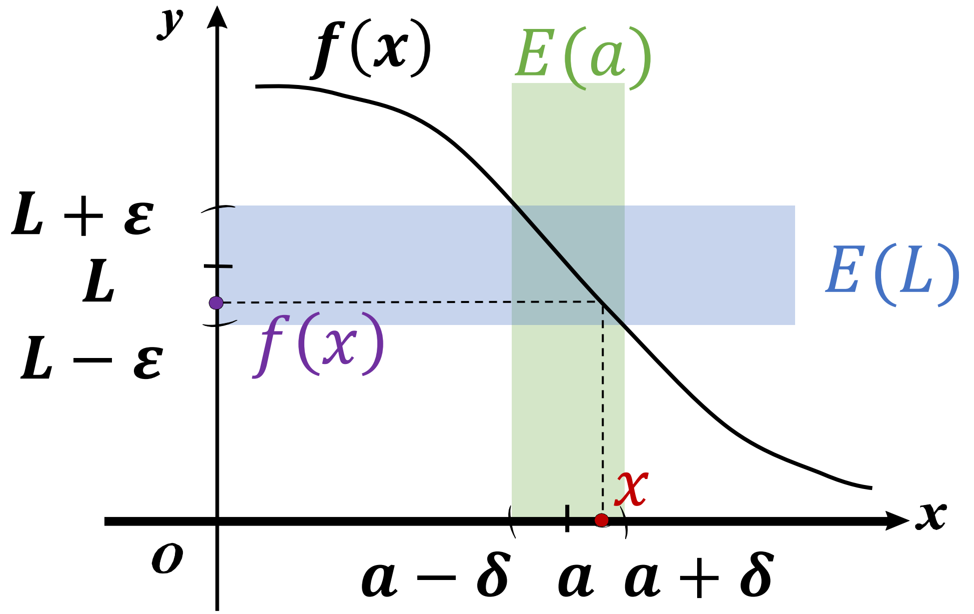
- **Límit d'una funció en un punt**

Direm que el límit quan $x \to a$ de $f(x)$ és L,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

si per cada entorn de L existeix un entorn de a,

tal que si $x \in E(a)$ i $x \neq a$ llavors $f(x) \in E(L)$.



si per cada $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que per tot $x \neq a$ i que difereixi de a menys de δ,

$$|x-a| < \delta \Rightarrow -\delta < x - a < \delta \Rightarrow a - \delta < x < a + \delta$$

les imatges d'aquestes x difereixen de L en menys de ε

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Podem escriure aquesta definició de forma compacta

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \mid \text{si } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

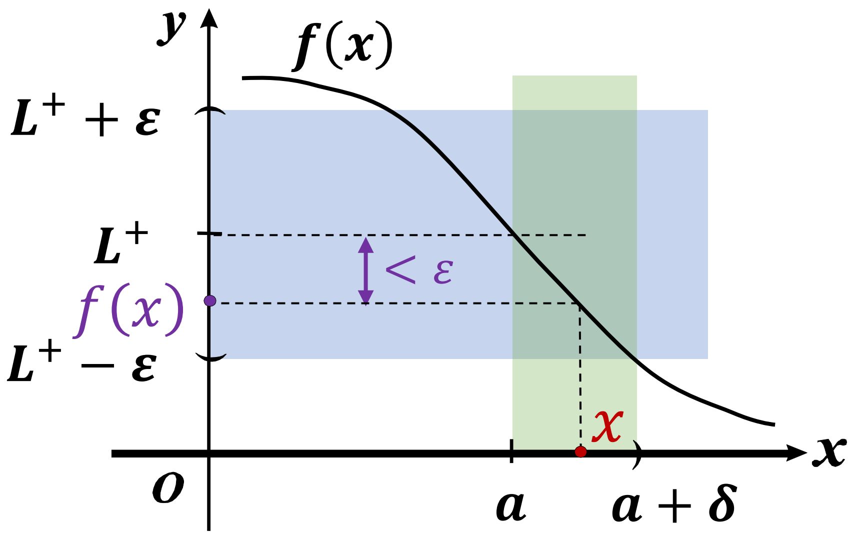
- **Límits laterals**

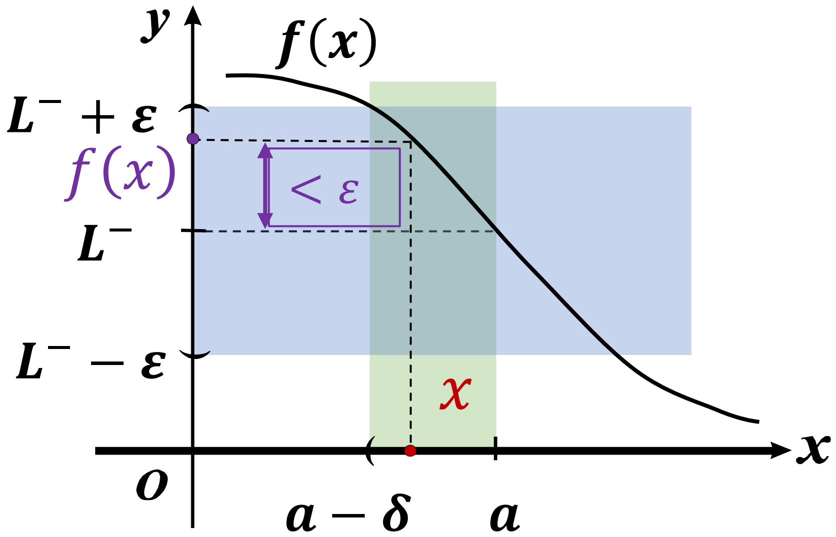
Límit lateral per la dreta:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L^+ \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \mid \text{si } a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - L^+| < \varepsilon$$

Límit lateral per la esquerra:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L^- \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \mid \text{si } a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L^-| < \varepsilon$$



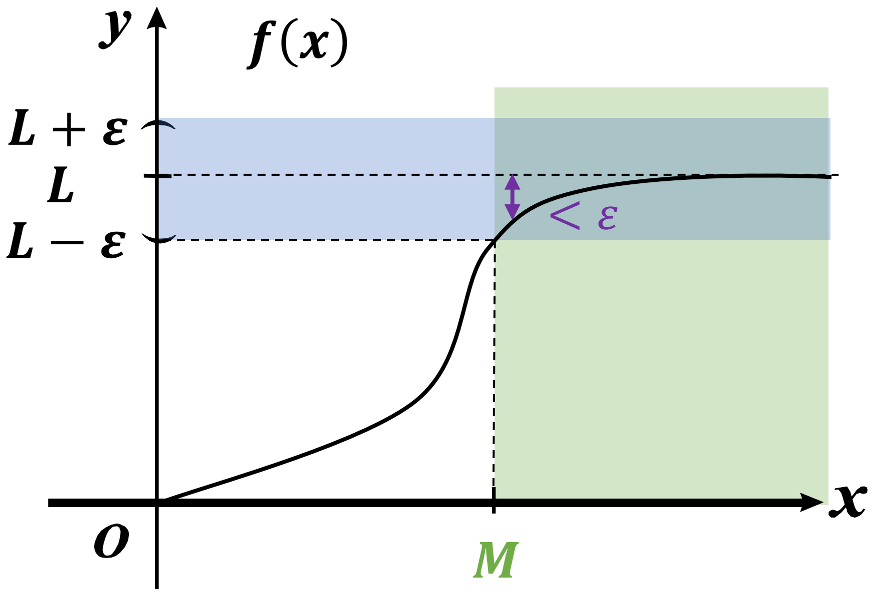


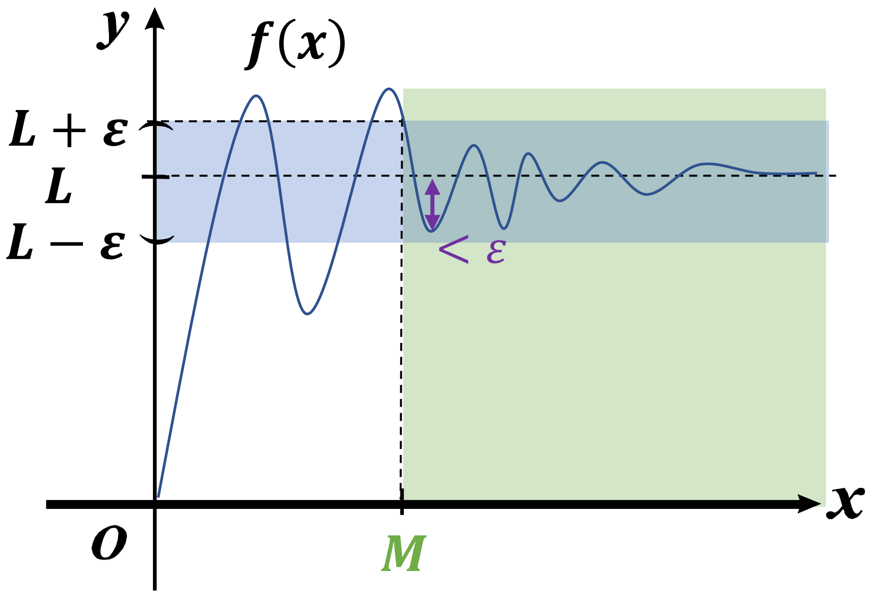
Si els límits laterals coincideixen, llavors la funció té límit

$$\text{Si } \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L \;\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$$

- **Límit d'una funció a l'infinit**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, M > 0 \mid \text{si } x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$





2.4.2 Càlcul de límits

- **Operacions amb límits**

Donats $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ i $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \pm M$

2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

3) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M} \quad si\ M \neq 0$

4) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x) \right)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = L^M$

- **Indeterminacions**

Existeixen de tres tipus:

a) De tipus suma: $\infty - \infty$

b) De tipus producte o quocient: $0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

c) De tipus exponencial: $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$

- **Resolució de $\infty - \infty$**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty\end{array}\right\} \qquad \lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \infty - \infty$$

En algun cas es pot resoldre com

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a}\left[(f(x) - g(x))\frac{(f(x) + g(x))}{(f(x) + g(x))}\right] = \lim_{x\to a}\frac{f^2(x) - g^2(x)}{f(x) + g(x)}$$

Exemple:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-4}\right) = \infty - \infty$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-4}\right)\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x - (x-4)}{\sqrt{x} + \sqrt{x-4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{x-4}} = 0$$

- **Resolució de $\mathbf{0} \cdot \infty$**

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty\end{array}\right\} \quad \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = 0\cdot\infty$$

Es pot reinterpretar com

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \dfrac{0}{0} \\ \\ \lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \dfrac{\infty}{\infty} \end{cases}$$

- **Resolució de $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}, \frac{\infty}{\infty}$**

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to a} g(x) = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = \infty \\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty\end{array}\right\} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Si tenim una expressió racional, es pot solucionar dividint numerador i denominador per la potència de x més gran entre totes les de $f(x)$ i $g(x)$.

Exemple: $\lim_{x\to\infty} \frac{7\boxed{x^2} - 3}{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 - 3}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x^2-3}{\boxed{x^2}}}{\frac{x+1}{\boxed{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{7 - \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{7-0}{0+0} = \infty$$

<u>Límit d'una expressió racional</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Dividim numerador i denominador per la potència de x més gran:

- Si $p = q$. Dividim numerador i denominador per x^p

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\boxed{a_p} x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{\boxed{b_q} x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_p + \overbrace{\boxed{\frac{a_{p-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_0}{x^p}}}^{0}}{b_q + \underbrace{\boxed{\frac{b_{q-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{p-1}} + \frac{b_0}{x^p}}}_{0}} = \boxed{\frac{a_p}{b_q}}$$

Límit d’una expressió racional

- Si $p < q$. Dividim numerador i denominador per x^q

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\frac{a_p}{x^{q-p}} + \ldots + \frac{a_1}{x^{q-1}} + \frac{a_0}{x^q}}^{0}}{b_q + \underbrace{\frac{b_{q-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{q-1}} + \frac{b_0}{x^q}}_{0}} = \frac{0}{b_q} = 0$$

- Si $p > q$. Dividim numerador i denominador per x^p

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_p + \overbrace{\frac{a_{p-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_0}{x^p}}^{0}}{\underbrace{\frac{b_q}{x^{p-q}} + \ldots + \frac{b_1}{x^{p-1}} + \frac{b_0}{x^p}}_{0}} = \frac{a_p}{0} = \infty$$

- **Resolució de $0^0, \infty^0$**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0^0 \quad \text{o} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \infty^0$$

Es pot solucionar aplicant el logaritme: $f(x) = e^{\ln f(x)}$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left(e^{\ln f(x)}\right)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

Es redueix al cas $0 \cdot \infty$ $\left(\lim\limits_{x\to a} g(x) \ln f(x)\right)$

- **Resolució de $\mathbf{1^{\infty}}$**

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= 1 \\ \lim_{x\to a} g(x) &= \infty \end{aligned}\right\} \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty}$$

<u>Solució 1</u>: aplicant el logaritme, $f(x) = e^{\ln f(x)}$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left(e^{\ln f(x)}\right)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

Es redueix al cas $\infty \cdot 0$ $\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)\right)$

<u>Solució 2</u>: utilitzar la **definició del nombre *e***

$$e \equiv \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$e \equiv \lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \qquad si \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Reescrivint

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty\end{array}\right\} \lim_{x\to a} \overset{1}{\boxed{f(x)}}^{g(x)} = 1^{\infty} \qquad e \equiv \lim_{x\to a}(1+\overset{0}{\boxed{f(x)}})^{\boxed{\frac{1}{f(x)}}} \quad si \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

com:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}(1+\overset{0}{\boxed{f(x)-1}})^{g(x)} = \overset{e}{\boxed{\lim_{x\to a}\left[(1+\boxed{f(x)-1})^{\boxed{\frac{1}{f(x)-1}}}\right]}}^{g(x)\boxed{(f(x)-1)}} =$$

$$= \lim_{x\to a} e^{g(x)(f(x)-1)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$$

Exemple:

$$e \equiv \lim_{x \to a} \left(1 + \boxed{\overset{0}{f(x)}}\right)^{\boxed{\frac{1}{f(x)}}} \quad si \quad \lim_{x \to a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x^2} = 1^{\infty}$$

$$= \boxed{\lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \boxed{\overset{0}{\frac{x+1}{x+3} - 1}}\right)^{\boxed{\frac{1}{\frac{x+1}{x+3}-1}}}\right]}^{x^2 \boxed{\left(\frac{x+1}{x+3}-1\right)}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} e^{x^2\left(\frac{x+1}{x+3}-1\right)} = e^{\lim_{x \to \infty} x^2\left(\frac{x+1-x-3}{x+3}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2}{x+3}} = e^{-\infty} = 0$$

- **Regles**

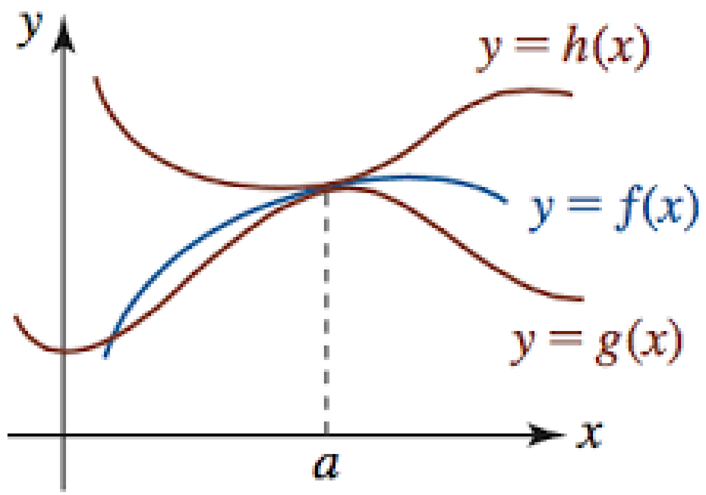
1) Si $f(x)$ està acotada en un entorn de a i $\lim_{x \to a} g(x) = 0$,

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = acotat \cdot 0 = 0$$

Exemple: $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} sinx \cdot \frac{1}{x} = 0$

2) Regla del 'sandwich': si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ per a tot x al voltant de a i

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = L$$



Jerarquia d'infinits ($x \to \infty$)

$$log\, x << x^p << a^x << x^x \quad (p > 0, a > 1)$$

- **Infinitèsims**

Def: $f(x)$ és infinitèsim en $x = a$ si i només si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

- $f(x)$ i $g(x)$ són infinitèsims del mateix ordre si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad L \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- $f(x)$ és d'ordre major que $g(x)$ si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

- Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $f(x)$ i $g(x)$ són infinitèsims equivalents (quan $x \to a$, $f \sim g$)

- Infinitèsims equivalents per $\boldsymbol{x \to 0}$:

$$\sin x \sim x \sim \arcsin x$$

$$\tan x \sim x \sim \arctan x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

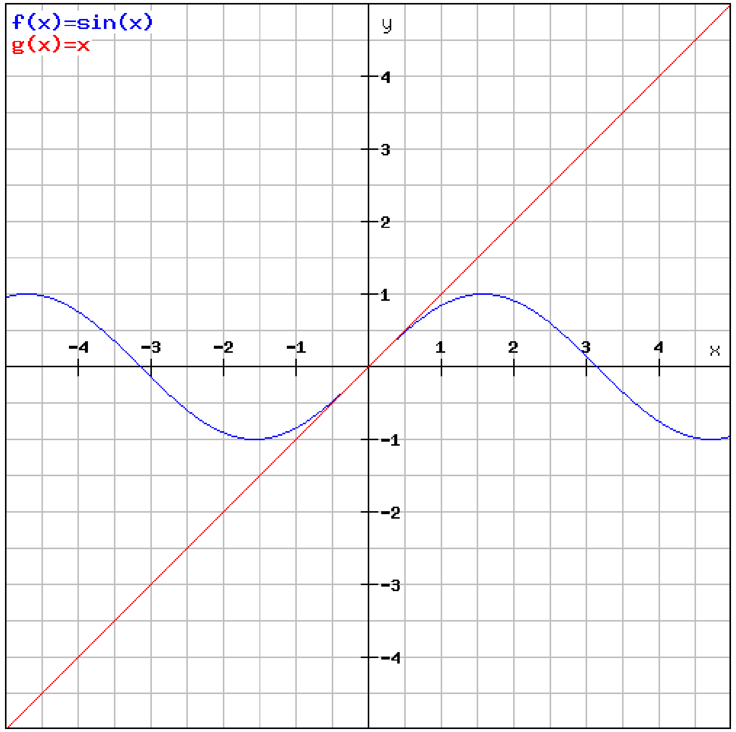
$$\ln(1+x) \sim x \qquad log_a(1+x) \sim x log_a e$$

$$e^x - 1 \sim x \qquad a^x - 1 \sim x \ln a$$

Per $\boldsymbol{x \to 1}$, $\ln x \sim x - 1$

Exemple:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$



Nota: Podrem aplicar infinitèsims equivalents si estan multiplicant o dividint.

2.5 Continuïtat de funcions

2.5.1 Definició

Una funció $f(x)$ és contínua en un punt $x = a$ si

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Recordem que si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L \;\Rightarrow \exists \lim_{x \to a} f(x) = L$

Per tant, per a que $f(x)$ sigui contínua en un punt:

- Existeixen els dos límits laterals i són iguals.
- El límit coincideix amb el valor de la funció en aquell punt.

Exemple:

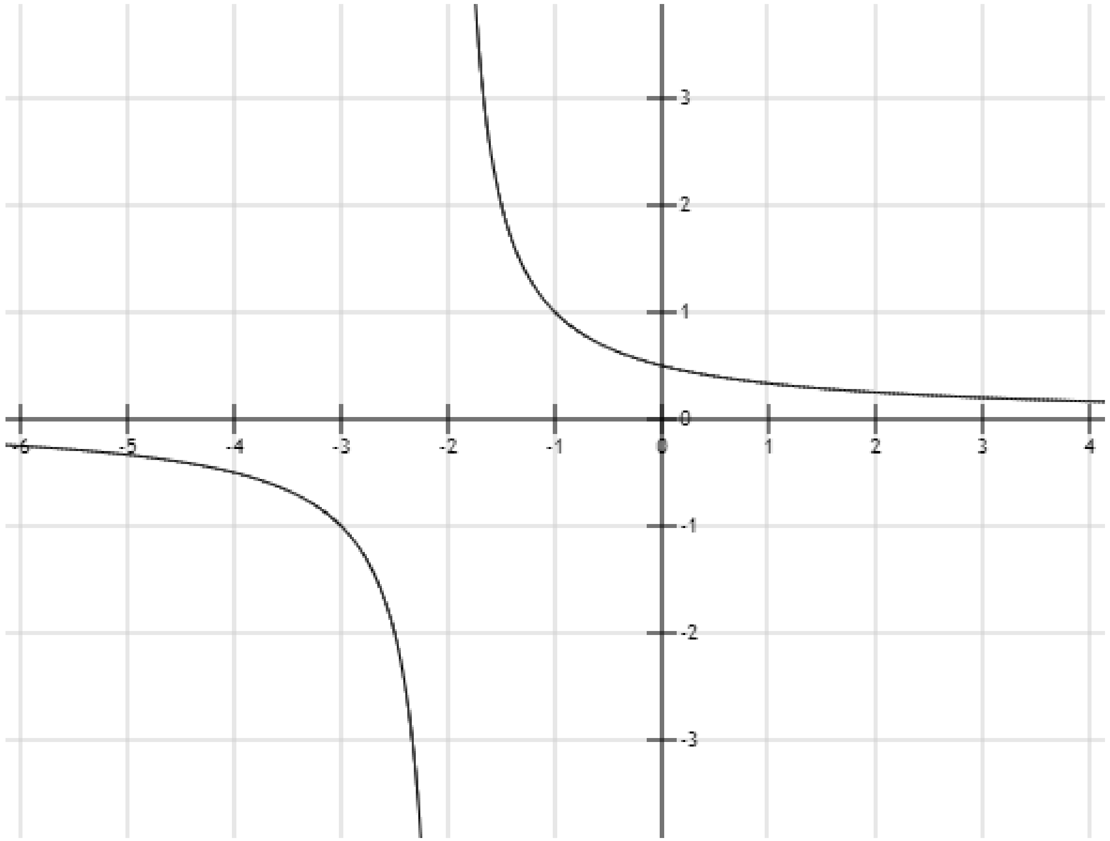
Estudiar la continuïtat en $x = 2$ de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & si\ x \neq 2 \\ \dfrac{1}{4} & si\ x = 2 \end{cases}$$

Comprovem si el límit coincideix amb $f(2)$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$



La funció és contínua en $x = 2$

2.5.2 Tipus de discontinuïtats

- **Discontinuïtat evitable**

Una funció $f(x)$ presenta una discontinuïtat evitable en $x = a$ si $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, però la funció no està definida en aquell punt ($\nexists f(a)$).

Es parla d'evitable, ja que podem redefinir la funció per a que sigui contínua com:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq a \\ L = \lim\limits_{x\to a} f(x) & si\ x = a \end{cases}$$

Exemple:

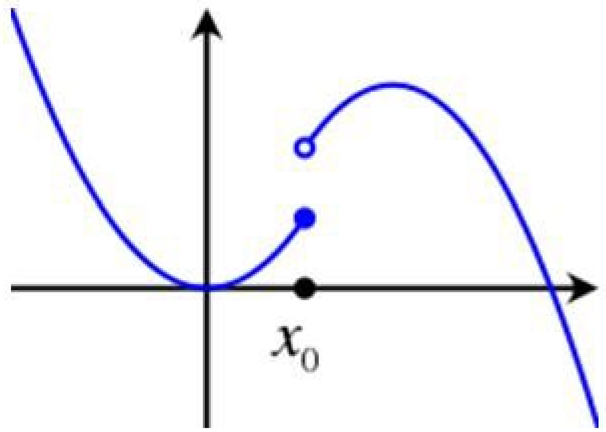
$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Rightarrow \overline{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

- **Discontinuïtat de primera espècie o de salt**

Existeixen els límits laterals, però són diferents:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L^+$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L^-$$

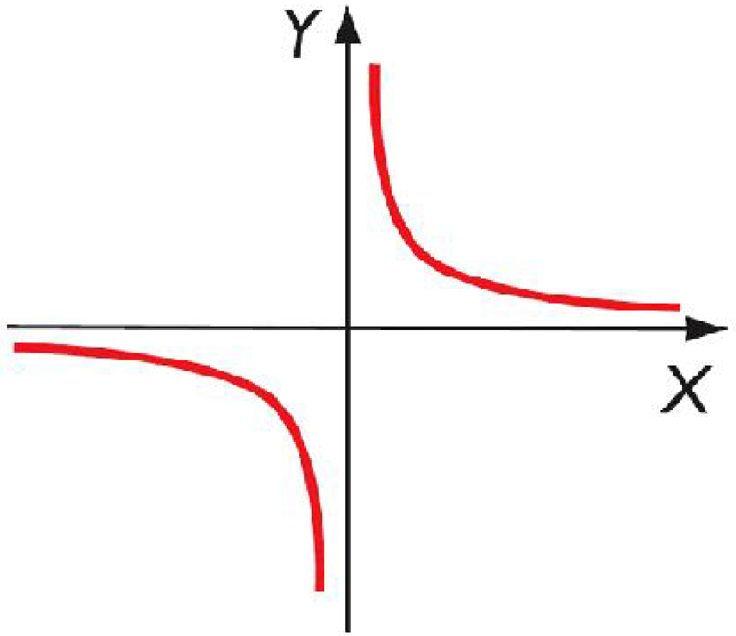
A la diferència $L^+ - L^-$ se l'anomena salt en la discontinuïtat.

Si $L^+ = f(a)$, diem que la funció és contínua per la dreta.
Si $L^- = f(a)$, diem que la funció és contínua per l'esquerra.

- **Discontinuïtat de segona espècie**

Com a mínim un dels dos límits laterals no existeix o donen infinit (asímptota).

$$\nexists \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{i/o} \quad \nexists \lim_{x\to a^-} f(x)\text{; o} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$



Exemple: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

- Si $f(x)$ és contínua en (a, b), aleshores $f(x)$ és contínua en qualsevol punt de l'interval (a, b).

- Si $f(x)$ és contínua en $[a, b]$, aleshores $f(x)$ és contínua en qualsevol punt de l'interval $[a, b]$ i a més, $f(x)$ és contínua per la dreta en $x = a$ i contínua per l'esquerra en $x = b$.

2.5.3 Propietats de les funcions contínues en un punt

Donades les funcions $f(x)$, $g(x)$ contínues en $x = a$.

- $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $k \cdot f(x)$ amb $k \in \mathbb{R}$,
  són contínues en $x = a$.

- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ és contínua en $x = a$ si $g(a) \neq 0$.

- $(h \circ f)(x) = h(f(x))$ és contínua en $x = a$ si $h(x)$ és contínua en $f(a)$.

Teorema: siguin $f(x)$ i $h(x)$ dues funcions tals que existeix $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, i $h(x)$ és una funció contínua en $x = L$, aleshores:

$$\lim_{x \to a} h\big(f(x)\big) = h(L)$$

Aquest teorema permet generalitzar l´ús d'infinitèsims equivalents,

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ per exemple, $\sin\big(f(x)\big) \sim f(x)$

$$\ln\big(1 + f(x)\big) \sim f(x)$$

2.5.4 Asímptotes

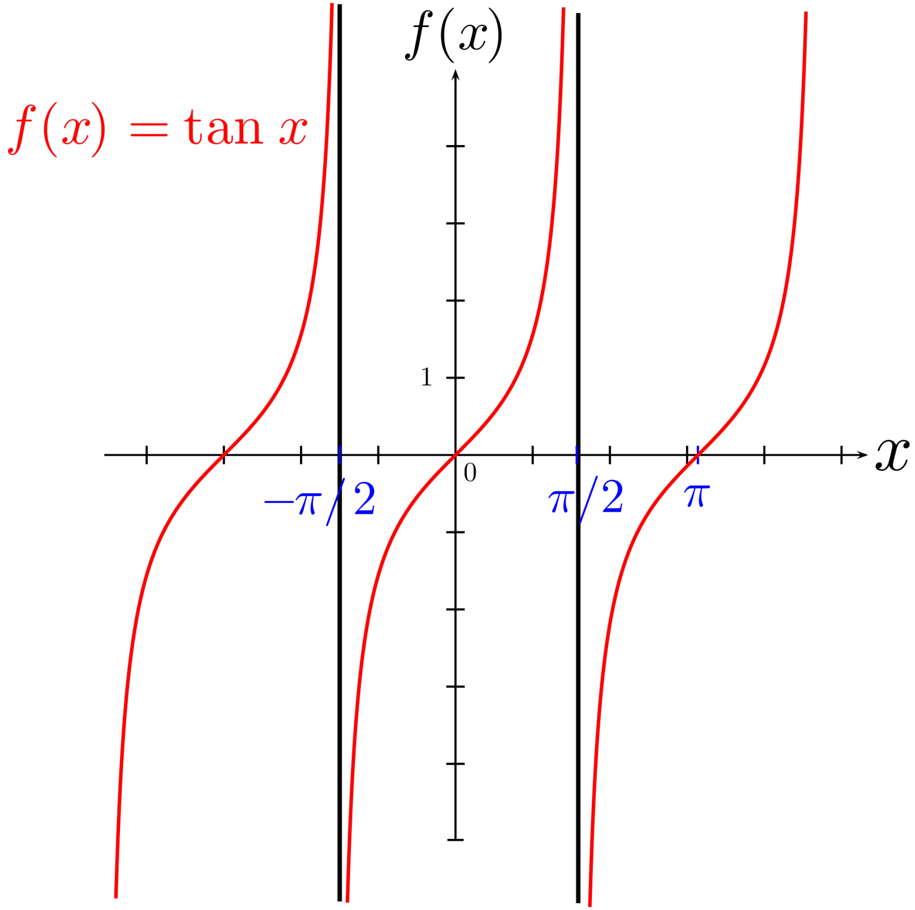
- **Asímptota vertical**

La recta $x = a$ és una asímptota vertical de $f(x)$ sii al menys un dels seus límits laterals en $x = a$ és $+\infty$ o $-\infty$.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

i/o

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

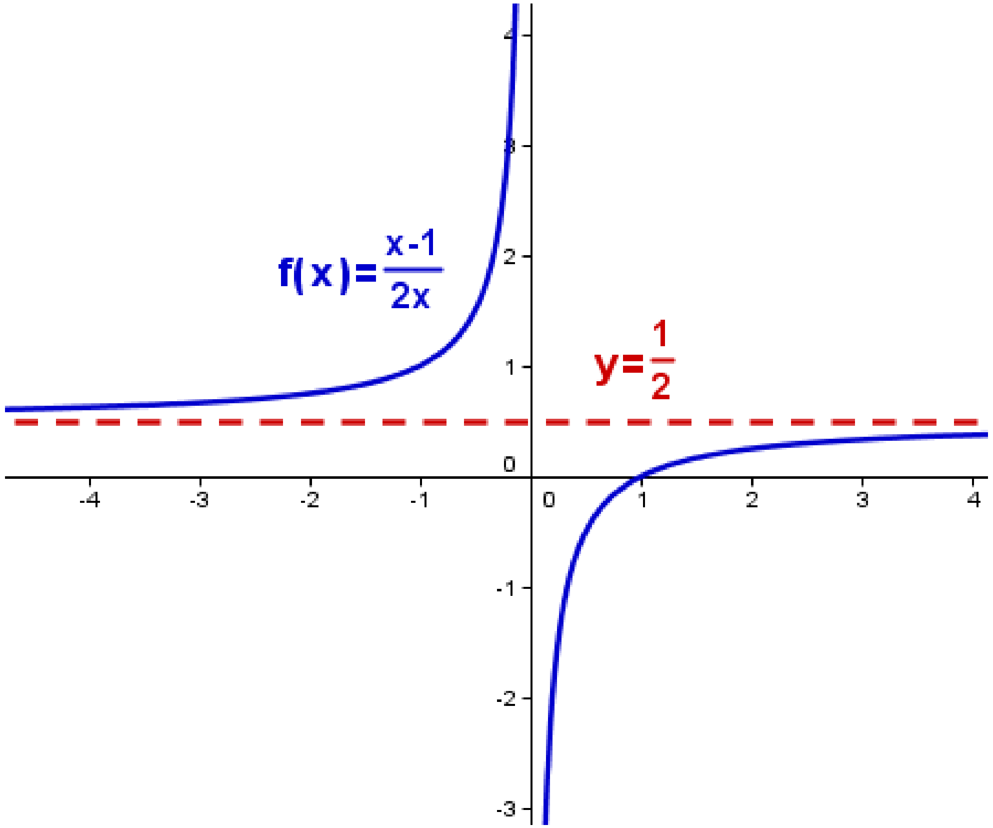


$f(x)$ té asímptotes verticals en $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \cdots$

- **Asímptota horitzontal**

La recta $y = b$ és una asímptota horitzontal de $f(x)$ sii algun dels seus límits quan $x \to \pm\infty$ és igual a b:

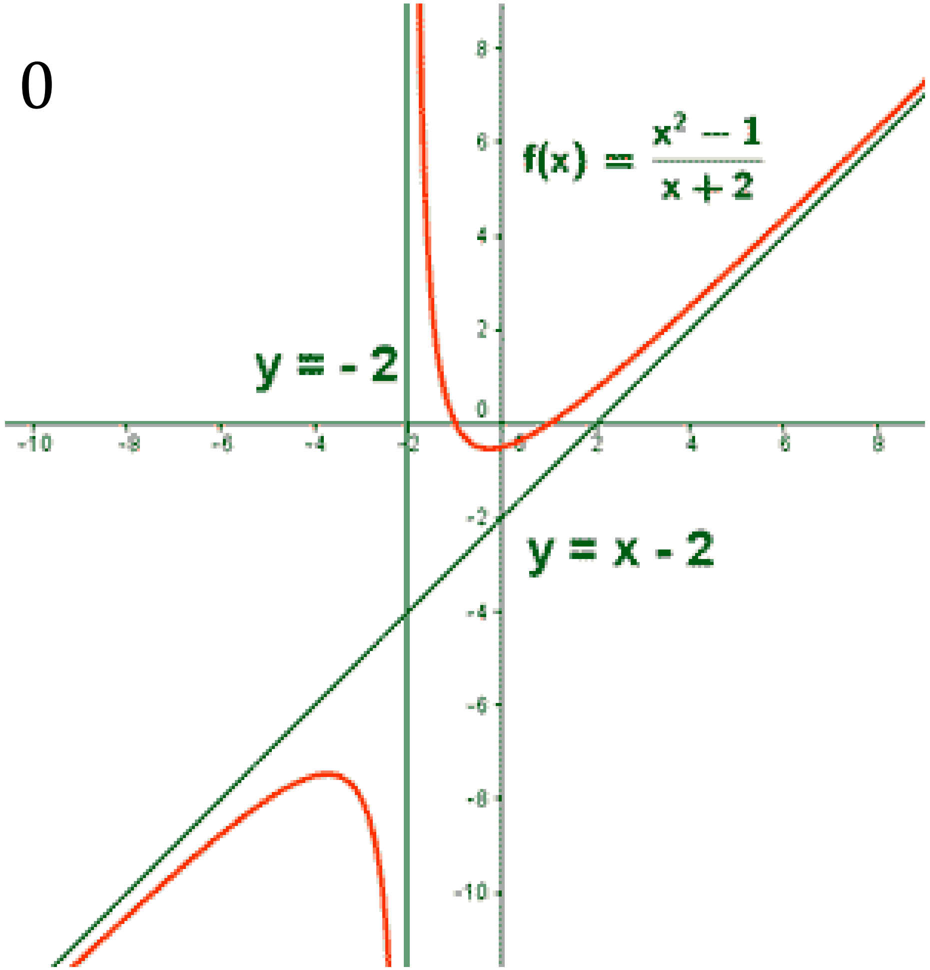
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{i/o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$



- **Asímptota obliqua**

La recta $y = mx + n,\ m \neq 0$, és una asímptota obliqua de $f(x)$ sii

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$



Determinació de m i n

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

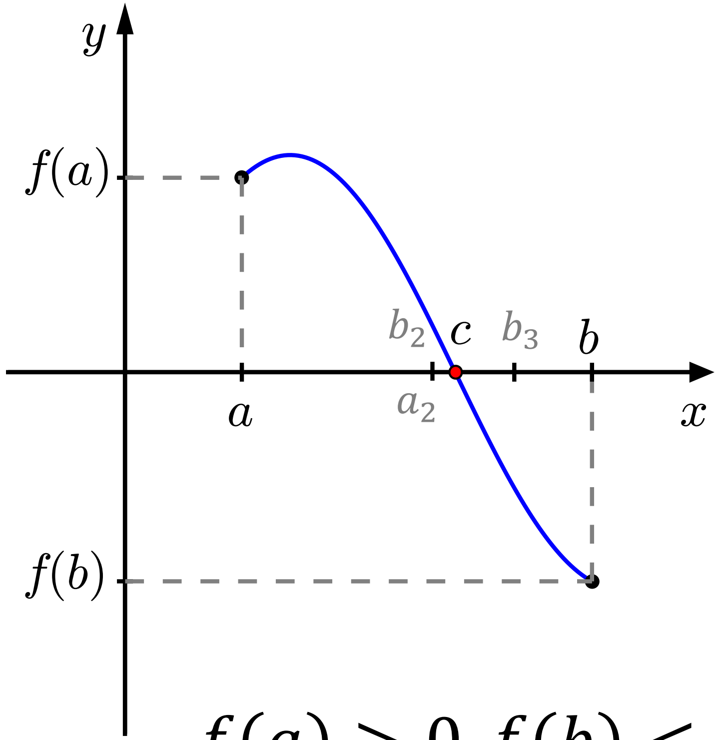
$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

2.5.5 Teoremes de funcions contínues

- **Teorema de Bolzano**

Si una funció és contínua en l'interval $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, aleshores existeix com a mínim un punt $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Observació: pot haver més d'un zero a l'interval.



$$f(a) > 0, f(b) < 0$$

Aplicació: cerca de zeros de funcions, dividint l'interval successivament i comprovant el signe de $f(a_i) \cdot f(b_i)$

$$[a, b] \rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0 \ \checkmark$$

$$\left[a, b_2 = \frac{a+b}{2}\right] \rightarrow f(a) \cdot f(b_2) > 0 \ \times$$

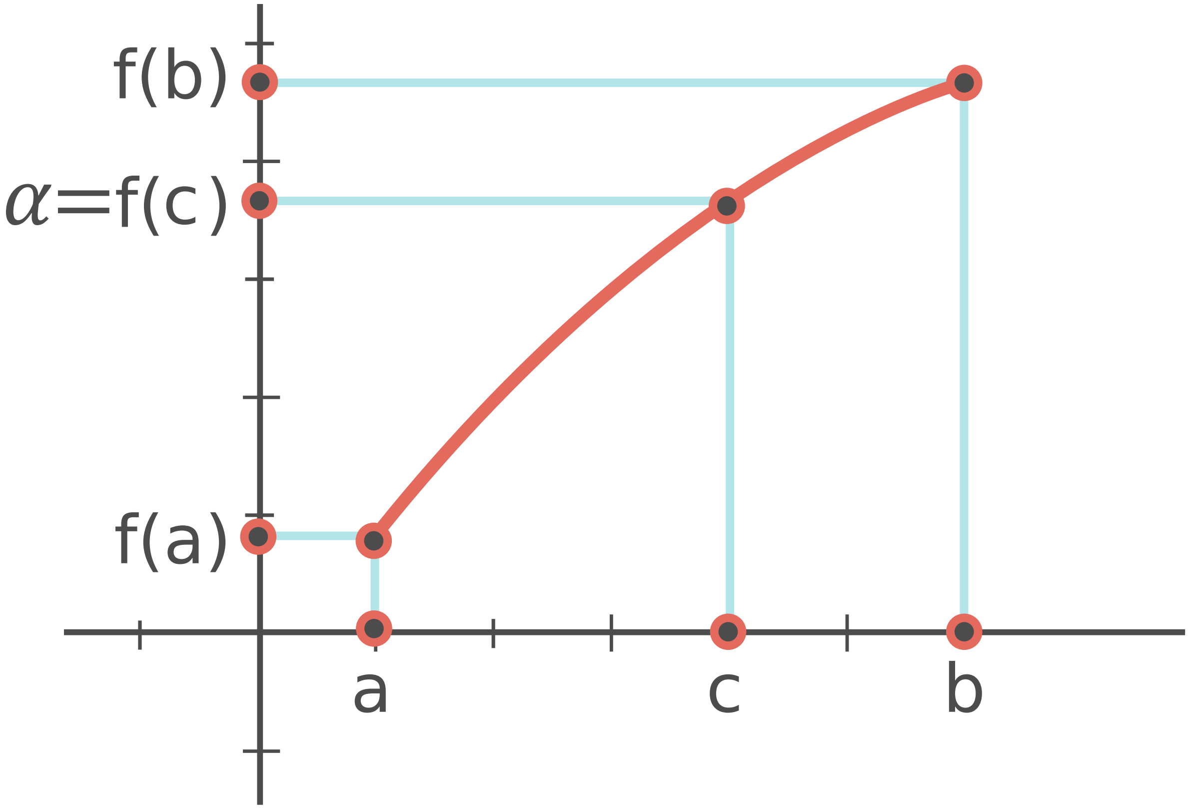
$$\left[a_2 = \frac{a+b}{2}, b\right] \rightarrow f(a_2) \cdot f(b) < 0 \ \checkmark$$

$$\left[a_2, b_3 = \frac{b_2+b}{2}\right] \rightarrow f(a_2) \cdot f(b_3) < 0, \dots \ \checkmark$$

- **Teorema de Darboux dels valors intermitjos**

Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a, b]$ i α és un valor comprès entre $f(a)$ i $f(b)$, aleshores existeix al menys un punt $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \alpha$.

És a dir, si la funció és contínua en $[a, b]$,
pren tots els valors compresos entre $f(a)$ i $f(b)$.



(Pot haver més d'una x amb la mateixa imatge.)

- **Teoremes de Weierstrass**

1r teorema. Tota funció contínua en $[a, b]$ està acotada en $[a, b]$.

2n teorema. Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a, b]$, aleshores el màxim i mínim de $f(x)$ es troben en l'interval $[a, b]$.

És a dir, existeixen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ per $\forall x \in [a, b]$.