

Tema 2. Funciones

Colección de ejercicios

Versión: 1

Cálculo

1º Ingeniería

- 1) Haz una representación gráfica (con la ayuda de una tabla) de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y contesta a las preguntas siguientes:
- ¿Se trata de una función? ¿Por qué?
 - ¿Hay más de una función? ¿Cuántas?
 - ¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido?
- 2) Determina el dominio de definición de cada una de las funciones siguientes:

a) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **Resp:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

b) $y = \frac{2x}{(x-2)(x+1)}$ **Resp:** $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ **Resp:** $(-3, +3)$ d) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ **Resp:** $[0, 2)$

e) $y = \frac{\sqrt{(x+1)(x-1)(x+5)}}{(x-3)(x+2)^3}$ **Resp:** $[-5, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, 3) \cup (3, +\infty)$

f) $y = \sqrt{\frac{\arcsin x}{\arccos x}}$ **Resp:** $[0, 1)$ g) $y = \sqrt{\arcsin x}$ **Resp:** $[0, 1]$

- 3) Calcula los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$ **Resp:** $\frac{1}{2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ **Resp:** 0

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2-1}$ **Resp:** $\frac{1}{3}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ **Resp:** -4

(e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x+2}{x^2+4x+3}$ **Resp:** $-\infty$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ **Resp:** $\frac{1}{4}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ **Resp:** 0

(h) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$ **Resp:** ∞

(i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ **Resp:** $3x^2$

(j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{(x^2+3)}-2}$ **Resp:** 2

- 4) Calcula los límites siguientes sin utilizar la regla de l'Hopital:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ **Resp:** $\frac{1}{2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)^2}{x \cdot \cos(ax)}$ **Resp:** $2a$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+9} \right)^{x^2+5}$ **Resp:** e^{-3}

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \sin \sqrt{x} \cdot \ln(1+2\sqrt{x})}{3x}$ **Resp:** $2/3$

e. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x}$ **Resp:** e^3

5) Demuestra que $f(x) = \frac{1 - 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ presenta una discontinuidad en $x = 0$.

6) Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = x - E[x]$ **Resp:** Discontinuidad de salto en los puntos de abscisa entera

(b) $g(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x - 1| & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$ **Resp:** Discontinuidad de salto en $x = -1$

(c) $h(x) = \frac{3}{4 + 4^{\tan x}}$ **Resp:** Discontinuidades de salto en $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

7) Estudia la continuidad de la función $f(x) = \ln(\cos x)$.

Resp: Discontinuidades asintóticas en $x = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$