laSalle ENG
Universitat Ramon Llull

Àlgebra lineal

Tema III: Espais Vectorials

José A. Montero, Xavier Sevillano, Joan Claudi Socoró

Índex de continguts

3. ESPAIS VECTORIALS

3.0 Estructures algebraiques bàsiques

GRUP

Un GRUP és un parell (G,⊕) on G és un conjunt i

$$\begin{aligned}\oplus\ :\ & G\times G\to G\\ & (x,y)\mapsto x+y\end{aligned}$$ una operació interna verificant:

1) Associativa: $(x\oplus y)\oplus z = x\oplus(y\oplus z) \qquad \forall x,y,z\in G$
2) Existència d'element neutre: $\exists\, e_\oplus\in G \mid x\oplus e_\oplus = e_\oplus\oplus x = x \qquad \forall x\in G$ en general, $e_\oplus = 0$
3) Existència d'element oposat (simètric): $\forall x\in G,\ \exists\, x'\in G \mid x\oplus x' = x'\oplus x = e_\oplus$
   en general, $x' = -x$

Si a més compleix:

4) Commutativa: $x\oplus y = y\oplus x \qquad \forall x,y\in G$

diem que (G,⊕) és un GRUP COMMUTATIU o ABELIÀ.

Exemples:

(N,+) no és grup:
(Z,+) grup commutatiu
(Q,+) grup commutatiu
(R,+) grup commutatiu
(C,+) grup commutatiu
(R^n,+) grup commutatiu $\qquad R^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_i\in R,\ i=1,\ldots,n\}$
(C^n ,+) grup commutatiu
(M_{nxm},+) grup commutatiu
(E,+) grup commutatiu $\qquad$ E = conjunt de funcions reals de variable real

$$\forall f(x)\in E,\qquad \begin{aligned} f: & R\to R\\ & x\mapsto f(x)\end{aligned}$$

(P_n,+) grup commutatiu $\qquad$ P_n = conjunt de polinomis de grau ≤ n

$$P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \mid a_i\in R,\ i=1,\ldots,n\}$$

ANELL

Un ANELL és una terna (A,⊕,⊗) on A és un conjunt i

$$\begin{array}{l} \oplus \ : A \times A \to A \\ \quad (x,y) \mapsto x+y \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{l} \otimes \ : A \times A \to A \\ \quad (x,y) \mapsto x \cdot y \end{array}$$ dues operacions internes verificant:

(A,⊕) grup commutatiu

5) Associativa respecte ⊗: $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z) \qquad \forall x,y,z \in A$

6) Existència d'element neutre: $\exists e_\otimes \in A \mid x \otimes e_\otimes = e_\otimes \otimes x = x \quad \forall x \in A$ en general, $e_\otimes = 1$

7) Distributiva: $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \qquad \forall x,y,z \in A$

$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z) \qquad \forall x,y,z \in A$

Si a més compleix:

8) Commutativa respecte ⊗: $x \otimes y = y \otimes x \qquad \forall x,y \in A$

diem que (A,⊕,⊗) és un ANELL COMMUTATIU o ABELIÀ.

Exemples:

(Z,+,·) anell commutatiu
(Q,+,·) anell commutatiu
(R,+,·) anell commutatiu
(C,+,·) anell commutatiu
(M_{nxn},+) anell no commutatiu

COS

Un cos és una terna (K,⊕,⊗) on K és un conjunt i

$$\begin{array}{l} \oplus \ : K \times K \to K \\ \quad (x,y) \mapsto x+y \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{l} \otimes \ : K \times K \to K \\ \quad (x,y) \mapsto x \cdot y \end{array}$$ dues operacions internes verificant:

(K,⊕,⊗) anell

9) ∃ d'element invers respecte ⊗: : $\forall x \in K - \{e_\oplus\},\ \exists x' \in K \mid x \otimes x' = x' \otimes x = e_\otimes$ en general, $x' = \frac{1}{x}$

Si l' anell (K,⊕,⊗) és commutatiu,
direm que (K,⊕,⊗) és un COS COMMUTATIU.

Exemples:

(Z,+,·) no és cos perquè no existeix element invers respecte ·.
(M_{nxn},+,·) no és cos perquè $\forall A \in M_{nxn}$ si det(A) = 0 no existeix inversa
(Q,+,·) cos commutatiu
(R,+,·) cos commutatiu i també (C,+,·) cos commutatiu

3.1 Definició d'espai vectorial i propietats

(K,+,·) cos commutatiu (p.ex.: (R,+,·) ó (C,+,·))

E és **espai vectorial** (e.v.) sobre K si:

(E,+) és un grup commutatiu amb una operació interna + (generalment suma):

$$\begin{aligned} + \ : \ & E \times E \to E \\ & (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$ que verifica:

1) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \qquad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$
2) $\exists$ d'element neutre resp. +: $\exists \vec{e} \in E \,\middle|\, \vec{u} + \vec{e} = \vec{e} + \vec{u} = \vec{u}, \ \forall \vec{u} \in E$ en general, $\vec{e} = \vec{0}$
3) Existència d'element oposat: $\forall \vec{v} \in E, \exists \vec{v}' \in E \,\middle|\, \vec{v} + \vec{v}' = \vec{v}' + \vec{v} = \vec{e}$ en general, $\vec{v}' = -\vec{v}$
4) Commutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$

i respecte a una operació externa · (generalment producte):

$$\begin{aligned} \cdot \ : \ & K \times E \to E \\ & (\alpha, \vec{u}) \mapsto \alpha \cdot \vec{u} \end{aligned}$$ verifica:

5) Associativa respecte ·: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) \qquad \forall \alpha \cdot \beta \in K, \ \forall \vec{u} \in E$
6) $\exists$ d'element neutre respecte ·: $\exists\ 1 \in K \,|\, \vec{u} \cdot 1 = 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \qquad \forall \vec{u} \in E$
7) Distributives: $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) + (\alpha \cdot \vec{v}) \qquad \forall \alpha \in K, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$
$(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot \vec{u}) + (\beta \cdot \vec{u}) \qquad \forall \alpha \cdot \beta \in K, \ \forall \vec{u} \in E$

NOTA: $\vec{0}$ és l'element neutre de E respecte +
0 és l'element neutre de K respecte +

Els elements del conjunt E s'anomenen VECTORS.
Els elements del conjunt K s'anomenen ESCALARS.

Propietats:

i) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0} \qquad \forall \vec{v} \in E$
ii) $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0} \qquad \forall \alpha \in K$
iii) $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ i/o $\vec{v} = \vec{0}$
iv) $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v} \qquad \forall \vec{v} \in E \qquad -\vec{v}$ és l'oposat a $\vec{v}$ de E respecte +

Exemple: R^2 és un espai vectorial sobre R.

K=R és cos commutatiu
(R^2,+) és grup commutatiu:

$$+ \;:\; R^2 \times R^2 \to R^2$$
$$(\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u}+\vec{v} \qquad \text{verifica:}$$
$$((u_1,u_2),(v_1,v_2)) \mapsto (u_1+v_1, u_2+v_2)$$

1) Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \qquad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in R^2$

2) $\exists$ d'element neutre respecte +:

$\exists\, \vec{e} = (e_1,e_2) \in R^2 \mid \vec{u}+\vec{e} = \vec{e}+\vec{u} = \vec{u} \qquad \forall \vec{u} \in R^2$

$\vec{u}+\vec{e} = (u_1+e_1, u_2+e_2) = (u_1,u_2) \qquad \Rightarrow e_1 = 0,\ e_2 = 0$

3) Existència d'element oposat:

$\forall \vec{u} = (u_1,u_2) \in R^2,\ \exists\ -\vec{u} = (-u_1,-u_2) \in R^2 \mid \vec{u}+(-\vec{u}) = (u_1-u_1, u_2-u_2) = (0{,}0)$

4) Commutativa: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} \qquad \forall \vec{u},\vec{v} \in R^2$

(R^2,+,·):

$$\cdot \;:\; R \times R^2 \to R^2$$
$$(\alpha,\vec{u}) \mapsto \alpha\cdot\vec{u} \qquad \text{verifica:}$$
$$(\alpha,(u_1,u_2)) \mapsto (\alpha\cdot u_1, \alpha\cdot u_2)$$

5) Associativa respecte ·: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{u} = \alpha\cdot(\beta\cdot\vec{u}) \qquad \forall \alpha\cdot\beta \in R,\ \forall \vec{u} \in R^2$

6) $\exists$ d'element neutre respecte ·: $\exists\ 1 \in R \mid \vec{u}\cdot 1 = 1\cdot\vec{u} = \vec{u} \qquad \forall \vec{u} \in R^2$

7) Distributives: $\alpha\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = (\alpha\cdot\vec{u})+(\alpha\cdot\vec{v}) \qquad \forall \alpha \in R,\ \forall \vec{u},\vec{v} \in R^2$

$(\alpha+\beta)\cdot\vec{u} = (\alpha\cdot\vec{u})+(\beta\cdot\vec{u}) \qquad \forall \alpha\cdot\beta \in R,\ \forall \vec{u} \in R^2$

De forma similar es pot demostrar, mitjançant la generalització, que R^n és espai vectorial sobre R.

K=R és cos commutatiu
(R^2,+) és grup commutatiu:

$$+ \;:\; R^n \times R^n \to R^n$$
$$(\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u}+\vec{v}$$
$$((u_1,u_2,\ldots,u_n),(v_1,v_2,\ldots,v_n)) \mapsto (u_1+v_1, u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)$$

(R^2,+,·):

$$\cdot \;:\; R \times R^n \to R^n$$
$$(\alpha,\vec{u}) \mapsto \alpha\cdot\vec{u}$$
$$(\alpha,(u_1,u_2,\ldots,u_n)) \mapsto (\alpha\cdot u_1, \alpha\cdot u_2,\ldots,\alpha\cdot u_n)$$

Demostreu que els següents conjunts són espais vectorials sobre R: matrius de nxm, funcions reals de variable real, polinomis de grau n.

3.2 Dependència i independència lineal de vectors

Sigui K cos commutatiu

Definició: **COMBINACIÓ LINEAL**

Sigui E K-e.v., $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in E$ i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \in E$$

$\vec{v}$ és COMBINACIÓ LINEAL (C.L.) dels vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Definició:

Sigui E K-e.v., $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq E$ conjunt de vectors de E,

S és un **conjunt LINEALMENT INDEPENDENT (L.I.)** de vectors de E sii

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad \lambda_i \in K \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \text{ solució única}$$

En cas contrari, és a dir, si $\exists$ algun $\lambda_i \neq 0$ tal que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$

S és un **conjunt LINEALMENT DEPENDENT (L.D.).**

Proposició:

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in E$ són linealment dependents sii un d'ells és combinació lineal dels altres.

$\Rightarrow$ $\quad \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad \lambda_i \in K$

suposem $\lambda_i \neq 0$,

$$\vec{v}_i = \frac{1}{\lambda_i}\left(-\lambda_1 \vec{v}_1 - \lambda_2 \vec{v}_2 - \ldots - \lambda_n \vec{v}_n\right) = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \left(-\lambda_k \vec{v}_k\right) = \frac{-1}{\lambda_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k \vec{v}_k$$

Exemple: $\vec{v}_1 = \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n \;\Rightarrow\; -\vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ i $\lambda_1 = -1 \;\Rightarrow$ són L.D.

Observacions:

1) Un conjunt de vectors que conté el vector $\vec{0}$ és L.D.

dem.:

$S = \{\vec{0}, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$

$\forall \lambda_i \in K, \quad \lambda_1 \vec{0} + 0\vec{v}_2 + \ldots + 0\vec{v}_n = \vec{0}$ en particular és cert per $\lambda_1 \neq 0$.

2) $S_1 \subset S_2 \subset E$ conjunts de vectors de E, si S_2 conjunt L.I. $\Rightarrow$ S_1 conjunt L.I.

(Demostració: Trivial)

3) Eina per calcular nº de vectors linealment independents a R^n.

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$ matriu amb vectors columna

Rang(A) = n $\Rightarrow$ S conjunt de vectors L.I.
Rang(A) = r < n $\Rightarrow$ S conjunt de vectors L.D. i només hi ha r vectors L.I.

Exemple 1: a R^2 {(1,0),(0,1)} són L.I.
Demostració:

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{L.I.}$$

De forma similar es pot demostrar que en general, a R^n {(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,...,0,1)} són L.I.

Exemple 2: a R^3 {(1,1,0),(0,2,3),(1,0,1)} són L.I.?

3.3 Subespai vectorial

Sigui K cos commutatiu

<u>Definició</u>: **SUBESPAI VECTORIAL (s.e.v.)**
Sigui E K-e.v.,
un subconjunt no buit $F \subset E$ és SUBESPAI VECTORIAL de E sii compleix:

i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in F$
ii) $\forall \vec{u} \in F,\ \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot \vec{u} \in F$

o equivalentment, sii compleix:

$$\left.\begin{array}{l}\forall \vec{u}, \vec{v} \in F\\ \forall \lambda, \mu \in K\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in F$$

Exemple: a R^4 R-e.v., F és s.e.v. de R^4 ?

$$F = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_3 = x_4 = 0\} = \{\vec{x} \in R^4 \mid \vec{x} = (x_1, x_2, 0, 0)\}$$

Observacions:

1) Sigui E K-e.v., F$\subset$ E K-e.v.,
   les operacions de E permeten definir unes operacions a F tals que
   F és un K-e.v. amb les mateixes operacions (interna i externa) definides sobre E.

2) Subespais trivials.
   E K-e.v. sempre té 2 subespais trivials: $F=\{\vec{0}\}\subset E$ és s.e.v.
   $F=E\subset E$ és s.e.v.

3) Tot subespai vectorial d'un e.v. E conté l'element neutre de E.

3.3.1 Intersecció i unió de subespais vectorials.

<u>Proposició</u>: Sigui F_i una família de s.e.v. de E (K-e.v), la intersecció de tots els F_i també és s.e.v.

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = F \text{ és s.e.v. de E}$$

Demostració:

$$\left.\begin{array}{l}\forall \vec{u},\vec{v}\in F=\bigcap_i F_i \\ \forall \lambda,\mu\in K\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}\in F\,?$$

per definició d'intersecció:

$$\bigcap_i F_i=\left\{\vec{x}\in E \;\middle|\; \vec{x}\in F_1 \text{ i } \vec{x}\in F_2 \text{ i}\ldots\ \vec{x}\in F_n\right\}=\left\{\vec{x}\in E \;\middle|\; \vec{x}\in F_i\ \forall i=1,\ldots n\right\}$$

per tant, si $\vec{x},\vec{y}\in\bigcap_i F_i \Rightarrow \vec{x},\vec{y}\in\{F_1,F_2,\ldots F_n\}\Rightarrow \vec{x},\vec{y}\in F_i \quad i=1,\ldots n$

i com que F_i és s.e.v. de E, $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\in F_i \quad i=1,\ldots n \Rightarrow \lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\in\bigcap_i F_i=F$ és s.e.v de E.

Exemple: a R^3 definim $F_1 = \{(x,y,0)\}$ i $F_2 = \{(0,y,z)\}$ dos s.e.v. de E

$$F_1\cap F_2=\left\{\vec{x}=(x,y,z) \;\middle|\; \vec{x}\in F_1 \text{ i } \vec{x}\in F_2\right\}=\left\{\vec{x}=(x,y,z) \;\middle|\; z=0 \text{ i } x=0\right\}=\{(0,y,0)\}$$

que també és s.e.v. de E.

NOTA: En canvi, la unió de s.e.v. no és necessàriament un s.e.v.
per definició d'unió:

$$\bigcup_i F_i=\left\{\vec{x}\in E \;\middle|\; \vec{x}\in F_1 \text{ i/o } \vec{x}\in F_2 \text{ i/o}\ldots\ \vec{x}\in F_n\right\}$$

Exemple: a R^3 definim $F_1 = \{(x,y,0)\}$ i $F_2 = \{(0,y,z)\}$ dos s.e.v. de E

$$F_1 \cup F_2 = \left\{\vec{x} = (x,y,z) \mid \vec{x} \in F_1 \text{ i / o } \vec{x} \in F_2\right\} = \left\{\vec{x} = (x,y,z) \mid z = 0 \text{ i / o } x = 0\right\}$$

no és s.e.v. de E ja que (x,y,0)+ (0,y,z) = (x, 2y, z) $\notin F_1 \cup F_2$
(La suma de 2 elements que pertanyen a la unió de F_1 i F_2 dóna com a resultat un vector que no pertany a aquesta unió (no compleix la condició)

3.3.2 Subespai engendrat

Sigui E K-e.v., $S = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\right\} \subseteq E$ conjunt de vectors de E,
diem **SUBESPAI ENGENDRAT per S** al conjunt de tots els vectors que es poden expressar com a combinació lineal dels vectors de S.

$$\langle S\rangle = \left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \right\rangle = \left\{\vec{v} \in E \mid \vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n, \quad \lambda_i \in K, i = 1, \ldots n\right\}$$

Propietats: i) $\langle S\rangle \subset E$ és s.e.v. de E
ii) $S \subset \langle S\rangle$ (Els vectors $\vec{v}_i$ estan inclosos en $< \vec{v}_i >$)
iii) $\langle S\rangle$ és el més petit dels s.e.v. de E que contenen S

$$\forall F \subset E \text{ s.e.v.} \mid S \subset F \Rightarrow \langle S\rangle \subset F$$

NOTA: Sigui E K-e.v., S⊂E un subconjunt de vectors L.D.

$S = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r, \ldots, \vec{v}_n\right\}$ amb r < n vectors L.I.

$$\langle S\rangle = \left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \right\rangle = \left\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r \right\rangle$$

Exemple: $S = \{(1,3,2), (-1,0,1)\}$
$(1,0,0) \notin < S >$ perquè en conjunt són L.I.
$(0,3,3) \in < S >$ perquè en conjunt són L.D.

3.4 Base y dimensión de un espacio vectorial

3.4.1 Base de un espacio vectorial

Definición: Sea E un e.v sobre un cuerpo conmutativo K y sea B un subconjunto de E. B es **BASE** de E si:

a) $<B> = E$
b) Los elementos de B tienen que ser de E linealmente independientes.

Nota: Una base tiene el mínimo numero de vectores con el que podemos generar E. La base tiene el máximo número de vectores linealmente independientes que se puede agrupar dentro de E.

Nota2: Una base se puede definir también sobre un subespacio vectorial $F \subset E$.

Ejemplos de base (canónicas):

En $R^2=\{(1,0)(0,1)\}$
En $R^3=\{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$
Los polinomios $P_2(x)=\{1,x,x^2\} = \{(1+0x+0x^2),(0+x+0x^2),(0+0x+x^2)$

Ejercicio 1: Ver si el conjunto $B=\{(-1,2,1)(1,3,0)(2,-4,-1)\}$ es base de R^3.

Ejercicio 2: ¿El conjunto de vectores $(-1,2,-1)(1,3,0)$ es una base de $\Re^3$?

Teorema:

Todas las bases de un e.v. tienen el mismo número de elementos.

3.4.2 Dimensión de un E.V.

Es el número de elementos que contiene la base de un e.v., es decir, el máximo número de vectores linealmente independientes que podemos agrupar dentro del e.v. Sea E un e.v. denotamos su dimensión por:

$$\dim(E)$$

NOTA: Si tenemos un e.v. donde su base contiene infinitos elementos diremos que este e.v. es de **dimensión infinita**. Si tiene n elementos ($n \in Z$, $n \geq 1$) diremos que tiene una dimensión n o finita.

Teorema: Si E es un e.v. de dimensión finita y F es un subespacio incluido en E ($F \subset E$), diremos que:

a) F es un s.v. de E de dimensión finita tal que la dimensión de F será menor o igual que la del E, es decir: $\dim(F) \leq \dim(E)$
b) Si la dimensión de F es igual a la dimensión de E entonces F es igual que E.

$$\dim(F) = \dim(E) \quad \Rightarrow \quad F = E$$

Consecuencias:

1. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita **n** y sea $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$ un conjunto de **n** vectores linealmente independientes dentro del espacio vectorial E $\Rightarrow$ U es base de E.

   Demostración:
   Cualquier vector incluido en E es L.D. de U ya que U tiene n vectores L.I. (el máximo número de elementos linealmente independientes que puede agrupar en E. Si U fuera u+1 elementos $\Rightarrow$ no podrían ser L.I.)

2. La dimensión de un e.v. no varía, no depende de la base escojamos.

3.5 Componentes de un vector de E en una base B de E

Sean E un e.v. sobre K, y B una base de E , $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_n\}$ cualquier vector de E se puede expresar mediante una combinación lineal de los vectores de B, es decir:

$$\forall \vec{x} \in E \Rightarrow \vec{x} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{b}_n$$

donde λ_i son las **componentes o coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base B**.

La forma vectorial del elemento $\vec{x}$ o también en **componentes referidas a la base B** se escribe:

$$\vec{x}\big|_B = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,|_B$$

Proposición: Sea B base de E, $\forall \vec{x} \in$ E l**as componentes del vector $\vec{x}$ referidas a la base B son únicas**.

Demostración:

Supongamos que no lo son:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{b}_n = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2 + \ldots + \mu_n \vec{b}_n$$

siendo $\lambda \neq \mu$

$$\vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \qquad (\lambda_1 - \mu_1)\vec{b}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{b}_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)\vec{b}_n = \vec{0}$$

En un conjunto de vectores linealmente independientes esta expresión se cumple sólo si los coeficientes son 0. Luego se cumplirá cuando ($\lambda_i = \mu_i$).

Ejemplo 1: $(1,2)|_B$ ¿es de $\Re^2$? Depende de quién sea B.

Ejemplo 2: Calcula las componentes de $\vec{x}=2x^2+3x-1$ en la base $B_1=\{1,x,x^2\}$ y también del mismo vector en la base $B_2=\{x^2,x,1\}$.

Ejemplo 3: Calcula las componentes del vector $\vec{x}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ en la base $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

3.6 Cambio de base

Empezaremos con un ejemplo.

<u>Ejemplo:</u> Nos dan un vector $\vec{p}$ expresado en componentes de una base B_1 y se trata de hallar que componentes tiene $\vec{p}$ en la base B_2:

Primero se encontrará el vector $\vec{p}$ y luego se buscará qué componentes tiene en la base B_2.

$$\begin{aligned}
&B_1=\{x-2,1\}\\
&B_2=\{2x,4\}\\
&\vec{p}\big|_{B_1}=(1,2)\\
&\vec{p}=1*(x-2)+2*1=x
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ahora se trata de hallar las componentes que tiene en la base B_2, es decir, encontrar λ_1 y λ_2 que nos permitan expresar el polinomio $\vec{p}$ como combinación lineal de los elementos de la base B_2.

$$\begin{aligned}
&x=\lambda_1 2x+\lambda_2 4\\
&1=2\lambda_1\\
&0=4\lambda_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las componentes del polinomio $\vec{p}$ en la base B_2 son:

$$\vec{p}\ \big|_{B_2}=(\tfrac{1}{2},0)$$

Pero existe otra forma de hallar las componentes del polinomio $\vec{p}$ en la base B_2, si conocemos sus componentes en base B_1. Vamos a verla a continuación con detenimiento.

Planteamiento general del problema

Sean B_1, B_2 dos bases diferentes del e. v. E, $\forall\ \vec{x}\in$ E lo podemos escribir como combinación lineal de una de las dos bases o de las dos, es decir:

$$\left.\begin{aligned}B_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots\vec{u}_n\}\\ B_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots\vec{v}_n\}\end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned}&\vec{x}=\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+\ldots+\lambda_n\vec{u}_n\\ &\quad\vec{x}\ \big|_{B_1}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\\ &\vec{x}=\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2+\ldots+\mu_n\vec{v}_n\\ &\quad\vec{x}\ \big|_{B_2}=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)\end{aligned}\right.$$

¿Que se quiere conseguir?
Queremos encontrar las componentes de $\vec{x}$ en base B_2 a partir las componentes que tiene en la base B_1.

$$\vec{x}_{B1} \to \vec{x}_{B2}$$

Procedimiento
Deberemos conocer las componentes de los vectores de la base inicial (B_1) referidas a la base final (B_2).

Demostración: Expresamos los vectores de la base $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$ como combinación lineal de la base destino $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_1 = b_{11}\vec{v}_1 + b_{21}\vec{v}_2 + \ldots + b_{n1}\vec{v}_n \\ \vec{u}_2 = b_{12}\vec{v}_1 + b_{22}\vec{v}_2 + \ldots + b_{n2}\vec{v}_n \\ \vdots \\ \vec{u}_n = b_{1n}\vec{v}_1 + b_{2n}\vec{v}_2 + \ldots + b_{nn}\vec{v}_n \end{array}\right\} \equiv \vec{u}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\vec{v}_k$$

Un vector $\vec{x}$ expresado como combinación lineal de B_1 sería:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$$

Y expresado como combinación lineal de B_2:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{v}_i$$ donde las μ_i son las componentes que buscamos

Pues bien, si partimos de que:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$$

Y aplicando lo que sabemos:

$$\vec{u}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\vec{v}_k$$

Tenemos:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ki}\right)\vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{v}_k;$$

Con lo que concluimos que las nuevas componentes se pueden expresar mediante la siguiente expresión:

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{xi}$$

donde μ_k son las componentes de $\vec{x}$ en base destino (B_2) , b_{ki} son las componentes de los n vectores de la base origen (B_1) en la base destino (B_2) y λ_i son las componentes de $\vec{x}$ en la base origen B_1 . Por lo tanto, ya podemos calcular las componentes del vector $\vec{x}$ en la base destino sabiendo las componentes de $\vec{x}$ en la base origen y sabiendo las componentes de los vectores de la base origen, referidas a la base destino.

El sumatorio anterior lo podemos expresar como producto de dos matrices:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_{21} \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}\big|_{B2} = C_{B1\to B2}\, \vec{x}\big|_{B1}$$

Siendo:

$C_{B1\to B2}$ la matriz de cambio de base de B1 a B2.

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ son las componentes de $\vec{x}$ en la base origen B1.

$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ son las componentes de $\vec{x}$ en la base destino B2.

<u>Observación</u>: Las columnas de $C_{B1\to B2}$ son las componentes de los vectores de la base origen referidas a la base destino.

Nota: Para toda base B1, B2 de E, las matrices de cambio de base son invertibles (es decir, que tienen inversa) ya que:

$$Rango = n^{o}\, de\ vectores\ l.i. \ = n$$

(Esta afirmación se apoya en que como los vectores de la base origen son L.I. entre si, y los de la base destino también lo son entre ellos – por definición de base –, las componentes de los vectores de la base origen, referidas a la base destino, también serán L.I. entre sí)

Por lo tanto siempre podremos encontrar la matriz inversa: ${C_{B1\to B2}}^{-1}$

Particularidades de ${C_{B1\to B2}}^{-1}$:

Tenemos que:

$$B1 \xrightarrow{C_{B1\to B2}} B2$$

De forma que:

$$\vec{x}\big|_{B2} = C_{B1\to B2}\, \vec{x}\big|_{B1}$$

Si multiplicamos por $C_{B1\to B2}{}^{-1}$ a ambos lados de la igualdad:

$$C_{B1\to B2}{}^{-1}\cdot \vec{x}\big|_{B2} = C_{B1\to B2}{}^{-1}\cdot C_{B1\to B2}\cdot\ \vec{x}\big|_{B1} = \vec{x}\big|_{B1}$$

Por lo tanto, $C_{B1\to B2}{}^{-1} = C_{B2\to B1}$, es decir, la matriz inversa es la matriz de cambio de base de base B2 origen a base B1 destino.

$$\text{B1} \xrightarrow{C_{B1\to B2}} \text{B2}$$

Cambio de base pasando por la base canónica:

Si M es la matriz de cambio de base de B1 a B2, M1 la matriz de cambio de base de B1 a canónica y M2 la matriz de cambio de base de B2 a canónica, entonces:

$$\vec{x}\big|_{B2} = M\cdot\vec{x}\big|_{B1}$$
$$M = M_2{}^{-1}M_1$$

Para poder aplicar esta forma de calcular la matriz de cambio de base debe cumplirse que la base canónica pertenezca al mismo espacio que las bases B1 y B2. En el caso que se trabaje sobre un subespacio vectorial, puede dejar de tener sentido la definición de base canónica.

PROBLEMES PROPOSATS

Problema P.1

Sigui $\Re^n = \Re\times\Re\times\ldots\times\Re = \{\vec{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) / x_i \in \Re\}$. Demostrar que per tot $n\in$ N, $\Re^n$ és un espai vectorial sobre el cos $\Re$ amb les següents operacions definides:

Operació interna (+):

$$\begin{array}{ccccc} \Re^n & \times & \Re^n & \to & \Re^n \\ \{(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n),(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)\} & & & \to & (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)+(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)=(x_1+y_1 \quad x_2+y_2 \quad \cdots \quad x_1+y_n) \end{array}$$

Operació externa (·):

$$\begin{array}{ccc} \Re\times\Re^n & \to & \Re^n \\ \{a,(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\} & \to & a\cdot(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)=(ax_1 \quad ax_2 \quad \cdots \quad ax_n) \end{array}$$

Problema P.2

Sigui K [x] l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients en K. Demostrar que el subconjunt K_n [x] format pels polinomis de grau $\leq n$ és un subespai vectorial.

Problema P.3

Demostrar si en l'espai vectorial P_3[x] dels polinomis de ≤ 3 sobre $\Re$, els següents vectors són linealment independents.

$\vec{u}_1 = 1 + 2x$, $\vec{u}_2 = -1-2x^2$, $\vec{u}_3 = -2x + 2x^2$.

SOLUCIÓ: Son L.D.

Problema P.4

Trobar el valor de 'a' i 'b' per tal de que el vector (a,2,5,b) ∈ ⟨ (1,2,0,3),(2,1,1,0) ⟩ .

SOLUCIÓ: $a = \frac{17}{2} \quad , b = \frac{-9}{2}$

Problema P.5

Demostrar si el conjunt de vectors {(1,0,2/3),(3,2,1),(0,1,5)} és un sistema de generadors de $\Re^3$.

SOLUCIÓ: Són generadors de R^3.

Problema P.6

Considereu els següents subconjunts de $\Re^{\Re}$ l'espai vectorial de les funcions de variable real sobre $\Re$:

$$A = \{f(x) \in \Re^{\Re} \,/\, f(x) = 0 \text{ si } x > 0\}$$
$$B = \{f(x) \in \Re^{\Re} \,/\, f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0\}$$

Demostreu que A i B són subespais vectorials d' $\Re^{\Re}$.

Problema P.7

Sigui *V* l'espai vectorial de les funcions reals de variable real sobre el cos dels reals. Donats tres vectors linealment independents $f(x), g(x), h(x) \in V$, determineu si els vectors resultants de sumar-los dos a dos $f(x)+g(x)$, $f(x) + h(x)$, $g(x) + h(x)$ també ho són.

SOLUCIÓ: Sí són L.I.

Problema P.8

Donat el subconjunt H d'R^4 definit per :

$$H = \{ (x + y,\ 2x - z,\ x + y + z,\ 0) \mid x, y, z \in R \}$$

Comproveu si és o no és un subespai vectorial de R^4. En el cas que ho sigui trobeu una base d'H i la seva dimensió.

SOLUCIÓ: H sí és subespai vectorial de R^4 i dim(H) = 3.

Problema P.9

A l'espai vectorial R^3 sobre R considerem dos subespais E_1 i E_2

$$E_1 = \langle (1,1,1),\ (1,-1,1)\rangle \text{ i } E_2 = \langle(1,2,0),(3,1,3)\rangle$$

a) Trobeu el conjunt de vectors que pertanyen a $E_1 \cap E_2$
b) Comproveu que és un subespai vectorial de R^3.
c) Quina és la dimensió del subespai $\{ E_1 \cap E_2 \}$?

SOLUCIÓ:

a) $\{(x,y,z) \in R^3 \,/\, x = z,\ x = 3y\}$
b) Només per ser intersecció de subespais sabem que és subespai. (Comproveu-ho)
c) $\mathrm{Dim}\{E_1 \cap E_2\} = 1$.

Problema P.10

Siguin W_1 i W_2 dos subespais vectorials de W tals que $W_1 \neq \{\bar{0}\}$, $W2 \neq \{\bar{0}\}$, $W_1 \neq W_2$.

Demostreu que $W_1 \cup W_2$ no és necessàriament un subespai vectorial.

Problema P.11

Sigui $C^3 = C \times C \times C = \{(z_1, z_2, z_3) / z_i \in C\}$

a) Trobar una base de C^3 sobre R.
b) Sigui el subconjunt M:

$$M = \{(z_1,z_2,z_3) \in C^3 / z_1 + p\, z_2 + q\, z_3 = 0\} \text{ on } p, q \in C.$$

Determineu si M és un subespai vectorial de l'espai vectorial C^3 sobre R.
c) Comprova si M és un subespai vectorial de l'e.v. C^3 sobre el cos C.
d) Trobeu una base de M subespai vectorial de l'e.v C^3 sobre el cos C.

SOLUCIÓ:
a) {(1,0,0),(j,0,0),(0,1,0),(0,j,0),(0,0,1),(0,0,j)}
b) Sí és subespai vectorial
c) Sí és subespai vectorial

Problema P.12

Donat el conjunt $C_2(x)$ dels polinomis de grau $\leq$ 2 de variable real i coeficients complexos.

a) Trobeu una base de l'espai vectorial $C_2(x)$ sobre R.
b) Trobeu una base de l'espai vectorial $C_2(x)$ sobre C.

SOLUCIÓ: a) $\{1, j, x, jx, x^2, jx^2\}$
b) $\{1, x, x^2\}$

Problema P.13

Sigui $P_2(x)$ l'espai vectorial dels polinomis de grau $\leq$ 2 amb coeficients reals i variable real sobre el cos commutatiu dels reals.

a) Sigui $E=\{1,x,x^2\}$ una base de $P_2(x)$; troba una altra base de l'espai E en la que figuri el vector $\{x^2+3\}$.
b) Si $F \subset P_2(x)$ i $F = \{p \in P_2(x) / p(0)=0\}$, demostreu que F és un subespai vectorial de $P_2(x)$.
c) Troba les matrius de canvi de base de E a $D = \{1,1+x,1+x+x^2\}$ i de D a E.
d) Trobeu les components del vector $p(x) = 2x^2 +3x+2$ en funció de la base D.

SOLUCIÓ:

a) $\{1, x, x^2 + 3\}$ b) $M_{E\to D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $M_{D\to E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) (-1, 1, 2)

Problema P.14

Sigui $P_3(x)$ l'espai vectorial dels polinomis de grau $\leq$ 3 amb coeficients reals i variable real sobre el cos commutatiu dels reals. Sigui $G \subset P_3(x)$, $G=\{(x^2+x+2),(x^3+3x)\}$.Trobeu una base de $P_3(x)$ completant el conjunt G.

SOLUCIÓ: Una possible solució és $\{x^2 + x + 2, x^3 + 3x, 1, x\}$

Problema P.15

Sigui R^4 e.v. sobre R digues quina relació existeix entre les components d'un vector qualsevol del subespai $\langle(0,1,2,3),(-1,1,2,-2),(-2,-1,1,2)\rangle$.

SOLUCIÓ: $\forall$ (x,y,z) / $5x - 7y + 5z - t = 0$.

Problema P.16

Siguin B_1,B_2 i B_c bases de l'espai vectorial d'R^3:

B_1={ (2,1,1) (3,1,0), (0,0,1)};
B_2={(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)};
B_c={(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}

a) Trobar la matriu de canvi de base de B_1 a B_2.
b) Expressa el vector (1,2,-1) en components respecte a la base B_1.
c) Expressa'l ara en base B_2 fent servir la matriu de canvi de base.
d) Finalment, torna a expressar-lo en base canònica (B_c).

SOLUCIÓ:

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) (5,-3,-6) c) (-1,3,-1) d) (1,2,-1)

PROBLEMES RESOLTS

Problema R.1

Comprovar si el conjunt F={(x,y,z)∈ R^3 / x+y+z=9} és o no és un subespai vectorial de R^3.

SOLUCIÓ:

Per comprovar si F és un subespai vectorial de R^3 cal demostrar que es compleix:

$$(1) \quad \forall \vec{x}, \vec{x}' \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{x}' \in F$$

$$(2) \quad \forall \alpha \in K, \vec{x} \in F \Rightarrow \alpha \cdot \vec{x} \in F$$

(1) Siguin $\vec{x}, \vec{x}' \in F$, i per tant, amb components que verifiquen $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ i $x'_1 + x'_2 + x'_3 = 9$:

Cal comprovar si $\vec{x} + \vec{x}' \in F$

$$\vec{x} + \vec{x}' = (x_1, x_2, x_3) + (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3)$$

$$x_1 + x'_1 + x_2 + x'_2 + x_3 + x'_3 = 18 \neq 9$$

Per tant $\vec{x} + \vec{x}' \notin F$ i el conjunt F={(x,y,z) R^3 / x+y+z=9} no és un subespai vectorial, ja que no compleix al menys una de les condicions necessàries.

Problema R.2

Quin valor ha de tenir ‘a’ per tal de que el vector (1,a,3) pertanyi al subespai engendrat per (1,1,0) i (2,1,2).

SOLUCIÓ:

Posarem el vector (1,a,3) com a combinació lineal de (1,1,0) i (2,1,2) i forçarem que el sistema sigui compatible:

$$(1, a, 3) = \lambda_1 (1,1,0) + \lambda_2 (2,1,2)$$

s’obté el següent sistema d’equacions lineals:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ 2\lambda_2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \det(A') = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2a - 1 \Rightarrow \text{ a = -1/2}$$

Si a = -1/2 rang(A) = rang(A') = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible $\Rightarrow$ $(1, -1/2, 3) \in < (1,1,0), (2,1,2) >$

Si a $\neq$ -1/2 rang(A) < rang(A') $\Rightarrow$ Sistema incompatible $\Rightarrow$ $(1, a, 3) \notin < (1,1,0), (2,1,2) >$

Problema R.3

Considereu el subespai definit com :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Re^5 \mid x_3 = 2x_1 + 3x_2 - x_4 ; x_5 = 2x_2 - 3x_1\}$$

Trobeu una base d'aquest subespai i completeu-la fins obtenir una base de $\Re^5$.

SOLUCIÓ:

$(x_1, x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_4, x_4, 2x_2 - 3x_1) = x_1 (1,0,2,0,-3) + x_2 (0,1,3,0,2) + x_4 (0,0,-1,1,0)$

Verifiquem que els vectors d'aquesta combinació lineal són linealment independents per tal de comprovar si son tots ells part d'una possible base. Ho fem a través del rang, comprovant si el menor de 3x3 de la matriu formada per les primeres 3 components dels tres vectors és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Per tant, una possible base de F és $\boxed{\{(1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 0 \;\; -3), (0 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 2), (0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 1 \;\; 0)\}}$

Per completar la base fins $\Re^5$, només ens caldria inserir dos vectors més independents, per poder aconseguir qualsevol valor per x_3 i per x_5 (les úniques components en què en F s'imposen condicions lineals).

$$\{(1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 0 \;\; -3), (0 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 2), (0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 1 \;\; 0), (0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0), (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1)\}$$

Podem comprovar com aquests cinc vectors son linealment independents, calculant el determinant de la matriu formada pels cinc vectors, o bé transformant la matriu per Gauss.

Problema R.4

Sigui F un subespai vectorial de l'espai vectorial C^3 sobre R.

$$F = \{(z_1, z_2, z_3) \in C^3 \mid z_1 = a + b, \quad z_2 = a + b + ja + jc, \quad z_3 = -a - b - jb + jc\}$$

a) Trobeu un sistema de generadors del subespai F.

b) El vector (0,1+2j,-1+j) pertany a F?

SOLUCIÓ:

a) Si descomponem el vector genèric de F en una combinació lineal:

$$(z_1, z_2, z_3) = (a + b, \; a + b + ja + jc, -a - b - jb + jc) = a\,(1, 1 + j, -1) + b(1, 1, -1 - j) + c(0, j, j)$$

Trobem el sistema de generadors del subespai F: $F = < (1, 1 + \mathrm{j}, -1), (1, 1, -1 - \mathrm{j}), (0, \mathrm{j}, \mathrm{j}) >$

c) Per comprovar si el vector (0,1+2j,-1+j) pertany a F, cal verificar si es pot generar a partir del sistema calculat en el primer apartat:

$$(0,1+2j,-1+j)=a\,(1,1+j,-1)+b(1,1,-1-j)+c(0,j,j)$$

S'obté el sistema d'equacions: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+j & 1 & j \\ -1 & -1-j & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1+2j \\ -1+j \end{pmatrix}$

És un sistema incompatible, ja que det(A) = 0 i rang(A) = 2 < rang(A') = 3, per tant, no pertany a *F.*

Problema R.5

Sigui M_{2x2} el conjunt de les matrius quadrades de dues files i dues columnes amb coeficients complexes:

a) Demostrar que M_{2x2} és e.v. sobre $\Re$.
b) Trobar una base d' M_{2x2} sobre $\Re$ i la dimensió.
c) Trobar una base d' M_{2x2} sobre C.
d) Sigui $F \subset M_{2x2}$, $F = \{ A = (a_{ij}) \in M_{2x2} \,/\, a_{11} + a_{12} = a_{22} + a_{21} \}$ Demostrar que F és s.v d' M_{2x2}. Trobar una base la dimensió de F, considerant M_{2x2} e.v. sobre $\Re$.
e) Sigui $G = \langle A,B,C \rangle$ a on:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & j \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ j & 2-j \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{pmatrix}$$

Trobar l'expressió general d'una matriu de G.

SOLUCIÓ:

a) Seguint la definició de subespai vectorial trobem que es compleix la definició, i com tot s.v és també un e.v amb les mateixes operacions interna i externa definides: sí complirà que és e.v.

$$\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mu a' & \mu b' \\ \mu c' & \mu d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda a+\mu a' & \lambda b+\mu b' \\ \lambda c+\mu c' & \lambda d+\mu d' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Sí, és espai vectorial}}$$

b) Una possible base és la base canònica sobre el reals.

$$\begin{pmatrix} a_{11}+jb_{11} & a_{12}+jb_{12} \\ a_{21}+jb_{21} & a_{22}+jb_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b_{11}\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b_{12}\begin{pmatrix} 0 & j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+b_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$$

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & j \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}\right\} \qquad \dim M_{2x2}=8 \ \text{(sobre } \Re\text{)}$$

Noteu que pel fet de treballar sobre el cos dels reals (els coeficients de la combinació lineal han de ser reals), cal generar de forma independent la part real i la part imaginària de l'espai vectorial, cosa que provoca que es dobli la dimensió d'aquest espai.

c) Treballem amb coeficients complexes i busquem la base sobre el mateix cos dels C:

$$(a_{11}+jb_{11})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+(a_{12}+jb_{12})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+(a_{21}+jb_{21})\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+(a_{22}+jb_{22})\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim M_{2x2}=4 \ \text{(sobre C)}$$

d) Cal demostrar:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \ A,B\in F \\ \forall \ \lambda,\beta\in\Re \end{array}\right\}\Rightarrow \lambda A+\beta B\in F$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in F\Rightarrow a_{11}+a_{12}=a_{21}+a_{22}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\in F\Rightarrow b_{11}+b_{12}=b_{21}+b_{22}$$

$$\lambda A+\beta B=\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\beta b_{11} & \lambda a_{12}+\beta b_{12} \\ \lambda a_{21}+\beta b_{21} & \lambda a_{22}+\beta b_{22} \end{pmatrix}$$

Cal demostrar si

$$(\lambda a_{11}+\beta b_{11})+(\lambda a_{12}+\beta b_{12})=(\lambda a_{21}+\beta b_{21})+(\lambda a_{22}+\beta b_{22})$$

$$(\lambda a_{11}+\beta b_{11})+(\lambda a_{12}+\beta b_{12})=\lambda(a_{11}+a_{12})+\beta(b_{11}+b_{12})=\lambda(a_{21}+a_{22})+\beta(b_{21}+b_{22})=$$
$$=(\lambda a_{21}+\beta b_{21})+(\lambda a_{22}+\beta b_{22})$$

Per tant, *F* és subespai vectorial

e) Posem una matriu resultant com a combinació lineal de A,B i C:

$$G=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & j \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ j & 2-j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\forall \quad A \in G$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 & j \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ j & 2-j \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+b(1+j) & c+jd \\ -d+jc & (b+2c)-j(c+b) \end{pmatrix}$$

Problema R.6

Sigui $M_{2\times 2}$ l'espai vectorial de les matrius de 2 files i 2 columnes de coeficients reals sobre el cos commutatiu dels reals.

a) Sigui $F=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \;/\; a+b+c+d=k \quad i \quad a+c=b+d \right\}$, essent k un nombre real, trobar els valors de k perquè F sigui subespai vectorial de $M_{2\times 2}$.

b) Sigui $G=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \;/\; a+d=c+b \quad i \quad a=2b \right\}$, trobar una base i la dimensió de G.

c) Sigui $H=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \;/\; a+b=0 \right\}$ un subespai vectorial de $M_{2\times 2}$, completa el conjunt $U=\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ fins a obtenir una base de H.

d) Siguin 2 subespais vectorials de $M_{2\times 2}$ definits per:

$$V_1=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V_2=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Trobar la relació entre els coeficients d'una matriu $A \in V_1 \cap V_2$.
Trobar una base de $V_1 \cap V_2$. Justificar si $V_1 \cup V_2$ és subespai vectorial de $M_{2\times 2}$ en aquest cas concret.

SOLUCIÓ:

a) Tot subespai vectorial F d'un espai vectorial E conté l'element neutre de l'espai E.
Per tant, si F és subespai vectorial de $M_{2\times 2}$, F ha de contenir l'element neutre:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F \quad \Rightarrow \quad 0+0+0+0=k \quad \Leftrightarrow \quad k=0$$

Queda demostrat que per $k \neq 0$ *F* no és subespai vectorial, ara cal demostrar que per *k*=0 *F* és subespai vectorial

b) Base de *G* = $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, i dim(G) = 2.

c) Primer cal calcular una base i la dimensió d'*H*

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} / a + b = 0 \right\} \qquad a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

base d'*H* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ i dim(*H*) = 3 (ja que son L.I. al tenir cadascuna de les matrius una component diferent de zero a on la resta sí que son zero).

Per completar el conjunt $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ fins a obtenir una base de *H*, cal afegir una matriu d'*H* linealment independent al conjunt U. Per exemple, la primera matriu de la base anterior compleix les dues condicions (pertany a H i és L.I. del conjunt U), per tant:

Base d'*H* $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

d) Les matrius generadores de V_1 i V_2 són linealment dependents. Per tant, generen el mateix subespai, és a dir: $V_1 = V_2 = V_1 \cap V_2 = V_1 \cup V_2$. En aquest cas concret doncs, la unió sí que és subespai vectorial.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V_1 \cap V_2 \quad \Leftrightarrow \quad b = c = 0 \quad \Rightarrow \quad Base\{V_1 \cap V_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Problema R.7

Sigui E un espai vectorial sobre R. Considerem B_E = $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ una base de E. Considerem $\vec{e}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ i $\vec{e}_2 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

a) Comprova que C_E = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ és una base de E.
b) Calcula la matriu de canvi de base de B_E a C_E.
c) Calcula les components del vector $\vec{u} = -3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$ referides a la base C_E.

SOLUCIÓ:

a) B_E = $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ base de E $\Rightarrow \dim E = 2$

Demostrem primer que $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ són linealment independents

$$\beta_1\,\vec{e}_1+\beta_2\,\vec{e}_2=\vec{0}\quad\Rightarrow\quad\beta_1=\beta_2=0\quad ?$$

$$\beta_1\,\vec{e}_1+\beta_2\,\vec{e}_2=\beta_1\,(2\,\vec{a}_1-\vec{a}_2)+\beta_2\,(-\vec{a}_1+\vec{a}_2)=(2\,\beta_1-\beta_2)\vec{a}_1+(\beta_2-\beta_1)\vec{a}_2=\vec{0}$$

com $\{\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\}$ és un conjunt L.I., la única solució és

$$\left.\begin{array}{l}(2\,\beta_1-\beta_2)=0\\(\beta_2-\beta_1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\beta_1=\beta_2=0\,.$$

$$\left.\begin{array}{l}C_E=\{\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\}\text{és un conjunt l.i.}\\ \dim E=2\end{array}\right\}\Rightarrow C_E\ \text{ és una base de E.}$$

b) Hem d'expressar els vectors de C_E com a combinació lineal dels vectors de B_E. Una opció és invertint la matriu de canvi de base de C_E a B_E, que és directa d'expressar a partir de les equacions de l'enunciat:

$$M_{B_EC_E}=\left(M_{C_EB_E}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

c) De l'enunciat deduïm directament que les components de $\vec{u}$ respecte a B_E són:

$$\vec{u}\big|_{B_E}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$$

Per tant, cal fer un canvi de base de B_E a C_E utilitzant la matriu trobada a l'apartat anterior:

$$\vec{u}\big|_{C_E}=M_{B_EC_E}\,\vec{u}\big|_{B_E}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Problema R.8

Sigui V l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients i variable real de grau ≤ 3, definim un subconjunt de V de la forma següent:

$$W_1=\left\{p(x)\in V\ /\ p(1)=0\ \ i\ \left.\frac{d\,p(x)}{d\,x}\right|_{x=1}=0\right\}$$

a) Demostra si W_1 és o no és subespai vectorial de V.
b) Troba una base i la dimensió de W_1.
c) Dóna una base de W_1 que contingui el polinomi $e_1(x)=2-4\,x+2\,x^2$.

SOLUCIÓ:

a) La condició d'un subespai vectorial s'ha de demostrar mitjançant dos elements genèrics *p(x)* i *g(x)* de W_1 i dues constants escalars arbitràries α i β reals.

$$r(x)=\alpha\, p(x)+\beta\, g(x) \in W_1 \quad \Leftrightarrow \quad r(1)=0 \quad i \quad \left.\frac{d\,r(x)}{dx}\right|_{x=1}=0$$

Comprovem les dues condicions del subespai W_1 per a un element genèric *r(x)* obtingut com a combinació lineal d'altres dos:

1.- $r(1)=\alpha\, p(1)+\beta\, g(1)=\alpha 0+\beta 0=0$

2.- $\left.\frac{d\,r(x)}{dx}\right|_{x=1}=\left.\frac{d\,(\alpha\, p(x)+\beta\, g(x))}{dx}\right|_{x=1}=\alpha\left.\frac{d\,p(x)}{dx}\right|_{x=1}+\beta\left.\frac{d\,g(x)}{dx}\right|_{x=1}=\alpha 0+\beta 0=0$

Per tant, queda demostrat que W_1 és subespai vectorial de *V.*

b) Per trobar una base hem de partir de l'expressió d'un element genèric de W_1.

$$\forall\, p(x)\in W_1 \quad p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \quad , \quad a_0,a_1,a_2,a_3\in\Re \quad ,$$

$$p(1)=0=a_0+a_1+a_2+a_3 \qquad [1]$$

$$\left.\frac{d\,p(x)}{dx}\right|_{x=1}=0=\left.\left(a_1+2a_2x+3a_3x^2\right)\right|_{x=1}=a_1+2a_2+3a_3=0 \qquad [2]$$

Les equacions [1] i [2] formen un sistema d'equacions lineals compatible indeterminat, la solució del qual pot expressar-se de la forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2a_2-3a_3 \\ a_0 &= a_2+2a_3 \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \forall p(x)\in W_1 \quad p(x) &= (a_2+2a_3)+(-2a_2-3a_3)x+a_2x+a_3x^2 = \\ &= a_2\left(1-2x+x^2\right)+a_3\left(2-3x+x^3\right) \qquad \forall a_2,a_3\in\Re \end{aligned}$$

és a dir, qualsevol polinomi de W_1 és combinació lineal de 2 polinomis, i al ser aquests dos linealment independents també són una base de W_1,

$$Base\{W_1\}=\left\{1-2x+x^2, 2-3x+x^3\right\} \quad \Rightarrow \quad \dim\{W_1\}=2$$

NOTA: Es pot comprovar que aquests dos polinomis compleixen les dues condicions imposades dins de W_1.

c) Perquè un conjunt *B* format per dos polinomis $e_1(x)$ i $e_2(x)$ de *V* sigui base de W_1 s'han de complir dues condicions:

1.- *B* ha de ser un conjunt linealment independent.

2.- $e_1(x), e_2(x)\in W_1$

Una possible base és prendre $e_1(x)=2-4x+2x^2$ i com a $e_2(x)$ qualsevol vector de la base de l'apartat *b)* que sigui linealment independent amb $e_1(x)$. Com resulta que $e_1(x)$ és dues vegades el primer vector de la base calculada a l'apartat b), podem escollir com a segon el segon vector de la mateixa base anterior, és a dir, $e_2(x)=2-3x+x^3$.

Problema R.9

En $\Re^4$, espai vectorial sobre $\Re$,

a) Siguin e_1, e_2 , e_3 i e_4 vectors linealment independents a $\Re^4$. Demostreu, **aplicant la definició d'independència lineal**,que els vectors $u_1 = e_1$,$u_2 = e_2 + e_3$, $u_3 = e_2 - e_4$ i $u_4 = e_4$ també són linealment independents.

b) Sigui , doncs, E = {e_1, e_2, e_3, e_4} una base de $\Re^4$ i 'v' un vector que, expressat en aquesta base E, té per components $v|_E =$ (1,2,1,0). Expressa v en components referides a la base U = {u_1, u_2 , u_3, u_4} (sense calcular la matriu de canvi de base).

c) Comproveu si el conjunt H = { (x, y, z, t) | y = αx +z, i t =0 } és subespai vectorial de $\Re^4$, on 'α' és un enter qualsevol. Troba la dimensió i una base de H per a un valor qualsevol d'α.

SOLUCIÓ:

a) Per ser e_1, e_2, e_3, e_4 linealment independents, sabem, per la definició, que s'ha de complir la següent condició:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Ara, doncs, volem veure que també es compleix:

$$\mu_1 u_1+\mu_2 u_2+\mu_3 u_3+\mu_4 u_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$$

Per la definició dels u_i tenim que $\mu_1 u_1+\mu_2 u_2+\mu_3 u_3+\mu_4 u_4 = 0$ és equivalent a :

$$\mu_1 e_1+\mu_2(e_2+e_3)+\mu_3(e_2-e_4)+\mu_4 e_4 = 0$$

Agrupant els termes adequadament:

$$\mu_1 e_1 + (\mu_2 + \mu_3)e_2 + \mu_2 e_3 + (\mu_4 - \mu_3)e_4 = 0$$

i com que sabem que e_1, e_2, e_3, e_4 linealment independents, tenim que es complirà amb tota seguretat el següent sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = 0 \\ &\mu_2 + \mu_3 = 0 \\ &\mu_2 = 0 \\ &\mu_4 - \mu_3 = 0 \end{aligned}$$

I resolent el sistema obtenim, com a única solució:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$$

Per tant, u_1, u_2, u_3, u_4 són linealment independents.

b) Sabem que v = (1, 2, 1, 0) en la base E , per tant podem escriure v com la combinació lineal:

$$v = 1e_1 + 2e_2 + 1e_3 + 0e_4 \quad (1)$$

Volem trobar v expressat en la base U, per tant, volem a, b, c, d tals que:

$$\begin{aligned} v &= au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 && \text{(per la definició dels } u_i\text{)} \\ &= ae_1 + b(e_2 + e_3) + c(e_2 - e_4) + de_4 && \text{(agrupant de forma convenient)} \\ &= ae_1 + (b + c)e_2 + be_3 + (d - c)e_4 && (2) \end{aligned}$$

Igualem ara els coeficients de les expressions (1) i (2) de v i obtenim el sistema:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b + c &= 2 \\ b &= 1 \\ d - c &= 0 \end{aligned}$$

I resolent, obtenim: a = b = c = d = 1. Per tant, $v|_U = (1, 1, 1, 1)$ (en la base U).

c) Sigui el conjunt $H = \{ (x, y, z, t) \mid y = \alpha x + z \text{ i } t = 0 \}$. Volem comprovar que és subespai vectorial, per tant, que compleix:

$$\text{(i)} \left.\begin{array}{l} u, v \in H \\ \lambda, \mu \in \Re \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda u + \mu v \in H$$

Vegem-ho:

Sigui $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ tal que $u_2 = \alpha u_1 + u_3$ i $u_4 = 0$
$v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ tal que $v_2 = \alpha v_1 + v_3$ i $v_4 = 0$

per tant, podem escriure u i v :

$$u = (u_1, \alpha u_1 + u_3, u_3, 0)$$
$$v = (v_1, \alpha v_1 + v_3, v_3, 0)$$

Calculem, ara:

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v &= (\lambda u_1 + \mu v_1, \alpha\lambda u_1 + \lambda u_3 + \alpha\mu v_1 + \mu v_3, \lambda u_3 + \mu v_3, 0) = \\ &= (\lambda u_1 + \mu v_1, \alpha(\lambda u_1 + \mu v_1) + \lambda u_3 + \mu v_3, \lambda u_3 + \mu v_3, 0) \end{aligned}$$

Per veure més clarament que és un element de H substituïm per :

$a = \lambda u_1 + \mu v_1$

$b = \lambda u_3 + \mu v_3$

i obtenim :

$$\lambda u + \mu v = (a, \alpha a + b, b, 0) \in H$$

Per tant, H és subespai vectorial de $\Re^4$

Trobem ara la dimensió i una base de H. Per a tal fi, considerem l'expressió general d'un vector de H:

$$(a, \alpha a + b, b, 0) = a(1, \alpha, 0, 0) + b(0, 1, 1, 0)$$

Tenim que $(1, \alpha, 0, 0)$ i $(0, 1, 1, 0)$ generen, però cal comprovar encara que són L.I. Ho farem aplicant la definició:

$$\lambda_1(1, \alpha, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 1, 0) = \vec{0}$$

$$(\lambda_1, \alpha\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, 0) = \vec{0}$$

I obtenim el sistema:

$\lambda_1 = 0$

$\alpha\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$\lambda_2 = 0$

que té com a única solució: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Així comprovem que són dos vectors L.I.

Per tant, una base de H és $\{(1, \alpha, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\}$, i la dimensió de H és 2.

Problema R.10

Sigui F un subespai vectorial de l'espai vectorial de matrius de 2x2 (espai vectorial sobre R). Siguin B_1 i B_2 bases d'F:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, trobar $A|_{B1}$.

b) Calcula la matriu de canvi de base de la base 1 a la base 2.

c) Sabent que una matriu *B* expressada en components referides a la base 2 és $B|_{B2} = (3,4,-2)$. Quina és la matriu *B*?

SOLUCIÓ:

a) Expressem A com a combinació lineal dels elements de B_1

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Obtenim el sistema:

$5 = 3a + b + 2c$
$3 = a - b$
$0 = c$ I resolent-lo obtenim : $a=2$, $b=-1$, $c=0$
$1 = a + b$

Per tant $A|_{B1}$ = (2, -1, 0) (A en la base B_1).

b) Per calcular la matriu de canvi de base, expressem els vectors de B_1 en la base B_2 i solucionem els sistemes d'equacions que ens queden:

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a=1, b=1, c=0$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=d\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow d=1, e=-1, f=0$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=g\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow g=0, h=1, i=1$$

Així, la matriu de canvi de base és:

$$M_{B1B2}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c) Obtenim la matriu B com la combinació lineal dels elements de B_2 a partir de les seves components referides a aquesta mateixa base:

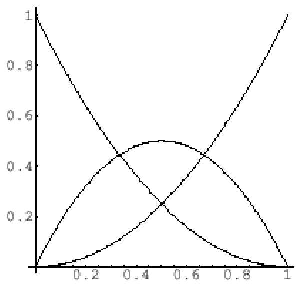
$$B=3\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Problema R.11

Els dissenyadors de peces de cotxes o d'avions, utilitzen freqüentment un conjunt de polinomis anomenat "***polinomis de Bernstein***". Aquests polinomis convenientment combinats, donen lloc a corbes suaus que s'utilitzen per a crear peces mecàniques per ordinador.

	Per exemple aquí es mostra un model de cotxe esportiu dissenyat per ordinador. S'observa com totes les peces del xassís són molt suaus.

Els polinomis de Bernstein són els següents (dibuixats a l'esquerra i expressats a la dreta):

	$B=\begin{Bmatrix} p_1(x)=1-2x+x^2 \\ p_2(x)=2x-2x^2 \\ p_3(x)=x^2 \end{Bmatrix}$

Són, per tant, una base de funcions de l'espai vectorial $P_2(x)$ amb coeficients reals i cos commutatiu $\Re$.

a) Quines són les components del polinomi $p(x)=5x+10x^2$ respecte de B ?

b) La següent matriu M_c és la matriu de canvi de base, de la base B a una altra base anomenada D:

$$M_c=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Deduïu quins són els polinomis que integren la base D.

c) Una altra família de polinomis semblants als de Bernstein és el ***"conjunt de Lagrange"***:

$$E=\begin{Bmatrix} p_1(x)=2(x-0.5)(x-1) \\ p_2(x)=-ax(x-1) \\ p_3(x)=2x(x-0.5) \end{Bmatrix}$$

Quin valor ha de tenir ***"a"*** per a que siguin base?

SOLUCIÓ:

a) Volem expressar el polinomi p(x) en la base B per tant volem trobar a , b ,c tals que la següent igualtat sigui certa:

$$p(x) = 5x + 10x^2 = a\,(1 - 2x + x^2) + b\,(2x - 2x^2) + c\,x^2$$
$$= a + (2b - 2a)\,x + (a - 2b + c)\,x^2$$

Igualant coeficients obtindrem un sistema i, resolent, els valors de a , b , c:

$$a = 0$$
$$2b - 2a = 5$$
$$a - 2b + c = 10$$

Obtenim: $a = 0$, $b = 5/2$, $c = 15$.

Així, $p(x)|_B = (0 , 5/2, 15)$ (expressat en la base B).

b) Anomenem q_1, q_2, q_3 als polinomis que formen la base D. Per la construcció de la matriu de canvi de base, tenim que :

$$1 - 2x + x^2 = 1q_1 - 2q_2 - 2q_3$$
$$2x - 2x^2 = 2q_2 + q_3$$
$$x^2 = q_3$$

Resolent aquest sistema obtenim els tres polinomis:

$$q_1 = 1 , \quad q_2 = x - 3/2x^2 , \quad q_3 = x^2$$

Per tant la base és D= { 1, $x-3/2x^2$, x^2 }.

c) Sabem que $P_2(x)$ té dimensió 3 , per tant, si veiem per quin valor de a els tres polinomis són L.I., ja podrem afirmar que són base. Usem la definició d'independència lineal:

$$\lambda_1\,(2(x-1/2)(x-1)) + \lambda_2\,(-ax(x-1)) + \lambda_3(2x(x-1/2)) = 0$$

Operant i reagrupant els termes adequadament obtenim el polinomi:

$$x^2\,(2\lambda_1 - a\,\lambda_2 + 2\lambda_3) + x\,(-3\lambda_1 + a\lambda_2 - \lambda_3) + \lambda_1 = 0$$

Igualem els coeficients a 0 i obtenim un sistema que té per matriu associada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a & 2 \\ -3 & a & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Volem veure quan el sistema és compatible determinat perquè llavors la solució $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (que existeix per ser homogeni el sistema) serà única.

$$\det(A) = -a = 0$$

Aleshores, si $a \neq 0$ el rang(A) = 3 i rang(A') = 3 (no oblidem que és un sistema homogeni) i per tant el sistema és Compatible Determinat.

Així, si $a \neq 0$ els tres polinomis formen una base de $P_2(x)$.

Problema R.12

Sigui $P_2[x]$ l'espai vectorial dels polinomis de grau 2 amb coeficients reals. Siguin:

$$F = \{a + bx + cx^2 \in P_2[x] \mid a - b = 0\} \text{ i } G = \langle 1 + 2x - x^2, x + x^2, 1 + x - 2x^2 \rangle$$

dos subespais vectorials de $P_2[x]$.

Calcular:

a) Una base i la dimensió de F.
b) Una base i la dimensió de G.
c) Una base i la dimensió de $F \cap G$.

SOLUCIÓ:

a) L'enunciat ja ens dona la condició dels vectors de F:

$$a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b \quad \Rightarrow \quad a + ax + cx^2 \text{ forma dels vectors}$$

Per tant, la base serà: $\{1 + x, x^2\}$ (generen F i són linealment independents). I la dimensió és 2.

b) Ens donen un conjunt de vectors generador de G. Falta comprovar que siguin linealment independents:

$$\lambda_1(1 + 2x - x^2) + \lambda_2(x + x^2) + \lambda_3(1 + x - 2x^2) = 0$$
$$on \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad i \quad \text{només } 0 \quad \Leftrightarrow l.i. \quad \Leftrightarrow S.C.D.$$

La matriu del sistema d'equacions resultant és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Per tant, per a què sigui un S.C.D., hauria de ser de rang igual a 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{no són linealment independents.}$$

Com es pot observar, els dos primers ho són i per tant podem dir que una base de G serà:

$$\{1 + 2x - x^2, x + x^2\} \text{ . dim(G) = 2}$$

c) Base i dimensió de $F \cap G$. Els vectors que pertanyin a la intersecció, hauran de complir la condició per a pertànyer a tots dos subespais. La condició de pertinença al subespai F ja la sabem: $a - b = 0$. Falta trobar la condició de pertinença a G, que ho resoldrem imposant que un vector genèric de $P_2(x)$ sigui combinació lineal de la base trobada a l'apartat anterior:

$$a + bx + cx^2 = \lambda_1(1 + 2x - x^2) + \lambda_2(x + x^2)$$

El sistema ha de ser un compatible (i de fet, determinat, perquè els dos vectors són base de G). Per tant: rang(A) = rang(A') = 2. Com que rang(A) = 2 això implica que hem de forçar que rang(A') = 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ -1 & 1 & c \end{vmatrix} = 0 = \ldots = 3a - b - c = 0 \text{ (condició per pertànyer a G)}$$

Per tant, com que els vectors de la intersecció han de complir les dues condicions :

$$\left.\begin{array}{l} a - b = 0 \\ 3a - b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a = b \\ c = -2a \end{array} \Rightarrow \text{els polinomis seran de la forma: } a + ax - 2ax^2$$

Per tant, una possible base seria: $Base\ F \cap G = \{1 + x - 2x^2\}$. dim($F \cap G$) = 1.

Problema R.13

Sigui M_{2x2} l'espai vectorial sobre $\Re$ de les matrius de dues files i dues columnes i siguin:

$$F = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} > \quad \text{subespai vectorial de } M_{2x2}$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad a \in \Re$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{base de } M_{2x2}$$

a) Troba una base i la dimensió de *F*.
b) Valors de *a* pels quals B_1 és base de M_{2x2}.

Per *a* = 1 resol els següents apartats:

c) Calcula la matriu canvi de base de B_2 a B_1.
d) Sigui $A \in M_{2x2}$ amb components respecte B_1: $A\big|_{B_1} = (-2,-7,8,-1)$. Troba les components de *A* respecte la base B_2. Pots afirmar que $A \in F$? (justifica la resposta).

SOLUCIÓ:

a) Sabem que són generadors. Verifiquem si són linealment independents fent ús de la definició:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -0\end{pmatrix}$$

Volem veure que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ és la única solució. Escrivim el sistema resultant :

$$\begin{aligned}&\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_4 = 0\\ &\lambda_2 + \lambda_3 + 5\lambda_4 = 0\\ &\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0\end{aligned}$$

que escrit de forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0\end{array}\right)$$

Si calculem ara el rang de la matriu del sistema i de la matriu ampliada tenim:

rang(A) = rang(A') = 2

Així el sistema és Compatible Indeterminat, per tant té infinites solucions . Així les quatre matrius són Linealment Dependents. A més, amb el càlcul del rang sabem que tenim dues matrius L.I. Prenem doncs, dues matrius L.I. i sabem que

$$F=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Aquestes dues darreres matrius són clarament L.I., ja que l'element a_{21} és nul per la primera i no nul per la segona. Així, ja tenim una base de F i la dimensió:

$$B=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\rangle \quad \dim(F)=2$$

b) Els elements de B_1 han de ser generadors i L.I. Per tant, donat que son quatre matrius, que coincideix amb la dimensió de l'espai vectorial M_{2x2}, imposem només la condició d'independència lineal tot fent que el següent sistema homogeni sigui compatible determinat:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\lambda_3\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 1\end{pmatrix}\lambda_4\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Si escrivim de forma matricial el sistema tenim:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Imposem el determinant del sistema sigui zero per identificar quan el sistema és compatible indeterminat, i en cas contrari serà determinat:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2a + 1$$

Així, per $a \neq ½$ el $\det(A) \neq 0$, per tant el sistema és Compatible Determinat i la única solució és $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Aleshores, en conclusió, el conjunt B_1 és L.I. i per tant, és base també, per $a \neq ½$. Recordem que la dimensió d'un e.v. és el màxim nº de vectors linealment independents, i que qualsevol conjunt de vectors L.I. d'un espai vectorial de dimensió *n,* i que estigui format per *n* vectors L.I. serà un generador, i per tant també base, d'aquest e.v.

c) Hem d'expressar els vectors de la base B_2 en components referides a la base B_1:, i donat que es tracta de 4 sistemes d'equacions amb la mateixa matriu de coeficients podem realitzar la resolució de forma conjunta per Gauss-Jordan o calculant una única inversa per simplificar. No obstant, en aquest cas els sistemes són força trivials de resoldre:

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\lambda_4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores, $\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{B_1} = (0,1,0,0)$.

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\lambda_4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aleshores, $\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right|_{B_1} = (-1,0,1,0)$.

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\lambda_4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores, $\left.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{B_1} = (0,1,0,1)$.

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\lambda_4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores, $\left.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|_{B_1} = (0,0,1,0)$.

Així , la matriu de canvi de base queda:

$$C_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Usarem la matriu de canvi de base inversa a l'anterior, és a dir $C_{B_1B_2} = C_{B_2B_1}^{-1}$:

$$A|_{B_2} = C_{B_1B_2}A|_{B_1} = C_{B_2B_1}^{-1}A|_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Per veure si A pertany a F , vegem primer qui és A en components respecte de la base canònica de matrius de 2x2:

$$A = (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-7)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Ara, ens preguntem, podem trobar *a* i *b* tals que aquesta matriu es pugui expressar a partir d'una combinació de la base de F, és a dir:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Sí, pels valors *a* = -7 i *b* = 6, A és combinació lineal de la base de F per tant A $\in$ F.