Funciones básicas

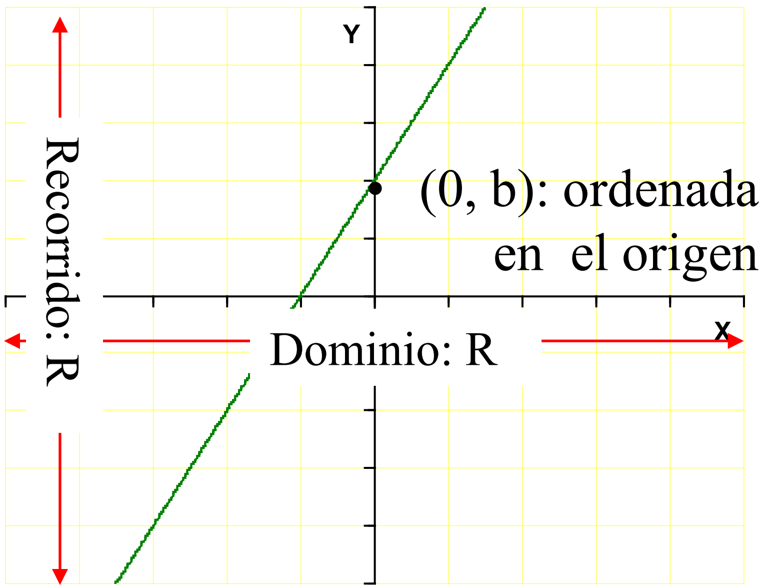
Cálculo

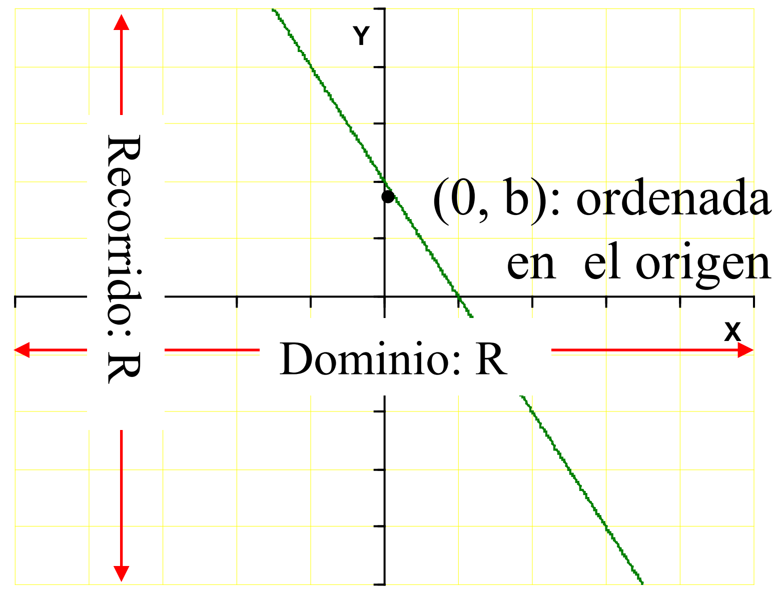
Curso 2021-22

laSalle ENG
Universitat Ramon Llull

Ecuación de la recta

Las funciones de la forma $y = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ se llaman **funciones lineales.**





$f(x) = ax + b,\ a > 0$

$$\lim_{x \to \infty} (ax + b) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (ax + b) = -\infty$$

$f(x) = ax + b,\ a < 0$

$$\lim_{x \to \infty} (ax + b) = -\infty$$

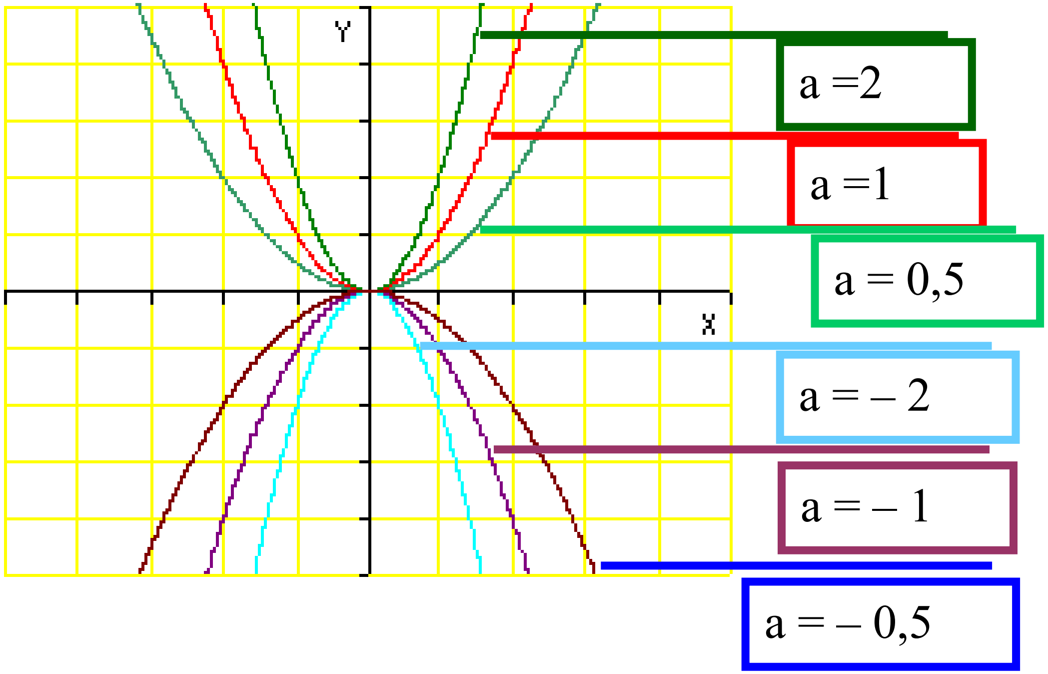
$$\lim_{x \to -\infty} (ax + b) = \infty$$

Funciones cuadráticas

Funciones $y = ax^2$ para diferentes valores de a

- Son parábolas
- Dominio: R
- Si $a > 0$: Recorrido = $[0, \infty)$
- Si $a < 0$: Recorrido = $(-\infty, 0]$

Son funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, $b, c \in R$



Funciones cuadráticas

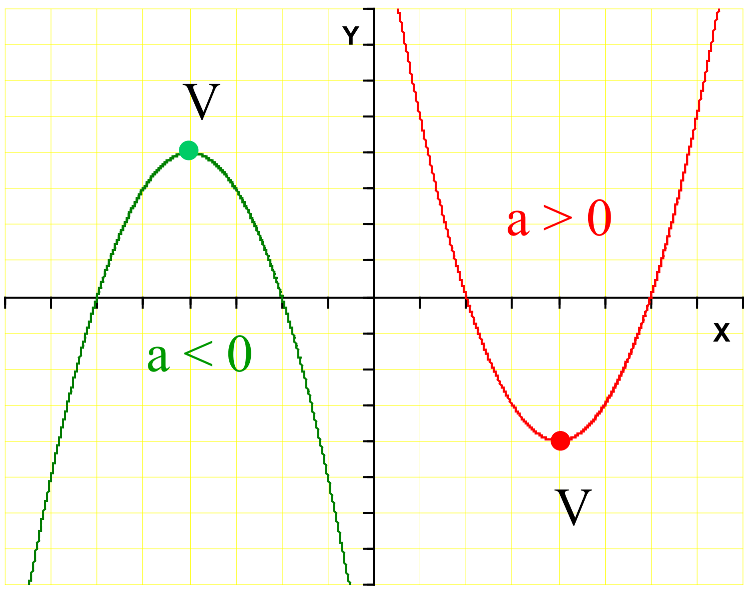
$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ es una parábola

- Como $f(x) = \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$

- El vértice está en $V = \left(-\frac{b}{2a}, \ c - \frac{b^2}{4a}\right)$. Además $\begin{cases} \text{Si } a > 0 \text{ abierta hacia arriba} \\ \text{Si } a < 0 \text{ abierta hacia abajo} \end{cases}$

$$\lim_{x \to \infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$$



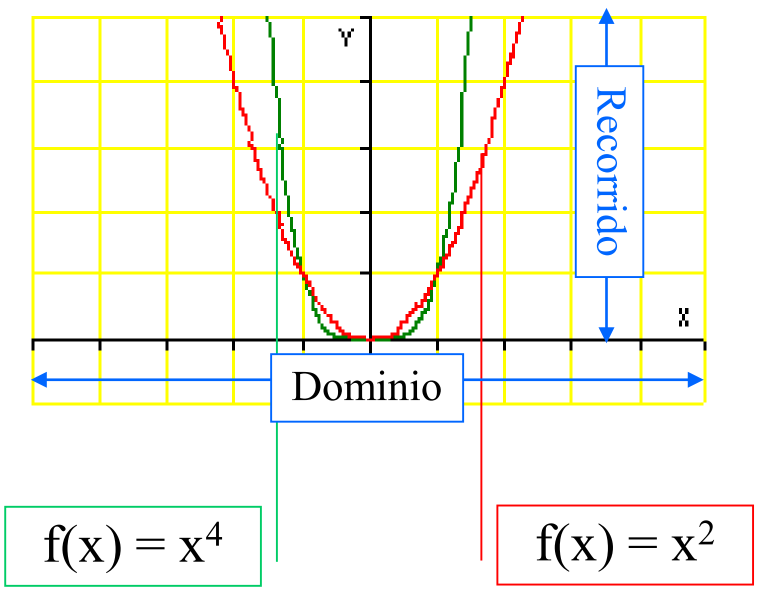
$$\lim_{x \to \infty} (ax^2 + bx + c) = \infty$$

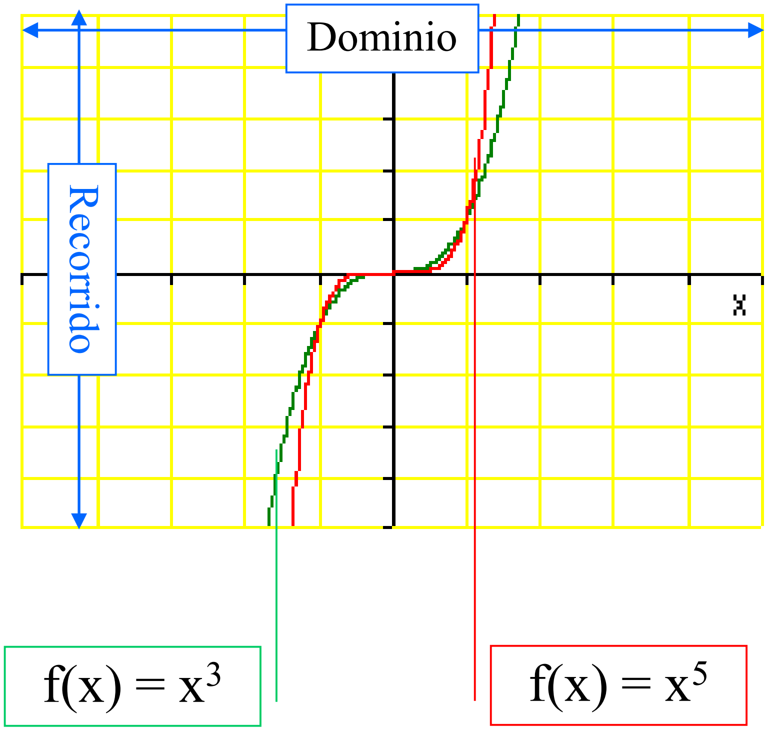
$$\lim_{x \to -\infty} (ax^2 + bx + c) = \infty$$

Funciones polinómicas

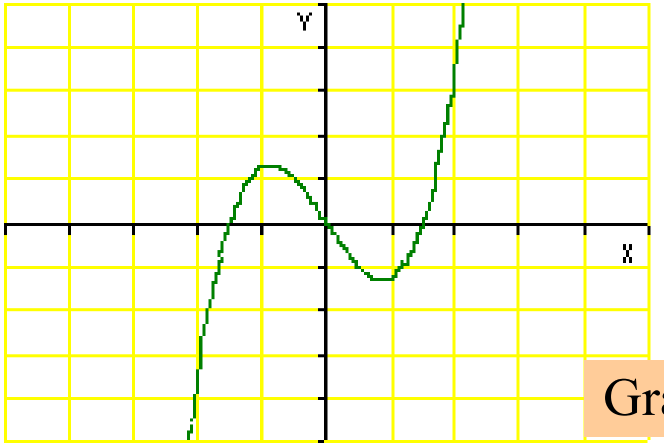
Se llama función polinómica a las funciones $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_o$ donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_o$ son números reales, n es un número natural, y $a_n \neq 0$. En este caso se dice que tenemos una función polinómica de grado n

Las funciones $f(x) = x^n$ para n = 1, 2, 3, ...

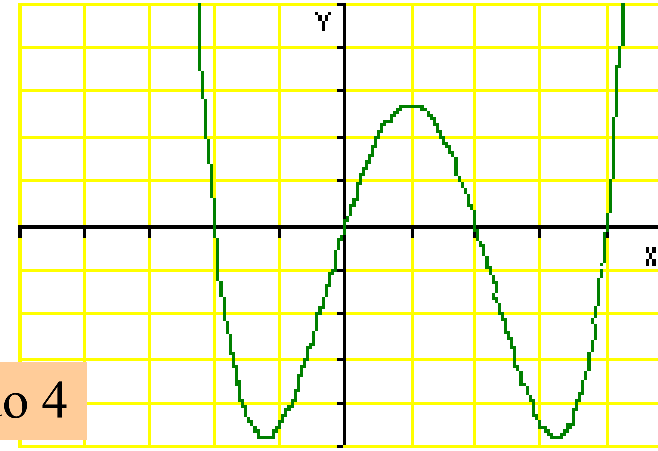




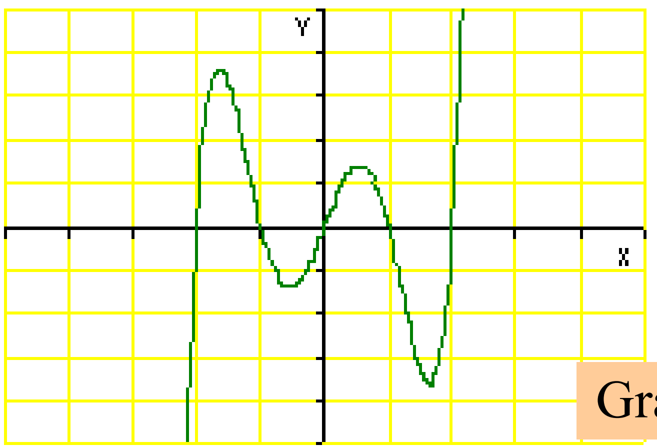
Funciones polinómicas



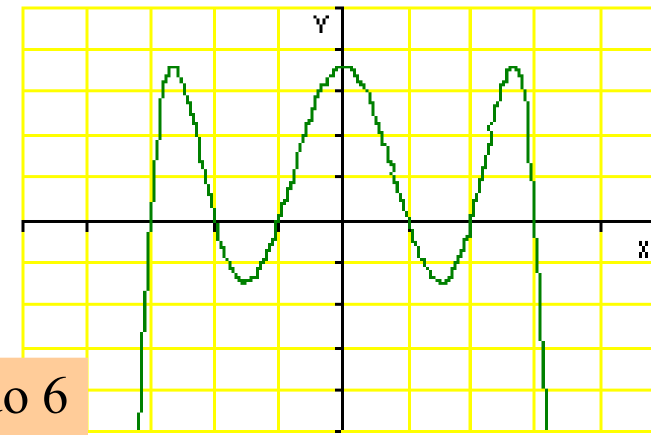
Grado 3



Grado 4



Grado 5



Grado 6

n par

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty \text{ si } a_n > 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty \text{ si } a_n < 0$$

n impar

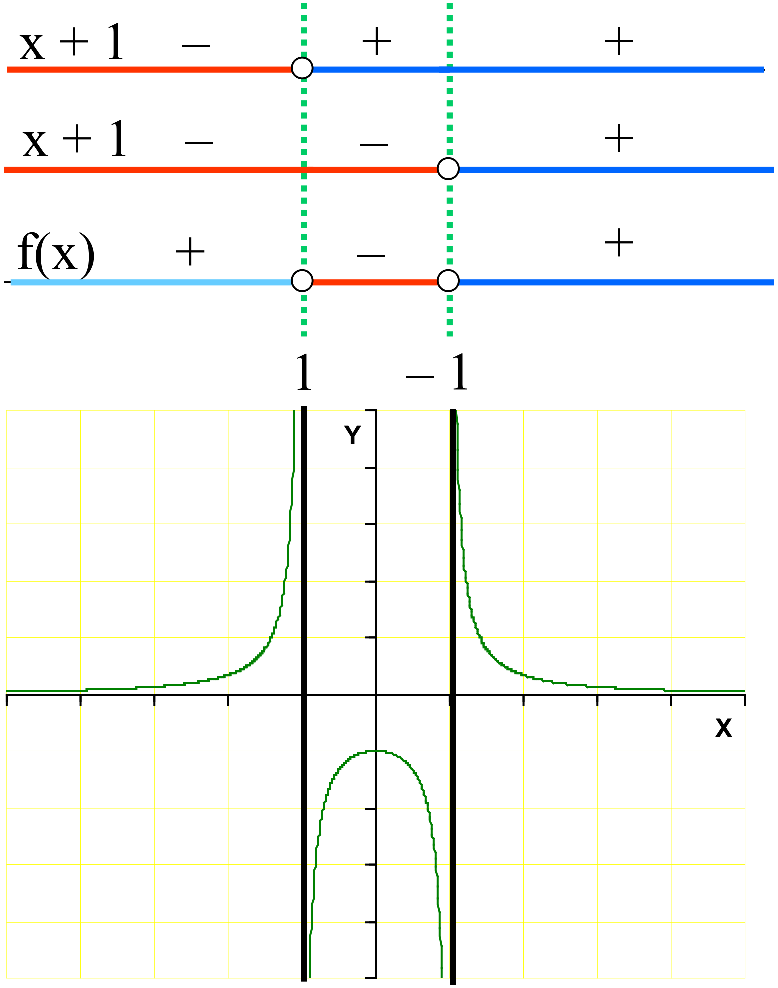
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ si } a_n > 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty \text{ si } a_n < 0$$

Funciones racionales

Una función racional es una función cociente de dos funciones polinómicas; es decir, $f(x) = P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios

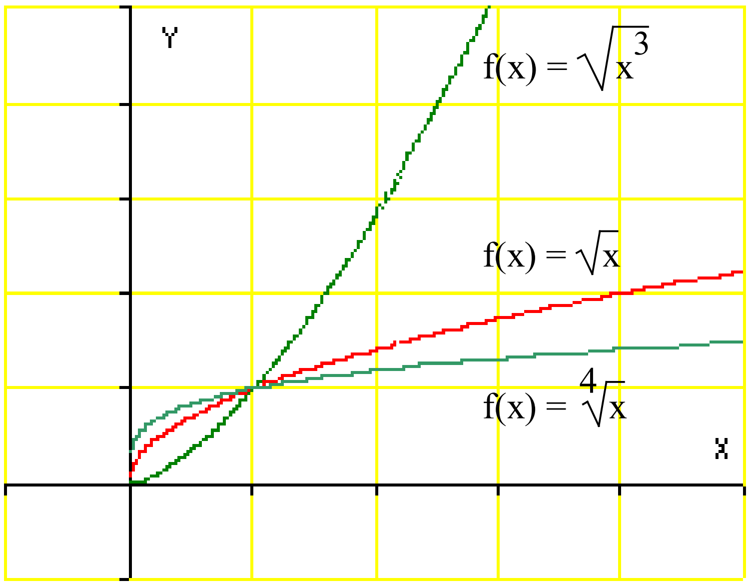
- **Dominio:** conjunto de todos los números reales excepto los que anulan al denominador. Por tanto para hallar el dominio hay que resolver la ecuación $Q(x) = 0$
- **Continuidad:** son funciones continuas en su dominio
- **Asíntotas:** pueden tener asíntotas verticales, horizontales u oblicuas



Las asíntotas de la función $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ y los cambios de signo en su dominio

Funciones con radicales

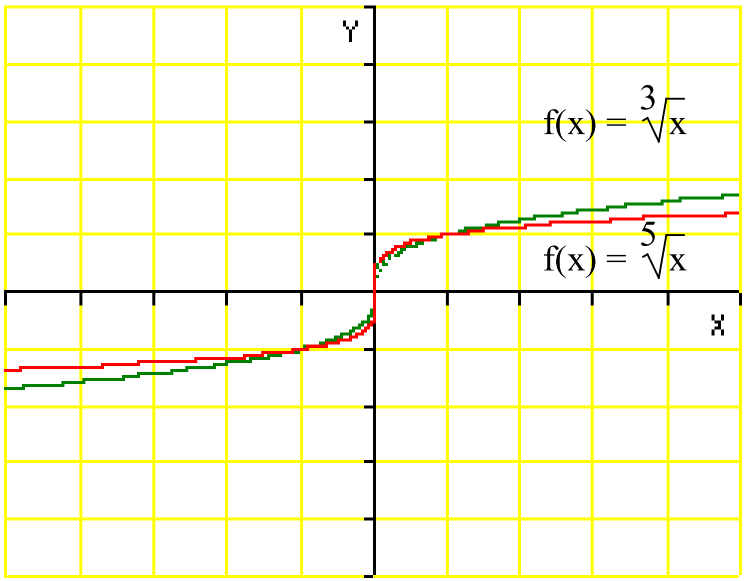
Las funciones $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, $m = 1, 2, 3, 4, \ldots, n = 2, 3, 4, \ldots$



Si m es impar y n es par

$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x^m} = \infty$$



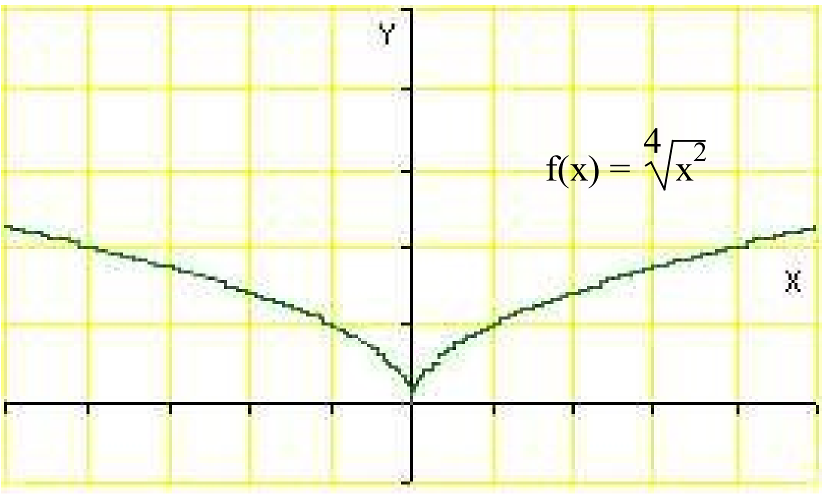
Si m es impar y n es impar

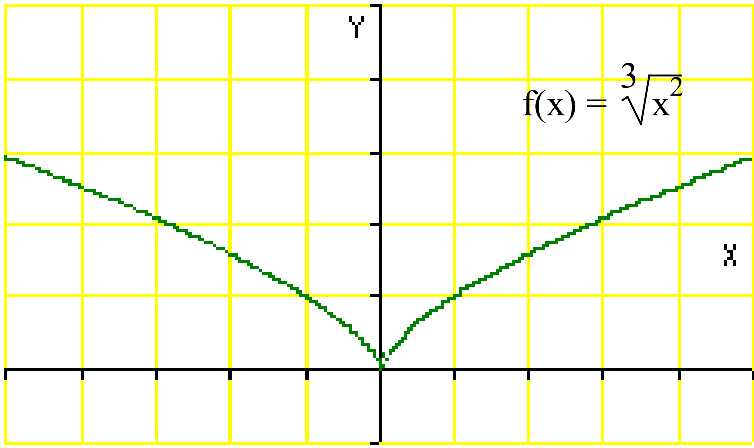
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x^m} = \infty; \lim_{x\to -\infty} \sqrt[n]{x^m} = -\infty$$

Funciones con radicales

Las funciones $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, m = 1, 2, 3, 4, …., n = 2, 3, 4, ….





Si m es par y n es par

Dom (f) = R

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x^m} = \infty; \lim_{x\to -\infty} \sqrt[n]{x^m} = -\infty$$

Si m es impar y n es impar

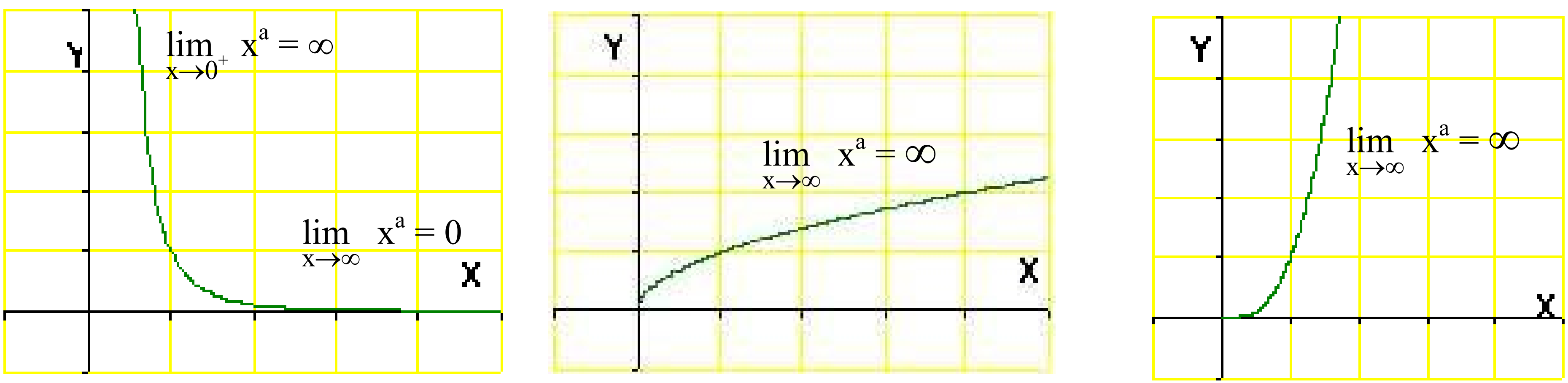
Dom (f) = R

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x^m} = \infty; \lim_{x\to -\infty} \sqrt[n]{x^m} = \infty$$

Funciones potenciales

Una función potencial es una función de la forma $f(x) = x^a$, siendo x la variable y a un número real

- **Dominio:** en general definidas sólo en $[0, \infty)$. En algunos casos también está definidas para los reales negativos
- **Continuidad:** son funciones continuas en su dominio



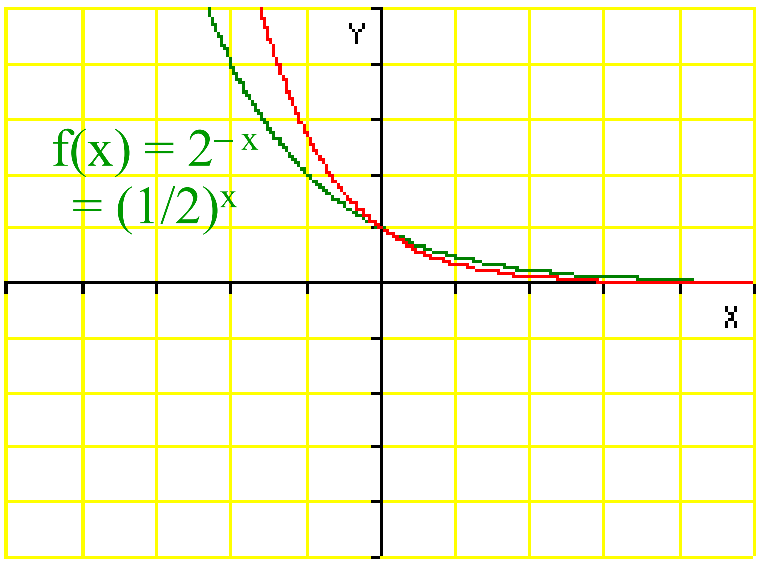
$a < 0$ $\quad$ $0 < a < 1$ $\quad$ $a > 1$

Funciones exponenciales

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$, siendo x la variable y a un número real

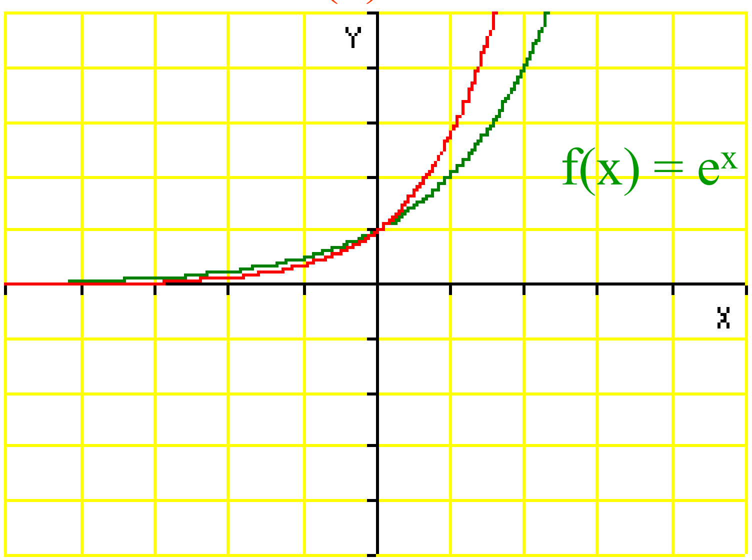
- **Dominio:** R. **Recorrido:** $(0, \infty)$
- **Continuidad:** son funciones continuas en su dominio
- Las gráficas de todas las funciones exponenciales pasan por el punto (0, 1)

$f(x) = e^{-x} = (1/e)^x$



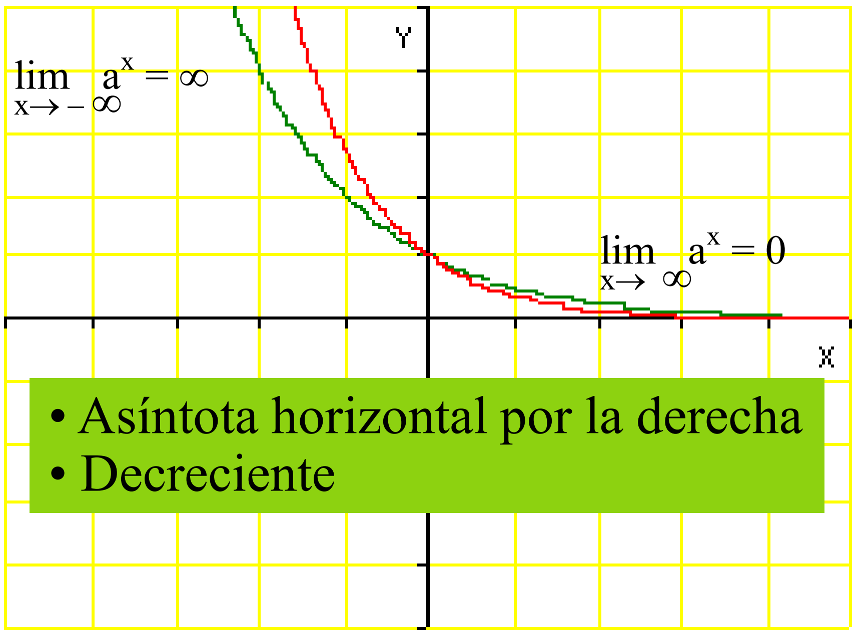
0 < a < 1

$f(x) = 2^x$



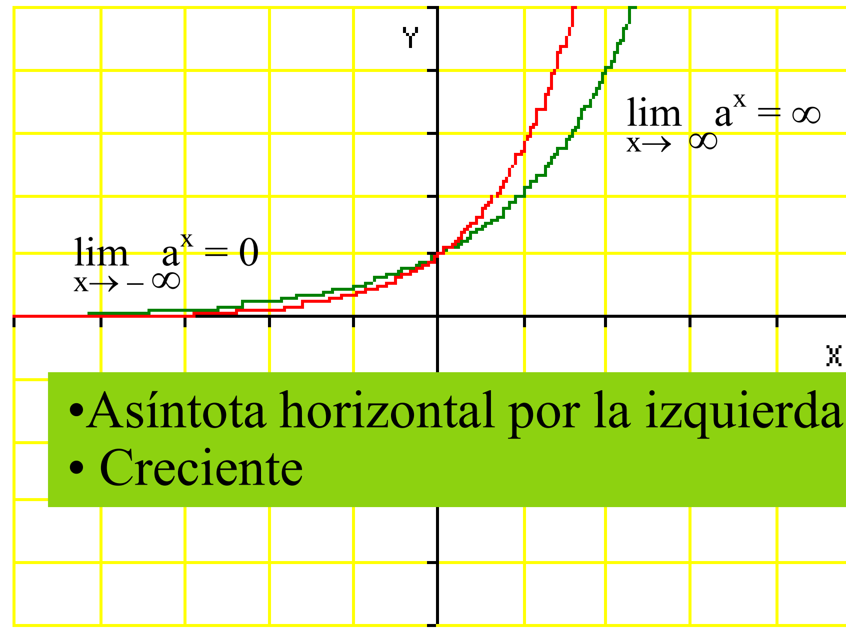
a > 1

Funciones exponenciales



- Asíntota horizontal por la derecha
- Decreciente

$f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$



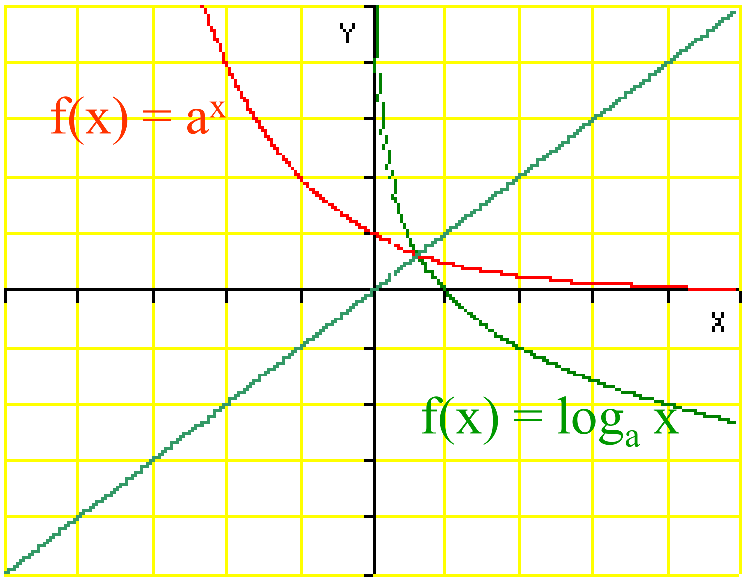
- Asíntota horizontal por la izquierda
- Creciente

$f(x) = a^x$ para $a > 1$

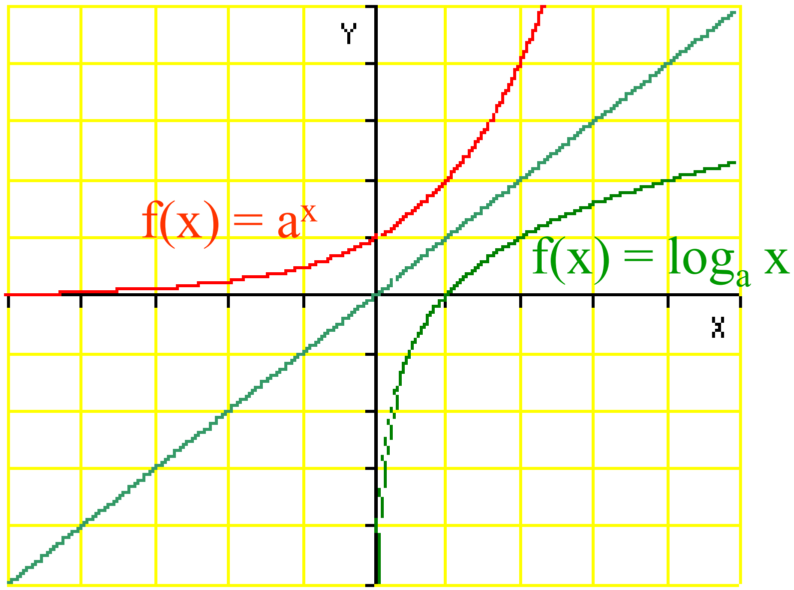
Funciones logarítmicas

Una función logarítmica es una función de la forma $f(x) = \log_a x$, siendo x la variable y a un número real mayor que 0 y distinto de 1

- **Dominio:** $(0, \infty)$. **Recorrido:** R
- **Continuidad:** son funciones continuas en su dominio $(0, \infty)$
- Las gráficas de todas las funciones logarítmicas pasan por el punto (1, 0)
- Es inversa de la exponencial: sus gráficas son simétrica respecto y = x

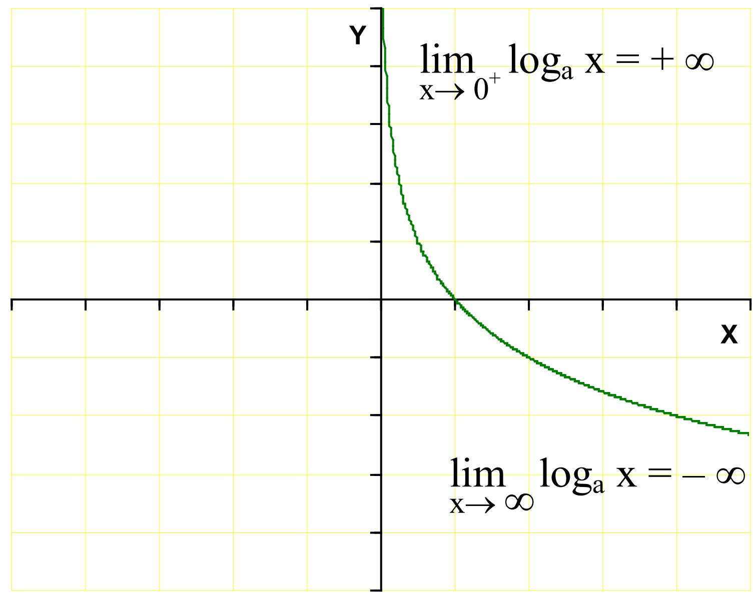


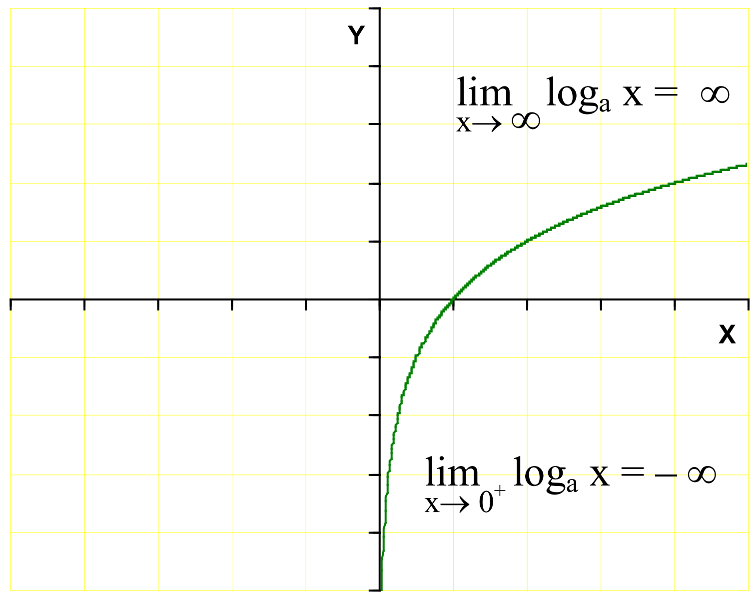
$0 < a < 1$



$a > 1$

Funciones logarítmicas





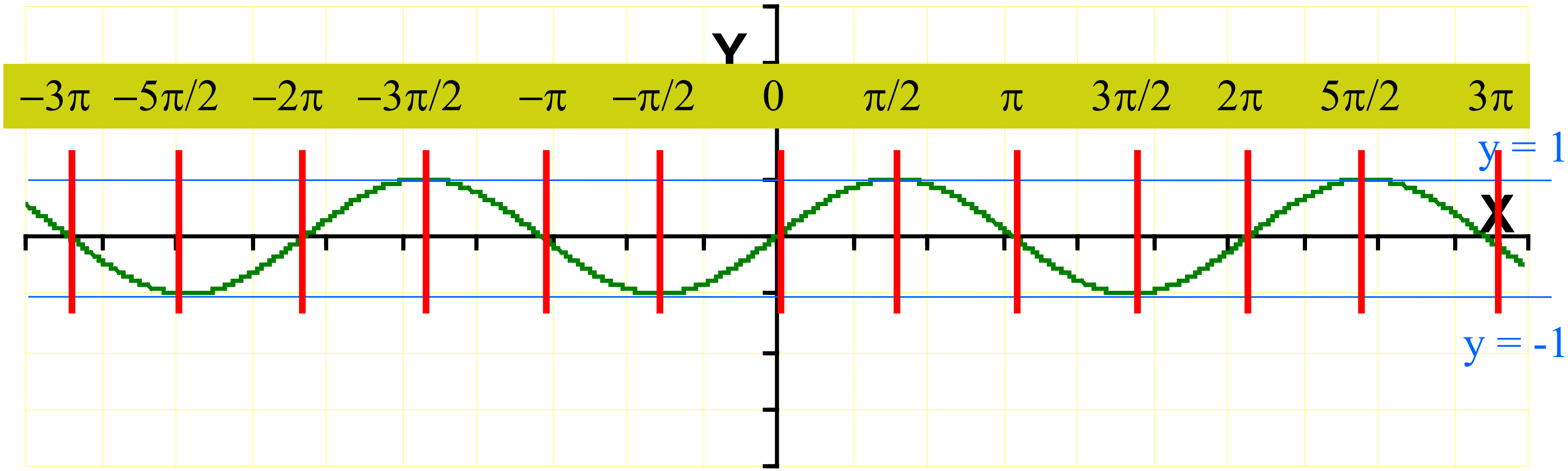
$f(x) = \log_a x$ para $0 < a < 1$

- Decreciente en su dominio
- $\log_a x < 0$ si $x > 1$
- $\log_a x > 0$ si $0 < x < 1$

$f(x) = \log_a x$ para $a > 1$

- Creciente en su dominio
- $\log_a x > 0$ si $x > 1$
- $\log_a x < 0$ si $0 < x < 1$

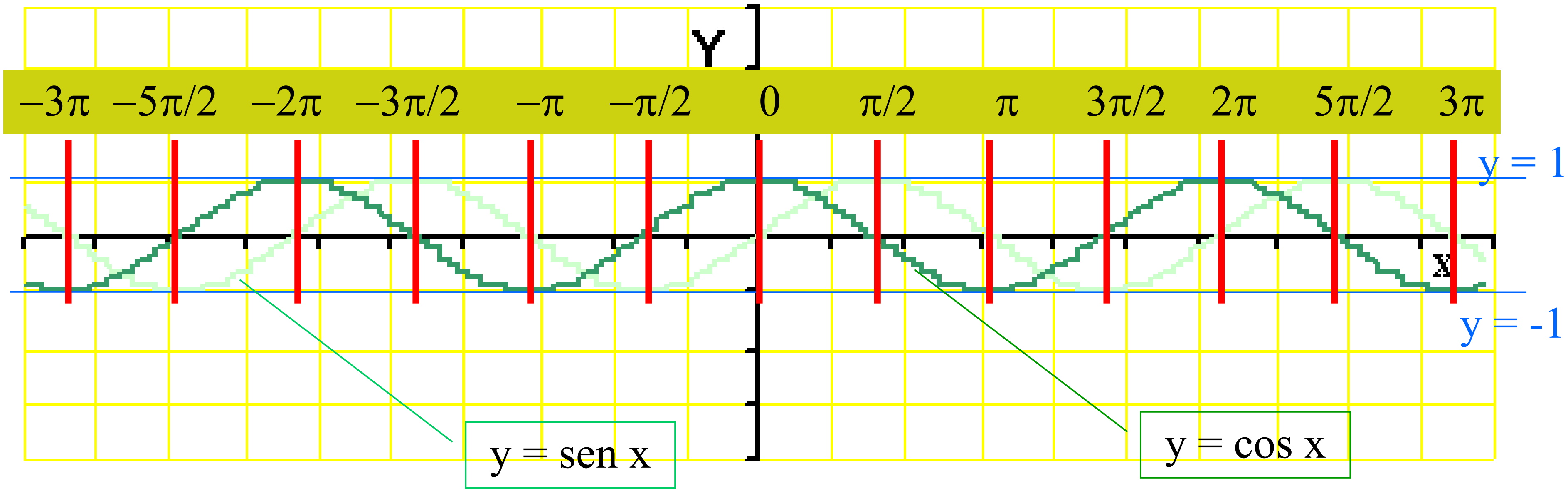
Función seno



Propiedades de la función seno

- En continua en su dominio que es R.
- Su recorrido es el intervalo [-1, 1].
- Es periódica de período 2π.
- No existe el límite de sen x cuando x tiende a ± ∞.
- Es una función impar: sen (– x) = sen x

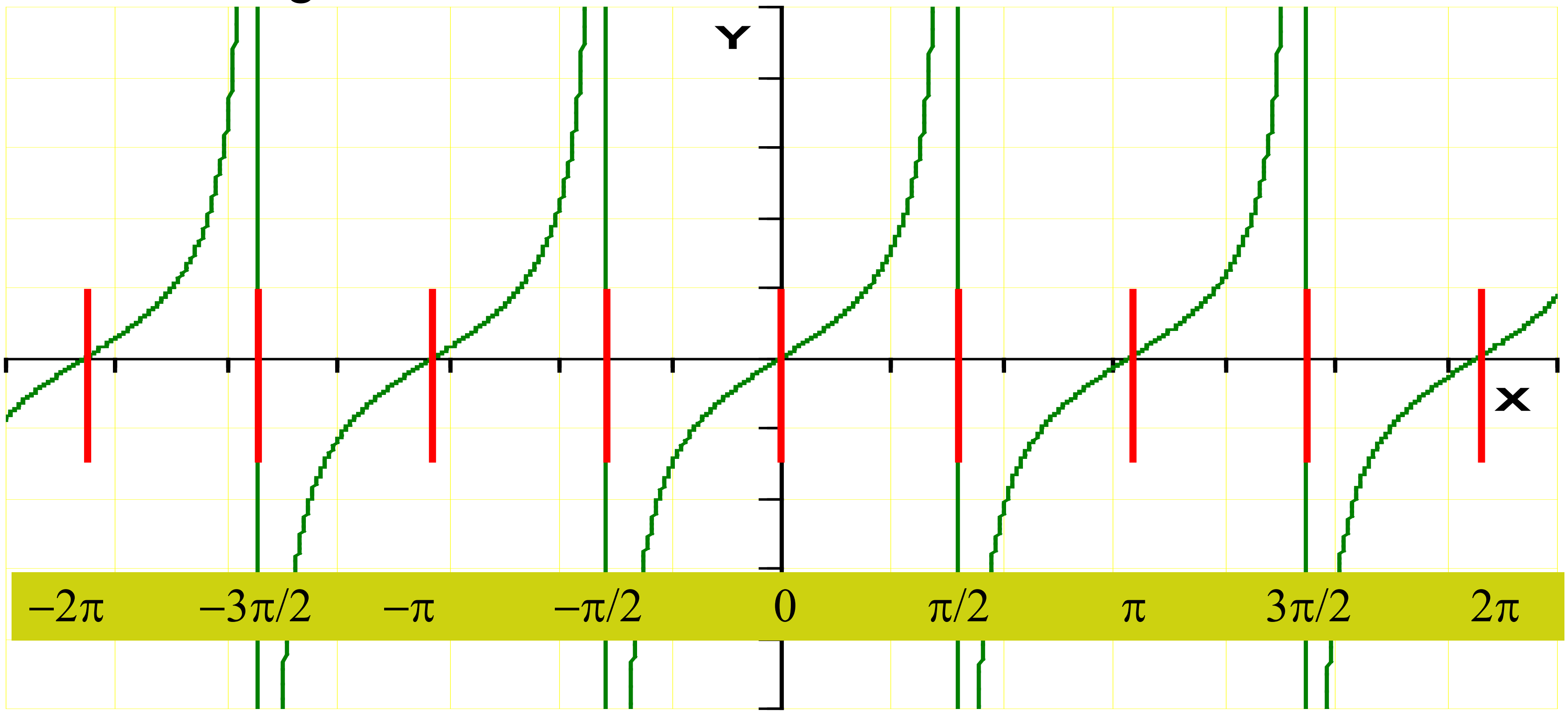
Función coseno



Propiedades de la función coseno

- En continua en su dominio que es R.
- Su recorrido es el intervalo [-1, 1].
- Es periódica de período 2π.
- No existe el límite de cos x cuando x tiende a ± ∞.
- Es una función par: cos (– x) = cos x

Función tangente

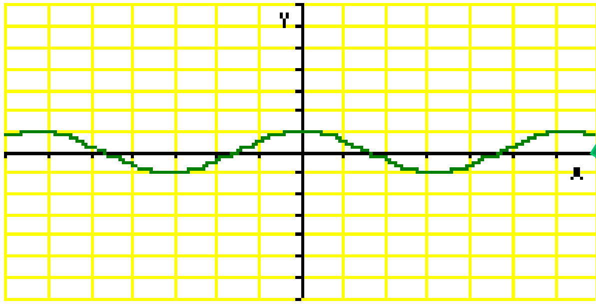


Propiedades de la función tangente

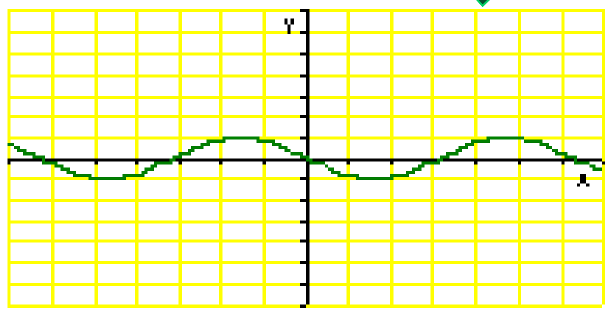
- En continua en su dominio que es R - {π/2 + kπ: k ∈Z}
- Su recorrido es toda la recta real.
- Es periódica de período π.
- Las recta x = π/2 + kπ, k ∈Z son asíntotas verticales
- No existe el límite de cos x cuando x tiende a ± ∞.
- Es una función impar: tan (– x) = – tan x

Traslaciones y dilataciones

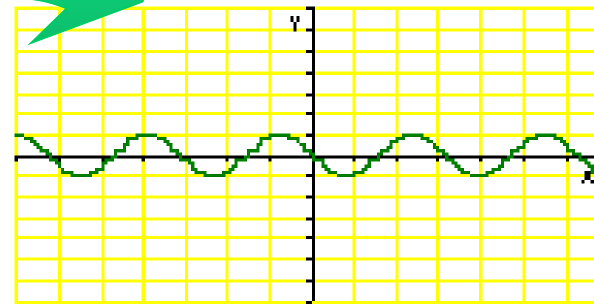
Gráfica de la función $y = 3 + 2\cos(2x + \pi/2)$



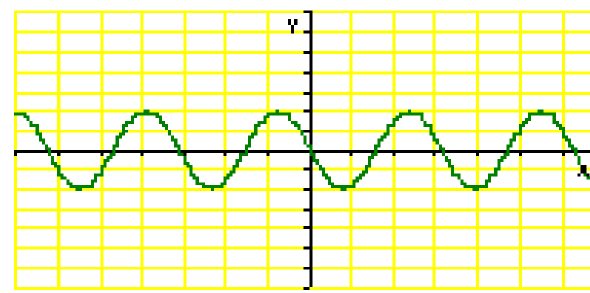
$y = \cos x$



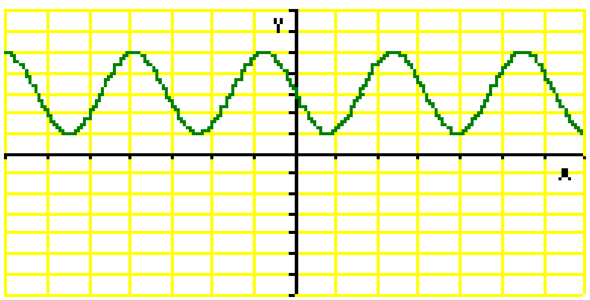
$y = \cos(x + \pi/2)$



$y = \cos(2x + \pi/2)$



$y = 2\cos(2x + \pi/2)$



$y = 3 + 2\cos(2x + \pi/2)$