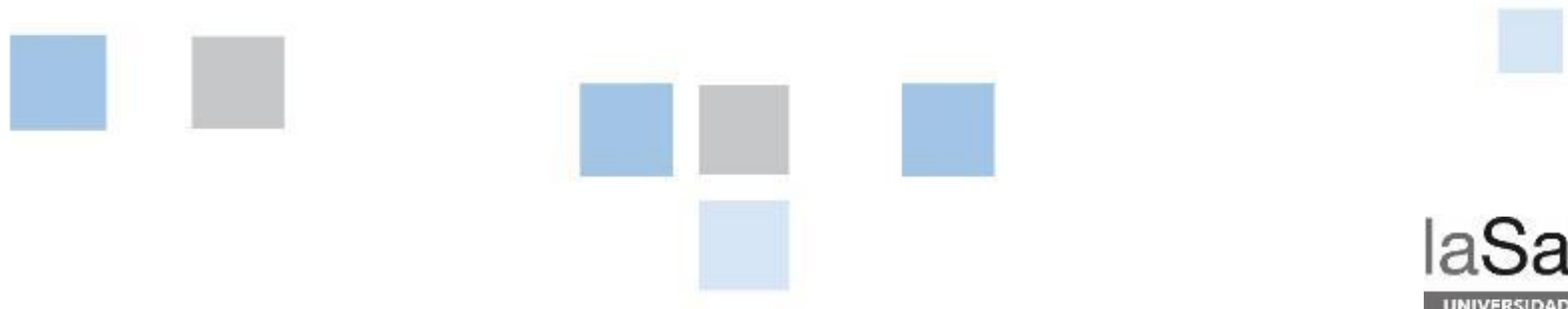


IO – Introducció als Ordinadors

GRUP A – Sessió 11-12

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques (II)



EXERCICI 3 (20 minuts)

Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

Es demana arribar a les formes canòniques:

1. ***Pel mètode 2: Realitzant transformacions*** algebraiques de la funció per arribar tant a la forma canònica de **MAXTERMS**.

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c =$$

- Amb MAXTERMS no vull tenir sumes a fora dels parèntesis, per tant, els haig de transformar en multiplicacions**

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) x (cosa) x ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$q(a, b, c) =$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = ((a + \bar{c}) \times b) + (\bar{a} \times c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = ((a + \bar{c}) \times b) + (\bar{a} \times c)$$

Si mirem d'aplicar el Postulat 3 tal qual veurem que no ens serveix.



$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$\underbrace{(a + \bar{c})}_{y} \times \underbrace{b}_{z} + \underbrace{\bar{a} \times c}_{w} = (y \cdot z) + w \leftarrow \text{Canvi de variable per veure-ho més clar}$$

Amb les noves variables veiem que el podem aplicar però al revés.

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.


Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$\underbrace{(a + \bar{c})}_{y} \times \underbrace{b}_{z} + \underbrace{\bar{a} \times c}_{w} = \boxed{(y \cdot z) + w} \leftarrow \text{Canvi de variable per veure-ho més clar}$$

Amb les noves variables veiem que el podem aplicar però al revés.

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$


$$\boxed{a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)}$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$\begin{aligned} q(a, b, c) &= \\ (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c &= (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) \end{aligned}$$

Postulat 3

\downarrow

\uparrow

$a + (b \times c)$

 $= (a + b) \times (a + c)$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

y z w

Desfem el canvi

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

y z w

Desfem el canvi

Problema a dins: seguim tenint multiplicacions enlloc de sumes

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c)) \\ (a + \bar{c} + (\bar{a} \times c)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

Apliquem canvi de variables per tal de poder aplicar el Postulat 3 un altre cop.

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) x (cosa) x ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

$$\begin{matrix} w & y & z \end{matrix}$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

w y z

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + (\bar{a} \times c)) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$((a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

Desfem el canvi

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + (\bar{a} \times c)) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$((a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

Tornem a aplicar el Postulat 3.

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) x (cosa) x ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + (\bar{a} \times c)) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$((a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + \bar{a}) \times (b + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) x (cosa) x ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + (\bar{a} \times c)) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$((a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + \bar{a}) \times (b + c) =$$

Afegim variables que falten dins de cada parentèssis:

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + \bar{a} + (c \times \bar{c})) \times ((a \times \bar{a}) + b + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) x (cosa) x ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + (\bar{a} \times c)) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$((a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + \bar{a}) \times (b + c) =$$

Afegim variables que falten dins de cada parentèssis:

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + \bar{a} + (c \times \bar{c})) \times ((a \times \bar{a}) + b + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) \times (cosa) \times ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$q(a, b, c) =$

$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

$(a + \bar{c} + (\bar{a} \times c))$

$((a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a$

$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a +$

$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a +$

Afegim variable

$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a +$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c)$$

Postulat 4. Complementada o inversa

$$a + \bar{a} = 1$$

$$a \times \bar{a} = 0$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) x (cosa) x ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + (\bar{a} \times c)) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$((a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + \bar{a}) \times (b + c) =$$

Afegim variables que falten dins de cada parentèssis:

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + \bar{a} + (c \times \bar{c})) \times ((a \times \bar{a}) + b + c)$$

1

1

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) x (cosa) x ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + (\bar{a} \times c)) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$((a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + \bar{a}) \times (b + c) =$$

Afegim variables que falten dins de cada parentèssis:

$$(b + \bar{a} + (c \times \bar{c})) \times ((a \times \bar{a}) + b + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) x (cosa) x ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + (\bar{a} \times c)) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$((a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + \bar{a}) \times (b + c) =$$

Afegim variables que falten dins de cada parentèssis:

$$(b + \bar{a} + (c \times \bar{c})) \times ((a \times \bar{a}) + b + c) = (\bar{a} + b + c) \times (\bar{a} + b + \bar{c}) \times (a + b + c) \times (\bar{a} + b + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 2: MAXTERMS

Aplicarem postulats per tenir coses que es multipliquen \rightarrow (cosa) x (cosa) x ...

Coses \rightarrow Expressions que incloguin una variable.

Expressions que incloguin dos o més variables que es sumen.

$$q(a, b, c) =$$

$$(a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c = (y \cdot z) + w = (y + w) \times (z + w) = ((a + \bar{c}) + (\bar{a} \times c)) \times ((b) + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + (\bar{a} \times c)) \times (b + (\bar{a} \times c)) = ((w+y) \times (w+z)) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$((a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c)) \times (b + (\bar{a} \times c))$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + (\bar{a} \times c)) =$$

$$(a + \bar{c} + \bar{a}) \times (a + \bar{c} + c) \times (b + \bar{a}) \times (b + c) =$$

Afegim variables que falten dins de cada parentèssis:

$$(b + \bar{a} + (c \times \bar{c})) \times ((a \times \bar{a}) + b + c) = (\bar{a} + b + c) \times (\bar{a} + b + \bar{c}) \times (a + b + c) \times \cancel{(\bar{a} + b + c)}$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 1:

a	b	c	q	MINTERMS	MAXTERMS
0	0	0	0	$(\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c})$	$(a + b + c)$
0	0	1	1	$(\bar{a} \times \bar{b} \times c)$	$(a + b + c)$
0	1	0	1	$(\bar{a} \times b \times \bar{c})$	$(a + b + c)$
0	1	1	1	$(\bar{a} \times b \times c)$	$(a + b + c)$
1	0	0	0	$(a \times \bar{b} \times \bar{c})$	$(\bar{a} + b + c)$
1	0	1	0	$(a \times \bar{b} \times c)$	$(\bar{a} + b + \bar{c})$
1	1	0	1	$(a \times b \times \bar{c})$	$(a + b + c)$
1	1	1	1	$(a \times b \times c)$	$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$

$$\text{MINTERMS} = (\bar{a} \times \bar{b} \times c) + (\bar{a} \times b \times \bar{c}) + (\bar{a} \times b \times c) + (a \times b \times \bar{c}) + (a \times b \times c)$$

$$\text{MAXTERMS} = (a + b + c) \times (\bar{a} + b + c) \times (\bar{a} + b + \bar{c})$$

Afegim variables que falten dins de cada patentessis:

$$(b + \bar{a} + (c \times \bar{c})) \times ((a \times \bar{a}) + b + c) = (\bar{a} + b + c) \times (\bar{a} + b + \bar{c}) \times (a + b + c)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

2.4. Expressions algebraiques canòniques (o formes canòniques)

1) Producte de conjunts de termes (Maxterms)

- Forma canònica “abreujada” de Maxterms.

2) Suma de conjunts de termes (Minterms)

- Forma canònica “abreujada” de Minterms.

Forma canònica “abreujada”

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 1:

#	a	b	c	q	MINTERMS	MAXTERMS
0	0	0	0	0	$(\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c})$	$(a + b + c)$
1	0	0	1	1	$(\bar{a} \times \bar{b} \times c)$	$(a + b + c)$
2	0	1	0	1	$(\bar{a} \times b \times \bar{c})$	$(a + b + c)$
3	0	1	1	1	$(\bar{a} \times b \times c)$	$(a + b + c)$
4	1	0	0	0	$(a \times \bar{b} \times \bar{c})$	$(\bar{a} + b + c)$
5	1	0	1	0	$(a \times \bar{b} \times c)$	$(\bar{a} + b + \bar{c})$
6	1	1	0	1	$(a \times b \times \bar{c})$	$(a + b + c)$
7	1	1	1	1	$(a \times b \times c)$	$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$

$$\text{MINTERMS} = (\bar{a} \times \bar{b} \times c) + (\bar{a} \times b \times \bar{c}) + (\bar{a} \times b \times c) + (a \times b \times \bar{c}) + (a \times b \times c)$$

$$\text{MAXTERMS} = (a + b + c) \times (\bar{a} + b + c) \times (\bar{a} + b + \bar{c})$$

FORMA CANONICA ABREUJADA

$$\text{MINT.: } q(a, b, c) = \sum_3(1,2,3,6,7)$$

$$\text{MAXT.: } q(a, b, c) = \prod_3(0,4,5)$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exercici: Donada la funció: $q(a, b, c) = (a + \bar{c}) \times b + \bar{a} \times c$

MÈTODE 1:

#	a	b	c	q	MINTERMS	MAXTERMS
0	0	0	0	0	$(\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c})$	$(a + b + c)$
1	0	0	1	1	$(\bar{a} \times \bar{b} \times c)$	$(a + b + c)$
2	0	1	0	1	$(\bar{a} \times b \times \bar{c})$	$(a + b + c)$
3	0	1	1	1	$(\bar{a} \times b \times c)$	$(a + b + c)$
4	1	0	0	0	$(a \times \bar{b} \times \bar{c})$	$(\bar{a} + b + c)$
5	1	0	1	0	$(a \times \bar{b} \times c)$	$(\bar{a} + b + \bar{c})$
6	1	1	0	1	$(a \times b \times \bar{c})$	$(a + b + c)$
7	1	1	1	1	$(a \times b \times c)$	$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$

$$\text{MINTERMS} = (\bar{a} \times \bar{b} \times c) + (\bar{a} \times b \times \bar{c}) + (\bar{a} \times b \times c) + (a \times b \times \bar{c}) + (a \times b \times c)$$

$$\text{MAXTERMS} = (a + b + c) \times (\bar{a} + b + c) \times (\bar{a} + b + \bar{c})$$

Totes les combinacions que donen 1 →

Totes les combinacions que donen 0 →

FORMA CANONICA ABREUJADA

$$\text{MINT.: } q(a, b, c) = \sum_3(1, 2, 3, 6, 7)$$

$$\text{MAXT.: } q(a, b, c) = \prod_3(0, 4, 5)$$

Tema 2:

Àlgebra booleana i portes lògiques

- 2.1. Àlgebra de Boole (4 POSTULATS)
- 2.2. Funcions booleanes
- 2.3. Operacions booleanes (portes lògiques)
- 2.4. Formes canòniques
- 2.5. Teoremes booleans (7)**

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

2.1. Àlgebra de Boole: TEOREMES

1. Teorema: Element nul

$$\begin{aligned} a + 1 &= 1 + a = 1 \\ a \times 0 &= 0 \times a = 0 \end{aligned} \quad \leftarrow \text{No importa el valor de la variable}$$

Aplicant els postulats P4, P2, P3, P4, P2 i P1:

$$\begin{aligned} 1 &= a + \bar{a} = a + \bar{a} \times 1 = (a + \bar{a}) \times (a + 1) = 1 \times (a + 1) = a + 1 = 1 + a \\ 0 &= a \times \bar{a} = a \times (\bar{a} + 0) = (a \times \bar{a}) + (a \times 0) = 0 + (a \times 0) = a \times 0 = 0 \times a \end{aligned}$$

Això és útil quan haguem d'operar i simplificar funcions.

2. Teorema: Idempotència

$$\begin{aligned} a + a &= a \\ a \times a &= a \end{aligned}$$

Aplicant els postulats P2, P4, P3, P4 i P2:

$$\begin{aligned} a &= a + 0 = a + a \times \bar{a} = (a + a) \times (a + \bar{a}) = (a + a) \times 1 = a + a \\ a &= a \times 1 = a \times (a + \bar{a}) = (a \times a) + (a \times \bar{a}) = (a \times a) + 0 = a \times a \end{aligned}$$

Demostracions a base
d'aplicar els 4 postulats

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

2.1. Àlgebra de Boole: TEOREMES

3. Teorema: Llei de la absorció

$$\begin{aligned} a + (a \times b) &= a \\ a \times (a + b) &= a \end{aligned} \quad \leftarrow \text{No importa el valor de 'b'}$$

(Útil per simplificar)

Aplicant els postulats P2, Teorema 1, P3, i P2:

$$\begin{aligned} a &= 1 \times a = (1 + b) \times a = (1 \times a) + (b \times a) = a + (b \times a) \\ a &= 0 + a = (0 \times b) + a = (0 + a) \times (b + a) = a \times (b + a) \end{aligned}$$

4. Teorema: Principi de la dualitat

Concepte que permet formalitzar aquest fet: a tota relació o llei lògica li correspondrà el seu dual (no equivalent) format mitjançant l'intercanvi dels operadors '+' i '×' i els valors lògics '0' i '1'.

$$a + 0 = a \quad \leftrightarrow \quad a \times 1 = a$$

(en aquest cas són equivalents)

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

2.1. Àlgebra de Boole: TEOREMES

4. Teorema: Principi de la dualitat

Principi segons el qual una “identitat de l'àlgebra de Boole” es manté si s'intercanvien entre sí: (1) les operacions '+' i '×', i (2) els valors lògics '0' i '1'.

	Suma	→	Producte
1	$a + \bar{a} = 1$		$a \cdot \bar{a} = 0$
2	$a + 0 = a$		$a \cdot 1 = a$
3	$a + 1 = 1$		$a \cdot 0 = 0$
4	$a + a = a$		$a \cdot a = a$
5	$a + b = b + a$		$a \cdot b = b \cdot a$
6	$a + (b + c) = (a + b) + c$		$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
7	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$		$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
8	$a + a \cdot b = a$		$a \cdot (a + b) = a$
9	$\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$		$\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$

S'usa sobretot quan treballem amb igualtats.

'a' i 'b' no tenen perquè ser variables, poden ser qualsevol expressió.

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

2.1. Àlgebra de Boole: TEOREMES

5. Teorema: Propietat associativa

$$\begin{aligned}a + (b + c) &= (a + b) + c = a + b + c \\a \times (b \times c) &= (a \times b) \times c = a \times b \times c\end{aligned}$$

Molt evident, però serveix per desenvolupar canvis (aplicar postulats i teoremes) a partir del que hi ha entre parèntesis

6. Teorema: Llei de convolució

Tot element 'a' es complirà que el complement dona novament 'a':

$$a = \overline{\overline{a}}$$

7. Teorema: Lleis de Morgan

$$\begin{aligned}\overline{a + b + c + d + \dots} &= \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} \times \bar{d} \times \dots \\ \overline{a \times b \times c \times d \times \dots} &= \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} + \dots\end{aligned}$$

Un dels que usareu més

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exemple (2.12):

Simplificar mitjançant l'ús dels postulats i teoremes la següent funció:

$$f(a, b, c, d) = \overline{(a + c) \times (a + \bar{c}) \times \underbrace{b \times d + \bar{b} \times d}}.$$

Pas 1: intentem simplificar el terme complementat que inclou les variables 'b' i 'd'.

$$\overline{b \times d + \bar{b} \times d} = \overline{d \times (b + \bar{b})} = \overline{d \times 1} = \boxed{\bar{d}}.$$

← **Trans. 1: Postulat 3**

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$\overline{(a + c) \times (a + \bar{c}) \times \bar{d}}.$$

← **Trans. 2: Postulat 4**

Complementada o inversa

$$a + \bar{a} = 1$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exemple (2.12):

Simplificar mitjançant l'ús dels postulats i teoremes la següent funció:

$$f(a, b, c, d) = \overline{(a + c) \times (a + \bar{c}) \times b \times d + \bar{b} \times d}.$$

Pas 1: intentem simplificar el terme complementat que inclou les variables 'b' i 'd'.

$$\overline{b \times d + \bar{b} \times d} = \overline{d \times (b + \bar{b})} = \overline{d \times 1} = \bar{d}.$$

$$\overline{(a + c) \times (a + \bar{c}) \times \bar{d}}.$$

Pas 2: intentem simplificar el terme complementat que inclou les variables 'a' i 'c'.

$$(a + c) \times (a + \bar{c}) = \boxed{a \times a} + a \times c + a \times \bar{c} + \boxed{c \times \bar{c}} = a + a \times c + a \times \bar{c} + 0$$

$$a \times (1 + c + \bar{c}) = a \times (1 + 1) = a \times 1 = \boxed{a}.$$

Teorema 2: $a \times a = a$

Postulat 4: $c \times \bar{c} = 0$

Postulat 3 $\rightarrow (a + b) \times (a + c) = a + (b \times c)$

Suposem que no volem aplicar el postulat 3

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Exemple (2.12):

Simplificar mitjançant l'ús dels postulats i teoremes la següent funció:

$$f(a, b, c, d) = \overline{(a + c) \times (a + \bar{c}) \times b \times d + \bar{b} \times d}.$$

Pas 1: intentem simplificar el terme complementat que inclou les variables 'b' i 'd'.

$$\overline{b \times d + \bar{b} \times d} = \overline{d \times (b + \bar{b})} = \overline{d \times 1} = \boxed{\bar{d}}. \quad \leftarrow \text{Postulat 3 + 4}$$

$$\boxed{(a + c) \times (a + \bar{c})} \times \bar{d}.$$

Pas 2: intentem simplificar el terme complementat que inclou les variables 'a' i 'c'.

$$(a + c) \times (a + \bar{c}) = a \times a + a \times c + a \times \bar{c} + c \times \bar{c}$$

$$a \times (1 + c + \bar{c}) = a \times (1 + 1) = a \times 1 = \boxed{a}.$$

← Teorema 7: Morgan

$$f(a, b, c, d) = \overline{a \times \bar{d}} = \bar{a} + d.$$

$$\leftarrow \bar{d} = z \rightarrow \overline{a \times z} = \bar{a} + \bar{z} = \bar{a} + \bar{\bar{d}} = \bar{a} + d$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

Errors típics a l'hora d'operar amb funcions algebraiques

$$a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$$

$$a + b \cdot c \neq (a + b) \cdot c$$

Important a la hora d'aplicar
postulats i teoremes

No confondre amb el 5. Teorema: **Propietat associativa**

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = a \times b \times c$$

EXERCICI 4

Simplificar mitjançant l'ús dels **postulats** i **teoremes** de l'àlgebra de Boole la següent funció:

$$f(a, b, c, d, e) = \overline{\overline{b} \times c + a + \overline{a + b + \bar{c} + d} \times \bar{e}}$$

SOLUCIÓ

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

$$f(a, b, c, d, e) = \overline{\overline{b} \times c + a} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}$$

Idea: provar d'arribar a una expressió com la del

Teorema 3: Llei de la absorció

$$\begin{aligned} a + (a \times b) &= a \\ a \times (a + b) &= a \end{aligned}$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

$$f(a, b, c, d, e) = \overline{\overline{b} \times c + a} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}$$

Idea: provar d'arribar a una expressió com la del

Teorema 3: Llei de la absorció

$$\begin{aligned} a + (a \times b) &= a \\ a \times (a + b) &= a \end{aligned}$$
$$\overline{\overline{b} \times c + a} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}$$

a, b i c són les variables que podrien ser la 'a' del teorema

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

$$f(a, b, c, d, e) = \overline{\overline{b \times c + a}} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}$$

$$\overline{\overline{b \times c + a}} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}$$

Ara mateix no
s'assemblen en res

$$\begin{aligned} a + (a \times b) &= a \\ a \times (a + b) &= a \end{aligned}$$

PAS 1: **Morgan** per agrupar els dos termes que suma la funció original

$$\overline{\overline{b \times c + a}} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}} = \overline{\overline{b \times c + a}} \times \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}.$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

$$f(a, b, c, d, e) = \overline{\overline{\overline{b} \times c + a}} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}$$

$$\overline{\overline{\overline{b} \times c + a}} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}$$

Ara mateix no
s'assemblen en res

$$\begin{aligned} a + (a \times b) &= a \\ a \times (a + b) &= a \end{aligned}$$

PAS 1: **Morgan** per agrupar els dos termes que suma la funció original

$$\overline{\overline{\overline{b} \times c + a}} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}} = \overline{\overline{\overline{b} \times c + a}} \times \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}.$$

PAS 2: **Morgan** sobre les variables 'b' i 'c' del segon parèntesis:

$$\overline{\overline{\overline{b} \times c + a}} \times (a + \overline{b + \bar{c}} + d \times \bar{e}) = \overline{\overline{\overline{b} \times c + a}} \times (a + \overline{\overline{b} \times c} + d \times \bar{e})$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

PAS 1: **Morgan** per agrupar els dos termes que suma la funció original

$$\overline{\overline{\bar{b} \times c + a}} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}} = \boxed{\bar{b} \times c + a} \times \boxed{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}.$$

PAS 2: **Morgan** sobre les variables 'b' i 'c' del segon parèntesis:

$$\overline{\bar{b} \times c + a} \times (a + \boxed{b + \bar{c}} + d \times \bar{e}) = \underbrace{\overline{\bar{b} \times c + a}}_{a + (a \times b) = a} \times \underbrace{(a + \boxed{\bar{b} \times c} + d \times \bar{e})}_{a \times (a + b) = a}$$

$$a + (a \times b) = a$$

$$\boxed{a \times (a + b) = a}$$

PAS 3

Teorema 3:
Llei de la
absorció

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

PAS 1: **Morgan** per agrupar els dos termes que suma la funció original

$$\overline{\overline{\bar{b} \times c + a} + (a + b + \bar{c} + d \times \bar{e})} = \boxed{\overline{\bar{b} \times c + a}} \times \boxed{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}.$$

PAS 2: **Morgan** sobre les variables 'b' i 'c' del segon parèntesis:

$$\overline{\overline{\bar{b} \times c + a} \times (a + \boxed{b + \bar{c}} + d \times \bar{e})} = \underbrace{\overline{\bar{b} \times c + a}}_{a + (a \times b) = a} \times \underbrace{(a + \boxed{\bar{b} \times c} + d \times \bar{e})}_{a \times (a + b) = a}$$

$$\begin{aligned} a + (a \times b) &= a \\ \boxed{a \times (a + b)} &= a \end{aligned}$$

PAS 3

Teorema 3:
Llei de la
absorció

$$f(a, b, c, d, e) = \overline{a + \bar{\bar{b} \times c}}$$

Tema 2. Àlgebra booleana i portes lògiques

PAS 1: **Morgan** per agrupar els dos termes que suma la funció original

$$\overline{\overline{\bar{b} \times c + a}} + \overline{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}} = \boxed{\overline{\bar{b} \times c + a}} \times \boxed{a + b + \bar{c} + d \times \bar{e}}.$$

PAS 2: **Morgan** sobre les variables 'b' i 'c' del segon parèntesis:

$$\overline{\overline{\bar{b} \times c + a}} \times (a + \boxed{b + \bar{c}} + d \times \bar{e}) = \underbrace{\overline{\bar{b} \times c + a}}_{a + (a \times b) = a} \times \underbrace{(a + \boxed{\bar{b} \times c} + d \times \bar{e})}_{a \times (a + b) = a}$$

$$a + (a \times b) = a$$

$$\boxed{a \times (a + b) = a}$$

PAS 3

Teorema 3:
Llei de la absorció

$$f(a, b, c, d, e) = \overline{\overline{a + \bar{b} \times c}}$$

PAS 4: **Morgan**

$$f(a, b, c, d, e) = \bar{a} \times \bar{b} \times c.$$

Sessió *QUARTUS*

eStudy → Projecte/Pràctica

Seguir els manuals:



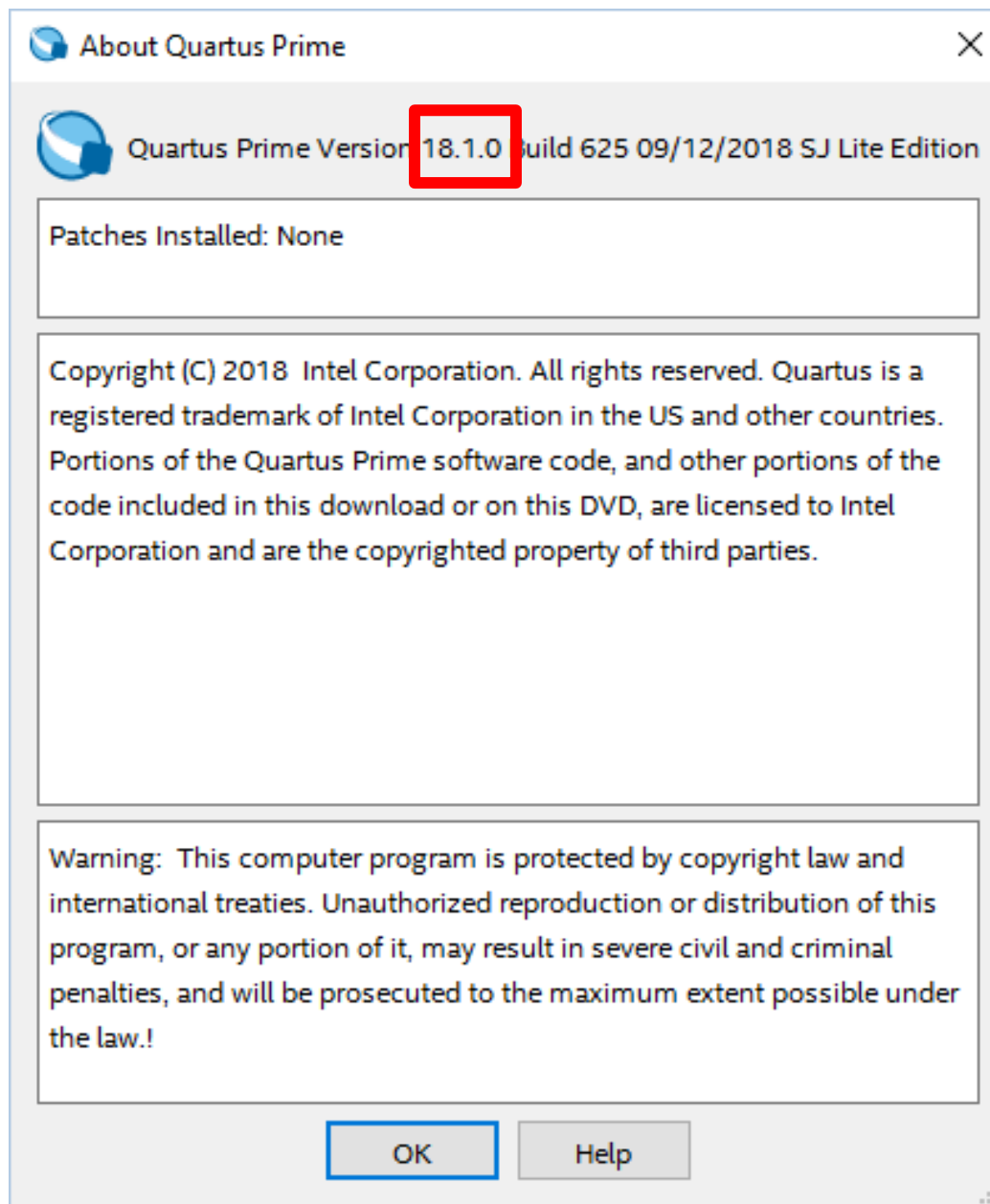
Manual Intel Quartus Prime (Esquemàtic) [ES] 2021-22 1.9MB

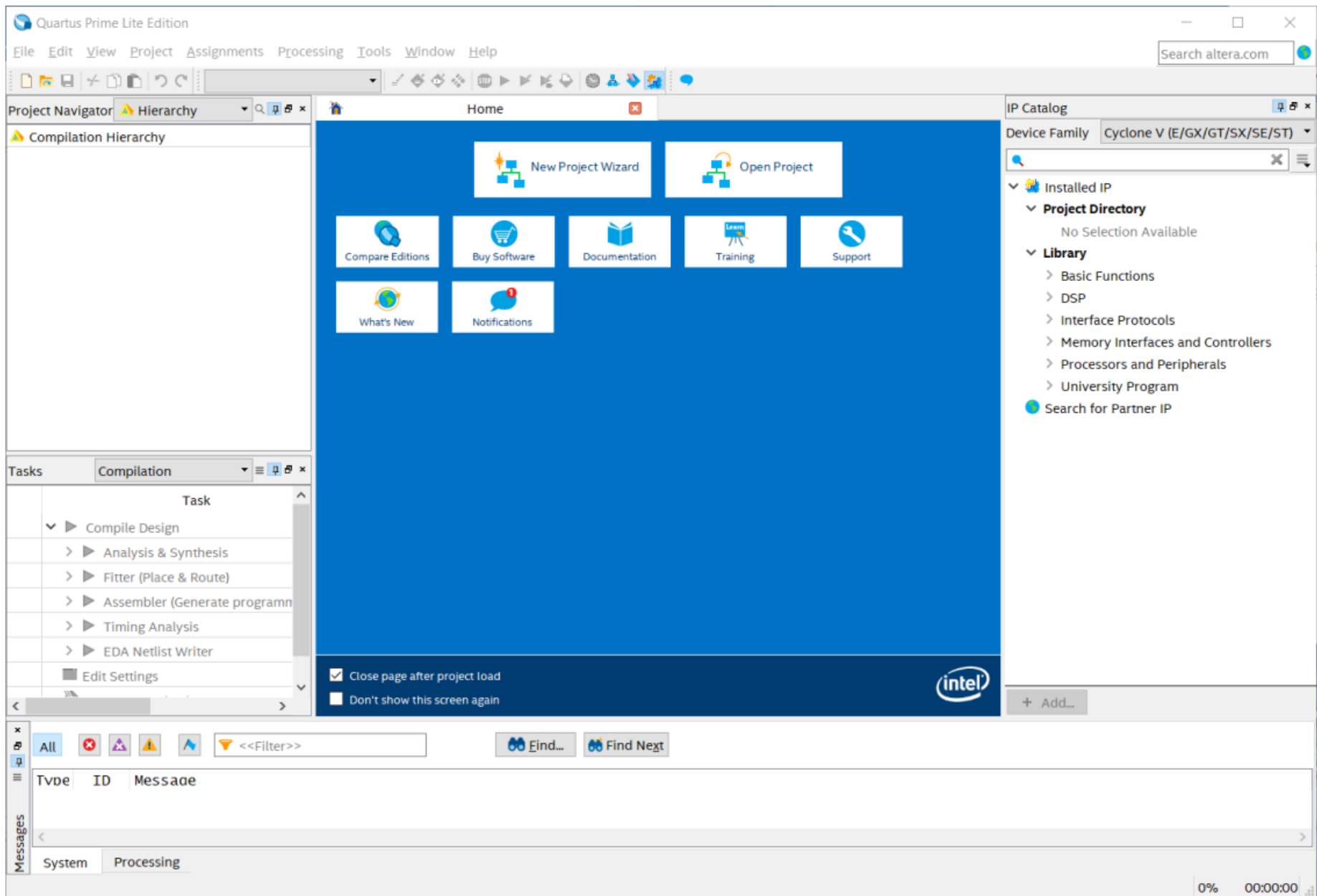


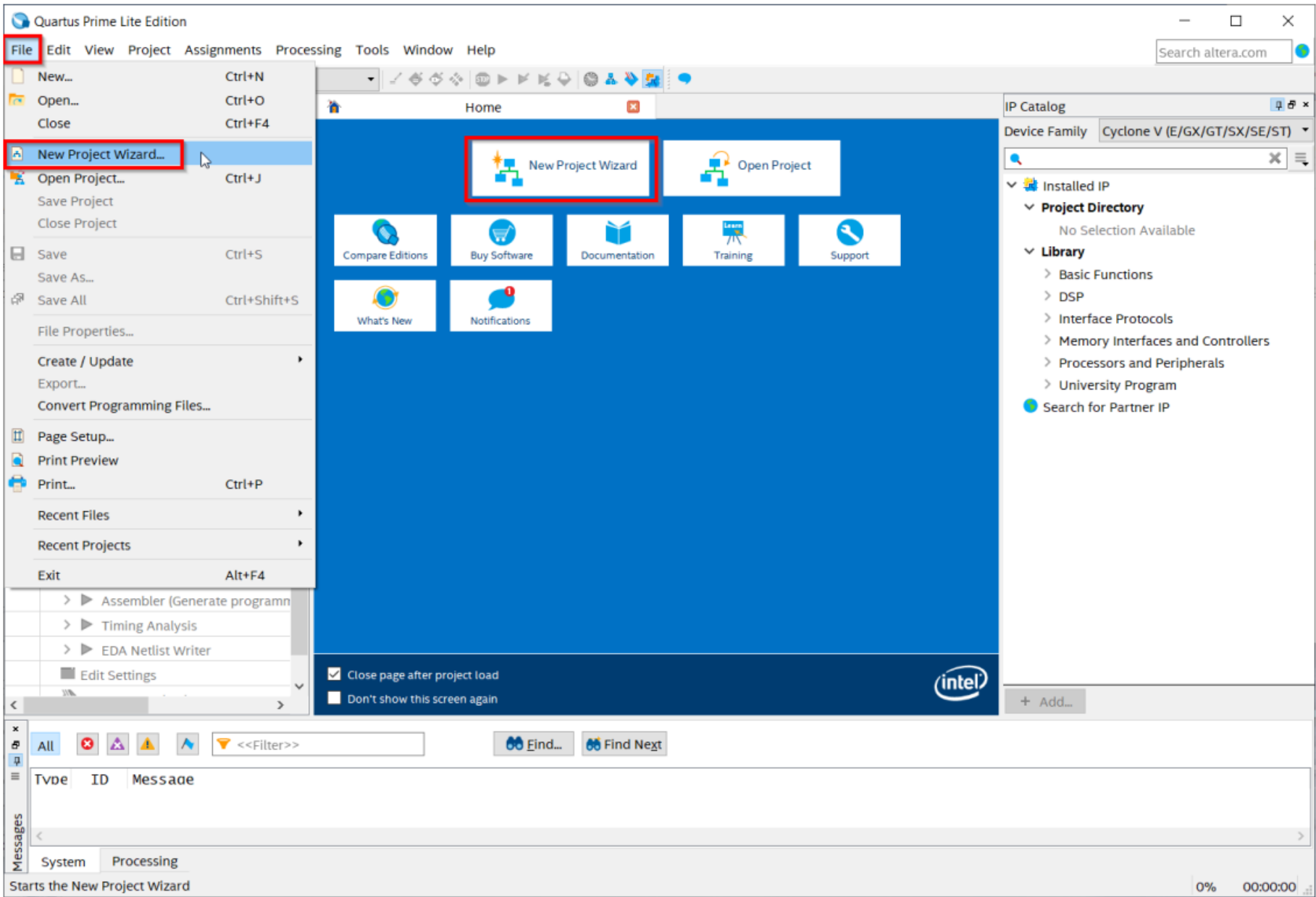
Manual Intel Quartus Prime (Simulació) [ES] 2021-22 2.1MB

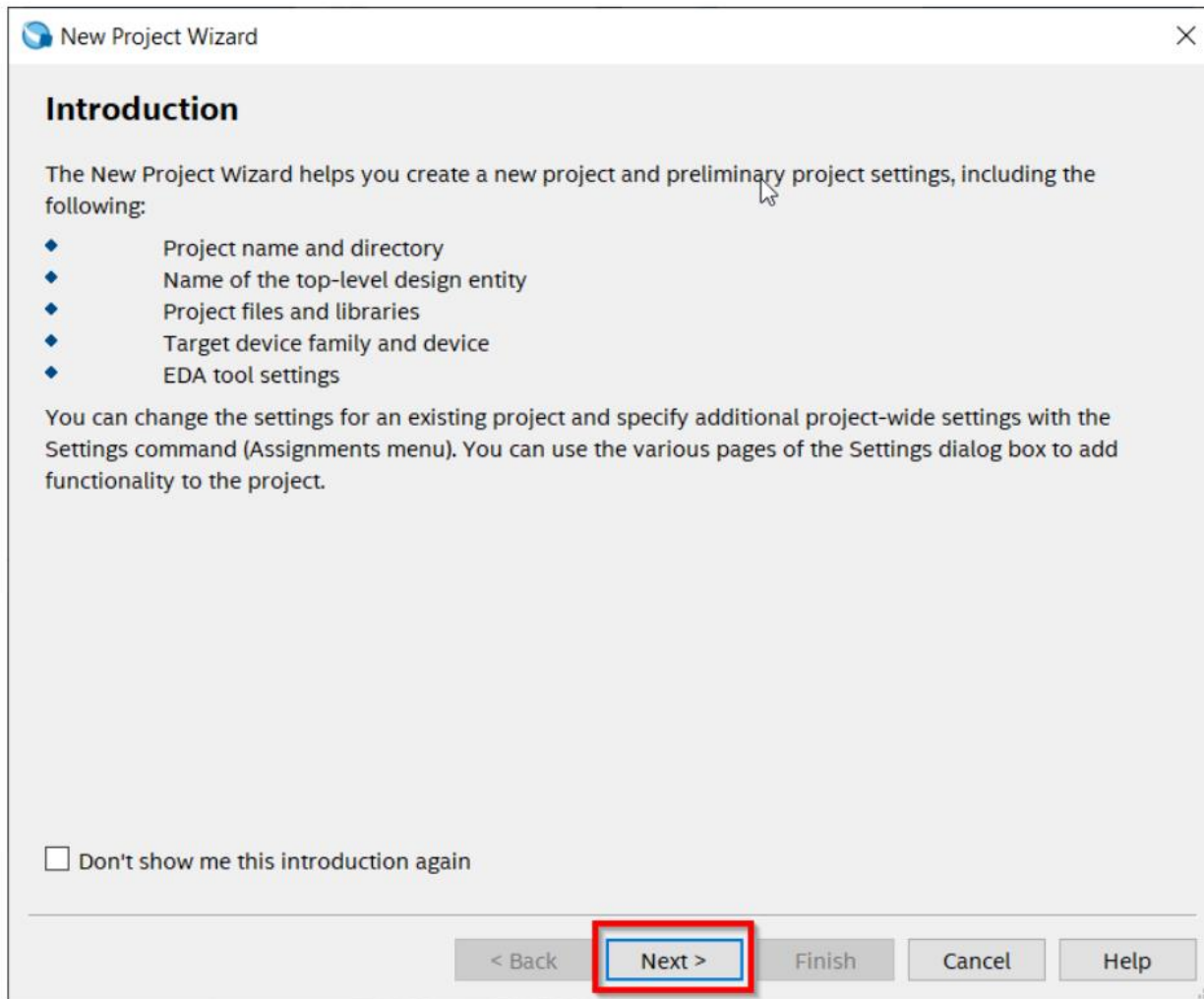


Manual Intel Quartus Prime (Diseño por bloques) [ES] 2021-22









New Project Wizard

Directory, Name, Top-Level Entity

What is the working directory for this project?

C:\intelFPGA_lite\18.1\projects

What is the name of this project?

project_1

What is the name of the top-level design entity for this project? This name is case sensitive and must exactly match the entity name in the design file.

project_1

Use Existing Project Settings...

< Back Next > Finish Cancel Help

New Project Wizard

Project Type

Select the type of project to create.

☒ Empty project

Create new project by specifying project files and libraries, target device family and device, and EDA tool settings.

☐ Project template

Create a project from an existing design template. You can choose from design templates installed with the Quartus Prime software, or download design templates from the [Design Store](#).

< Back **Next >** Finish Cancel Help

New Project Wizard

Add Files

Select the design files you want to include in the project. Click Add All to add all design files in the project directory to the project.

Note: you can always add design files to the project later.

File name: ...

File Name	Type	Library	Design Entry/Synthesis Tool	HDL Version
-----------	------	---------	-----------------------------	-------------

Specify the path names of any non-default libraries.

New Project Wizard

Family, Device & Board Settings

Device
Board

Select the family and device you want to target for compilation.
You can install additional device support with the Install Devices command on the Tools menu.

To determine the version of the Quartus Prime software in which your target device is supported, refer to the [Device Support List](#) webpage.

Device family

Family: MAX 10 (DA/DF/DC/SA/SC)

Device: MAX 10 DA

Target device

☐ Auto device selected by the Fitter

☒ Specific device selected in 'Available devices' list

☐ Other: n/a

Show in 'Available devices' list

Package: Any

Pin count: 484

Core speed grade: 7

Name filter: M50

☒ Show advanced devices

Available devices:

Name	Core Voltage	LEs	Total I/Os	GPIOs	Memory Bits	Embedded multiplier 9-bit elemen
10M50DAF484C7G	1.2V	49760	360	360	1677312	288
10M50DAF484I7G	1.2V	49760	360	360	1677312	288
10M50DAF484I7P	1.2V	49760	360	360	1677312	288

<

>

< Back

Next >

Finish

Cancel

Help

New Project Wizard

EDA Tool Settings

Specify the other EDA tools used with the Quartus Prime software to develop your project.

EDA tools:

Tool Type	Tool Name	Format(s)	Run Tool Automatically
Design Entry/S...	<None>	<None>	<input type="checkbox"/> Run this tool automatically to synthesize the current design
Simulation	ModelSim-Altera	VHDL	<input type="checkbox"/> Run gate-level simulation automatically after compilation
Board-Level	Timing	<None>	
	Symbol	<None>	
	Signal Integrity	<None>	
	Boundary Scan	<None>	

< Back Next > Finish Cancel Help

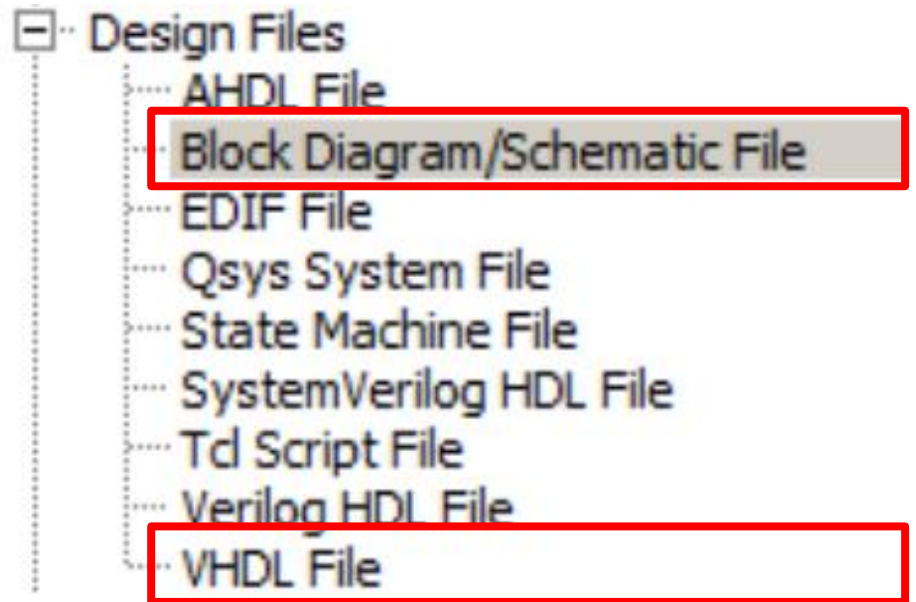
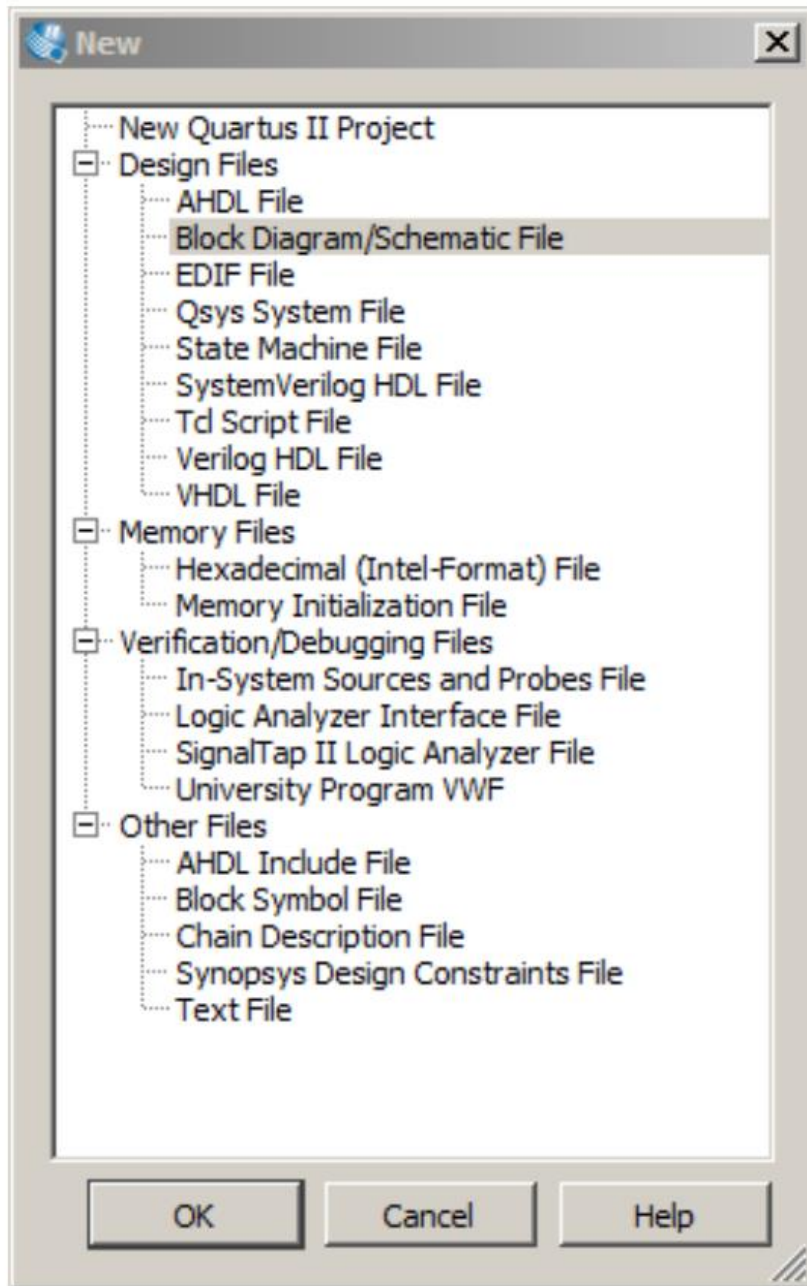
New Project Wizard

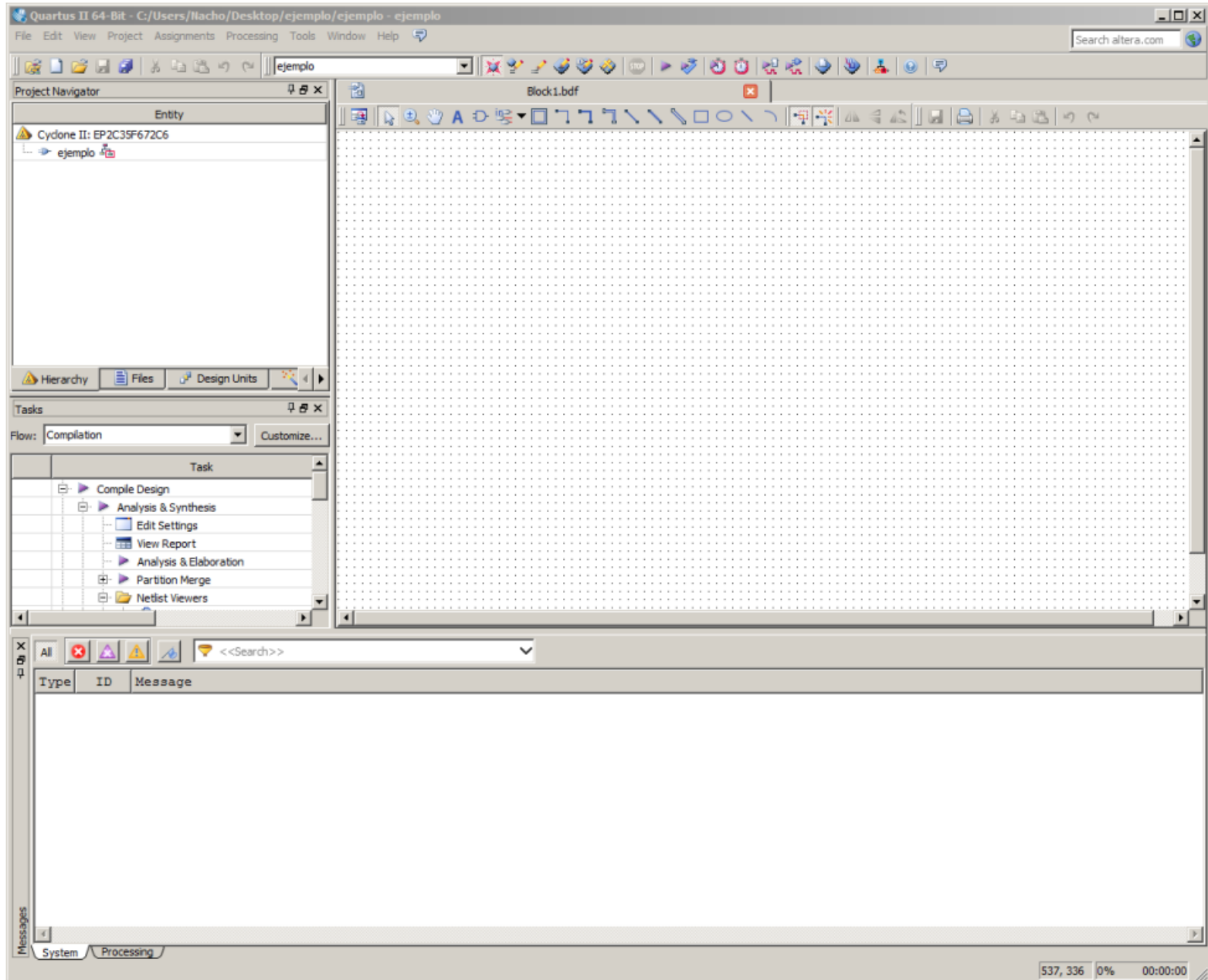
Summary

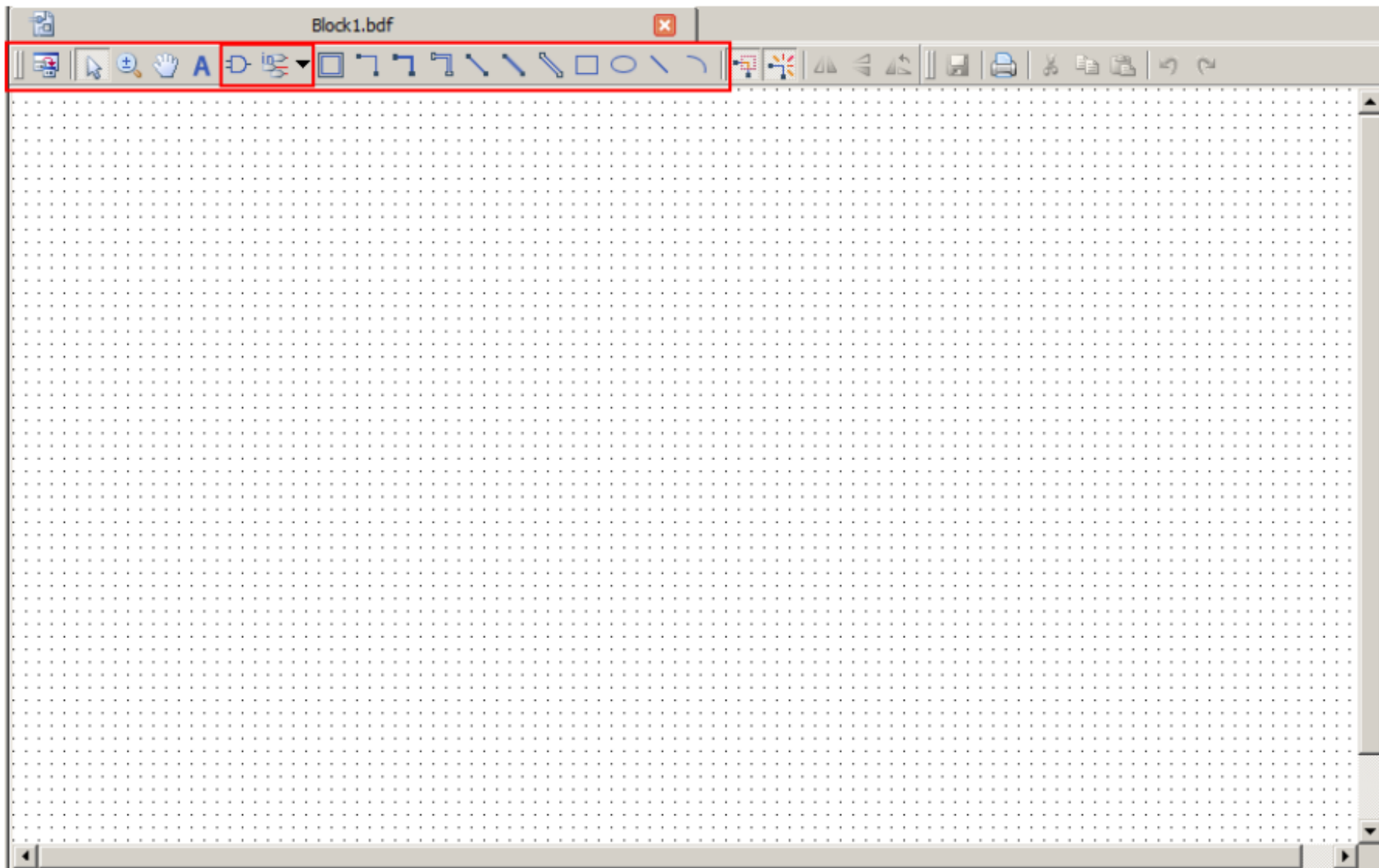
When you click Finish, the project will be created with the following settings:

Project directory:	C:\intelFPGA_lite\18.1\projects
Project name:	project_1
Top-level design entity:	project_1
Number of files added:	0
Number of user libraries added:	0
Device assignments:	
Design template:	n/a
Family name:	MAX 10 (DA/DF/DC/SA/SC)
Device:	10M50DAF484C7G
Board:	n/a
EDA tools:	
Design entry/synthesis:	<None> (<None>)
Simulation:	ModelSim-Altera (VHDL)
Timing analysis:	()
Operating conditions:	
Core voltage:	1.2V
Junction temperature range:	0-85 °C

< Back Next > **Finish** Cancel Help







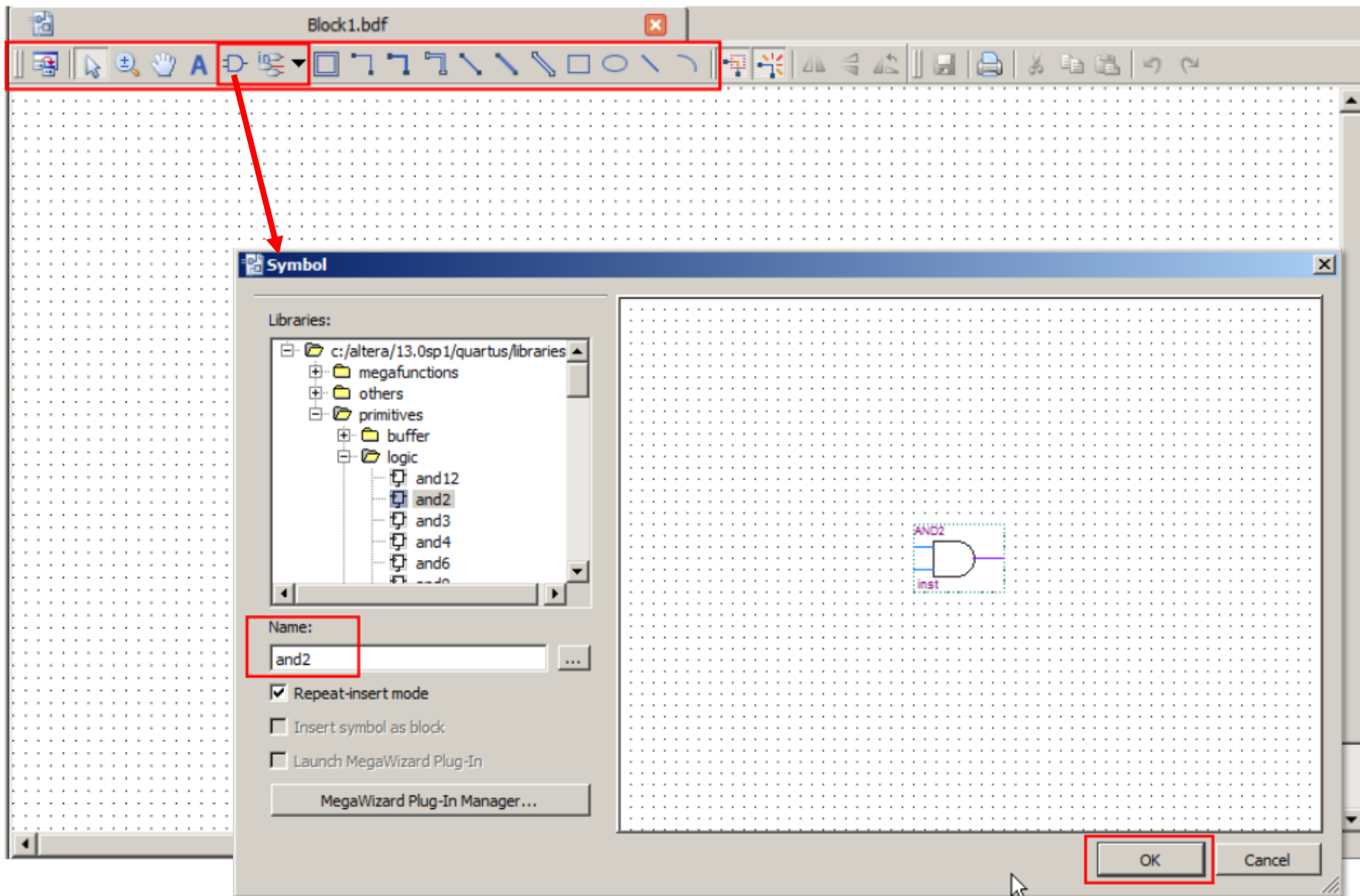


Tabla de la verdad:

<u>a</u>	<u>b</u>	<u>c</u>	<u>f</u>
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f = (a \cdot \bar{b}) + c$$

