INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES

Decimos que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes en $x=a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

<u>Notación:</u> en este caso escribimos $f(x) \sim g(x)$ (en $x=a$)

—— o ——

CASOS IMPORTANTES (PARA $X=0$):

$$x \sim \operatorname{sen} x \sim \operatorname{arcsen} x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

SI $f(x) \to 0 \Rightarrow$ PODEMOS SUSTITUIR $x \longleftrightarrow f(x)$ EN CUALQUIERA DE LAS ANTERIORES.

<u>Por ejemplo:</u> $\operatorname{sen}(\ln(x)) \sim \ln(x)$ en $x=1$

ej: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} \operatorname{sen} x = 0$

OTRA NOTACIÓN

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0$

———— o ————

Obs: si $x \to 0$ $\ln(1+x) \sim x$

CONSIDEREMOS $w = 1+x$ $(x = w-1)$

$\to \ln(w) \sim w-1$ (en $w=1$)

$\to \ln(x) \sim x-1$ (en $x=1$)

$\left\{ \lim_{x\to 1} \frac{\overset{\sim 1-x}{\operatorname{sen}(1-x)}}{\underset{\sim x-1}{\ln(x)}} = \right.$

$= -1$

IMPORTANTE: LOS INFINIT. EQUIV. SE PUEDEN REEMPLAZAR ENTRE SÍ SIEMPRE Y CUANDO ESTÉN MULTIPLICANDO O DIVIDIENDO

ej: $\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\sim x}{\operatorname{sen} x} - \overset{\sim x}{\operatorname{tg} x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$ MAL!

$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\sim x}{\operatorname{sen} x}\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)}{x^3} =$

$\lim_{x\to 0} \frac{1 - 1/\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\sim -\frac{x^2}{2}}{\cos x - 1}}{x^2 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\cos(x)} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

$\underline{ej}$: $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} =$ ⟶ $\underline{1^\circ \text{ CAMINO}}$: $(1 + \cos x - 1)^{\cdots}$

$\underline{2^\circ \text{ CAMINO}}$: $\lim\limits_{x \to 0} \left(e^{\ln(\cos x)}\right)^{1/x^2}$

$\cos x - 1 \sim -x^2/2$

$= \lim\limits_{x \to 0} e^{-\cancel{x^2}/2 \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}}} = \boxed{e^{-1/2}}$

$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

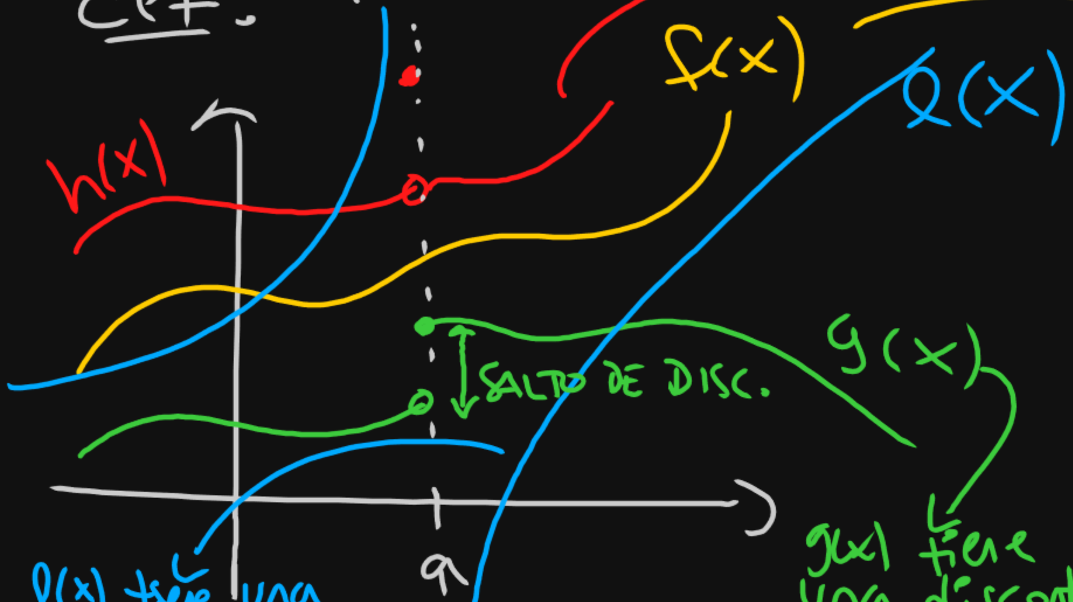
$\underline{\text{RECUERDO}}$

Si $w \to 1$

$\ln(w) \sim w - 1$

CONTINUIDAD

def: f(x) es continua en $x=a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$



f(x) es continua en $x=a$

h(x) tiene una discontinuidad **evitable** en $x=a$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim_{x\to a} h(x) & x=a \end{cases}$$

si es continua

g(x) tiene una discontinuidad no evitable en $x=a$ (de salto o 1° especie)

l(x) tiene una discontinuidad de 2° especie en $x=a$

ej: $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $\quad \operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

obs: si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x=a$

$\Rightarrow f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$, $f(g(x))$, (si f es continua en $g(a)$) $\frac{f(x)}{g(x)}$ (siempre y cuando $g(a) \neq 0$) son continuas en $x=a$

$\Rightarrow f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$\nexists f(0)$; $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene una disc. evitable en $x=0$

CONTINUA EN $\mathbb{R}$ $\leftarrow$ $\bar{F}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

ej: estudiar la continuidad de $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

¿Dom(f)? $x^2 - x - 2 = 0 \rightsquigarrow x=2 \; ; \; x=-1$

$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ → ES CONTINUA AQUÍ

$x=-1$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \infty$

⇒ hay disc. de 2° especie en $x=-1$

$x=2$: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = \dfrac{5}{3}$

⇒ hay una disc. evitable en $x=2$

Asíntotas:

- $x = a$ es asíntota vertical del gráfico de $f(x)$ si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
- $y = b$ es asíntota horizontal del gráfico de $f(x)$ si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

$y = b$ es A.H por derecha

por izquierda.

- Asíntotas oblicuas

$y = mx + b$ es asíntota oblicua del gráfico de $f(x)$ si $\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (mx+b) \right) = 0$

↳ Obs: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = b$

ej: $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x+2}$ obs: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

Si tiene asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+1}{x^2+2x} = \ldots = 3$$

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - 3x = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+1}{x+2} - 3x = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+1-3x(x+2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{3x^2}+1-\cancel{3x^2}-6x}{x+2} = \ldots = -6 \Rightarrow \text{hay A.O en } y = 3x-6$$