Àlgebra lineal

Tema I: Determinants i matrius

José A. Montero, Xavier Sevillano, Joan Claudi Socoró

Índex de continguts

0. CONCEPTES BÀSICS DE MATRIUS

Denotem per M_{nxm} al conjunt de matrius de n files i m columnes.
Els elements d'una matriu $A \in M_{nxm}$ els expressem per a_{ij} on i = 1..n
Notació simbòlica: $A = (a_{ij})$ j = 1..m

· Suma:

$$A = (a_{ij}) \in M_{nxm}$$
$$B = (b_{ij}) \in M_{nxm}$$
$$A + B = C = (c_{ij}) \quad \text{on } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

<u>Propietats:</u>
- Associativa: (A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C
- ∃ element neutre: $N = (n_{ij})$ on $n_{ij}=0$
- ∃ element oposat: $A'=(a'_{ij})$ on $a'_{ij}=-a_{ij}$

· Producte per un escalar:

$$A = (a_{ij}) \in M_{nxm}$$
$$k, p \in C$$
$$kA = B = (b_{ij}) \quad \text{on } b_{ij} = ka_{ij}$$

<u>Propietats:</u>
- k (A+B) = kA+kB
- (k+p) A = kA+pA
- k (pA) = (kp) A

· Producte de matrius:

$$A = (a_{ij}) \in M_{nxm}$$
$$B = (b_{ij}) \in M_{mxp}$$
$$A \cdot B = C = (c_{ij}) \in M_{nxp}$$
$$\text{on } c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

<u>Propietats:</u>
- Associativa: A·(B·C) = (A·B)·C
- Distributiva respecte la suma:
  - A·(B+C) = A·B+A·C
  - (A+B)·C = A·C+B·C
- NO és commutativa A·B≠B·A

Tipus de matrius

· A columna: $A \in M_{nx1}$
· A fila: $A \in M_{1xm}$
· A quadrada: $A \in M_{nxn}$
· A trasposta: La trasposta de $A \in M_{nxm}$ és $A^T = (a_{ji}) \in M_{mxn}$ i es forma canviant files per columnes
· A conjugada: La conjugada de $A \in M_{nxm}$ és $A^* = (a^*_{ij}) \in M_{nxm}$ i es forma conjugant els elements de A
· A hermítica: si $A^*=A^T$
· A simètrica: si $A=A^T$
· A diagonal: si $a_{ij}=0 \quad \forall\ i \neq j$
· Matriu identitat: $I \in M_{nxn}$ on $a_{ij}=0 \quad \forall\ i \neq j$
$a_{ij}=1 \quad \forall\ i=j$
· A inversa: La inversa de $A \in M_{nxm}$ és A^{-1} que verifica que $A \cdot A^{-1}=A^{-1} \cdot A=I$
· A ortogonal: si $A^{-1}=A^T$
· A regular: si $\det A \neq 0$
· A singular: si $\det A=0$
· A idempotent: si $A^2=A$
· A triangular superior: si $A \in M_{nxn}$ i $a_{ij}=0 \quad \forall\ i>j$
· A triangular inferior: si $A \in M_{nxn}$ i $a_{ij}=0 \quad \forall\ i<j$
· A involutiva: si $A^2=I$

1. DETERMINANTS I MATRIUS

1.1 Concepte de determinant i propietats

El determinant d'una matriu quadrada $A\in M_{nxn}$ és un únic nº escalar $\in K$ cos commutatiu que s'associa a A mitjançant una regla de càlcul

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Casos particulars:

n=1 $\Rightarrow$ $|a_{11}|=a_{11}$

n=2 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

n=3 $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

Regla de Sarrus

Propietats dels determinants:

Sigui $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ on C_i és la columna i-essima

de manera que $C_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$

1.) $\det\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{j-1} & \vec{0} & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix}=0$ si una columna és tot zeros $\Rightarrow \det(A)=0$

2.) $\det\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix}=0$ si dues columnes són iguals $\Rightarrow \det(A)=0$

3.) $\det\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}=0$ si $C_j=\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\lambda_i C_i$

si alguna columna és C.L. (combinació lineal) de la resta $\Rightarrow \det(A)=0$

4.)

$$\det\left(C_1 \quad \dots \quad C_{j-1} \quad KC_j \quad C_{j+1} \quad \dots \quad C_n\right) =$$
$$= K\det\left(C_1 \quad \dots \quad C_{j-1} \quad C_j \quad C_{j+1} \quad \dots \quad C_n\right)$$

det (kA) = k^n·det A

5.)

$$\det\left(C_1 \quad \dots \quad C_{j-1} \quad C_j + C_j' \quad C_{j+1} \quad \dots \quad C_n\right) =$$
$$= \det\left(C_1 \quad \dots \quad C_{j-1} \quad C_j \quad C_{j+1} \quad \dots \quad C_n\right) + \det\left(C_1 \quad \dots \quad C_{j-1} \quad C_j' \quad C_{j+1} \quad \dots \quad C_n\right)$$

6.) $\det\left(C_1 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad C_j \quad \dots \quad C_n\right) = -\det\left(C_1 \quad \dots \quad C_j \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad C_n\right)$

si permutem 2 columnes, el determinant canvia de signe

7.) $\det\left(C_1 \quad \dots \quad C_j \quad \dots \quad C_n\right) = \det\left(C_1 \quad \dots \quad C_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \lambda_i C_i \quad \dots \quad C_n\right)$

si a una columna li sumem una C.L. de la resta, el determinant no canvia.

8.) det (A·B) = det A · det B A,B$\in M_{nxn}$

9.) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ si det A $\neq 0$

10.) det A = det A^T $\Rightarrow$ les 7 primeres propietats referents a columnes, també són certes per files

Exercici:

Es defineixen les següents matrius:

A=(C1 C2 C3 C4)
B=(C1 C2+3C1-C3 C3 C4)
D=(C1 5C2+3C1-C3 C3 C4)
E=(C1 3C1-C3 C3 C4)
F = (C4 C3 C2 C1)

Calcula el determinant de les matrius A, B, D, E i F en funció del determinant de la matriu A.

1.2 Càlcul de determinant per adjunts

Sigui $(a_{ij}) \in M_{nxn}$, l'ADJUNT de l'element a_{ij} és:

$adj\{aij\} = (-1)^{i+j} \cdot det(Aij)$

on $A_{ij} \in M_{(n-1)x(n-1)}$ és la matriu que s'obté suprimint la fila "i" i la columna "j" a la matriu A.

Càlcul det(A):

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \mathrm{adj}(a_{ik}) \quad \text{amb "i" una fila qualsevol}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot \mathrm{adj}(a_{kj}) \quad \text{amb "j" una columna qualsevol}$$

NOTA: és el mètode de càlcul de determinants habitual per a matrius d'ordre >3.

Exemple:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

desenvolupem det(A) per la fila 1

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$
$$+ a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14} \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

normalment, s'aplica aquesta propietat fins a obtenir matrius d'ordre 3 on apliquem la Regla de Sarrus.

Exercici:
Demostrar per adjunts el fet que el det(A), quan A és una matriu quadrada triangular, es calcula fent el producte dels elements de la diagonal.

1.3 Rang d'una matriu

Sigui $A \in M_{nxm}$ no nul.la,
rang(A) és un nº natural associat a A que determina una característica seva, rang(A)$\in$ N

MENOR D'ORDRE p ($p \le n$, $p \le m$) d'una matriu $A \in M_{nxm}$ és el determinant d'una matriu quadrada $\in M_{pxp}$ que s'obté suprimint "n-p" files i "m-p" columnes a la matriu A

Diem **RANG(A)** a l'ordre del "menor" més gran de A que sigui diferent de 0.

NOTA: Si una matriu A és no nul·la $\Rightarrow$ rang(A) ≥ 1, ja que existeix algun menor d'ordre $1 \ne 0$.

Exemple:

Calculeu el rang de la següent matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4 Inversa d'una matriu

Sigui $A \in M_{nxn}$ quadrada i $\det(A) \ne 0$, aleshores existeix $A^{-1} \in M_{nxn}$ (INVERSA de A) tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id$$

Mètodes per al càlcul d'A^{-1}:

a) Tradicional
b) Gauss (es veurà en el tema següent)

Mètode tradicional:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}\,(A^T) = \frac{1}{\det(A)} [\mathrm{Adj}\,(A)]^T$$

on $\mathrm{Adj}(A) \in M_{nxn}$ és la matriu que s'obté substituint cada element de A pel seu adjunt.

Exemple: Invertiu la següent matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMES PROPOSATS

Problema P.1

Raona (sense aplicar Sarrus), que les arrels del següent polinomi són 5, 7 i -12:

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & 7 & 7 \\ 7 & x & 5 \\ 5 & 5 & x \end{vmatrix}$$

Problema P.2

El mateix que l'exercici anterior, però ara amb arrels *a*, *b*, i *-(a+b)*:

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & b \\ b & b & x \end{vmatrix}$$

Problema P.3

Demostra aplicant només propietats dels determinants:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)(x-9)$$

Problema P.4

Resol l'equació següent mitjançant transformacions del determinant (aplicant propietats):

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$$

Problema P.5

Demostra la següent igualtat aprofitant el màxim nombre de propietats dels determinants:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix} = -2x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Problema P.6

Calcula en funció d'*N* , *a* i *b*, el determinant d'una matriu de *N* x *N* amb la següent estructura:

$$A_{NxN} = (a_{ij}) = \left\{ \begin{array}{ll} a & i = j \\ b & i \neq j \end{array} \right\}$$

Problema P.7

Demostra, aplicant les propietats dels determinants, la següent igualtat:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

Problema P.8

Demostra la següent afirmació:

La condició necessària i suficient per a que una matriu A (de dimensions *nxn*) sigui involutiva és :

$$(I - A)(I + A) = B$$

éssent *I* la matriu identitat d'ordre *N* i *B* la matriu nul·la d'ordre *N*.

Problema P.9

Comprova mitjançant les propietats dels determinants:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0 \qquad a, b, c \in \Re$$

Problema P.10

Troba el determinant de la matriu A:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓ: Det(A) = 6.

Problema P.11

Demostra la següent igualtat:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd + bcd + acd + abd + abc$$

Problema P.12

Comprova mitjançant les propietats dels determinants:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Problema P.13

Donades les matrius *I* , *A*:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) La inversa de $I - A$
b) La inversa de $I + A$
c) $(I + A)(I - A)^{-1}$

SOLUCIÓ:

a) $(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $(I+A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $(I+A)(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema P.14

Troba el rang de les següents matrius:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓ: a) rang = 3 b) rang = 2 c) rang = 3 d) rang = 4

Problema P.15

Troba, en el cas que sigui possible, les matrius inverses de:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fes-ho per 2 mètodes diferents.

SOLUCIÓ: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) det = 0 c) $\frac{1}{38}\begin{pmatrix} 9 & -14 & 13 & -2 \\ 17 & 20 & -5 & -8 \\ -1 & 10 & 7 & -4 \\ -6 & -16 & 4 & 14 \end{pmatrix}$ d) det = 0

Problema P.16

Sigui la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Troba la matriu X de 2×2 d'elements complexes que satisfà la següent igualtat:

$$A^2 + AX + I = N$$

essent I la matriu identitat d'ordre 2, i N la matriu nul·la d'ordre 2.

SOLUCIÓ: $X = -A - A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$

Problema P.17

Trobeu, aplicant el mètode de reducció de Gauss-Jordan, el rang de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓ: rang(A) = 4, rang(B) = 4, rang(C) = 2.

Problema P.18

Demostra la següent igualtat, aplicant el màxim de propietats dels determinants:

$$\begin{vmatrix} b & a+c & b \\ b+c & a & a \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = -4abc$$

Problema P.19

Calcula el determinant de la següent matriu genèrica d'ordre *N*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N \\ 2 & 1 & 2 & \dots & N-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & N-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N & N-1 & N-2 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{N\times N}$$

Problema P.20

Calcula el determinant de la següent matriu genèrica d'ordre N:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ b & a & a & \cdots & a \\ b & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in M_{N\times N}$$

PROBLEMES RESOLTS

Problema R.1

Demostra la següent igualtat, aplicant només propietats dels determinants:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)(x-9)$$

SOLUCIÓ:

Apliquem una de les propietats dels determinants:

> *Si a una columna (o fila) li sumem una combinació lineal de les altres columnes (o files), el determinant no varia.*

per transformar el determinant de l'enunciat en un determinant triangular inferior (0's per sobre de la seva diagonal principal):

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{1ª Fila - 3(4ª Fila)}} \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{2ª Fila - 2(4ª Fila)}} \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & x & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3ª Fila - 9(4ª Fila)}} \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 0 & 0 \\ -7 & -7 & x-9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolent ara per adjunts:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 0 & 0 \\ -7 & -7 & x-9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-3)(x-2)(x-9)1$$

D'altra banda, aplicant la propietat dels determinants que diu que el determinant de qualsevol matriu és 0 si aquesta té dos <u>*columnes*</u> o <u>*files*</u> iguals, podem deduir que:

si $x = 9$ la columna 3 i 4 del determinant són iguals $\Rightarrow p(9) = 0$
si $x = 2$ la columna 2 i 3 del determinant són iguals $\Rightarrow p(2) = 0$
si $x = 3$ la columna 1 i 2 del determinant són iguals $\Rightarrow p(3) = 0$

Per tant $p(x) = (x-9)(x-2)(x-3)$

Problema R.2

Troba el rang de les següents matrius:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓ:

a) Aplicant la regla de Sarrus per trobar el seu determinant:

$$\det(M)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2+3-4 \neq 0$$

- Si det(M) $\neq 0 \Rightarrow \quad Rang(M) = 3$
- Si det(M) $= 0 \Rightarrow \quad Rang(M) \leq 2$

Com el determinant de la matriu és $\neq 0$, el seu rang és el mateix de l'ordre de la matriu, és a dir, 3.

b) Com la matriu no es quadrada el seu rang serà l'ordre del menor més gran que tingui un determinant diferent de zero. D'aquesta matriu podem obtenir els següents quatre menors d'ordre 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \,; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \,; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \,; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -6 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \,;$$

Tots els determinants dels menors són zero; això vol dir que $Rang(M) \leq 2$.
Calculem el determinat dels menors d'ordre 2, si un d'ells és diferent de zero el rang serà 2.

Per exemple;

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \qquad \boxed{\text{RANG (M) = 2}}$$

c) Trobarem el determinant de la matriu mitjançant el càlcul del determinant per adjunts. Definim un cofactor o adjunt de l'element A_{ij} de la matriu (M) com adjunt de l'element $\{a_{ij}\} = (-1)^{i+j} \cdot \det\{M_{ij}\}$. On M_{ij} és la matriu que resulta de suprimir la fila 'i' i la columna 'j'.

Així doncs resolem segons hem definit:

$$\det M = 1\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}0 & -3 & -5\\ 1 & 5 & 9\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix} + 0 + 3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0 & -5\\ 3 & 1 & 9\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0 & -3\\ 3 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix} = 0$$

det(M) = 0 $\Rightarrow$ rang(M) $\neq 4$, és a dir, rang(M) ≤ 3
Calculem els menors d'ordre 3, si algun té determinant $\neq 0$, aleshores rang$M$=3.
Com els determinants dels menors d'ordre 3 anteriors són diferents de zero podem dir :

$$\boxed{\text{RANG (M) = 3}}$$

d) Com és una matriu no quadrada $\left[M_{4\times5}\right]$ el $RangM \leq 4$. Agafarem un dels menors d'ordre 4 i el resoldrem per adjunts. Per exemple:

$$\det\begin{vmatrix}2 & 3 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 8\end{vmatrix} = (-1)^2\,2\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 8\end{vmatrix} + (-1)^3\,3\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 5 & 2 & 8\end{vmatrix} + (-1)^4\,5\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 8\end{vmatrix} + (-1)^5\,1\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 1 & 2\end{vmatrix} = 32 \neq 0$$

Com el determinant d'aquest menor d'ordre quatre és diferent de zero, el rang de la matriu és 4.

$$\boxed{\text{RANG (M) = 4}}$$

NOTA: El rang d'una matriu també es pot calcular pel mètode de Gauss, de forma que el rang serà igual al número de files diferents de zero de la matriu resultant després d'acabar el procés de eliminació Gaussiana.