Pricing des options européennes par le modèle d'Heston et comparaisons avec le modèle de Black and Scholes et la méthode de Monté Carlo sous R

PSB 2020-2022

Réalisé par :

- Arnaud Bruel YANKOU KOUATCHOU

Table des matières

1 INTRODUCTION

Ce projet a pour but de décrire le modèle d'Heston pour le Pricing des options européennes, ainsi que faire une comparaison avec le modèle de Black and Scholes et la méthode de Monté Carlo pour la valorisation des options européennes sous R.

Le modèle de Heston joue un rôle crucial en finance pour le calcul du prix des produits dérivés ainsi que dans la gestion des risques.

Nous nous concentrerons dans cette étude sur la détermination du prix d'options européennes. Pour ce faire, nous distinguerons trois manières différentes de calculer le prix de l'option.

Dans un premier temps, l'étude sera axée le modèle de Heston classique qui sera ensuite affiné par des techniques d'influences des paramètres sur le prix de l'option. Dans un second temps, l'étude portera sur la méthode de Monte-Carlo et le modèle de Black and Scholes pour Pricer l'option européenne. En dernière partie, nous ferons une étude comparative des trois méthodes de simulation utilisés pour enfin tirer une conclusion

2 PRICING D’UNE OPTION EUROPEENNE AVEC LE MODELE D’HESTON

2.1 OPTION EUROPEENNE

2.1.1 Définition

Une option correspond au droit d’acheter ou de vendre un actif sous-jacent (action, indice, devise, etc.) à un prix fixé d’avance durant un laps de temps donné en contrepartie du versement d’une prime.

L’acheteur de l’option acquiert un droit et paie en contrepartie une prime à un vendeur d’options qui aura une obligation. Le vendeur accorde un droit à l’acheteur de l’option et s’engage à lui livrer l’actif sous-jacent dès qu’il le réclamera.

La prime de l’option n’est pas fixe, mais fluctue selon l’état de l’offre et de la demande.

2.1.2 Fonctionnement

Le prix d’une option européenne est calculé à partir de 2 facteurs :

1. La valeur intrinsèque (gain réalisé par l’investisseur en cas d’exercice immédiat de l'option), c’est-à-dire la différence entre le prix d’exercice et le prix à terme (l’arbitrage n’est possible qu’à l’échéance).
2. La valeur temps qui est égale à la différence entre la prime et la valeur intrinsèque. Elle prend en compte les variations de taux d’intérêt, l’échéance de l’option et la volatilité.

2.1.3 Utilité

Nous pouvons par exemple utiliser les options européennes pour :

- **Couvrir notre portefeuille** (ou “hedger”) : c’est-à-dire que nous prenons une assurance contre un mouvement de prix défavorable,
- **Spéculer** : moins dangereusement qu’en misant sur le sous-jacent si les paramètres adéquats sont sélectionnés,
- Obtenir **davantage de rendement** avec votre portefeuille d’actions.

2.1.4 Les stratégies mises en œuvre avec les options européennes

Les stratégies d’investissement des options européennes sont identiques à celles que permettent de mettre en place les options américaines.

Dans les deux cas, il peut s’agir d’un put ou d’un call. L’acheteur d’une option put anticipe la hausse du sous-jacent quand l’acheteur d’une option call anticipe la baisse du sous-jacent.

À noter : l'acheteur d'une option européenne peut décider de clôturer sa position s'il ne souhaite pas attendre son échéance pour l'exercer.

Le vendeur d'une option anticipe une baisse ou une stagnation de l'action sous-jacent. Il peut alors vendre un call pour obtenir un rendement supplémentaire sur ses actions via le montant de prime versé par l'acheteur de call si son anticipation se réalise. Il peut aussi vendre un put pour acquérir plus tard des titres à un prix inférieur et encaisser la prime versée par l'acheteur du put.

2.2 LE MODELE DEHESTON

Ce modèle représente une généralisation du modèle Black & Scholes du fait qu'il incorpore une volatilité qui varie avec le temps lors du calcul du prix de l'option. Ce modèle fournit une solution analytique (« closed-form solution ») pour calculer le prix d'une option d'achat, call, lorsqu'il y a une corrélation entre le prix du sous-jacent et sa volatilité. Il peut être adapté pour incorporer des taux d'intérêts stochastiques et par conséquent il peut être utilisé pour calculer le prix des options sur obligations et devises étrangères.

Il y a deux façons d'utiliser ce modèle, soit à travers la simulation de Monte Carlo du processus décrivant le prix de l'action, soit à travers une résolution analytique du prix de l'option qui exige l'évaluation d'intégrales complexes. Des expérimentations empiriques ont démontré que le modèle d'Heston tient compte de l'asymétrie (skewness) et du coefficient d'aplatissement (Kurtosis) de la distribution des prix de l'action et ajuste le prix des options en conséquence.

Le processus de diffusion qui décrit le prix de l'action est identique à celui de Black et Scholes, à l'exception de la volatilité qui varie dans le temps. Ce processus est décrit par l'équation :

$$dSt = \mu Sdt + \sqrt{v(t)}\, Sdz_1(t)$$

S : prix de l'action sous-jacente ;

µ : taux de rendement espéré instantané de l'action (drift parameter) ;

$\sqrt{V(t)}$: Volatilité du rendement de l'action ;

$dz_1(t)$: variable aléatoire brownienne du processus de Wiener, dont l'espérance est nulle et la variance égale à l'unité.

Si la volatilité $\sqrt{V(t)}$ suit le processus de diffusion de Ornstein-Uhlenbeck suivant :

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta\sqrt{v(t)}\, dt + \delta dz_2(t)$$

où $z_2(t)$ est un processus de Wiener qui a une corrélation p avec $z_1(t)$, alors le lemme

d'itô permet de montrer que le processus de diffusion de la variance v(t) s'écrit alors comme :

$$dv(t) = [\delta^2 - 2\beta\, v(t)]\, dt + 2\delta\sqrt{v(t)}\, \overline{dz_2(t)}$$

Cette équation peut se réécrire sous la forme du processus de Cox, Ingersoll, et Ross (1985):

$$dv(t) = [\theta - v(t)]\, dt + \sigma\sqrt{v(t)}\, dz_2(t)$$

θ : la moyenne de la variance à long terme ;

K : un paramètre de retour à la moyenne ;

σ: la volatilité de la volatilité ;

Par analogie avec le modèle de Black et Scholes, le prix d'un Call européen au temps

t avec une échéance de T-t, et dénoté par Call(S, v, t), selon Heston est donné par:

$$C(S, v, t) = SP1 - KP(t, T)P2$$

S : prix de l'action au temps t ;

K : le prix d'exercice de l'option ;

P(t, T) : le taux d'actualisation du temps t à T ;

P1 et P2 sont les probabilités risque neutres que le call vienne à échéance en jeu.

La parité entre le prix d'un call et celui d'un put permet d'obtenir le prix du put selon cette équation est :

$$Put(S, v, t) = Call(S, v, t) + KP(t, T) - S$$

Deux approches sont utilisées pour évaluer le prix de l’option, l'approche d'évaluation complète et l'approche de résolution analytique. Dans notre étude nous utiliseront la deuxième approche.

2.2.1 L'APPROCHE D'EVALUATION COMPLETE

Cette approche est une simulation Monte Carlo. Un grand nombre de trajectoires du prix de l'action est généré durant la vie de l'option selon le processus stochastique de St. Pour chaque trajectoire de prix, la valeur terminale de l'option est actualisée au taux sûr jusqu'au temps zéro. Ceci donne le prix de l'option pour une trajectoire. Ce processus est répété plusieurs fois et le prix de l'option sera évalué comme la moyenne des prix de l'option actualisés sur chaque trajectoire.

2.2.2 L'APPROCHE DE RESOLUTION ANALYTIQUE

Cette méthode est plus rapide que la précédente puisque l'on n'a pas à générer des trajectoires de prix. Cependant elle est plus difficile à implanter car elle requiert l'évaluation d'intégrales complexes lors du calcul des probabilités risque neutres P1 et P2.

Cette approche requiert de connaître le prix spot S_t de l'action, le prix d'exercice K, le temps jusqu'à échéance $\tau = T - t$, et le taux sans risque r. Elle requiert également d'estimer les paramètres du processus tels que la variance à long terme θ, la variance courante vt, le prix du risque de la volatilité λ, le paramètre de retour à la moyenne K, la volatilité de la variance σ, et le facteur de corrélation ρ entre le processus décrivant le prix de l'action et celui de sa volatilité.

Dans ce cas, la faiblesse du modèle de Heston (1993) provient de la nécessité d'une intégration numérique et les prix de l'option seront très sensibles à la dimension de l'intervalle d'intégration.

Il y a deux paramètres qui attirent particulièrement l'attention :

a) Le coefficient de corrélation entre le prix de l'action et sa volatilité, soit ρ. Une valeur négative de ρ induit une asymétrie négative dans la distribution des prix de l'action. En effet, l'asymétrie positive ou négative affecte les prix des options. Quand les prix du titre présentent une asymétrie négative, la probabilité de réaliser de grandes pertes est plus importante que celle prédite par le modèle Black & Scholes. Le modèle de Heston est capable de détecter l'asymétrie de la distribution et d'ajuster le prix du call en conséquence.

b) La volatilité de la variance σ qui affecte le prix du call. Le cas le plus simple est celui pour lequel σ=0, ce qui correspond à une variance déterministe dans le processus décrivant la volatilité de l'action. La volatilité de la variance contrôle le coefficient d'aplatissement ou « kurtosis » de la distribution des rendements : une plus grande volatilité de la variance augmente le kurtosis de la distribution tandis qu'une plus petite volatilité le fait diminuer.

En comparant le modèle de Heston à celui de Black et Scholes, on remarque que le modèle de Heston accorde des prix inférieurs au call qui est à parité mais des prix plus élevés pour les calls en jeu ou hors-jeu.

2.3 Pricing sous R d'une option Européenne par le modèle de Heston

Dans cette partie, nous allons voir l'influence des paramètres θ, K, σ, ρ, V0, λ du modèle de Heston sur le prix des options.

Par la suite, le prix d'exercice sera de 100, le taux d'intérêt de 5% et la maturité 6 mois, le prix de l'action est fixé à 100.

Voici le programme R qui va permettre de simuler le prix du call européen :

```r
callHestoncf <- function(S, K, tau, r, q, v0, vT, rho, k, sigma,
                         implVol = FALSE) {

    ##  *** Les entrées de notre fonction ***  ###

    ## S     = prix de l'actif sous-jacent
    ## K     = le strike ou prix d'exercice
    ## tau   = la maturité
    ## r     = Taux sans risque
    ## q     = rendement en dividendes
    ## v0    = La variance initiale
    ## vT    = La variance à long terme
    ## rho   = correlation
    ## k     = vitesse de retour moyenne
    ## sigma = volatilité de la volatilité (renvoie 0.01 si la valeur de cette derniere

    if (sigma < 0.01)
        sigma <- 0.01

    #Re(z) renvoie la partie réelle du nombre complexe z
    P1 <- function(om,S,K,tau,r,q,v0,vT,rho,k,sigma) {
        p <- Re(exp(-1i * log(K) * om) *
                cfHeston(om - 1i, S, tau, r, q, v0, vT, rho, k, sigma) /
                (1i * om * S * exp((r-q) * tau)))
        p
    }

    P2 <- function(om,S,K,tau,r,q,v0,vT,rho,k,sigma) {
        p <- Re(exp(-1i * log(K) * om) *
                cfHeston(om  ,S,tau,r,q,v0,vT,rho,k,sigma) /
                (1i * om))
        p
    }

    cfHeston <- function(om,S,tau,r,q,v0,vT,rho,k,sigma) {
        d <- sqrt((rho * sigma * 1i * om - k)^2 + sigma^2 *
                  (1i * om + om ^ 2))
        g <- (k - rho * sigma * 1i * om - d) /
            (k - rho * sigma * 1i * om + d)

        cf1 <- 1i * om * (log(S) + (r - q) * tau)
        cf2 <- vT*k/(sigma^2)*((k - rho * sigma * 1i * om - d) *
                              tau - 2 * log((1 - g * exp(-d * tau)) / (1 - g)))
        cf3 <- v0 / sigma^2 * (k - rho * sigma * 1i * om - d) *
            (1 - exp(-d * tau)) / (1 - g * exp(-d * tau))
        cf  <- exp(cf1 + cf2 + cf3)
        cf
    }
    ## ***le pricing*** ##

    vP1 <- 0.5 + 1/pi * integrate(P1,lower = 0, upper = Inf,
                                  S, K, tau, r, q, v0, vT, rho, k, sigma)$value
    vP2 <- 0.5 + 1/pi * integrate(P2,lower = 0, upper = Inf,
                                  S, K, tau, r, q, v0, vT, rho, k, sigma)$value
    result <- exp(-q * tau) * S * vP1 - exp(-r * tau) * K * vP2;

    result
}

#important
#. s'il n'y a pas de rendement en dividendes alors0
#result <-  S * vP1 - exp(-r * tau) * K * vP2;
```

2.3.1 Résultat de Sortie :

Lorsque nous appelons la fonction callHestoncf() du programme précédemment écrit avec ces différents paramètres :

callHestoncf(100,100,0.25,0.75,0.000001,0.2^2,0.2^2,-0.5,0.5,0.5)
Alors nous obtenons la valeur du call qui est de : **17.41851**

N.B. La valeur du put peut également être obtenu en utilisant la relation de la parité Call -put.

2.4 Influence des paramètres

2.4.1 Influence du paramètre θ

Le paramètre θ représente la moyenne de la volatilité à long terme.

Plus la moyenne de la volatilité à long terme augmente, plus le prix du call est élevé.

Cela est logique car plus l'actif de l'option est volatile, plus la probabilité d'exercer l'option est grande.

2.4.2 Influence du paramètre k

Le paramètre k désigne la rapidité à laquelle la volatilité s'approche de θ.

Nous constatons que la vitesse de convergence de la volatilité vers la moyenne de la volatilité à long terme n'a presque pas d'influence sur le prix du call. On peut conclure que plus on converge rapidement vers la volatilité à long terme, moins l'éventail des valeurs pour la volatilité implicite sera important. Ce qui parait logique.

2.4.3 Influence du paramètre σ (sigma)

Le paramètre σ désigne la volatilité de la volatilité.

On peut remarquer deux choses :

1. Lorsque le prix de l'action est très loin du prix d'exercice (deeply out of the money) l'option ayant un grand σ coûte plus cher.

2. A l'inverse, lorsque le prix de l'action est proche du prix d'exercice et même dans la monnaie, l'option ayant un petit σ coûte plus cher.

Ces observations sont tout à fait logiques : pour une option deeply out of the money, le fait d'avoir une grande volatilité de la volatilité fera que son prix augmentera car il y aura une chance d'exercer l'option. Dans le cas où l'on est proche du prix d'exercice, cela pénalisera le prix de l'option car on peut très vite se retrouver très loin du prix d'exercice. En fait, il faut visualiser qu'une volatilité de volatilité importante entraine une plage de volatilité énorme, ce qui est confirmé par le tracé de la volatilité implicite.

Enfin, il est normal que le prix d'un call ou d'un put baisse lorsque la volatilité de la volatilité augmente (pour S = 100) car nous avons moins de chances d'exercer l'option.

2.4.4 Influence du paramètre ρ

Influence du paramètre ρ Le paramètre ρ correspond à la corrélation entre le mouvement brownien Z_t^1 de l'actif et le mouvement brownien Z_t^2 de la volatilité.

Nous observons que ce paramètre n'a quasiment pas d'influence sur le prix d'un call ou d'un put. Par contre, si ρ = 0 alors on a un smile de volatilité classique.

2.4.5 Influence du paramètre v_0

Le paramètre v_0 est la volatilité initiale.

Plus la volatilité initiale est élevée, plus le prix du call est important. Ce constat est logique comme nous l'avons vu avant. La plus grosse différence est marquée autour du strike et se réduit lorsque l'on est dans la monnaie.

2.4.6 Influence du paramètre λ

Le paramètre λ est la prime de risque de volatilité.

Plus λ est élevé, plus le prix du call est faible. En effet, lorsque la prime de risque de volatilité est importante, cela signifie que l'on attend une volatilité plus importante. Or lorsque l'on fait bouger λ, les autres paramètres restent fixes donc la volatilité n'augmente pas, ce qui se traduit par une baisse du prix de l'option.

2.5 Conclusion

L'atout majeur de la solution analytique est qu'elle donne la solution exacte pour le prix du call que l'on veut pricer avec le modèle de Heston. Toutefois, cette méthode nous a demandé plus de travail dans la mesure où il a fallu développer un module pour gérer les nombres complexes et de plus, au point de vue calcul, il y a deux intégrales conséquentes à calculer.

3 COMPARAISONS DE PRICING D'UN CALL EUROPEEN PAR LA MODEL DE HESTON, LE MODELE DE BLACK AND SCHOLES ET LA METHODE DE MONTE CARLO

3.1 Méthode de Black & Scholes :

Ce modèle mathématique provient du travail de trois chercheurs ; Fischer Black, Myron Scholes et Bob Merton. Leurs recherches ont mérité le prix Nobel de l'économie en 1997. Les options étaient déjà fréquemment transigées sur les marchés boursiers, mais il n'y avait aucune méthode mathématique précise pour trouver le prix théorique que devrait valoir une option. Les investisseurs avaient une idée générale de ce qui pouvait influencer le prix d'une option, mais cette formule vient confirmer le tout et vient aussi établir la relation causale entre toutes les variables.

Le prix théorique d'une option d'achat, qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif S à la valeur K à la date T, est caractérisé par son payoff :

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K; 0)$$

Il est donné par l'espérance sous probabilité risque neutre du payoff terminal actualisé :

$$C = \mathbb{E}(\text{Payoff} \times e^{-rT})$$

soit la formule de Black-Scholes :

$$C(S_0, K, r, T, \sigma) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

De même, le prix théorique d'une option de vente, de payoff

$$(K - S_T)^+ = \max(K - S_T; 0)$$

est donné par :

$$P(S_0, K, r, T, \sigma) = -S_0 \mathcal{N}(-d_1) + K e^{-rT} \mathcal{N}(-d_2)$$

$$c = S\,N(d_1) - X\,e^{-rT}\,N(d_2)$$
$$p = X\,e^{-rT}\,N(-d_2) - S\,N(-d_1)$$

Avec :

N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite N(0;1), c'est-à-dire :

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{Ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

À première vue, cette formule est imposante mais il suffit d'expliquer chacune des 5 variables utilisées :

S_0 = Prix actuel de l'action
K = Prix d'exercice de l'option
T = Temps restant avant l'expiration de l'option (échéance), en pourcentage d'une année
r = Taux d'intérêt sans risque
σ = volatilité implicite du prix de l'action, mesurée par un décimal

Il a été démontré que ces 5 variables avaient en effet une influence directe sur le prix d'une option, mais maintenant nous voyons le tout sous la forme d'équation. Cependant, il y a aussi certaines suppositions que le modèle utilise :

Options de type européen

Les options européennes ont la particularité de pouvoir se faire exercer seulement à la date d'expiration, contrairement aux options américaines qui peuvent se faire exercer à tout moment avant la date d'expiration. Le fait de pouvoir choisir la date de levée pour les actions américaines leurs procure une plus grande valeur aux yeux des investisseurs.

Aucun dividende

Ce modèle assume que l'action sous-jacente ne verse aucun dividende pour toute la durée de l'option. En pratique, plusieurs actions sur les marchés boursiers versent des dividendes régulièrement. Le versement des dividendes fait diminuer le cours de l'action, et donc diminuera aussi le prix des options d'achats. Une version subséquente de ce modèle est venue corriger cette lacune.

Marché efficients

La formule BSM assume aussi que les marchés sont efficients, c'est-à-dire que tout est valorisé de façon rationnelle et qu'aucune opportunité d'arbitrage n'est présente sur les marchés. Cependant, nul ne peut nier que les marchés financiers agissent souvent de manière irrationnelle, surtout à court terme.

Aucune commission ni impôt

Malgré que la levée d'une option peut entraîner certains frais et commissions, ce modèle assume qu'il n'y en a pas. Les impôts exigibles suite à la vente sont aussi ignorés quoique c'est une réalité très importante pour un investisseur.

Invariabilité de du taux d'intérêt et de la volatilité

Le taux d'intérêt sans risque et la volatilité implicite du prix de l'action doivent demeurer constants pour la durée de l'option. En pratique, le taux d'intérêt peut changer régulièrement selon les taux directeurs, alors que la volatilité du cours de l'action peut aussi avoir de grandes variations dans le temps.

Rendements normaux

Les rendements réalisés suivent le modèle d'une distribution normale afin que l'approche logarithmique soit valide.

3.1.1 Décomposition de la formule

La formule pour trouver la valeur théorique de l'achat d'option d'achat et l'option de vente peut être décomposée en deux parties distinctes.

S_0 N(d_1) est le prix actuel de l'action multiplié par la valeur du tableau correspondant au résultat de la formule d1.

K e^{-rT} N(d_2) est le prix d'exercice qu'il faut actualiser, pour ensuite le multiplier par la valeur du tableau correspondant au résultat de la formule d2.

Tout ceci est logique car une option d'achat devrait effectivement valoir le prix de l'action aujourd'hui soustrait de son prix d'exercice. Il suffit donc de regarder en détails les formules d1 et d2. Quoiqu'en apparence plus complexe, la formule pour d1 démontre les caractéristiques suivantes :

- Plus le prix de l'action (S) est élevé, plus la valeur de d1 sera élevée
- Plus la volatilité augmente (σ), plus d1 sera élevé aussi puisque la volatilité apparaît au numérateur et au dénominateur
- Plus le temps avant expiration augmente (T), plus d1 sera élevé aussi

La formule d2 est utilisée pour déterminer la valeur de P, donc l'option d'achat de vente. d2 est très semblable à d1, sauf que la volatilité enlève de la valeur à d2, et la volatilité est précédée du signe négatif dans la formule.

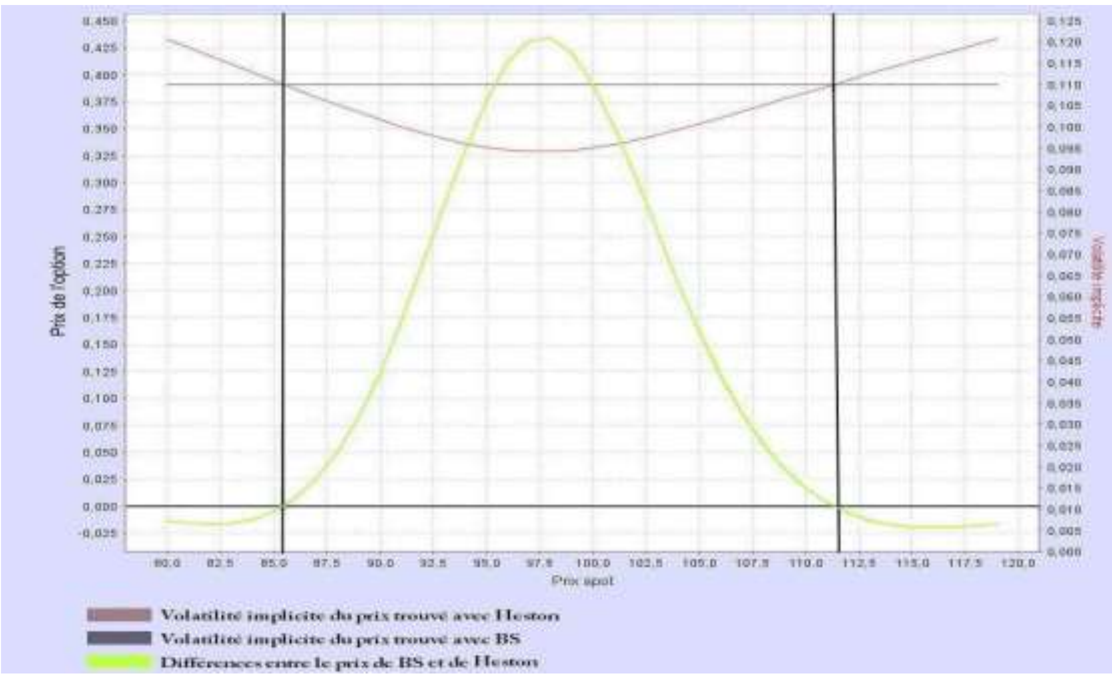
Tous les éléments de la formule sont donc en accord avec les facteurs qui expliquent la valeur des options.

3.1.2 Application sous R

```r
# Pricing d'une option européénne par la méthode de Black & Scholes

B_S<-function(S0,K,tau,r,sigma)
{
    ## S0     = prix de l'actif sous-jacent
    ## K     = le strike ou prix d'exercice
    ## tau   = la maturité
    ## r     = Taux sans risque
    ## sigma = volatilité

    S<-rep(0,10000)
    P<-rep(0,10000)

    d1<-(1/(sigma*sqrt(tau)))*(log(S0/K)+(r+(1/2)*sigma^2)*tau)
    d2<-d1-sigma*sqrt(tau)
    call<-S0*pnorm(d1,mean=0,sd=1)-exp(-r*tau)*S0*pnorm(d2,mean=0,sd=1)
    return(call)
}

#exemple
B_S(100,100,0.25,0.75,0.2)
#la valeur du call est de : 17.20436
```

3.2 Modèle de Heston et Black & Scholes :

Nous avons observé quelque chose d'intéressant entre le modèle de Heston et le modèle de Black & Scholes en faisant notre étude. Nous avons remarqué que si la volatilité implicite du modèle de Black & Scholes (constante) et celle du modèle de Heston se croisent en un point, alors le prix trouvé par le modèle de Heston est le même que celui trouvé par Black & Scholes. Ci-dessous, une constatation de ce phénomène : nous avons tracé les volatilités implicites des deux modèles, et la différence de prix entre Black & Scholes et Heston (en vert) :



Interprétation : Lorsque la volatilité implicite du modèle de Heston est inférieure à celle de Black & Scholes, le prix donné par BS est supérieur à celui de Heston. Et pour une même volatilité implicite, les deux modèles donnent le même prix de l'option.

3.3 Princing d'une option Européenne par la méthode de Monté Carlo

Les techniques de simulation par méthode de Monte Carlo utilisent la loi forte des grands nombres pour estimer la valeur recherchée I_g. Si les courbes $S^i = \{S^i_t, 0 \le t \le T\}$, $1 \le i \le N$, représentent N trajectoires indépendantes distribuées suivant une même loi, alors

$$c_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g\left(S^i\right) \xrightarrow{p.s.} I_g.$$

La simulation Monte Carlo a la particularité d'être simple à utiliser dans l'évaluation des produits dérivés. Cette méthode consiste à générer de nombreuses trajectoires possibles de l'actif sous-jacent, calculer les valeurs terminales du produit dérivé pour chaque trajectoire, prendre leur moyenne et l'actualiser. Ainsi, la simulation Monte Carlo, consiste à générer une trajectoire de l'actif sous-jacent dans le monde risque neutre, ensuite calculer à partir de cette trajectoire la valeur du produit dérivé, répéter ces étapes un certain nombre de fois, et enfin calculer la moyenne du produit dérivé et l'actualiser. La technique de simulation Monte Carlo s'applique aisément aux dérivés de taux d'intérêt, et reste performante lorsque le modèle fait appel à plusieurs variables d'état, son taux de convergence est indépendant du nombre de variables d'état utilisées. Un autre avantage est qu'elle peut être utilisée avec plusieurs modèles ayant des structures différentes pour la fonction de paiement (payoff). Cependant, une faiblesse de cette méthode est que la simulation génère des trajectoires de l'actif sous-jacent de façon forward dans le temps, tandis que la détermination de la stratégie d'exercice optimal nécessite des techniques de style backward, comme celles utilisées en programmation dynamique. Pour contourner cet inconvénient, plusieurs méthodes hybrides combinant la simulation et la programmation dynamique ont été suggérées dans la littérature.

3.3.1 Application au calcul des options européennes

On reprend l'expression d'un call donnée par la formule (1.4) :

$$C(T, K) = \mathbb{E}(e^{-rT}(S_T - K)_+)$$

Qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$C(T, K) = \mathbb{E}(f(S_T))$$

Avec $f(S_T) = e^{-rT} \max(S_T - K, 0)$, $S_T = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}\,\omega}$, et ω suit une loi N (0, 1).

D'après ce qui précède, la densité f_X à choisir est celle d'une loi N (0, 1). Nous allons utiliser l'algorithme suivant :

$$\left[\begin{array}{l}
-\textit{Générer } N \textit{ réalisations indépendantes du prix de l'actif } S_T \ : S_T^{(1)},\ldots,S_T^{(N)},\\[2ex]
-\textit{Calculer } f(S_T^{(i)}) \textit{ pour } 1\le i\le N,\\[2ex]
-\textit{Estimer } C(T,K) \textit{ (et donc } P(T,K)) \textit{ par } \ : \hat{J}_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(S_T^{(i)}),\\[2ex]
-\textit{Calculer la variance par } \ : \hat{\varsigma}_N^2=\dfrac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} f(S_T^{(i)})^2-N\hat{J}_N^2\right) \textit{ et donner les}\\
\textit{intervalles de confiance.}
\end{array}\right.$$

3.3.2 Application sous R

```r
# Pricing d'un CALL Européen par la méthode de Monté Carlo

Monte_Carlo1<-function(S0,K,tau,r,sigma)
{
    ## S0     = prix de l'actif sous-jacent
    ## K      = le strike ou prix d'exercice
    ## tau    = la maturité
    ## r      = Taux sans risque
    ## sigma = volatilité



    S<-rep(0,10000)
    P<-rep(0,10000)


    for(j in 1:10000){
        S[j]=S0*exp((r-(1/2)*(sigma^2))*(tau)+sigma*sqrt(tau)*rnorm(1,mean=0,sd=1))
        P[j]<-max(S[j]-K,0)*exp(-r*(tau))

    }

    return(P)
}

#Exemple

L1<-Monte_Carlo1(100,100,0.25,0.75,0.2)
Call<-mean(L1)
Call
#la valeur du call est de : 17.28037

#Le put est obtenu en utilisant la relation de la parité Call-put
```

```r
# intervalle de confiance de 99%
born_sup2<-mean(L1)-qnorm(0.005,mean=0,sd=1)*sqrt(10000)/sd(L1)
born_inf2<-mean(L1)+qnorm(0.005,mean=0,sd=1)*sqrt(10000)/sd(L1)
int_99<-c(born_inf2,born_sup2)
int_99
```

```
> int_99
[1] -8.532305 43.221963
```

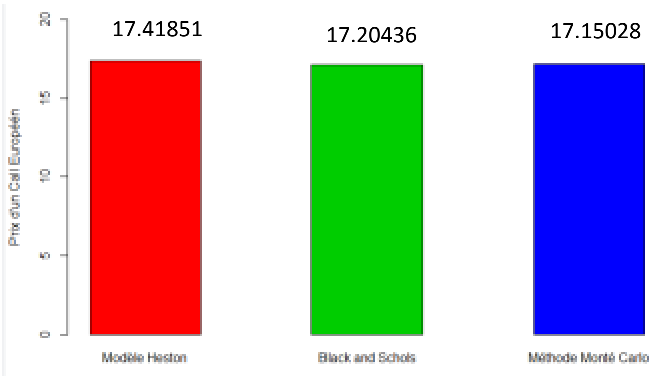
3.4 Comparaison des trois méthodes sous R

3.4.1 Première simulation

Les paramètres : S = 100; K = 100; tau = 0.25; r = 0.75; q = 0.01;v0 = 0.2^2; vT = 0.2^2 rho = -0.5; k = 0.5; sigma = 0.5

```
# Comparaison des 3 méthodes avec les mêmes paramètres

Heston<-callHestoncf(100,100,0.25,0.75,0.000001,0.2^2,0.2^2,-0.5,0.5,0.5)
B_and_S<-B_S(100,100,0.25,0.75,0.2)
Monte_Carlo<-Monte_Carlo1(100,100,0.25,0.75,0.2)

Comparaison<-matrix(c(Heston,B_and_S,Monte_Carlo),nrow=1,byrow=T)
colnames(Comparaison)<-c("Modèle Heston","Black and Schols","Méthode Monté Carlo")
rownames(Comparaison)<-"Prix d'un Call Européén"
View(Comparaison)
```

	Modèle Heston	Black and Schols	Méthode Monté Carlo
Pricing d'un Call Européén	17.41851	17.20436	17.15028

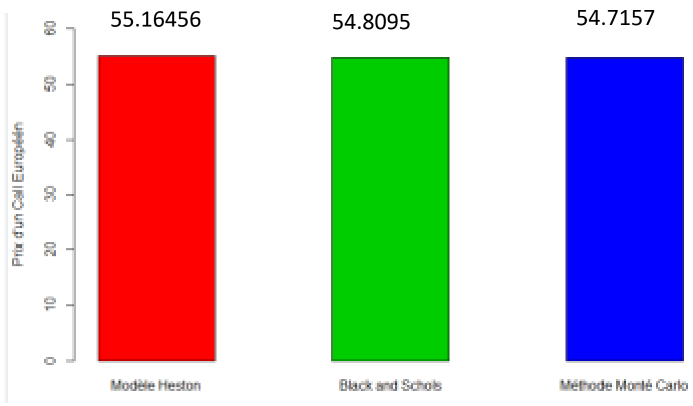


3.4.2 Deuxième simulation

Nous faisons plusieurs simulations en changeant les paramètres afin d'en tirer une conclusion comparative sur les différentes méthodes.

Les paramètres : S = 200; K = 200; tau = 0.4; r = 0.8; q = 0.01;v0 = 0.2^2; vT = 0.2^2 rho = -0.5; k = 0.5; sigma = 0.5

	Modèle Heston	Black and Schols	Méthode Monté Carlo
Prix d'un Call Européén	55.16456	54.8095	54.7157



On remarque dans les deux cas que : Call(Heston) ≥ Call(B and S) et Call(Heston) ≥ Call(Monté Carlo).