Práctica 3. Algoritmo BCJR Max Log

1) Objetivo

2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

3) Enrejado y función find

Práctica 3.
1) Objetivo

- Programación del algoritmo BCJR Max Log

- BCJR

  - Evaluación de LLR(x_i / $\mathbf{y}$)
  - Propuesto por Bahl, Cocke, Jelinek y Raviv en 1974

    L.Bahl, J.Cocke, F.Jelinek, and J.Raviv, "Optimal Decoding of Linear Codes for minimizing symbol error rate", IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-20(2), pp. 284-287, Marzo 1974

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

a) BCJR

- Cálculo de los parámetros γ, α y β para el cálculo del LLR(x_i / **y**)
  - $\gamma_i(S_{i-1},S_i) = P(x_i).P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i)$

    donde - $\mathbf{y}_i$: coordenadas recibidas en el instante i

    - $\mathbf{c}_i$: coordenadas enviadas en el instante i
    - $P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i)$: verosimilitud en el instante i
    - $P(x_i)$: Probabilidad a priori en el instante i

  - En la versión BCJR MAP, $\gamma_i(S_{i-1},S_i) = P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i)$

  En el criterio MAP (Máxima Probabilidad A posteriori), $P(x_i=0)=P(x_i=1)=1/2$. Dado un instante i, al calcular el LLR aparecen en el denominador y en el numerador el término $1/2$ que se simplifica.

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

a) BCJR

- Cálculo de los parámetros γ, α y β para el cálculo del LLR(x_i / **y**)
  - $\gamma_i\,(S_{i-1},S_i) = P(x_i).P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i)$ para un canal AWGN y una BPSK (las coordenadas que forman parte de la palabra $\mathbf{c}_i$ son -1 o 1).

    $\gamma_i\,(S_{i-1},S_i) = P(x_i).[1/\,(2\pi\sigma^2)^{1/2}]^n.\exp(\,-||\mathbf{y}_i - \mathbf{c}_i||^2 / (2\sigma^2)\,)$

    $\gamma_i\,(S_{i-1},S_i) = P(x_i).[1/\,(2\pi\sigma^2)^{1/2}]^n.\exp(\,-(\;||\mathbf{y}_i\,||^2 + ||\,\mathbf{c}_i||^2 - 2 < \mathbf{y}_i\,,\mathbf{c}_i >) / (2\sigma^2)\,)$

  Dado un instante i, al calcular el LLR aparecen en el denominador y en el numerador los términos $[1/\,(2\pi\sigma^2)^{1/2}]^n$, $\exp(-||\mathbf{y}_i\,||^2)$ y $\exp(-||\mathbf{c}_i||^2)$ que se simplificarán. Así que se coge

    $\gamma_i\,(S_{i-1},S_i) = P(x_i).\exp(< \mathbf{y}_i\,,\mathbf{c}_i >/\sigma^2)$

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

a) BCJR

- Cálculo de los parámetros γ, α y β para el cálculo del LLR(x_i / **y**)
  - $\alpha_i(S_i) = \sum \alpha_{i-1}(S_{i-1})\, \gamma_i(S_{i-1},S_i)$ donde se suman todos los términos que permiten pasar al estado S_i en el instante i desde todos los estados posibles S_{i-1} en el instante i-1.
  - $\beta_{i-1}(S_{i-1}) = \sum \gamma_i(S_{i-1},S_i)\, \beta_i(S_i)$ donde se suman todos los términos que permiten pasar al estado S_{i-1} en el instante i-1 desde todos los estados posibles S_i en el instante i.

  - Suponiendo N instantes, partiendo del estado 0 y llegando al estado 0 en codificador y decodificador, las condiciones iniciales son:

    $\alpha_0(S_0) = 1$ si $S_0 = 0$ y $\alpha_0(S_0) = 0$ si $S_0 \neq 0$

    $\beta_N(S_N) = 1$ si $S_N = 0$ y $\beta_N(S_N) = 0$ si $S_N \neq 0$

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

a) BCJR

- Cálculo de los parámetros γ, α y β para el cálculo del LLR(x_i / **y**)
  - $LLR(x_i/\mathbf{y}) = \ln [\, a^{(1)}(x_i,\mathbf{y}) \;/\; a^{(0)}(x_i,\mathbf{y})\,]$

    donde

    $$a^{(1)}(x_i,\mathbf{y}) = \sum \alpha_{i-1}(S_{i-1})\, \gamma_i^{(1)}(S_{i-1},S_i)\, \beta_i(S_i)$$
    $$a^{(0)}(x_i,\mathbf{y}) = \sum \alpha_{i-1}(S_{i-1})\, \gamma_i^{(0)}(S_{i-1},S_i)\, \beta_i(S_i)$$

  en $a^{(1)}(x_i,\mathbf{y})$ se suman todos los términos que permiten decodificar un 1 (ya que dichos términos son transiciones del estado S_{i-1} en el instante i-1 al estado S_i en el instante i que suponen un 1). En $a^{(0)}(x_i,\mathbf{y})$ se suman todos los caminos que suponen decodificar un 0 en el instante i.

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

b) BCJR Log

- Cálculo de los parámetros $\gamma^{(L)}$, $\alpha^{(L)}$ y $\beta^{(L)}$ para el cálculo del LLR(x_i / **y**)
  - $\gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) = \mathbf{ln}\ (\ P(x_i).P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i)\ \ )$
    donde - $\mathbf{y}_i$: coordenadas recibidas en el instante i
    - $\mathbf{c}_i$: coordenadas enviadas en el instante i
    - $P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i)$: verosimilitud en el instante i
    - $P(x_i)$: Probabilidad a priori en el instante i

  - En la versión BCJR Log MAP, $\gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) = \mathbf{ln}(\ P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i)\ \ )$

  En el criterio MAP (Máxima Probabilidad A posteriori), $P(x_i=0)=P(x_i=1)=1/2$. Dado un instante i, al calcular el LLR aparecen en el denominador y en el numerador el término 1/2 que se simplifica.

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

b) BCJR Log

- Cálculo de los parámetros $\gamma^{(L)}$, $\alpha^{(L)}$ y $\beta^{(L)}$ para el cálculo del $LLR(x_i \,/\, \mathbf{y})$
  - $\gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) = \mathbf{ln}\ (\ P(x_i).P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i)\ )$ para un canal AWGN y una BPSK (las coordenadas que forman parte de la palabra $\mathbf{c}_i$ son -1 o 1).

    $\gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) = \mathbf{ln}\ (\ P(x_i)\ .\ \exp(< \mathbf{y}_i\,,\mathbf{c}_i >/\sigma^2)\ ) = \mathbf{ln}\ (\ P(x_i)\ ) + (1/\sigma^2) < \mathbf{y}_i\,,\mathbf{c}_i >$

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

b) BCJR Log

- Cálculo de los parámetros $\gamma^{(L)}$, $\alpha^{(L)}$ y $\beta^{(L)}$ para el cálculo del LLR(x_i / **y**)
  - $\alpha_i^{(L)}(S_i) = \mathbf{ln} [\sum \alpha_{i-1}(S_{i-1}) \gamma_i (S_{i-1},S_i)] = \mathbf{ln} [\sum \exp(\alpha_{i-1}^{(L)}(S_{i-1})) \exp(\gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i))]$
    $\alpha_i^{(L)}(S_i) = \mathbf{ln} [\sum \exp(\alpha_{i-1}^{(L)}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i))]$
    donde se suman todos los términos que permiten pasar al estado S_i en el instante i desde todos los estados posibles S_{i-1} en el instante i-1.
  - $\beta_{i-1}^{(L)}(S_{i-1}) = \mathbf{ln} (\sum \gamma_i (S_{i-1},S_i) \beta_i(S_i))$
    $\beta_{i-1}^{(L)} (S_{i-1}) = \mathbf{ln} [\sum \exp(\gamma_i^{(L)} (S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)}(S_i))]$
    donde se suman todos los términos que permiten pasar al estado S_{i-1} en el instante i-1 desde todos los estados posibles S_i en el instante i.

  - Suponiendo N instantes, partiendo del estado 0 y llegando al estado 0 en codificador y decodificador, las condiciones iniciales son:
    $\alpha_0^{(L)}(S_0) = 0$ si $S_0 = 0$ y $\alpha_0^{(L)}(S_0) = -\infty$ si $S_0 \neq 0$
    $\beta_N^{(L)}(S_N) = 0$ si $S_N = 0$ y $\beta_N^{(L)}(S_N) = -\infty$ si $S_N \neq 0$

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

b) BCJR Log

- Cálculo de los parámetros $\gamma^{(L)}$, $\alpha^{(L)}$ y $\beta^{(L)}$ para el cálculo del $LLR(x_i / \mathbf{y})$
  - $LLR(x_i/\mathbf{y}) \quad = a^{(1)(L)}(x_i,\mathbf{y}) \ - \ a^{(0)(L)}(x_i,\mathbf{y})$

    donde

$$a^{(1)(L)}(x_i,\mathbf{y}) = \ln \left[\sum \alpha_{i-1}(S_{i-1})\, \gamma_i^{(1)}(S_{i-1},S_i)\, \beta_i(S_i) \right]$$
$$a^{(1)(L)}(x_i,\mathbf{y}) = \ln \left[\sum \exp(\alpha_{i-1}^{(L)}(S_{i-1}))\, \exp(\gamma_i^{(1)(L)}(S_{i-1},S_i))\, \exp(\beta_i^{(L)}(S_i)) \right]$$
$$a^{(1)(L)}(x_i,\mathbf{y}) = \ln \left[\sum \exp(\alpha_{i-1}^{(L)}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(1)(L)}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)}(S_i)) \right]$$
$$a^{(0)}(x_i,\mathbf{y}) = \ln \left[\sum \exp(\alpha_{i-1}^{(L)}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(0)(L)}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)}(S_i)) \right]$$

en $a^{(1)(L)}(x_i,\mathbf{y})$ se suman todos los términos que permiten decodificar un 1 (ya que dichos términos son transiciones del estado S_{i-1} en el instante i-1 al estado S_i en el instante i que suponen un 1). En $a^{(0)(L)}(x_i,\mathbf{y})$ se suman todos los caminos que suponen decodificar un 0 en el instante i.

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

c) BCJR Max Log

- Cálculo de los parámetros $\gamma^{(L)*}$, $\alpha^{(L)*}$ y $\beta^{(L)*}$ para el cálculo del LLR(x_i / **y**)
  - $\gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) = \mathbf{ln}\ (P(x_i).P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i))$

    donde - $\mathbf{y}_i$: coordenadas recibidas en el instante i

    - $\mathbf{c}_i$: coordenadas enviadas en el instante i
    - $P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i)$: verosimilitud en el instante i
    - $P(x_i)$: Probabilidad a priori en el instante i

  - En la versión BCJR Max Log MAP, $\gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) = \mathbf{ln}\ (P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i))$

  En el criterio MAP (Máxima Probabilidad A posteriori), $P(x_i=0)=P(x_i=1)=1/2$. Dado un instante i, al calcular el LLR aparecen en el denominador y en el numerador el término 1/2 que se simplifica.

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

c) BCJR Max Log

- Cálculo de los parámetros $\gamma^{(L)*}$, $\alpha^{(L)*}$ y $\beta^{(L)*}$ para el cálculo del LLR(x_i / **y**)
  - $\gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) = \ln\left(P(x_i).P(\mathbf{y}_i/\mathbf{c}_i) \right)$ para un canal AWGN y una BPSK (las coordenadas que forman parte de la palabra $\mathbf{c}_i$ son -1 o 1).

    $\gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) = \ln\left(P(x_i) . \exp(<\mathbf{y}_i, \mathbf{c}_i>/\sigma^2) \right) = \ln\left(P(x_i) \right) + (1/\sigma^2) <\mathbf{y}_i, \mathbf{c}_i>$

    $\gamma_i^{(L)*}(S_{i-1},S_i) = \gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) = \ln\left(P(x_i) . \exp(<\mathbf{y}_i, \mathbf{c}_i>/\sigma^2) \right) = \ln\left(P(x_i) \right) + (1/\sigma^2) <\mathbf{y}_i, \mathbf{c}_i>$

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

c) BCJR Max Log

- Cálculo de los parámetros $\gamma^{(L)*}$, $\alpha^{(L)*}$ y $\beta^{(L)*}$ para el cálculo del LLR(x_i / **y**)
  - $\alpha_i^{(L)}(S_i) = \ln [\ \sum \exp(\ \alpha_{i-1}^{(L)}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i)\ )\ ] \approx \max \{\ \alpha_{i-1}^{(L)}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i)\ \}$

    $\alpha_i^{(L)*}(S_i) = \max \{\ \alpha_{i-1}^{(L)*}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(L)*}(S_{i-1},S_i)\ \}$

    al coger el máximo en $\alpha_i^{(L)*}(S_i)$ solo se tiene en cuenta el término más probable que permite pasar y acabar en el estado S_i en el instante i desde todos los estados posibles S_{i-1} en el instante i-1.
  - $\beta_{i-1}^{(L)}(S_{i-1}) = \ln [\ \sum \exp(\ \gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)}(S_i)\ )\ ] \approx \max \{\ \gamma_i^{(L)}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)}(S_i)\ \}$

    $\beta_{i-1}^{(L)*}(S_{i-1}) = \max \{\gamma_i^{(L)*}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)*}(S_i)\ \}$

    al coger el máximo en únicamente se tiene en cuenta el término más probable que permite pasar y acabar en el estado S_{i-1} en el instante i-1 desde todos los estados posibles S_i en el instante i.

  - Suponiendo N instantes, partiendo del estado 0 y llegando al estado 0 en codificador y decodificador, las condiciones iniciales son:

    $\alpha_0^{(L)*}(S_0) = 0$ si $S_0 = 0$ y $\alpha_0^{(L)*}(S_0) = -\infty$ si $S_0 \neq 0$

    $\beta_N^{(L)*}(S_N) = 0$ si $S_N = 0$ y $\beta_N^{(L)*}(S_N) = -\infty$ si $S_N \neq 0$

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

c) BCJR Max Log

- Cálculo de los parámetros $\gamma^{(L)}$, $\alpha^{(L)}$ y $\beta^{(L)}$ para el cálculo del LLR(x_i / **y**)
  - $LLR(x_i/\mathbf{y}) = a^{(1)(L)*}(x_i,\mathbf{y}) - a^{(0)(L)*}(x_i,\mathbf{y})$

    donde

$$a^{(1)(L)}(x_i,\mathbf{y}) = \ln\left[\sum \exp\left(\alpha_{i-1}^{(L)}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(1)(L)}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)}(S_i)\right)\right]$$

$$a^{(1)(L)}(x_i,\mathbf{y}) \approx \max\left\{\alpha_{i-1}^{(L)}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(1)(L)}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)}(S_i)\right\}$$

$$a^{(1)(L)*}(x_i,\mathbf{y}) = \max\left\{\alpha_{i-1}^{(L)*}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(1)(L)*}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)*}(S_i)\right\}$$

$$a^{(0)(L)*}(x_i,\mathbf{y}) = \max\left\{\alpha_{i-1}^{(L)*}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(0)(L)*}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)*}(S_i)\right\}$$

al coger el máximo en $a^{(1)(L)*}(x_i,\mathbf{y})$ se tiene en cuenta únicamente el término más probable que permite decodificar un 1 (se coge el máximo de todos los términos que suponen transiciones del estado S_{i-1} en el instante i-1 al estado S_i en el instante i que suponen un 1). En $a^{(0)(L)*}(x_i,\mathbf{y})$ se tiene en cuenta el camino más probable que supone decodificar un 0 en el instante i.

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

c) BCJR Max Log

Observaciones

- Término **ln** ($P(x_i)$) en $\gamma_i^{(L)*}(S_{i-1},S_i)$

Si se dispone de la Probabilidades a priori $P(x_i=1)$ y $P(x_i=0)$, se dispone de

$$L^{(a)}(x_i) = \ln\left(P(x_i=1) / P(x_i=0) \right)$$

Se puede comprobar que

$$\exp(L^{(a)}(x_i)) = P(x_i=1) / P(x_i=0) = P(x_i=1) / (1 - P(x_i=1))$$

$$P(x_i=1) = \exp(L^{(a)}(x_i)) / (1 + \exp(L^{(a)}(x_i)))$$

$$\gamma_i^{(L)*}(S_{i-1},S_i) = \ln (P(x_i)) + (1/\sigma^2) < \mathbf{y}_i, \mathbf{c}_i >$$

$$\gamma_i^{(1)(L)*}(S_{i-1},S_i) = \exp(L^{(a)}(x_i)) / (1 + \exp(L^{(a)}(x_i))) + (1/\sigma^2) < \mathbf{y}_i, \mathbf{c}_i >$$

$$\gamma_i^{(0)(L)*}(S_{i-1},S_i) = \exp(-L^{(a)}(x_i)) / (1 + \exp(-L^{(a)}(x_i))) + (1/\sigma^2) < \mathbf{y}_i, \mathbf{c}_i >$$

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

c) BCJR Max Log

Observaciones

- Término **ln** ($P(x_i)$) en $\gamma_i^{(1)(L)*}(S_{i-1},S_i)$

En lugar de las expresiones:

$$\gamma_i^{(L)*}(S_{i-1},S_i) = \ln (P(x_i)) + (1/\sigma^2) < \mathbf{y}_i , \mathbf{c}_i >$$

$$\gamma_i^{(1)(L)*}(S_{i-1},S_i) = \exp(L^{(a)}(x_i)) \; / \; (1 + \exp(L^{(a)}(x_i))) + (1/\sigma^2) < \mathbf{y}_i , \mathbf{c}_i >$$

$$\gamma_i^{(0)(L)*}(S_{i-1},S_i) = \exp(-L^{(a)}(x_i)) \; / \; (1 + \exp(-L^{(a)}(x_i))) + (1/\sigma^2) < \mathbf{y}_i , \mathbf{c}_i >$$

En la práctica se utiliza una aproximación:

$$\gamma_i^{(L)*}(S_{i-1},S_i) = c_{is} \, L^{(a)}(x_i) / 2 + (1/\sigma^2) < \mathbf{y}_i , \mathbf{c}_i >$$

donde c_{is} es el dígito BPSK sistemático (+1 supone un 1, -1 supone un 0).

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

c) BCJR Max Log

Resumen:

- Cálculo de $\gamma_i^{(L)*}$

  $\gamma_i^{(L)*}(S_{i-1},S_i) = c_{is}\, L^{(a)}(x_i) / 2 + (1/\sigma^2) < \mathbf{y}_i, \mathbf{c}_i >$

  donde c_{is} es el dígito BPSK sistemático (+1 supone un 1, -1 supone un 0)

- Cálculo de $\alpha_i^{(L)*}$

  $\alpha_i^{(L)*}(S_i) = \mathbf{max}\,\{ \alpha_{i-1}^{(L)*}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(L)*}(S_{i-1},S_i) \}$

  - Valores iniciales: $\alpha_0^{(L)*}(S_0) = 0$ si $S_0 = 0$, y $\alpha_0^{(L)*}(S_0) = -\infty$ si $S_0 \neq 0$

- Cálculo de $\beta_{i-1}^{(L)*}$

  $\beta_{i-1}^{(L)*}(S_{i-1}) = \mathbf{max}\,\{\gamma_i^{(L)*}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)*}(S_i)\}$

  - Valores iniciales: $\beta_N^{(L)*}(S_N) = 0$ si $S_N = 0$, y $\beta_N^{(L)*}(S_N) = -\infty$ si $S_N \neq 0$

Práctica 3.
2) Algoritmo BCJR, BCJR Log y BCJR Max Log

c) BCJR Max Log

Resumen:

- Cálculo de LLR(x_i/$\mathbf{y}$)

$$LLR(x_i/\mathbf{y}) \quad = \; a^{(1)(L)*}(x_i,\mathbf{y}) \; - \; a^{(0)(L)*}(x_i,\mathbf{y})$$

$$a^{(1)(L)*}(x_i,\mathbf{y}) = \max \{ \alpha_{i-1}^{(L)*}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(1)(L)*}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)*}(S_i) \}$$

$$a^{(0)(L)*}(x_i,\mathbf{y}) = \max \{ \alpha_{i-1}^{(L)*}(S_{i-1}) + \gamma_i^{(0)(L)*}(S_{i-1},S_i) + \beta_i^{(L)*}(S_i) \}$$

Práctica 3.
3) Enrejado y función find

El enrejado a utilizar es el que se indica en esta transparencia. En cada fila aparece el estado de partida, el estado de llegada y las coordenadas BPSK que se generan (-1 codifica un 0, 1 codifica un 1).

```
Enrejado=[ 1 1 -1 -1;
           1 3 1 1;
           2 1 1 1;
           2 3 -1 -1;
           3 2 1 -1;
           3 4 -1 1;
           4 4 1 -1;
           4 2 -1 1];
```

Práctica 3.
3) Enrejado y función find

Como para el programa resulta de interés encontrar las filas de Enrejado donde se codifica un 1 (o un -1), se puede utilizar la función find sobre la matriz Enrejado. El bit enviado es la señal en la columna 3.

```
filas = find(1==Enrejado(:,3))
filas =  2
         3
         5
         7
```

El valor de Enrejado(filas(1),3), Enrejado(filas(2),3), Enrejado(filas(3),3) y Enrejado(filas(4),3) es 1