Universidad Politécnica de Cartagena

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación

PRÁCTICAS DE TRANSMISIÓN DE DATOS

Práctica 3: Capacidad de un canal de comunicaciones

Profesor:

Javier Vales Alonso

1. INTRODUCCIÓN

En esta práctica se estudiarán los conceptos de entropía condicional, información mutua y **el concepto central de la telemática, la capacidad de un canal de comunicaciones**, que están íntimamente relacionados, como se comprobará. Para ello, se implementarán en matlab funciones que permitan su cálculo. El objetivo es adquirir soltura con el concepto de capacidad, que servirá de base para prácticas posteriores.

2. OBJETIVOS

Teóricos:

- Extender la definición de entropía al caso bivariante
- Comprender la relación entre entropía conjunta, condicional, marginales e información mutua.
- Modelar un canal probabilísticamente y entender su operación a través del concepto de la capacidad

Prácticos:

- Calcular la información mutua entre dos variables aleatorias
- Obtener la capacidad de un canal estacionario modelado probabilísticamente
- Crear una función que simule un canal estacionario modelado probabilísticamente

3. DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

La práctica se desarrollará en **tres** sesiones y se divide en las siguientes partes:

1. Primero extenderemos el concepto de entropía para variables aleatorias bidimensionales y lo implementaremos en la función de matlab (**entropiaconjunta.m**). También implementaremos en esa función el cálculo de las entropías marginales y condicionales.
2. A continuación crearemos en matlab la función **informacionmutua.m**
3. Después obtendremos las capacidades para de un canal estacionario dado por un modelo probabilístico con la función **capacidad.m**
4. Por último, implementaremos una función **canal.m** que emulará el resultado de transmitir un flujo a través del canal.

Para la realización de esta práctica puede serle de utilidad disponer y llamar a la función **entropia.m** creada en la práctica 3. También, en la última parte de la práctica necesitará llamar al codificador ascii y al codificador huffman.

3.1. ENTROPÍA: EL CASO BIVARIANTE

El concepto de entropía puede extenderse al caso de una variable aleatoria bivariante (o bidimensional, como prefiera denominarla). En este caso notaremos $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tal variable. Ésta está totalmente especificada por su función de masa conjunta: $p_{ij} = p(\mathbf{X}=i,\mathbf{Y}=j)$. En este caso, la entropía está dada por (revise la definición dada en la práctica 3 para comprobar que es la extensión natural del caso univariante):

$$H = -\sum_{i,j} p_{ij} log_2(p_{ij})$$

EJERCICIO: A partir de la definición anterior debe crear la función *entropiaconjunta*

```
function HXY = entropiaconjunta(P)
% Calculo de la entropia conjunta de la variable XY, expresada por una
% matriz P con la funcion de masa conjunta, siendo P(i,j)=prob(X=i,Y=j)



end
```

Verificación: **(A ENTREGAR EN LA MEMORIA LAS RESPUESTAS Y EL CÓDIGO QUE EJECUTE PARA LLEGAR A ELLAS)**

- Consideremos primero uno de los casos más sencillos. Supongamos que **X** e **Y** representan cada una el lanzamiento de una moneda **que se realiza de modo independiente**. Proporcione la matriz P que especifica la probabilidad conjunta de (**X**,**Y**). Para ello recuerde que si dos variables aleatorias son independientes se tiene: p(**X**=i,**Y**=j) = p(**X**=i) p(**Y**=j).
- Ídem para dados de 6 caras. Proporcione una forma rápida para definir tal matriz en matlab a partir de la función `ones()`
- Obtenga la entropía conjunta en los casos anteriores. ¿Qué relación existe con la entropía de **X** e **Y** por separado? ¿Por qué?
- Ahora supongamos el extremo contrario: que la dependencia entre ambas variables es total, por ejemplo con **Y**=**X**. Dé las matrices de masa conjunta para el caso de que **X** sea (i) una moneda, (ii) un dado de 6 caras. Proporcione una forma rápida para definir tal matriz en matlab a partir de la función `eye()`.
- Obtenga la entropía conjunta en los casos anteriores. ¿Qué relación existe con la entropía de **X** e **Y** por separado? ¿Por qué?
- Ahora, realicemos el siguiente experimento. Se lanza una moneda (variable **X**), si el resultado es cara (asigne este caso a **X**=1) se lanza un dado de 6 caras a continuación y se coge como **Y** el número obtenido si es impar, o el más cercano por abajo si es el lanzamiento fue par. En caso de ser el resultado de la moneda cruz (asigne este caso a **X**=2) se coge como **Y** el número obtenido si es par, o el más cercano por arriba si es el lanzamiento fue impar. Por ejemplo, si la moneda fue cruz y el dado fue 5 es (**X**=2, **Y**=6), si la moneda fue cara y el dado fue 5 es (**X**=1, **Y**=5), o si la moneda fue cara y el dado fue 6 es (**X**=1, **Y**=5).

  Dé la matriz con la función de masa de (**X**,**Y**). Dé su entropía conjunta. Explíquela.

3.1.1. Entropías Marginales

Al trabajar con variables bivariantes surge la cuestión de cuál es la entropía por separado de las componentes, como ha visto en las preguntas anteriores. Siguiendo la nomenclatura del cálculo de probabilidades, las denominaremos **entropías marginales**. Recordamos que la función de masa marginal de **X** es (para **Y** la definición es análoga):

$$p_i = p(\mathbf{X} = i) = \sum_j p_{ij}$$

Note que visualmente la matriz P se organizará así (ejemplo con matriz 2x3):

$$P = \begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \rightarrow p(\mathbf{X}=1) \\ \rightarrow p(\mathbf{X}=2) \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p(\mathbf{Y}=1) & p(\mathbf{Y}=2) & p(\mathbf{Y}=3) \end{array} & \end{array}$$

O podemos poner P cambiando filas por columnas. En este caso las p's marginales de Y s son la suma de filas y X las columnas

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \\ p_{13} & p_{23} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO: Amplíe la función *entropiaconjunta* para devolver las entropías marginales

```
function [HXY, HX, HY] = entropiaconjunta(P)
% Calculo de la entropia conjunta de la variable XY, expresada por una
% matriz P con la funcion de masa conjunta, siendo P(i,j)=prob(X=i,Y=j)


end
```

Verificación: **(A ENTREGAR EN LA MEMORIA LAS RESPUESTAS Y EL CÓDIGO QUE EJECUTE PARA LLEGAR A ELLAS)**

- Calcule las entropías marginales en los casos de ejemplo planteados anteriormente.

3.1.2. Entropías Condicionales

Es también muy importante también el concepto de **entropía condicional**, establecido por analogía con la probabilidad (y distribución) condicional como:

$$H_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}} = \sum_j H(\mathbf{X}|\mathbf{Y} = j)p(\mathbf{Y} = j)$$

La entropía condicional se interpreta como **la incertidumbre (información) que aportaría observar X suponiendo conocido ya el valor de Y.**

EJERCICIO: Amplíe la función *entropiaconjunta* para devolver las entropías condicionales X|Y e Y|X

```
function [HXY, HX, HY, HXcondY, HYcondX] = entropiaconjunta(P)
% Calculo de la entropia conjunta de la variable XY, expresada por una
% matriz P con la funcion de masa conjunta, siendo P(i,j)=prob(X=i,Y=j)


end
```

Nótese que conocer la distribución de **X** condicionado a **Y**=j, es equivalente a posicionarnos en la columna j-ésima de la matriz P (ver diagrama anterior) y normalizar ésta para que sea una función de masa.

Verificación: **(A ENTREGAR EN LA MEMORIA LAS RESPUESTAS Y EL CÓDIGO QUE EJECUTE PARA LLEGAR A ELLAS)**

- Calcule las entropías condicionales en los casos de ejemplo planteados anteriormente y expliqué los resultados a partir de la interpretación de la entropía conjunta.

3.2. INFORMACIÓN MUTUA

La información mutua entre la variable aleatoria **X** y la variable aleatoria **Y** indica **cuál es la reducción en la incertidumbre al observar X conocida la observación de Y.** Se calcula como:

$$I(X,Y) = \sum_{i,j} p(X=i, Y=j) \log \left(\frac{p(X=i|Y=j)}{p(X=i)} \right)$$

Ejercicios: **(A ENTREGAR EN LA MEMORIA LAS RESPUESTAS)**

- Ya que p(**X**=i|**Y**=j) p(**Y**=j) = p(**X**=i, **Y**=j) dé una versión de la fórmula anterior donde sólo aparezcan la probabilidades marginales y la conjunta.
- Además como p(**X**=i, **Y**=j) = p(**Y**=j|**X**=i) p(**X**=i), demuestre que I(**X**,**Y**) = I(**Y**,**X**).

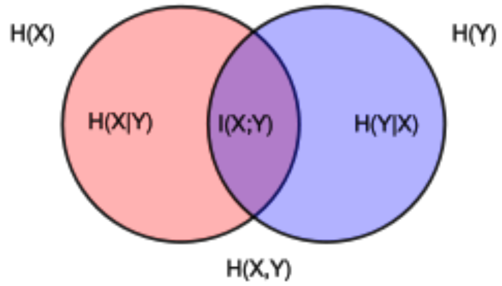
EJERCICIO: Codifique al función *informacionmutua*

```
function I = informacionmutua(P)
% Calculo de la informacion mutua de las variables X e Y
% P proporciona su masa conjunta


end
```

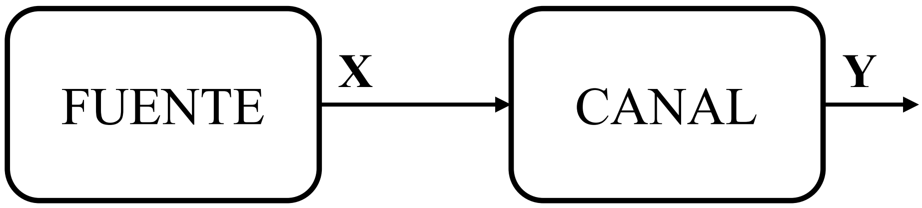
Verificación: **(A ENTREGAR EN LA MEMORIA LAS RESPUESTAS Y EL CÓDIGO QUE EJECUTE PARA LLEGAR A ELLAS)**

- Calcule la información mutua en los casos de ejemplo planteados anteriormente y expliqué los resultados.
- Compruebe que se verifica siempre el diagrama de totalidad:



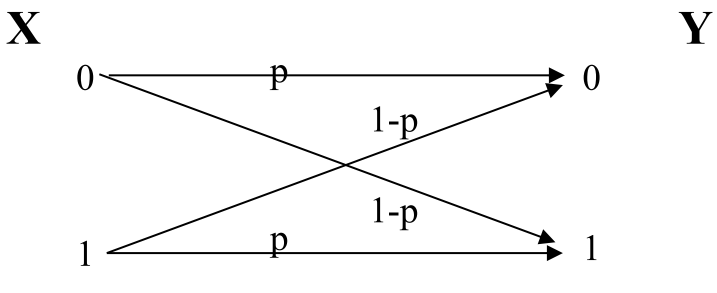
3.3. CAPACIDAD DE UN CANAL ESTACIONARIO DISCRETO

Pasamos ahora a considerar **el problema de la transmisión de información**. En general consideraremos el siguiente modelo:



Tendremos una fuente de símbolos que serán transmitidos por un canal. El proceso de transmisión genera modificaciones en los símbolos transmitidos debido a su ancho de banda limitado (fenómenos de interferencia entre símbolos), ruidos, propagaciones multi-trayecto, etc. Lo que deseamos es ser capaces de conocer **X** a partir de la con la observación de **Y**. En el lenguaje de la teoría de la información lo que queremos es que la observación de **Y elimine la incertidumbre de qué se ha transmitido.** Es decir, desearíamos que **I(Y, X) sea máxima**. Esta reducción de incertidumbre es la información que somos capaces de transportar desde la fuente a la salida del canal.

Para el modelado del canal supondremos que tenemos un canal discreto y estacionario (no depende del instante *n* de transmisión). El caso más simple es un canal binario simétrico (**BSC** en acrónimo inglés) representado a continuación:



Ejercicios: **(A ENTREGAR EN LA MEMORIA LAS RESPUESTAS)**

- Podemos modelar el canal BSC a través de una matriz Q que indique p(**Y**=j|**X**=i) en su posición **i**, **j**. Proporcione esa matriz.
- Suponga ahora un canal binario *asímetrico*, esto es, donde en la rama superior se sustituye p por p_1 y en la inferior p por p_2. Proporcione su matriz Q.
- Consideremos ahora un canal cuaternario simétrico. Esto es, los posibles símbolos a enviar y recibir son "00", "01", "10" y "11". Cada símbolo se envía correctamente con probabilidad p y los errores se repartirán uniformemente con probabilidad 1-p. Dé la matriz Q.
- Por último suponga otro canal cuaternario, donde los errores se repartirán uniformemente pero ahora según el número de dígitos binarios que se modifiquen. Dé la matriz Q.

La maximización de **I(Y, X)** dado un canal determinado pasa por la elección adecuada de la distribución de **X**. Como vimos en la sección anterior, la información mutua puede expresarse como función de p(**Y**=j|**X**=i) p(**X**=i). El primer factor nos lo fija el canal (Q), mientras que el segundo lo podemos elegir. Surge así la definición de la **capacidad de un canal**:

$$C = \sup_{\mathbf{X}} I(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

El teorema de canal de Shannon demuestra que existen codificaciones de canal capaces de aproximarnos tanto como queramos a esta capacidad (pero no dice cuáles son).

EJERCICIO: Codifique al función *capacidad*

```
function [C, pX] = capacidad(Q)
% Calcula la capacidad de un canal definido por su matriz Q
% Devuelve tambien la masa de X
% La funcion combinacionesX(L) le devuelve todas las posibles
% combinaciones para la masa de X, siendo L el numero de símbolos del
% alfabeto de X

end
```

Verificación: **(A ENTREGAR EN LA MEMORIA LAS RESPUESTAS Y EL CÓDIGO QUE EJECUTE PARA LLEGAR A ELLAS)**

- Calcule la capacidad de los canales definidos anteriormente para los valores p=1, 0.9 y 0.8. Y los pares de valores (p1, p2) = (0.8, 1) y (0.6, 0.9).
- In dique para que distribución de X se encuentra el máximo en cada caso.