

# Universidad Politécnica de Cartagena

---



## Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación

### LABORATORIO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### Práctica 3. La Teoría de Imágenes.

***Profesores:***

Pedro Vera Castejón  
Alejandro Álvarez Melcón  
Fernando Quesada Pereira

## 1.-Introducción

En esta práctica vamos a estudiar la técnica de imágenes para simplificar el cálculo del potencial y del campo eléctrico producido por cargas puntuales que se encuentran en presencia de planos conductores perfectos. Desde el punto de vista de MATLAB, practicaremos el uso de funciones. Construiremos funciones, y las llamaremos desde el programa principal con los argumentos adecuados para realizar los cálculos de forma cómoda.

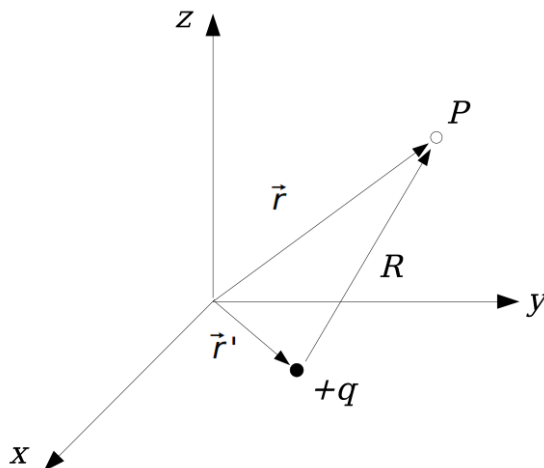
El alumno deberá leer y comprender todos los conceptos teóricos de la práctica antes de entrar en el laboratorio. ***También deberá realizar todos los desarrollos teóricos pedidos.*** Finalmente, en el laboratorio deberá realizar los programas con ayuda de MATLAB que se irán indicando en este manual. ***Anotar también en la hoja de resultados todos los desarrollos teóricos y las respuestas a todas las preguntas que se planteen en este manual.***

## 2.-Teoría de Imágenes

Sabemos que el potencial producido en un determinado punto por una carga puntual en espacio libre viene dado por la siguiente expresión:

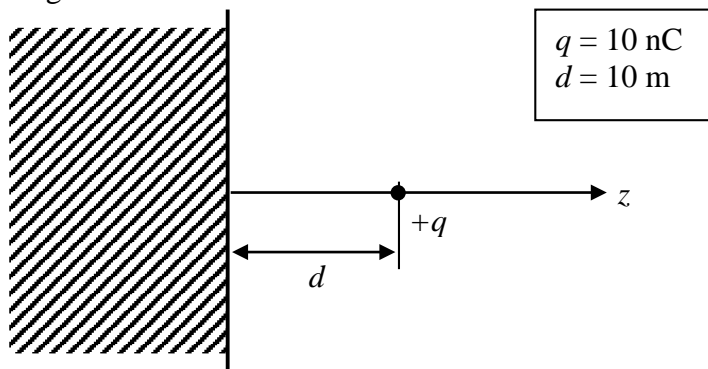
$$\phi(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon R} = \frac{q}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1)$$

donde  $R$  es la distancia entre el punto de observación y la carga tal y como se muestra en la Fig. 1.



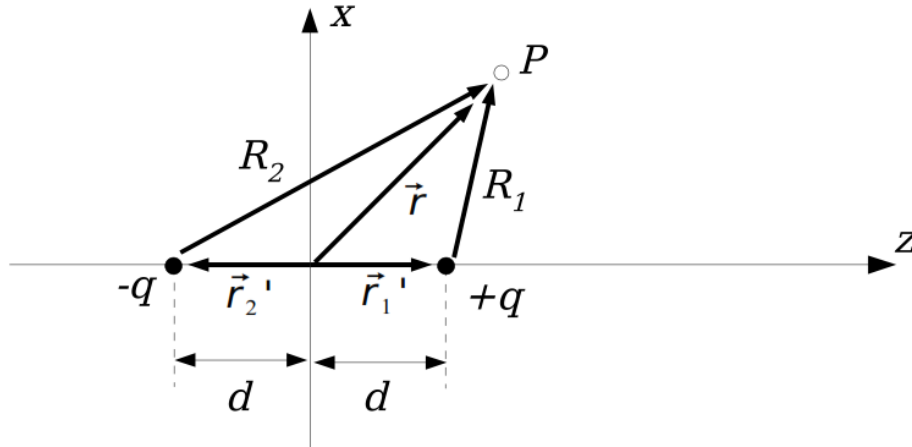
**Fig. 1:** Potencial en un punto  $P$  producido por una carga puntual  $q$ .

Tomando como base este potencial, podemos resolver problemas más complejos, como por ejemplo el caso de una carga puntual en presencia de un plano de masa infinito, tal y como se muestra en la Fig. 2.



**Fig. 2:** Carga puntual en presencia de un plano de masa.

Sabemos del **teorema de unicidad**, que la solución a las ecuaciones de Maxwell en una región dada no varía, si no modificamos la geometría en esa región, y si además se mantienen inalteradas las componentes tangenciales de los campos en la superficie que delimita dicha región. En nuestro caso estamos interesados en la región de la derecha del plano de masa. La superficie que delimita dicha región es la superficie del infinito y la superficie del plano de masa. Sabemos que el potencial en la superficie del infinito es cero, y además el potencial en la superficie del plano de masa también es cero. En consecuencia, **podemos sustituir la geometría anterior por otra, siempre que no se modifique la geometría en dicha región, y además se conserven las condiciones de contorno**. Es fácil darse cuenta entonces que el problema anterior es equivalente al problema mostrado en la Fig.3.



**Fig. 3:** Problema equivalente donde ha desaparecido el plano de masa.

El potencial total en el punto  $P$  en este problema es la suma de los potenciales producidos por cada una de las cargas, por tanto:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_1'|} - \frac{q}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_2'|} \quad (2)$$

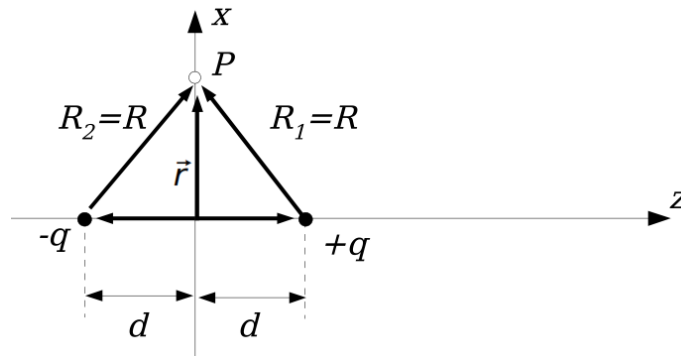
y según la figura los vectores toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1' &= +d \hat{e}_z \\ \vec{r}_2' &= -d \hat{e}_z \\ \vec{r} &= x \hat{e}_x + z \hat{e}_z \end{aligned} \quad (3)$$

Este potencial también es cero en la superficie del infinito, además, si calculamos el potencial en la superficie donde está el conductor, obtenemos:

$$\phi(z=0) = \frac{q}{4\pi\epsilon R} - \frac{q}{4\pi\epsilon R} = 0 \quad (4)$$

, puesto que en este caso:  $R_1 = R_2 = R$ , tal y como muestra la Fig. 4.



**Fig. 4:** Situación para el cálculo del potencial en la superficie del conductor.

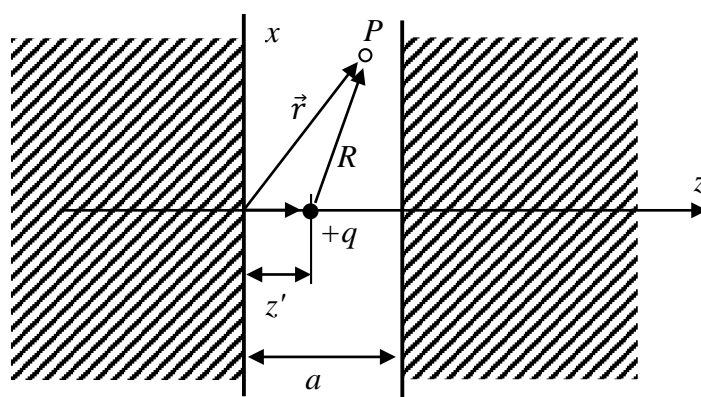
Como las condiciones de contorno se han mantenido en la superficie que delimita nuestra región, la solución del problema equivalente y del problema original debe ser la misma por el teorema de unicidad.

**Ejercicio 1.** Calcular la expresión explícita para el potencial eléctrico dado en la ecuación (2). Con ayuda de MATLAB construir un programa que represente las líneas equipotenciales y las líneas de campo eléctrico en el plano  $(x,z)$ . Grabar el programa con el nombre: *Pract3Ejer1.m*.

**Nota:** para visualizar estas superficies equipotenciales tomar como mallado (meshgrid) valores comprendidos entre -40 y 40; ¿qué valores corresponden realmente a una solución física?.

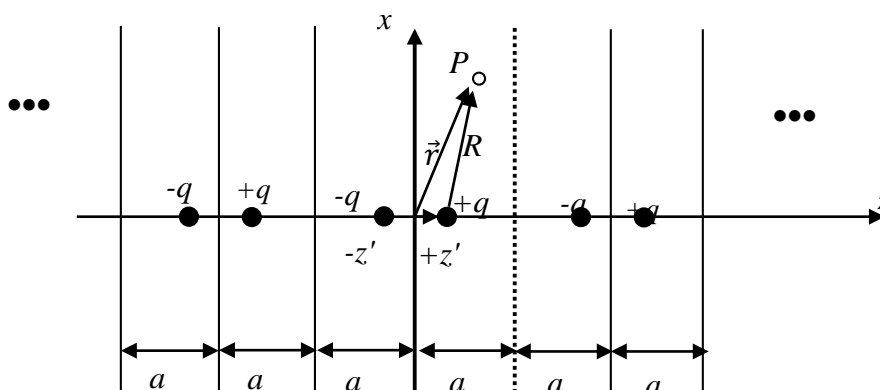
### 3.- Carga en Presencia de dos Planos Conductores

Vamos a utilizar el mismo procedimiento cuando nos encontremos con una carga en presencia de dos planos de masa infinitos tal y como muestra la Fig. 5.



**Fig. 5:** Carga puntual en presencia de dos planos de masa.

Ahora deberemos situar una carga imagen de forma que el potencial total en los dos planos de masa sea cero, con el fin de conservar las condiciones de contorno del problema original. Si colocamos una carga imagen para que el potencial sea cero en el primer plano de masa, nos damos cuenta que el potencial no es cero en el segundo. Para anular el potencial en el segundo plano de masa, deberemos situar dos imágenes más, pero entonces el potencial ya no es cero en el primer plano de masa, con lo que deberemos situar otras dos cargas imágenes para volver a anular el potencial en dicho plano de masa, y así sucesivamente. Como podemos observar, en este caso necesitamos infinitas cargas imágenes para lograr anular simultáneamente el potencial en los dos planos de masa. La situación se muestra en la Fig. 6.



**Fig. 6:** Serie infinita de imágenes.

El potencial total en un punto dado será la suma de los potenciales producidos por las infinitas cargas. Para formular fácilmente esta serie infinita es conveniente utilizar el potencial producido por la carga original:

$$\phi(\vec{r}, z') = \frac{q}{4\pi\epsilon R} = \frac{q}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5)$$

De la figura obtenemos fácilmente:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{e}_x + z \hat{e}_z \\ \vec{r}' &= z' \hat{e}_z \end{aligned} \quad (6)$$

Por tanto, el potencial producido por la carga original puede escribirse de la siguiente forma:

$$\phi(x, z, z') = \frac{q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + (z - z')^2}} \quad (7)$$

Usando este potencial, ahora podemos escribir el potencial producido por la carga original y por la primera carga imagen. A este potencial le llamaremos el potencial producido por el conjunto de imágenes básico (BIS).

$$\phi_{BIS}(x, z, z') = \phi(x, z, z') + \phi(x, z, -z') \quad (8)$$

A este potencial habrá que sumarle el potencial producido por las siguientes dos imágenes, que como vemos en la Fig. 6 se obtiene desplazando el conjunto de las dos primeras cargas una distancia  $(2a)$ . El potencial producido por las siguientes dos imágenes se obtiene desplazando las dos primeras cargas una distancia  $(-2a)$ , y así hay que continuar hasta formar la serie infinita de imágenes. El potencial total puede entonces escribirse como una serie infinita de esta manera:

$$\phi_T = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_{BIS}(x, z, z' + 2am) \quad (9)$$

donde cada vez desplazamos las cargas originales una cantidad  $(+2ma)$  y  $(-2ma)$ . Además, hemos usado la siguiente extensión de la ecuación (8):

$$\phi_{BIS}(x, z, z' + 2ma) = \phi(x, z, z' + 2ma) + \phi(x, z, -z' + 2ma) \quad (5)$$

En algún caso también puede ser útil expresar la ecuación (9) de la siguiente forma:

$$\phi_T = \phi_{BIS}(x, z, z') + \sum_{m=1}^{\infty} [\phi_{BIS}(x, z, z' + 2am) + \phi_{BIS}(x, z, z' - 2am)] \quad (61)$$

Donde del mismo modo que antes definimos:

$$\phi_{BIS}(x, z, z' - 2ma) = \phi(x, z, z' - 2ma) + \phi(x, z, -z' - 2ma) \quad (72)$$

**Ejercicio 2.** Escribir un programa en MATLAB que calcule y represente gráficamente el potencial eléctrico creado por una carga puntual ( $q = 10 \text{ nC}$ ) situada a una distancia  $z'$  (tomar el valor  $z' = 20 \text{ m}$ ) del centro de coordenadas (en situación de espacio libre). En este ejercicio se considerará que el punto de observación desde el cual se está midiendo el potencial (punto  $P$ ) tiene un valor constante  $x$  sobre el eje  $X$  (tomar el valor  $x = 5 \text{ m}$ ), y calcularemos el potencial en función de la coordenada  $z$  del punto  $P$  (tomar un rango de valores de  $-100 \text{ m}$  a  $100 \text{ m}$ ). Grabar el programa con el nombre: *Pract3Ejer2.m*.

**Ejercicio 3.** Escribir un programa en MATLAB que calcule el potencial eléctrico creado por una carga puntual situado a una distancia  $z'$ , estando dicha carga enfrentada a un plano conductor infinito situado sobre el plano  $(x, y)$ . Representar el potencial en función de la coordenada  $z$  usando los mismos datos empleados en el ejercicio anterior, y comentar los

cambios que se visualizan respecto al ejercicio anterior. De la gráfica representada, ¿en qué rango de valores de  $z$  la solución es realmente válida? Grabar el programa con el nombre: *Pract3Ejer3.m*.

**Ejercicio 4.** Escribir una función en MATLAB que calcule el potencial eléctrico creado por una carga puntual situado a una distancia  $z'$ , estando dicha carga enfrentada a dos planos conductores infinitos situados: uno sobre el plano  $(x,y)$ , y el otro paralelo y distanciado del anterior  $a=60$  m (ver Fig. 5). Representar el potencial en función de la coordenada  $z$  usando los datos de los dos ejercicios anteriores con un número de imágenes ( $m = 10$ ). Repita el cálculo tomando ( $x=0.1$  m). ¿Qué diferencias observa en el potencial calculado?, ¿a qué son debidas? Grabar el programa con el nombre: *Pract3Ejer4.m*.

**Nota:** En este ejercicio puede ser necesario usar una estructura tipo "for" para poder hacer el sumatorio de las imágenes establecidas según la ecuación (11).

**Ejercicio 5.** Escribir una función en MATLAB que visualice la convergencia producida sobre el potencial eléctrico creado por una carga  $q$  encerrada entre dos planos conductores paralelos e infinitos, en función del número de imágenes incluidas en el cálculo (es decir del valor dado al parámetro " $m$ "). Para hacer los cálculos usar los mismos datos que en los apartados anteriores tomando ( $x=0.1$  m,  $z=25$  m) para el punto de observación. Tomar como rango de valores para el parámetro " $m$ " desde 0 hasta 40. ¿Cuántas imágenes necesita para tener una convergencia buena? Grabar el programa con el nombre: *Pract3Ejer5.m*.

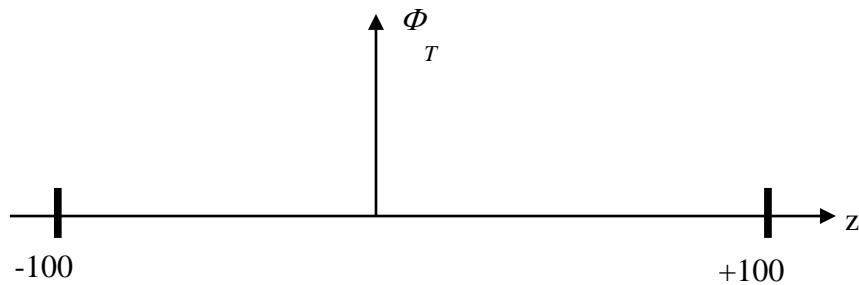
HOJA DE RESULTADOS. **Práctica 3.**

Grupo: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

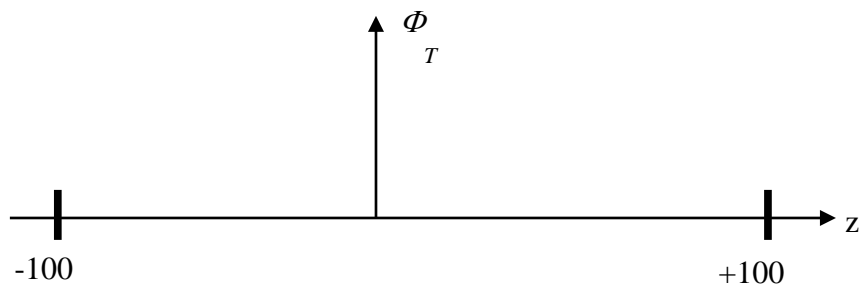
Ejercicio1.- Carga en frente de plano de masa. Dibujar el potencial y el campo eléctrico. ¿Qué zona corresponde a la solución física? ( *Pract3Ejer1.m*).

Ejercicio2.- Carga frente a dos planos de masa:

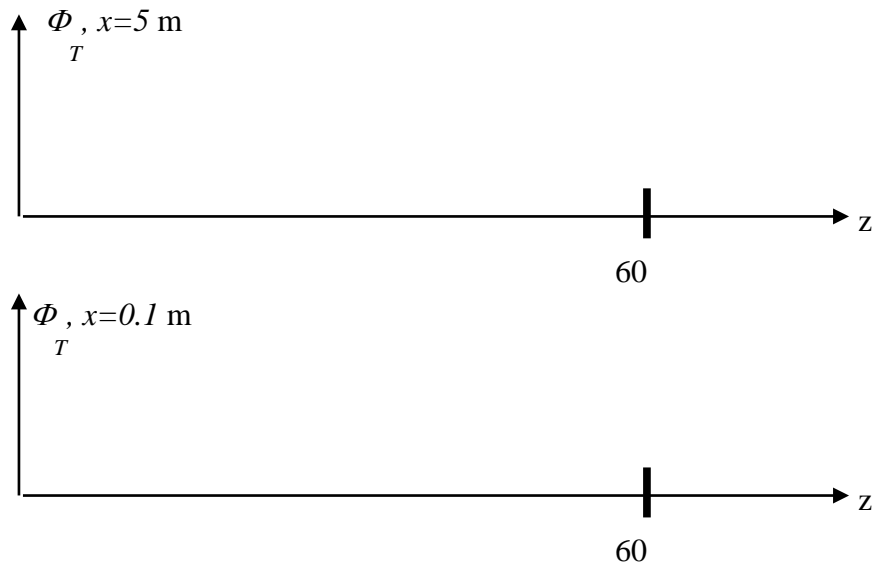
2.1. Dibujar el potencial en condiciones de espacio libre (*Pract3Ejer2.m*).



2.2. Dibujar el potencial en presencia de un plano de masa. ¿Qué zona corresponde a la solución física? (*Pract3Ejer3.m*).



2.3. Dibujar el potencial en presencia de dos planos de masa. ¿Diferencias entre los dos cálculos? (*Pract3Ejer4.m*).



2.4. Dibujar la convergencia en función del número de imágenes incluidas en el cálculo. ¿Cuántas imágenes necesita para obtener buena convergencia? (*Pract3Ejer5.m*)

