INFORME DE LA PRÁCTICA 2
SISTEMAS LINEALES

Diego Ismael Antolinos García
Andrés Ruz Nieto

Índice

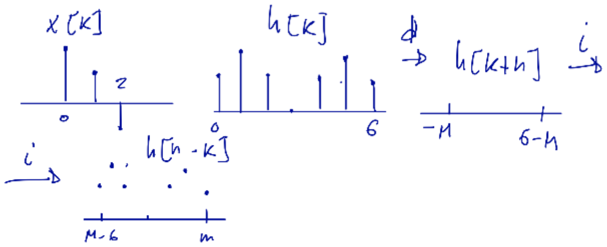
1. Convolución de señales discretas

La convolución discreta la podemos hacer de dos formas (método 1 y método 2) como ya vimos en teoría, pero en esta práctica solo programaremos el método 1. La convolución de dos señales discretas viene dada por la expresión:

$$y[n] = h[n] * X[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] * h[n-k]$$

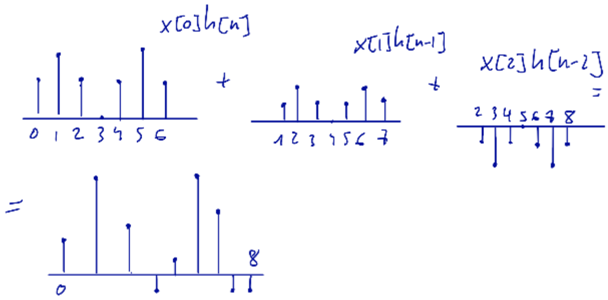
a. **Problemas**

- Calcular gráficamente sobre papel la convolución de las dos señales causales x[n] y h[n] definidas en MATLAB mediante:
  x = [2 1 -1];
  h = [1 2 1 0 1 2 1];



$$y[n] = \sum_{k=0}^{2} x[k]\,h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2]$$

$$\underline{\text{dur } y[n]} = \text{dur } x[n] + \text{dur } h[n] - 1 = 7+3-1 = 9$$



- Si la longitud (del intervalo con muestras distintas de cero) de x[n] es N, y la de h[n] es M, deducir una expresión para la longitud de y[n].

Suponemos que x[n] va de 0 a 2 (duración 3), por lo que en el sumatorio de la convolución K irá de 0 a 2, así que la señal h[n] quedará desplazada hasta 2 como mucho, por lo que la duración final será la duración de h[n] + el número de desplazamientos: 7+2=9

Tras la realización de la convolución y como vimos en teoría podemos deducir que dur{y[n]} = dur {x[n]} + dur {h[n]} – 1; es decir, dur {y[n]} = N + M -1

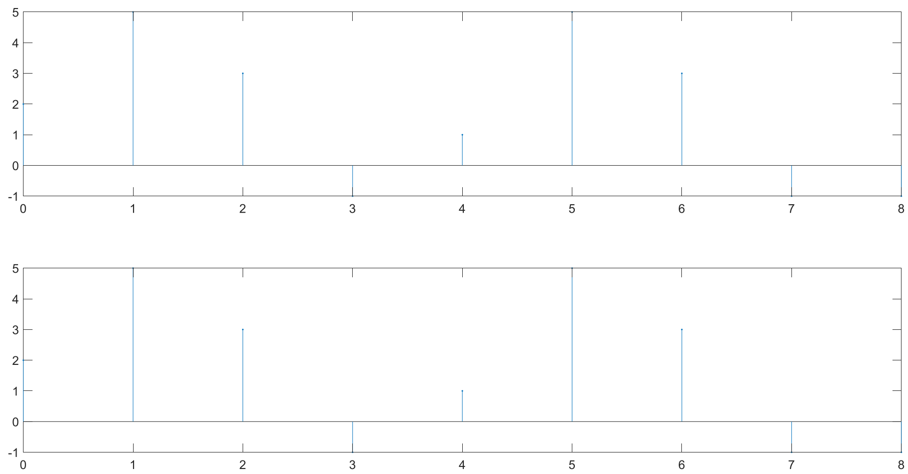
- Programar una función en MATLAB, denominada convol1, que realice la convolución de dos señales discretas mediante el método 1. La función tendrá el formato y = convol1 (x,h) (utilice la expresión de la longitud de la señal de salida deducida en el punto anterior como punto de partida al escribir las funciones).

```
function y=convol1(x,h)
N = length(x);
M = length(h);
L = M+N-1;
h=[h zeros(1,N-1)];
res=zeros(1,L);
for c=1:length(x)
conv=x(c)*desplazar(h,c-1);
res=res+conv;
end
y=res;
end
```

- Una vez implementada esta función, compruebe su correcto funcionamiento con las señales x[n] y h[n] generadas en MATLAB. Para facilitar el trabajo, consulte la ayuda sobre la función conv de MATLAB, la cual realiza la convolución discreta de dos secuencias. El resultado con convol1 con cualquier par de señales tiene que ser el mismo que el obtenido con conv.

Para comprobar el funcionamiento de nuestra función y verificar el resultado analítico usamos el siguiente código:

```
x=[2 1 -1]
h=[1 2 1 0 1 2 1]
y1=convol1(x,h)
y2=conv(x,h)
n=(0:8)
subplot (2,1,1)
stem(n,y1,'.')
subplot(2,1,2)
stem(n,y2,'.')
```



Vemos que las dos funciones dan lo mismo (y verificamos que el cálculo analítico en papel es correcto). En la parte superior tenemos lo obtenido con convol1 y en la parte inferior con conv.

2. Respuesta al impulso de un sistema lineal

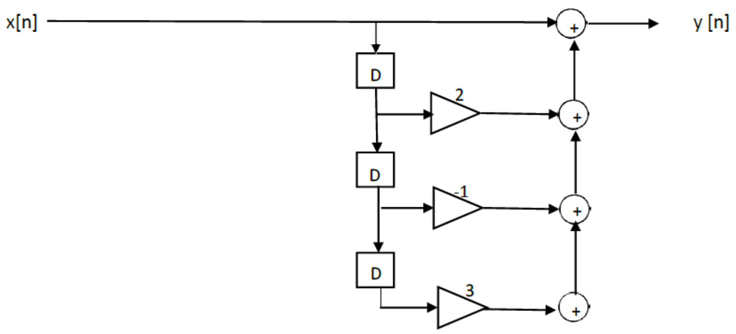
Recordemos que la respuesta al impulso h[n] se usa para caracterizar el comportamiento de un sistema LTI y según sea h[n] finita o infinita, hablaremos de sistemas FIR o IIR.

a. <u>Problemas Sistemas FIR</u>

Suponga un sistema FIR definido por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - x[n-2] + 3x[n-3]$$

- Represente el diagrama de bloques (con delays, multiplicadores y sumadores) que caracteriza a este sistema.

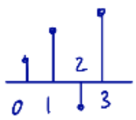


Como N=0, en este caso, coinciden la forma directa I y la forma directa II

- Calcule y represente gráficamente en papel la respuesta al impulso h[n] del sistema dado. ¿Es de duración finita?

Sustituimos las x por deltas:

$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + 3\delta[n-3]$



Es de dimensión finita (FIR) → dur = 4.

- Calcule sobre papel la salida del sistema ante la entrada x[n] = δ[n] –δ [n-1], (en MATLAB x = [1 -1]). Calcule la salida utilizando la función conv (o convol1). Verifique que ambos resultados coinciden.

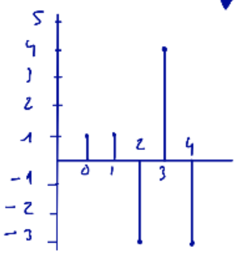
Salida del sistema con $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \rightarrow$

$\rightarrow$ $h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + 3\delta[n-3]$

$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{1} x[k]\, h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] =$

$= 1 \cdot (\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + 3\delta[n-3]) + (-1) \cdot (\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] + 3\delta[n-4]) =$

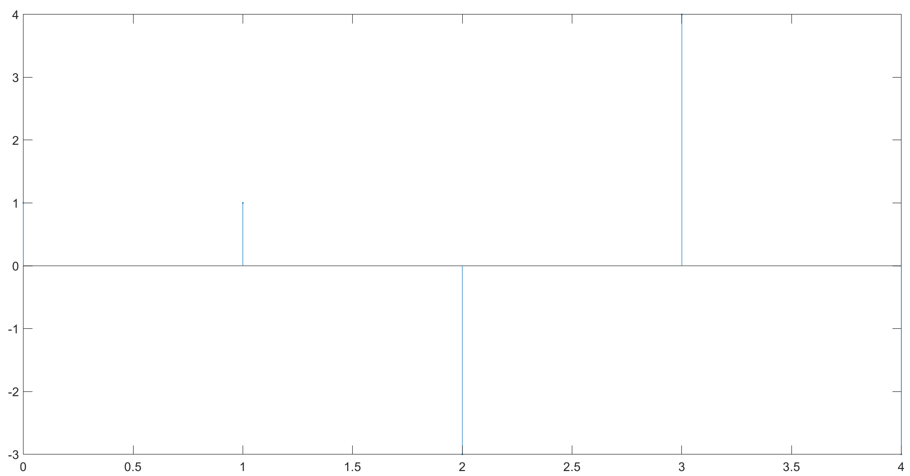
$\boxed{\delta[n] + \delta[n-1] - 3\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - 3\delta[n-4]}$



Para verificar con MATLAB usaremos el siguiente código:

```
h=[1 2 -1 3];
x=[1 -1];
y=convol1(x,h)
n=0:4
stem(n,y,'.')
```

Y obtenemos esta gráfica que, como podemos ver, coincide con nuestros cálculos:



b. Problemas Sistemas IIR

Sea un sistema IIR causal definido por la ecuación en diferencias:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = X[n]$$

- Calcule analíticamente la respuesta al impulso del sistema anterior. Genere en MATLAB la respuesta al impulso mediante la función filter y tomando x[n] como x=[1 zeros(1,49)]. Compruebe el resultado teórico y el práctico.

Hallar $h[n]$ de $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n] \rightarrow$

$\rightarrow h[n] - \frac{3}{4}h[n-1] = \delta[n]$

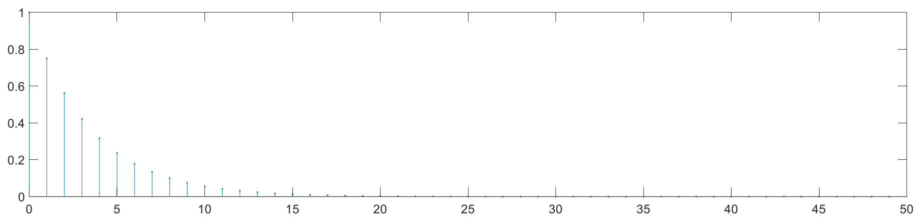
$h[n] = \delta[n] + \frac{3}{4}h[n-1]$

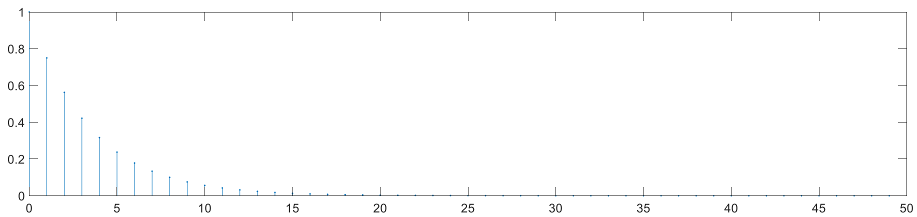
Damos valores ≥ 0 (Suponemos que es causal)

$$\left.\begin{array}{l} h[0] = 1 + \frac{3}{4}\cdot \cancel{h[-1]}^{\,0} = 1 \\ h[1] = 0 + \frac{3}{4}\cdot h[0] = \frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4} \\ h[2] = 0 + \frac{3}{4}\cdot h[1] = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ h[3] = 0 + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ \dots \end{array}\right\} h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot u[n]$$

La respuesta obtenida en MATLAB a través de los siguientes comandos coincide con nuestros cálculos analíticos:

```
x=[ 1 zeros(1,49)];
B=1;
A=[1 -3/4];
y=filter(B,A,x);
n=0:length(y)-1;
subplot(2,1,1)
stem(n,y,'.')
ya=(3/4).^n
subplot(2,1,2)
stem(n,ya,'.')
```





- Calcule analíticamente la respuesta del sistema ante la siguiente señal de entrada

$$X[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Calcular $y[n]$ con $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot u[n]$

$y[n] = x[n] * h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

$$\underline{y[n]} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] * h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{3}\right)^k =$$

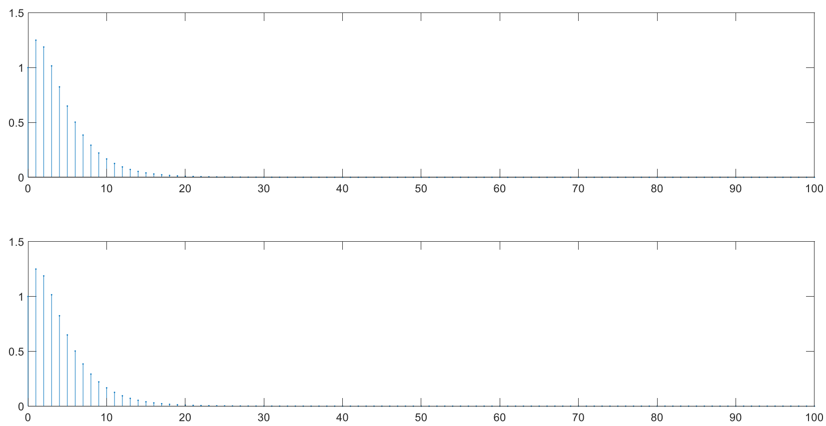
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} =$$

$$= 3\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)\right) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Generar en MATLAB la señal x[n] en el intervalo [0:100]. Generar en MATLAB la salida del sistema ante x[n] mediante la función filter. Comprobar que el resultado práctico coincide con la solución teórica.

La respuesta obtenida en MATLAB a través de los siguientes comandos coincide con nuestros cálculos analíticos:

```
n=0:100;
x=(1/2).^n
B=1;
A=[1 -3/4];
y=filter(B,A,x)
subplot(2,1,1)
stem(n,y,'.')
ya=(3*(3/4).^n)-(2*(1/2).^n)
subplot(2,1,2)
stem(n,ya,'.')
```



- Repetir el proceso anterior, esta vez para la señal de entrada

$$X[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

Y comprobar que la salida, tanto teórica como práctica, es

$$y[n] = (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

Calcular $y[n]$ con $x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

$h[n] = x[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] * \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

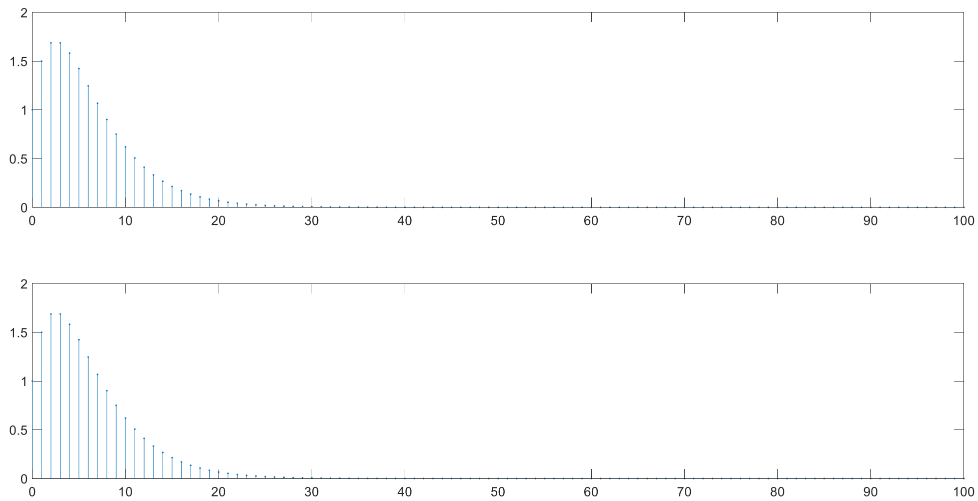
$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K] * h[n-K] = \sum_{K=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^K \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-K} =$$

$$\sum_{K=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^K \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-K} = \sum_{K=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^K \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^K =$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \sum_{K=0}^{n} 1^K = (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La respuesta obtenida en MATLAB a través de los siguientes comandos coincide con nuestros cálculos analíticos:

```
n=0:100;
x=(3/4).^n
B=1;
A=[1 -3/4];
y=filter(B,A,x)
subplot(2,1,1)
stem(n,y,'.')
ya=(n+1).*(3/4).^n;
subplot(2,1,2)
stem(n,ya,'.')
```

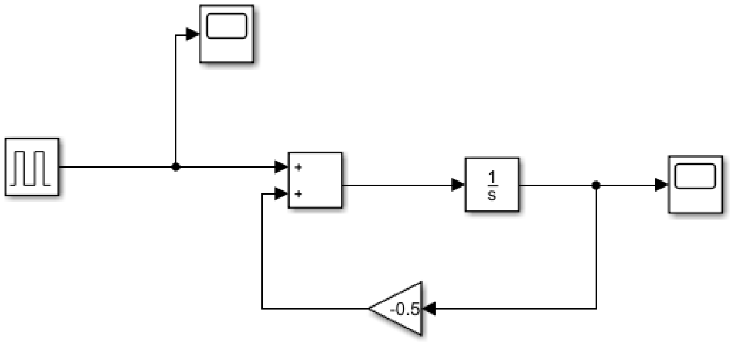


3. Sistemas lineales en tiempo continuo

En este punto vamos a utilizar la herramienta simulink de MATLAB, con el objetivo de estudiar la respuesta de los sistemas lineales en tiempo continuo.

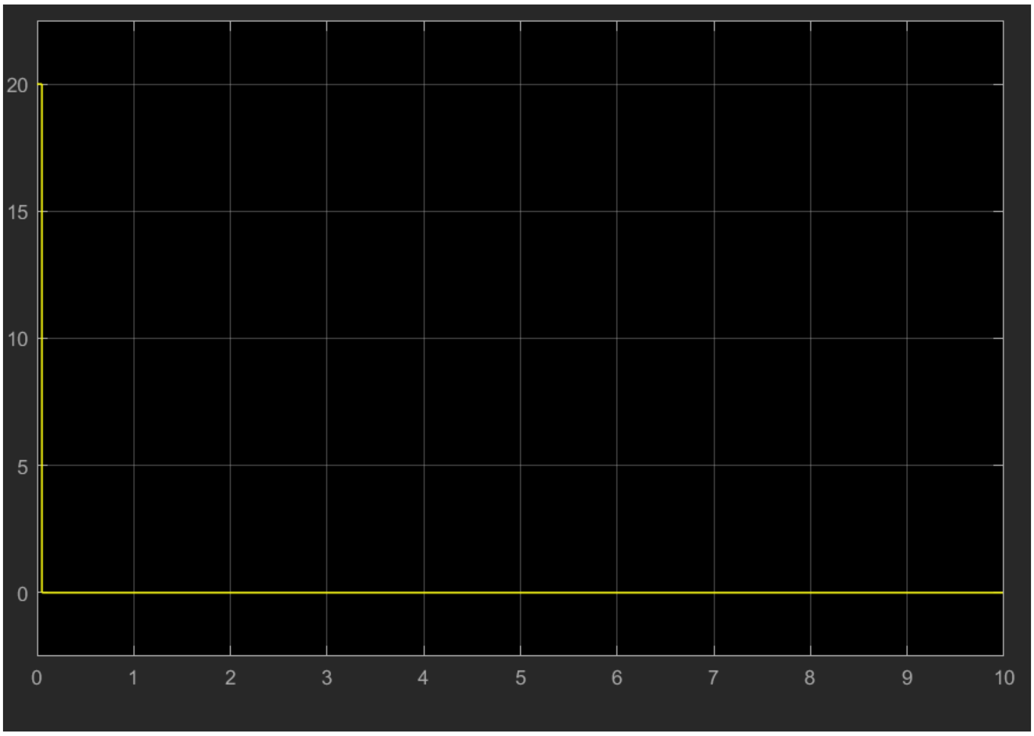
En primer lugar, hemos implementado el sistema LTI definido por la ecuación diferencial expresada a continuación. Para ello hemos implementado el diagrama de bloques de la Figura 1.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 0.5y(t) = x(t)$$

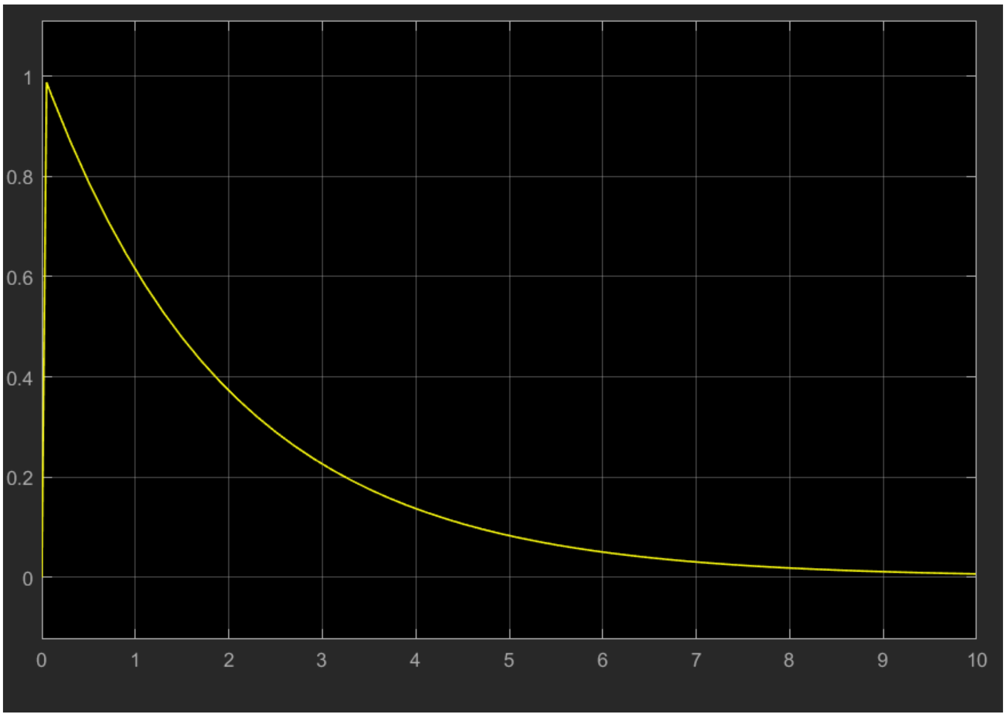


A la entrada simulamos una δ(t), un pulso muy estrecho y de mucha amplitud (los parametros internos del bloque son: Period 100,Pulse width (% Period) 0.05, Amplitude 20).

Salida en Scope1:



Salida en Scope2:



Calculamos la h(t) de manera analítica para ver si corresponde con la respuesta obtenida:

Respuesta al impulso de $\frac{dy(t)}{dt} + 0'5\, y(t) = x(t)$

$y_h(t) = Be^{ct}$

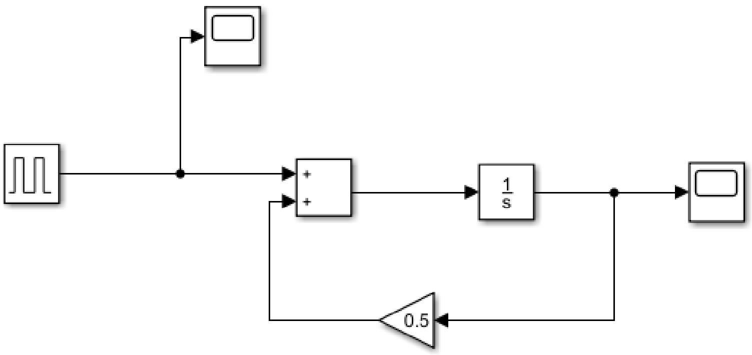
$\frac{dy(t)}{dt} + 0'5\, y(t) = 0$

$c = -0'5 \longrightarrow y_h(t) = Be^{-0'5t} \longrightarrow h(t) = y_h(t)\big|_{B=b_0}$

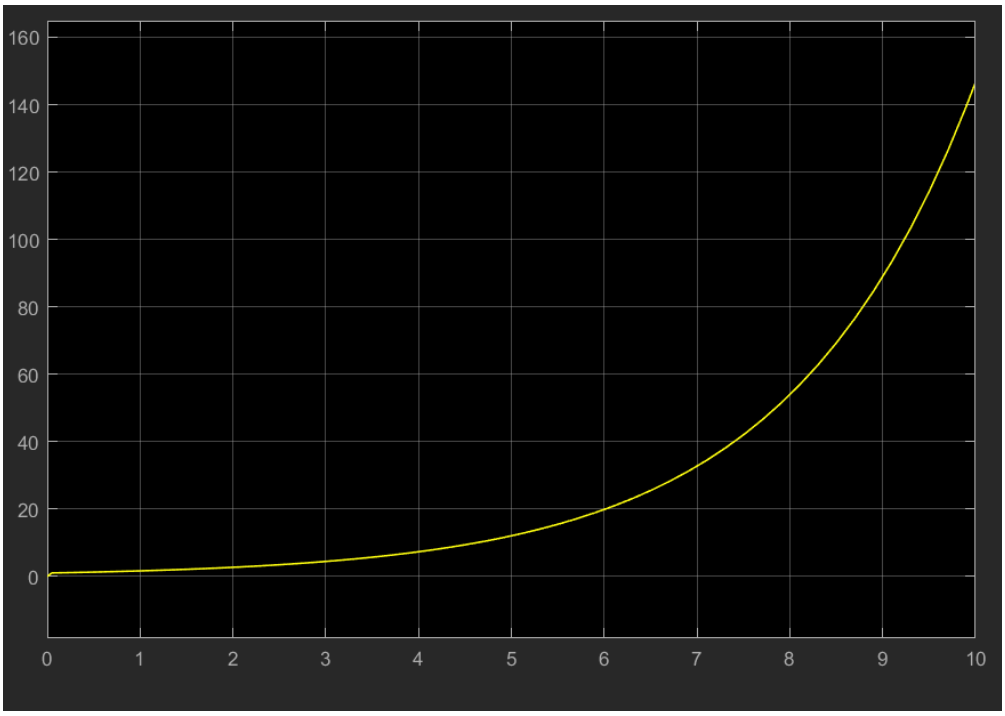
$\longrightarrow h(t) = e^{-0'5t}$

La respuesta al impulso teórica y la respuesta del sistema coinciden, ya que a la entrada introducimos la señal x(t)=δ(t) y a la salida obtenemos una exponencial negativa.

- ¿Qué ocurre si cambia el valor -0.5 por 0.5?



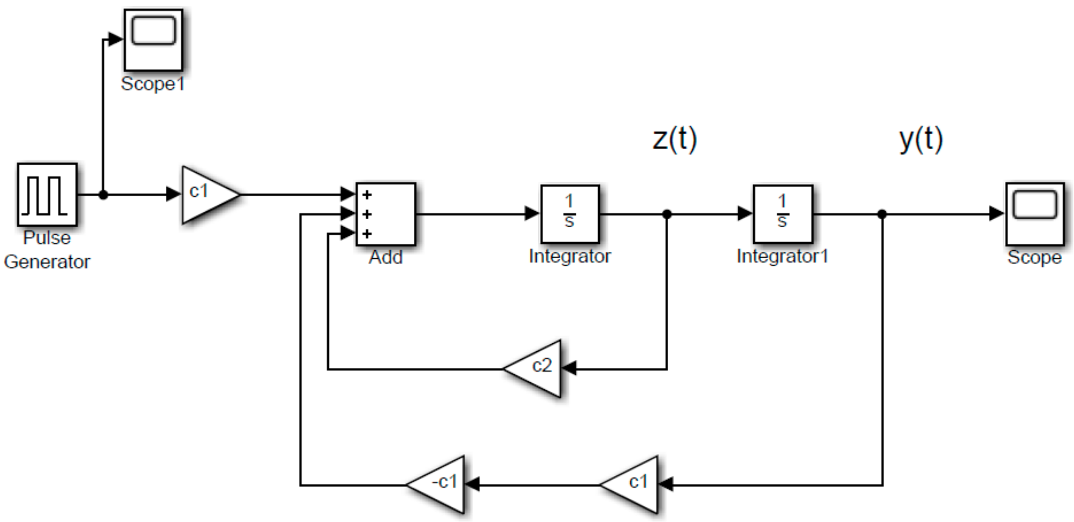
Si cambiamos de signo el valor de la ganancia, observamos que la respuesta sufre una inversión (en lugar de obtener una exponencial decreciente, obtenemos un exponencial creciente) tal y como vemos a continuación:



Problema avanzado

Escribir la ecuación diferencial que gobierna el sistema lineal de la Figura 2. ¿De qué orden es la ecuación diferencial?

La ecuación que gobierna el sistema lineal mostrado a continuación es la siguiente:



$$y(t) = \iint C_1 x(t) - C_1^2 y(t) + C_2 z(t)\, dt \rightarrow z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

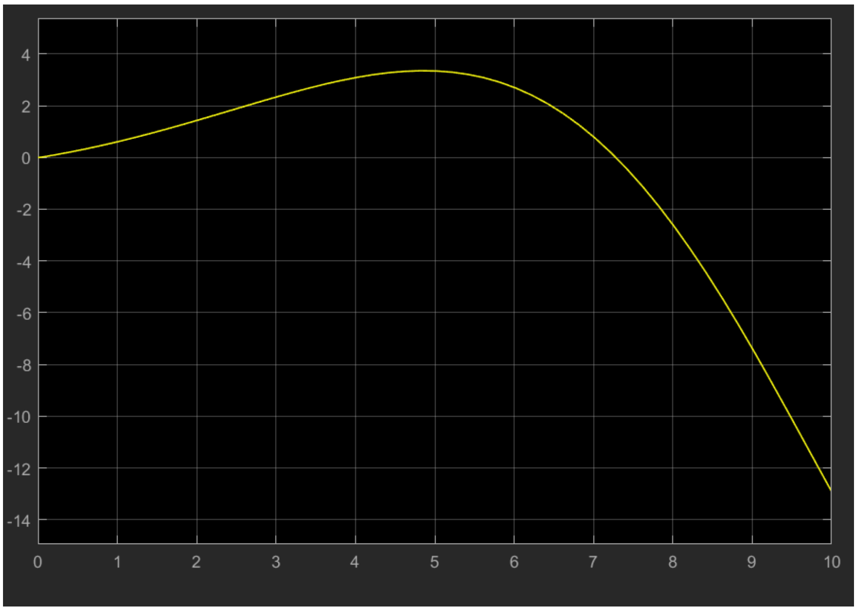
Por tanto:

$$\frac{d^2y(t)}{dt} - C_2\frac{dy(t)}{dt} + C_1^2 y(t) = C_1 x(t)$$

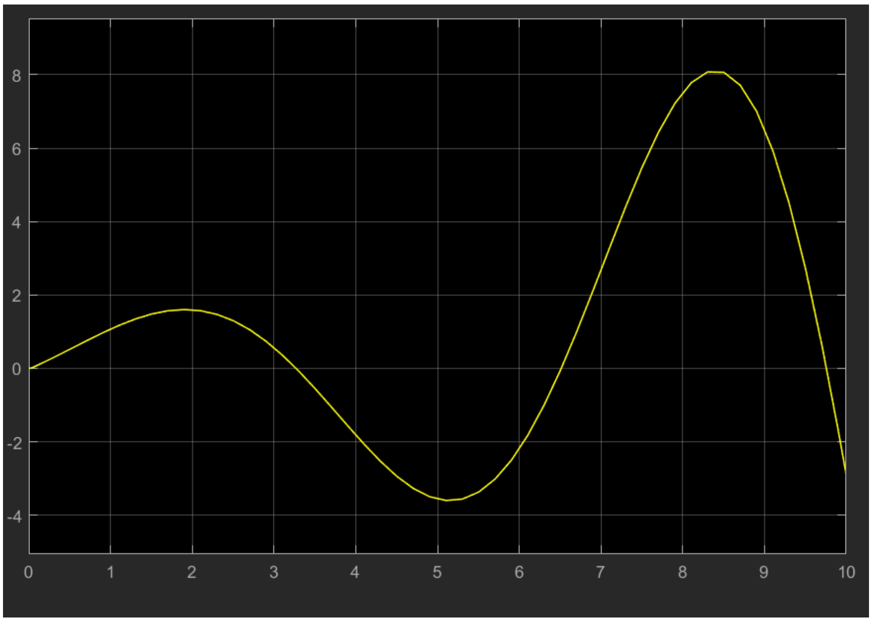
Vemos que es de orden 2 (mayor orden de derivación de la señal de salida).

- Dar el valor 0.5 a c2, dejarlo fijo y probar con diferentes valores de c1. ¿Qué le ocurre a la respuesta al impulso al variar c1?

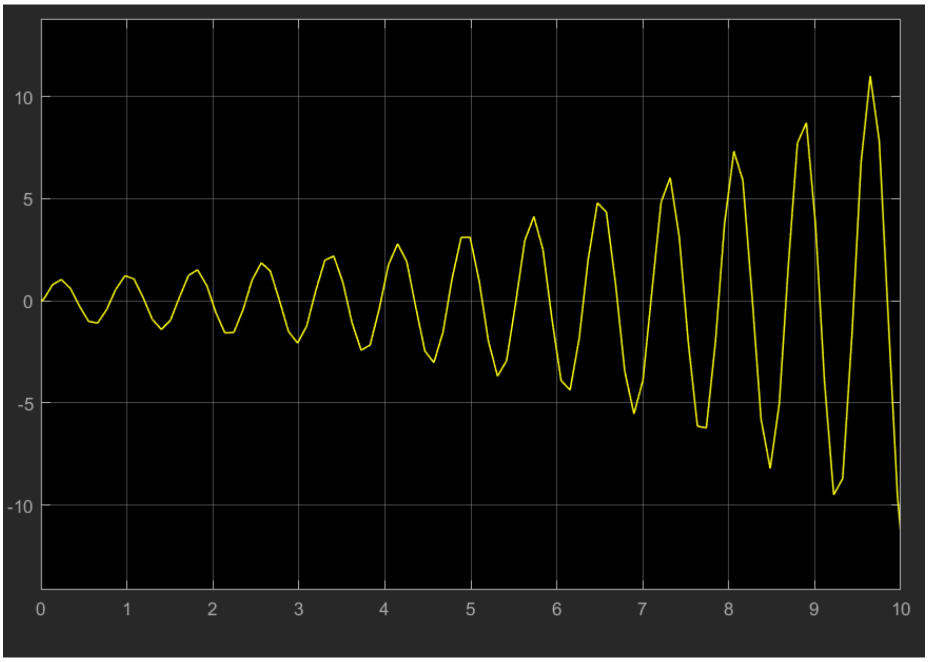
c1=0,5



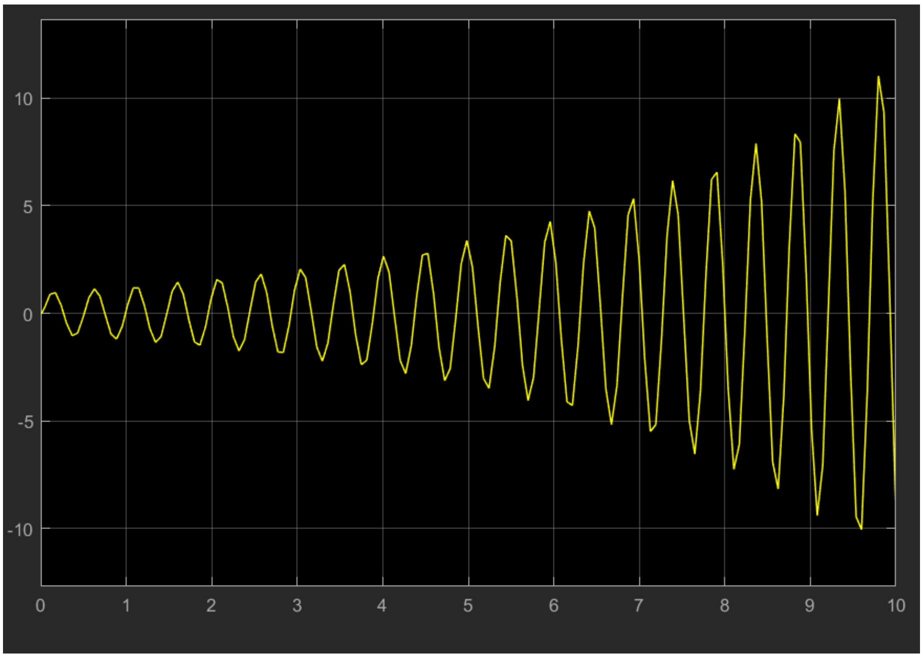
c1=1



c1=8



c1=13

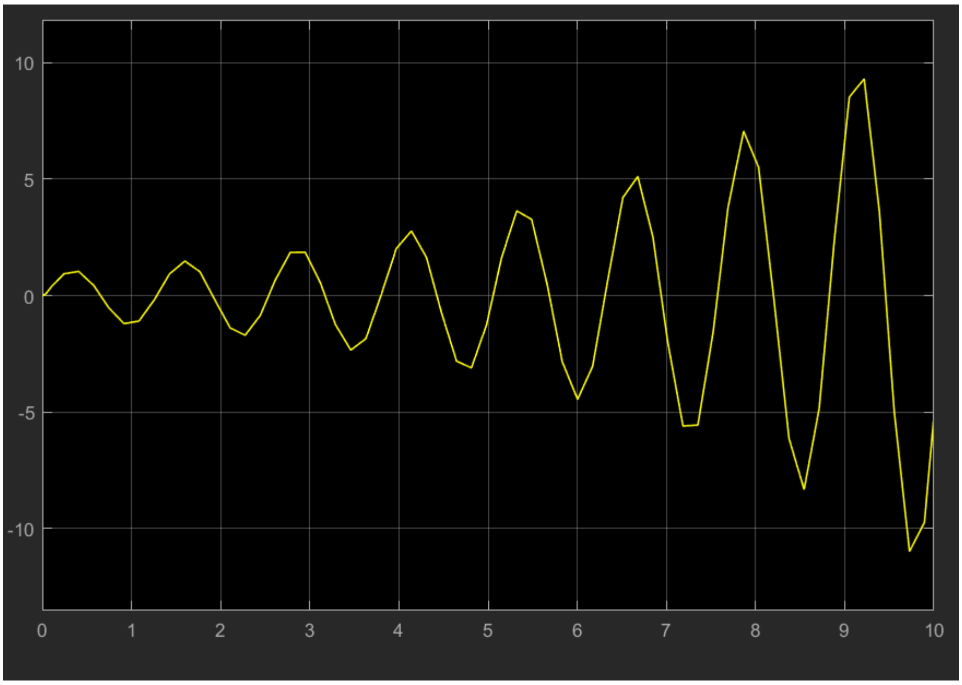


Con estos resultados, podemos observar que el parámetro c1 afecta a la frecuencia de la señal (aumentando la frecuencia conforme va aumento c1).

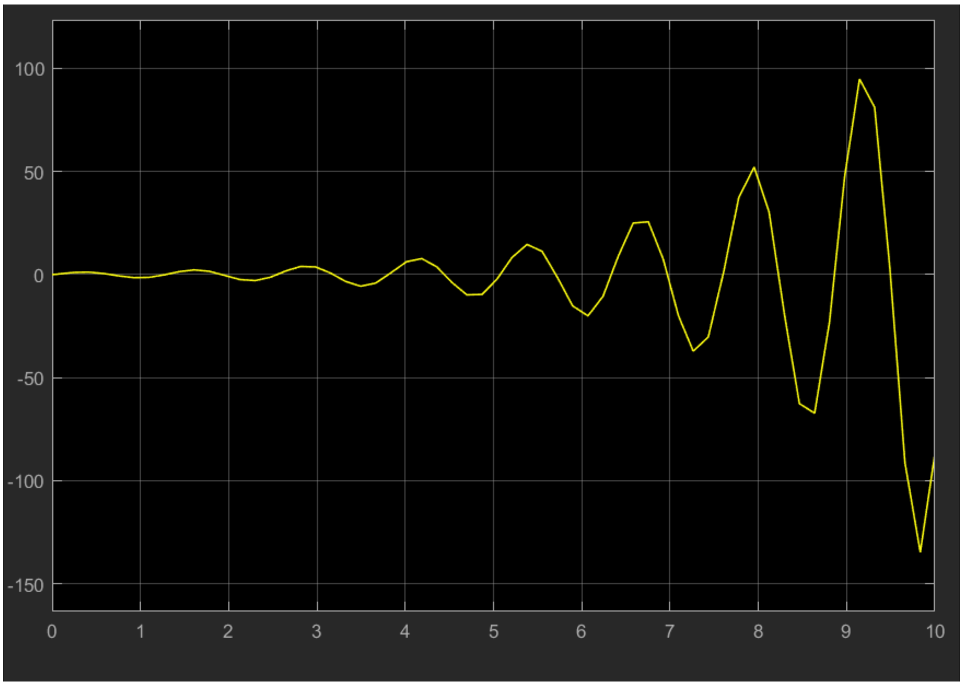
- Dejar fijo c1 y variar c2. ¿Qué le ocurre a la respuesta al impulso al variar c2?

Dejando fijo c1=5 y variando c2, obtenemos los siguientes resultados:

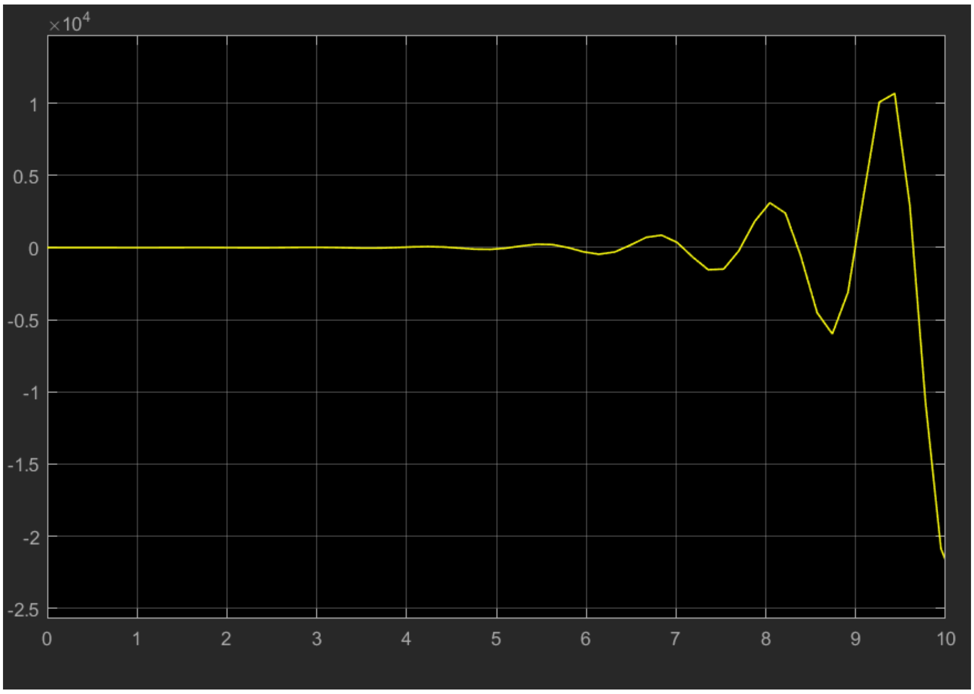
c2=0.5



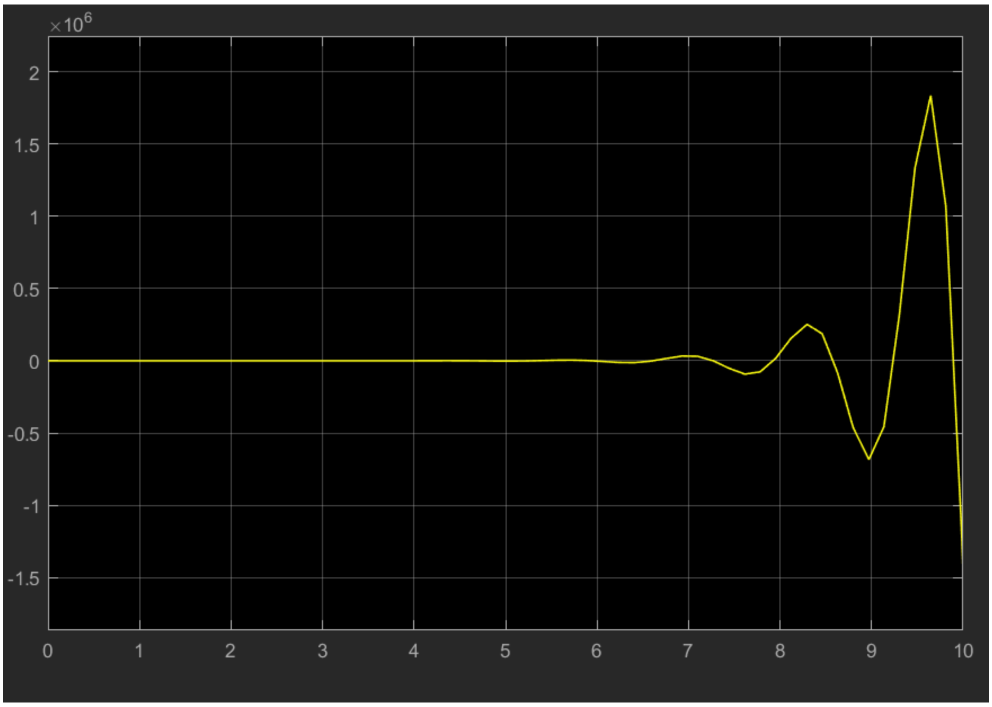
c2=1



c2=2



c2=3



Con los resultados obtenidos, podemos afirmar que el parámetro c2 afecta a la amplitud de la señal, principalmente (aumentado la amplitud conforme va aumentando el valor de c2) ya que aumenta la pendiente de la envolvente de la señal lo que hace que suba de manera más repentina