INFORME PRÁCTICA 3
SISTEMAS LINEALES

Diego Ismael Antolinos García
Andrés Ruz Nieto
P-B2

ÍNDICE

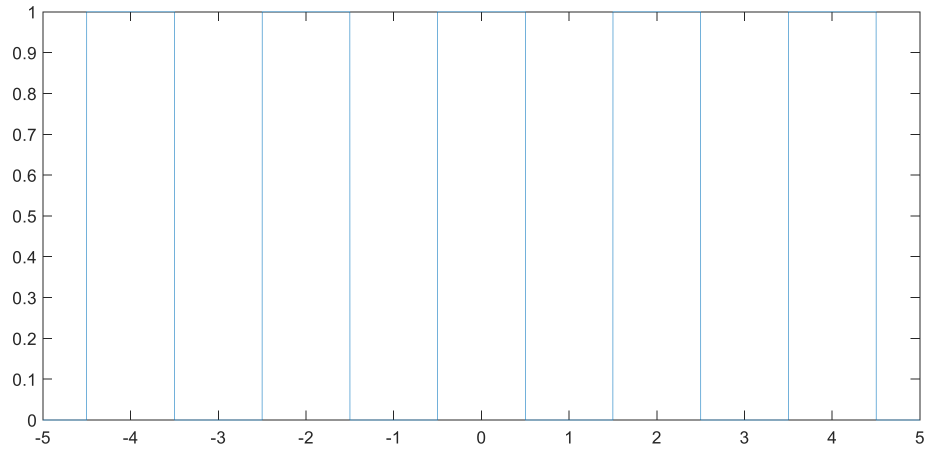
En esta práctica realizaremos representaciones de señales periódicas continuas mediante su DSF y analizaremos la respuesta en frecuencia de sistemas LTI ante señales periódicas haciendo uso también del DSF.

1. *Señales periódicas continuas. Series de Fourier*

a. Señal a

i. Representación

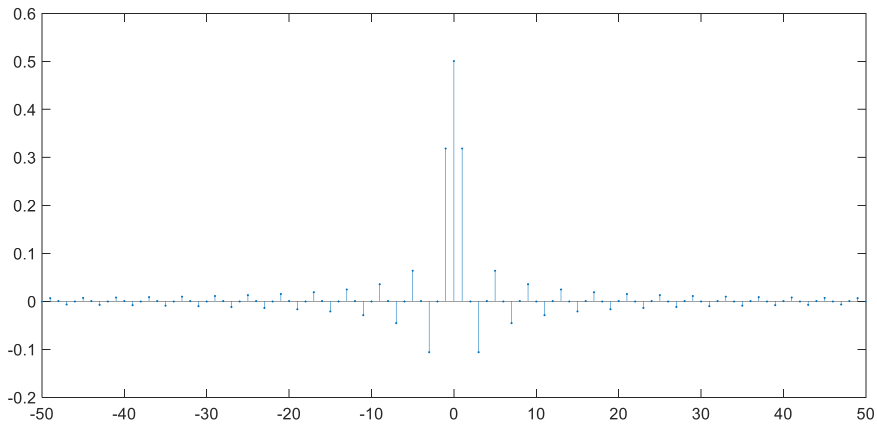
```
T=2; dt=0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x=zeros(1, length(t));
ti=find(abs(t)<=0.5) ; x(ti)=1;
ti=find(abs(t)>0.5) ; x(ti)=0;
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T],[x x x x x]);
```



ii. DSF

```
%N= 50 para reducir el fenómeno de GIBBS
ak=sfourier(x,T,50,dt);
p=-50:50;
stem(p,ak,'.')
```

Donde **x** es una señal pseudo-continua como las generadas anteriormente, **T** es el periodo de la señal, **N** es el orden del armónico más alto, utilizamos 50 para reducir el efecto del Fenómeno de Gibbs, y **dt** es el paso temporal de discretización. (Esto se repite para los casos posteriores).



$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-0'5}^{0'5} e^{-jk\pi t}\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-jk\pi t}}{jk\pi}\right]_{-0'5}^{0'5} = \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-0'5jk\pi}+e^{0'5jk\pi}}{jk\pi}\right) =$$

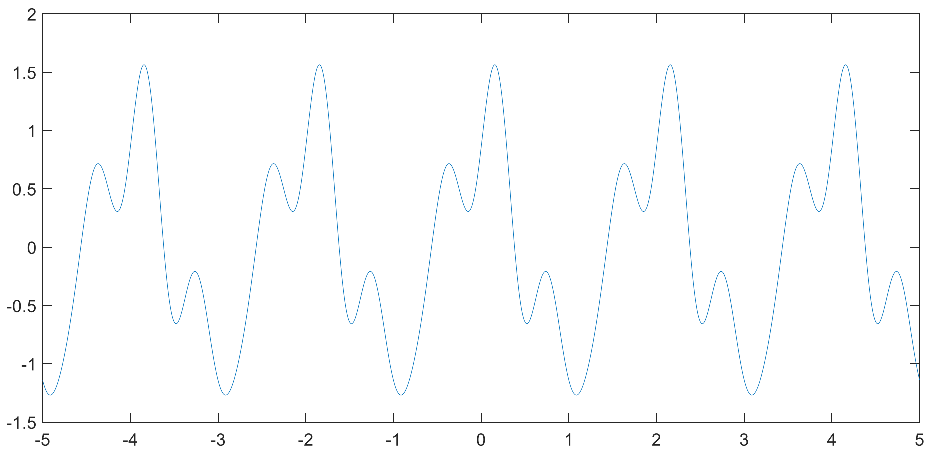
$$= \frac{2}{2k\pi}\left(\frac{e^{0'5jk\pi}-e^{-0'5jk\pi}}{2j}\right) = \frac{1}{k\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{k\pi}{2}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

para $k=0 \rightarrow a_0 = \frac{\pi}{0} = L'H\hat{o}pital = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{\pi/2}{\pi} = \frac{1}{2}$

b. Señal b

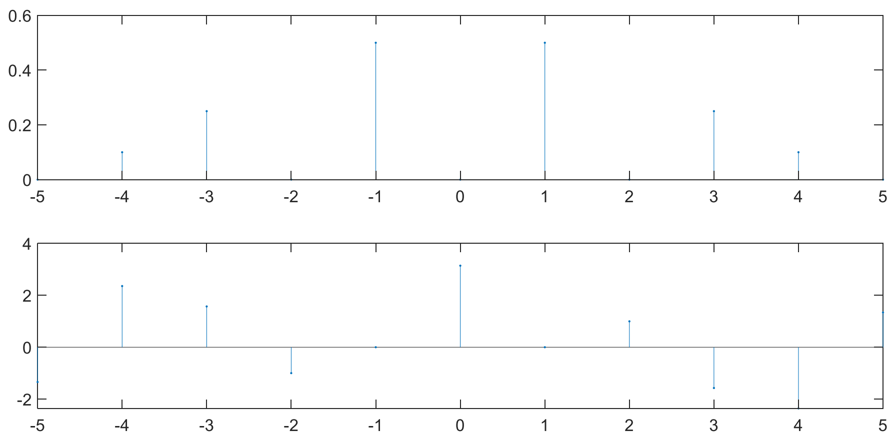
i. Representación

```
T=2; dt=0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x=cos(pi*t)+0.5*sin(3*pi*t)-0.2*cos(4*pi*t+pi/4);
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T],[x x x x x]);
```



ii. DSF

```
ak=sfourier(x,T,50,dt);
p=-5:5;
subplot(2,1,1)
stem(p,abs(ak),'.')
subplot(2,1,2)
stem(p,angle(ak),'.')
```



$$x(t) = \frac{e^{j\pi t} + e^{j\pi t}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{j3\pi t} - e^{j3\pi t}}{2j} - \frac{1}{5}\cdot e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}}{2} =$$

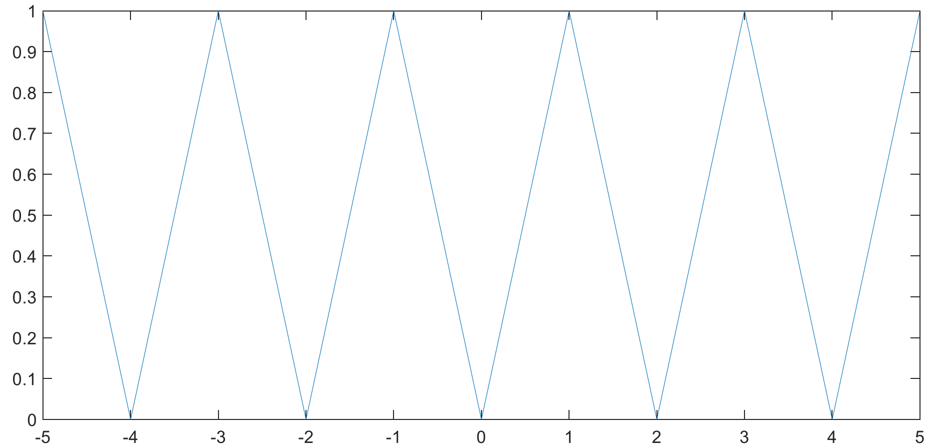
$$= \frac{1}{2}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi t} + \frac{1}{4j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{4j}e^{-j3\pi t} - \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{10}e^{-j4\pi t}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2} \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{4j} \quad a_{-3} = -\frac{1}{4j} \quad a_4 = \frac{-e^{\frac{\pi}{4}}}{10} \quad a_{-4} = \frac{-e^{\frac{\pi}{4}}}{10}$$

c. Señal c

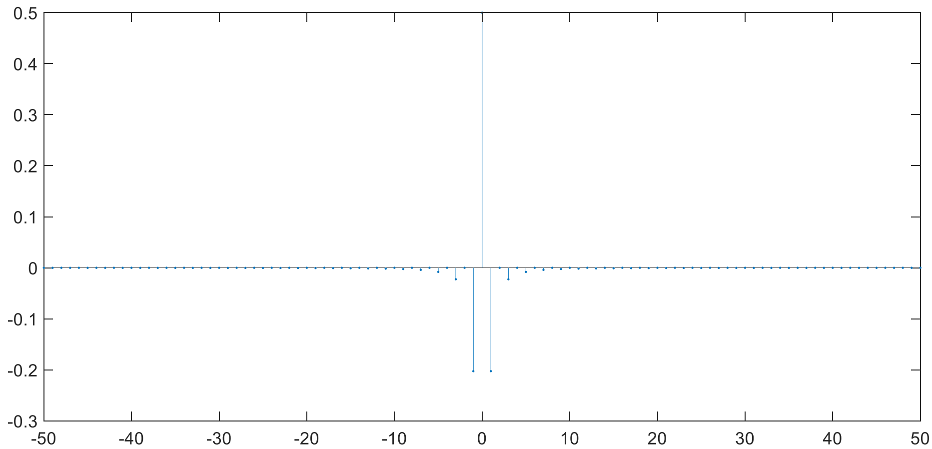
i. Representación

```
T=2; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(t>0 & t<1); x(ti) =t(ti);
ti=find(t>=-1 & t<=0); x(ti)=-t(ti);
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```



ii. DSF

```
ak=sfourier(x,T,50,dt);
p=-50:50;
stem(p,ak,'.')
```



$$a_k = \frac{1}{2}\left[-\int_{-1}^{0} t e^{-jk\pi t}dt + \int_{0}^{1} t e^{-jk\pi t}dt\right]$$

Calculamos la primitiva:

$$\int t e^{-jk\pi t} = \begin{cases} dv = e^{-jk\pi t}dt & v = \frac{-e^{-jk\pi t}}{jk\pi} \\ u = t & du = dt \end{cases} = \frac{-t e^{-jk\pi t}}{jk\pi} + \int \frac{e^{-jk\pi t}}{jk\pi}dt =$$

$$= \frac{-t e^{-jk\pi t}}{jk\pi} + \frac{e^{-jk\pi t}}{(k\pi)^2} = \left(\frac{-t}{jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2}\right)e^{-jk\pi t}$$

$$a_k = \frac{1}{2}\left(\left[\left(\frac{t}{jk\pi} - \frac{1}{(k\pi)^2}\right)e^{-jk\pi t}\right]_{-1}^{0} + \left[\left(\frac{-t}{jk\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2}\right)e^{-jk\pi t}\right]_{0}^{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(k\pi)^2} - \left(\frac{-1}{jk\pi} - \frac{1}{(k\pi)^2}\right)(-1)^k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(k\pi)^2}(-1+(-1)^k)\right) =$$

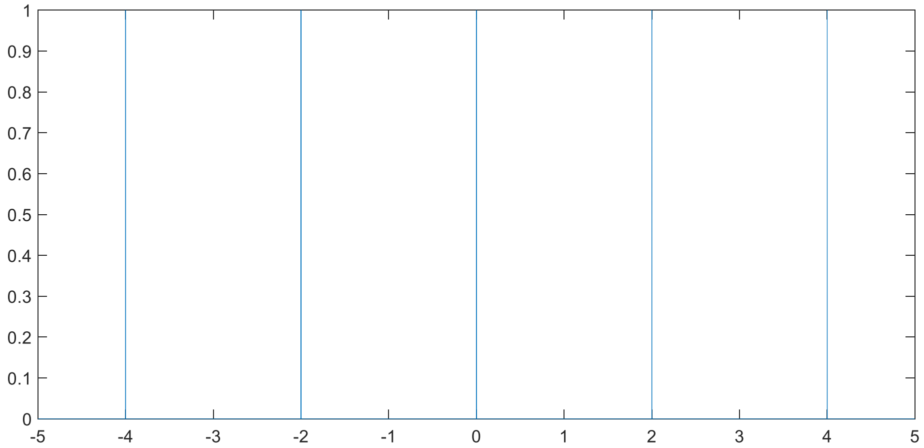
$$= \frac{1}{(k\pi)^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[-\int_{-1}^{0} t\,dt + \int_{0}^{1} t\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[-\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

d. Señal d

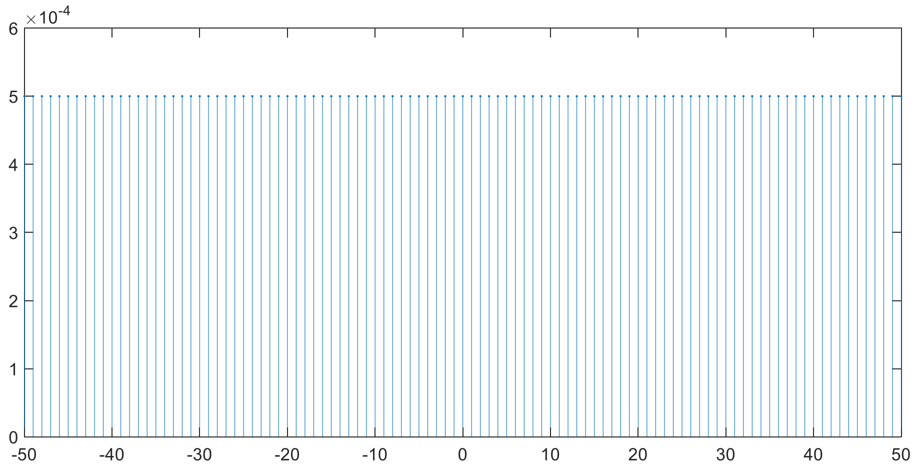
i. Representación

```
T=2; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(t==0); x(ti)=1;
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```



ii. DSF

```
ak=sfourier(x,T,50,dt);
p=-50:50;
stem(p,ak,'.')
```

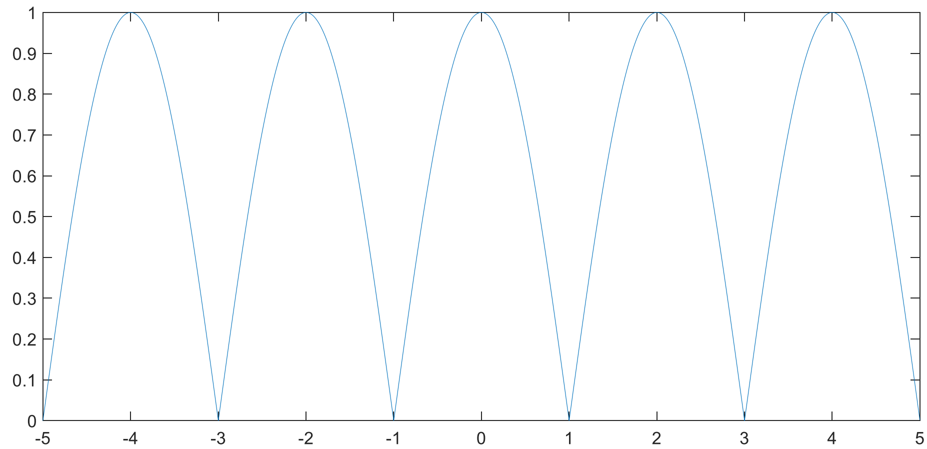


$$a_K = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\delta(t)\,e^{-jK\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\delta(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

e. Señal e

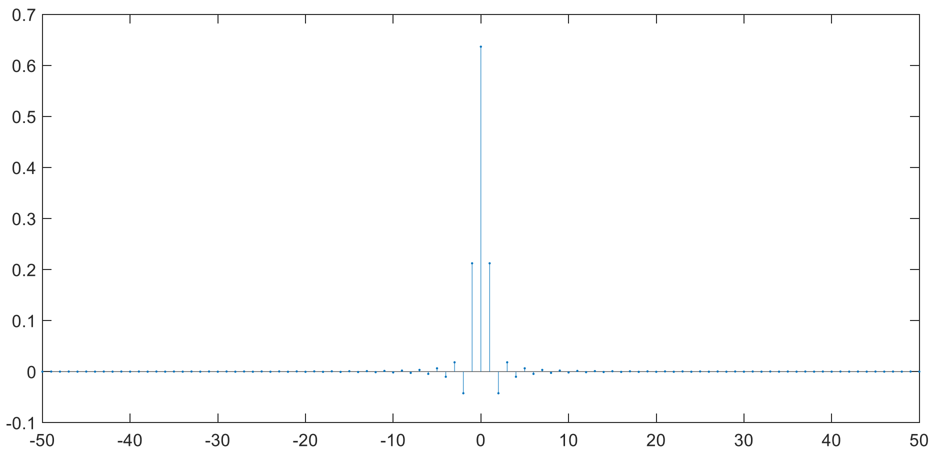
i. Representación

```
T=2; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x=abs(cos(pi*t/2));
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```



ii. DSF

```
ak=sfourier(x,T,50,dt);
p=-50:50;
stem(p,ak,'.')
```



$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right| e^{-jk\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}t}+e^{j\frac{\pi}{2}t}}{2}\right) e^{-jk\pi t}\,dt =$$

$$\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{j\pi t}\left(\frac{1}{2}-k\right)+e^{-j\pi t}\left(\frac{1}{2}+k\right)db = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{j\pi t}\left(\frac{1}{2}-k\right)}{j\pi\left(\frac{1}{2}-k\right)} - \frac{e^{-j\pi t\left(\frac{1}{2}+k\right)}}{j\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)}\right]_{-1}^{1} =$$

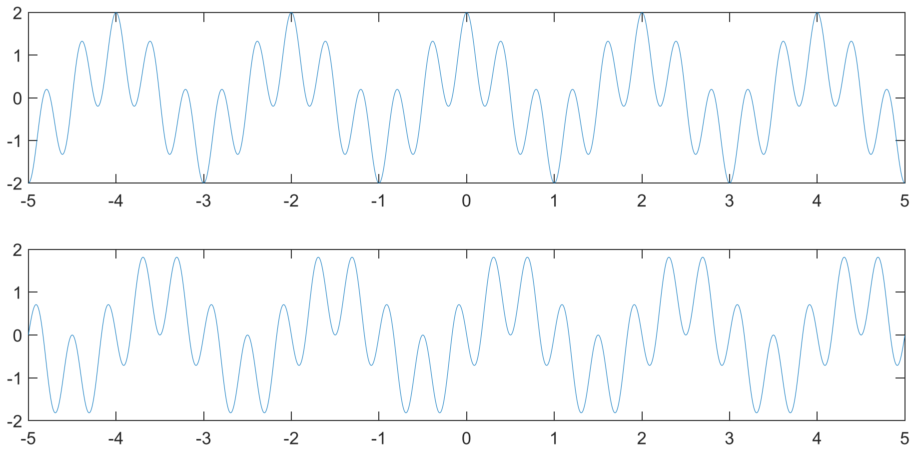
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{j\pi}\left(\frac{1}{2}-k\right)-e^{-j\pi\left(\frac{1}{2}-k\right)}}{j\pi\left(\frac{1}{2}-k\right)} - \frac{e^{-j\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)}-e^{j\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)}}{j\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\pi\left(\frac{1}{2}-k\right)\right)}{\pi\left(\frac{1}{2}-k\right)} + \frac{\operatorname{sen}\left(\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}{\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}-k\right)+\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right]$$

f. Señal f

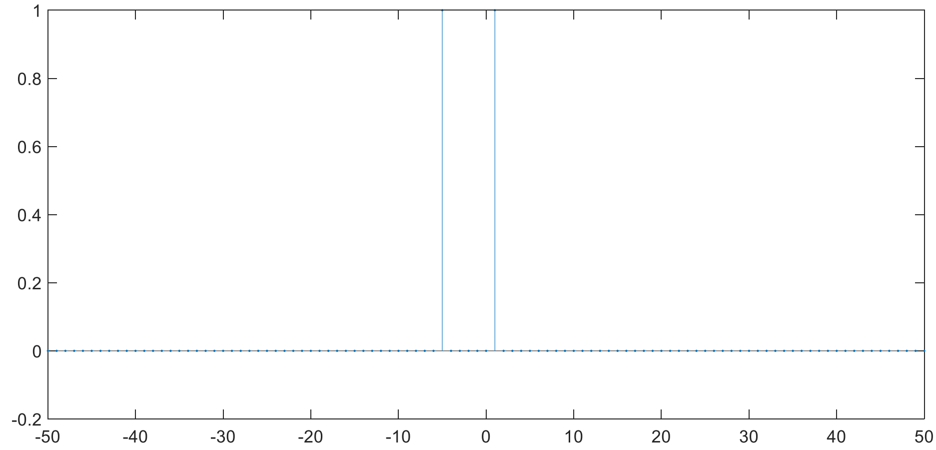
i. Representación

```
T=2; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= exp(j*pi*t) + exp(-5*j*pi*t);
%Parte Real
subplot(2,1,1)
plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [real(x) real(x) real(x) real(x)
real(x)])
%Parte Imaginaria
subplot(2,1,2)
plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [imag(x) imag(x) imag(x) imag(x)
imag(x)])
```



ii. DSF

```
ak=sfourier(x,T,50,dt);
p=-50:50;
stem(p,ak,'.')
```

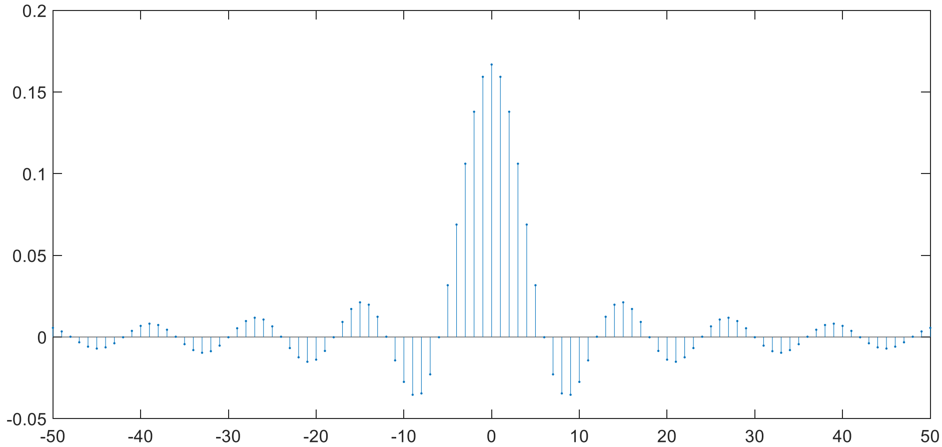


Se ve claramente → $a_1 = 1$ $a_{-5} = 1$

g. Señal a

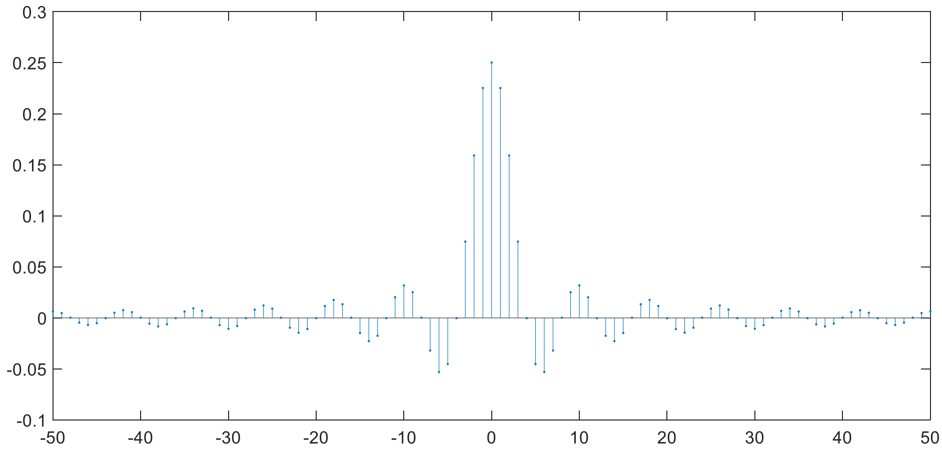
i. T=4

```
T=4; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(abs(t)<=0.5); x(ti) =1;
ti=find(abs(t)>0.5); x(ti)=0;
ak=sfourier(x,T,50,dt)
p=[-50:50];
stem(p,ak,'.')
```



ii. T=6

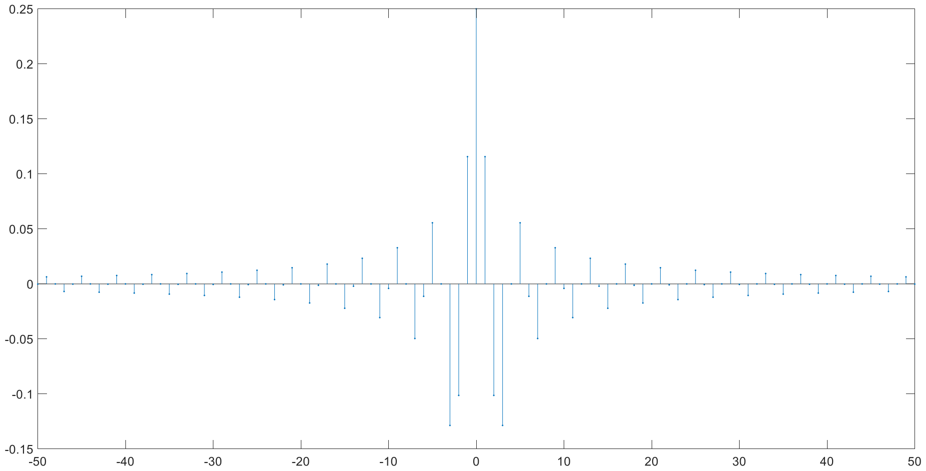
```
T=6; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(abs(t)<=0.5); x(ti) =1;
ti=find(abs(t)>0.5); x(ti)=0;
ak=sfourier(x,T,50,dt)
p=[-50:50];
stem(p,ak,'.')
```


0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-50
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40
50

h. Señal c

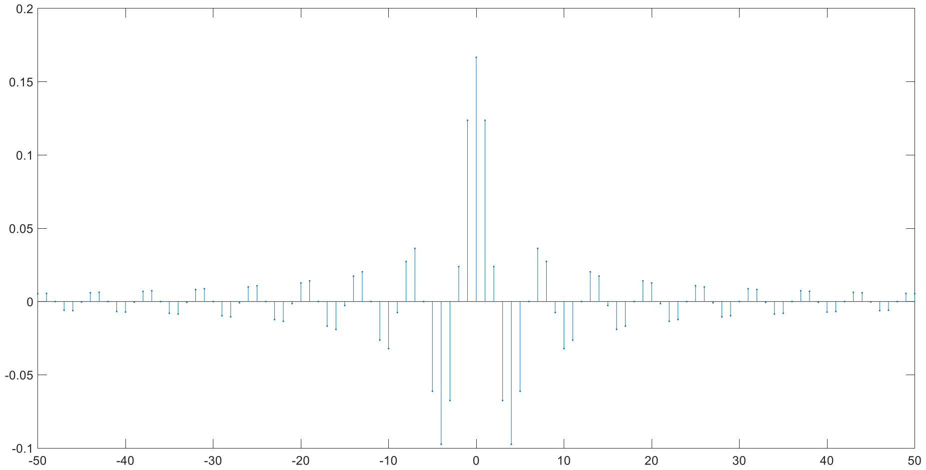
i. T=4

```
T=4; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(t>0 & t<1); x(ti) =t(ti);
ti=find(t>=-1 & t<=0); x(ti)=-t(ti);
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```



ii. T=6

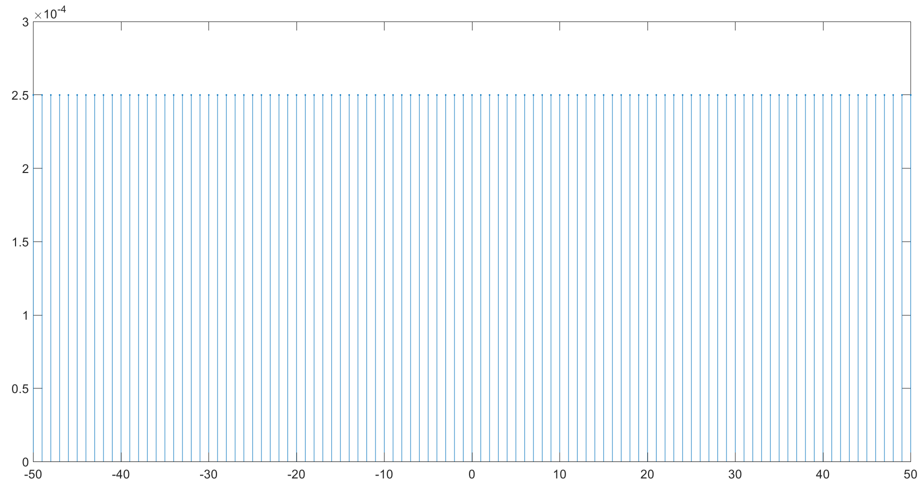
```
T=6; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(t>0 & t<1); x(ti) =t(ti);
ti=find(t>=-1 & t<=0); x(ti)=-t(ti);
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```



i. Señal d

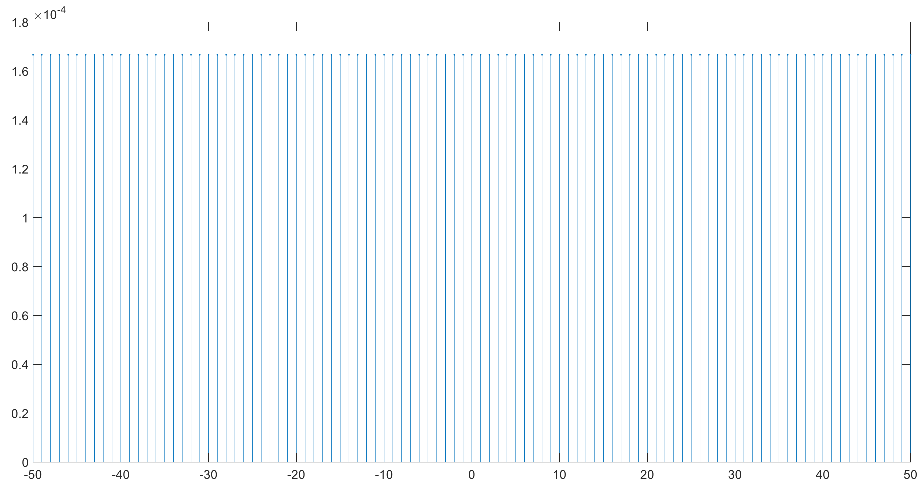
i. T=4

```
T=4; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(t==0); x(ti)=1;
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```



ii. T=6

```
T=6; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(t==0); x(ti)=1;
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```



Si quisiéramos ver el módulo y la fase de estas señales, simplemente tendríamos que cambiar en los comandos del apartado i.Representacion, de cada una de las señales anteriores, *real(x)* por *abs(x)* e *imag(x)* por *angle(x).*

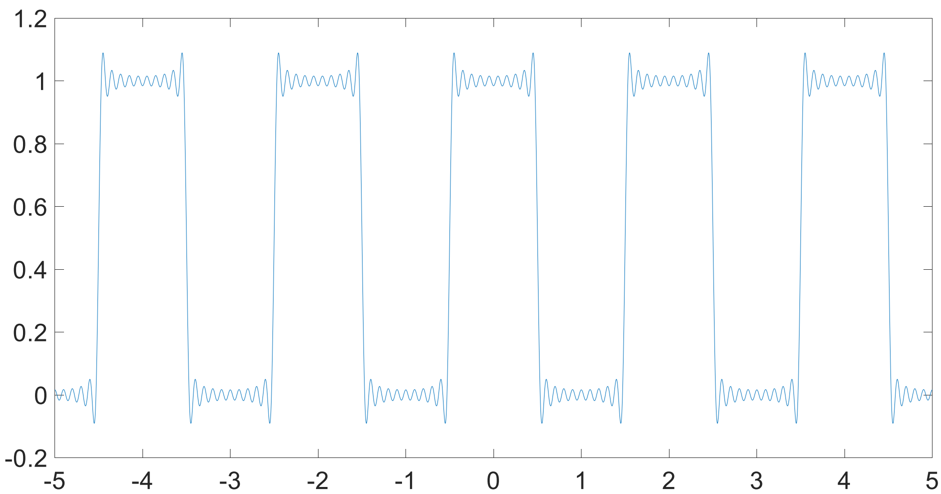
También podemos ver como la amplitud se ve reducida al aumentar el periodo (debido al factor 1/T que hay al comienzo de la ecuación de análisis del DSF). También podemos observar que el valor de los a_k ha cambiado, debido a que ha cambiado su pulsación fundamental (la forma de la señal formada por el conjunto de los a_k no ha variado).

j. *Reconstruir las señales a, c, d, e*

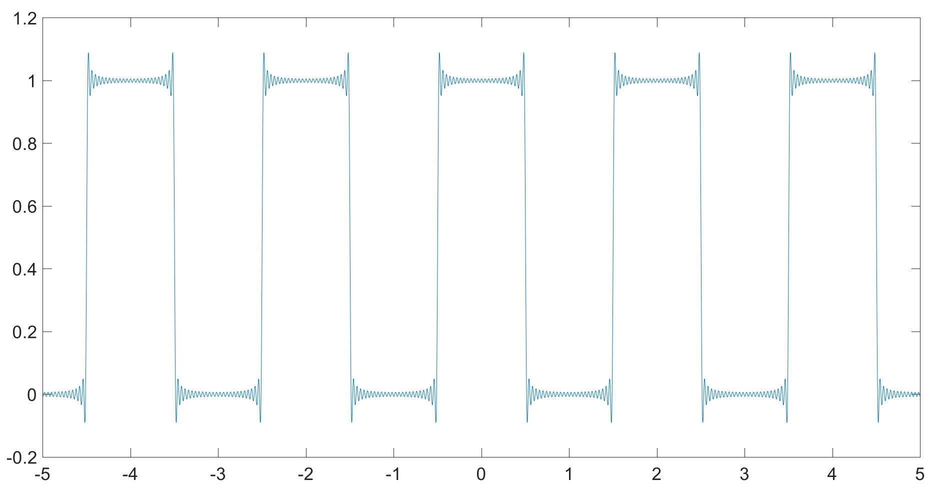
i. Señal a

```
T=2; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(abs(t)<=0.5); x(ti) =1;
ti=find(abs(t)>0.5); x(ti)=0;
ak=sfourier(x,T,20,dt);
x=isfourier(ak,T,20,dt);
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```

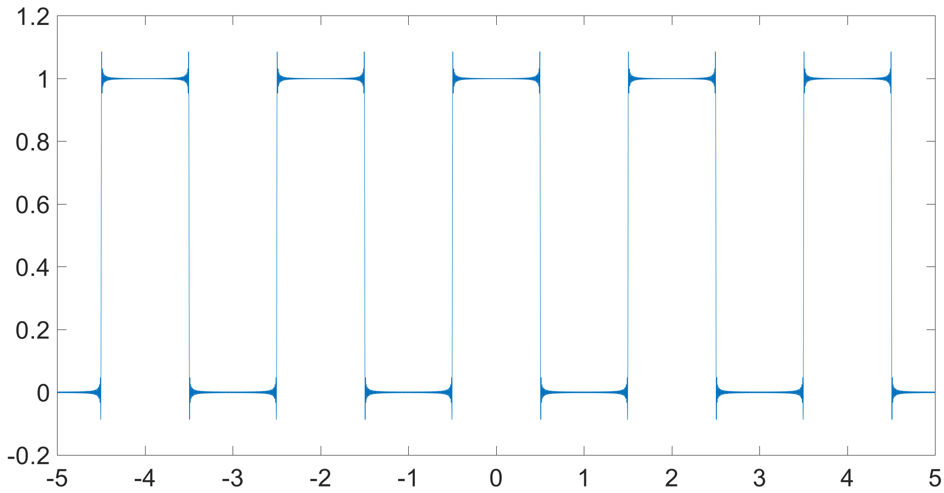
1. 20 armónicos



2. 50 armónicos



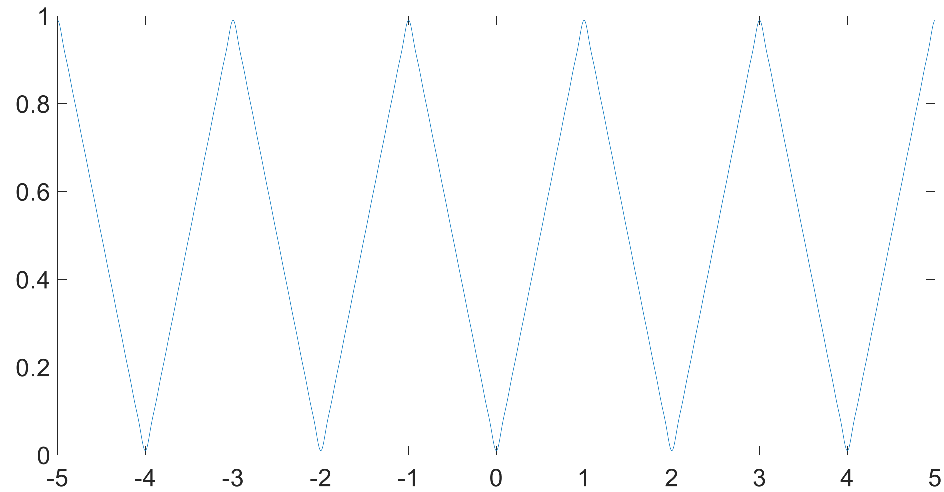
3. 200 armónicos



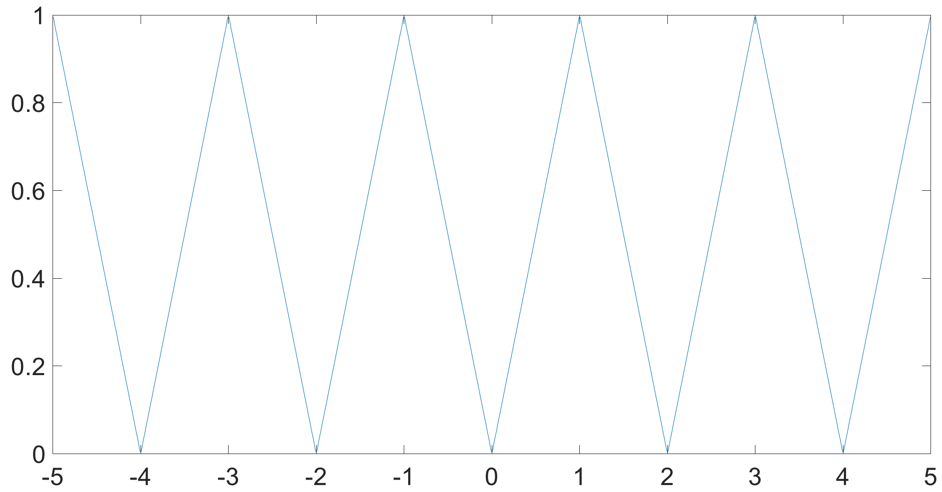
ii. Señal c

```
T=2; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(t>0 & t<1); x(ti) =t(ti);
ti=find(t>=-1 & t<=0); x(ti)=-t(ti);
ak=sfourier(x,T,20,dt);
x=isfourier(ak,T,20,dt);
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```

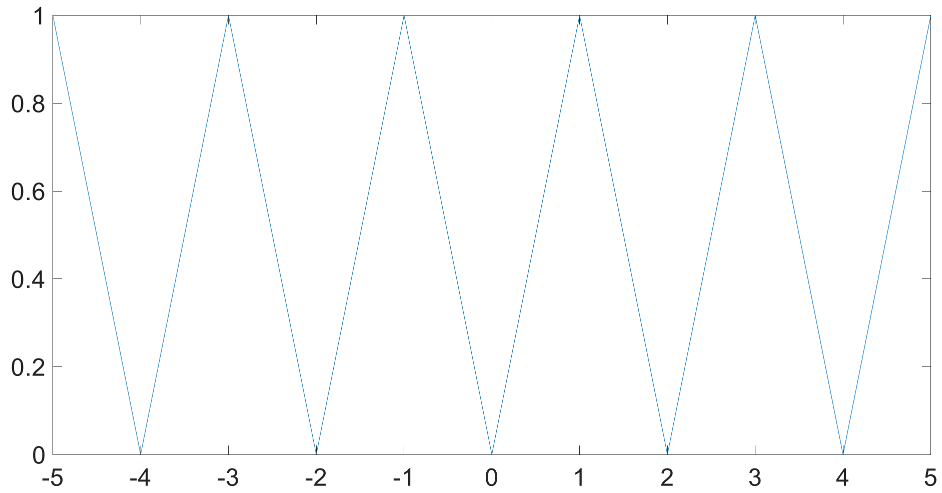
1. 20 armónicos



2. 50 armónicos



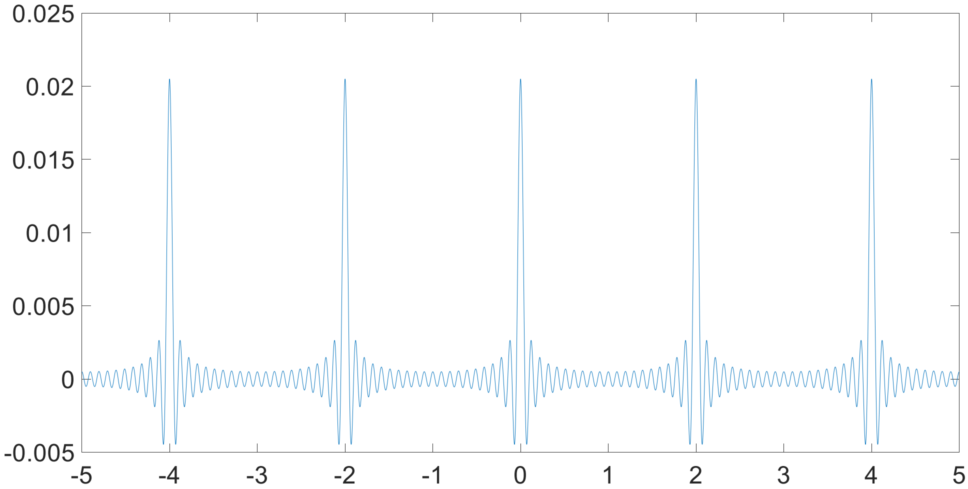
3. 200 armónicos



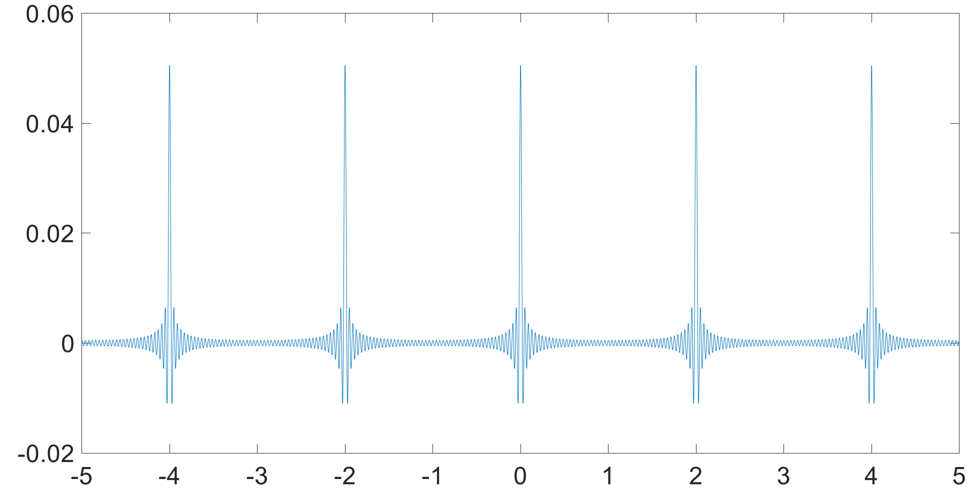
iii. Señal d

```
T=2; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= zeros (1, length(t));
ti=find(t==0); x(ti)=1;
ak=sfourier(x,T,20,dt);
x=isfourier(ak,T,20,dt);
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```

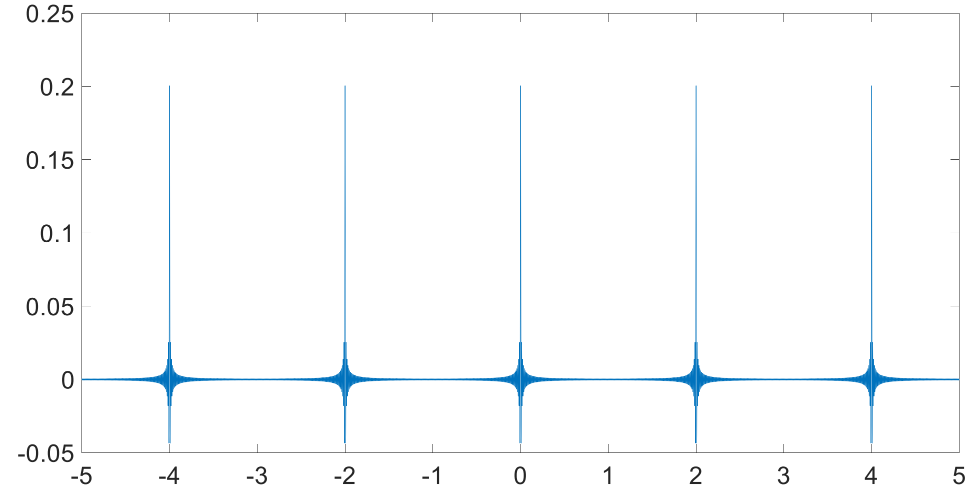
1. 20 armónicos



2. 50 armónicos



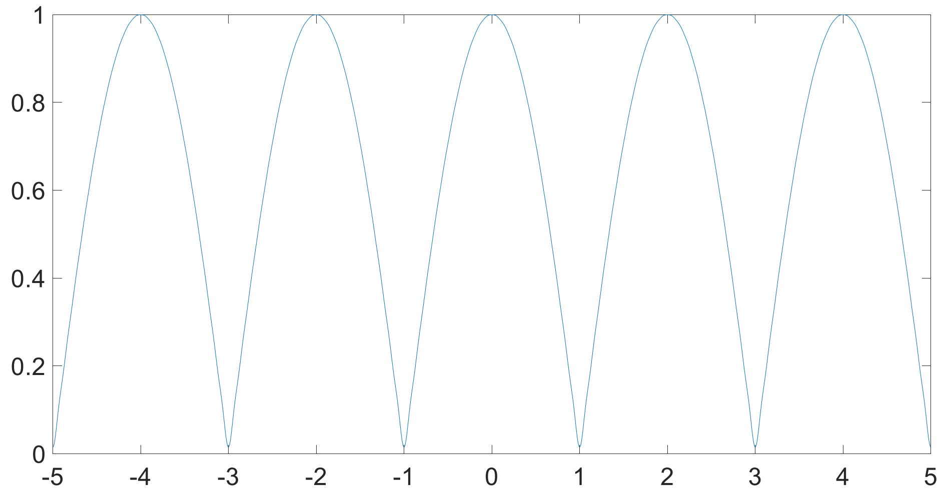
3. 200 armónicos



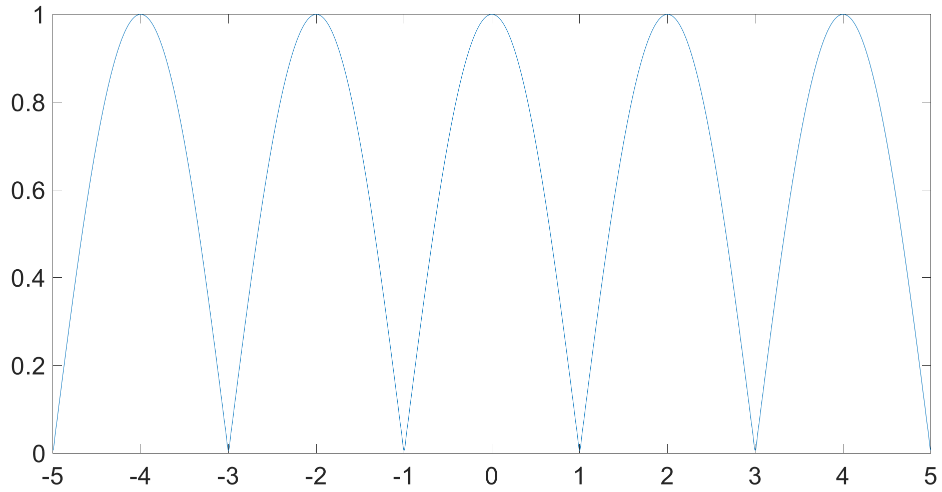
iv. Señal e

```
T=2; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x=abs(cos(pi*t/2));
ak=sfourier(x,T,20,dt);
x=isfourier(ak,T,20,dt);
figure, plot([t-2*T t-T t t+T t+2*T], [x x x x x])
```

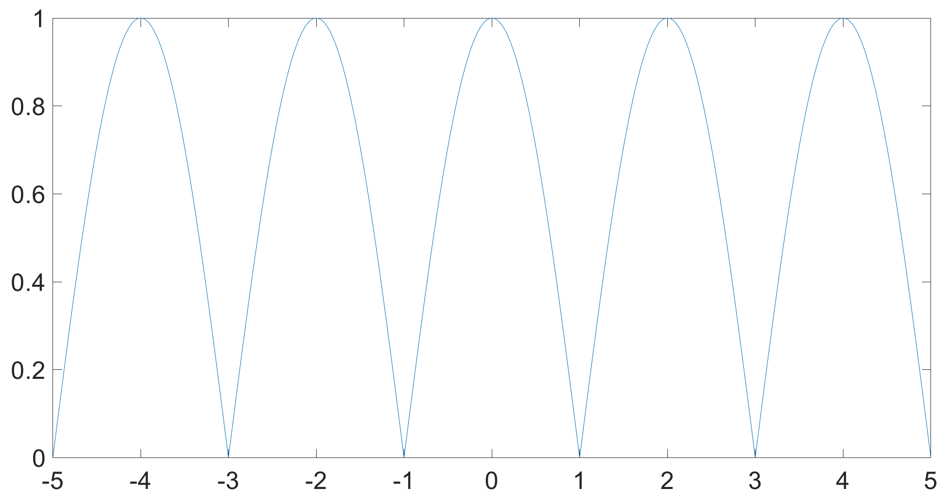
1. 20 armónicos



2. 50 armónicos



3. 200 armónicos



Para comprobar la relación de Parseval hemos desarrollado una función que introduciendo la función, sus a_k y su periodo, devuelve si se cumple dicha relación, y el valor.

```
function Parseval(x,ak,T)
dt=0.001;
a=sum(abs(ak).^2);
b=(1/T)*sum(abs(x).^2)*dt;
error_ab=abs(a-b);
    if (error_ab<5e-04)
         fprintf('Se cumple la relación de Parseval, y su valor es
%G',b);
    else
            fprintf('La relación no se cumple');
    end
end
```

Comprobamos la señal del apartado f del punto 1

```
T=2; dt= 0.001; t=-T/2:dt:T/2-dt;
x= exp(j*pi*t) + exp(-5*j*pi*t);
ak=sfourier(x,T,50,dt);
%Ahora usamos la función de Parseval
Parseval(x,ak,T)
```

Y el programa retorna:

Se cumple la relación de Parseval, y su valor es 2>>

2. *Series de Fourier y sistemas LTI*

a. Calcular analíticamente la respuesta en frecuencia H(w) del sistema anterior

b. Calcula la frecuencia de corte

H(w)

$$y_h(t) = Be^{-\frac{t}{RC}} u(t) \to h(t) = Be^{-\frac{t}{RC}}\Big|_{B=b_0} = e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$$

$$RCr + 1 = 0 \to r = \frac{-1}{RC}$$

$$H(w) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{RC}} \cdot e^{-jw\tau} d\tau = \int_0^\infty e^{\left(-\frac{1}{RC} - jw\right)\tau} d\tau = \frac{1}{\frac{1}{RC}+jw}$$

Módulo

$$\left|\frac{1}{\frac{1}{RC}+jw}\right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(RC)^2}+w^2}}$$

Fase:

$$\arctan\left(\frac{1}{RC}\right) - \arctan(w) = -\arctan(w)$$

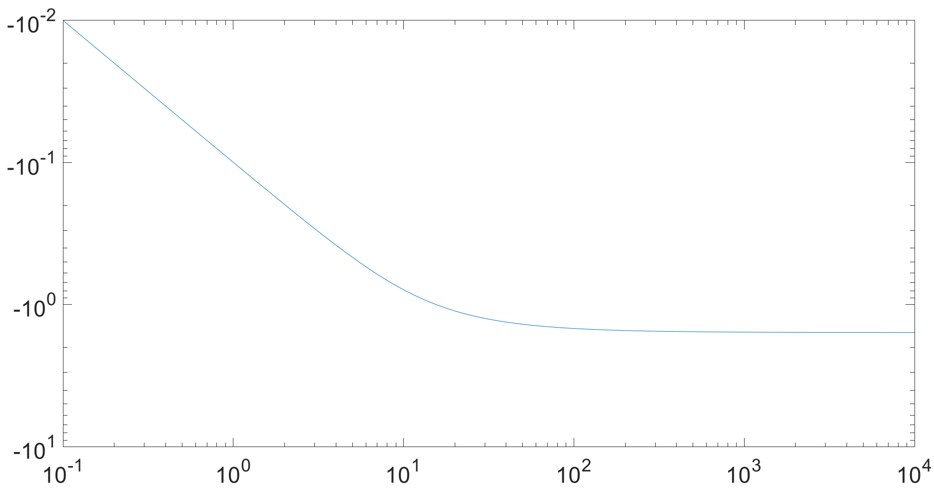
Frecuencia de corte:

$$\frac{1}{\frac{1}{(RC)^2}+w^2} = 0'5 \to 2 = \frac{1}{(RC)^2}+w^2 \to w_c = \sqrt{2-\frac{1}{(RC)^2}}$$

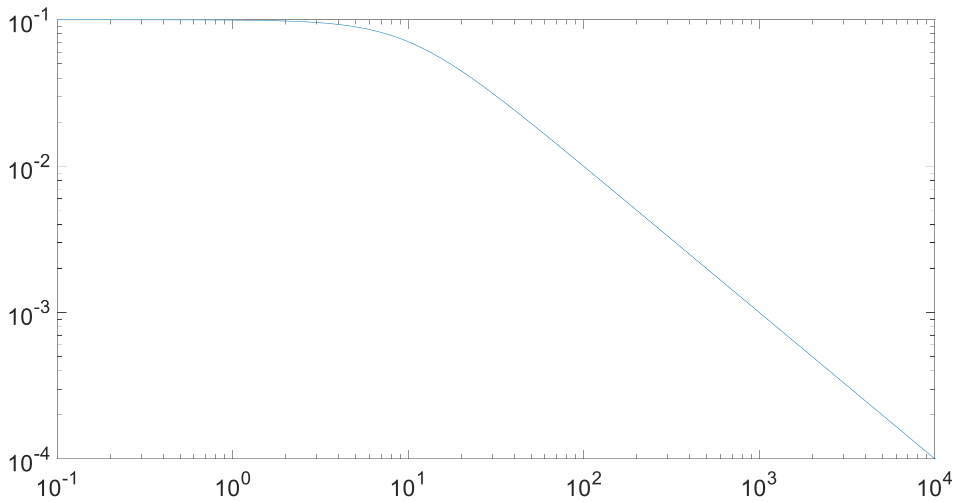
c. Respuesta en frecuencia

```
w= [0:0.1:10000];
H = 1./((1/0.1) +j*w);
a=abs(H);
b=angle(H);
figure, loglog(w,b)
figure, loglog(w,a)
```

Fase:



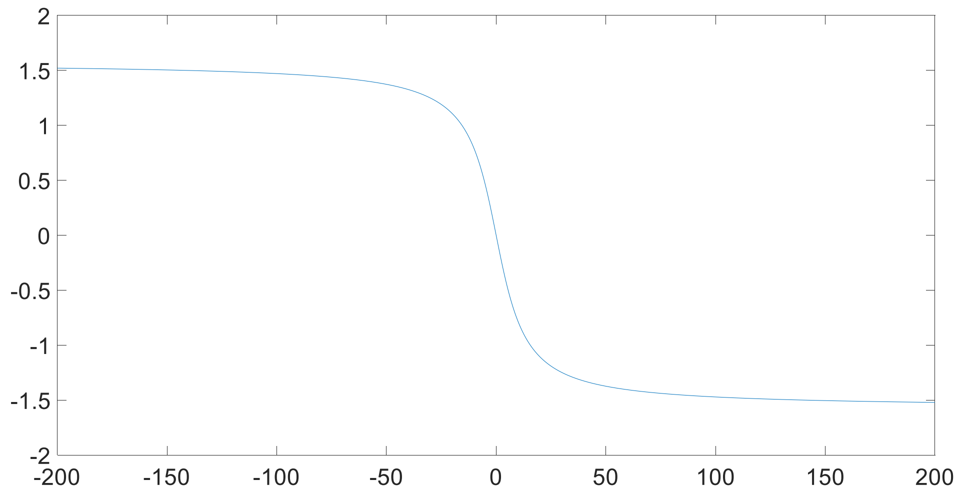
Módulo:



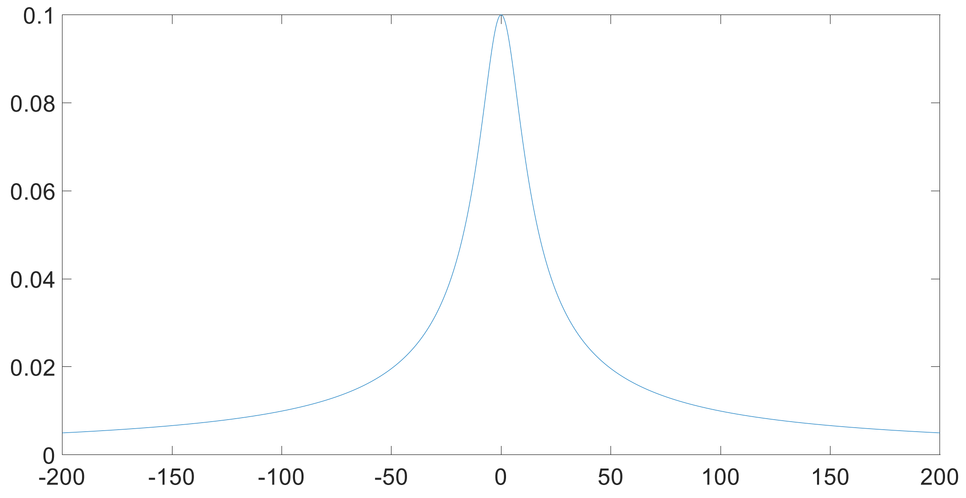
Ahora usamos el siguiente código

```
wt=[-200:0.1:200];
H1 = 1./((1/0.1) +j*wt);
a=abs(H1);
b=angle(H1);
figure, plot(wt,a)
figure, plot(wt,b)
```

Fase:



Módulo:

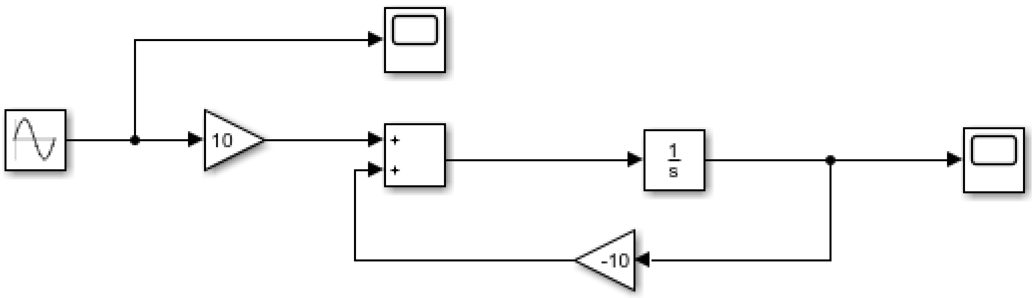


Sabemos que RC es 0.1, por lo que podremos obtener a y b fácilmente

$$0.1\frac{\mathrm{dy(t)}}{\mathrm{dt}}+\mathrm{y(t)}=\mathrm{x(t)}\rightarrow\frac{\mathrm{dy(t)}}{\mathrm{dt}}+10\mathrm{y(t)}=10\mathrm{x(t)}$$

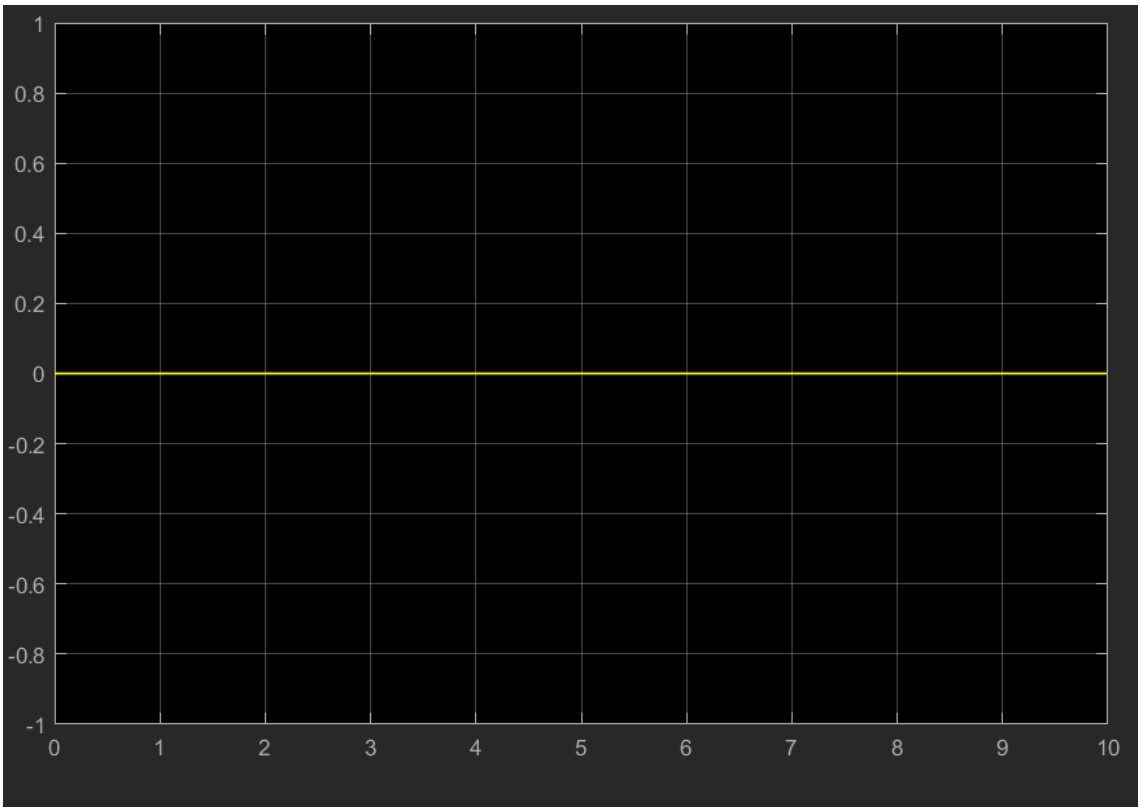
Obtenemos que b=10 e y=-10

Realizamos la siguiente simulación en simulink.



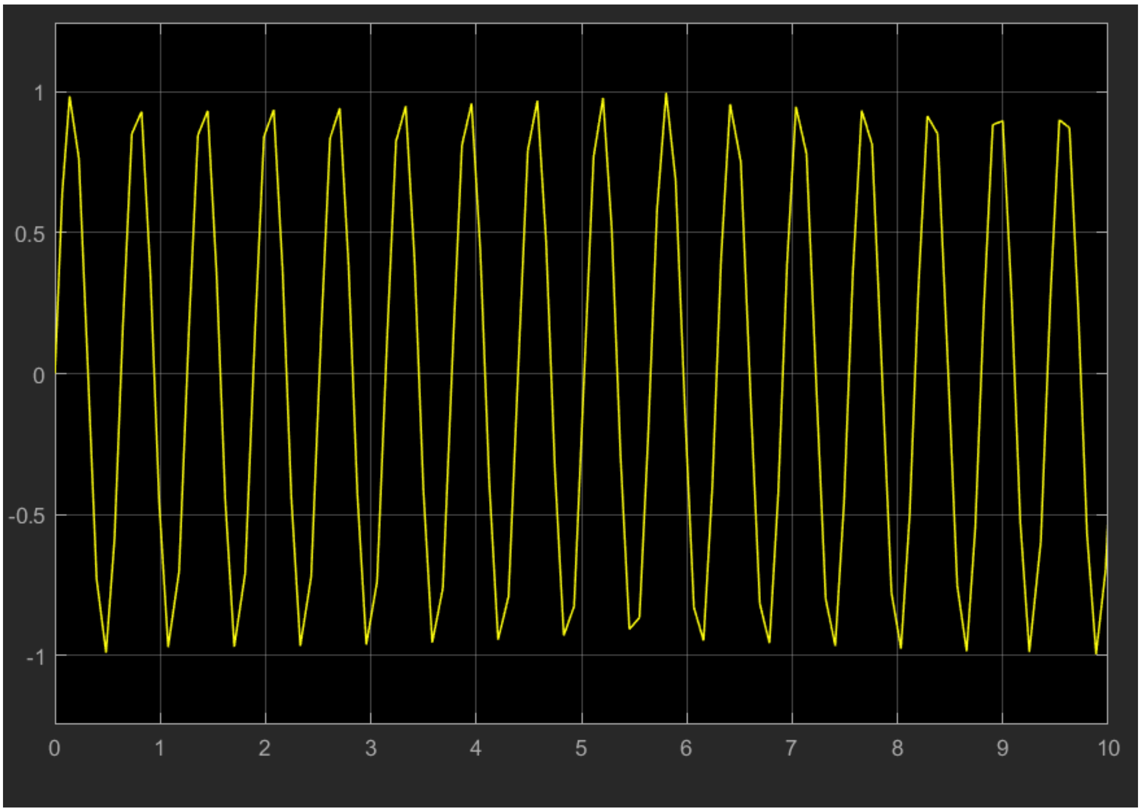
w=0

Entrada y salida:

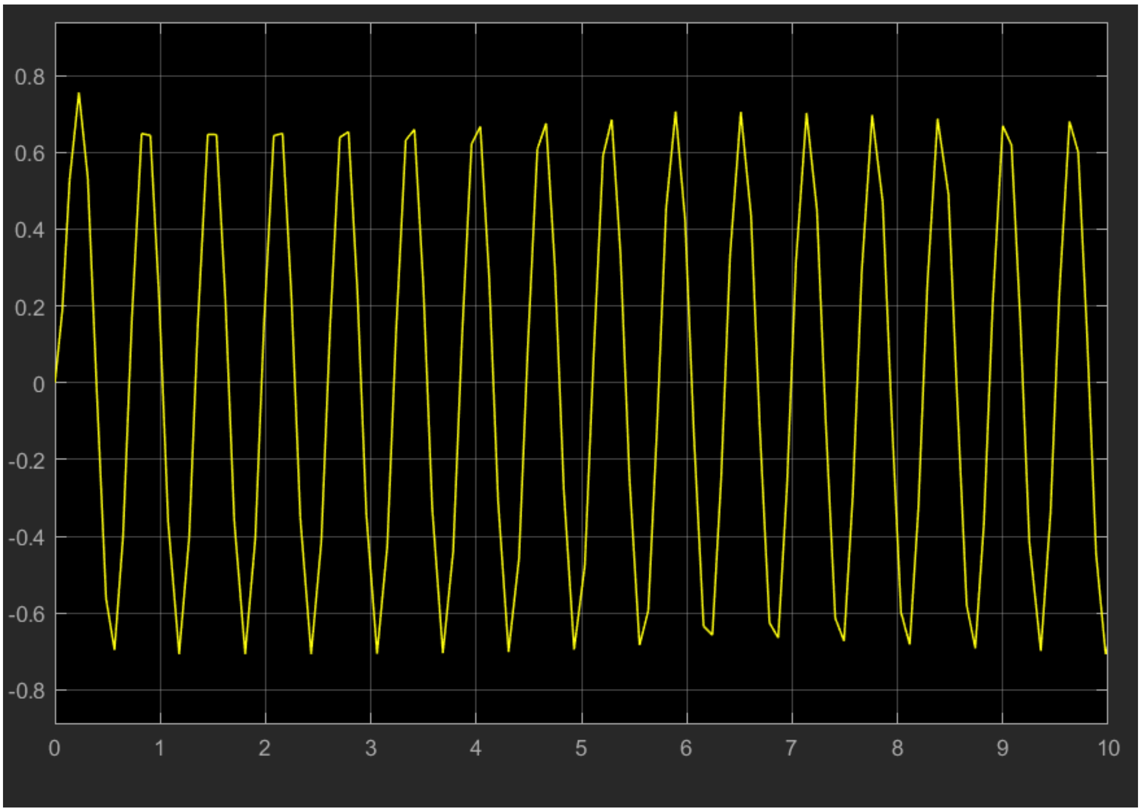


w=10

Entrada:

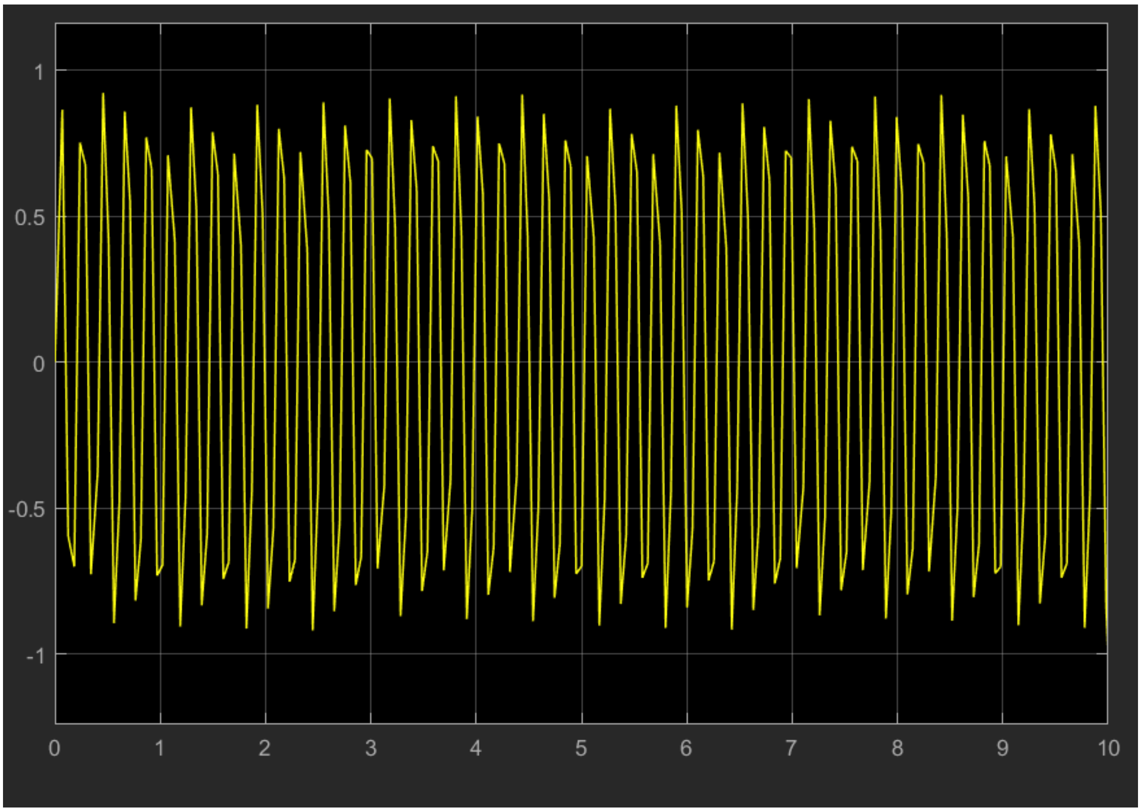


Salida:

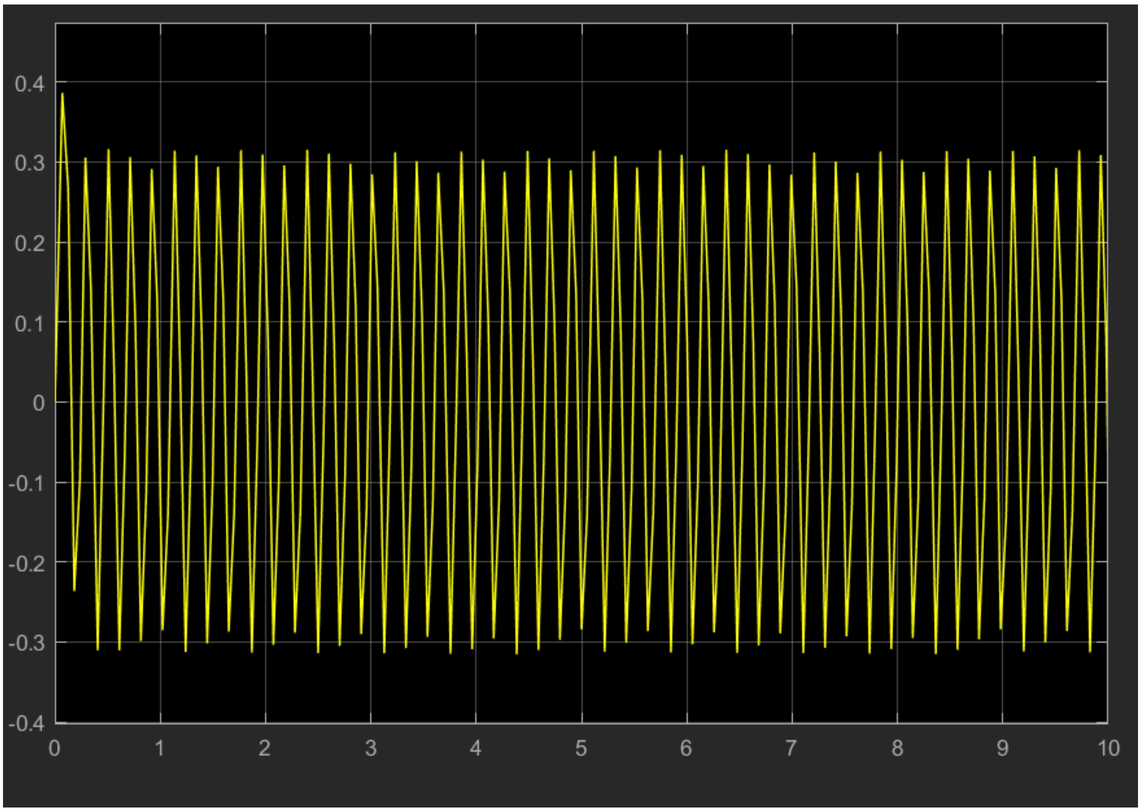


w=30

Entrada:

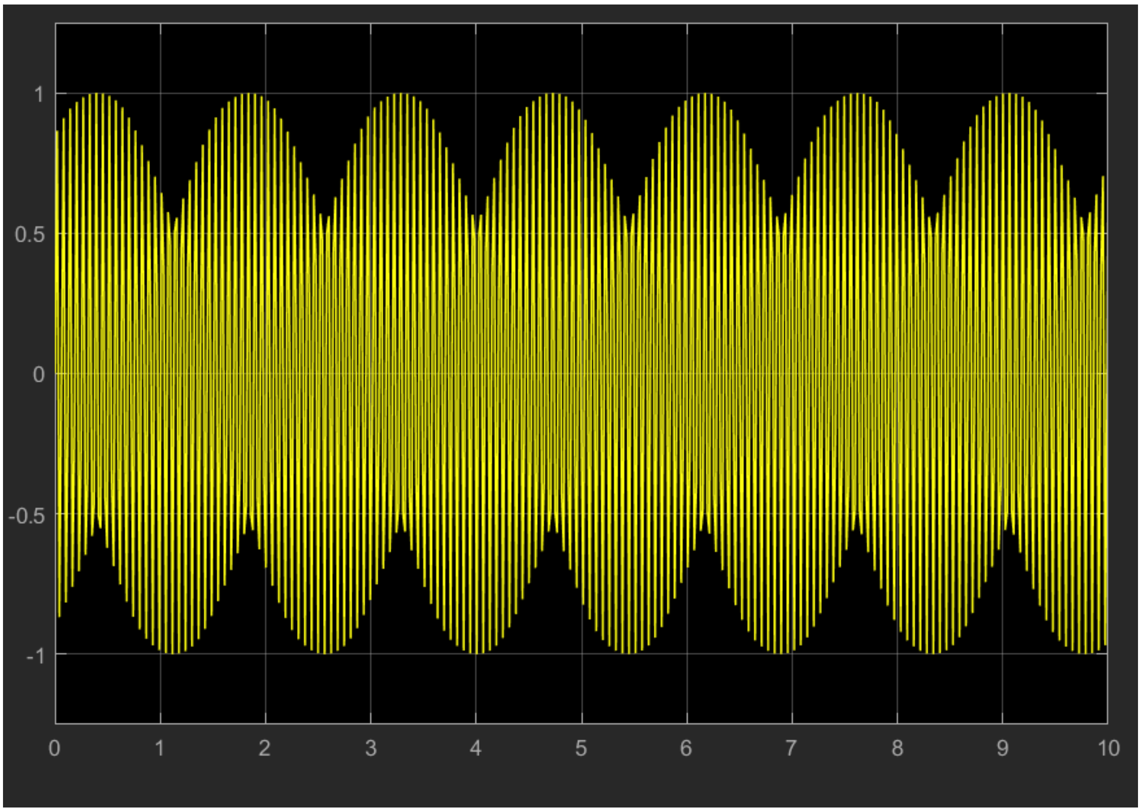


Salida:

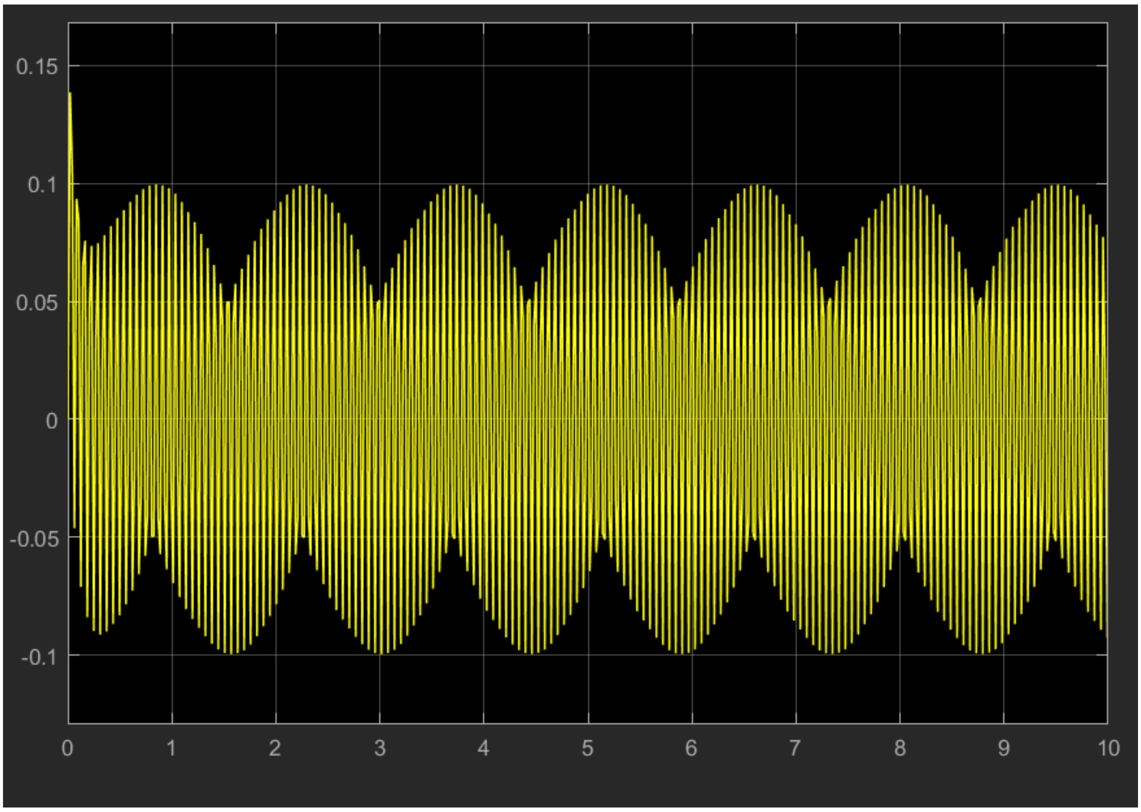


w=100

Entrada:



Salida:



Podemos observar que las señales de entrada y las señales de salida se corresponden con la misma sinusoide (entre cada par), solo varía la amplitud y la fase.

Si calculamos dichos valores, obtenemos lo siguiente:

Para w=0:

```
abs(H1(find(wt==0)))
angle(H1(find(wt==0)))
```

Obtenemos módulo=0.1 y fase=0.

Para w=10:

```
abs(H1(find(wt==10)))
angle(H1(find(wt==10)))
```

Obtenemos módulo=0.0707 y fase=-0.7854.

Para w=30:

```
abs(H1(find(wt==30)))
angle(H1(find(wt==30)))
```

Obtenemos módulo=0.0316 y fase=-1.249.

Para w=100:

```
abs(H1(find(wt==100)))
angle(H1(find(wt==100)))
```

Obtenemos módulo=0.01 y fase=-1.4711.