# Universidad Politécnica de Cartagena

## Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación

**PRÁCTICAS DE TRANSMISIÓN DE DATOS**

# Práctica 3: Capacidad de un canal de comunicaciones


**INTEGRANTES DEL GRUPO:**

| NOMBRE Y APELLIDOS | CORREO ELECTRÓNICO |
|---|---|
| **Diego Ismael Antolinos García** | **diego.antolinos@edu.upct.es** |
| **Andrés Ruz Nieto** | **andres.ruz@edu.upct.es** |

**NOTA:** Nuestra VA para las filas es X y para las columnas Y.

Apartado 3.1.

- Consideremos primero uno de los casos más sencillos. Supongamos que **X** e **Y** representan cada una el lanzamiento de una moneda **que se realiza de modo independiente**. Proporcione la matriz P que especifica la probabilidad conjunta de (**X**,**Y**). Para ello recuerde que si dos variables aleatorias son independientes se tiene: p(**X**=i,**Y**=j) = p(**X**=i) p(**Y**=j). Los resultados se encuentran en la tabla de entropías e información contenida mutua.

$$P = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \rightarrow Matlab\ nos\ devuelve\ una\ entropía\ conjunta\ de\ 2$$

- Ídem para dados de 6 caras. Proporcione una forma rápida para definir tal matriz en matlab a partir de la función `ones()` Los resultados se encuentran en la tabla de entropías e información contenida mutua.

$$Teclearemos\ en\ Matlab\ P = \frac{1}{36} * ones(6)\ y\ nos\ devolverá\ la\ siguiente\ matriz$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 \\ 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 \\ 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 \\ 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 \\ 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 \\ 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 & 0.0274 \end{pmatrix}$$

$$Matlab\ nos\ devuelve\ una\ entropía\ conjunta\ de\ 5.1699$$

- Obtenga la entropía conjunta en los casos anteriores. ¿Qué relación existe con la entropía de **X** e **Y** por separado? ¿Por qué?

Para dos sucesos independientes, la entropía conjunta, es una suma directa de cada una de las entropías de los dos sucesos.

- Ahora supongamos el extremo contrario: que la dependencia entre ambas variables es total, por ejemplo, con **Y**=**X**. Dé las matrices de masa conjunta para el caso de que **X** sea (i) una moneda, (ii) un dado de 6 caras. Proporcione una forma rápida para definir tal matriz en matlab a partir de la función `eye()`. Los resultados se encuentran en la tabla de entropías e información contenida mutua.

$$Teclearemos\ en\ Matlab\ P = 0.5 * eye(2)\ y\ nos\ devolverá\ la\ siguiente\ matriz$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$Teclearemos\ en\ Matlab\ P = \frac{1}{6} * eye(6)\ y\ nos\ devolverá\ la\ siguiente\ matriz$$

```
PdDado6Caras =

    0.1667         0         0         0         0         0
         0    0.1667         0         0         0         0
         0         0    0.1667         0         0         0
         0         0         0    0.1667         0         0
         0         0         0         0    0.1667         0
         0         0         0         0         0    0.1667
```

- Obtenga la entropía conjunta en los casos anteriores. ¿Qué relación existe con la entropía de **X** e **Y** por separado? ¿Por qué?

  La entropía de dos sucesos dependientes, como son en este caso, es igual a la entropía de uno de ellos.

  $Matlab\ nos\ devuelve\ una\ entropía\ conjunta\ de\ 1\ para\ el\ primer\ caso\ y\ 2.5850\ para\ el\ segundo$

  Los resultados se encuentran en la tabla de entropías e información contenida mutua.

- Ahora, realicemos el siguiente experimento. Se lanza una moneda (variable **X**), si el resultado es cara (asigne este caso a **X**=1) se lanza continuación y se coge como **Y** el número obtenido si es impar, o el más cercano por abajo si es el lanzamiento fue par. En caso de ser el resultado de la moneda cruz (asigne este caso a **X**=2) se coge como **Y** el número obtenido si es par, o el más cercano por arriba si es el lanzamiento fue impar. Por ejemplo, si la moneda fue cruz y el dado fue 5 es (**X**=2, **Y**=6), si la moneda fue cara y el dado fue 5 es (**X**=1, **Y**=5), o si la moneda fue cara y el dado fue 6 es (**X**=1, **Y**=5).

  De la matriz con la función de masa de (**X**,**Y**). Dé su entropía conjunta. Explíquela.

```
PMonedaDado =

    0.1667         0    0.1667         0    0.1667         0
         0    0.1667         0    0.1667         0    0.1667
```

$$Matlab\ nos\ devuelve\ una\ entropía\ conjunta\ de\ 2.5850$$

Los resultados se encuentran en la tabla de entropías e información contenida mutua.

Apartado 3.1.1

- Calcule las entropías marginales en los casos de ejemplo planteados anteriormente.

Los resultados se encuentran en la tabla de entropías e información contenida mutua.

Apartado 3.1.2. **Dé la versión final de la función `entropiaconjunta`**

```
function [HXY, HX, HY, HXcondY, HYcondX] = entropiaconjunta(P)
% Calculo de la entropia conjunta de la variable XY, expresada por una
% matriz P con la funcion de masa conjunta, siendo P(i,j)=prob(X=i,Y=j)
      suma = 0;

      PX = zeros(1,size(P,2));
      PY = zeros(1,size(P,1));

      HXcondY = 0;
      HYcondX = 0;

      for i=1:size(P,1)
            for j=1:size(P,2)
                  if(P(i,j)~=0)
                        suma = suma + P(i,j)*(log2(P(i,j)));
                  end
                  PY(1,i) = PY(1,i) + P(i,j);
                  PX(1,j) = PX(1,j) + P(i,j);
            end
      end

      HXY = -suma;
      HX = entropia(PX);
      HY = entropia(PY);

      for j=1:size(P,1)
            HXcondY = HXcondY + entropia(P(j,:)/sum(P(j,:)))*sum(P(j,:));
      end

      for i=1:size(P,2)
            HYcondX = HYcondX + entropia(P(:,i)/sum(P(:,i)))*sum(P(:,i));
      end
end
```

Apartado 3.1.2.

- Calcule las entropías condicionales en los casos de ejemplo planteados anteriormente y expliqué los resultados a partir de la interpretación de la entropía conjunta.

Los resultados se encuentran en la tabla de entropías e información contenida mutua.

Podemos deducir que HXcondY es igual a la diferencia entre HXY y HY y que HYcondX es igual a la diferencia entre HXY y HX.

Apartado 3.2. **Codifique al función *informacionmutua***

```
function I = informacionmutua(P)
% Calculo de la informacion mutua de las variables X e Y
% P proporciona su masa conjunta
I = 0;
  for i=1:size(P,1)
    for j=1:size(P,2)
      if(P(i,j)~=0)
          I = I + P(i,j)*log2(P(i,j)/sum(P(i,:))/sum(P(:,j)));
      end
    end
 end
end
```

Apartado 3.2.

- Calcule la información mutua en los casos de ejemplo planteados anteriormente y expliqué los resultados. Los resultados se encuentran en la tabla de entropías e información contenida mutua.

- Compruebe que se verifica siempre el diagrama de totalidad:

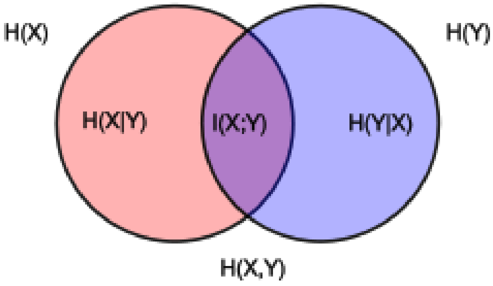


*TABLA DE ENTROPÍAS E INFORMACIÓN CONTENIDA MUTUA*

| | *Moneda Independiente* | *Dado Independiente* | *Moneda Dependiente* | *Dado Dependiente* | *Moneda-Dado* |
|---|---|---|---|---|---|
| *HX* | 1 | 2.585 | 1 | 2.585 | 2.585 |
| *HY* | 1 | 2.585 | 1 | 2.585 | 1 |
| *HXY* | 2 | 5.1699 | 1 | 2.585 | 2.585 |
| *HXcondY* | 1 | 2.585 | 0 | 0 | 1.585 |
| *HYcondX* | 1 | 2.585 | 0 | 0 | 0 |
| *I(X,Y)* | 0 | -4.8051*e^-16 | 1 | 2.585 | 1 |

Apartado 3.3.

- Podemos modelar el canal BSC a través de una matriz Q que indique p(**Y**=j|**X**=i) en su posición **i**, **j**. Proporcione esa matriz.

$$\boldsymbol{BSC} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

- Suponga ahora un canal binario *asímetrico*, esto es, donde en la rama superior se sustituye $p$ por $p_1$ y en la inferior $p$ por $p_2$. Proporcione su matriz Q.

$$\boldsymbol{BAC} = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

- Consideremos ahora un canal cuaternario simétrico. Esto es, los posibles símbolos a enviar y recibir son “00”, “01”, “10” y “11”. Cada símbolo se envía correctamente con probabilidad $p$ y los errores se repartirán uniformemente con probabilidad 1-$p$. Dé la matriz Q.

$$\boldsymbol{QSC} = \begin{pmatrix} p & (1-p)/3 & (1-p)/3 & (1-p)/3 \\ (1-p)/3 & p & (1-p)/3 & (1-p)/3 \\ (1-p)/3 & (1-p)/3 & p & (1-p)/3 \\ (1-p)/3 & (1-p)/3 & (1-p)/3 & p \end{pmatrix}$$

- Por último, suponga otro canal cuaternario, donde los errores se repartirán uniformemente pero ahora según el número de dígitos binarios que se modifiquen. Dé la matriz Q.
  Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{cases} P_{error\ 2\ simbolos} = \dfrac{1}{2} P_{error\ 1\ simbolos} \\ P_{error\ 2\ simbolos} + 2P_{error\ 1\ simbolos} = 1-p \end{cases}$$

$$\boldsymbol{QAC} = \begin{pmatrix} p & 2(1-p)/5 & 2(1-p)/5 & 2(1-p)/10 \\ 2(1-p)/5 & p & 2(1-p)/10 & 2(1-p)/5 \\ 2(1-p)/5 & 2(1-p)/10 & p & 2(1-p)/5 \\ 2(1-p)/10 & 2(1-p)/5 & 2(1-p)/5 & p \end{pmatrix}$$

Apartado 3.3. **Codifique al función *capacidad***

```
function [C, pX] = capacidad(Q)
% Calcula la capacidad de un canal definido por su matriz Q
% Devuelve tambien la masa de X
% La funcion combinacionesX(L) le devuelve todas las posibles
% combinaciones para la masa de X, siendo L el numero de símbolos del
% alfabeto de X
    T=combinacionesX(size(Q,1));
    I=zeros(1,length(T));
    for i=1:length(T)
        I(i)=informacionmutua (Q.*T(i,:)');
    end
    [C,ind]=max(I);
    pX=T(ind,:);
end
```

Apartado 3.3.

- Calcule la capacidad de los canales definidos anteriormente para los valores p=1, 0.9 y 0.8. Y los pares de valores (p1, p2) = (0.8, 1) y (0.6, 0.9).
- Indique para que distribución de X se encuentra el máximo en cada caso.

| *Capacidad* | *P = 1* | *P = 0.9* | *P = 0.8* |
|---|---|---|---|
| *BSC* | 1 | 0.5310 | 0.2781 |
| *QSC* | 2 | 1.3725 | 0.9611 |
| *QAC* | 2 | 1.3788 | 0.9737 |

| *Probabilidad* | *P = 1* | | *P = 0.9* | | *P = 0.8* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *BSC* | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| *QSC* | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 |
| | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 |
| *QAC* | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 |
| | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2500 |

| *Capacidad* | *P1 = 0.8 \| P2= 1* | *P1 = 0.6 \| P2= 0.6* |
|---|---|---|
| *BAC* | 0.6182 | 0.2150 |

| *Probabilidad* | *P1 = 0.8 \| P2= 1* | | *P1 = 0.6 \| P2= 0.9* | |
|---|---|---|---|---|
| *BAC* | 0.4400 | 0.5600 | 0.4700 | 0.5300 |