Universidad Politécnica de Cartagena

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación

LABORATORIO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Práctica 1. Solución de Problemas Electrostáticos con ayuda del programa MATLAB

Profesores:
Pedro Vera Castejón
Alejandro Álvarez Melcón
Fernando Quesada Pereira

Introducción

En esta práctica vamos a aprender cómo podemos utilizar el software MATLAB como apoyo para el estudio de estructuras electromagnéticas. Para el correcto desarrollo de la práctica, el alumno deberá leer este manual previamente, y deberá comprender todos los desarrollos mostrados. Finalmente deberá realizar antes de la sesión de prácticas los cálculos que pueda con el fin de concentrase durante la sesión de prácticas en la implementación numérica.

Por tanto la práctica va a constar de una parte teórica que el alumno deberá leer, comprender y resolver previamente al desarrollo propiamente dicho de la práctica. En el laboratorio el alumno deberá realizar los cálculos que se piden apoyándose del software de simulación MATLAB, y al final de la sesión entregará la hoja de respuestas que se adjunta.

IMPORTANTE: Cada alumno deberá traer una memoria USB donde grabará todos los programas MATLAB que deberá realizar durante la práctica. ***El alumno deberá traer resuelto antes de la sesión de práctica todos los aspectos teóricos que pueda***, con el fin de concentrase, en el laboratorio, en la implementación numérica.

Breve Introducción a MATLAB

El manejo de las funciones más importantes que utilizaremos a lo largo del curso se encuentra en el anexo adjunto a la práctica. Para los ejercicios que vienen a continuación podéis obtener información en el anexo. Es conveniente que leáis el punto 1 del anexo para familiarizaros con las funciones que usaremos. Ahora debéis hacer como entrenamiento el siguiente ejercicio.

1. Hacer el ejercicio del apartado 2 del anexo donde se pide representar una función potencial y el campo eléctrico asociado. Grabar el ejercicio en un fichero llamado: P*ract1Ejer1.m*.

Línea de Carga infinita

En esta parte de la práctica vamos a calcular el campo eléctrico y el potencial producidos por una distribución de carga lineal e infinita. Para ello utilizaremos el teorema de Gauss:

$$Q_{enc} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

Como superficie de integración vamos a tomar un cilindro de altura *h* que contenga en su interior una porción de la línea de carga, tal y como se muestra en la Fig.1.

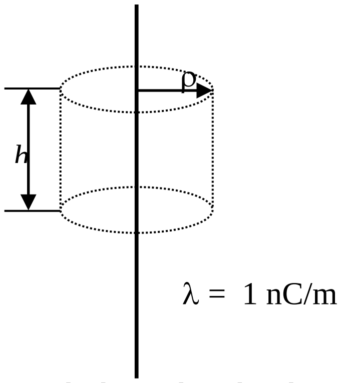


Fig. 1: Hilo de carga infinito y cilindro usado en la aplicación del teorema de Gauss.

Observando la simetría del problema vemos que el campo eléctrico solo tendrá componente radial, y además la única variación de la geometría es con la coordenada radial (distancia al hilo de carga). En consecuencia podemos afirmar que (usando coordenadas cilíndricas):

$$\vec{E} = E_\rho(\rho)\ \hat{e}_\rho$$

La carga encerrada por nuestro cilindro, suponiendo que la densidad lineal de carga es constante, será:

$$Q_{enc} = \int \lambda\, dl = \lambda \int dz = \lambda h$$

donde *h* es la altura del cilindro. Por su parte la integral de superficie estará extendida a toda la superficie del cilindro. Ahora bien, el $d\vec{s}$en las tapas del cilindro son perpendiculares al campo eléctrico, y por tanto su producto escalar será cero. La única contribución a la integral que no es cero corresponde a la superficie lateral del cilindro; además en la superficie lateral del cilindro el campo eléctrico es constante y puede salir fuera de la integral. En consecuencia obtenemos fácilmente:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \epsilon \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \epsilon\, E_\rho(\rho) \int_{lateral} ds = \epsilon E_\rho(\rho)\ 2\pi\rho h$$

Por el teorema de Gauss esta integral debe ser igual a la carga encerrada, por lo que obtenemos:

$$\lambda h = 2\pi\rho h \epsilon E_\rho(\rho)$$

Finalmente el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho} \hat{e}_\rho\ \ V/m$$

El potencial puede ahora obtenerse usando la clásica integral de línea. Sin embargo es fácil observar que no podemos tomar el origen de potenciales en el infinito ya que allí el potencial vale infinito y no cero (este resultado extraño es porque existen cargas en el infinito ya que la línea de carga se extiende hasta el infinito). Aún así podemos calcular la diferencia de potencial entre dos puntos cualquiera:

$$\phi(\rho = a) - \phi(\rho) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon}\int \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

Tomando el punto de referencia en *a=1* metro ($\phi(\rho = a) = 0$), podemos escribir la diferencia de potencial de la siguiente manera:

$$\phi(\rho = a) - \phi(\rho) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon}\int \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} ln(\rho)$$

Tomando ésta diferencia de potencial como base, hacer el ejercicio del apartado 3 propuesto en el anexo, y grabarlo con el nombre: P*ract1Ejer2.m*.

Energía Asociada a una Distribución Volumétrica de Carga

Para comprender cómo se aplica el cálculo de la energía almacenada en un sistema electrostático, vamos a tratar de calcular la energía de formación de una bola esférica con densidad de carga volumétrica constante ρ_v (Ver Fig.2) (*observar que ahora ρ_v NO es la coordenada radial de cilíndricas sino que es la densidad volumétrica de carga*).

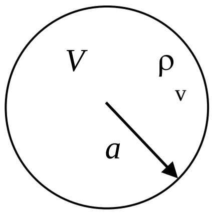


Fig. 2: Esfera con una distribución de carga uniforme en volumen.

La energía almacenada en un sistema electrostático viene dada por la fórmula siguiente:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \phi\ \rho_v\ dV + \frac{1}{2}\int_S \phi\ \rho_s\ dS$$

En nuestra estructura no existen densidades superficiales de carga, luego: $\rho_s = 0$. Entonces podemos calcular la energía a partir de la siguiente integral de volumen.

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V_0} \phi\ \rho_v\ dV$$

La integral está extendida a todo el volumen del espacio, pero como solo existe densidad de carga dentro del volumen V_0, la integral será cero fuera de dicho volumen. Para poder calcular esta integral, en primer lugar deberemos hallar el potencial en la estructura. En este caso podemos hacer uso de la simetría para calcular en primer lugar el campo eléctrico usando el teorema de Gauss.

$$Q_{enc} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

Primeramente calculamos el campo eléctrico en el exterior (r > a) de la esfera. Para esto tomamos una superficie en el exterior de la esfera, donde el campo eléctrico sea constante, de modo que la integral anterior pueda calcularse fácilmente. Fijándose en la simetría del problema vemos que no hay dependencia angular, sino que todo depende de la distancia a la esfera. Entonces tomamos la superficie de una esfera para plantear el teorema de Gauss, tal y como muestra la Fig.3.

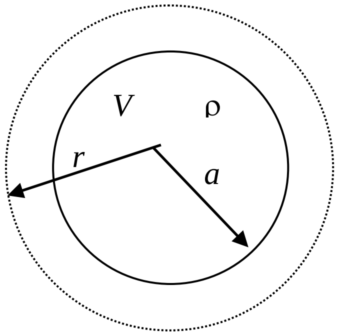


Fig. 3: Superficie esférica para la aplicación del teorema de Gauss (radio r, línea discontinua).

En primer lugar tenemos que hallar la carga total encerrada por nuestra superficie esférica. En este caso la carga encerrada será toda la carga que exista en la esfera. Como además la densidad de carga es constante calculamos fácilmente:

$$Q_{enc} = \int_{V_0} \rho_v \; dV = \rho_v \int_{V_0} dV = \rho_v \; \frac{4}{3} \; \pi \; a^3$$

Por simetría el campo eléctrico tiene solo componente radial, y además solo va a depender de la coordenada radial, por tanto, usando un sistema de coordenadas esférico obtenemos:

$$\vec{E} = E_r(r) \; \hat{e}_r$$

Como el campo eléctrico es constante en la superficie de la esfera tomada para realizar la integración calculamos fácilmente:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \epsilon \; \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \epsilon \; E_r(r) \; \int_S ds = \epsilon E_r(r) 4\pi r^2$$

Por el teorema de Gauss la carga encerrada debe ser igual a esta última integral, y por tanto:

$$\rho_v \; \frac{4}{3} \pi a^3 = \epsilon E_r(r) 4\pi r^2$$

Finalmente obtenemos el campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon r^2} \hat{e}_r \; ; \; r > a$$

Ahora podemos calcular el potencial en la superficie de la esfera con la expresión usual, y tomando la referencia de potencial cero en el infinito:

$$\phi(\mathrm{r}) - \phi(r = a) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon r^2} \; dr = -\frac{\rho_v a^2}{3\epsilon}$$

Con el fin de practicar el cálculo de integrales ayudándonos de MATLAB, hacer un programa en el laboratorio que calcule la integral propuesta, y verificar de este modo el resultado obtenido (dar a este programa el nombre de P*ratc1Int1.m*). No olvide que puede utilizar el comando *help int* para obtener información sobre el cálculo de integrales de forma analítica.

Vamos a calcular ahora el campo eléctrico en el interior de la esfera de carga. Para esto tomaremos una superficie parecida al caso anterior, pero ahora dentro de la esfera (r < a) tal y como muestra la Fig.4.

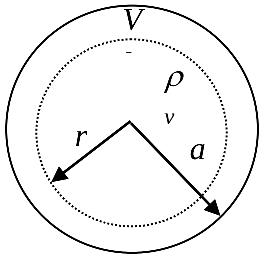


Fig. 4: Superficie esférica que tomamos para el cálculo del campo eléctrico en el interior de la esfera.

La carga encerrada ahora es la que corresponde a la parte de la esfera que cae dentro de la superficie tomada, en consecuencia tenemos:

$$Q_{enc} = \int_V \rho_v \, dV = \rho_v \frac{4}{3}\pi r^3$$

Por su parte la integral del campo eléctrico es la misma de antes, por tanto, por la ley de Gauss obtenemos:

$$\rho_v \frac{4}{3}\pi r^3 = \epsilon E_r(r) 4\pi r^2$$

Por tanto el campo eléctrico obtenido resulta ser:

$$\vec{E} = \frac{\rho_v \, r}{3\epsilon} \hat{e}_r ; \; 0 < r < a$$

Antes de pasar a calcular el potencial vamos a utilizar MATLAB para calcular la componente radial del campo, y dibujarla en función de la distancia *r*. Tomar los valores indicados en la Fig.5. Escribir un programa que realice estos cálculos, y que represente la gráfica pedida. Finalmente, grabarlo con el nombre: P*ract1Ejer3.m*. Utilizar el ejercicio del apartado 4.1 del anexo para resolver este problema.

Responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el valor máximo del campo, y donde se produce éste valor máximo?.
- ¿Es el campo eléctrico continuo o discontinuo en la superficie de la esfera?, ¿porqué?.

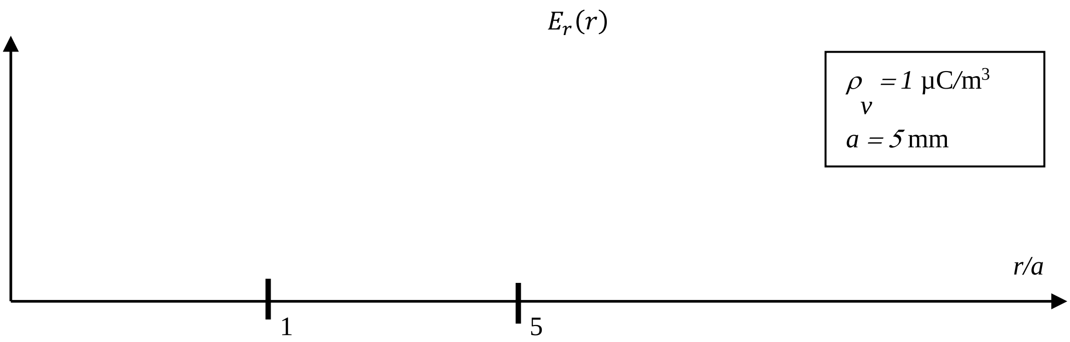


Fig. 5: Representar el campo eléctrico radial en función de la distancia.

Vamos a calcular ahora el potencial en el interior de la esfera. Para ello tendremos en cuenta que el potencial es continuo en todos los puntos del espacio, por lo que tomaremos como referencia de potencial el potencial que ya hemos calculado en la superficie de la esfera:

$$\phi(r = a) - \phi(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\rho_v}{3\epsilon}\int r \, dr = -\frac{\rho_v}{6\epsilon}\,(a^2 - r^2)$$

Ejercicio previo

Haciendo uso del potencial en la superficie de la esfera calculado anteriormente, encontrar el valor final del potencial en el interior de la esfera. *Incluir vuestros desarrollos en la hoja de resultados del final de la práctica*.

Una vez encontrado el potencial en el interior ya podemos calcular la energía a través de la evaluación de la integral de volumen. Teniendo en cuenta la expresión de un diferencial de volumen en una esfera deberemos calcular la siguiente integral:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V_0} \phi\,(r)\,\rho_v dV = \frac{1}{2}\int_{V_0} \phi\,(r)\,\rho_v\, r^2 sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

Como el potencial solo depende de la coordenada *r*, la integración en θ y en φ pueden hacerse directamente, por lo que la expresión anterior se reduce a:

$$W_e = \frac{\rho_v}{2}\,4\pi \int \phi\,(r)\, r^2 dr$$

Construir un programa en MATLAB que calcule esta integral. En primer lugar calcular la integral indefinida de manera simbólica, para posteriormente calcular dicha integral con los límites de integración pedidos. Grabar este programa con el nombre: P*ract1Ejer4.m*. Para este ejercicio volver a usar la función "***int***" (puede usar "help int" para obtener información de sobre su uso).

Finalmente, hacer el ejercicio del apartado 4.2 del anexo donde se calculan las superficies equipotenciales y el campo eléctrico en el interior de la esfera, y se representan estas magnitudes sobre diferentes planos. Grabar el ejercicio en el fichero: P*ract1Ejer5.m.*

HOJA DE RESULTADOS. **Práctica 1.**

Grupo:______ Nombre: ____

____

Ejercicio1.- Dibujar la función potencial y el campo eléctrico asociado (P*ract1Ejer1.m).*

1.1.- ¿Qué relación existe entre las líneas de campo eléctrico y las líneas equipotenciales?.

1.2.- Describa los argumentos que debe pasar a la función "meshgrid". ¿Para qué sirve esta función?.

Ejercicio2.- Dibujar el potencial producido por el hilo de corriente infinito en los tres cortes calculados (P*ract1Ejer2.m).*

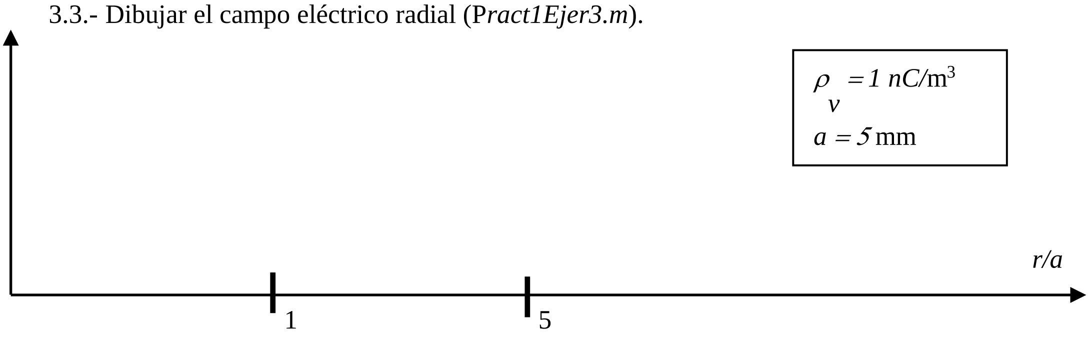
2.1.- Usando las relaciones que conoce entre campo eléctrico y potencial, aventure cómo serán las líneas de campo eléctrico en la estructura. Razone la respuesta.

Ejercicio3.- Densidad volumétrica de carga:

3.1.- Valor de la integral obtenida con la función "int" (P*ratc1Int1.m).*

3.2.- Describa brevemente el funcionamiento de la función "int" para el cálculo de integrales.

3.3.- Dibujar el campo eléctrico radial (P*ract1Ejer3.m*).



3.4.- ¿Cuál es el valor máximo del campo, y dónde se produce éste valor máximo?.

3.5.- ¿Es el campo eléctrico continuo o discontinuo en la superficie de la esfera?, ¿por qué?.

3.6.- Funcionamiento del comando “linspace”; describir los argumentos que recibe y su utilidad.

3.7.- Resultado de la energía electrostática almacenada por la esfera (P*ract1Ejer4.m).*

3.8.- Dibujar el potencial y el campo eléctrico dentro de la esfera, ¿existe alguna diferencia entre los tres cortes calculados?, ¿porqué? (P*ract1Ejer5.m*).

ANEXO A LA PRACTICA Nº 1 DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS

1. Fundamentos teóricos sobre funciones de Matlab.

1.1 *Función "contour":* Dibuja el contorno de las curvas de nivel de un vector "V" según los valores que irán tomando la pareja de coordenadas cartesianas escogidas (pueden formarse todas las combinaciones: X-Y, X-Z ó Y-Z).

Así por ejemplo, contour (x,y,V) representaría el contorno del vector V (quien tendrá dependencia respecto a todas o sólo algunas de las coordenadas cartesianas), tomando el plano X-Y como referencia para representar automáticamente varias curvas. Si se quisiera controlar la cantidad de líneas de contorno a representar podría añadirse como parámetro añadido a esta función la cantidad de curvas a representar, quedando de esta forma la sintaxis de la función: contour(x,y,V,3), siendo 3 el número de curvas a ser representadas.

1.2 *Función "meshgrid":*
Esta función es necesaria para complementar a la función descrita anteriormente porque es necesario especificar el rango de valores a ser usado por las variables cartesianas sobre cuyos ejes representaremos el contorno de un determinado vector.
Por ejemplo en el caso de representar el vector V sobre el plano X-Y usando la función "contour", deberíamos crearnos previamente una malla de valores x-y mediante un barrido de ambas variables a lo largo de un rango, así podríamos generarnos un rango de valores para x-y:

```
[x,y] = meshgrid (-2:.2:2, -2:.2:2);
```

Sin embargo de esta forma estaríamos limitando el uso de la función "contour" al plano X-Y, cuando podríamos tener la necesidad de hacer uso de la representación del vector V sobre otro plano distinto. Para que esta situación no se produzca se establecerá un barrido por las tres variables cartesianas: x,y,z de la siguiente forma:

```
[x,y,z] = meshgrid (-2:.2:2, -2:.2:2, -2:.2:2);
```

donde estamos tomando valores de las tres variables en pasos de 0.2 en 0.2 desde el punto (-2,-2,-2) hasta el punto (2,2,2).

Así de esta forma podríamos escoger con la función "contour" sobre qué plano representar las curvas de nivel: X-Y, Y-Z ó X-Z.

1.3 *Función "gradient"*:
[px,py,pz] = gradient (V) devuelve el gradiente númerico de V. Siendo px la derivada parcial de V respecto a x, py respecto a y, pz respecto a z. Si no se añade ningún otro parámetro más a la función "gradient" se asumirá que el espacio de separación entre puntos en cada una de las tres direcciones analizadas será uno. Si se quisiera cambiar el espaciamiento entre puntos podríamos darle ese espaciamiento como parámetro de la función para cada una de las tres variables:
[px,py,pz] =gradient (V,.2,.2,.2);

1.4 *Función "quiver"*:
quiver(x,y,px,py) con esta función podemos dibujar pequeñas flechas dirigidas según los valores del vector p = (px,py), el cual podríamos por ejemplo obtener usando la función gradiente explicada en el punto anterior, en los puntos x,y, los cuales son los parámetros iniciales de esta función "quiver". Esta función automáticamente escala las flechas en función de la cuadrícula que se genera para visualizar una figura.
Esta función podría servir para representar el campo eléctrico generado a partir de un potencial dado, ya que tomando la expresión del potencial en función de las variables x,y podríamos calcular su gradiente con la función "gradient", y con el vector "p" generado representar sobre el mismo dibujo al mismo tiempo las curvas equipotenciales y el campo eléctrico.

1.5 *Función "spline"*:
Esta función realiza la interpolación a partir de unos pares de puntos (x,y), de forma que crea a partir de ellos unos nuevos pares (x1,y1) los cuales serán los puntos a usar en la interpolación. Es necesario tener creado el rango de valores para x1 antes de hacer uso de la función "spline". La sintaxis de esta función queda como sigue:

y1 = spline (x,y,x1);

1.6 *Función "Plot"*:

Con esta función de Matlab podremos visualizar expresiones del estilo y = f(x), donde "x" e "y" serán normalmente vectores, con un rango de valores especificado según el ejercicio. Esta

función tiene una gran versatilidad en cuanto al uso de los parámetros porque directamente podrá admitir sólo dos parámetros (x,y), o bien podremos especificar que tipo de representación tendrán dichos puntos dentro de una gama de posibilidades que podemos encontrar en la ayuda de esta función si tecleamos: "help plot". Con lo cual podríamos emplear hasta tres parámetros.
Pero también existe la posibilidad de representar al mismo tiempo varios grupos de estos parámetros definidos hasta ahora, tal y como se refleja en la sintaxis:

```
plot(x1,y1,s1,x2,y2,s2,x3,y3,s3,...)
```

donde s1,s2,s3,..., etc., son los "string" que definirán con que tipo de punto estaremos representando a la expresión y=f(x).
Un ejemplo del uso de la función "plot" con dos grupos de parámetros lo tenemos más adelante en la representación de la onda senoidal.

1.7 *Función "int"*:

Con esta función se podrá realizar una integral definida entre dos límites, dado que así la necesitaremos en el cálculo de la energía almacenada en una determinada distribución de corriente o carga. Usa tres parámetros: "S" será la expresión que pretendemos integrar, "a" y "b" son los límites de la integral definida, la sintaxis de esta función quedará:

Resultado=int(S,a,b); donde Resultado contendrá el valor calculado por "int".
Resultado=int(S,v,a,b); en este caso calculamos la integral de “S” respecto de la variable “v” entre los límites “a” y “b”. Si la función “S” tiene más variables que “v”, deben ser definidas como simbólicas mediante en comando syms:

```
syms v x a b;
S=cos(v)+sin(x);
Resultado=int(S,v,a,b)
```

1.8 *Nota*: en cualquier caso, existen herramientas de consulta en esta versión de Matlab que permitirán completar las funciones anteriormente citadas o cualquier otra que se utilice en los ejemplos que a continuación aparecen. Para poder hacer dichas consultas bastará con escribir en la "Command Window" la palabra "help" con lo cual aparecerán todos los grupos de funciones que contiene esta versión de Matlab, o bien podemos entrar en un entorno de ayuda bajo windows tecleando "helpwin". También existe la posibilidad de correr demostraciones ya creadas en forma de librerías si tecleamos "demo".

2. Ejemplo para representar una función potencial y el campo eléctrico asociado.

En primer lugar genero los valores a emplear en el mallado para las variables x e y, observando que se genera una cantidad distinta de valores para la x que para la y:

```
[x,y] = meshgrid(-2:.2:2,-1:.15:1);
```

A continuación planteo la ecuación correspondiente al potencial en función de las variables x e y:

```
V= x .* exp(-x.^2 - y.^2);
```

A partir del potencial V, genero un operador gradiente:

```
[px,py] = gradient(V,.2,.15);
```

Represento el potencial V y mantengo dicha figura en pantalla:

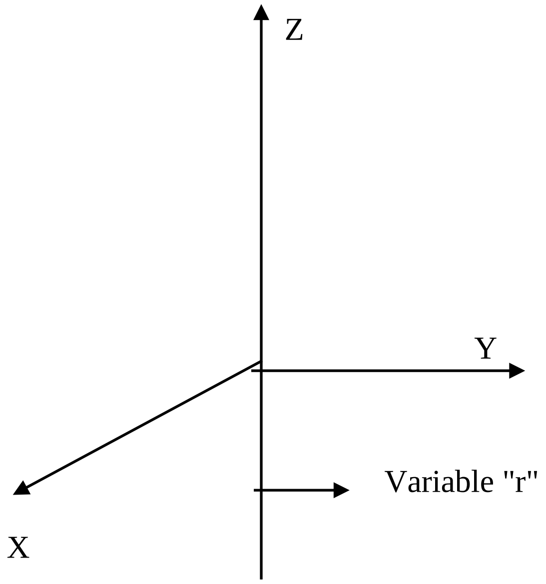
```
contour(x,y,V), hold on
```

Con la figura del potencial en pantalla represento el operador gradiente negado (puesto que el campo eléctrico se dirige hacia potenciales cada vez más pequeños, es decir, justo lo contrario que hace el gradiente), sobre un rango de valores para la "x" y la "y"

```
quiver(x,y,-px,-py), hold off, axis image
```

3. Línea uniformemente cargada.

La línea infinita se colocará sobre el eje Z, y las superficies equipotenciales se generarán con simetría cilíndrica en torno a ella



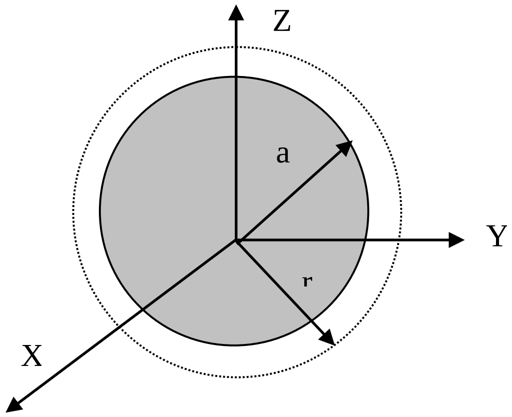
3.1 Aplicación de la función "contour" sobre diferentes combinaciones de ejes cartesianos :

```
%Línea infinita distribuida sobre el eje z
%El valor introducido por teclado debe ser el nombre del fichero

%Valor de la densidad lineal de carga (C/m)


d=1e-9;


%defino la constante dieléctrica "e" en el vacío y le asigno su %valor

e=1/(4*pi*9*10^9);



%defino tres variables "x", "y", "z" para usarlas en la
%posterior visualización hecha con "contour"

%Corte con el plano (x,y)

[x,y] = meshgrid(-2:.2:2, -2:.2:2);
z=0;


%Según el estudio teórico el cálculo del potencial eléctrico "V"
% dependerá del logaritmo de la distancia a la línea, por tanto
```

```
% si considero que la línea está sobre el eje cartesiano Z, tendré
% que la distancia a dicha línea dependerá de la raíz cuadrada del
% cuadrado de los pares de puntos (x,y) que haya tomado

V = d*log(sqrt(x.^2+y.^2))/(2*pi*e);


%puede visualizarse las lineas equipotenciales usando el plano X-Y
%usando un mismo radio para todas las líneas equipotenciales visibles
%desde este plano. Vamos a representar 5 superficies
%equipotenciales (5 radios distintos) cortadas sobre el plano X-Y

contour(x,y,V,5);


%O también se puede visualizar las lineas equipotenciales usando el
%plano X-Z. También representamos 5 superficies equipotenciales.

[x,z] = meshgrid(-2:.2:2, -2:.2:2);
y=0;
V = d*log(sqrt(x.^2+y.^2))/(2*pi*e);
contour(x,z,V,5);


%También puede visualizarse las lineas equipotenciales usando el
%plano Y-Z. Escriba la parte de programa correspondiente en
%este caso.
```

Nota: Visualizar por separado las equipotenciales, ejecutando tres veces el programa, en cada ejecución visualizar un solo "contour", por ejemplo forzando comentarios sobre los dos contornos que no se quiera ver. Observar cómo se generan las líneas equipotenciales y razonar si existe algún tipo de simetría. Otra alternativa es usar la función "subplot" para almacenar varias gráficas en una misma representación. Para conocer el uso de la función "subplot" puede tomar información haciendo "help subplot" dentro de la ventana de comandos de Matlab.

4. Esfera uniformemente cargada (potencial, campo eléctrico).



4.1 *Representación del campo eléctrico en función del parámetro radial (r)* :

```
%El valor introducido por teclado debe ser el nombre del fichero
%Valor del radio de la esfera (m)

A=5e-3;

%Valor de la densidad de carga volumétrica (C/m^3)

p=1e-9;

%defino la constante dieléctrica "e" en el vacío y le asigno su %valor

e=1/(4*pi*9*10^9);

%se definen dos rangos de valores para representar los valores
%dentro y fuera de la esfera cargada. Con "r1" y "r2" se
%representa a la variable radial, medida desde el centro de la esfera
%utilizamos el comando linspace para hacer el barrido en la coordenada
%radial.

r1=linspace(0,A,20);
r2=linspace(A,5*A,20);

%"E1" se utiliza para representar los valores dentro, mientras
%"E2" para los valores fuera, del campo eléctrico.

E1=p*r1/(3*e);
E2=p*A^3./(3*e*r2.^2);

%Finalmente se representan simultáneamente los resultados obtenidos
%para el campo eléctrico tanto dentro como fuera de la esfera
 plot(r1,E1,'b',r2,E2,'b');
 grid;
```

4.2 *Representación de superficies equipotenciales y del campo eléctrico sobre éstas usando diferentes ejes cartesianos*:

```
%El valor introducido por teclado debe ser el nombre del fichero


%Los parámetros y variables usados para esta función coinciden con %los
usados para la función esfera del apartado anterior.

A=5e-3;
p=1.0e-9;
e=1/(4*pi*9*10^9);



% Corte según el eje z=0; representación en el plano (x,y).

[x,y] = meshgrid(-A:A/20:A, -A:A/20:A);
z=0;

%Las curvas equipotenciales en el interior quedarían descritas por la
%siguiente expresión de "V1" (potencial eléctrico) respecto a un %punto
cualquiera (x,y,z), considerando que la esfera está centrada %en el
origen de coordenadas cartesianas.

 rr=sqrt(x.^2+y.^2+z^2);

 % Cogemos los indices para ver que posiciones están dentro de la
 % esfera y que posiciones están fuera.
 Ind_fuera=(rr>A);
 Ind_dentro=(rr<=A);

 % Calculamos el potencial dentro y fuera de la esfera.
 % Primero, definimos una matriz de ceros.
 V_dentro=zeros(size(rr));
 V_fuera=zeros(size(rr));
 % Después, calculamos los valores del potencial en sus posiciones.
 V_dentro(Ind_dentro)=(p/(2*e)).*(A^2-rr(Ind_dentro).^2/3);
 V_fuera(Ind_fuera)=p.*A^3./(3*e.*rr(Ind_fuera));
 % Finalmente, unimos ambas contribuciones (dentro y fuera).
 V1=V_dentro+V_fuera;

%creamos el gradiente de este potencial eléctrico en las tres
%direcciones según los ejes cartesianos.


 [px,py] =gradient(V1,A/20,A/20);
```

```
%puede visualizarse las líneas equipotenciales usando los ejes "x" e
%"y", representando las flechas la dirección del campo eléctrico, por
%esta razón se coloca el signo menos a los vectores resultantes del
%gradiente (puesto que el campo apunta hacia potenciales cada vez
%menores)

contour(x,y,V1,1),hold on, quiver(x,y,-px,-py), hold off

%puede visualizarse las lineas equipotenciales usando los ejes "z" e
%"y"

[y,z] = meshgrid(-A:A/20:A, -A:A/20:A);
x=0;

rr=sqrt(x^2+y.^2+z.^2);

V_dentro=zeros(size(rr));
V_fuera=zeros(size(rr));
V_dentro(Ind_dentro)=(p/(2*e)).*(A^2-rr(Ind_dentro).^2/3);
V_fuera(Ind_fuera)=p.*A^3./(3*e.*rr(Ind_fuera));
V1=V_dentro+V_fuera;

[py,pz] =gradient(V1,A/20,A/20);

contour(y,z,V1,1),hold on,

quiver(y,z,-py,-pz), hold off

grid;

%puede visualizarse las lineas equipotenciales usando los ejes "x" y
%"z". Escribir vosotros como sería el programa para este último caso.
```

Nota: Al igual que ocurría con el cable cargado de longitud infinita, se debe visualizar por separado las equipotenciales, ejecutando tres veces el programa, en cada ejecución visualizar un solo "contour", por ejemplo forzando comentarios sobre los dos contornos que no se quiera ver. Observar cómo se generan las potenciales y razonar si existe algún tipo de simetría. También puede utilizar el comando "subplot", o "figure" para almacenar las tres gráficas en una misma representación, o añadir nuevas ventanas cada una con su gráfica.