UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Robótica Móvel

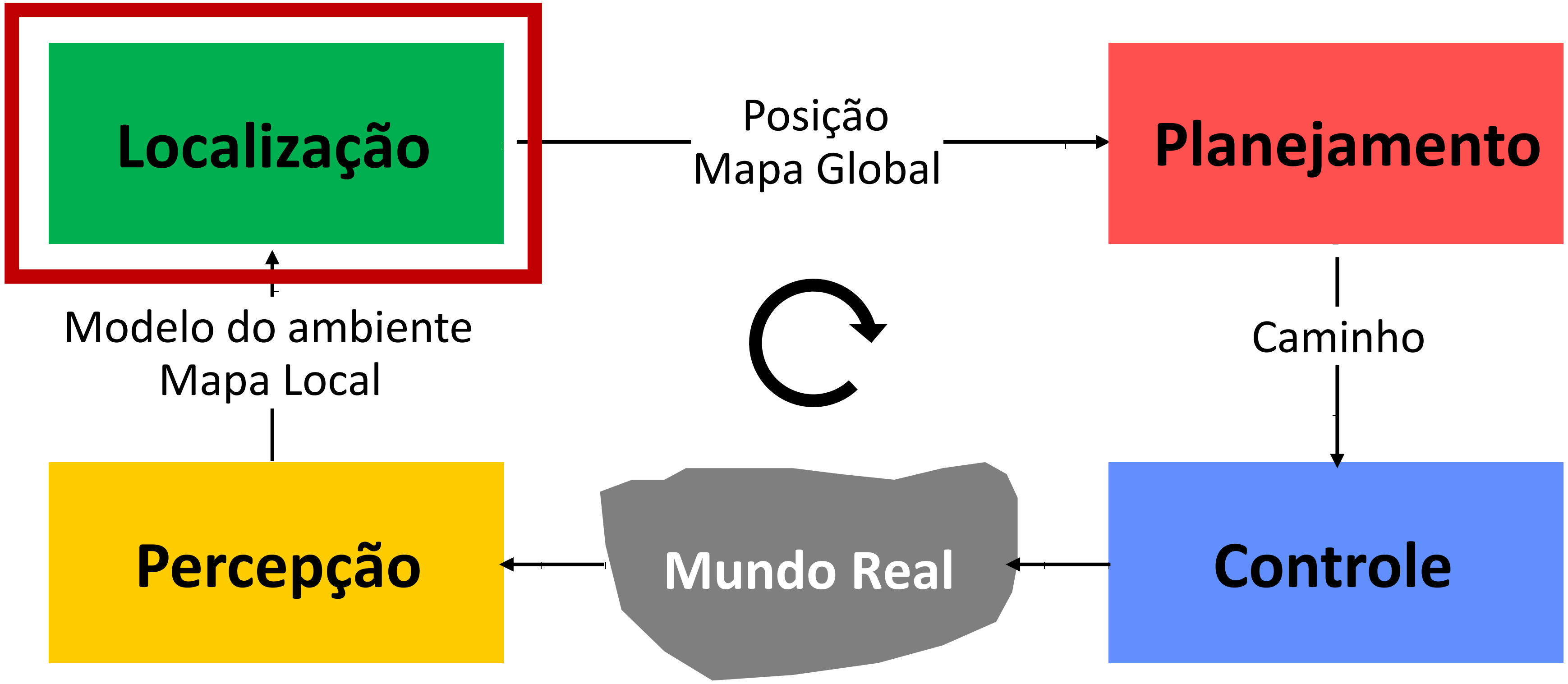
Localização – Filtro de Kalman

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

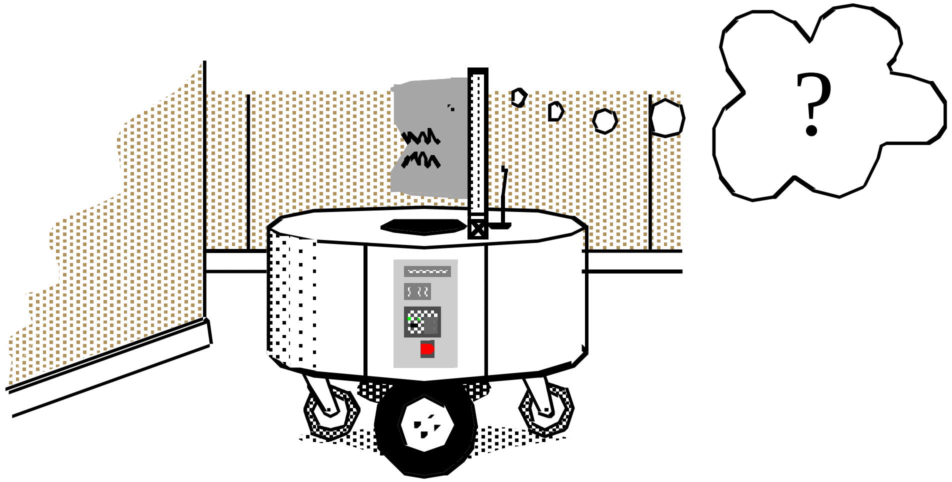
VERLab
Visão e Robótica

Introdução


Localização
Posição
Mapa Global
Planejamento
Modelo do ambiente
Mapa Local
Caminho
Percepção
Mundo Real
Controle

Introdução

- Principais questões na Robótica
  - **Onde estou? (localização)**
  - Aonde vou? (decisão)
  - Como vou? (planejamento)

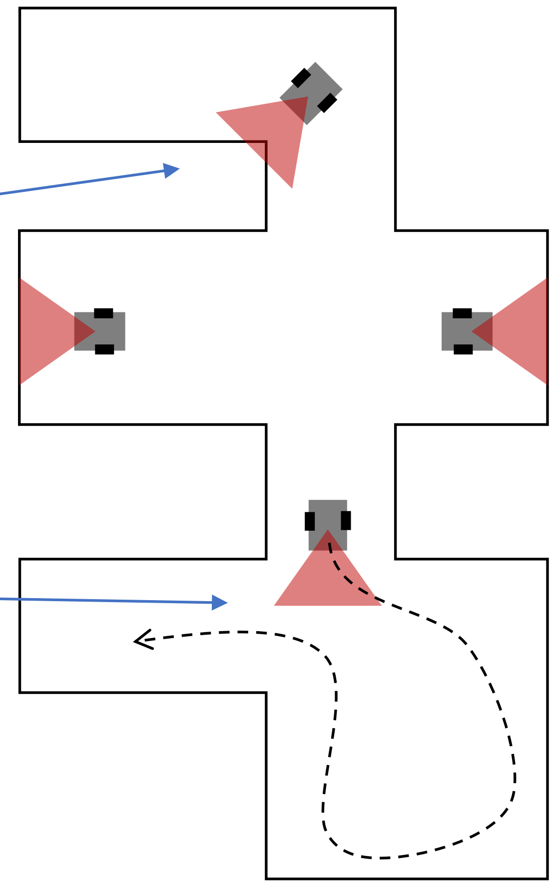


Localização

- Tarefa fundamental
  - Determinar a configuração (*pose*) do robô
- Diferentes representações
  - Coordenadas (métrica), topológica, ...
- Relativa x Absoluta
  - Sempre é relativa a um referencial
  - Referencial Local (não compartilhado) x Global (fixo)

Localização

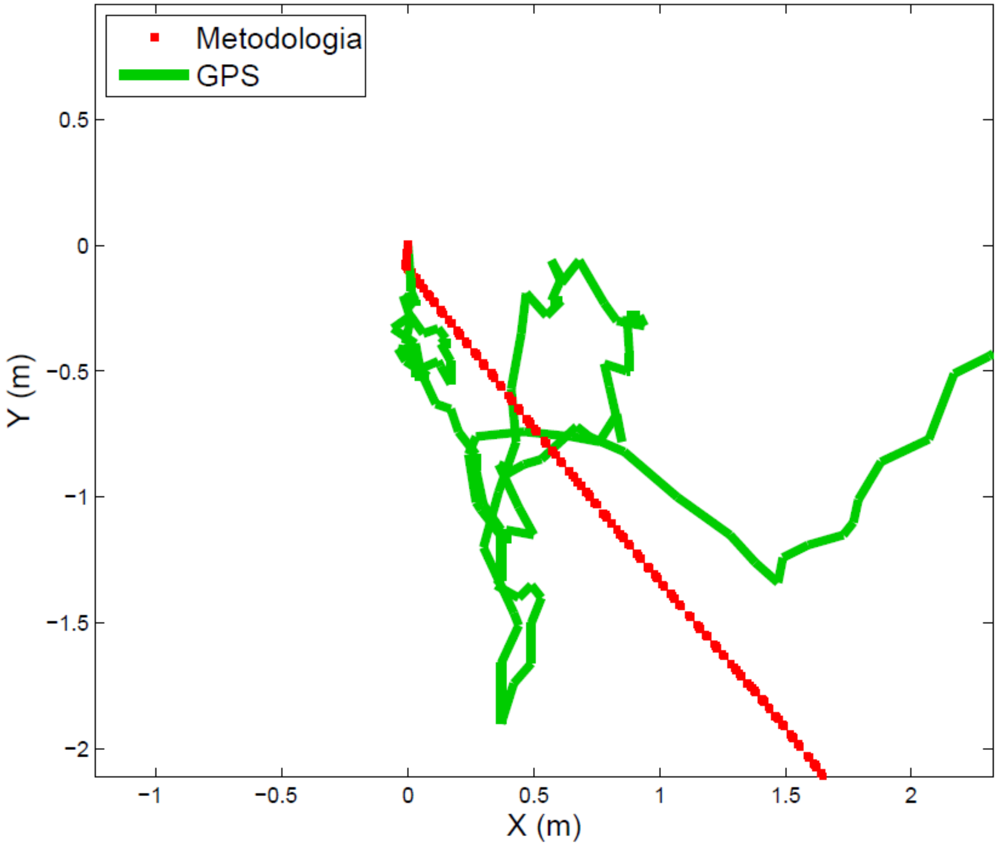
- Principais desafios
  - Erros nos sensores
    - Ruído
    - *Aliasing*
  - Erros nos atuadores
  - Erros nos modelos (simplificações)



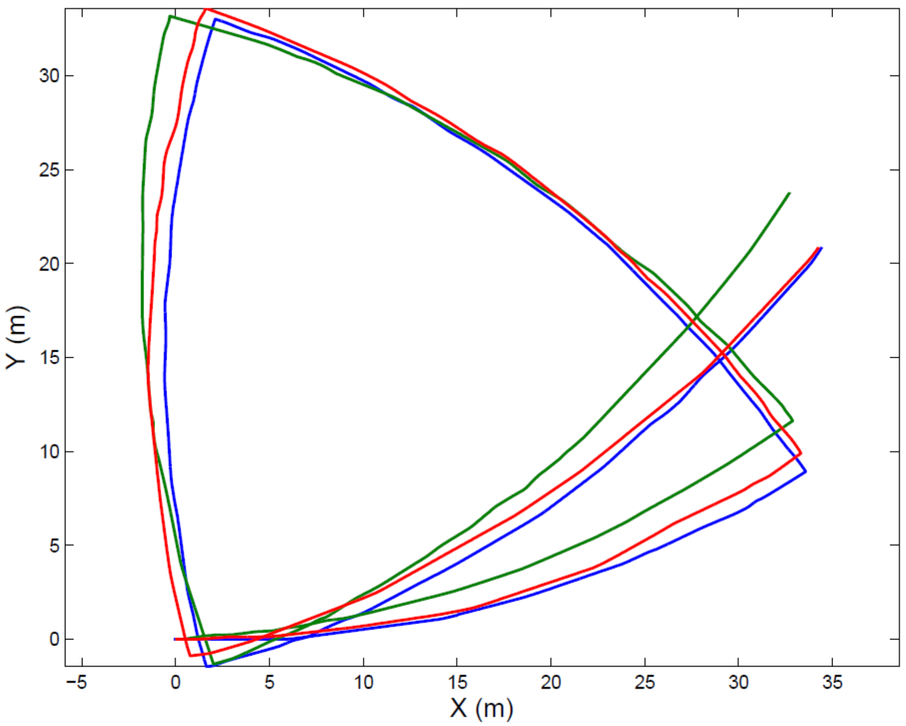
Localização

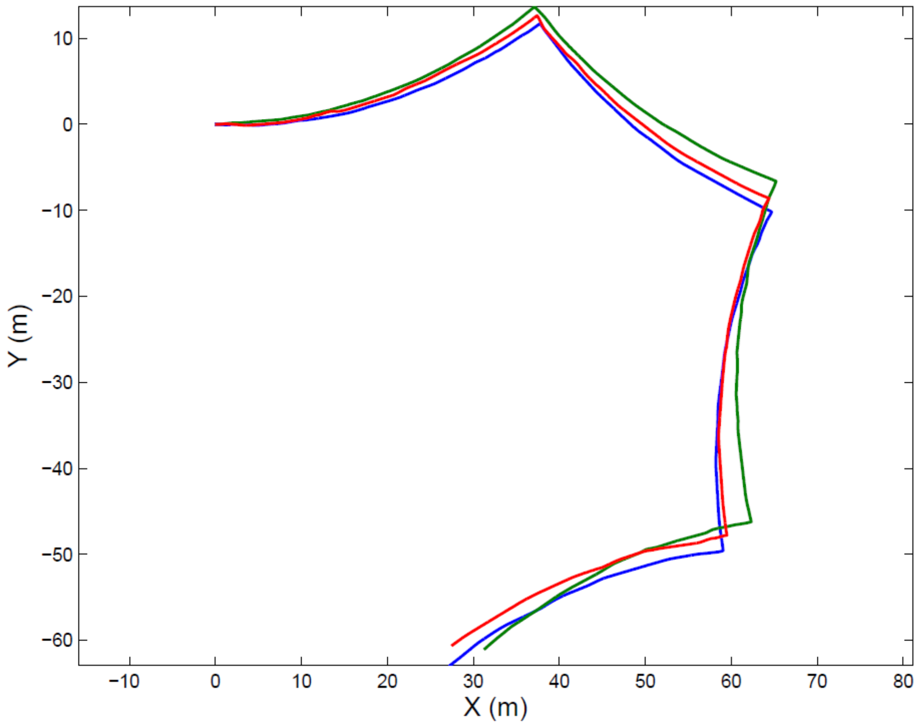
- Por que não utilizar sempre GPS?
  - Não está disponível em todos os ambientes
    - Edificações, cavernas, subaquático, Marte, ...
  - Baixo desempenho para sistemas mais críticos ⚠
    - Precisão
    - Taxa de aquisição de dados
    - Tamanho do receptor
    - *Random walk*

Localização



Localização
Odometria





Erro sistemático, talvez uma calibração resolvesse. Seria o suficiente?

Localização

- Fusão Sensorial
  - Juntar informações ruidosas para termos algo melhor!
- Principais formas de localização
  - *Dead reckoning* (relativa)
    - Filtro de Kalman
  - Baseada em marcos/mapas (absoluta)
    - Localização de Markov
    - Localização de Monte Carlo

Filtro de Kalman

- Aplicação direta do Filtro de Bayes
  - R. E. Kalman (1950's)
- Estimação recursiva de estados
  - Predição → Correção
- Diferentes aplicações
  - Projeto Apollo
  - Fusão sensorial, estimação, filtragem, ...

https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter
https://www.mathworks.com/videos/series/understanding-kalman-filters.html

Filtro de Kalman

- Quando utilizar
  - Medidas obtidas por diferentes sensores
  - Variáveis de interesse obtidas indiretamente

Considera que o sistema é **linear** e pode ser representado por distribuições **gaussianas**

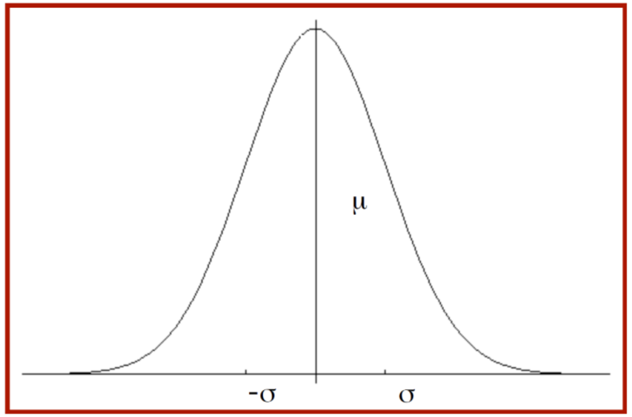
Filtro de Kalman

- Condições para a otimalidade da técnica
- Hipóteses
  - Erro médio de cada variável é igual a zero (*white Gaussian noise*)
  - Erro de cada variável é independente
  - Modelo linear de evolução do sistema (linearizado)
  - Relacionamento linear entre as variáveis de estado e observação

Filtro de Kalman
Gaussianas

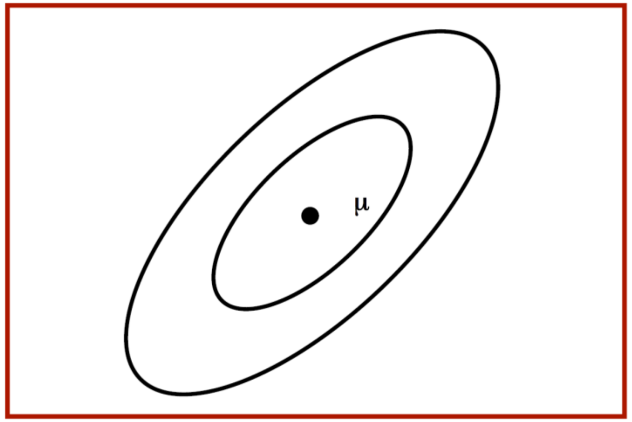
- 1D

$$p(x) = N(\mu, \sigma^2)$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- nD

$$p(x) = N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{(x-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(x-\boldsymbol{\mu})}{2}}$$



Filtro de Kalman
Gaussianas

- A variância de uma variável aleatória X é o valor esperado do desvio ao quadrado da média, $\mu = \mathrm{E}[X]$: $\sigma^2 = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$
- A covariância de duas ou mais variáveis aleatórias é uma medida da variabilidade conjunta dessas variáveis

$$\operatorname{cov}[X,Y] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$$

- A matriz de covariância Σ possui (i,j) como $\operatorname{cov}[\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j]$

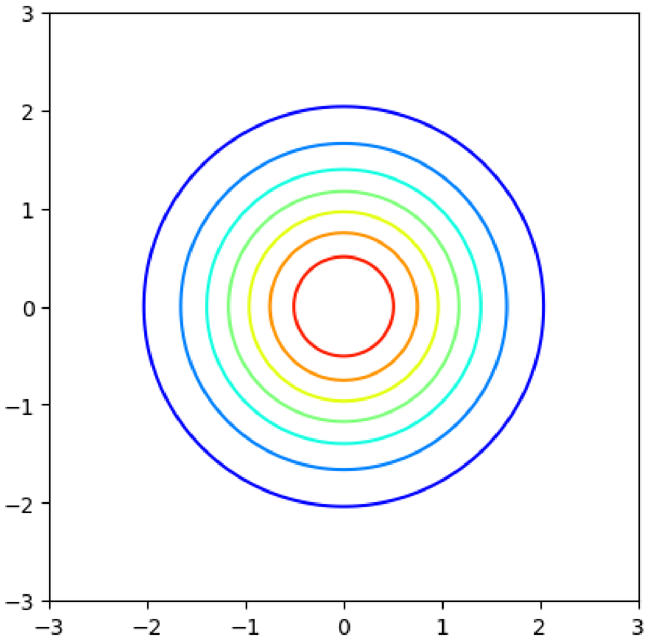
$$\Sigma = \mathrm{E}\left[(\boldsymbol{X}-\mu)(\boldsymbol{X}-\mu)^T\right] = \mathrm{E}\left[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T\right] - \mu\mu^T$$

random vector

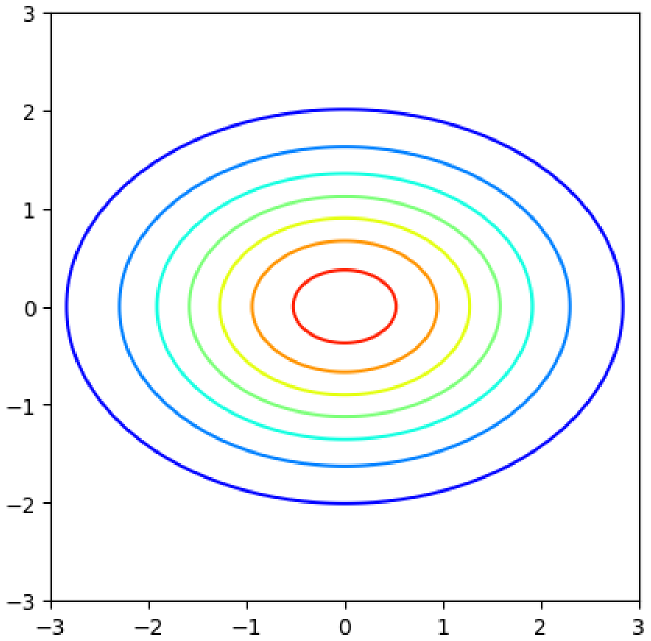
$E[\boldsymbol{X}]$

https://en.wikipedia.org/wiki/Covariance_matrix

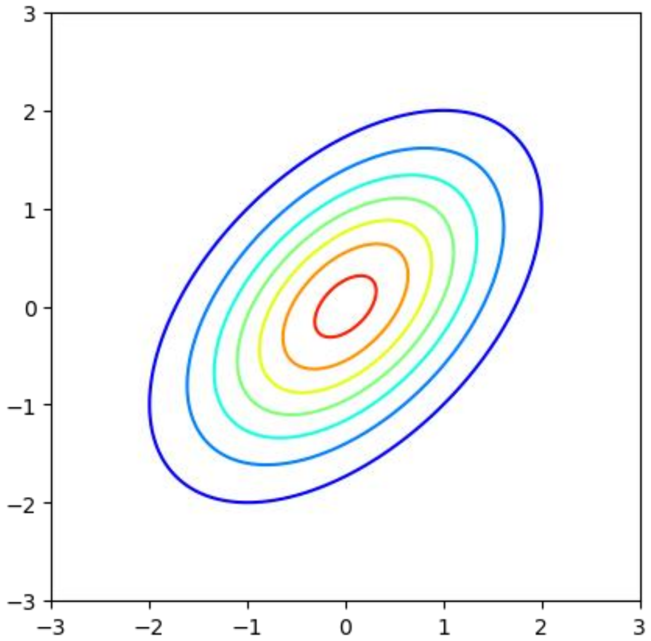
Filtro de Kalman
Gaussianas



$$\mu = [0, 0]$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



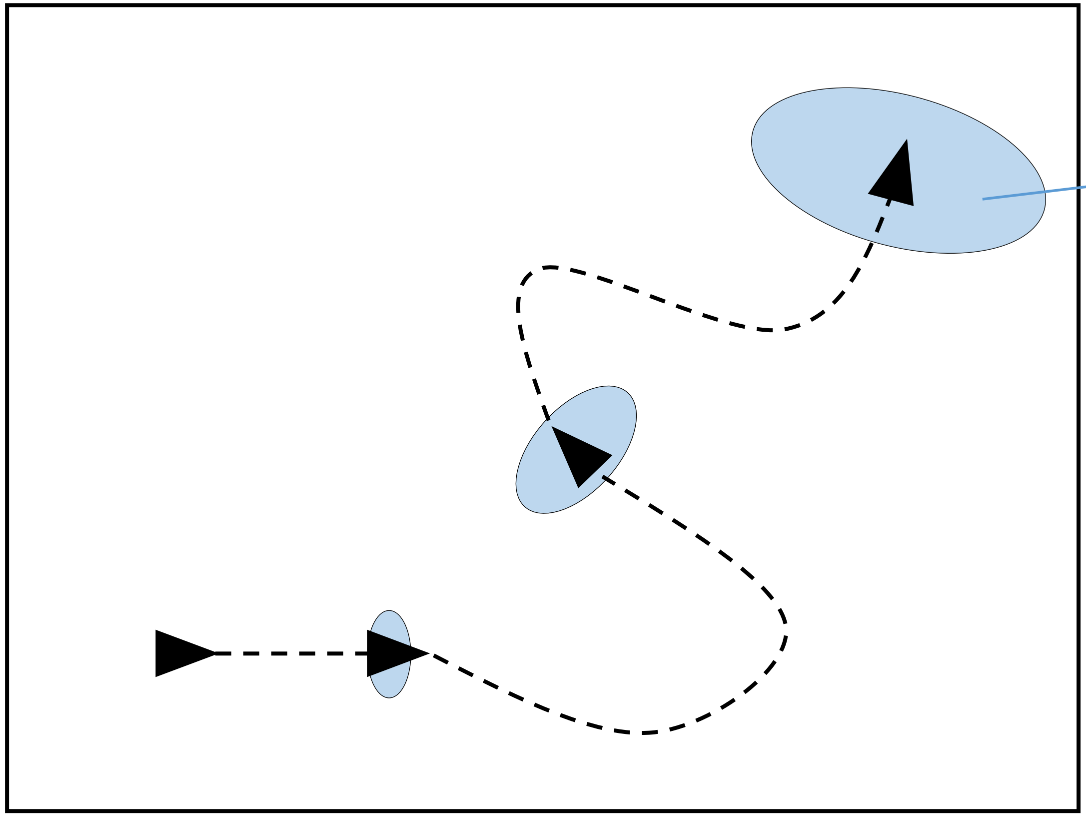
$$\mu = [0, 0]$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\mu = [0, 0]$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtro de Kalman

Gaussianas – Estado de crença



$$p(x) = N(\mu, \Sigma)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x\sigma_x & \sigma_x\sigma_y & \sigma_x\sigma_\theta \\ \sigma_y\sigma_x & \sigma_y\sigma_y & \sigma_y\sigma_\theta \\ \sigma_\theta\sigma_x & \sigma_\theta\sigma_y & \boxed{\sigma_\theta\sigma_\theta} \end{bmatrix}$$

Variância

Filtro de Kalman
Gaussianas – Operações

- Considerando as variáveis
  - $x_1 = N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $x_2 = N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$
  - Qual o resultado para $y = f(x_1, x_2)$?

- Se f é linear, x_1, x_2 independentes e normais ➔ gaussiana
  - $y = Ax_1 + Bx_2$
  - $y = N(A\mu_1 + B\mu_2, A^2\sigma_1^2 + B^2\sigma_2^2)$ (1D)
  - $y = N(A\mu_1 + B\mu_2, A\Sigma_1 A^T + B\Sigma_2 B^T)$ (2D)

Filtro de Kalman
Gaussianas – Operações

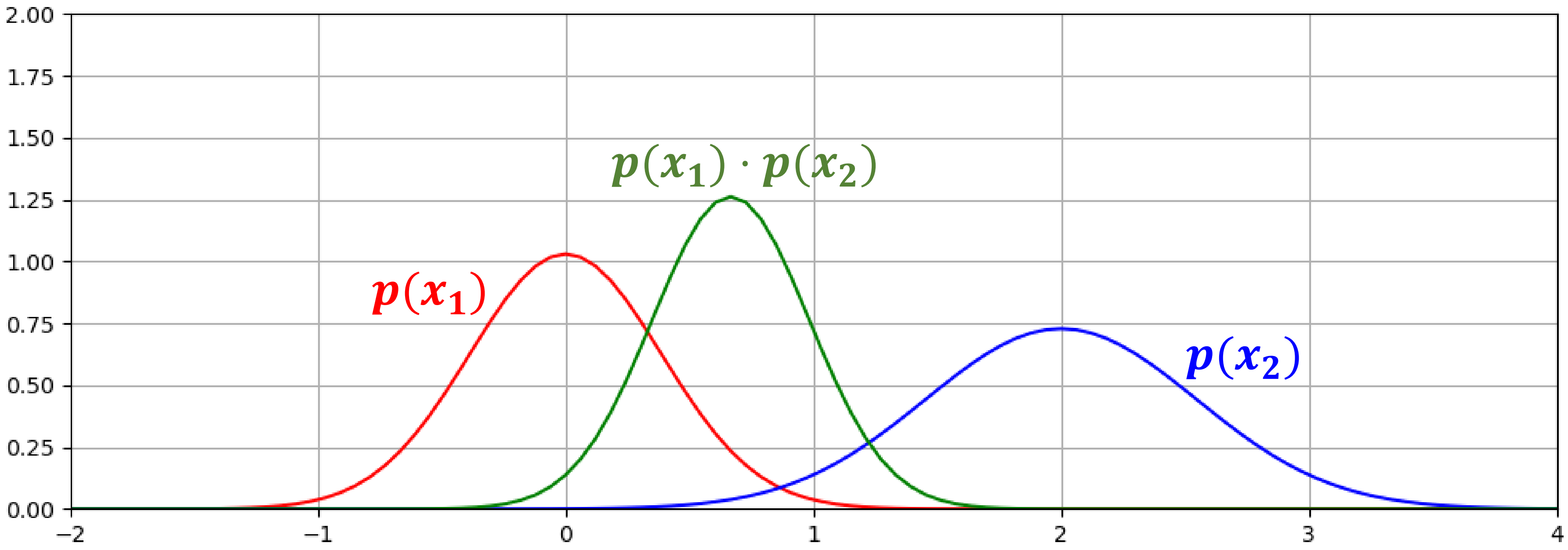
- O produto de Gaussianas também é uma Gaussiana
- 1D

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= N(\mu_1, {\sigma_1}^2) \\ x_2 &= N(\mu_2, {\sigma_2}^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow p(x_1) \cdot p(x_2) = N\left(\frac{{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}\mu_1 + \frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}\mu_2, \frac{1}{{\sigma_1}^{-2} + {\sigma_2}^{-2}}\right)$$

- nD

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= N(\mu_1, \Sigma_1) \\ x_2 &= N(\mu_2, \Sigma_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow p(x_1) \cdot p(x_2) = N\left(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_1 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_2, \frac{1}{\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}}\right)$$

Filtro de Kalman
Gaussianas – Operações



Filtro de Kalman
Gaussianas – Exemplo (fusão sensorial)

- Considerando uma posição q e duas estimativas (*belief*)
  - $p_1(q) = N\left(\hat{q}_1, \sigma_1^2\right)$ (ação → predição)
  - $p_2(q) = N\left(\hat{q}_2, \sigma_2^2\right)$ (observação → correção)
- Como estimar a distribuição final resultante $p(q)$?
- Produto das estimativas
  - $p(q) = p_1(q) \cdot p_2(q) = N(q, \sigma^2)$

Filtro de Kalman

Gaussianas – Exemplo (fusão sensorial)

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(q-\hat{q}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)}}_{p_1(q)} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(q-\hat{q}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}}_{p_2(q)} = \underbrace{\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(q-\hat{q}_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(q-\hat{q}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}_{\text{Gaussiana} \rightarrow \Omega\exp\left(-\frac{(q-\hat{q})^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$\hat{q} = \overbrace{\boxed{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}^{\mathbf{W_1}}\hat{q}_1 + \overbrace{\boxed{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}^{\mathbf{W_2}}\hat{q}_2$$

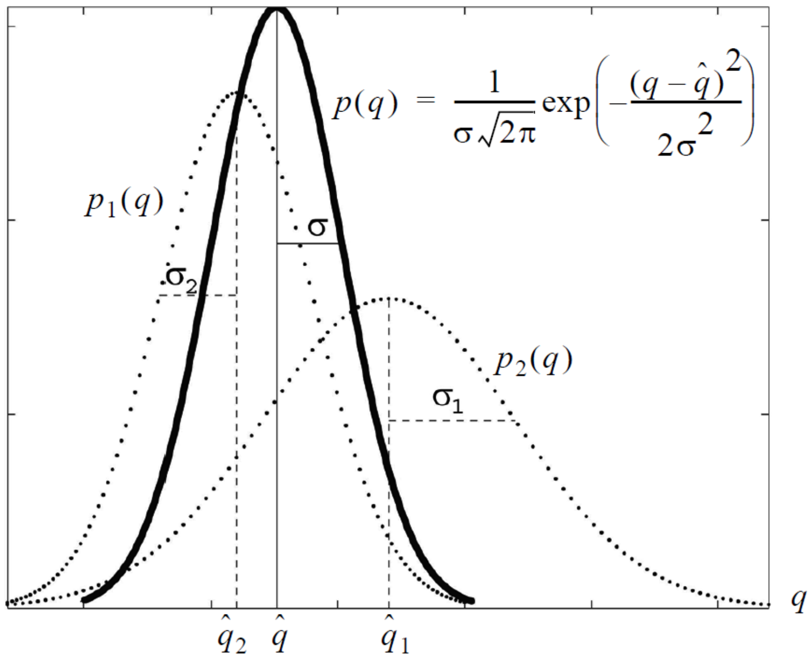
$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

Filtro de Kalman

Gaussianas – Exemplo (fusão sensorial)

$$\hat{q} = \hat{q}_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(\hat{q}_2 - \hat{q}_1)$$

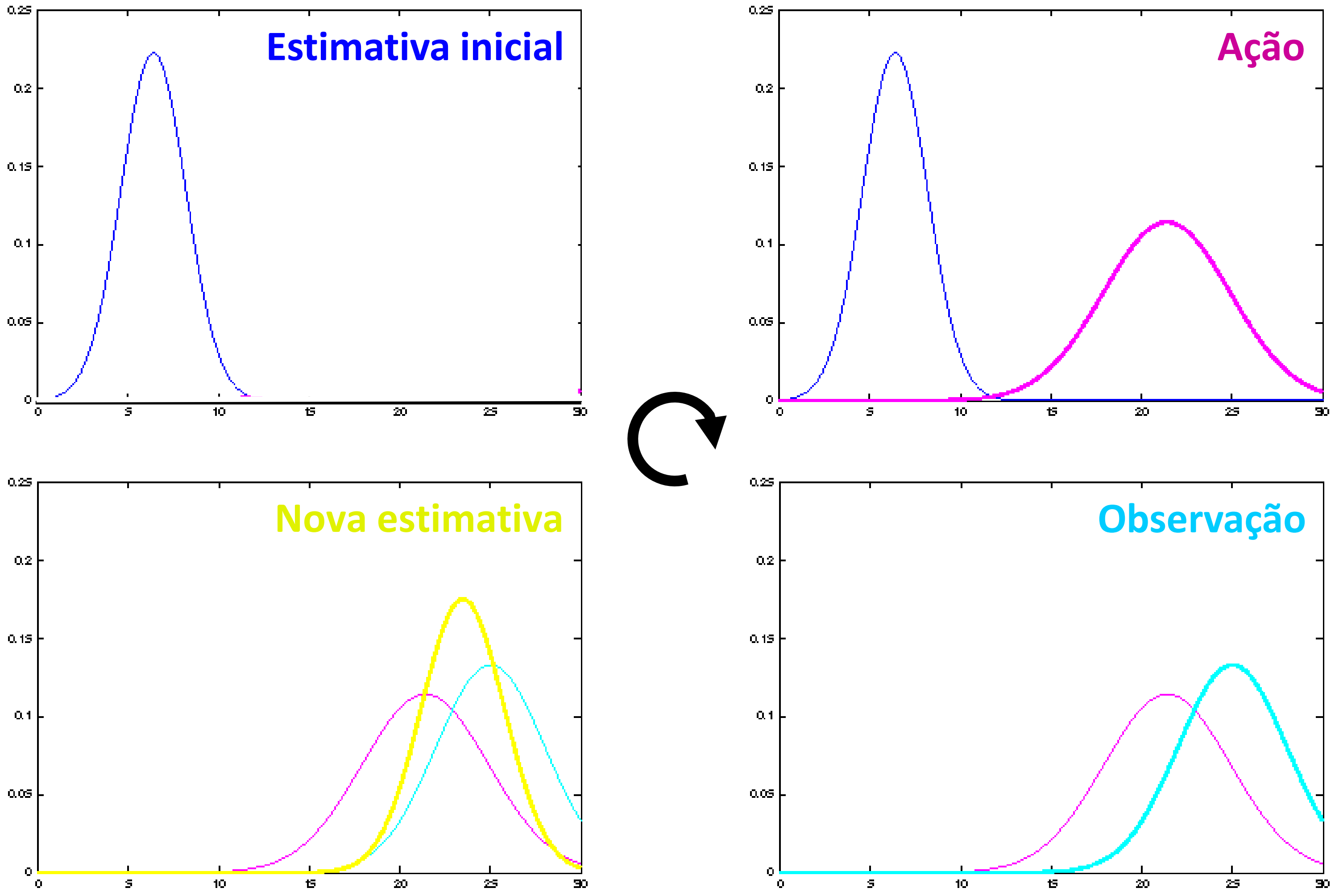
$$\sigma^2 = \sigma_1^2 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$



- Variância resultante **menor** que as variâncias de entrada
- Até observações ruidosas ajudam a melhorar a estimativa

Fonte: *Introduction to Autonomous Mobile Robots*

Filtro de Kalman



Filtro de Kalman

- Crença $bel(x_t)$ no tempo t pela média μ_t e covariância Σ_t
- Implementação de "mínimos quadrados"
  - Encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados
- Estimação de estados
  - Passado, presente, futuro
- Medida da qualidade da estimativa
  - Variância associada
- Método robusto

Filtro de Kalman

- Estimar o estado x de um processo em tempo discreto
- Processo possui dinâmica linear dada pela equação

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

- Modelo de observação linear dado por

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

Filtro de Kalman
Componentes

- $\boldsymbol{A_t}$: Matriz $(n \times n)$ que representa a evolução do estado de $t-1$ para t sem ações de controle ou ruído (n é a dimensão do vetor de estado x)
- $\boldsymbol{B_t}$: Matriz $(n \times m)$ que descreve como as ações de controle u_t mudam o estado de $t-1$ para t (m é a dimensão do vetor de controle u)
- $\boldsymbol{C_t}$: Matriz $(\mathrm{k} \times n)$ que descreve como mapear o estado x_t em uma observação z_t (k é a dimensão do vetor de observações z)
- $\boldsymbol{\varepsilon_t}, \boldsymbol{\delta_t}$: São variáveis aleatórias que representam os ruídos de processo e observação, assumidos como independentes e com distribuição normal com covariância R_t e Q_t ➔ $\varepsilon_t = N(0, R_t), \delta_t = N(0, Q_t)$

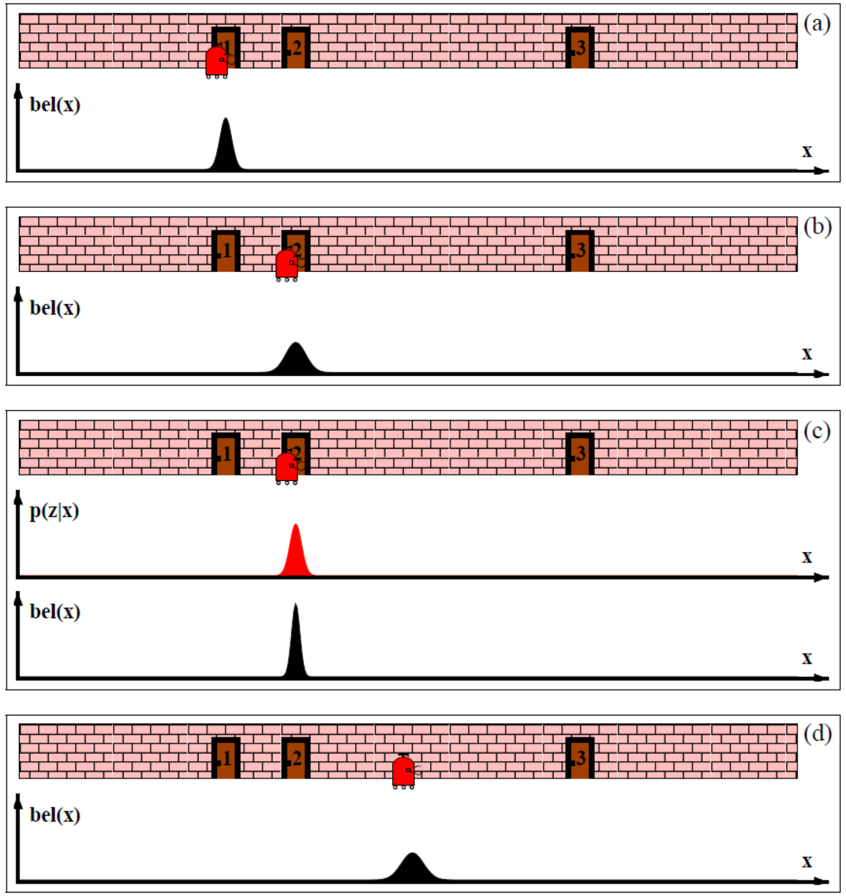
Filtro de Kalman
Ilustração

Estado de crença inicial

Incerteza aumenta por uma ação

Incerteza diminui após observação

Repete o processo



Fonte: *Probabilistic Robotics*

Filtro de Kalman
Filtro de Bayes

- Valor a posteriori do estado (*belief*)
  - $bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t})$
- Predição
  - $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t | x_{t-1}, u_t) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$
- Correção
  - $bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \, \overline{bel}(x_t)$

Filtro de Kalman

Filtro de Bayes

- Predição
  - $\overline{bel}(x_t) = \int \underbrace{p(x_t|x_{t-1},u_t)}_{N(A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t)} \underbrace{bel(x_{t-1})}_{N(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})} dx_{t-1}$
  - $\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$

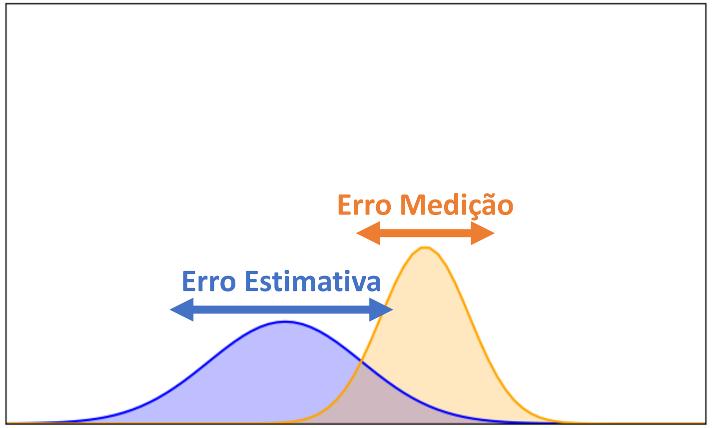
Filtro de Kalman
Filtro de Bayes

- Correção
  - $bel(x_t) = \eta \underbrace{p(z_t|x_t)}_{N(C_t x_t, Q_t)} \underbrace{\overline{bel}(x_t)}_{N(\bar{\mu}_t, \bar{\Sigma}_t)}$
  - $bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t C_t)\,\bar{\Sigma}_t \end{cases}$
  - onde $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T \left(C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t\right)^{-1}$

Filtro de Kalman
Ganho de Kalman

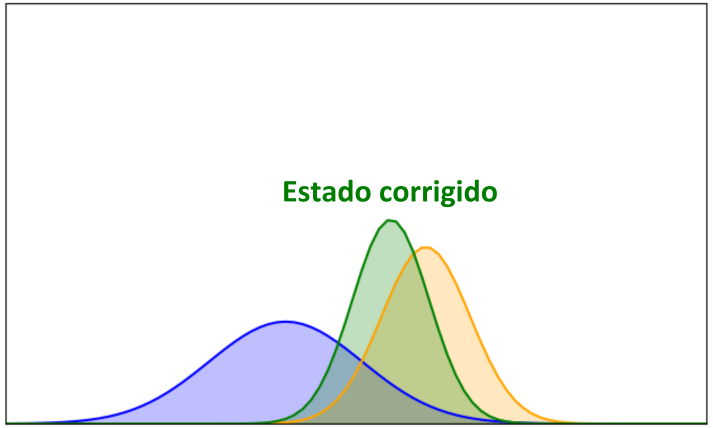
- Ganho de Kalman (K_t)
  - Grau que a medição é incorporada na nova estimativa do estado
  - Manipula a média μ_t ajustando-a proporcionalmente de acordo com o ganho e o desvio da medição feita e a medição prevista

$$K = \frac{E_{est}}{E_{est} + E_{mea}}$$



Filtro de Kalman

Ganho de Kalman



Estimativas são mais estáveis e as Medições são imprecisas

Medições são precisas, mas as Estimativas são instáveis

Filtro de Kalman
Algoritmo

1: **Algorithm Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):

2: $\bar{\mu}_t = A_t\ \mu_{t-1} + B_t\ u_t$

3: $\bar{\Sigma}_t = A_t\ \Sigma_{t-1}\ A_t^T + R_t$

4: $K_t = \bar{\Sigma}_t\ C_t^T (C_t\ \bar{\Sigma}_t\ C_t^T + Q_t)^{-1}$

5: $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t\ \bar{\mu}_t)$

6: $\Sigma_t = (I - K_t\ C_t)\ \bar{\Sigma}_t$

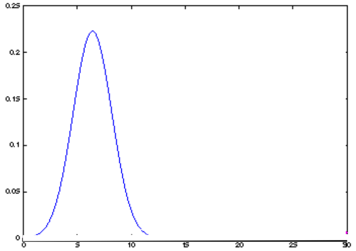
7: return μ_t, Σ_t

Predição

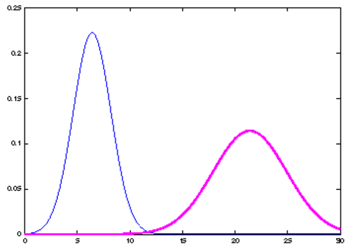
Correção

Fonte: *Probabilistic Robotics*

Filtro de Kalman
Algoritmo



Predição

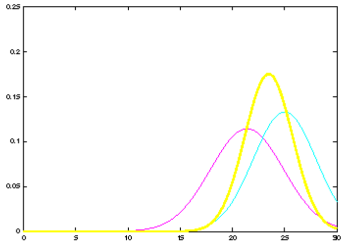


1D $$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - \bar{\mu}_t) \\ \sigma_t^2 = (1 - K_t)\bar{\sigma}_t^2 \end{cases}, K_t = \frac{\bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \bar{\sigma}_{obs,t}^2}$$

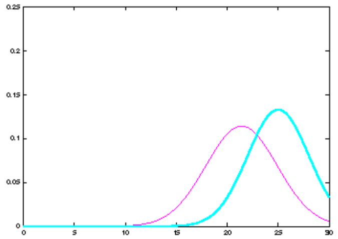
$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = a_t \mu_{t-1} + b_t u_t \\ \bar{\sigma}_t^2 = a_t^2 \sigma_t^2 + \sigma_{act,t}^2 \end{cases}$$ 1D

nD $$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t C_t)\bar{\Sigma}_t \end{cases}, K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$$ nD

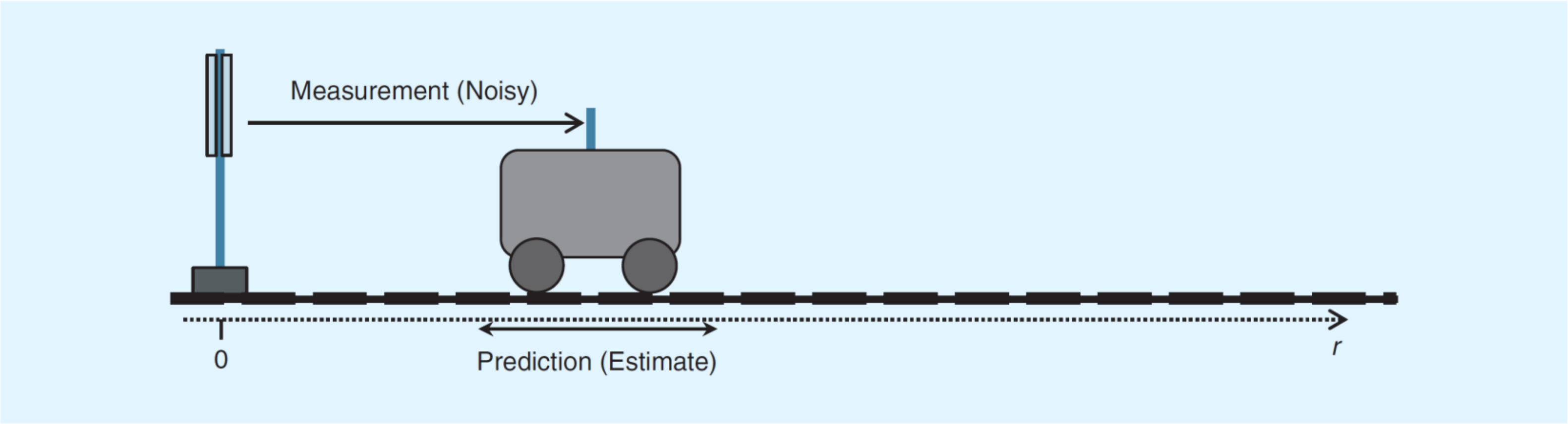


Correção



Filtro de Kalman
Exemplo

- Rastrear um robô que se move sobre um trilho reto (1D)
- Entrada do sistema considera frenagem ou aceleração
- Medição da distância via rádio a partir de uma estação base



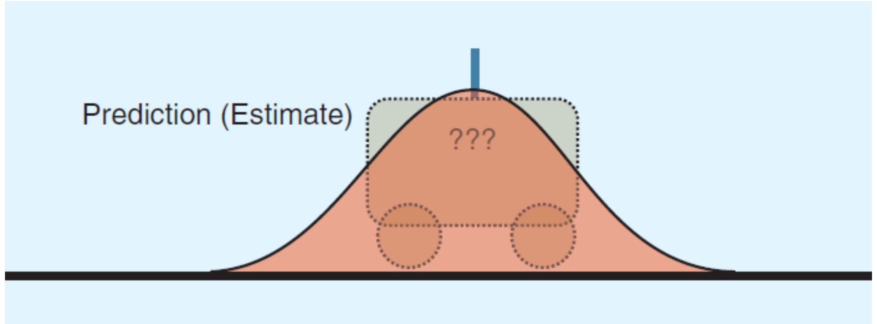
Fonte: Understanding the Basis of the Kalman Filter via a Simple and Intuitive Derivation [Lecture Notes] R. Faragher. Signal Processing Magazine, IEEE , vol.29, no.5, pp.128-132, 2012.

Filtro de Kalman
Exemplo – Predição

- Vetor estado: posição, velocidade
- Entrada de controle: aceleração

$$\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$$
$$\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$$

$$\boldsymbol{\mu}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}_t = \frac{f_t}{m} = a$$



$$\begin{bmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{\dot{x}}_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_t} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ \dot{x}_{t-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (\Delta t)^2/2 \\ \Delta t \end{bmatrix}}_{B_t} \boldsymbol{u}_t$$

$$R_t = \begin{bmatrix} (0.25)^2 & 0 \\ 0 & (0.15)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

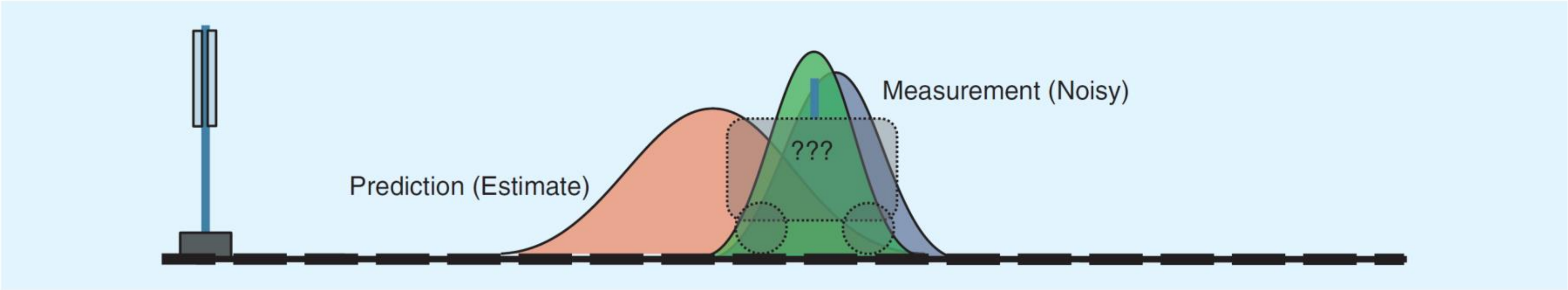
Fonte: Understanding the Basis of the Kalman Filter via a Simple and Intuitive Derivation [Lecture Notes] R. Faragher. Signal Processing Magazine, IEEE , vol.29, no.5, pp.128-132, 2012.

Filtro de Kalman
Exemplo – Correção

- Definir o mapeamento do espaço de estados para espaço de medição
- Vamos considerar apenas a posição

$$K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T \left(C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t \right)^{-1}$$
$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$$
$$\Sigma_t = (I - K_t C_t)\, \bar{\Sigma}_t$$

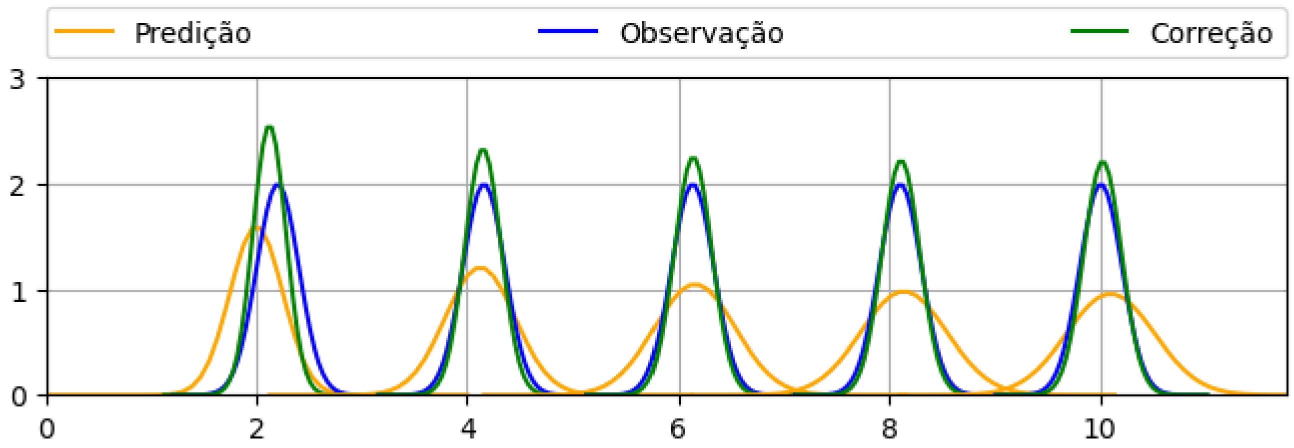
$$z_t = \left[x_t^{radio} \right] = \underbrace{[1 \quad 0]}_{C_t} \begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} \qquad Q_t = \left[(0.20)^2 \right]$$



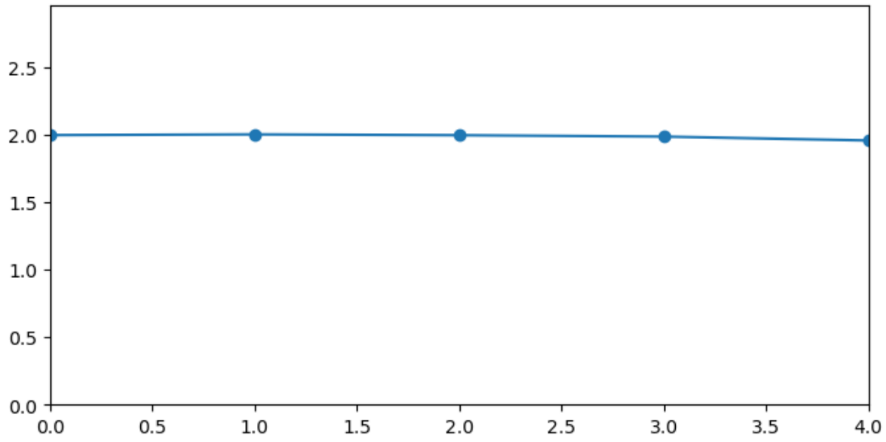
Fonte: Understanding the Basis of the Kalman Filter via a Simple and Intuitive Derivation [Lecture Notes] R. Faragher. Signal Processing Magazine, IEEE , vol.29, no.5, pp.128-132, 2012.

Filtro de Kalman
Exemplo

Posição



Velocidade



Considerações finais

- Altamente eficiente
  - Custo polinomial considerando as dimensões dos vetores de estado (n) e observação (k) e operações básicas em matrizes
  - $O(k^{2,376} + n^2)$
- Estimador ótimo para sistemas lineares gaussianos
- Maioria dos sistemas robóticos é não-linear
  - Extensões para diferentes casos

Considerações finais
Extensões

- Extended Kalman Filter (EKF)
  - Linearização em torno no estado atual
  - Requer o cálculo de Matrizes Jacobianas
- Unscented Kalman Filter (UKF)
  - Linearização estocástica (amostragem)
  - Geralmente mais eficiente (mesmo custo!)
- Kalman-Bucy Filter (KBF)
  - Implementação contínua do KF
  - Utiliza algoritmos de integração numérica