UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Robótica Móvel

Revisão de probabilidade

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

VERLab
Visão e Robótica

Introdução

- Robótica é a ciência de observar e manipular o mundo físico por dispositivos mecânicos controlados a partir de um computador

- Principal problema → Incertezas
  - **Ambiente**: não-estruturados, altamente dinâmicos e imprevisíveis
  - **Sensores**: limitados na percepção (alcance e resolução)
  - **Atuadores**: motores e mecanismos são fonte de erros
  - **Modelos**: abstrações/simplificações do mundo real

Introdução

- Robótica probabilística

> “A robot that carries a **notion of its own uncertainty** and that **acts accordingly** is superior to one that does not.”
>
> – Probabilistic Robotics

- Objetivo
  - Representação explícita da incerteza
  - Cálculo baseado na teoria da probabilidade

Introdução

- Estimar estados a partir de informações sensoriais
  - Aproximar uma informação (quantidade) que não é diretamente observável, mas pode ser inferida a partir dos dados dos sensores
- Algoritmos de estimação probabilísticos
  - Distribuições de "possibilidades" sobre estados (robô/mundo)
- Loop de execução
  - **Ação** → otimização da utilidade
  - **Observação** → estimativa do estado

Conceitos básicos

- Como o robô não tem certeza, ele possui um grau de crença (confiança) sobre a informação sendo estimada

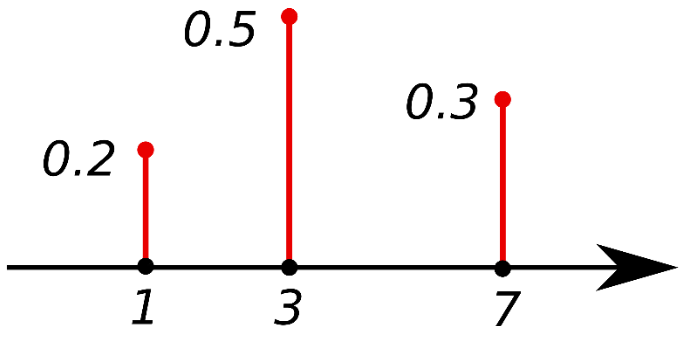
- Esse valor é constantemente atualizado à medida que novas informações (evidências) são recebidas (observadas)
  - *Prior* : Probabilidade Incondicional (antes)
  - *Posterior* : Probabilidade Condicional (depois)

Conceitos básicos
Variável aleatória

- Informação do mundo com incerteza
- Possui um domínio de valores
  - Discreta, Contínua
- Notação
  - X uma variável aleatória e x um certo evento
  - $p(X = x) \rightarrow p(x)$
  - $p(X = \text{cara}) = p(X = \text{coroa})$

Probabilidade Incondicional

- Probabilidade de ocorrência de um certo evento dado que não temos nenhuma outra informação a seu respeito
  - $p(\text{Moeda} = \text{cara}) = 1/2$
  - $p(\text{Dado} = 2) = 1/6$
- Distribuição de probabilidades: espaço de valores
  - Probability Mass Function (PMF)
  - $p(\text{Moeda}) =< 0.5,\ 0.5 >$
  - $p(\text{Dado}) =< \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} >$



Probabilidade Incondicional

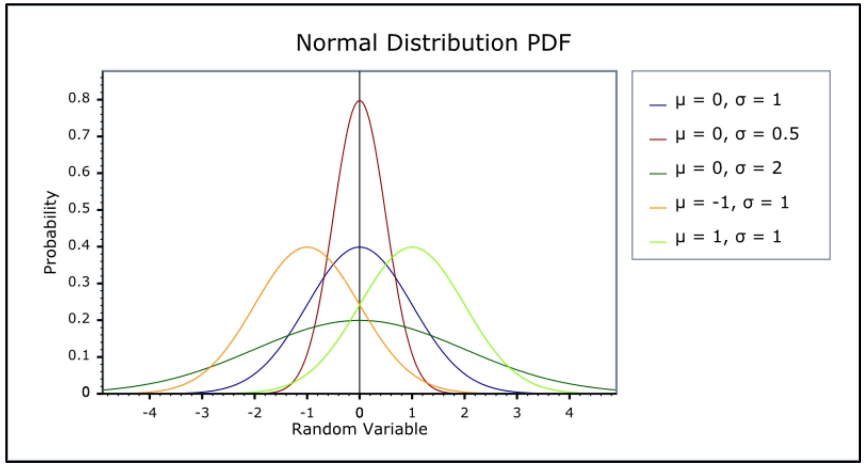
- Variáveis aleatórias contínuas
  - Qualquer valor numérico dentro de um intervalo
- Distribuição de probabilidades: Probability Density Function (PDF)

Média

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Desvio padrão

Variância



Probabilidade Conjunta

- Probabilidade que dois eventos aconteçam simultaneamente
- Probabilidade conjunta de variáveis aleatórias
  - $p(x, y) = p(X = x \wedge Y = y)$
- Se X e Y são independentes
  - $p(x, y) = p(x)\, p(y)$
- Exemplo: 2 dados não viciados
  - $p(\underbrace{X = 1}_{1/6} \wedge \underbrace{Y \neq 1}_{5/6}) = 5/36$

Probabilidade Condicional

- Algumas vezes, as variáveis aleatórias podem carregar informações sobre outras variáveis aleatórias no contexto
- Probabilidade de $X = x$, condicionado ao fato que $Y = y$
  - $p(x \mid y) = p(X = x \mid Y = y)$
  - "Probabilidade condicional de x dado y."
  - "Qual a probabilidade de x se y é verdadeiro/ocorreu?"

Probabilidade Condicional

- Se $p(y) > 0$, a probabilidade condicional é

$$p(x \mid y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p(x,y) = p(x \mid y)p(y)}$$

Regra do produto

- Se X e Y são <u>independentes</u>, então

$$p(x \mid y) = \frac{p(x)p(y)}{p(y)} = p(x)$$

Probabilidade Marginal

- Probabilidade do evento A ocorrer, independentemente de qualquer outro evento B, ou seja, deixando o evento B à margem do problema
- A probabilidade marginal de A é

$$p(A) = p(A|B)p(B) + p(A|\neg B)p(\neg B)$$

- onde $\neg B$ representa o caso onde B não ocorre

Lei da Probabilidade Total

- Relaciona probabilidades marginais e probabilidades condicionais
  - Difícil calcular a probabilidade do evento A de forma direta
  - Probabilidade do resultado inferido através de eventos distintos
- Caso discreto
  - $p(x) = \sum_y p(x, y) \rightarrow p(x) = \sum_y p(x \mid y) p(y)$
- Caso contínuo
  - $p(x) = \int_y p(x, y)\, dy \rightarrow p(x) = \int_y p(x \mid y) p(y) dy$

Lei da Probabilidade Total

Exemplo

- Dado um baralho comum, qual a probabilidade de se escolher um Ás ao retirar uma carta aleatoriamente?

$$p(\text{Ás} \mid \text{ouros}) = \frac{1}{13} \qquad p(\text{ouros}) = \frac{1}{4}$$

$$p(\text{Ás} \mid \text{copas}) = \frac{1}{13} \qquad p(\text{copas}) = \frac{1}{4}$$

$$p(\text{Ás} \mid \text{paus}) = \frac{1}{13} \qquad p(\text{paus}) = \frac{1}{4}$$

$$p(\text{Ás} \mid \text{espadas}) = \frac{1}{13} \qquad p(\text{espadas}) = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{p(x) = \sum_{y} p(x \mid y)p(y) = \left(\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 4 = \frac{1}{13}}$$

Teorema de Bayes

- Papel fundamental na robótica probabilística
- Geralmente a informação é em uma direção
  - Causa → Efeito
  - Estar em $\mathbf{q}$ (estado) faz os sensores retornarem z (observação)
- Regra de Bayes permite obter o inverso, ou seja, uma vez observado o efeito (evidência), qual é a causa mais provável

Teorema de Bayes

- A partir da regra do produto

$$p(x,y) = p(x \mid y)p(y)$$
$$p(x,y) = p(y \mid x)p(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x)p(x)}{p(y)}} = \frac{\text{likelihood} \cdot \text{prior}}{\text{evidence}}$$

Teorema de Bayes

Likelihood
Probabilidade de observar essa evidência quando nossa hipótese é verdadeira.

Prior
Probabilidade da hipótese ser verdadeira antes de observar alguma evidência.

$$p(H|E) = \frac{p(E|H)p(H)}{p(E)}$$

Posterior
Probabilidade da hipótese ser verdadeira considerando a evidência (dado) observada.

Marginal
Qual a probabilidade de se observar essa evidência dada todas as possíveis hipóteses?

Dica: https://youtu.be/HZGCoVF3YvM

Teorema de Bayes
Exemplo

- Diagnóstico médico
  - Meningite causa torcicolo em 50% dos casos
  - Fatos incondicionais (*prior*)
    - Probabilidade de ter meningite: $1/50000$
    - Probabilidade de ter torcicolo: $1/20$
  - Estou com torcicolo, tenho meningite?

$$p(\mathrm{m}) = 1/50000 \qquad p(\mathrm{s}) = 1/20 \qquad p(\mathrm{s} \mid \mathrm{m}) = 0.5$$

$$p(\mathrm{m} \mid \mathrm{s}) = \frac{p(\mathrm{s} \mid m)\, p(\mathrm{m})}{p(\mathrm{s})} = \frac{0.5 \cdot 1/50000}{1/20} = 0.0002$$

Teorema de Bayes
Normalização

- Como observado, $p(y)$ não depende de x
  - Terá o mesmo valor para todo x em $p(x \mid y)$
- Geralmente usado como um fator normalizador

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x)p(x)}{p(y)} = \eta\, p(y \mid x)p(x)$$

$$\eta = p(y)^{-1} = \frac{1}{\sum_{x'} p(y|x')p(x')}$$

Teorema de Bayes
Múltiplas evidências

- Finalmente, podemos condicionar qualquer uma das regras em outras variáveis aleatórias (evidências anteriores)

$$p(x \mid y, z) = \frac{p(y \mid x, z)p(x \mid z)}{p(y \mid z)}$$

- Condicionando probabilidades conjuntas independentes

$$p(x, y \mid z) = p(x \mid z)p(y \mid z)$$

Conhecido como independência condicional.

Teorema de Bayes
Independência condicional

- Eventos x e y condicionalmente independentes de z se

$$p(x, y \mid z) = p(x|z)p(y|z)$$

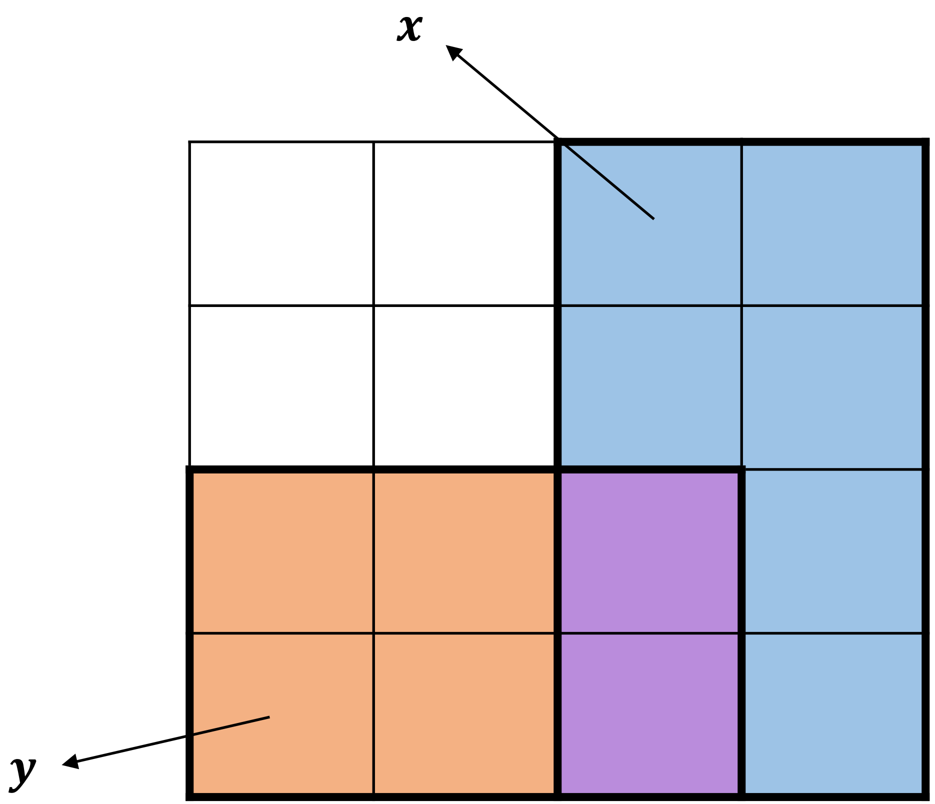
- Isso é equivalente a

$$p(x \mid z) = p(x \mid z, y) \quad \text{e} \quad p(y \mid z) = p(y \mid z, x)$$

- Independência absoluta/condicional

$$p(x, y) = p(x)p(y) \;\not\Leftrightarrow\; p(x, y|z) = p(x|z)p(y|z)$$

Teorema de Bayes
Independência condicional



$p(x) = 0.5$

$p(y) = 0.375$

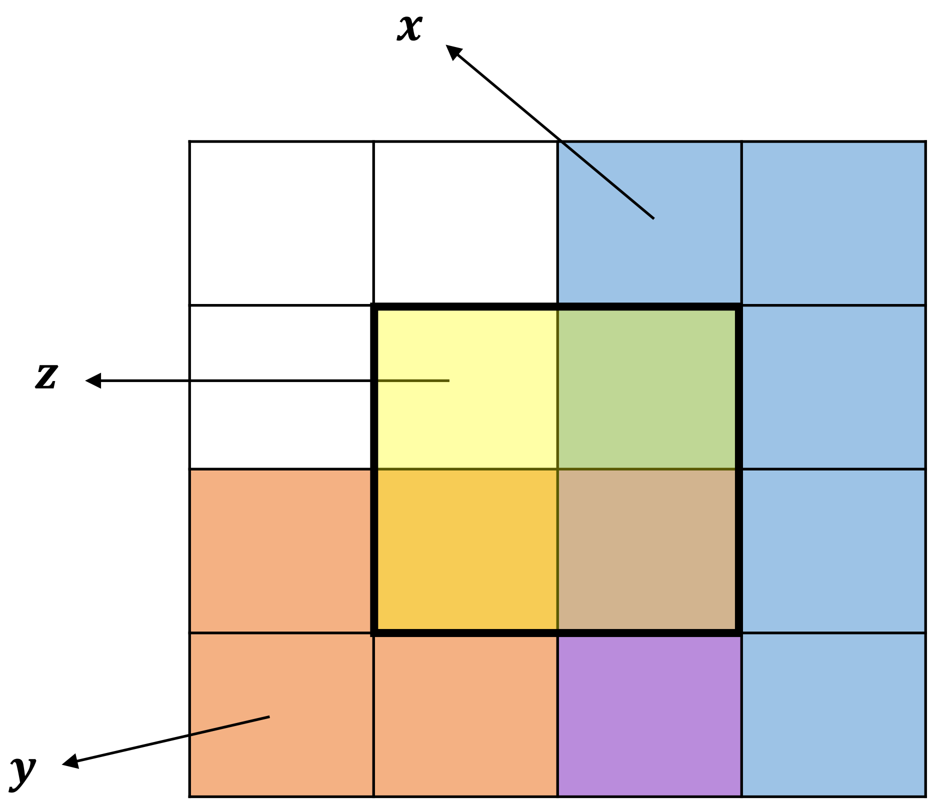
$p(x, y) = 0.125$

$p(x)p(y) = 0.185$

$p(x, y) \neq p(x)p(y)$

Não são independentes!

Teorema de Bayes
Independência condicional



$p(x) = 0.5$

$p(y) = 0.375$

$p(x \mid z) = 0.5$

$p(y \mid z) = 0.5$

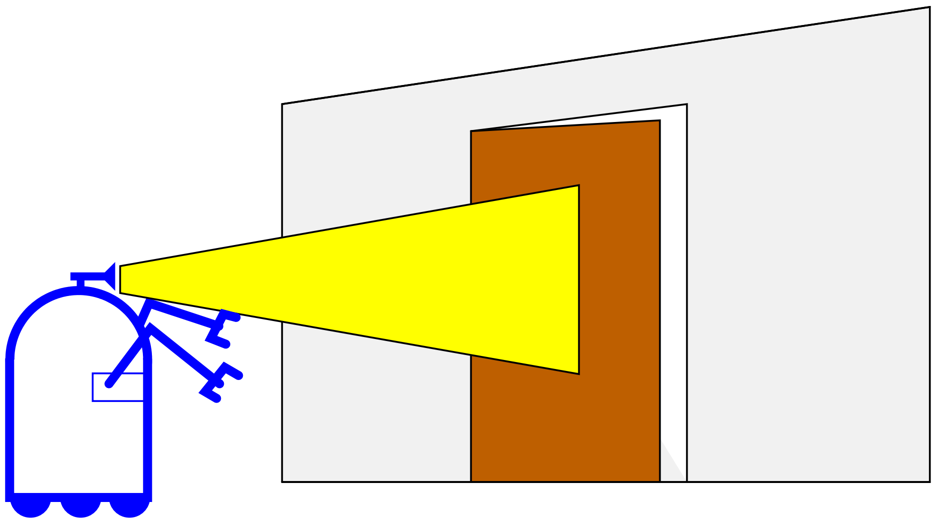
$p(x, y \mid z) = 0.25$

$$p(x, y \mid z) = p(x|z)p(y|z)$$

Condicionalmente independentes!

Exemplo

- Robô deve estimar o estado de uma porta usando sua câmera
- Supondo que o robô obtém uma medição z, qual é $p(\text{open} \mid z)$?



Exemplo

- $p(\text{open} \mid z)$ → Efeito
- $p(z \mid \text{open})$ → Causa (sensor model)
  - Geralmente fácil de ser obtido
  - Como? ➔ Fazer várias leituras e as estatísticas necessárias.
- Teorema de Bayes permite usar essa informação

$$p(\text{open} \mid z) = \frac{p(z \mid \text{open})\,p(\text{open})}{p(z)}$$

Exemplo

- $p(z \mid \text{open}) = 0.6 \qquad p(z \mid \neg\text{open}) = 0.3$
- $p(\text{open}) = p(\neg\text{open}) = 0.5$

$$p(\text{open}|\text{z}) = \frac{p(z|\text{open})p(\text{open})}{p(z|\text{open})p(\text{open}) + p(z|\neg\text{open})p(\neg\text{open})}$$

$$p(\text{open}|\text{z}) = \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = 0.66$$

Exemplo

- Ou seja, a leitura atual nos ajudou a aumentar a confiança que a porta está aberta considerando a estimativa inicial
- O robô obtém uma nova observação z_2, como fazer agora para integrar a nova observação à estimativa anterior?
- De forma mais geral, como estimar $p(x|z_1 \ldots z_n)$?

Exemplo

- Atualização Bayesiana Recursiva

$$p(x \mid y, z) = \frac{p(y \mid x, z)\,p(x \mid z)}{p(y \mid z)}$$

z_n $\qquad$ $z_1, \dots, z_{n-1}$

$$p(x|z_1, \dots, z_n) = \frac{p(z_n|x, z_1, \dots, z_{n-1})\,p(x|z_1, \dots, z_{n-1})}{p(z_n|z_1, \dots, z_{n-1})}$$

Exemplo

- Suposição de Markov
  - z_n é condicionalmente independente de $z_1, \dots, z_{n-1}$ dado x

$$p(x|z_1, \dots, z_n) = \frac{p(z_n|x)p(x|z_1, \dots, z_{n-1})}{p(z_n|z_1, \dots, z_{n-1})}$$

$$= \eta\, p(z_n|x)p(x|z_1, \dots, z_{n-1})$$

$$= \eta_{1\dots n} \prod_{i=1\dots n} p(z_i|x)p(x)$$

Exemplo

- $p(z_2 \mid \text{open}) = 0.5 \qquad p(z_2 \mid \neg\text{open}) = 0.6$
- $p(\text{open} \mid z_1) = 0.66$

$$p(\text{open}|\text{z}_2, z_1) = \frac{p(z_2|\text{open})p(\text{open}|z_1)}{p(z_2|\text{open})p(\text{open}|z_1) + p(z_2|\neg\text{open})p(\neg\text{open}|z_1)}$$

$$p(\text{open}|\text{z}_2, z_1) = \frac{0.5 \cdot 0.66}{0.5 \cdot 0.66 + 0.6 \cdot 0.33} = 0.625$$

A segunda leitura reduziu a confiança da porta estar aberta!

Ações

- O mundo é dinâmico, pode ser alterado
  - Por ações realizadas pelo próprio robô
  - Por ações realizadas por outros agentes
  - Pelo simples fato do passar do tempo
- As ações ajudam ou atrapalham?
  - Essas ações também são incertas!
  - Movimento das rodas, uso do manipulador, ...
- Como incorporar isso no modelo?

Ações

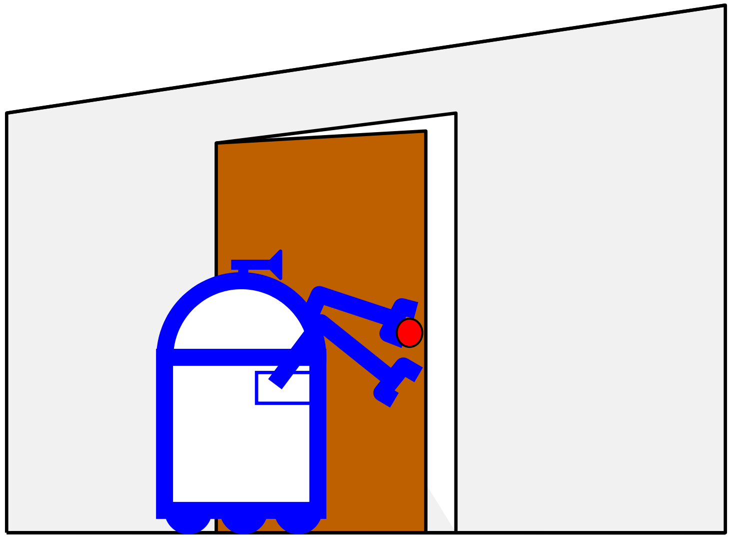
- Para incorporar a influência das ações no estado de crença, vamos fazer uso da probabilidade condicional

$$p(x_t \mid u, x_{t-1})$$

- O termo especifica a probabilidade de se chegar no estado x_t estando atualmente em x_{t-1} e aplicando a ação de controle u

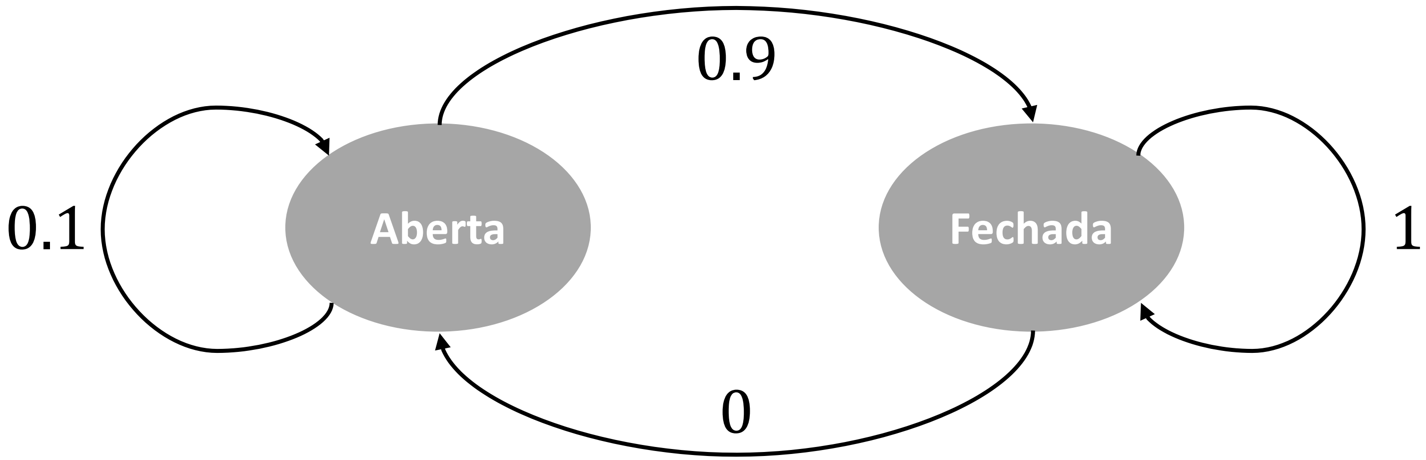
Exemplo

- Foi enviado um comando para o robô fechar uma porta
- Como determinar (estimar) se a porta foi efetivamente fechada?



Exemplo

- Temos $p(x_t | u, x_{t-1})$ onde u é "fechar a porta"



- Ou seja, se a porta estiver aberta, a ação "fechar a porta" obtém sucesso em 90% dos casos (a porta é fechada)

Integrando ações

- Caso discreto

$$p(x_t \mid u) = \sum p(x_t \mid u, x_{t-1}) p(x_{t-1})$$

- Caso contínuo

$$p(x_t \mid u) = \int p(x_t \mid u, x_{t-1}) p(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Exemplo

$$p(\text{closed} \mid u) = \sum p(\text{closed} \mid u, x_{t-1}) p(x_{t-1})$$

$$= p(\text{closed} \mid u, \text{open}) p(\text{open}) + p(\text{closed} \mid u, \text{closed}) p(\text{closed})$$
$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{16}$$

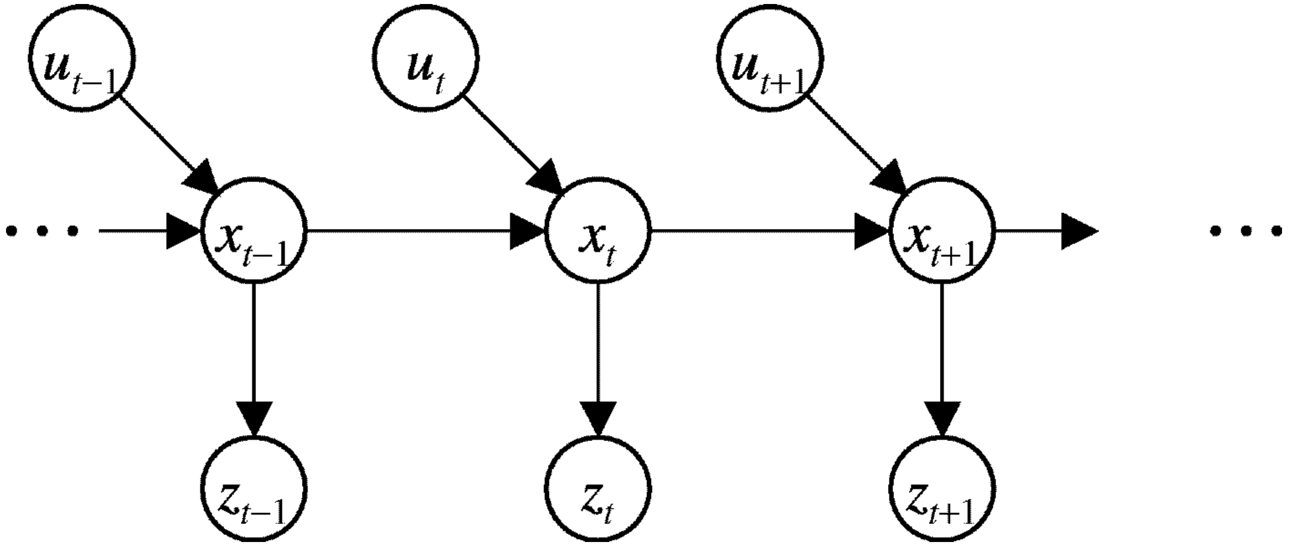
$$p(\text{open} \mid u) = \sum p(\text{open} \mid u, x_{t-1}) p(x_{t-1})$$

$$= p(\text{open} \mid u, \text{open}) p(\text{open}) + p(\text{open} \mid u, \text{closed}) p(\text{closed})$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{8} + \frac{0}{1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$$
$$= 1 - p(\text{closed} \mid u)$$

Filtro de Bayes

- Fornecido
  - Conjunto de ações e observações: $d_t = \{u_1, z_1, \dots, u_{t-1}, z_t\}$
  - Modelo de **transição**: $p(x_t \mid u_t, x_{t-1})$
  - Modelo de **observação**: $p(z_t \mid x_t)$
  - Estado a priori do sistema: $p(x)$
- Desejado
  - O estado a posteriori, chamado de crença (*Belief*)
  - $bel(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t}, u_{1:t})$ Distribução de probabilidade sobre o estado x_t, condicionada a todas as observações e ações.

Filtro de Bayes
Modelo Gráfico Probabilístico



$$p(x_t \mid x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)$$ **(ação)**

$$p(z_t \mid x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t \mid x_t)$$ **(observação)**

Filtro de Bayes

Algorithm Bayes_filter($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$)**:**

  for all x_t do

    $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\, bel(x_{t-1})\, dx$

    $bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t)\, \overline{bel}(x_t)$

  endfor

  return $bel(x_t)$

Fonte: *Probabilistic Robotics*

Filtro de Bayes

- **Predição**
  - $\overline{bel}(x_t) = \int \underbrace{p(x_t \mid u_t, x_{t-1})}_{\text{Modelo de transição}} \, bel(x_{t-1}) \, dx_{t-1}$
- **Correção**
  - $bel(x_t) = \eta \, \underbrace{p(z_t \mid x_t)}_{\text{Modelo de observação}} \, \overline{bel}(x_t)$

Veja toda a derivação no livro-texto, Capítulo 2.

Considerações finais

- Modelo de transição
  - Descreve a probabilidade de transição/evolução do estado
- Modelo de observação
  - Descreve o processo de formação pelo qual as medições de um sensor específico são geradas no mundo físico

- Leia mais no livro
  - Modelo de transição: Capítulo 5
  - Modelo de observação: Capítulo 6