Домашки ФКН

Арсений

2021 — 2023

Оглавление

Часть I

Первый курс

Глава 1

Линал на первом курсе

Домашки

Первое ИДЗ

1.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & -4 & -7 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 2 \\ -8 & -7 & -4 & -3 \\ -6 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$ABx = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 2 \\ -8 & -7 & -4 & -3 \\ -6 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \times x = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 2 \\ -8 & -7 & -4 & -3 \\ -6 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =>$$

$$ABx = 0 <=> \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times x = 0;$$

$$=> x_3, x_4 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = -x_4, \quad x_1 = \frac{x_4 - x_3}{2}.$$

2. Рассмотрим 2 случая: $t = 4$ & $t \neq 4$.

1. $t = 4:$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -5 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi(X, \lambda) = -\lambda^3 - 8\lambda^2 - 16\lambda = -\lambda(\lambda + 4)^2;$$

$$\mu(X) \mid \chi(X) =>$$

(a) $\mu = \lambda$ — очевидно, не подходит.

(b) $\mu = \lambda(\lambda+4),\ \mu(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — не подходит.

(c) $\mu = (\lambda+4)^2,\ \mu(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ — не подходит.

(d) $\mu = \lambda(\lambda+4)^2,\ \mu(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — подходит.

Таким образом, при $t = 4$ минимальный многочлен данной матрицы равен $X^3 + 8X^2 + 16X$.

2. $t \neq 4:$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -t \\ -5 & -4 & -5-3t \\ 0 & 0 & -4+t \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 4 & 13 \\ 0 & 16 & 48 \\ 0 & 0 & -4+t \end{pmatrix}$$

$$\chi(X) = det(X - \lambda E) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 13 \\ 0 & 16-\lambda & 48 \\ 0 & 0 & -4+t-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(16-\lambda)(t-4-\lambda)$$

$$\mu(X) \mid \chi(X) =>$$

(a) $\mu = (1-\lambda)$ — очевидно, не подходит

(b) $\mu = (16-\lambda)$ — очевидно, не подходит

(c) $\mu = (t-4-\lambda)$ — очевидно, не подходит

(d) $\mu = (16-\lambda)(t-4-\lambda)$ — не подходит

(e) $\mu = (1-\lambda)(t-4-\lambda)$ — не подходит

(f) $\mu = (1-\lambda)(16-\lambda)$ — не подходит

(g) $\mu = -(1-\lambda)(16-\lambda)(t-4-\lambda)$ — подходит.

Таким образом, при $t \neq 4$ минимальный многочлен данной матрицы равен $-(1-\lambda)(16-\lambda)(t-4-\lambda)$.

3.

$$\exists\, A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} =>$$

$$=> A \times \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \;\; \& \;\; A \times \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \;\; \& \;\; \exists x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : A \times x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} =>$$

$$=> \begin{cases} -9a_{1,1} - 7a_{1,2} - 3a_{1,3} = 0, \\ -9a_{2,1} - 7a_{2,2} - 3a_{2,3} = 0; \end{cases} \quad \& \;\; \begin{cases} -6a_{1,1} + 3a_{1,2} + 2a_{1,3} = 0, \\ -6a_{2,1} + 3a_{2,2} + 2a_{2,3} = 0; \end{cases}$$

$$\& \;\; \begin{cases} x_1 a_{1,1} + x_2 a1,2 + x_3 a_{1,3} = 1, \\ x_1 a_{2,1} + x_2 a2,2 + x_3 a_{2,3} = 3; \end{cases}$$

из первых двух систем получаем:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{69} a_{1,3} & \frac{-12}{23} a_{1,3} & a_{1,3} \\ \frac{5}{69} a_{2,3} & \frac{-12}{23} a_{2,3} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

$$\exists\, a_{1,3} = 1 \;\; \& \;\; a_{2,3} = 3 =>$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{69} & \frac{-12}{23} & 1 \\ \frac{15}{69} & \frac{-36}{23} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\exists\, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} => Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Таким образом нам удалось привести пример такой матрицы, которая удовлетворяет всем необходимым требованиям, а значит такая существует.

4.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}$$
$$AX = XA = B;$$

$$B_{1,1} = -1x_{1,1} + 0x_{2,1} - 4x_{3,1} = -1x_{1,1} + 5x_{1,2} + 0x_{1,3} =>$$
$$=> 5x_{1,2} + 4x_{3,1} = 0,$$
$$B_{1,2} = -1x_{1,2} + 0x_{2,2} - 4x_{3,2} = 0x_{1,1} - 1x_{1,2} + 0x_{1,3} =>$$
$$=> 4x_{3,2} = 0,$$
$$B_{1,3} = -1x_{1,3} + 0x_{2,3} - 4x_{3,3} = -4x_{1,1} + 7x_{1,2} - 5x_{1,3} =>$$
$$=> -4x_{1,1} + 7x_{1,2} - 4x_{1,3} + 4x_{3,3} = 0,$$
$$B_{2,1} = 5x_{1,1} - 1x_{2,1} + 7x_{3,1} = -1x_{2,1} + 5x_{2,2} + 0x_{2,3} =>$$
$$=> 5x_{2,2} - 5x_{1,1} - 7x_{3,1} = 0,$$
$$B_{2,2} = 5x_{1,2} - 1x_{2,2} + 7x_{3,2} = 0x_{2,1} - 1x_{2,2} + 0x_{2,3} =>$$
$$=> -5x_{1,2} + 7x_{3,2} = 0,$$
$$B_{2,3} = 5x_{1,3} - 1x_{2,3} + 7x_{3,3} = -4x_{2,1} + 7x_{2,2} - 5x_{2,3} =>$$
$$=> 4x_{2,1} + 7x_{2,2} - 4x_{2,3} - 7x_{3,3} = 0,$$
$$B_{3,1} = 0x_{1,1} + 0x_{2,1} - 5x_{3,1} = -1x_{3,1} + 5x_{3,2} + 0x_{3,3} =>$$
$$=> 4x_{3,1} + 5x_{3,2} = 0,$$
$$B_{3,2} = 0x_{1,2} + 0x_{2,2} - 5x_{3,2} = 0x_{3,1} - 1x_{3,2} + 0x_{3,3} =>$$
$$=> 4x_{3,2} = 0,$$
$$B_{3,3} = 0x_{1,3} + 0x_{2,3} - 5x_{3,3} = -4x_{3,1} + 7x_{3,2} - 5x_{3,3} =>$$
$$=> 7x_{3,2} - 4x_{3,1} = 0;$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 & -4 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 7 & 0 & 0 \end{array}\right) =>$$
$$=> X = \begin{pmatrix} x_{2,2} & 0 & -x_{2,2} + x_{3,3} \\ \frac{-7}{4}x_{2,2} + x_{2,3} + \frac{7}{4}x_{3,3} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ 0 & 0 & x_{3,3} \end{pmatrix}$$

5.

$$X = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} -4 & a_1 \\ 4 & a_2 \\ 3 & a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} =>$$

$$\left(\begin{array}{c|c} -4b_1 - 1a_1 & -7 \\ -4b_2 - 4a_1 & -4 \\ -4b_3 + 4a_1 & 8 \\ 4b_1 - 1a_2 & 4 \\ 4b_2 - 4a_2 & -8 \\ 4b_3 + 4a_2 & 4 \\ 3b_1 - 1a_3 & 4 \\ 3b_2 - 4a_3 & -2 \\ 3b_3 + 4a_3 & -1 \end{array}\right) => A = \begin{pmatrix} -4 & 2 + b_3 \\ 4 & 1 - b_3 \\ 3 & \frac{-1}{4} - \frac{3}{4}b_3 \end{pmatrix} \ \& \ B = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} - \frac{1}{4}b_3 & -1 - b_3 & b_3 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beth\, b_3 = 1 : A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \ \& \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Расписав элементы центральной диагонали матрицы, полученной в результате умножения легко убедиться, что $tr(AB) = tr(BA)$ и $tr((AB)^k) = tr((BA)^k)$, тогда:

$$tr(X^2 029) = tr((AB)^{2029}) = tr((BA)^{2029}) = tr\left(\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}^{2029}\right)$$

$$tr\left(\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}^{2029}\right)$$

Обозначим $\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ как Y. Тогда заметим, что по индукции легко доказать, что Y^n имеет вид $\begin{pmatrix} (-9)^n & k \\ 0 & (-7)^n \end{pmatrix}$, а значит и $tr(X^{2029}) = tr(Y^{2029})$ равен в точности $(-9)^{2029} + (-7)^{2029}$.

Второе ИДЗ

Предисловие про прогу. К домаше я прилагаю проект *PyCharm* а так же ссылку на репозиторий *GitHab* с ним — https://github.com/ARS404/Matrix, в котором содержится весь код, который я использовал для решения. Пару слов для работы с кодом:

- Вся основная логика находится в файле *matrix.py*.
- Локальная логика для каждой задачи (где использовался код) содержится в отдельном файле с именем вида *problem{номер задачи}.py*.
- Входные данные для каждой задачи также содержатся в отдельном файле с именем вида *input{номер задачи}.txt*.
- Все пояснения и ограниечения содержатся в документации к *matrix.py* а так же в локальных файлах каждой из задач.

1.

$$\sigma(1,7,5,4,6,3,8,2)\sigma = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&6&3&5&7&1&2&8\end{smallmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&5&1&8&3&7&6&2\end{smallmatrix}\right)^{11}\right)^{161} = t;$$

$$t = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&6&3&5&7&1&2&8\end{smallmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&5&1&8&3&7&6&2\end{smallmatrix}\right)^{11}\right)^{161} =$$

$$= \left(\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&3&1&4&2&5&8\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&8&5&1&2&7&6&4\end{smallmatrix}\right)\right)^{161} = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&8&4&6&7&5&2&1\end{smallmatrix}\right)^{161} =$$

$$= \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&8&4&6&7&5&2&1\end{smallmatrix}\right);$$

$$\sigma\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&1&8&6&4&3&5&2\end{smallmatrix}\right)\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&8&4&6&7&5&2&1\end{smallmatrix}\right);$$

$$\sigma \in \left\{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&7&5&4&8&6&3&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&5&4&7&6&3&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&7&2&1&8&3&6&5\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&8&2&1&7&3&6&5\end{smallmatrix}\right),\right.$$

$$\left.\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&7&1&3&8&2&4&6\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&8&1&3&7&2&4&6\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&3&2&8&1&5&4\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&3&2&7&1&5&4\end{smallmatrix}\right)\right\}.$$

Код использовался для полного перебора вариантов σ.

2.

$$\exists\, A = \begin{bmatrix}1&-3&-3&2\\1&2&-1&-2\\-2&-1&1&3\\3&-2&1&-2\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}-8&-2&-6&-4\\-1&-9&2&8\\-2&-3&5&-7\\2&8&-4&1\end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix}2&1&-2&1\\-1&-3&-3&3\\1&1&3&-2\\2&2&-2&-1\end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\-1&-2&2&-2\\-1&-2&1&-1\\-1&-2&3&-2\end{bmatrix}:$$

$$(X+B)^{-1} = A^{-1}DC^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{-565}{96}&\frac{941}{192}&\frac{1091}{192}&\frac{695}{192}\\ \frac{-187}{48}&\frac{307}{96}&\frac{349}{96}&\frac{233}{96}\\ \frac{-57}{32}&\frac{275}{192}&\frac{317}{192}&\frac{67}{64}\\ \frac{-487}{96}&\frac{815}{192}&\frac{929}{192}&\frac{605}{192}\end{bmatrix};$$

$$X+B = \begin{bmatrix}2&-3&-12&4\\-15&-17&7&28\\12&2&-7&-13\\5&15&-18&-11\end{bmatrix};$$

$$X = \begin{bmatrix}10&-1&-6&8\\-14&-8&5&20\\14&5&-12&-6\\3&7&-14&-12\end{bmatrix}.$$

Код использовался для всех вычислений.

3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^4 + (-3)\lambda^3 + (12)\lambda^2 + (2)\lambda^1 + (-14)$$

$$X = (A^2 - 3A + 2E)^{-2} = \left((A^2 - 3A + 2E)^2\right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 134 & -14 & -54 & -10 \\ 32 & 165 & -26 & 137 \\ 16 & -23 & 48 & -39 \\ -50 & -55 & 90 & -71 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10201}{450} & \frac{483}{50} & \frac{-8881}{150} & \frac{10793}{225} \\ \frac{-112277}{900} & \frac{-1329}{25} & \frac{97787}{300} & \frac{-237647}{900} \\ \frac{26837}{450} & \frac{1271}{50} & \frac{-11686}{75} & \frac{56807}{450} \\ \frac{28129}{180} & \frac{333}{5} & \frac{-24499}{60} & \frac{59539}{180} \end{bmatrix};$$

$$\det X = \frac{1}{3600}.$$

Код использовался для всех вычислений.

4.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 & -5 & 1 & -8 & \mathbf{x} \\ 4 & 4 & -6 & -8 & \mathbf{x} & -9 & 6 \\ \mathbf{x} & 3 & -2 & 8 & 9 & 4 & -2 \\ 9 & -8 & -6 & 8 & 8 & \mathbf{x} & -9 \\ -8 & -6 & 1 & 7 & 9 & 2 & \mathbf{x} \\ 2 & \mathbf{x} & -3 & \mathbf{x} & 4 & -7 & 1 \\ -6 & 6 & \mathbf{x} & 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 0x^7 - 17x^6 + 54x^5 + 2928x^4 + 7958x^3 - 82454x^2 + 147893x + 1568098.$$

Таким образом, коэфицент при x^5 равен 54.

Код использовался для всех вычислений.

5.

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ -8 & -2 & -2 & -2 & 10 \\ 12 & 3 & 3 & 3 & -15 \\ -12 & -3 & -3 & -3 & 15 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{AB}(\lambda) = \lambda^5 + (-7)\lambda^4 + (0)\lambda^3 + (0)\lambda^2 + (0)\lambda^1 + (0) = \lambda^5 - 7\lambda^4$$

Код использовался для всех вычислений.

Третье ИДЗ

1. Для начала запишем данную систему уравнений в виде матрицы и приведём ё к более удобному виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & -4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь подставим вектора v_1 и v_2 в полученную систему:

$$v_1 = (-7, 2, -1, 1, -1, 3):$$

$$\begin{cases} 1 \cdot (-7) + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 0, \\ 0 \cdot (-7) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 0, \\ 0 = 0; \end{cases}$$

$$v_2 = (-8, 2, 3, -2, -1, 1):$$

$$\begin{cases} 1 \cdot (-8) + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0, \\ 0 \cdot (-7) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 0, \\ 0 = 0; \end{cases}$$

Заметим, что в приведённой форме матрица имеет 2 главные переменные и 4 независимые, а значит размерность базиса решений равна 4. Таким образом, нам осталось найти 2 вектора, чтобы с двумя данными они образовывали линейно независимую систему. Выпишем общий вид решения данной системы:

$$x = (-3x_2 + x_4 - x_5 - x_6,\ x_2, x_6 + 2x_5 - 2x_4,\ x_4,\ x_5,\ x_6)$$

Распишем v_1 и v_2 по базису, состоящему из векторов $x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6$, получим:

$$v_1 \mapsto (3, -3, 3, 2),$$

$$v_2 \mapsto (0, 2, -1, -1);$$

Давайте найдём ещё 2 вектора, которые будут решениями, и их значения в независимых переменных будут линейно независимы от значений v_1 и v_2. На самом деле, легко убедится, что вектора $(0, 0, 1, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$ подойдут, давайте проверим:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда искомыми векторами будут $v_3 = (-1, 0, 2, 0, 1, 0)$ и $v_4 = (-1, 0, 1, 0, 0, 1)$ (легкто подставить их в исходную систему и убедиться, что они подходят, также, по выше написанному понятно, что они образуют с v_1 и v_2 линейнонезависимую систему, а значит отбразуют базис системы решенй).

2.

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 14 & 5 & -7 \\ -17 & 14 & 5 & -7 \\ 17 & -14 & -5 & 7 \\ 20 & -14 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Для начала приведём нашу матрицу к более удобному виду:

$$A \sim \begin{pmatrix} 20 & -14 & 10 & 14 \\ 17 & -14 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -42 & 0 & -210 & -98 \\ 0 & -42 & -270 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 21 & 0 & 105 & 49 \\ 0 & 21 & 135 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вот теперь можно найти ФСР (которая также, очевидно, является базисом ядра). Всего у нас получилось 2 свободных переменных, а значит следующие 2 вектора являются ФСР (их линейная независимость очевидна):

$$v_1 = (-5, 0, 1, 0),$$

$$v_2 = (0, -7, 0, 3);$$

Давайте найдём базис образа. Как известно, это бизс линейной оболочки столбцов. Мы уже знаем ранг нашей матрицы (это 2), а значит размерность образа также равна 2, таким образом, нам достаточно выбрать 2 линейнонезависимых столбца, очевидно, первый и второй нам подходят.
Найдём пересечение следующим образом: сперва запишем вектора обоих базисов по столбцам, тогда мы получим вектора, которые расписываются в обоих базисах, то есть те, которые принадлежат пересечению ядра и образа.

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -17 & 14 \\ 0 & -7 & -17 & 14 \\ 1 & 0 & 17 & -14 \\ 0 & 3 & 20 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 0 & -17 & 14 \\ -85 & 119 & 0 & 0 \\ 68 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & -51 & 0 & -42 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 168 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 168 \\ 168 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 168 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, пересечение ядра и образа состоит только из нуля (то есть, базис пересечения пуст), а значит их сумма прямая, и её размерность составляет сумму размерностьей ядра и образа, то есть, равна 4. Таким образом, её базисом, очевидно, будет являться, например набор из векторов:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0), \\ e_2 &= (0,2,0,0), \\ e_3 &= (0,0,3,0), \\ e_4 &= (0,0,0,4). \end{aligned}$$

3. По лемме о стабилизации $Im\phi^{2019} = Im\phi^4$, аналогично $ker\psi^{2019} = ker\psi^4$.

$$\phi^4 = A^4 = \begin{pmatrix} 32 & -16 & 0 & 16 \\ 32 & -16 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & 32 & 32 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\psi^4 = (A^t)^4 = (A^4)^t = \begin{pmatrix} 32 & 32 & 0 & 0 \\ -16 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 32 & -16 \\ 16 & 32 & 32 & -16 \end{pmatrix}$$

Легко понять, что ранг матрицы оператора ϕ^4 равен 2, поэтому базис образа также будет иметь размерность 2, а значит в качестве него можно рассмотреть любые 2 линейно независимые столбца, например, 2 и 3. Чтобы найти базис ядра ψ^4 найдём ФСР соответствующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 32 & 32 & 0 & 0 \\ -16 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 32 & -16 \\ 16 & 32 & 32 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Из этого очевидно следует, что вектора $(-1,1,0,1)$ и $(2,-2,1,0)$ Являются ФСР. Теперь покажем, что базисы ядра и образа наших операторов линейнонезависимы:

$$\begin{pmatrix} -16 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 32 & -16 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Отсюда уже видно, что бизисы действительно линейнонезависимы, тогда мы можем разложить R^4 в прямую суммы. Осталось разложить вектор v. Для этого решим систему, где столбцами будут наши базисные вектора, а в столбце свободных коэффицентов будет сам вектор v, тогда решением будут его координаты. Получим, что

$$v = -4(-1,-1,0,0) + (-1)(0,1,2,-1) + 5(-1,1,0,1) + 5(2,-2,1,0).$$

4. Заметим, что характеристический многочлен данной матрицы равен $(\lambda-1)^2\lambda^2$, то есть, $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$. Теперь рассмотрим разложение нашего знуляющего многочлена на 2 взаимнопростых: $p = (\lambda-1)^2$ и $q = \lambda^2$. Тогда можно применить известный факт, что $Im\ q(\phi) = ker\ p(\phi)$. При этом, $ker\ p(\phi) = V^1$ (потому что $ker\ p(\phi)$ стабилизируется со втогорой степени) и $Im\ q = Im\phi^2$. Таким образом, очевидно, что $\psi = \phi^2$ подходит.
*Для подсчёта характеристического многочлена я использовл тот же код, который прикладывал к прошлому БДЗ (ссылка на *GitHab* с ним — https://github.com/ARS404/Matrix).

5. Пусть наш оператор задан матрицей $A_\phi{}'$, тогда мы заем, что его представление в новом базисе имеет вид $C^{-1}A_\phi C$, где C — матрица перехода к новому базису. Для начала подставим в это равенство первый базис (матрица перехода к нему, очевидно, равна «склеенным» столбцам из самого базиса):

$$A_\phi{}' = C^{-1}AC;$$
$$CA_\phi{}' = AC.$$

Тогда можно подставить в это равенство произвольный вектор (домножить на него справа). Давайте в качестве него возьмём вектор $v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, тогда столбцы с ошибками занулятся, получим:

$$CA_\phi{}'v = A_\phi Cv;$$
$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\1 & 2 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} \times A_\phi{}' \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = A_\phi \times \begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\1 & 2 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\1 & 2 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} \times A_\phi{}' \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = A_\phi \times \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\1 & 2 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = A_\phi \times \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}7\\3\\2\end{pmatrix} = A_\phi \times \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};$$

Осталось повторить эту операцию для второго базиса (сперва с $v = (0,1,0)$, затем с $v = (0,0,1)$):

$$\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\3 & 2 & 3\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix} \times A_\phi{}'' \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = A_\phi \times \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}-12\\1\\4\end{pmatrix} = A_\phi \times \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\3 & 2 & 3\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix} \times A_\phi{}'' \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = A_\phi \times \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}-15\\-3\\4\end{pmatrix} = A_\phi \times \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix};$$

Теперь склеим всё это дело в одну матрицу, получим:

$$A_\phi \times \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -12 & -15\\3 & 1 & -3\\2 & 4 & 4\end{pmatrix};$$
$$A_\phi = \begin{pmatrix}6 & -9 & 4\\-9 & 5 & 16\\-4 & 4 & 16\end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы нашли искомую матрицу A_ϕ.
*Для подсчёта характеристического многочлена я использовл тот же код, который прикладывал к прошлому БДЗ (ссылка на *GitHab* с ним — https://github.com/ARS404/Matrix).

Четвёртое ИДЗ

Для начала стоит сказать, что для всех операций с матрицами (арифметические действия, поиск решений и ФРС, нахождение хар. многочлена, взятие ранга и определителя и тд.) я использовал свой код, вот ссылка на гитхаб с ним
https://github.com/ARS404/Matrix

1. Сразу скажем, что у матрицы будут задавать один и тот же линейный оператор тогда и только тогда, когда их ЖНФ совпадают. Для поиска ЖНФ мы хотим воспользоваться известным нам алгоритмом (номер 32), поэтому проверим, что у всех 3 матриц только одно собственное значение. посчитаем их характеристические многочлены:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda+4)^4;$$
$$\chi_B(\lambda) = (\lambda+4)^4;$$
$$\chi_C(\lambda) = (\lambda+4)^4.$$

Таким образом, мы можем применить известный нам алгоритм и получить:

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -9 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -5 & 4 \\ -1 & -6 & 1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & -6 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ -7 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрицы A и B задают один и тот же линейный оператор, а C — другой.

2. Воспользуеся общим алгоритмом поиска ЖНФ (номер 27). Дня начала найдём собственные значения (хар. многочлен посчитали прогой):

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^6 - 22\lambda^5 + 201\lambda^4 - 976\lambda^3 + 2656\lambda^2 - 3840\lambda + 2304.$$

Тогда собственные значения это:
$\lambda_1 = 4$ (кратности 4);
$\lambda_3 = 3$ (кратности 2).
Осталось посчитать количество клеток каждого размера для обоих собственных значений. Получим, что для 4 у нас 2 клетки размера 2, а для 3 — одна клетка размера 2, таким образом, ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Теперь будем искать жорданов базис (страдать). Пусть он состоит из вектор-столбцов $e_1, \dots, e_6$. Для начала для первой клетки (с тройкой). Для начала мы хотим найти такой e_2, что $(A-3E)^2 e_2 = 0$, и $(A-3E)e_2 \neq 0$. Поищем e_2 среди решений $(A-3E)^2$:

$$(A-3E)^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-3E) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, в качестве e_2 и e_1 можно взять $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ соответственно. К e_4 и e_6 мы видвинем аналогичные требования (только с собственным значением 4).

$$(A-4E)^2\begin{pmatrix}-2\\4\\8\\0\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad (A-4E)\begin{pmatrix}-2\\4\\8\\0\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\16\\16\\16\end{pmatrix}$$

$$(A-4E)^2\begin{pmatrix}-2\\4\\8\\0\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad (A-4E)\begin{pmatrix}-2\\4\\8\\0\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\40\\24\\20\end{pmatrix}$$

Таким образом мы нашли оставшиеся базисные вектора. Осталось лишь проверить, что эти вектора реально линейно независимы. Для этого склеим их в матрицу и посчитаем её ранг. Склеили, посчитали, порадовались. Таким образом, искомый базис равен

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\16\\16\\16\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\4\\8\\0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\20\\24\\20\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\4\\8\\0\\0\\4\end{pmatrix}.$$

3. Пусть $G=(g_1|g_2|g_3)$ и $F=(f_1|f_2|f_3)$, тогда $A_\phi=G^{-1}AG$ (в исходном базисе). Аналогично $B_\psi=F^{-1}BF$. Давайте посчитаем эти матрицы:

$$A_\phi=\begin{pmatrix}33&75&-102\\-30&-75&105\\-11&-30&43\end{pmatrix},\quad B_\psi=\begin{pmatrix}-33&75&-75\\-28&62&-60\\-14&31&-30\end{pmatrix}$$

Матрица композиции это произведение матриц, тогда матрица $\phi\circ\psi$ в стандартном базисе равна $A_\phi B_\psi$ или $\begin{pmatrix}-1761&3963&-3915\\1620&-3645&3600\\601&-1352&1335\end{pmatrix}$

Давайте теперь найдём ядра наших операторов. Как известно, базис ядра совпадает с ФСР:

для A_ϕ это $\begin{pmatrix}-5\\9\\5\end{pmatrix}$,

для B_ψ это $\begin{pmatrix}25\\20\\9\end{pmatrix}$. Очевидно, что эти вектора линейно независимы, а значит и ядра A_ϕ и B_ψ также линейно независимы, то есть базис суммы ядер это объединение базисов ядер, например

$$\begin{pmatrix}-5\\9\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}25\\20\\9\end{pmatrix}.$$

Мы уже понял, что ранги наших матриц равны 2, а значит количество линейно независимых столбцов у обоих матриц равно 2, тогда образы первого и второго оператора равны соответственно

$$<\begin{pmatrix}33\\-30\\-11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}75\\-75\\-30\end{pmatrix}>,\quad <\begin{pmatrix}-33\\-28\\-14\end{pmatrix},\begin{pmatrix}75\\62\\31\end{pmatrix}>$$

Теперь воспользуемся алгоритмом для нахождения базиса пересечения (номер 11). Для начала найдем ФСР «склеенных» базисов наших образов. Получим $\begin{pmatrix} 135 \\ -72 \\ 2960 \\ 1315 \end{pmatrix}$. Тогда искомый базис равен

$$\begin{pmatrix} -97680 \\ -82880 \\ -41440 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 98625 \\ 81530 \\ 40765 \end{pmatrix}.$$

4. Для начала поймём, что при сопряжении A_t произвольной невыражденной матрицей B множество коммутирующих с ней матриц не меняется. В самом деле:

$$\begin{gathered} {A_t}' = B^{-1} A_t B; \\ {A_t}' X' = X' {A_t}' <=> B^{-1} A B X' = X' B^{-1} A B <=> \\ <=> A_t \left(B^{X'} B^{-1} \right) = \left(B X' B^{-1} \right) A_t; \\ B X' B^{-1} \in L_t => \exists B X' B^{-1} = X : \\ <=> A_t X = X A_t. \end{gathered}$$

При этом X диагонализуема тогда и только тогда, когда диагонализуема X' так как при сопряжении диагонализуемость не меняется. Таким образом, при сопряжении A_t произвольной матрицей B все матрицы из L_t будут сопряжены B.
Теперь воспользуемся алгоритмом, чтобы найти ЖНФ A_t.

$$\chi_{A_t}(\lambda) = (\lambda + 3)^2 (2 - \lambda)^3$$

Таким образом, собственные значения это -3 (кратности 2) и 2 (кратности 3). Теперь рассмотрим ЖНФ A_t в зависимости от значений параметра t.

- $t = 0$ — $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $t = -1$ — $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $t = 1$ — $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $t \notin \{-1, 0, 1\}$.
  Тут интереснее, придётся ручками считать ранги нужных матриц (мой код не умеет в матрицы с переменными), так что начнём.
  Для начала определимся с количествок клеток размера 3 для двойки, оно равно $rk(A_t - 2E)^4 + rk(A_t - 2E)^2 -$

$2rk(A_t-2E)^3$ или

$$rk\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&125&0&0&-100\\0&-25(t+1)&0&0&15(t+1)\\0&5(t+1)&0&0&23-27t\\0&0&0&0&125\end{pmatrix}+rk\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&25&0&0&-10\\0&-5(t+1)&0&0&t+1\\t&t+1&0&0&-5(1-t)\\0&0&0&0&25\end{pmatrix}-$$

$$-2rk\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&-125&0&0&75\\0&25(t+1)&0&0&-10(t+1)\\0&-5(t+1)&0&0&26t-24\\0&0&0&0&-125\end{pmatrix}=2+3-4=1.$$

Таким образом, все для 2 есть только одна клетка размера 3.
разберёмся с клетками размера 1 для 3. Их количество равно $rk(A_t+3E)^2+rk(A_t+3E)^0-2rk(A_t+3E)^1$ или

$$rk\begin{pmatrix}25&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\10t&5(t+1)&25&0&t+1\\t&t+1&10&25&5(1-t)\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}+5-2rk\begin{pmatrix}5&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\t&t+1&5&0&0\\0&0&1&5&t-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=3+5-8=0.$$

Это значит, что клеток размера 1 для -3 нет, тогда все клетки размера 2. В итоге мы получили, что в этом случае ЖНФ имеет вид $\begin{pmatrix}-3&1&0&0&0\\0&-3&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$

Таким образом, у нас есть 2 вариатна того, как может выглядеть ЖНФ от A_t. Осталось разобраться с тем, какие размерности будут у пространств, которые пораждаются каждой из возможных форм.

- Для начала рассмотрим вариант $t=0$. Найдём все такие матрицы X, что они коммутируют с A_t (тоже самое, что коммутируют с её ЖНФ (дялее A')):

$$\exists\, X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&x_{44}&x_{45}\\x_{51}&x_{52}&x_{53}&x_{54}&x_{55}\end{pmatrix}:$$

$$A'X-XA'=0=$$

$$=\begin{pmatrix}x_{21}&x_{22}-x_{11}&x_{23}-5x_{13}&-x_{13}-5x_{14}+x_{24}&x_{25}-5x_{15}\\0&-x_{21}&-5x_{23}&-x_{23}-5x_{24}&-5x_{25}\\5x_{31}+x_{41}&-x_{31}+5x_{32}+x_{42}&x_{43}&x_{44}-x_{33}&x_{45}\\5x_{41}&5x_{42}-x_{41}&0&-x_{43}&0\\5x_{51}&5x_{52}-x_{51}&0&-x_{53}&0\end{pmatrix};$$

так как эта матрица должна равняться нулевой, то все x_{ij}, которые в какой-то клетке стоят в одиночестве автоматом приравниваются к нулю, тогда получим:

$$\begin{pmatrix}0&x_{22}-x_{11}&0-5x_{13}&-x_{13}-5x_{14}+x_{24}&0-5x_{15}\\0&0&0&0-5x_{24}&0\\5x_{31}+0&-x_{31}+5x_{32}+x_{42}&0&x_{44}-x_{33}&0\\0&5x_{42}-0&0&0&0\\0&5x_{52}-0&0&0&0\end{pmatrix};$$

для «исправленной» матрицы можно проделать тоже самое:

$$\begin{pmatrix}0&x_{22}-x_{11}&0&0-5x_{14}+0&0\\0&0&0&0&0\\0&0+5x_{32}+0&0&x_{44}-x_{33}&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix};$$

ну всё, осталось совсем немного:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{22}-x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44}-x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако, стоит заметить, что переменные $x_{12}, x_{34}, x_{35}, x_{54}, x_{55}$ сократились при подсчёте коммутатора, а значит они могут быть любыми.
Значит для того, чтобы X коммутировала с A_t необходимо и достаточное, чтобы X имела вид

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & h \end{pmatrix}.$$

получился какой-то кошмар, но делать нечего, воспользуемся алгоритмом 26, чтобы понять, при каких значениях переменных данная матрица диагонализируема.

1. $\chi_X(\lambda) = (a-\lambda)^2(c-\lambda)^2(h-\lambda)$;
2. характеристический многочлен удалось разложить на линейные множители, так что можно продолжать;
3. теперь надо сделать оценки на размеры нужных ФСР:
   – для h: $X - hE = \begin{pmatrix} a-h & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-h & d & e \\ 0 & 0 & 0 & c-h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 \end{pmatrix}$, при этом мы хотим, чтобы ранг такой матрицы не превосходи 4 (иначе X не диагонализируема), вполне очевидно, что это условие выполнено всегда (или мы можем сократить 4 и 5 строчку, или она из них уже нулевая).
   – для c: $X - cE = \begin{pmatrix} a-c & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & h-c \end{pmatrix}$, при этом ранг не должен превосходить 3. Заметим, что для этого достаточно, чтобы $b = d = e = f = 0$.
   – для a: $X - aE = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & d & e \\ 0 & 0 & 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & h-a \end{pmatrix}$, аналогично, для диагонализируемости необходимо, чтобы ранг не превосходил 3, а для этого достаточно, чтобы $b = d = e = f = 0$.

Таким образом, мы получили, что искомое пространство содержит в себе пространство матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$
Размерность этого подпространства, очевидно, равна 3, а значит и размерность всего искомого пространства при $t = 0$ хотя бы 3.

- Настало время случая $t \neq 0$. Введём аналогичные обозначения, и получим:

$$A'X - XA' = 0 =$$
$$\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22}-x_{11} & x_{23}-5x_{13} & -x_{13}-5x_{14}+x_{24} & -x_{14}-5x_{15}+x_{25} \\ 0 & -x_{21} & -5x_{23} & -x_{23}-5x_{24} & -x_{24}-5x_{25} \\ 5x_{31}+x_{41} & -x_{31}+5x_{32}+x_{42} & x_{43} & x_{44}-x_{33} & x_{45}-x_{34} \\ 5x_{41}+x_{51} & -x_{41}+5x_{42}+x_{52} & x_{53} & x_{54}-x_{43} & x_{55}-x_{44} \\ 5x_{51} & 5x_{52}-x_{51} & 0 & -x_{53} & -x_{54} \end{pmatrix};$$

вновь займёмся зануление одиноких переменных:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{22}-x_{11} & 0-5x_{13} & -x_{13}-5x_{14}+x_{24} & -x_{14}-5x_{15}+x_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0-5x_{24} & -x_{24}-5x_{25} \\ 5x_{31}+x_{41} & -x_{31}+5x_{32}+x_{42} & 0 & x_{44}-x_{33} & x_{45}-x_{34} \\ 5x_{41}+0 & -x_{41}+5x_{42}+x_{52} & 0 & 0-0 & x_{55}-x_{44} \\ 0 & 5x_{52}-0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

возникли новые одинокие переменные, занулим их:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{22}-x_{11} & 5x_{13} & -x_{13}-5x_{14}+0 & -x_{14}-5x_{15}+x_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0-5x_{25} \\ 5x_{31}+0 & -x_{31}+5x_{32}+x_{42} & 0 & x_{44}-x_{33} & x_{45}-x_{34} \\ 0 & 0+5x_{42}+0 & 0 & 0 & x_{55}-x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{22}-x_{11} & 0 & 0-5x_{14} & -x_{14}-5x_{15}+0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0+5x_{32}+0 & 0 & x_{44}-x_{33} & x_{45}-x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55}-x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{22}-x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44}-x_{33} & x_{45}-x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55}-x_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

В этом случае некоторые переменные также сократились при подсчёте коммутатора, а именно x_{12}, x_{35}, а это значит, что для того, чтобы X коммутировла с A_t при $t \neq 0$ необходимо и достаточно, чтобы X имела вид

$$\begin{pmatrix} a & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & e \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Тут нам снова пригодится алгоритм 26.

1. $\chi_X(\lambda) = (a-\lambda)^2(b-\lambda)^3$;
2. к сожалению, хар. многочлен разложился на линейные множители, так что придётся продолжать;
3. сделаем оценки на размеры нужных ФСР:
   (a) сразу заметим, что если $a = b$, то необходимо, чтобы все остальные переменные равнялись 0 (так как при $a = b = d$ хар. многочлен будет иметь вид $(d-\lambda)^5$, а это значит, что ранг $X - dE$ должен равняться 0, из чего следует, что все остальные переменные должны быть равны 0). Далее считаем, что $a \neq b$;
   (b) для a: $X - aE = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & c & e \\ 0 & 0 & 0 & b-a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$, при этом нам нужно, чтобы ранг не превосходил 3. Это возможно только при $d = 0$.
   (c) для b: $X - bE = \begin{pmatrix} a-b & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, при этом ранг не должен превосходить 2, что возможно только при $c = e = 0$.

   Так мы получили необходимое и достаточное условие на то, чтобы X была диагонализируема ($d = c = e = 0$), осталось оценить размерность пространства таких матриц. Вполне очевидно, что она равна 2.

В итоге мы получили, что размерность искомого пространства превосходит 2 только при $t = 0$, а значит максимум достигается только при этом значении.

5. Начнём с того, что найдём базис левого ортогонального дополнения к $<v>$. Согласно алгоритму 36 это можно сделать найдя ФСР системы $v^t\beta^t x = 0$, сделаем это:

$$\begin{pmatrix}5 & 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & -3 & 2\\ 5 & -3 & 5 & 6\\ -3 & 2 & 6 & -8\end{pmatrix}x = 0;$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}x = 0.$$

Тогда ФСР (которая будет являться базисом левого ортогонального дополнения) будет иметь вид

$$f_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Давайте теперь рассмотрим базис равный (v, f_1, f_2, f_3) (в том, линейной независимости этого множества очень легко убедиться), тогда матрицей перехода к этому базису будет $A = (v|f_1|f_2|f_3)$. Найдём вид B' матрицы B в этом базисе:

$$B' = A^tBA = \begin{pmatrix}6 & 4 & -2 & -3\\ -21 & -14 & 4 & 8\\ 41 & 18 & 5 & -13\\ 1 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Теперь симметричным методом Гаусса приведём B' к диагональному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}6 & 4 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -21 & -14 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 41 & 18 & 5 & -13 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 10 & -14 & -3 & 1 & 0 & 0 & -6\\ -21 & -14 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 41 & 18 & 5 & -13 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 10 & -14 & -3 & 1 & 0 & 0 & -6\\ -21 & -14 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -10 & 13 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 10 & -14 & -3 & 1 & 0 & 0 & -6\\ -21 & -14 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -11 & 15 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 10 & -14 & -3 & 1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & -35 & 46 & 8 & 0 & 1 & 0 & 21\\ 0 & -11 & 15 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 10 & -14 & -3 & 1 & 0 & 0 & -6\\ 0 & -5 & 4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -5\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -6 & -5 & 7 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -5\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -5\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -9 & -5 & 28\\ 0 & 0 & -6 & -5 & 7 & 2 & 0 & 0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -5\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -9 & -5 & 28\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 56 & 30 & -168\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -5\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 17 & 47 & 25 & -140\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 56 & 30 & -168\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 18 & 49 & 26 & -145\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 17 & 47 & 25 & -140\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 56 & 30 & -168\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & -1 & 0 & 0 & 34 & 94 & 50 & -279\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 18 & 49 & 26 & -145\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 17 & 47 & 25 & -140\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 56 & 30 & -168\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 16 & 45 & 24 & -134\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 18 & 49 & 26 & -145\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 17 & 47 & 25 & -140\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 56 & 30 & -168\end{array}\right)$$

Таким образом, диагональный вид будет равен левой части полученной матрицы, а склеенные базис-столбцы будут равны произведению A и правой части полученной матрицы, то есть

$$\begin{pmatrix}98 & 279 & 149 & -833\\ 67 & 191 & 102 & -570\\ 1 & 2 & 1 & -6\\ -14 & -41 & -22 & 123\end{pmatrix}$$

Глава 2

Алгебра на первом курсе

Домашки

Первое БДЗ

1. Для начала заметим, что по определению $ord(g)$ верно, что $g^x = g^y <=> x \underset{m}{\equiv} y$. Действительно, пусть $y = x + am$, тогда $g^y = g^{am} \times g^x = (g^m)^a \times g^x = g^x$. Не сложно проделать аналогичное и в другую сторону, поэтому далее считаем, что все степени меньше m. Также скажем, что g^i является обратным (который единственный) к g^{m-i}, что очевидно. В силу того, что обратный элемент в группе единственный можно утверждать, что нам нужно найти минимальное такое n, что $kn \vdots m$. Очевидно, что такое n равно $\frac{m}{(k,m)}$.

2. Сперва скажем, что в силу того, что между элементами $G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}_{0+}\}$ сториться биекция или сюрьекция, то G конечна или счётна. Теперь рассмотрим $H \subseteq G$. Найдём в H элемент наименьшей ненулевой степени (в силу вышесказанного это становится очевидно). Пусть это некотороый $h = g^a$ (a — наименьшее большее нуля). Покажем, что $H = \{h^x \mid x \in \mathbb{Z}_{0+}\}$. Во-первых, для элементов вида $h^x = g^{ax}$ очевидно, что они включены в H (так как включен элемент h). Во-вторых, элеменнты вида $g^b \mid b \not\vdots\, a$ не лежат в H. Предположим обратное, тогда для 2 произвольных элементов g^l, g^r верно, что элемент $g^{l\%r}$ также лежит в H, тогда по элгоритму Евклида верно, что в H лежит $g^{(l,r)}$. Вернувшись к предположению о том, что в H нашёлся такой элемент $g^b \mid b \not\vdots\, a$, поймём, что тогда в H лежит $g^{(a,b)}$, и при этом $a > (a, b)$, что приводит к противоречию с нашим предположением. Таким образом, мы показали, что любая произвольная подгруппа $H \subseteq G$ также является циклической.

3. В начале заметим, что группа чётного порядка содержит в себе конечное число элементов, среди которых нечётное число отличных от e. Тогда можно рассмотреть произвольное разбиение G на пересекающиеся только по e подгруппы образованные как $<g_i>$, для очередного g_i, который ещё не содержится ни в какой подгруппе. Таким образом, мы получим хотя бы одну такую подгруппу G_k, что $|G_k| = m \vdots 2$. Тогда заметим, что $e = \left(g_k^{m/2}\right)^2 = a^2$ для некоторого $a \in G$. Что и требовалось доказать.

4. Для начала рассмотрим праве смежные классы. Легко понять, что класс однозначно определяется тем, куда попала единица. В самом деле, внутри одного класса единица всегда на одном месте, более того, остальные цифры перебирают все возможные перестановки (так как все они присутствуют в H). Таким образом, всего существует n правых смежных классов, каждый из которых однозначно задаётся положением единицы. Абсолютно аналогично определяются и левые смежные классы.

Второе БДЗ

1. Давайте рассмотрим следующие группы:

- G — группа симметрий квадрата.
- $H_1 \subset G$ — группа, порождённая симметриями квадрата относительно его диагоналей (то есть в группе 4 элемента: две симметрии относительно диагоналей, симметрия относительно центра и тождественное преобразование).
- $H_2 \subset H_1$ — группа, порождённая симметрией относительно одной из диагоналей квадрата (в этой группе всего 2 элемента: одна симметрия и тождественное преобразование).

H_1 абелева, поэтому нормальность H_2 в H_1 очевидна, также несложно убедится в нормальности H_1 в G. Осталось показать, что H_1 является нормальной в G. Это очевидно, так как симметрии относительно диагоналей сопряжены в G повотором на $90°$.

2. Для начала скажем, что ${h_2}' = h_1 h_2 h_1^{-1}$ лежит в H_2 (как следствие нормальности H_2). Тогда получим:

$$h_1 = {h_2}' h_1 h_2^{-1};$$
$$h_1 = {h_2}' h_2^{-1} h_2 h_1^{-1} h_2^{-1};$$
$$h_1 = {h_2}' h_2^{-1} {h_1}';$$

при этом ${h_1}'$ пренадлежит H_1 (как следствие нормальности H_1);

$$h_1 {h_1}'^{-1} = {h_2}' h_2^{-1}.$$

Легко заметить, что левое слагаемое лежит в H_1, а правое — в H_2. Тогда, из условия становится очевидно, что оба равны e, а значит ${h_1}' = h_1$ и ${h_2}' = h_2$. Теперь из равенства $h_1 h_2 h_1^{-1} = {h_2}' = h_2$ напрямую следует желаемое. Что и требовалось доказать.

3. Очевидно, что все диагональные матрицы лежат в центре GL. Теперь рассмотрим произвольную недиагональную матрицу A и покажем, что она не лежит в центре.
Предположим обратное, то есть, $\forall B \in GL : BA = AB$. Тогда есть такие i, j ($i \neq j$), что в A ячейка i, j ненулевая. Тогда в качестве матрицы B возьмём единичную матрицу с единицей в ячейке i, j (очевидно, что её определитель отличен от нуля). Тогда легко убедиться, что $AB \neq BA$, в самом деле, $AB_{i,j} = A_{i,i} + A_{i,j}$, а $BA_{i,j} = A_{i,i}$. Противоречие, а значит никакая недиагональная матрица не может лежать в центре GL. Что и требовалось доказать.

4. Предположим обратное, чтогда найдутся два такие собственные подгруппы $(\mathbb{Z}, +)$ A и B, что существует некоторый изоморфизм $\phi : \mathbb{Z} \mapsto A \times B$. Для произвольного $z \in \mathbb{Z}$ верно $z = \sum_{i=1}^{z} 1$. Тогда, пусть $\phi(1) = (a, b)$, а значит

$$\phi(z) = \phi(\sum_{i=1}^{z} 1) = \sum_{i=1}^{z} \phi(1) = \sum_{i=1}^{z} (a, b).$$

Однако, в таком случае образ, что ядро ϕ состоит только из элементов вида (an, bn) (для целого n), но тогда, если $a \neq 0$, то $(a, b + b) \notin Im(\phi)$, а, если $b \neq 0$, то $(a + a, b) \notin Im(\phi)$. Значит, если искомый гомоморфизм существует, то он переводит единицу в $(0, 0)$, а тогда по выше сказанному любой элемент $Im(\phi) = (0, 0)$, но тогда и A и B были несобственными подгруппами, что протеворечит условию, следовательно такое невозможно.

Третье БДЗ

1. Для начала заметим, что вектор $(2, 2, \dots, 2)$ будет являться базисом B (что очевидно).
Теперь рассмотрим в A множество векторов $(1, 1, \dots, 1) \cup \{a_i | i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$, где в a_i i-тый элемент равен 1, а остальные — нули. Легко заметить, что для A это множество векторов является порождающим (в самом деле, если из первого вычесть все остальные, то получится стандартный базис). Также это множество является линейно независимым, так как в любой линейной комбинации с ненулевым коэффициентом при $(1, 1, \dots, 1)$ последний элемент в результате будет отличен от нуля, а в случае, когда этот коэффициент 0, для любого ненулевого коэффицента при a_i верно, что i-тый элемент результата будет отличен от 0. Значит выбранное множество векторов является базисом в A. При этом $2(1, 1, \dots, 1)$ является бизисом в B, а значит наши базисы согласованы.

2. Заметим, что $\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда по теореме о согласованных базисах $A/B \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$.

3. рассмотрим группу $(\mathbb{Q}, +)$. Как известно это именно абелева группа, и её мощность счётна. Докажем, что эта группа не является конечно порождённой.
Предположим обратное, тогда существует некоторое подмножество этой группы $S = \{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\}$ такая, что $\forall J \in \mathbb{Q}\ \exists \{x_i | i \in \{1, 2, \dots, m\}\} : J = \sum_{i=0}^{m} \frac{a_{x_i}}{b_{x_i}}$. В силу конечности S и бесконечности числа простых чисел можно найти такое простое p, что оно будет взаимнопросто со всеми b_i. Тогда, по нашему предположению $\frac{1}{p}$ представима в виде конечной суммы элементов из S, однако знаменатель такой суммы может содержать только простые, которые содержатся в b_i. Противоречие, а значит $(\mathbb{Q}, +)$ не является конечно порождённой группой. Что и требовалось доказать.

4. Для начала скажем, что в любом подгруппе $\mathbb{R}^n$ существует базис над $\mathbb{R}$ размера $m \leqslant n$. Очевидно, что для любого вектора с коодринатами $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ найдётся вектор, $(\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\})$, где $\{x\}$ — целая часть x. Тогда все такие вектора лежат в фиксированном конечном параллелепипеде размера 1, тогда по условие дискретности их конечное число. Заметим, что множество всех таких векторов будет являться порождающим для L над R, также в силу его конечности в нём найдётся коненчый базис над $\mathbb{Z}$. При этом он также будет являться базисом над $\mathbb{R}$, а значит, его размер не будет превосходить n. Что и требовалось доказать.

Четвёртое БДЗ

1. Начнём с того, что найдём порядки элементов в $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4$:

- $\mathbb{Z}_2$:
  - $ord(0) = 1$;
  - $ord(1) = 2$;
- $\mathbb{Z}_3$:
  - $ord(0) = 1$;
  - $ord(1) = 3$;
  - $ord(2) = 3$;
- $\mathbb{Z}_4$:
  - $ord(0) = 1$;
  - $ord(1) = 4$;
  - $ord(2) = 2$;
  - $ord(3) = 4$.

Тут мы пользовались известным фактом о том, что в $\mathbb{Z}_n$ $ord(x) = \frac{n}{(n,x)}$.

Теперь посчитаем количество элементов подряка 2 в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$. Для этого и каждой группы надо выбрать элемент порядка 2 или 1, но при этом хотябы один с порядком 2 должен присутствовать, тогда получим, что таких ровно $2^2 - 1 = 3$.

Разберёмся с количеством элементов порядка 3. В $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_4$ можно взять только по 1 элементу, а в $\mathbb{Z}_3$ — 2, тогда общее количество равно 2.

Для порядка 4. В $\mathbb{Z}_2$ подойдёт любой, в $\mathbb{Z}_4$ можем взять 2 элемента (1 или 3), в $\mathbb{Z}_3$ — только 0, итого получим, что у нас 4 варианта.

Для 6. В $\mathbb{Z}_2$ подходит любой, в $\mathbb{Z}_3$ мы обязаны взять 1 или 2, а в $\mathbb{Z}_4$ подходят 1 и 2. Однако мы также посчитали случай, когда в $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_4$ выбраны 1, однако такой случай не подходит, так как итоговый порядок будет равен 3. Итого получим, что вариантов $2^3 - 2 = 6$.

Тут мы очень активно пользовлись тем фактом, что порядок «собираемого» элемента в итоговой группе будет равен НОД порядков его частей в своих группах.

2. Как известно, любую абелеву конечнопорождённую группу (A) можно разложить в прямую сумму вида

$$A \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_n^{k_n}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}.$$

Согласно этому утверждению данная в условии группа G представляется в виде $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ или $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{5^2}$.

Рассмотрим первый случай. Докажем, что если $(p_1, p_2) = 1$, то группа $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2}$ будет циклической. Для этого просто покажем, что элемент $(1, 1)$ окажется образующим. Для этого просто заметим, что $p_1(1, 1) = (0, p_1)$, а $p_2(1, 1) = (p_2, 0)$. В силу взаимнопростости p_1 и p_2 получим, что любой элемент вида (x, y) можно получить (по алгоритму Евклида) в виде $a(0, p_1) + b(p_2, 0) = (ap_1 + bp_2)(1, 1)$ (все числа рассматриваем п осоответствующим модулям). Таким образом мы доказали, что элемент $(1, 1)$ будет являться образующим, что в силу конечности группы равносильно тому, что $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2}$ циклична, но это протеворечит условиям, а значит такой вариант невозможен.

Таким образом остался только один вариант в котором $G \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$.

Займёмся поиском подгрупп порядка 15. Такая группа будет иметь вид $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$, что по выше написанному равносильно тому, что она будет циклична. При этом в $\mathbb{Z}_n$ ровно $\phi(n)$ образующих элементов (что очевидно, так как только они имеют порядок n). Более того, каждый из таких элементов будет порождать какую-то группу порядка 15 (ровно 1), и в каждой группе будет $\phi(15)$ таких элементов. Отсюда следует, что искомых групп будет ровно число элементов порядка 15 (в $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$) делить на $\phi(15)$, что равно $\frac{2 \cdot 5 \cdot 5 - 2}{2 \cdot 4} = \frac{48}{8} = 6$. Тут число элементов порядка 15 мы посчитали также, как и в предыдущей задаче.

Теперь посчитаем количество групп порядка 5. Для начала заметим, что в такой подгруппе могут находится только элементы порядка 1 и 5 (так как порядок элемента должен делить порядок группы). При этом порядок 1 может иметь только нулевой элемент, а значит оставшиеся 4 в каждой группе будут иметь порядок 5. Всего элементов порядка 5 ровно 24 (в $\mathbb{Z}_3$ можем взять только 0, в $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ любой, кроме $(0, 0)$). При этом каждый из таких элементов попадёт ровно в 1 из искомых подгрупп. Таким образом подгрупп порядка 5 ровно $\frac{24}{4} = 6$.

3. Обозначим вектор из условия $(32, 31, 0)$ за v. Для начала выразим v через базис B в рациональных числах. В качестве базиса можем взять его порождающие из условия (в самом деле, их линейная независимость очевидна). Для самого выражения нам пригодится алгоритм Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 32 \\ 2 & 10 & 31 \\ -100 & 120 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -12 & -30 \\ 2 & 10 & 31 \\ 0 & 650 & 1550 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -12 & -30 \\ 2 & 10 & 31 \\ 0 & -4 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, мы получили, что v не выражается через базис B в натуральных числах, в то же время $2v$ выражается, а значит порядок смежного класса будет равен 2.

4. Для начала поймём, что ранги групп A и B равны тогда и только тогда, когда определитель матрицы из условия (далее C) отличен от нуля. В самом деле, это очевидный факт из линейной алгебры. Далее просто будем считать, что ранги A и B равны и $det(C) \neq 0$.

Теперь воспользуемся теоремой со согласованных базисах, из неё получим, что бизас B можно получить, как базис A, домноженный на диагональную матрицу с элементами u_i на диагонали (дфлее D). Также мы знаем, что

$$A/B \cong \mathbb{Z}_{|u_1|} \oplus \mathbb{Z}_{|u_2|} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{|u_n|}.$$

А значит, $|A/B| = |u_1 u_2 \ldots u_n|$. С другой стороны тамуже самомму равен и определитель матрицы D. Осталось только понять, что от произвольного базиса в A можно пререйти к согласованному базису при помощи домножения на некоторую матрицу, с определителем 1, аналогично и для B (в обратную сторону), а тогда $C = XDY$, где $det(X) = det(Y) = 1$, следовательно $det(C) = det(D)$. таким образом мы получили желаемое равенство.

Пятое БДЗ

1. Сперва обозначим проивольную мартицу из $GL_2(\mathbb{R})$ за G при этом G будет иметь вид $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$; $a, c \neq 0$.

Теперь покажем, что для G будем существовать ровно 3 орбиты.

1. $G\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.
   В этом случае эквивалентность очевидна.
2. $\left\{\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$; $x, y \neq 0$.
   $G\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \left(G\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$.
3. $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}\right\}$; $x, g \neq 0$.
   Для доказательства эквивалентности 2 элементов достаточно просто подобрать такую матрицу $X \in GL_2(\mathbb{R})$, что $X\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$. Представим X как $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$; $a, c \neq 0$, тогда $f = cy$ и $g = ax + by$. Мы получили систему линейных уравнений для a, b, c, совсем нетрудно убедится, что она всегда имеет решенее. Таким образом мы доказали, что любые 2 элемента в рассмотренном множестве эквивалентны, а значит это орбита.

Также расположенее нулей в столбцах в каждом варианте гарантирует нам, что рассмотренные подмножества не пересекаются.

Теперь найдём $St\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $St\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $a, c \neq 0 => a = 1 => St\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$; $c \neq 0$.
- $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $a, c \neq 0 => a + b = 1;\ c = 1 => St\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 0 & a \end{bmatrix}$; $a \neq 0$.

2. Ну это совсем просто, давайте запишем определенее того, что элемент $g \in G$ лежит в центре неэффектовности: $\forall x \in G : gxg^{-1} = x$, что равностильно $\forall x \in G : gx = xg$, что по определению означает, что g лежит в центре группы G. Что и требовалось доказать.

3. Для поика искомого изморфизма нужно посмотреть действие $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ на саму себя левым сдвигом. Таким образом мы сможем понять, какие перестановки входят в образ нужного нам извоморфизма. Похоже, что делать больше нечего, давайте построим табличку.

	(0;0)	(0;1)	(0;2)	(1;0)	(1;1)	(1;2)
(0;0)	(0;0)	(0;1)	(0;2)	(1;0)	(1;1)	(1;2)
(0;1)	(0;1)	(0;2)	(0;0)	(1;1)	(1;2)	(1;0)
(0;2)	(0;2)	(0;0)	(0;1)	(1;2)	(1;0)	(1;1)
(1;0)	(1;0)	(1;1)	(1;2)	(0;0)	(0;1)	(0;2)
(1;1)	(1;1)	(1;2)	(1;0)	(0;1)	(0;2)	(0;0)
(1;2)	(1;2)	(1;0)	(1;1)	(0;2)	(0;0)	(0;1)

Теперь мы знаем, что если занумеровать элементы в этой табличке (занумеруем их в том же порядке, в котором они идут в нулевой строке), то в строках с первой по шестую мы получим искомые перестановки, это будет множество

$$\{id,\ (1,2,3)(4,5,6),\ (1,3,2)(4,6,5),\ (1,4)(2,5)(3,6),\ (1,5,3,4,2,6),\ (1,6,2,4,3,5)\}.$$

4. Заметим, что результат сопряжения перестановки α перестановкой β есть

$$(\beta(\alpha_1), \beta(\alpha_2), \ldots, \beta(\alpha_{n-1})).$$

Отсудам можно понять, что для $\beta \in St(\{1, 2, \ldots, n-1\})$ верно, что если $\beta(1) = x + 1$, то $\beta(i) = x + i$ по модулю $n - 1$. Отсуюда слудует, что для $\lambda = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $St(\lambda) = \{\lambda^k \mid k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}\}$.

Шестое БДЗ

1. Из курса линейной алгберы мы знаем, что обратимость матрицы равносильна тому, что она не вырождена (то есть её определитель отличен от нуля). Также из этого самого курса нам известно, что делители нуля совпадают с вырожденными матрицами. Осталось разобраться с нильпотентными матрицами. Во-первых, мы знаем, что её определительно должен быть равен нулю, поэтому далее будем считать, что такая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}.$$

Далее нам поможет лемма о стабилизации. Из неё следует, что любая нильпотентная матрица уже во второй степени станет равна нулевой. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + kab & ab + kb^2 \\ ka^2 + k^2ab & kab + k^2b^2 \end{pmatrix};\ => a = 0,\ kb = 0.$$

Таким образом, мы получили, что любая нильпотентная матрица имеет след равный нулю, при этом очевидно, что любая такая матрица нильпотентна.

2. Легко понять, что любая группа $\frac{n}{k}\mathbb{Z}_k$, где $k|n$, является идеалом, давайте докажем, что любая другая нам не подходит.

Пусть нашолся какой-то идеал G, который не соответствует описанным выше критериям. Тогда пусть g_0 — его минимальный элемент. Алгоритм Евклида позволяет нам утверждать, что $(n, g_0) = g_0$, так как иначе g_0 не будет являться минимальным, следовательно $g_0|n$. По аналогичным соображениям мы понимаем, что $g_0|g\forall g \in G$, следовательно G можно описать как $g_0\mathbb{Z}_{n/g_0}$, что равносильно условию выше.

3. Давайте рассмотрим множество H всех многочленов с чётным свободным членом. Сперва заметим, что H будет являться кольцом, в силу свойств многочленов. Также очевидно, что H будет являться идеалом, так как свободный член произведения равен произведению свободных членов. Замечательно, теперь нам осталось только доказать, что H будет не главным идеалом.

Предположим обратное, то есть $H = \mathbb{Z}[x](f)$, где f — некоторый многочлен, отличный от нуля (иначе совсем неинтересно). Сразу заметим, что f не может являться константой, так как в этом случае константа должна быть чётной, но тогда в H не попадёт многочлен $x + 2$ (хотя должен). Если же степень f больше нуля, то в H не попадёт 2. Значит мы пришли к противоречию и H всё-таки является не главным идеалом.

4. Для начала заметим, что любые 2 различным многочлена степени меньше n будут порождать нам разные классы смежности. Это легко понять из того, что на многочленах действует деление с остатком, а значит и алгоритм Евклида, а такие 2 многочлена очевидно будут давать различные остатки. При этом очевидно, что класс смежности, порождённый многочленом g ь=будет совпадать с классном смжености, порождённым многочленом $g\ (mod\ f)$. Таким образом мы получили, что искомая фактор-группа изморфна остаткам по модулю f. В этой группе можно выбрать базис $(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$ (линейная независимость очевидно, как и то, что такое множество порождает любой остаток, так как его степень строго меньше n). Таким образом, мы получили, что размерность фактор-группы равна n, что и требовалось доказать.

5. Предположим, что нашёлся ненулевой лемент a, который перешёл в ноль. Тогда мы знаем, что любой ненёлевой элемент F можно было представить как $x = xa^{-1}a$, тогда гомоморфизм f переведёт x в $f(xa^{-1})f(a) = f(xa^{-1})0 = 0$. Таким образом, все элементы перешли в ноль (так как ноль тоже мог отправиться только туда). Теперь предположим, что нашлись 2 элемента, которые f перевёл в один и тот же элемент. Тогда их разность (которая была отлична от нуля) перешла в ноль, а мы уже знаем, что в таком случае все элементы F отправляются в ноль.

Таким образом мы знаем, что у нас все элементы переходят в ноль или же любые 2 переходят в различные. В этом случае гомоморфизм будет инъективен, а значит F и $Im(F)$ будут изоморфны.

Седьмое БДЗ

1. Для начала докажем симметричность данного многочлена. это очевидно, так как он раскладывается в произведение всех возможных попарных сумм переменных x_1, x_2, x_3, x_4 (все в первой степени). Поэтому никакая транспозиция аргументов его не изменит.

Ну а теперь разложим его в элементарные симметрические. Степень нашего многочлена равна 6 (при этом все одночлены будут иметь именно такую степень), так что его можно представить в виде

$$a_1(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) + a_2(\sigma_1^2\sigma_4) + a_3(\sigma_2\sigma_4) + a_4(\sigma_2^3).$$

Давайте искать коэффициенты подстановками:

- $P(1,1,1,0)$:
  $f(1,1,1,0) = a_1(3\cdot 3\cdot 1) + a_4 = 8;$
- $P(2,1,1,0)$:
  $f(2,1,1,0) = a_1(4\cdot 5\cdot 2) + 4a_4;$
- $=> a_1 = 1,\ a_4 = -1;$
- $P(1,1,1,1)$:
  $f(1,1,1,1) = (4\cdot 6\cdot 4) + a_2(4\cdot 4) + 6a_3 - 4\cdot 4 = 64;$
- $P(2,1,1,1)$:
  $f(2,1,1,1) = (5\cdot 9\cdot 7) + a_2(5\cdot 5\cdot 2) + 18a_3 - 49 = 216;$
- $=> a_2 = -1, a_3 = 0.$

Таким образом, мы получили, что наш многочлен равен $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_3^2$.

2. Итак, пусть корни многочлена это $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, тогда мы знаем, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{\sigma_3(X)}{\sigma_4(X)}.$$

С другой стороны, нам знакомы теорема Виета, котора утверждает, что $(-1)^i a_{n-i}/a_n = \sigma_i(X)$, где a_k — k-тый коэффицент многочлена с корнями X. Тогда значение искомого выражения найти очень просто. это будет $-\frac{1/5}{1/5} = -1$.

3. Пусть, как и в предыдущей заначе, X — корни данного многочлена (далее f), по которым мы хотим построить многочлен g с корнями Y. Тут нам на помошь снова придёт теорема Виета. Нам достаточно найти $\sigma_3(Y), \sigma_2(Y), \sigma_1(Y)$, при том, что мы знаем $\sigma_3(X), \sigma_2(X), \sigma_1(X)$ (этого будет достаточно, так как исходный многочлен приведённый, так что никаких проблем со старшим коэффицентом быть не должно). Итак, давайте выражать...

- $\sigma_1(Y) = \sigma_1(X)^3 - 3\sigma_2(X)\sigma_1(X) + 3\sigma_3(X) = 0 + 0 - 3 = -3;$
- $\sigma_2(Y) = \sigma_2(X)^3 - 3\sigma_1(X)\sigma_2(X)\sigma_3(X) + 3\sigma_2(X)^2 = -1 + 0 + 3 = 2;$
- $\sigma_3(Y) = \sigma_3(X)^3 = -1.$

Таким образом, искомый многочлен равен $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

4. Рассмотрим 2 случая.

1. Многочлен имеят корень степени 3. Но тогда мы знаем, что сумма всех корней равно 0 (так как коэффициент при $x^2 = 0$), ну а тогда и все корни равны 0, а значит и $\lambda = 0$. Получим многочлен $x^3 - 12x$, который, очевидно, не подходит, так как его корни это 0 и $\pm\sqrt{12}$.
2. Многочлен имеет вид $(x - x_1)^2(x - x_2)$, тогда на его коэффициенты можно составить слеюующую систему уравнений:
   $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1^2 + 2x_1x_2 = -12, \\ x_1^2x_2 = -\lambda; \end{cases} \quad => \begin{cases} x_2 = -2x_1, \\ x_1^2 = 4, \\ \lambda = 2x_1^3; \end{cases}$$
   следовательно, $\lambda = \pm 16$.

5. По сути, нас просят доказать, что нет бесконечно убывающей последовательности одночленов. Будем доказывать это по индукции по количеству переменных (n)

База: $n = 1$ — очевидно, что бесконечной убывающей последовательности при таких условиях быть не может.

Переход от $n = k$ к $n = k+1$. Предположим обратное, тогда на $k+1$ прееменной существует бесконечно убывающая последовательность, в то время как на k её нет. Рассмотрим эту последовательность. Заметим, что степень при первой переменной в такой последовательнсоти одночленов не может убывать бесконечно (так как она не меньше нуля), а значит с некоторого момента она фиксируется. Заметим, что в таком случае наша последовательность с этого момента будет бесконечно убывающей для k переменных (достаточно из всех одночленов выкинуть первую переменную, что возможно, так как во все из них она входит в равной степени). Таким образом мы получили противоречие, а значит на $k + 1$ переменной бесконечной убывающей последовательности тоже быть не может. Мы совершили переход, а значит и доказали желаемое.

Восьмое БДЗ

1. Давайте просто распишем алгоритм Евклида и по нему воостановим нужные многочлены.

$$(x^5 + x^3 + x,\ x^4 + x + 1) = (x^4 + x + 1,\ x^3 + x^2) = (x^3 + x^2,\ x^3 + x + 1) =$$
$$= (x^3 + x + 1,\ x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1,\ x^2 + 1) = (x^2 + 1, x) = (x, 1) = 1.$$

*также мы не забывали, что работает над полем $\mathbb{Z}_2$.

Итак, осталось только найти представление НОД. при помощи обратного алгоритма Евлкида найдём, что это

$$(x^3 + x)(x^5 + x^3 + x) + (x^4 + x + 1)(x^4 + x + 1) = 1.$$

2. Прокрутим алгоритм Евклида для многочленов $P(X) = x^4 + 3x + 1$ и $Q(X) = x^3 + 1$, вясним, что $(P, Q) = 7$ и

$$(-4x^2 + 2x - 1)(x^4 + 3x + 1) + (4x^3 - 2x^2 + x + 8)(x^3 + 1) = 7.$$

Тогда верно следующее равенство

$$\frac{\alpha^3 + \alpha + 1}{\alpha^3 + 1} \underset{P}{\equiv} \frac{1}{7}(\alpha^3 + 3\alpha + 1)(4x^3 - 2x^2 + x + 8).$$

Такое равенство имеет смысл потому, что многочлен P является зануляющим. Осталось посчитать парвую часть и найти её остаток по модулю P, получим, что искомый многочлен $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x + 8$.

3. Так как $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ верно, что $Q(x) = \left(x^2 - 8\right)^2 - 60$ знауляем x. теперь покажем, что Q неприводим. Заметим, что

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

где $x_i = \pm\sqrt{8 \pm 2\sqrt{15}}$. Тогда минимальный многочлен должен состоять в точности из этих скобок (возможно не из всех), однако легко убедиться, что прозведение любого числа из них (меньше 4) даёт многочлен, который не может существоваться над $\mathbb{Q}[x]$, следовательно найденный нами многочлен минимален.

4. Решим уравнение и получим, что корнями являются $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. А значит разложение над $\mathbb{Q}$ имеет вид $F = f_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}if_1$, и его степень равна 2.

5. Давайте попробуем выразить $y \in F$ через $x \in K$.

$$y = \frac{x^2 + 1}{x};$$
$$xy = x^2 + 1;$$
$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}y \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}y\right)^2 - 1}.$$

Отсюда мы получаем, что $[F : K] \leqslant 2$. В самом деле, $[C(y, \sqrt{y^2 - 4}]) : K] = 2$, и при этом мы можем выразить любое $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f, g \in \mathbb{C}[x]$. Осталось только понять, что $[F : K] \neq 2$, что очевидно, например, потому, что $F \neq K$.

Девятое БДЗ

1. Для начала разберёмся с константами и многочленами степени 1 (то есть 0, 1, x, $x+1$). С ними всё понятно, все, корме нуля, неприводимы. Далее считаем, что степень многочлена больше 1.

Заметим, что произвольный многочлен $P(X) = p_4x^4 + p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$ над $\mathbb{Z}_2$ неприводим только тогда, когда у него нет корней (при условии, что его степень больше одного). А это значит, что $P(1) = 1$, следовательно $p_0 = 1$. Также мы знаем, что $P(1) \underset{2}{\equiv} \sum_{i=0}^{4} p_i$, а значит у всякого неприводимого многочлена над $\mathbb{Z}_2$ нечётное число ненулевых коэффицентов. В таком случае, значение $P(x)$ всегда равно 1. Теперь покажем, что любой такой многочлен, кроме $(x^2+x+1)^2$ неприводим. Всамом деле, такой многочлен или должен являться произведением 2 таких же, или неприводим. Из-за ограничения на степень, такой многочлен или неприводим, или имеет неприводимый делитель степени не больше 2. При этом такой делитель всего 1, это x^2+x+1, таким образом, любой многочлен с начётной суммой коэффициентов и свободным членом равным 1 степени не больше 4 неприводим, кроме x^2+x+1.

Теперь разберёмся с многочленами степени 5. Для удобства будем называть крутым многочлен, который не имеет корней. Таких многочленов степени 5 ровно 8 (первый и последний поэффицент фиксированны, среди остальных 4 1 или 3 единицы). Замечательно, теперь посмотрим на те из них, которые приводимы. Любой из них должен имень крутой делитель степени не больше 2, а мы уже знаем, что такой только один, это x^2+x+1. Это значит, что любой крутой многочлен степени 5 имеет вид $g(x)(x^2+x+1)$, где $g(x)$ — тоже крутой степени не больше 3. Заметим, что любой крутой степени 3 неприводим, так как иначе должен иметь крутой делитель степени 1, а таких нет. Всего крутых степени 3 ровно 2 (x^3+x+1 и x^3+x^2+1), а значит крутых приводимых степени 5 ровно 2, а значит неприводимых 6. Что и требовалось доказать.

2. По теореме 2 из лекции 9 мы знаем, что такое поле существует и имеет вид поля разложения многочлена $x^{7^3} - x$ над полем $\mathbb{Z}_7[x]$.

3. Сумма всех элементов будет равно нулю (если характеристика поля не 2) так как их можно просто разбить на пары обратных по сложению (при этом каждому, кроме нуляю, сопоставиться элемент, отличный от него самого), а значит и сумма бдет равна нулю. Теперь разберёмся с произведением. Мы знаем, что существует изоморфизм, который переводит наше поле в поле разложения многочлена, где все элементы — делители некоторого многочлена, тогда мы знаем их произведение, которое будет равно -1.

4. Заметим, что любой многочлен с нечётным коэффицентов точно не будет делителем нуля. В самом деле, рассмотрим факторгруппу по максимальному идеалу, она будет изоморфна $\mathbb{Z}_2[x]$, тогда такой многочлен попадёт в ненулевой класс, а значит никак не может делить ноль. При этом все остальные (то есть те, у которых все коэффиценты чётны) делят ноль. В самом деле, достаточно возвести их в квадрат, тогда так как из исходного многочлена выносилась двойка, из квадрата вынесется четвёрка, а значит он будет нулём.

Теперь нильпотенты. Мы уже знаем, что все многочлены с чётныи коэффициентами в квадрате равны нулю, а значит нильпотетны, с другой стороны те, у которых есть хотябы один ненулевой коэффициент не делят ноль, а значит не нильпотетны. Победа!

Глава 3

Дискра на первом курсе

Домашки

Первое ДЗ

1. Давайте вести индукцию по n.
База. $n = 1:\ \frac{1}{1+1} > \frac{13}{24}$, занчит база индукции верна.
Переход. Пусть наше неравенство верно для $n = k$, докажем, что оно верно для $n = k + 1$:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24};$$
$$\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) + \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}\right) > \frac{13}{24};$$
$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > 0;$$
$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{1}{k+1};$$
$$(2k+2)(k+1) + (2k+1)(k+1) > (2k+1)(2k+2);$$
$$4k^2 + 3k + 3 > 2k^2 + 3k + 2;$$
$$1 > 0.$$

Таким образом переход индукции доказан и задача решена.

2. Давайте вести индукцию по n.
База. $n = 1 : \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}} = 3$, значит база индукции верна.
Переход. Пусть наше неравенство верно для $n = k$, докажем, что оно верно для $n = k + 1$:
для начала давайте подставим вместо x_k (x_k+x_{k+1}), тогда сумма x_i не изменилась и можно применить предположение индукции:

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} + \frac{1-x_2}{1+x_2} + \ldots + \frac{1-x_k-x_{k+1}}{1+x_k+x_{k+1}} \geqslant \frac{1}{3}.$$

В таком случае, если мы докажем следующее неравенство, мы решим задачу:

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} + \frac{1-x_2}{1+x_2} + \ldots + \frac{1-x_k}{1+x_k} + \frac{1-x_{k+1}}{1+x_{k-1}} \geqslant \frac{1-x_1}{1+x_1} + \frac{1-x_2}{1+x_2} + \ldots + \frac{1-x_k-x_{k+1}}{1+x_k+x_{k+1}};$$
$$\frac{1-x_k}{1+x_k} + \frac{1-x_{k+1}}{1+x_{k-1}} \geqslant \frac{1-x_k-x_{k+1}}{1+x_k+x_{k+1}};$$

давайте для удобства записи выполним следующую замену$m + c = x_k, m - c = x_{k+1}$;

$$\frac{1-(m+c)}{1+(m+c)} + \frac{1-(m-c)}{1+(m-c)} \geqslant \frac{1-2m}{1+2m};$$
$$\frac{2+2c^2-2m^2}{1+2m+m^2-c^2} \geqslant \frac{1-2m}{1+2m}.$$

Легко заметить, что при $c \neq 0$ у дроби в левой части неравенства числитель строго увеличится, а знаменатель строго уменьшится, а значит левая часть неравенства минимальна при $c = 0$, в то время, как правая не зависит от c. Таким образом нам достаточно решить данное неравенство только при $c = 0$:

$$2\left(\frac{1-m}{1+m}\right) \geqslant \frac{1-2m}{1+2m};$$
$$2(1-m)(1+2m) \geqslant (1-2m)(1+m);$$
$$2 + 2m - 4m^2 \geqslant 1 - m - 2m^2;$$
$$m + 1 \geqslant 2m^2;$$

что равносильно тому, что $m \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, что верно, так как по условию $m \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$.

Таким образом, переход индукции доказан и задача решена.

3. Давайте по индукции доказывать неравенства вида

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}} \leqslant 3$$

База. $n = 2 : \sqrt{(2+1)^2} = 3$, база верна.
Переход. Предположим, что неравентво доказано для $n = k$, докажем, что оно также верно для $n = k + 1$:

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{(k-1)\sqrt{(k+1)^2}}}}} = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{(k-1)(k+1)}}}} <$$
$$< \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{(k-2)\sqrt{k^2}}}}}.$$

Что по предположению индукции не превосходит 3, переход доказан. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$3 \geqslant \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}} >$$
$$> \sqrt{2\sqrt{3\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}.$$

Что и требовалось доказать.

4. Для начала скажем, что мы будем называть отрезок, оба конца которого отмечены, хорошим. Тогда от нас требуется доказать, что в указанной в условии конструкции найдутся хорошие отрезки всех длоин от 1 до 3^n. Докажем это по индукции по n.
База. Для $n = 1$ задача очевидна.
Переход. Предположем, что задача решена для $n = k$, докажем, что она также верна для $n = k + 1$. После первого разбиения отрезка длины 3^{k+1} мы получим 2 отмеченный отрезка длины 3^n (далее будем называть их A и B), для которых верно предположение инукции, также, при наложении все их отмеченные точки совпадут (что очевидно). В таком случае, мы уже нашли хорошие отрезки всех длин от 1 до 3^n и длин 2×3^n и 3^{n+1} (правые точки A и B и сам исходный отрезок). Теперь покажем, как найти все хорошие отрезки с длинами $l : 3^k < l < 2 \times 3^k$. Достаточно выбрать отрезок длины $3^k - l$ в A и его правый конец соединить с левым концом аналогичного (совпадающего при наложении) отрезка в B. Если же $2 \times 3^k < l < 3^{k+1}$, то найдём в A отрезок длины $3^k - l$ и ссоединим его левый конец с правым концом аналогичного отрезка из B. Легко убедиться, что в обоих случаях мы получим отрезки искомой длины, а значит сможем получить хорошие отрезки всех длин от 1 до 3^{k+1}. Таким образом, переход доказан и задача решена.

5. Для решения задачи давайте покажем, что попав в точку n, кузнечик смодет за несколько прыжков попасть в точку $n + 1$ (или $n - 1$, если ищменить направление всех прыжков).
Пусть до попадания в точку n кузнечик сделал $k - 1$ прыжок. Давайте докажем, что сделав 2^k прыжков влево, а затем один правко, кузнечик в итоге попадет в точку $n + 1$, то есть:

$$\left(2^{k+2^k} + 1\right) - \left(2^k + 1\right) - \left(2^{k+1} + 1\right) - \ldots - \left(2^{k+2^k-1} + 1\right) = 1;$$

что равносильно:

$$2^{k+2^k} - \left(2^k + 2^{k+1} + \ldots + 2^{k+2^k-1}\right) + 1 - 2^k = 1;$$

Давайте докажем это равенство по индукции по k.
База. $k = 1 : 2^{1+2^1} - \left(2^1 + 2^{1+1}\right) + 1 - 2^1 = 1$.
Переход. Предположим, что наше предположение верно для $k = l$, докажем, что оно верно для $k = l + 1$:

$$2^{l+2^l} - \left(2^l + 2^{l+1} + \ldots + 2^{l+2^l-1}\right) + 1 - 2^l = 1;$$
$$2^{l+2^l} = 2^l + 2^l + 2^{l+1} + \ldots + 2^{l+2^l-1};$$
$$2^{l+2^l} \times 2 = \left(2^l + 2^l + 2^{l+1} + \ldots + 2^{l+2^l-1}\right) + \left(2^l + 2^l + 2^{l+1} + \ldots + 2^{l+2^l-1}\right);$$
$$2^{l+2^l} + 2^{l+2^{l+1}} = \left(2^l + 2^l + 2^{l+1} + \ldots + 2^{l+2^l-1}\right) + \left(2^{l+2^l} + 2^{l+2^l} + 2^{l+1+2^l} + \ldots + 2^{l+2^{l+1}}\right);$$
$$2^{(l+1)+2^{(l+1)}} - \left(2^{(l+1)} + 2^{(l+1)} + 2^{(l+1)+1} + \ldots + 2^{(l+1)+2^{(l+1)}-1}\right) + 1 - 2^{(l+1)} = 1.$$

Таким образом перезод индукции верен, а значит задача решена.

6. Давайте вести индукцию по количеству лапмочеку на столе (n).
База. $n = 1$, очевидна.
Переход. Предположим, что задача решена для $n \leqslant k$, докажем её для $n = k + 1$. Давайте на время забудем про лампочку с номером i, тогда по предположению индукции, у нас получилось погасить все лампочки, кроме неё, сделав при этом последовательность операций, которую мы будет обозначать как A_i. Если при этом погасла и лампочка i, то переход доказан, поэтому будем считать что для любого i последовательность A_i гасит все лампочки, кроме i. Очевидно, что операция нажимания на кнопки коммутативна, тогда последовательное нажатие на A_i и A_j изменит состояние всех лампочек, кроме i и j, давайте называть такую операцию $B_{i,j}$. Рассмотрим произвольную кнопку X, которая соединена с нечетным числом лампочек (такая найдется по условию) и операций типа A погасим все лампочки, соединённые с X, кроме одной, а затем нажмём на X. После этого на табло останетсяч чётное число горящих лампочк, которые можно будет погасить операциями типа B. Таким образом, переход индукции доказан и задача решена.

7. Давайте вести в этой задаче индукцию по n.
База. $n = 2$, очевидна, так как единственный возможный набор для $n = 2$ это $(1, 1)$.
Переход. Предположим, что задача решена для всех $n \leqslant k$, докажем, что она также решена для $n = k+1$. Рассмотрим a_{k+1}. Если $a_{k+1} = a_k$, то применим предположение индукции для $a_1, \ldots a_{k-1}$ (при этом, очевидно, что $n \geqslant 4$, поэтому мы можем применять предположение индукции), после чего к первому набору добивим a_k, а ко второму — a_{k+1} и получим искомое разбиение. Если $a_{k+1} \neq a_k$, заменим данный в условии набор на $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, |a_k - a_{k+1}|$. Так как в новом наборе на одно число меньше, и $a_k + a_{k+1} \underset{2}{\equiv} |a_k - a_{k+1}|$ и $|a_k - a_{k+1}| \leqslant k$ (что очевидно так как $1 \leqslant a_k \leqslant k$ и $1 \leqslant a_{k+1} \leqslant k + 1$), то можно применить предположение индукции. После этого останется только вместо числа $|a_k - a_{k+1}|$, добавить числа a_k и a_{k+1} в соответствующие наборы. Таким образом, переход доказан и задачи решена.

Второе ДЗ

1. Для начала заметим, что по условию чётные и нечётные числа между собой строго упрядоченны, а значит, стоится биекция между возможжными расстановками чисел в ряду и указанием на позиции, на которых стоят чётные числа. Посчитать количество вариантов второго совсем просто. По очевидным причинам это в точности $\binom{10}{5}$.

2. Для начала скажем, что всего вариантов раскладки колоды существует 36!. Способов выбрать 2 карты одного цвета сцществует ровно $\binom{18}{2}$, а значит вариантов выбрать 2 пары разных цветов всего $\binom{18}{2}^2$. Тогда раскладок колоды, в которых на верху лежат 2 пары карт разных цветов существует $\binom{18}{2}^2 \cdot 4! \cdot 32!$. А значит, вероятность того, что раскладка удовлетворяет нашим запросам составляет

$$\frac{\binom{18}{2}^2 \cdot 4! \cdot 32!}{36!} = \frac{153}{385} = 0{,}3(974025).$$

3. Для начала подсчитаем, сколько всего существует 7–значных чисел, в которых ровно 2 чётные цифры, и которые начинаются с нечётной цифры. Легко убедиться, что их $\binom{6}{2} \cdot 5^7$, так как всего существует ровно $\binom{6}{2}$ способов выбрать позиции для чётных чисел, и на каждую позицию в числе можно выбрать ровно 5 цифр. При этом, способов выбрать 2 подряд идущие позиции для чётных чисел ровно 5 (так как у нас ровно 5 способов выбрать место для первой из них), и на каждый из них мы можем составить 5^7 чисел, следовательно мы среди $\binom{6}{2} \cdot 5^7$ посчитали ровно 5^8 чисел, которые нас не устраивают. Тогда 7–значных чисел, в записиси которых ровно 2 чётные цифры, и перед каждой из них стоит нечётная всего $\binom{6}{2} \cdot 5^7 - 5^8 = 2 \cdot 5^8$.

4. Данная задача, по очевидным причинам эквавалентна задаче о разбиении числа в сумму фиксированного числа слагаемых (то есть задаче о шарах и перегородках, которая разбиралась на лекции). Тогда ответ будет равен $\binom{8+7}{7} = \binom{15}{7} = 6435$.

5. Для начала скажем, что общее число разбиений детей на 3 хоровода ровно в точности 3^9. В то же время, число разбиений детей на группы составляет

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = 84 \cdot 20 \cdot 1 = 1680,$$

так как мы сперва выбираем 3 из 9 детей на первый хоровод, затем 3 из 6 — на второй, а остальных — на третий. Таким образом, вероятность того, что вокруг какой-то ёлки не получится хоровода составляет $\frac{3^9 - 1680}{3^9} = \frac{6001}{6561}$.

6. Давайте доказывать данную задачу по индукции по n.
База. $n = 0, n = 1$ — очевидно.
Переход. Предположим, что задача доказана для всех $n \leqslant k$, докажем её для $n = k + 1$.

$$\sum_{i=0}^{(k+1)/2} \binom{(k+1) - i}{i} =$$

нам известно тождество вида:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1};$$

давайте применим его к каждому слагаемому:

$$= \sum_{i=0}^{(k+1)/2} \left(\binom{k-i}{i} + \binom{k-i}{i-1} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{(k+1)/2} \binom{k-i}{i} + \sum_{i=0}^{(k+1)/2} \binom{k-i}{i-1} =$$

Давайте считать, биномиальные коэфиценты, один (или оба) из агрументов которых меньше нуля, или такие, что в них $n < k$, равными нулю (при этом, тождесво которым мы пользуемся сохранить свою вернсть. Тогда получим:

$$= \sum_{i=0}^{(k)/2} \binom{k-i}{i} + \sum_{i=0}^{(k-1)/2} \binom{k-i}{i} =$$

$$= F_k + F_{k-1} = F_{k+1}.$$

Что и требовалось доказать.

7. Сперва скажем, что мы будем называть строку треугольника Паскаля прикольной, если все, кроме крайних, числа в ней чётные. Докажем, что если строка с номером n прикольная, то и строка с номером $2n$ — тоже. Утверждение о том, что строка с номером n прикольная равносильно тому, что $(x+1)^n = x^n + 1 + 2f(x)$, где $f(x)$ — многочлен с целыми коэфицентами (так можно скажать потому, чтовсе коэфиценты $f(x)$ будут биномиальными каэфицентами, из которых состоит n–тая строка треугольника Паскаля, в которой по нашему предполажению все числа чётные). Тогда давайте возведём это равенство в квадрат и убедимся, что строка с номером $n+1$ тоже прикольная:

$$(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1 + 4f^2(x) + 2x^n + 4x^n f(x) + 4f(x) = x^{2n} + 1 + 2f_1(x).$$

Таким образом, строка с номером $2n$ тоже прикольная. Давайте теперь докажем, что прикольными могут быть срока только с номерами вида 2^k. Будем делать это по идукции. База очевидна. Предположим, что наше утверждение верно для всех строк с номерами не больше, чем 2^k, докажем его для всех строк с номерами не больше, чем 2^{k+1}. заметим, что в строке с номером 2^k в центре есть «отрезок» из $2^k - 1$ чётного числа, тогда очевидно, что в каждой следующей строке в центре стоит «отрезок» длины на 1 меньше. А значит, строка со всем нечётными возникнет не раньше, чем через $2^k - 1$ строку и будет иметь номер не меньше, чем $2^{k+1} - 1$. С другой стороны, мы знаем, что строка с номером 2^{k+1} точно прикольная, а значит в строке с номером 2^{k+1} все числа нечётные. Таким образм мы доказали, что все прикольные строки имеют номера вида 2^k, и все такие строки прикольные. Это в свою очередь равносильно тому, что все строки с номерами вида $2^k - 1$ состоят целиком из нечётных чисел, и никакие дргуие этому условию не удовлетворяют.

8. Давайте сперва посмотрим, сколько существует способов расставить на доске 100×100 ровно 20 различных фигур, это $\frac{(100^2)!}{(100^2-20)!} = (100^2 - 19) \cdot (100^2 - 18) \cdot \ldots \cdot 100^2$. При этом мы посчитали в том числе и «плохие» расстановки, в которых есть побитые фигуры. Очень грубо оценим количество таких расстановок. Для этого скажем, что в каждой из них найдётся пара фигур такая, что первая бьёт вторую. Их не более чем $(100^2 \cdot 20) \times (20 \cdot 19)$, где первая скобка — количество способов выбрать и поставить первую фигуру, а вторая — вторую. При этом, мы посчитали каждую «плохую» расстановку несколько раз (но намдостаточно того, что мы посчитали каждую). Осталось убедиться, что общее количество расстановок строго больше, чем количество «плохих», что очевидно. Таким образом, все расстановки не могут быть «плохими», а значит найдётся такая, в которой расставлены 20 фигур так, что они не бьют друг друга.

Третье ДЗ

1. Мы хотим доказать, что $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$. Рассмотрим это равенство в случае произвольного элеманта, тогда $a = 1$, если рассматриваемый элемент принадлежит A, аналогично определим b и c. Тогда мы хотим доказать, что

$$(a \vee b) \wedge \neg c = (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c);$$
$$(a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c) = (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c).$$

Такой переход возможен, так как в слечае логических операция корректно раскрываётся скобки для логических «и» и «или» (доказывали на парах). Что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим все возможные составы по 9 человек и по 1 человеку. И тех и тех ровно $\binom{10}{1}$. Любая группа из 9 человек должны сыграть ровно 1 раз, при этом она не может играть ни с кем, кроме своего дополнения, а по скольку и оно также сыграло ровно 1 игру, то все составы по 9 и по 1 человеку разбились на пары, в объединении дающие полное множество челенов клуба. После этого рассмотрим составы по 8 и по 2 человека. Их снова поровну - $\binom{10}{2}$. Каждый набор из 8 человек должен сыграть с набором из одного человека или из 2, но все наборы по 1 уже кончились, а значит все группы по 8 человек играют с составами по 2, но они могут сыграть только со своим дополнением, а значит они снова разбились на пары. Аналогичное рассуждение пожно повторить для групп по 7 и 3 и групп по 6 и 4. После этого оснаются только группы по 5, которых $\binom{10}{5}$ - чётное число. Каждый состав из 5 человек может сыграть только с другим составом из 5 человек, а это может быть только тогда, когда он играет со своим дополнением. Тогда в каждой игре будут участвовать 2 команды, такие, что в объединение они дают полный набор участников клуба. Что и требовалось доказать.

3. Давайте заменим ксор на слжение, а конъюнкцию на минимум и будем рассматривать данное выражение не как функцию надо будевыми переменными, а как выражение от целы чисел. В таком случае, нас интересуем чётность его значения. Заметим, что выражение является симметрическим, а значит нас только интересует количествоединиц и нулей. Пусть единиц k ($k > 0$). Также, очевидно, что занулятся все скобки (в том числе и из одного элемента), в которых есть хотя бы один 0. Тогда чётность значения выражения совпадает с чётность количества скобок, в которых только 1. Легко понять, что их будет ровно $\binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \ldots$ — из прошлых листочков, мы знаем, что это в точности 2^{k-1}, а значит, если единиц больше одной, то значение функции из условия будет равно 0. Если же единиц 0, то оно тоже очевидно ровно 0.

4. Мы легко можем посчитать количество возможных перестановок из 5 чисел, их ровно 5!. Давайте посчитаем количество «плохих» чисел по формуле включений-исключений:

$$\#\text{с 1 в начале или в середине} + \#\text{с 4 и 5 по соседству - }\#\text{с 1 в начале или середине и с 4 и 5 по соседству.}$$

перестановок с 1 в начале или середине ровно $4! \times 2$, и с 4 и 5 по соседству столько же (в первом случае строим последовательность без 1 и 2 способамы выбираем, куда ее поставить, во втором случае так же, но без 4). Если же выполняются оба условия, то забудем про 1 и 4, получим 3! возможных последовательностей, полсе этого 2 способами вернём 1 и двумя — 4, получим $3! \times 4$, однако при этом мы посчитаем также и числа вида •415• и •514• (всего 4 лишних последовательности). Тогда ответом будет $5! - 4! \times 4 + 3! \times 4 - 4 = 44$.

5. Давайте доказывать, что мы не сможем получить константу 0, используя только систему связок $\{\vee, \to\}$. Будем доказывать это индукцией по длине выражения (количество связок — k). База $k = 0$ — очевидна.
Переход. Предположим, что константу 0 не получается получить для выражения длины не больше k, докажем, что выражением длины $k + 1$ её тоже не получится получить. Для этого рассмотрим последнее действие в произвольном выражении длины $k + 1$. Если это дизъюнкция, то она даст константу 0 только, если выражения слеваи справа также равны константе 0, но оба по длине не превосходят k, а значит, если последняя операция это дизъюнкция, то мы выполнили переход. Если же последняя связка — импликация, то для того, чтобы получилась константа 0 необходимо, чтобы справа от импликации была константа 0, что так же невозможно по предположению индукции. Что и требовалось доказать.

6. Пусть k — наименьшее натуральное число, такое, что если среди n переменных хотя бы k равны 1, то функция $MAJ(x_1, \ldots, x_n) = 1$, то есть, $k = \frac{n}{2} + 1$, если n чётно, и $k = \frac{n+1}{2}$, если n нечётно. Давайте докажем, то минимальный зармер ДНФ, задающей функция $MAJ(x_1, \ldots, x_n)$ (далее просто функция) равен $k\binom{n}{k}$.
Для начала приведём пример. Рассмотрим ДНФ, в которой ровно $\binom{n}{k}$ скобок, и каждая содержит конъюнкцию уникального набора из k переменных. Очевидно, что у такой ДНФ ровно такая длина, какая нам и нужна. При этом,

в любой подстановке переменных, при которой функция равно 1, присутствует не меньше, чем k единиц, а значит в нашей формуле найдётся скобка, которая будет равна 1, а значит и вся ДНФ также будет равна 1. С другой стороны, если функция равна 0, то среди n переменных строго меньше, чем k единиц, а значит никакая скобка не примет значение 1, следовательно всся формула будет равна 0. Таким образом, мы привели пример, осталось доказать, что ДНФ с меньшим числом переменных быть не может.

Для этого давайте рассмотрим произвольную ДНФ. Для того, чтобы она принимала истинное значение на каждом наборе из k переменных (переменные из набора равны 1, остальные — 0), в ней должна быть скобка, принимающая значение 1 на этом наборе. При этом, для каждой пары наборов эти скобки различны (что очевидно), а длина каждой не меньше, чем k, так как если найдётся скобка длины меньше k, то мы можем приравнять её к 1, когда среди всех n переменных единиц меньше k. Тогда получим, что минимальная длина ДНФ задающей функцию равна $k\binom{n}{k}$. Что и требовалось доказать.

Четвёртое ДЗ

1. $R \circ R = \{(a, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists b \in \mathbb{R}, \frac{a}{b} > 0 \ \& \ \frac{b}{c} > 0\}$.

1. $\frac{a}{b} > 0 \ \& \ \frac{b}{c} > 0 => \frac{a}{c} > 0 => R \circ R \subseteq R$,
2. $\daleth \frac{a}{c} > 0 => a \neq 0 \ \& \ b \neq 0 => \frac{a}{a} = 1 \ \& \ \frac{a}{c} > 0 => \exists b \in \mathbb{R} : \frac{a}{b} > 0 \ \& \ \frac{b}{c} > 0 \ (b = a) => R \subseteq R \circ R$.

Таким образом $R \circ R = R$.

2. Давайте обозначим $(A_1 \backslash A_2) \times (B_1 \backslash B_2)$ за X, а $(A_1 \times B_1) \backslash (A_2 \times B_2)$ за Y.

1. $\daleth (a, b) \in X <=> a \in A_1 \backslash A_2 \ \& \ b \in B_1 \backslash B_2$;
2. То есть $a \in A_1 \ \& \ a \notin A_2$, аналогичное верно и для b;
3. Таким образом $(a, b) \in Y => X \subseteq Y$.

Осталось разобраться, когда бывает равенство.
Заметим, что если $A_1 = A_2$ или $B_1 = B_2$, то оба множества X и Y пустые, а значит достигается равенство, так как $X = Y = \emptyset$. Так что давайте считать, что $A_1 \neq A_2$ и $B_1 \neq B_2$.
$\daleth A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Тогда давайте рассмотрим $(a, b) : a \in A_1 \cap A_2 \ \ \& \ \ b \in (B_1 \backslash B_2)$. Так как $a \notin A_1 \backslash A_2, \ (a, b) \notin X$. При этом вполне очевидно, что $(a, b) \in Y$. Аналогичное рассуждение верно и для пары B_1, B_2. Тогда, если было достигнуто равенство, то $A_1 \cap A_2 = \emptyset \ \& \ \ B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Также, достаточно легко убедиться, что этого уловия достаточно, длч того, чтобы X совпадало Y, так как оба будут просто равны $A_1 \times B_1$.
Таким образом, равество X и Y достиается только, если $A_1 = A_2$ или $B_1 = B_2$ или же для какой-то из пар A_1, A_2 или B_1, B_2 пересечение пусто.

3. Давайте доказывать, что $f(A \Delta B) \supseteq f(A) \Delta f(B)$.
$\daleth x \in f(A) \Delta f(B)$. Тогда рассмотрим какой-то $y = f^{-1}(x)$. Очевидно, что, если $y \in A \cap B$, то $f(y) = x \in f(A) \ \ \& \ \ f(y) = x \in f(B) => f(y) = x \notin f(A) \Delta f(B)$ что неверно $=> y \notin A \cap B$, но при этом, очевидно, $y \in A \cup B => y \in A \Delta B$.
Таким образом, мы доказали, что $f(A \Delta B) \supseteq f(A) \Delta f(B)$, однако, возможно, что $f(A \Delta B) = f(A) \Delta f(B)$, покажем, что такое не всегда верно, для этого просто приведём пример:
$\daleth f : \{00, 01, 10\} \mapsto \{kek\}, A = \{00, 01\}, B = \{01, 10\}$, тогда $f(A \Delta B) = f(\{00, 10\}) = \{kek\}$, а $f(A) \Delta f(B) = \{kek\} \Delta \{kek\} = \emptyset$.

4. Давайте доказывать, что $f^{-1}(A \Delta B) \equiv f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.
$\daleth x \in f^{-1}(A \Delta B) => f(x) \in A \Delta B => f(x) \in A \ \ \& \ \ f(x) \notin B$ или $f(x) \notin A \ \ \& \ \ f(x) \in B$. В силу симметрии можно рассмотреть только первый вариант.
$f^{-1}(A) = \{a \in Y : f(a) \in A\}$, аналогично для $f^{-1}(B)$. Тогда из нашего предположения следует, что $x \in f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.
Таким образом, $f^{-1}(A \Delta B) \subseteq f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.
Теперь покажем, что $f^{-1}(A \Delta B) \supseteq f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$. $\daleth x \in f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$. Без ограничения общности будем считать, что $x \in f^{-1}(A) \ \& \ x \notin f^{-1}(B) => f(x) \in A \Delta B => x \in f^{-1}(A \Delta B)$, так как $f^{-1}(A \Delta B) = \{c \in Y : f(c) \in A \Delta B\}$.
Тогда $f^{-1}(A \Delta B) \subseteq f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B) \ \ \& \ \ f^{-1}(A \Delta B) \supseteq f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B) => f^{-1}(A \Delta B) \equiv f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$, что и требовалось доказать.

5. Давайте доказывать, что ответ составляет ровно $\binom{n+m-1}{n}$. Для этого обозначим количество соответствующих функция за Φ_n^m, где n — мощность множества, на котором определена функция, и m — мощность области значений. Тогда мы хотим доказать, что $\Phi_n^m = \binom{n+m-1}{n}$. Для этого докажем, что $\Phi_1^m = m = \binom{m}{1}$. В самом деле, если область определения функции составляет всего один элемент, то вариатов функции ровно m, так как все возможные значения подходят. Теперь, если мы докажем, что $\Phi_n^m = \Phi_{n-1}^m + \Phi_{n-1}^{m-1}$, то получим желаемое, так как рекуррентные формулы для $\binom{n+m-1}{n}$ и Φ_n^m совпадут, а также совпадут начальные значения.
Давайте рассмотрим произвольную мнотонную функцию $f : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m\}$. Если $f(n) = m$, то сопоставим ей функцию $g(x) : \{1, 2, \ldots, n-1\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m-1\}$, а если же $f(n) \neq m$, то сопоставим $h(x) : \{1, 2, \ldots, n-1\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m\}$. Очевидно, что $g(x)$ и $h(x)$ попарно различны, и притом монотонны, а значит каждая посчитана в Φ_{n-1}^{m-1} и Φ_{n-1}^m, соответственно. Так же для каждой возможной функции $h(x)$ и $g(x)$ соответствует ровно одна функция $f(x)$, что очевидно, а значит, выполнено рекуррентное соотношение $\Phi_n^m = \Phi_{n-1}^m + \Phi_{n-1}^{m-1}$, а это ровно то, что мы и хотели доказать.
Таким образм, для фиксированных n и m число монотонных функция из $\{1, 2, \ldots, n\}$ в $\{1, 2, \ldots, m\}$ составляет ровно $\binom{n+m-1}{n}$.

6. Давайте рассмотрим функцию $f(x)$, которая натуральное число вида $4k + 1$ переведёт в $4(k + 1)$, число вида $4k$ — в $4(k - 1) + 2$, $4k + 2$ — $4k + 3$, $4k + 3$ — $4k + 1$. Тогда легко будедиться, что $f(f(x))$ переведёт числа по следующему правилу:

- $4k+1$ в $4+2$,
- $4k+2$ в $4k+1$,
- $4k+3$ в $4(k+1)$,
- $4k$ в $4(k-1)+3$.

При этом легко убедиться, что $f(x)$ является биекцией, а $f(f(x))$ меняет чётность числа, значит такая $f(x)$ подходит. Что и требовалось доказать.

7. Вместо того, чтобы предъявить такую функцию в явном виде, давайте предьявим алгоритм её построение и покажем, что он подходит:

1. $f(1)=1, f(2)=3, f(3)=4$;
2. Далее будем рассматривать все числа в порядке позрастания (начиная с 4) и «назначать» нашей функции f значения в этих числах:
   (a) в очередном числе x наша функция еще не определена, тогда скажем, что $f(x)=k, (x-1)^2 < k < x^2$. Заметим, что такое число точно найдётся, так как, до этого мы назначили только $x-1$ число, а в данном диапозоне их строго больше. После этого назначим $f(k)=x^2$,
   (b) в очередном числе наша функция уже определена. Тогда обозначим это число за $x, f(x)=k$. При этом мы знаем, что $k=y^2$, для какого-то $y<x$ (по построению), а занчит просто «назначим» $f(y^2)=x^2$.

Заметим, что в приведённом алгоритме, для каждого x значение $f(x)$ определяется одноззначно (то есть мы получили именно функцию, а не не-пойми-что), и при том $f(f(x))=x^2$ по построению. Следовательно такая функция удовлетворяет условию. Что и требовалось доказать.

Пятое ДЗ

1. В любом бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество, зная это рассмотрим счётное $C \subset A \backslash B$. Пользуясь тем, что C, B — счётные множества мы можем пронумеровать их элементы и записать $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$, $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$.
Теперь построим биекцию $fA \mapsto A \backslash B$ по следующему правилу:

- $f(x) = x, x \in (A \backslash B) \backslash C$;
- $f(x) = c_{2i-1}, x \in C \ \& \ x = c_i$;
- $f(x) = c_{2i}, x \in B \ \& \ x = b_i$.

Осталось только понять, почему эта функция является биекцией. Абсолютно очевидно, что для любого x наша функция определена, и при том однозначно. Также заметим, что при разных x $f(x)$ принимат различные значения. Осталось лиш понять, почему для любого $y \in A \backslash B$ найдется $x \in A : f(x) = y$. Если $y\ in(A \backslash B) \backslash C$, то $x = y$, если $y \in C \ \& \ y = c_{2i}, x = b_i$, если $y \in C \ \& \ y = c_{2i-1}, x = c_i$. Что и требовалось доказать. Таким образом A равномощно $A \backslash B$.

2. Давайте доказывать, что это не верно, для этого просто приведйм пример.
$\exists A = \mathbb{N} \backslash \{2, 4, 781\}, B = \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, что A, B счётны, а $A \backslash B = \{2, 4, 781\}$ — конечно. Таким образом мы привели пример, когда A и $A \backslash B$ не равнмощны.

3. Для начала поймём, что нам достаточно построить биекцию между интервалом и отрезком, которая оставляет середину на места. Тогда применив эту биекцию ко всем диаметрам круга без границы получим биекцию, которая переводит круг без границы в круг с границей. Построим искомую биекцию f.
Для начала поймём, что нам достаточно построить $f : (0, 1) \mapsto [0, 1]$, так как все остальные случаи сводятся к этому гомотетией. Определим $f(x)$ следующим образом:
Для начала выбедим на $(0, 1)$ счётное множество $A = \{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, тогда $f(x) = x, x \notin A$, $f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a-3}, a \notin \{2, 3, 4\}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{3}) = 0, f(\frac{1}{4}) = 1$. Вполне очевидно, что описанная функция является биекцией, а значит задача решена.

4. Заметим, что у любого многочлена конечное число корней, а значит, если мы сумеем пронумеровать все многочлены, то потом просто будем нумеровать их корни в соответствии с порядком нумерации многочленов (сперва все корни первого, затем второго, и так далее), если какое-то число повторится, то просто пропустим его. Замечательно, давайте предбявим алгоритм, как пронумеровать многочлены с целыми коэфицентами (то есть построить биекцию с $\mathbb{N}$).
Для начала пронумеруем все многочлены фиксированной степени d. Для этого воспользуемся тем, что мы можем пронумеровать все целые числа. Тогда каждому многочлену сопоставим последовательность из номеров его коэфицентов и будем нумеровать эти последовательности. Заметим, что множество этих последовательностей равномощно $\mathbb{N}^d$, что как известно счётно (это утверждение равносильно тому, что $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ (что равносильно $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$), а дальше можно доказать по индукции по степени ($\mathbb{N}^k \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{k-1} \sim \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^{k-1} \sim \mathbb{N}^{k+1}$)). Таким образом, все многочлены можно пронумеровать.
После этого на i-той итерации нашего алгоритма будем присваивать номера с $\frac{i(i-1)}{2} + 1$ по $\frac{i(i+1)}{2}$ многочленам со стеенями от 1 до i, а конектернее, для каждой степени будем присваивать номер многочлену, с наименьшим номером во «внутренней» нумерации (нумерации среди многочленов той же степени), у которого еще нет номера в «общей» нумерации (среди всех многочленов).
Таким образом, каждый многочленн получит свой номер, а по вышедоказанному это равносильно тому, что свой номер получат и все алгебраические числа (при этом очевидно, что каждому номеру будет сопоставлено какое-то число), таким образом мы построим биекцию между $\mathbb{N}$ и множеством алгебраических чисел, следовательно множество алгебраических чисел счётно. Что и требовалось доказать.

5. Как известно, множество рациональных чисел всюду плотно на множестве вещественных, а значит и на любом отрезке прямой (на которой мы строим биекцию с $\mathbb{R}$) найдётся рациональное число (это просто условие всюду плотности). После этого, по аксиоме выбора, мы сможем каждому отрезку сопоставить рациональное число, которое на нём лежит, при этом все выбранные числа оказутся одинаковыми, так как отрезку по условию не пересекаются.
Теперь воспользуемся тем, что $\mathbb{Q}$ счётно, а значит мы можем пронумеровать все рациональные числа. Осталось только упорядочить все отрезки по номеру наименьшего рационального числа, включённого в этот отрезок и пронумеровать, что равносильно тому, что рассматриваемое множество конечно или счётно.

6. Известно, что в любом бесконечном множестве можно выделить счётное подмножество, давайте этим воспользуемся, и выделим в данном в условии множестве счётное подмножество A. Докажем, что A содержит бесконечное множество непересекающихся счётных подмножеств. Просто предъявим алгоритм их построения.
Пронумеруем элементы A, после этого будем «раскидывать» их по множествам $A_1, A_2, \ldots$. На i-той итерации нашего алгоритма будем «раскидаем» элементы с номерами с $\frac{i(i-1)}{2} + 1$ по $\frac{i(i+1)}{2}$ в множества $A_1, A_2, \ldots, A_i$ по одному (что возможно, так как количество множеств на каждой итерации конечно и равно количеству элементов). Таким образом мы получим систему непересекающихся подмножеств множества A счётной мощности, где каждое подмножество также будет счётным. Что и требовалось доказать.

7. Для начала пронумеруем всё целые числа (это возможно, так как, как известно, $\mathbb{Z}$ счётно). Далее будем «назначать» значения биекций в целых числах в порядке их нумерации.
На i-той итерации рассмотрим целое число x_i далеевыберем «главную» биекцию: если $i \underset{3}{\equiv} 0$, то это g_3, если $i \underset{3}{\equiv} 1$ — то g_1, во всех остальных случаях— g_2. Далее «главной» биекции «назначим» в точке x_i наименьшее по номеру значение, которое она еще не принимает, о оставшимся двум — некоторые значение a и b, такие, что оба по модулю больше, чем любое значение, уже присвоенное нашим биекциям, и при этом выполняется равенство $f(x_i) = g_1(x_i) + a + b =>$ $f(x_i) - g_1(x_i) = a + b$, что, очевидно, имеет сколь угодно большие по модулю решения. Таким образом g_i будут определены на всех целых числах, и в разных точках их значения будут отличаться. Осталось понять, почему для любых x, i существует k такое, что $g_i(x) = k$. Пусть в нашей нумерации целых чисел k имеет номер r, тогда не позднее, чем за $3r$ итераций нашего алгоритма будет найдено искомое x, а значит g_i — биекция. Что и требовалось доказать.

Шестое ДЗ

1. Предположим, что множество таких последовательнстей счётно, тогда каждое его подмножество или конечно, или счётно. Зная это, рассмотрим последовательности, где пара элементов с номерами $2k, 2k+1$ всегда имеет вида 01 или 10. Легко убедиться, что множество таких последовательностей является подмножеством описанного в условии множества двоичных последовательностей. Очевидно, что оно бесконечно, тогда, из нашего предположения оно должно быть счётно, а значит, мы сумеем пронумеровать все его элементы. Докажем, что так мы пронумеровали не все последовательности нашего множества. Для этого каждой исходной последовательности сопоставим новую, в которой каждый элемент будет виды пары соседних элементов в исходной последовательности. Таким образом, мы получим новую воичную последовательность, и по каждой возможной такой последовательности мы сымеем восстановить исходную (у нас получилась биекция), а множество таких двоичных последовательностей, как известно, не счётно. Получилось противоречие, что и требовалось доказать.

2. Для начала сопоставим каждому отрезку пару вещественных чисел, равных его началу и концу (будем считать все отрезки ориентированными). Тогда мы хотим доказать, что $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\sim\mathbb{R}$, так как мощность множества вещественных числе равна континуум. С другой стороны, мы знаем, что $\mathbb{R}$ равномощно множеству бесконечных двоичных последовательностей. Теперь давайте построим биекцию из $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ по следующему правилу:

- каждому числу наша функция сопоставляет какую-то двоичную последовательность бесконечной длины (это сопоставление биективно),
- для каждой пары последовательностей она сторит третью, как результат их «сливания» по следующему правилу: на позицию с номером $2k+1$ втсаёт символ с номером $k+1$ из первой последовательности, а на $2k$ — с номером k из второй.
- после f сопоставляет полученной последовательности вещественной число (по той же биекции, что и до этого).

Так же легко убедиться, что полученная функция является биекцией, а значит мы доказали, что $\mathbb{R}^2\sim\mathbb{R}$. Более того, из этого утверждения индукцией по степени можно доказать, что $\mathbb{R}^n\sim\mathbb{R}$.
Таким образом, мы доказали, что множество отрезов на прямй имеет мощность $\mathfrak{C}$.

3. Для начала обозначим множество последовательностей из условия за Σ. Как известно, $\{0,1,2\}^{\aleph_0}\sim\mathbb{R}$, а $\Sigma\subset\{0,1,2\}^{\aleph_0} => |\Sigma|\leqslant|\mathbb{R}|$
Теперь рассмотрим $P\subset\Sigma=\{S\}$, где верно, что $s_{2k}=1, s_{2k+1}\in\{0,2\}$. Рассмотрев каждый элемент последовательности по модулю 2, мы получим что $|P|\geqslant\left|\{0,1\}^{\aleph_0}\right| => |\Sigma|\geqslant\left|\{0,1\}^{\aleph_0}\right|=|\mathbb{R}| => \Sigma\sim\mathbb{R}$.

4. Обозначим множество описанных прогрессий за Φ. Покажем, что $|\Phi|=\aleph_0$.
Рассмотрим все прогрессии, начинающиеся с числа n, обозначим их множество за Φ_n. Построим из Φ_n инъекцию в $\mathbb{N}^n_{+\{-1,0\}}$ по следующему правилу:
для прогрессии $A\in\Phi_n$ в последовательности $S(A)$ на i-том месте будем писать, сколько раз в A встречается число i, если же, начиная с какого-то mометна, все числа в последовательности равны, то в соответствующем месте $S(A)$ напишем -1. Таким образом, $|\Phi_n|\leqslant\left|\mathbb{N}^n_{+\{-1,0\}}\right|$.
Пусть $\mathbb{N}^*_{+\{-1,0\}}=\{\mathbb{N}^n_{+\{-1,0\}}|n\in\mathbb{N}\}$. Покажем, что $\left|\mathbb{N}^*_{+\{-1,0\}}\right|=\aleph_0$. Для начала земетим, что для элементов $\mathbb{N}^n_{+\{-1,0\}}$ можно ввести лексекографический порядок (что очевидно) и пронумеровать их, а значит $\left|\mathbb{N}^n_{+\{-1,0\}}\right|=\aleph_0$. Мы уже много раз доказывали, что объединение счётного числа счётных множеств счётно, а значит и мощность $\mathbb{N}^*_{+\{-1,0\}}$ равно $\aleph_0$, а так как $|\Phi|\leqslant\left|\mathbb{N}^*_{+\{-1,0\}}\right|$, и Φ, очевидно, бесконечно, то оно счётно. Что и требовалось доказать.

5. Для начала выберем некоторую биекцию F_0, и убдем каждому рациональному члу сопоставлять его пару в этой биекции. Таким образом нам необходимо почситать количество биекций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, то есть количество перестановок натуральных чисел. Обозначим множество всех перестановок на $\mathbb{N}$ за Θ. Покажем, что $|\Theta|>\aleph_0$. Предположим обратное, тогда все перестановки можно пронумеровать, приведём пример перестаноки, которая не получила свой номер. Выберем ей значения так, чтобы в i-том символе она отличалась от i-той перестановки (очевидно, что так можно сделать), таким образом, $|\Theta|>\aleph_0$.

6. Да можно, для доказательства просто предъявим пример размещения континуум единиц на плоскости.
Для начала скажем, что все единицы будут повёрнуты так, что их «короткая» строна будет направлена вдоль оси OX в положительную сторону (предварительно мы ввели декартову систему координат), то есть единицы будут выглядеть примерно так: $\angle$. Далее рассмотрим прямую, задаваемую уравнением $y=x$. Легко убедиться, что, если разместить единицы так, чтобы их вершины лежали на этой прямой, то они не будут пересекаться (что очевидно). Тогда давайте расположим единицы так, что в каждой точке прямой $y=x$ будет распологаться рвершина какой-то единицы. Тогда

мощность множество единиц совпадает с мощностью $\mathbb{R}$, то есть равна $\mathfrak{C}$, и при этом единицы не пересекаются. Что и требовалось доказать.

7. Для начала введём на плоскости декартову систему координат. Обозначим за S множество всех точек, обе координаты которых рацианальны. Как мы знаем, $|S| = \aleph_0$. Для любого креста, отрезки которого не паралленльны осям координат верно, что на нём найдется уникальная точка из S (что очевидно). Осталось показать, что множество крестов, с отрезками параллельными осям координат также счётно, и тогда мы докажем, что всё множество крестов счётно. Для этого оставим на плоскости только эти кресты и введём новые ося координат так, чтобы они не были параллельны сторонам оставшихся крестов. Повторив аналогичные рассуждения м ыполучим, что их множество счётно, а значит любое множество крестов, которое можно нарисовать или конечно, или счётно. Что и требовалось доказать.

8. $\exists\, B' = B \backslash A$, тогда $A \cup B = A \cup B'$. Докажем, если $A \cup B'$ континуально, то и одно из исходных множеств также континуально (тогда мы докажем исходную заачу).
Так как $|A \cup B'| = \mathfrak{C}$, то $A \cup B' \sim [0, 1]^2$. С другой стороны, рассмотрим Квадрат 1×1, как объенидение $\mathfrak{C}$ множеств $[0, 1]$. Предположим, что хотя бы одно из множеств A, B' п омодулю меньше, чем $\mathfrak{C}$. Тогда среди рассматриваемых множеств $[0, 1]$ найдётся хотя бы одно, в котором нет элементов из этого множества (A или B'), Следовательно все его элементы лежат в оставшемся, которое, в таком случае континуально. Что и требовалось доказать.

Седьмое ДЗ

1. Для начала заметим, что из рефлективности $\leqslant$ следует, что $x \leqslant x => x \sim x$, то есть, отношение $\sim$ также рефлективно.
Заметим, что $x \sim y <=> x \leqslant y\ \ \&\ \ y \leqslant x <=> y \leqslant x\ \ \&\ \ x \leqslant y <=> y \sim x$. Таким образом отношение $\sim$ симметрично.
Осталось показать транзитивность $\sim$. $\exists\, a \sim b\ \ \&\ \ b \sim c <=> a \leqslant b,\ b \leqslant c\ \ \&\ \ c \leqslant b,\ b \leqslant a$. Из транзитивность $\leqslant$ верно, что $a \leqslant c\ \ \&\ \ c \leqslant a <=> a \sim c$. Что и требовалось доказть.

2. Давайте рассматривать частичные порядки на множествах челых чисел, а отношением порядка будет кратность одного числа на другое. Иными словами, будем говорить, что $a \preccurlyeq b <=> a|b$. Покажем, что ответ может принимать все значения от 0 до 6.

- **0.** Пусть наши числа это различные степени двойки, тогда очевидно, что полученный порядок яввется линейным.
- **1.** Пусть 2 из наших чисел — степени различные, ненулевые степени 6, а оставшиеся 2 — 2 и 3 соответственно, тогда существует только одна пара несравнимых элементов.
- **3.** Пусть наши числа это 2, 3, 5, 30, тогда пар несравнимых элементов ровно 3.
- **4.** Пусть наши числа это 2, 4, 3, 9, тогда пар несравнимых — 4.
- **5.** Пусть наши числа это 2, 4, 3, 5, тогда существует только 1 пара сравнимых, а значит оставшиеся 5 пар — пары несравнимых.
- **6.** Пусть наши числа это 2, 3, 5, 7, тогда они все попарно несравнимы.

3. Давайте докажем, что эти порядки изоморфны. Заметим, что $42 = 2 \times 3 \times 7$. Тогда каждому делителю этого числа сопроставим элемент $f(a) : \{x : x|42\} \mapsto \{0,1\}^3$, где каждое число равно степени вхождения 2, 3, 7 соответственно. Тогда верно, что $a|b <=> f(a) \subseteq f(b)$, получим, что f — изоморфизм порядков. Рассмотрим функцию $g(a) : \{x : x \subseteq \{1,2,3\}\} \mapsto \{0,1\}^3$. Легко убедиться, что $a \subseteq b <=> g(a) \subseteq g(b)$, следовательно g — также является изоморфизмом прядков. Таким образом, мы получили, что оба данных порядка изоморфны некоторому третьему, следовательно они изморфны между собой. Что и требовалось доказать.

4. Предположим, что они изоморфны, тогда сеществует некоторый изоморфизм порядков $f : \mathbb{Z} + \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Рассмотрим $f(1')$.

- $f(1') = a$ (без штриха). Тогда рассмотрим прообраз числа $0'$. Очевидно, что это некоторое число k', иначе нарушается порядок. С другой стороны, на порядке первом порядке отрезок $[1', k']$ был конечным, а вот его образ, $[a, 0']$, очевидно, бесконечен. Тогда такой вариант невозможен.
- $f(1') = a'$ (со штрихом). Тогда рассмотрим прообраз $(a-1)'$. Очевидно, что это некоторое число без штриха (иначе нарушится порядок между $1'$ и этим числом), обозначим его за b, а прообраз 0 обозначим за c (тоже без штриха, по понтным причинам), при этом $c < b$, так как f сохраняет порядок. В исходном порядке, отрезок $[b, c]$ был конечным, а его образ — бесконечный, следовательно, такой вариант тоже невозможен.

Таким образом, искомого изоморфизма не существует.

5. Предположим, что данные порядки изоморфны, тогда чуществует некоторый изоморфизм порядков $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Рассмотрим образ $(1,0)$, пусть он равен (a,b). Элемент $(a-1, b-1) < (a,b) <=> f^{-1}((a-1,b-1)) < f^{-1}((a,b))$, тогда прообраз $(a-1, b-1)$ имеет вид $(1,x),\ x < 0$. Тогда отрезок $[(1,0),(1,x)]$ конечен, а его образ — нет, следовательно искомого изморфизма не существует.

6. Докажем, что нанные порядки не изоморфны. Предположим обратное, тогда существует некоторый изоморфизм порядков $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$. Рассмотрим поорбазы точек $(1,0)$ и $(2,0)$, пусть это некоторые числа a и b. Займёмся полвинным делением. На очередной итерации будем брать точку $m = \frac{a+b}{2}$, которая, очевидно, рациональна и перебозначать за отрезок $[a,b]$ отрезок $[a,m]$ или $[m,b]$. Давайте поясним, как мы будем выбирать.
Заметим, что образ точки m может иметь вид $(1,x)$, где x больше соответствующей координаты точки a (в этом случае выберем отрезок $[m,b]$), или вид $(2,y)$, где y меньше соответствуоей координаты точки b (в этом случае выберем отрезок $[a,m]$).
Заметим, что наш алгоритм приводит к тому, что в пределе на первом порядке мы получим одно число, или пустое множество, а на втором — бесконечный отрезок (так как после каждой итерации алгоритма он остаётся таковым). Следовательно искомого изоморфизма не существует.

7. Предположим, что данное множество не является фундированным, тогда верно, что в нём найдется некоторое подмножество A, в котором существует бесконечная убывающая последоавтельность S. Рассмотрим эту последоваельность S. Легко заметить, что множество первых элементов всех последовательностей из s ограничено снизу (все они больше 0), а значит, найдётся наименьший элемент, а так как S, по нашему предположению бесконечная последовательность, то начиная с некоторого момента, все последовательности в S начинаются с одного элемента. Аналогичное рассуждение верно и для всех последующих элементов в последовательностях из S. Тогда, для каждого индекса верно, что начиная с некоторого момента, все последоваетсльности в S совпадают с ним. Тогда для каждого индекса верно, что элемент с его номером после того, Как он стабилизируется верно, что он либо равен, либо меньше пред идущего, следовательно S не может быть бесконечной, так как тогда, начиная с какого-то момента верно, что все элементы в S, начиная с какого-то индекса, тождественно равны некоторому числу, а значит совпадают. Значит, S, обрезанная до какого-то элемента, конечна, а значит мы пришли к противоречию, и данное множество фундированное. Что и требовалось доказть.

Восьмое ДЗ

1. Заметим, что любые цепь и антицепь пересекаются не более, чем по одному элементу, что очевидно. Тогда мы получаем оценку на $n-k+1$, осталось привести пример.
Дававйте рассматривать прядок на натуральныйх числах, где отношением порядка будет делимость. Пусть цепь представляет из себя k различных степеней 2, начиная с первой, а все остальные числа — различные нечётные простые. В таком случае, масимальная антицепь, очевино содержит ровно $n-k+1$ число (достаточно просто взять все простые числа).

2. Обозначим данное множество за S и предположим обратное: все цепи и антицепи в S конечны.
Тогда для каждого $A \subset S$ за A_0 обозначим множество наименьших жлементов в A. Так как A_0 является антицепью в S (что очевидно), то мощность A_0 для любого A конечна. Также легко заметить, что $\forall a \in A \exists a_0 \in A_0 : a_0 \leqslant a$ (так как вякая цепь в A является цепью в S, а значит конечна и имеет наименьший элемент в A, который гарантированно лежит в A_0). $\forall s \in S$ обозначим множество элементов больших s за $M(s)$. Заметим, что $M(s)_0$ конечно по вышедоказанному. Рассмотрим такое множество X, которое состоит из $s \in S : M(s)$ бесконечно. Тогда для любого x из X верно, что $M(x)_0$ конечно.
Заметим, что $M(s) = M(s)_0 \cup \bigcup\limits_{s_0 \in S_0} M(s_0)$. В силу конечности $M(s)_0$ мы получим, что для каждого элемента h можновыбрать некоторый другой $f(h)$, такой что $h < f(h)$, что равносильно тому, что мы сумели найти бесконечную возростающую последовательность. Что и требовалось доказать.

3. Рассмотрим граф, где верины — прямые из условия, а рёбра имеют 2 цвета, при том белое проводим, если 2 прямые пересекаются не ниже OX, иначе проведём чёрное ребро. По условию, любые 2 прямые пересекаются, поэтому граф получится полным. Тогда применим для начего графа теорему Рамсея. Известно, что $r(3,5) = 14$, следовательно в нашем графе найдётся K_3 на чёрном цвете, или K_5 на белом (возможно и то и то), а это ровно то, что мы хотим. Что и требовалось доказать.

4. Нет, для этого покажем, что есть пример, в котором x и $f(x)$ не сравнимы при любом x.
Рассмотрим произвольное множество, в котором никакие 2 элемента не сравнимы, легко убедиться, что такое множество фундированное, пусть $f(x)$ — произвольное преобразование, которое на всех элементах, кроме a и b тождественно, а эти 2 меняет местами. Очевидно, что такой пример удовлетворяет условию, и при этом не верно, что $f(x) \geqslant x$ для $x = a$.

5. Предположим обратное, тогда найдётся такое $x_0 \in A : f(x_0) = x_1 \in A, x_1 < x_0$, тогда из монотонности $f(x)$, получим, что $f(x_1) = x_2, f(x_0) > f(x_1) => x_1 > x_2$. Аналогичное верно для произвольного $i : f(x_i) = x_{i+1}, f(x_{i-1}) > f(x_i) => x_i > x_{i+1}$. В таком случае, мы получили бесконечную убывающую последовательности $\{x_i\}$, а значит исходное множество не может быть фундированным, простиворечие.

6. Для начала преобразуем нашу систему отрезков так, что если отрезок a вложен в отрезок b, то выкинем отрезок b. Покажем, что при таких операциях числа n и k не изменились.
Во-первых, для лбого «протыкания» полученной системы верно, что будет проткнута и исходная система, а для любое «протыкание» исходной, также удовлетворяет и полученной, поэтому число k не изменилось. Во-вторых, если у нас получилось найти n попарно непересекающихся отрезков в исходной системе, то каждый из них остался в полученной или же остался некоторый отрезок, вложенный в него, поэтому число n неуменьшилось, а так как n, очевидно, не могло увеличиться, то оно осталось неизменным. Таким образом, мы можем считать, что в нашей системе отрезков любые 2 или не пересекаются, или же пересекаются, но не вложенны (обозначим полученную систему за Φ).
Введём на прямой с отрезками линейную систему координат. Рассмотрим множество систем непересекащихся систем отрезков (обозначим за P). Для каждой системы $A \in P$ упорядочим отрезки в порядке возрастания координаты их левой границы, и системе A сопоставим $X(A) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где x_i — координата левого конца i-того отрезка. Теперь на P введём порядок, где отношением $A, B \in P$ будет отношение $X(A), X(B)$ в лексекографичексом порядке. В силу конечности P найдётся некоторый наименьший элемент, а так как наш порядок линейный, то этот элемент будет минимальным, обозначим его за $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$, где s_i — i-тый отрезок системы S.
Далее будем доказывать, что, ставя точку в правй конец s_i (начиная с первого), верно, что мы попали хотя бы одной точкой в каждый отрезок из Φ, левый конец которого лежит не раньше, чем правый конец s_i. После первого действия, это свойство, очевидно, выполняется, иначе найдётся больше n попарно непересекающихся отрезков. ПУсть наше предположение оказалось неверным после k-того действия. Тогда мы нашли отрезок l, который не пересекается с s_j, при $j < k$, а его левый конец лежит раньше, чем левый конец s_k (иначе $s_k \subset a$). А тогда S — не наименьший элемент P. Также заметим, что после n-той операции все отрезки, по нашему предположению, будут содежрать хотя бы одну

точку, иначе можно выбрать больше, чем n попарно непересекающихся отрезков.
Таким образом, мы попали не менее, чем одной точкой в каждый отрезок из Φ, а по вышедоказанному это равносильно тому, что для любой исходной системы верно, что $n = k$. Что и требовалось доказть.

7. Индукцией по k докажем, что бесконечной антицепи не найдётся.
База. $k = 1$, очевидно, так как порядок на $\mathbb{N}$ линейный.
Переход. Предположим, что задача решена при $k = n$, покажем, что она также решена при $k = n + 1$. Предположим обратное, и нашлась какая-то бесконечная антицепь, выберем в ней произвольный элемент A. Для любого элемента антицепи $B \neq A$ верно, что найдётся координата, в которой $B < A$ (иначе A и B сравнимы, и $A < B$). Разобьём все элементы антицепи, отличные от A на $n + 1$ группу $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$, помещая каждый элемент антицепи в группу, номер которой совпадает с номером координаты, в которой этот элемент меньше A (если элемент можно поместить в несколько групп, то выберем произвольную). Заметим, что при этом каждый элемент (кроме A) попал в какую-то группу, число которых конечно, тогда, если мы докажем, что в каждой группе число элементов так же конечно, то и мощность всей антицепи также конечна.
Рассмотрим произвольную группу X_i, заметим, что у всех элементов X_i i-тая координата ограницена некотороым числам m, где m — значение i-той координаты A. Тогда разобьём X_i на $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}$, где каждый элемент будем помещать в ту группу, номер которой совпадает с его значением в i-той координате. Так как Y_j — подмножество некоторой антицепи, то Y_j также является антицепью. Заметим, что если из всех элементов Y_j «выкинуть» i-тую координату, то полученной множество Z_j будет вложено в $\mathbb{N}^k$, и, очевидно, будет являться антицепью, тогда по предположению индукции Z_j конечно, следовательно, Y_j конечно, а тогда и X_i конечно, а это ровно то, что мы хотели доказать. Таким образом, бесконечной антицепи в $\mathbb{N}^k$ не может существовать.

Девятое ДЗ

1. Предположим, что такой граф существует, тогда «выкинув» из него вершину степени 1 (вместе с ребром из неё), мы получим граф на 7 вершинах с 22 рёбрами, однако, в графе на 7 вершинах не может быть больше, чем $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ ребро, а значит, такое невозможно.

2. Заметим, что на трёх вершинах степени 4 уже есть 12 рёбер, при том мы могли посчитать дважды не более, чем 3 из них (по одному на каждую пару). Однако, если мы посчитали дважды 3 ребра, то они уже образуют цикл, а если мы посчитали дважды не более 2 рёбер, то всего в графе на 10 вершинах их не менн 10, а значит он в любом случае не может быть деревом.

3. Подвесим дерево за его корень, тогда по условию в нём n уровней (не считая сам корень), при этом на уровне с номером k ровно 2^k вершин. Также, очевидно, что наибольшее расстояние не превосходит $2n$ (так как растояние до любой вершины до корня не больше n). Также заметим, что есть вершины, расстояния между которыми в точности равны $2n$ — это листья, которые являются потомками разных детей корня (так как нам гарантированно придётся пройти через корень, а расстояние до него от каждой из рассматриваемых вершин в точности равно n). Всего таких пар, очевидно, $\left(2^{n-1}\right)^2$. Покажем, что никакие другоие пары не подходят.
Заметим, что обе решины должны быть листьями, иначе, мы доберёмся до корня от первой и до второй от корня меньше, чем за $2n$, а при этом, такой путь не меньше расстояния между вершинами. Если же оба листа являются потомками одного ребёнка корня, то нам достаточно дойти до этого ребёнка, а не до корня, и тогда расстояние будет не больше, чем $2(n-1)$.
Таким образом, мы показали, что всего подходящих пар ровно $\left(2^{n-1}\right)^2$. Осталось заметить, что для каждой пары существует ровно 2 варианта порядка, а значит, существует ровно 2 пути. Следовательно ответ — $2(2^{n-1})^2$.

4. Давайте построим граф, где вершинами будут являться области, на которые исходные кубики внутри большого куба разбивают пространство (всего $(n-2)^3$ маленьких внутренних кубиков и 1 область, полученная сливанием всех кубиков, соприкосающихся с внешники гранями большого куба), и будем соединять их ребром тогда и только тогда, когда в исходной картинке 2 области были смежными по перегородке, а после этого перегородка была стёрта. Заметим, что наше условие о том, что м ысможем добраться до «внешнего» кубика равносильно тому, что мы нарисуем связный граф, а значит мы провели не менее, чем $(n-2)^3 + 1 - 1$ ребро, то есть стёрли ровно $(n-2)^3$ перегородок. Осталось показать, что такого числа перегородок достаточно. Зафиксируем неоторое направление, перпендикулярное направлению кубиков, а после этого в каждом «внутреннем» кубике (в том, что лежит в центральном кубе $(n-2)^3$) сотрём перегородку в выбранном направлении, тогда, очевидно, что полученная фигура удовлетворяет условию, и мы стёрли ровно $(n-2)^3$ перегородок.

5. Давайте решать эту задачу индукцией по n (для каждого k отдельно).
База. $n = k+1$. Очевидно, что K_n удовлетворяет условию.
Переход.
Если k чётно, то предположим, что задача решена для $n = a$, докажем её для $n = a+1$. «Забудем» про одну из вершин и по предположению индукции посторим необходимый граф для $n-1$ и k по предположению индукции. Затем «вернём» забытую вершину (назовём её X) и выберем произвольные $k/2$ рёбер (обозначим их за A_iB_i) (заметим, что k рёбер гарантированно найдутся). Далее заменим рёбра A_iB_i на A_iX и XB_i. Заметим, что полученный граф удовлетвряет условию.
Если k нечётно, то предположим, что задача решена для $n = a$, докажем её для $n = a+2$. «Забудём» про пару вершин (обозначим их за X и Y). По предположению индукции на оставшихся вершинах мы смогли построить граф, удовлетворяющий условию для $n-2$ и k. «Вернём» забытую пару и выберем $k-1$ рёбер (обозначим их за A_iB_i) (заметим, что $k-1$ рёбер гарантированно найдутся). Далее заменим рёбра A_iB_i на A_iX и YB_i и проведём ребро XY.Заметим, что полученный граф удовлетвряет условию.

6. Предположим обратное, тогда нашлось некоторое множество рёбер мощности меньше n такое, что после их удаления граф расался на несколько компонент связности. Заметим, что какая-то из них будет состоять из не более, чем n вершин. Обозначим число вершин в ней за k. Рассмотрим произвольную вершину из этой компоненты, заметим, что «наружу» этой компоненты в исходном графе шло хотя бы $n-(k-1)$ ребро, и таких вершин ровно k, следовательно, в исходном графе между этой компонентой и другими было хотя бы $k(n-(k-1))$ рёбер. Рассмотрим эту формулу, как функцию от k. Заметим, что получится парабола с ветвями вниз, что является выпуглой вверх функцией, а значит минимум достигается на концах области определения (при этом, очевидно, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Таким образом, минимальное число рёбер, которые надо удалить, чтобы изолировать рассматриваемую компоненту хотя бы $min(1(n-(1-1)), n(n-(n-1)) = n$. Противоречие, так как мы удалили строго меньше n рёбер.

7. Давайте называть галочкой пару рёбер вида AB, BC, где A, C — концы галочки, а B — центр. Для начала заметим, что каждой паре вершин соответствует ровно 2 галочки, и каждая галочка соответствует какой-то паре (соответствие: пара вершин = концы галочки). Таким образом галочек в точности $\frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n(n-1)$.
Рассмотрим произвольную вершину A, тогда для любой вершины B найдётся пара вершин U, V, таких, что обе связаны в A. Также, легко понять, что для любого выбора B полученная пара U, V будет отличаться (иначе нарушится условие для вершин U, V). Таким образом, легко понять, что A фвляется центром хотя бы $n-1$ галочки, а значит все вершины являются центрами строго $n-1$ галочки (иначе их больше, чем $n(n-1)$).
Таким образом, у каждой вершины одинаковое количество галочек, а значит у них одинаковые степени (так как количество галочек равно $\frac{v(v-1)}{2}$, v — степень вершины). Что и требовалось доказть.

Десятое ДЗ

1. Для начала рассмотрим то, как себя ведут остатки при делении на 10 у последовательньсти $\{a_i\}$.

$$a_0 \underset{10}{\equiv} 5, \quad a_1 \underset{10}{\equiv} 8, \quad a_2 \underset{10}{\equiv} 7, \quad a_3 \underset{10}{\equiv} 2, \quad a_4 \underset{10}{\equiv} 7.$$

В силу того, что по последней цифре числа a_i однозначно восстанавливается последняя цифра числа a_{i+1} можно сказать, что остатки зацикливаются с предпериодом 2 и длиной периода 2, следовательно, при чётных i больших 1 число a_i будет заканчиваться на 7, а ни нечётных (так же больших 1) на 2. Следовательно a_{2015} будет заканчиваться на 2.

2. Обозначим вершини нечётной степени за A_1, A_2, A_3 и A_4. Рассмотрим произвольный путь между парой вершин A_1 и A_2. Покрасим его в первый цвет и далее будем игнорировать рёбра, входящие в него. При этом заметим, что часть, покрашенная в первый цвет обходится за 1 путь.
В оставшемся графе у всех вершин, степень которых была чётна, она таковой и осталась, а у A_1 и A_2 чётность изменилась (Если появились изолированные вершины, то просто будем из игнорировать). Осталось понять, что теперь в нашем графе найдётся гамельтонов путь, начинающийся в A_3 и заканчивающийся в A_4, так как граф связен и степени всех вершин, кроме A_3 и A_4 чётны, а у них нечётны. Тогда все оставшиеся рёбра мы просто покрасим во второй цвет. Что и требовалось доказать.

3. Да, дайте предъявим искомый путь.

$$\{000\} \to \{100\} \to \{110\} \to \{010\} \to \{011\} \to \{111\} \to \{101\} \to \{001\}$$

Легко убедитсья, что предъявленный путь проходит по всем вершинам и при этом ялвяется простым.

4. Давайте решать эту задачу по индукции по количеству вершин (n).
База. $n = 3$ — очевидно.
Переход. Предположим, что задача решена для $n = k$, докажем её для $n = k + 1$. Для этого выребем произвольную вершину X и на время забудем про неё, тогда мы получим полный связный граф на k вершинах, а значим для него можно применить предположение индукции, тогда в нём найдётся некоторая вершина Y, из которой до любой другой можно добраться не более, чем за 2 хода. Обозначим множество всех вершин, в которые ведут рёбра из Y за S.Вернём вершину X. Заметим, что если $\exists A \in S : \exists$ ребро из A в X, то для исходного графа вершина Y будет являться искомой, аналогично и, если из Y есть ребро в X. Следовательно рёбра между X и множеством $S \cup \{Y\}$ ведут из X (иначе мы уже нашли искомую вершину). Осталось заметить, что в таком случае вершина X удовлетворяет условию, что от неё можно добраться до любобй другой не более, чем за 2 хода. В самом деле, по предположению индукции из $S \cup \{Y\}$ можно добраться до любой вершины не из этого множества за 1 ход. Тогда и из $S \cup \{X\}$ можно сделать аналогичное, а до Y из X мы умеем добираться за 1 ход.Таким образом мы доказали переход, а значит решили задачу для произвольного n.

5. Докажем это по индукции по числу вершин (n).
База. $n = 2$ — очевидно.
Переход. Предположим, что задача решена для $n = k$, докажем её для $n = k + 1$. Для этого выберем произвольную вершину A_0 и на время выкинем её. Полученный граф по-прежнему является полным ориентированным и в нём ровно k вершин, а значит к нему можно применить предположение индукции. Таким образом в нём найдётся простой ориентированныё путь по всем вершинам, обозначим его как $A_1A_2 \ldots A_k$. Вернём A_0. Применив условие задачи для пары A_0, A_1 получим, что между ними есть ориентированное ребро. Если оно идёт от A_0, то просто поставим A_0 в начало нашего пути. Аналогично, мы сможем поставить A_0 в конец нашего пути, если ребро A_kA_0 выходит из A_k. Рассмотрим наименьшее такое i, что ребро A_iA_0 выходит из A_i (такое обязательно найдётся так как хотя бы одно такое i существует ($i = k$)). При этом $i \neq 1$. Тогда мы просто сможем построить путь $A_0 \ldots A_{i-1}A_0A_i \ldots A_k$. Таким образом мы совершили переход, а значит решили задачу для всех n.

6. Заметим, что не 2-раскрашиваемость графа равносильна тому, что в нём найдётся какой-то простой цикл нечётной длины. Так как в графе всего чётное число вершин, то найдётся некоторая вершина, которая не входит в найденный цикл. Тогда если её степень не ноль, то мы просто можем удалить любое выходящее их ней ребро, и граф останется не вдудольным (мы просто не изменим рассматриваемый цикл), а значит, граф не является наименьшим. Следовательно в любом минимальном не 2-раскрашиваемом графе найдётся вершина степени 0. Что и требовалось доказать.

7. Построим ориентированный граф состояний, где состоянием будет количество камней в каждой коробочке и указание на коробочку, в которую положили последний камень. Заметим, что всего состояний конечное число. Из вершины будем проводить ребро в те, которые соответствуют состояниям, которые можно получить из того, которому соответствует вершина, из которой проводим ребро. Заметим, что по текущей расстановке однозначно определяется следующая, тогда исходящая степень каждой вершины равна 1. Докажем, что по текущей расстановке можно восстановить предыдущую. Для этого просто сделаем «обратный ход»: будем брать по 1 камню из каждой кучки, начиная с той, которая отмечена в состоянии (против часовой стрелки), пока не найдём пустую (возможно мы пройдём по некоторым коробка по несколько раз), а затем сложим в неё все собранные камни. Заметим, что это тот же ход, что описан в условии, но все его операции выполнены в обратном порядке. Таким образом в графе состояний ходящая степень каждой вершины также равна 1, следовательно весь граф состояний — набор циклов, а значит когда-то снова встретится стартовое состояние => повторится начальное расположение камней. Что и требовалось доказать.

Одиннадцатое ДЗ

1. Предположим обратное, тогда существует некоторое множевтво $X = S_i$, которое содержится в $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_l$, $i > l$. В таком случае рассмотрим объединение $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_l \cup S_i$. В таком объединении по условию содержится ровно l элементов, но при этом оэто объединение состоит из $l + 1$ множества, значит не выполняется условие разнообразия, получается противоречие. Что и требовалось доказать.

2. Давайте назовём искомое паросочетание P. Сразу же скажем, что в P мы включим $M \cap M'$, и в дальнейшем решении будем считать, что паросочетания M и M' не пересекаются. Если некоторое ребро из $M \cup M'$ не перескается ни с каким другим из этого же пересечения, то мы включаем его в P и выкидываем из M и M' (из того, в котором оно лежало). Если мы сумеем обработать так все рёбра, то мы победим. Если же м в какой-то момент остановились, то у нас осталось несколько путей, в которых чередуются рёбра из M и M'. Рассмотрим произвольный недополнимый из них. Пусть он, без ограничения общности начинается в первой доле ребром из M. Возьмём из него только рёбра из паросочетания M. Заметим, что они покрывают все вершины из первой доли и из второй (те вершины, которые покрывало хотя бы одно ребро из рассматриваемого пути). Таким образом мы смогли выбрать набор рёбер такой, что он покрывает все вершины из $S \cup T$, осталось понять, почему это паросочетание. Это очевидно, так как те рёбра, которые были включены в одно паросочетание изначально не пересекаются, а не, которые были в разных обрабатываются одновременно со всеми, с которыми могут пересечься, и мы выбираем их так, чтобы пересечений не было. таким образом получится искомое паросочетание.

3. Для начала рассмотрим наименьшее вершинное покрытие в G. В силу того, что каждая вершины имеет степень не больше d, наименьшее вершинное покрытие должно содержать хотя бы $\frac{l}{d}$ вершин, а тогда существует паросочетание, такого же размера. Что и требовалось доказать.

4. Давайте рассмотрим двудольный граф, где вершинами первой доли будут подмножества мощности k, а второй — $k + 1$, ребро будем проводить, если подмножество из первй доли включено в подмножество из второй. В первой доле будет ровно $\binom{n}{k}$, в во второй — $\binom{n}{k+1}$. Также, как известно, при ограничен иях на k из задачи верно, что $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{k+1}$. Полученный граф будет регулярным, то есть, степени всех вершин в каждой из долей равны между собой (что очевидно), тогда легко убедиться, что выполнено условие разнообразия, а значин найдётся паросочетание мощности $\binom{n}{k}$, а это в точности то, что мы и хотим (каждому подмножеству из первой доли сопоставим его пару в паросочетании из второй). Что и требовалось докзать.

5. Давайте решать эту задачу по индукции по d.
База. $d = 1$ — произвольный граф с вершинами, степени не больше, чем 1. Очевидно, что из себя он представляет набор отдельных рёбер, а значит и разбивается на 1 паросочетание.
Переход. Пусть задача решена для $d = k$, докажем её для $d = k + 1$. Для этого рассмотрим первую долю графа (A). Оставим в ней только те вершины, степень которых в точности равна $k + 1$ (S). В силу того, что степени вершин во второй доле после этой операции так же не превышают $k + 1$ (мы не рассматриваем рёбра, содержащие вершины из первой доли степени $k+1$), верно условие ранообразия, а значит мы можем применить лемуу Холла. Таким образом мы найдём паросочетание на всех вершинах степени $k+1$ из первой доли (M). После этого выделим во второй доле (B) все вершины степени $k+1$ (T) и снова применим лемму Холла, получим новое паросочетание M'. Осталось применить для полученных множеств и паросочетаний задачу 2. Тогда мы получим паросочетание, которое покрывает все вершины степени $k + 1$. Выделим его и применим предположение индукции для графа без этих рёбер и $d = k$. Таким образом мы совершили переход и доказали задачу для произвольного d.

6. Построим двудольный граф, в котором вершинами первой доли будут подмножества A_i, а второй — B_i. Между двумя вершинами будем проводить ребро цвета s, если соответствующие подмножества пересекаются по элементу s (при этом мы разрешаем кратные рёбра). Тогда степень каждой вершины в точности k иполученный граф является регулярным, и при этом степени вершин в первой доле не меньше, чем во второй, а значит выполнено условие разнообразия. Таким образом по лемме Холла найдётся паросочетание размера p. Рассмотрим цвета рёбер, вошедших в это паросочетание, пусть это $s_1, s_2, \ldots s_p$. Заметим, что соответствующие элементы будут образовывать систему различных представителей, как для A_i, так и для B_i. Что и требовалось доказать.

7. Пусть $A = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}, B = \{B_1, B_2, \ldots\}$. A_0 соединим рёбрами со всеми вершинами доли B, а любую вершину A_i, $i \neq 0$, соединим с B_i. Докажем, что для любого $S \subset A$ верно, что $|S| \leqslant |N(S)|$. Если S содержит A_0, то это очевидно, а если нет, то для любого $A_i \in S$ найдётся уникальное B_i, связное с ним. Таким образом, очевидно, условие разнообразия выполнено. Осталось понять, почему в нашшем графе не может быть паросочетания на всех вершинах A. Предположим, что такое нашлось, тогда пусть A_0 по ребру паросочетания связано с некоторой вершиной B_k, заметим, что в таком случае никакое ребро не паросочетания не покрывает вершину A_k, следовательно паросочетания, покрывающего все вершины A не существует. Таким образом лемма Холла не всегда верна для бесконечных графов.

Двенадцатое ДЗ

1. Введём вероятностное пространство, где событиями будут упорядоченные пары выпавших значений на кубиках. Всего возможных исходов ровно $6^2 = 36$, при этом одинаковые значения на кубиках выпадают в 6 из нах, а значит вероятность выпадения 2 одинаковых составляет ровно $\frac{1}{6}$.

2. Введём вероятностное пространство, где событиями будут возможные выборы числа. Всего таких выборов ровно 100, а чисел, сумма цифр которых равна 8, среди них ровно 8 $(17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80)$, а значит вероятность выбора подходящего числа составляет 0,08.

3. Рассмотрим вероятностное пространство, гда событиями будут возможные последовательности из результатов 4 бросков кубика. Все события равнорероятны. Всего событий ровно 6^4. Рассмотрим все строго возрастающие последовательности из 4 чисел не превосходящих 6. Для удобства подсчётаБ будем считать, что все эти последовательности начинаются с 0 и содержит 5 чисел. Разница между соседними или всегда равна 1 (и тогда мы получим мы получим последовательность $(0, 1, 2, 3, 4) < - > (1, 2, 3, 4)$), или ровно 1 разность равна 2, таких последовательностей 4, или 2 разности равно 2, и тогда таких последовательностей 6, или 1 разность равна 3, таких последовательностей тоже 4. Таким образом, подходящих последовательностей $1 + 4 + 6 + 4 = 15$. Тогда вероятность того, что значения на кубиках будут совпадать составляет ровно $\frac{15}{6^4} \approx 0,011$.

4. рассмотрим вероятностное пространство, где событиями будут выборы 8 клеток для уже зафиксированного билета. Всего таких выборов ровно $\binom{64}{8}$. Всего подходящих выборов ровно $\binom{8}{4}\binom{56}{4}$, так как необходимо выбрать 4 клетки из 8 отмеченных и 4 из оставшихся. Таким образом ответ равен $\frac{\binom{8}{4}\binom{56}{4}}{\binom{64}{8}} \approx 0{,}00580871$.

5. Изобразим турнир как бинарное дерево. Заметим, что самая сильная и вторая команда встретятся в вершина, которая является их наименьшим общим предком (так как они не проигрывают никому другому). Это будет последний раунд турнира (то есть корень рассматриваемого дерева) тогда и только тогда, когда интересующие нас команды в начале турнира расположены в разных половинах уровня с листьями. Теперь рассмотрим вероятностное пространство, где событиями будут варианты расположение интересующих нас команд на уровне лисьев в турнирном дереве. Всего возможных исходов ровно 64×63, а интересующих нас 64×32. Тогда вероятность встречи самых сильных команд в последнем раунда составяет ровно $\frac{64 \times 32}{64 \times 63} \approx 0{,}507936$.

6. Рассмотрим вероятностное пространство, в котором событиями будут являться пары из возможных последовательностей из результатов бросков Пети и Васи. Заметим, что все события равновероятны. Всего возможных событий ровно 2^{21} так как все броски упорядочены и для каждого есть ровно 2 варианта. Если у Пети орёл выпал k раз, то количество случаев, когда у Васи орлов выпало меньше равно $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \binom{10}{i}$, так как ровно столько вариатнов, когда у него $0, 1, \ldots, k-1$ монета, то есть все случаи, когда у него меньше. Тогда всего случаев, когда у Пети k монет, а у Васи меньше, ровно $\binom{11}{k} \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{10}{i}$. Значит всего устраивающих нас вариантов $\sum\limits_{k=0}^{k \leqslant 11} \left(\binom{11}{k} \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{10}{i} \right)$. Таким образом искомая вероятность равна $\frac{\sum\limits_{k=0}^{k \leqslant 11} \left(\binom{11}{k} \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{10}{i} \right)}{2^{21}} = \frac{1}{2}$.

7. Рассмотрим все полные турниры на n командах. Будем считать, что результат каждого матча определяется случайно и равновероятно (то есть, 0,5 что победит первая команда и 0,5, что вторая). Пусть $N = \frac{n(n-1)}{2}$, тогда всего возможных турниров ровно 2^N. При этом веротность того, что случился конкретный турнир равна произведению вероятностей каждого из матчей в нём, то есть равна 2^{-N}. Таким образом все возможные турниры равновероятны. Будем называть турнир плохим, если в нём нашлось 10 команд, для которых не нашлось противника, которому они все проиграли (такую 10-ку будем называть плохой). Заметим, что по формуле включений-исключений верно, что вероятность того, что турнир плохой меньше или равна вероятности того, что 10-ка оказалось плохой на количество 10 в турнире (модуль объединения не больше, чем сумма модулей). Тогда вероятрость того, что турнир на n командах оказался плохим не больше, чем $\frac{\binom{n}{10} \times P_1}{2^N}$, где P_1 вероятность того, что случайная 10-ка в случайном турнире оказалась плохой. Заметим, что $P_1 \leqslant 1$ и $\binom{n}{10} \leqslant n^{10}$. Следовательно вероятность того, что турнир оказался плохим не больше чем $\frac{\binom{n}{10} \times P_1}{2^N}$, что не больше чем $\frac{n^{10}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \leqslant \frac{n^{10}}{2^n}$, что меньше 1 при достаточно больших n так как n^{10} асимптотически меньше, чем 2^n Таким образом, Для достаточно большого n вероятность того, что произвольный турнир оказался плохим меньше 1, а значит найдётся и турнир, в котором для любой 10-ки команд найдётся такая, которая выиграла у всех из них.

Тринадцатое ДЗ

1. Пусть событие A это то, что человек оказался голубоглазым, а B — то, что он блондин. Тогда, как известно $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} => \frac{P(B|A)}{P(A|B)} = \frac{P(B)}{P(A)} = 0{,}5$.

2. Пусть событие A это то, что пациент болен, а B — то, что его тест оказался положительным. Заметим, что так как события независимы, то $P(A|B) = P(A)$ и $P(\overline{A}|B) = P(\overline{A})$. Тогда $\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)} = \frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{10^{-5}}{1-10^{-5}} \approx 10^{-5}$.

3. Путь событие A это то, что 1 оказалась на своём месте, а B — то, что на всоём месте оказалась двойка. Заметим, что $P(A) = \frac{1}{n}$, так как мы можем поставить 1 на n мест и для каждого из выборов будет ровно $(n-1)!$ вариантов расстановок. Теперь скажем, что $P(A|B) = \frac{1}{n-1}$ так как при условии, что 2 стоит на своём месте выборов положения 1 ровно $n-1$ и все они равновероятны. Таким образом, $P(A) \neq P(A|B)$, следовательно события не независимы.

4. Всего вариантов чисел, кратных 2 ровно 50. Заметим, что из них на 3 делятся только те, которые делятся на 6, и их всего $\lfloor \frac{100}{6} \rfloor = 16$. Таким образом, вероятность того, что случайное число от 1 до 100 делится на 3, при условии, что оно делится на 2, равна $\frac{16}{50} = 0{,}32$.

5. Рассмотрим все возможные варианты:

1. Первый принял верное решение $(\frac{1}{p})$
   (a) Второй принял верное решение $(\frac{1}{p})$
      i. Третий принял верное решение $(\frac{1}{2})$ — Этот вариант нас устраивает. Вероятность равна $\frac{1}{2p^2}$.
      ii. Третий принял неверное решение $(\frac{1}{2})$ — Этот вариант нас устраивает. Вероятность равна $\frac{1}{2p^2}$.
   (b) Второй принял неверное решение $(\frac{p-1}{p})$
      i. Третий принял верное решение $(\frac{1}{2})$ — Этот вариант нас устраивает. Вероятность равна $\frac{p-1}{2p^2}$.
      ii. Третий принял неверное решение $(\frac{1}{2})$ — Этот вариант нас не устраивает.
2. Вервый принял неверное решение $(\frac{p-1}{p})$
   (a) Второй принял верное решение $(\frac{1}{p})$
      i. Третий принял верное решение $(\frac{1}{2})$ — этот вариант нас устраивает. Вероятность равна $\frac{p-1}{2o^2}$.
      ii. Третий принял неверное решение $(\frac{1}{2})$ — этот вариант нас не устраивает.
   (b) Второй принял неверное решение $(\frac{p-1}{p})$
      i. Третий принял верное решение $(\frac{1}{2})$ — этот вариант нас не устраивает.
      ii. Третий принял неверное решение $(\frac{1}{2})$ — этот вариант нас не устраивает.

Так как конечные события (выбор всех 3 жюри) независимы, то вероятоность правильного выбора составляет $\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p^2} + \frac{p-1}{2p^2} + \frac{p-1}{2p^2} = \frac{1}{p}$.

6. Заметим, что вероятность выбора конкретного шара составляет $\frac{1}{2x}$, где x — количество шаров в его коробке (вероятность именно такая потому, что с вероятностью $\frac{1}{2}$ король берёт нужную коробку и с вероятностью $\frac{1}{x}$ берёт из неё нужный шар). Также $\frac{1}{2x} \geqslant \frac{1}{38}$, так как в коробке по условию не может лежать больше 19 шаров. Тогда вероятность выборы чётного шара не меньше, чем $10 \cdot \frac{1}{38}$. Осталось заметить, что это достижимо при условии, что в одной коробке лежит один белый шар, а все осталбные лежат в другой коробке.

7. Для начала заметим, что нас интересуют только $n+2$ яйца, которые участвовали в первых $n+1$ раунде. Мы знаем, что все их процности различны, и все упорядочивания по прочности равновероятны. Заметим, что количество перестановок, где яйцо из первого раунда выигрывает следующие $n-1$ раунд равно $2(n!+(n+1)!)$ так как перестановок, где в первой паре есть самое сильное яйцо равно $2(n+1)!$, а таких, где в первой паре стоит второе по силе яйцо, а самое сильное стоит последним ровно $2n!$. При этом тех, которые нас устраивают всего $2(n+1)!$, так как в оставшихся $2n!$ выиграет последнее яйцо. Тогда вероятность того, что в $(n+1)$-ом раунде будет достигнута победа при уловии, что она достигнута во всех предыдущих, равна $\frac{(n+1)!}{(n+1)!+n!} = \frac{n+1}{n+2}$.

Четырнадцатое ДЗ

1. Предположим обратное, тогда матожидание выигрыша составляет хотя бы $5000 \times Pr[\text{выигрыш} \geqslant 5000] \geqslant 5000 \times 0{,}01 = 50$. Заметим, что это больше, чем сумма, которая идёт на выигрышь с одного билета, а значит наше предположение неверно, и вероятность выигрыша не менее 5000 меньше одного процена.

2. Давайте докажем, что $E[x] \geqslant 2{,}5$. В самом деле, $E[x] \geqslant Pr[x \geqslant 5] \times 5 = 2{,}5$. Теперь покажем, что любое значение $E[x] \geqslant 2{,}5$ достижимо. Пусть $Pr[x = 0] = \frac{1}{2}$ и $Pr[x = 5 + c] = \frac{1}{2}$, вероятность всех остальных значений, соответствено, равна нулю. Заметим, что такие вероятности удовлетворяют условию задачи, а $E[x]$ равно $2{,}5 + \frac{c}{2}$, где $c \geqslant 0$, а значит, $E[x]$ может принимать все возможные значения не меньше 2,5.

3. Для начала разобьём все возможные наборы на пары. Для этого каждому набору $(a_1, \dots a_{10})$ сопоставим набор $(29 - a_1, \dots 29 - a_{10})$. Заметим, что это однозначное сопоставление. Пусть c вероятность выбора конкретного набора (наборы выбираются равновероятно). Тогда $E[\sum a_i] = \sum\limits_{(a_1,\dots,a_{10})} \frac{1}{2}\left(c(a_1 + \dots + a_{10}) + c(29 - a_1 + \dots + 29 - a_{10})\right) = \frac{c}{2}(29 \times 10) \times \frac{1}{c} = 5 \times 29$.

4. Посчитаем матожидание того, что произвольная пара букв в нашем слове окажется «хорошей» (то есть ab). Заметим, что нас устраивает только 1 вариант из 4, а значит и матожидание такого события равно $\frac{1}{4}$. Осталось просуммировать его по всем парам, которых 19. Таким образом матожидание количества подслов вида ab составляет $\frac{19}{4}$.

5. Предположим обратое, то есть, $Pr[x \geqslant 6] \geqslant \frac{1}{10}$. Тогда $E[2^x] \geqslant 2^6 \times Pr[x \geqslant 6] \geqslant \frac{64}{10} > 5$ (так как $2^x > 0$), противоречие, а значит наше предположение неверно $=> Pr[x \geqslant 6] < \frac{1}{10}$.

6. Для начала обозначим данные в условии множества за A, B соответственно. Заметим, что вариантов, когда $f : A \mapsto B$ инъективна ровно $\frac{|B|!}{(|B|-|A|)!}$ так как для первого элемента A мы можем выбрать значение $|B|$ способами, для второго — $|B| - 1$, ..., для последнего — $|B| - |A| + 1$ способом. При этом всего функций $f : A \mapsto B$ существует ровно $|B|^{|A|}$. Подставим n, тогда инъективных функций всего $\frac{(100n)!}{(99n)!}$, а произвольных — $(100n)^n$. То есть, нас просят доказать, что $\frac{\frac{(100n)!}{(99n)!}}{(100n)^n} \mapsto 0$ при $n \mapsto \infty$. По формула Стирлинга:

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{\frac{(100n)!}{(99n)!}}{(100n)^n} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{\frac{\sqrt{2\pi 100n}\left(\frac{100n}{e}\right)^{100n}}{\sqrt{2\pi 99n}\left(\frac{99n}{e}\right)^{99n}}}{(100n)^n} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{\sqrt{2\pi 100n}\left(\frac{100n}{e}\right)^{100n}}{\sqrt{2\pi 99n}\left(\frac{99n}{e}\right)^{99n}(100n)^n} =$$

$$= \lim_{n\mapsto\infty} \frac{\sqrt{100}\left(\frac{100}{e}\right)^{100n}}{\sqrt{99}\left(\frac{99}{e}\right)^{99n} 100^n} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{10 \cdot 100^{99n}}{\sqrt{99} \cdot e^n \cdot 99^{99n}} = \frac{10}{\sqrt{99}} \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{100^{99}}{e \cdot 99^{99}}\right)^n.$$

Заметим, что $\frac{100^{99}}{e \cdot 99^{99}} < 1 => \lim_{n\mapsto\infty} \frac{\frac{(100n)!}{(99n)!}}{(100n)^n} = 0$. Что и требовалось доказать.

Пятнадцатое ДЗ

1.

$$99^{1000} \underset{100}{\equiv} (-1)^{1000} \underset{100}{\equiv} 1.$$

2.

$$\begin{aligned} 53x &\underset{42}{\equiv} 1; \\ 11x &\underset{42}{\equiv} 1; \\ x &\underset{42}{\equiv} \frac{1}{11}; \\ x &\underset{42}{\equiv} 23; \end{aligned}$$

3. Рассмотрим данное равенство по 2 модулям (47 и 74), получим:

$$\begin{cases} 27x \underset{47}{\equiv} 2900; \\ -27y \underset{74}{\equiv} 2900, \end{cases} \quad \begin{cases} 27x \underset{47}{\equiv} 33; \\ 27y \underset{74}{\equiv} 37, \end{cases} \quad \begin{cases} x \underset{47}{\equiv} 43; \\ y \underset{74}{\equiv} 68. \end{cases}$$

В силу того, что $x, y \in \mathbb{Z}$ и $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ получим, что $74x + 47y \geqslant 74 \cdot 43 + 47 \cdot 68 = 6507 > 2900$. Следовательно решений нет.

4. Предположим обратное, тогда:

$$(n^2 - n + 1, n^2 + 1) = a, \quad a > 1, n^2 + 1 > 1;$$
$$(n^2 - n + 1, n^2 + 1) = (-n, n^2 + 1) = (n, n^2 + 1) = (n, 1) = 1, \text{противоречие.}$$

5.

$$(3^{133} - 1, 3^{101} - 1) = (3^{101} - 1, 3^{32} - 1) = (3^{32} - 1, 3^5 - 1) = (3^5 - 1, 3^2 - 1) =$$
$$= (3^2 - 1, 3^1 - 1) = (8, 2) = 2.$$

6.

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i}}{(p-1)!}.$$

Заметим, что $(p-1)! \not\vdots\, p$. Получается, нам остаётся только показать, что $\left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i}\right) \vdots\, p$, докажем это:

$$\text{По теореме Вильсона } (p-1)! \underset{p}{\equiv} 1 => \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i} = -\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i}.$$

Каждому слагаемому вида $\frac{1}{i}$ сопоставим слагаемое $\frac{1}{p-1}$ (легко заметить, что все слагаемые разделятся на пары). Тогда:

$$-\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{p-i}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} \frac{p}{i(p-1)}.$$

Заметим, что в каждом слагаемом числитель по модулю p сравним с нулём, а знаменатель — нет. Тогда и вся сумма сравнима с нулём. Деление на 2 также ничего не «испортит» так как $(2, p) = 1$ по условию. Что и требовалось доказать.

7. Земетим, что все числа Ферма взаимнопросты (то есть числа вида $2^{2^k} + 1$ или f_k). В самом деле, пусть $i > j$, тогда:

$$f_i - 2 = 2^{2^i} - 1 = (2^{2^{i-1}} - 1) f_{i-1} = (2^{2^{i-2}} - 1) f_{i-2} f_{i-1} = \ldots = (2^{2^j} - 1) f_j \ldots f_{i-1}.$$

Следовательно $(f_i, f_j) = (f_j, 2) = 1$. Заметим, что

$$2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1) = \ldots = (2^{2^0} - 1)(2^{2^0} + 1) \ldots (2^{2^n} + 1).$$

В полученном разложении все скобки, которые являются числами Ферма (которых ровно n) взаимнопросты, а значит каждая имеет некоторый уникальный простой делитель, а значит их не меньше n. Что и требовалось доказать.

Шестнадцатое ДЗ

1. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, заметим, что при этом $(p_i, 2) = 1 \Rightarrow \exists d : 2^d \underset{p_i^{\alpha_i}}{\equiv} 1 \Rightarrow$ Можно утверждать, что существует показатель двойки по модулю $p_i^{\alpha_i}$, при это известно, что показатель не превосходит модуль. А занчит $n! \vdots deg_{p_i^{\alpha_i}} 2 \Rightarrow 2^{n!} \underset{p_i^{\alpha_i}}{\equiv} 1$. А значит по КТО верно, что $2^{n!} - 1 \vdots n$. Что и требовалось доказать.

2. $\exists a \not\vdots 11$, тогда $a^{10} \underset{11}{\equiv} 1$. Аналогичное верно и для любой другой переменной из равенства. Тогда кратность 11 выражения достигается только тогда, когда каждой слагаемое делится на 11, а значит и корень 10 степени делится на 11. Таким образом, $abcdsf$ делится на 11^6. Что и требовалось доказать.

3. Так как $(7, 17) = 1$, по МТФ верно, что $7^{7^{7^7}} \underset{17}{\equiv} 7^{(7^{7^7})(mod 16)}$. По аналогичным прихинам верно, что $7^{7^{7^7}} \underset{17}{\equiv} 7^{(7^{7^7})(mod 16)} \underset{17}{\equiv} 7^{(7^{(7^7)(mod\ o}}$
При этом $ord_{16} 7 = 2$. Таким образом $7^{7^{7^7}} \underset{17}{\equiv} 7^7 \underset{17}{\equiv} 12$.

4.

$$x^2 \underset{200}{\equiv} 1;$$
$$(x-1)(x+1) \underset{200}{\equiv} 0;$$

Следовательно или $(x-1) \underset{25}{\equiv} 0$, или $(x+1) \underset{25}{\equiv} 0$, при этом обе скобки должны быть сравнимы с 0 по модулю 2. Переберём эти варианты отдельно.

1. $(x-1) \vdots 25$:
   (a) $x \underset{200}{\equiv} 1$ — такой вариант нас устраивает.
   (b) $x \underset{200}{\equiv} 51$ — такой вариант нас устраивает.
   (c) $x \underset{200}{\equiv} 101$ — такой вариант нас устраивает.
   (d) $x \underset{200}{\equiv} 151$ — такой вариант нас тоже устраивает.

2. $(x+1) \vdots 25$:
   (a) $x \underset{200}{\equiv} 199$ — этот вариант подходит.
   (b) $x \underset{200}{\equiv} 49$ — снова подходит.
   (c) $x \underset{200}{\equiv} 99$ — подходит.
   (d) $x \underset{200}{\equiv} 149$ — опять устраивает.

Таким образом, $x\ (mod 200) \in \{1, 49, 51, 99, 101, 149, 151, 199\}$.

5. Да, так как $(3, 10^4)$ взаимнопросты, а значит существует такая степень тройки d, что $3^d \underset{1000}{\equiv} 1$, а это именно то, что нам нужно.
*Такая степень существует, так как если взять достаточно много степенией, то какой-то остаток повторится, а значит тройка в степени разности степеней, которые соответствуют этим совпавшим остаткам даёт 1 по модулю 10000.

6.

$$x^2 \underset{10^k}{\equiv} x;$$
$$x(x-1) \underset{10^k}{\equiv} 0.$$

Заметим, что из полученных скобок только одна может делиться на 2 и тольк одна на 5, а значит верно, что ровно одна скобка делится на 5^k, а другоая на 2^k. Тогда мы получим всего 4 системы на то, какие остатки x даёт по модулям 2^k и 5^k, при этом каждая из них будет иметь ровно 1 решение по модулю 10^k, и все они будут различны (по КТО). Что и требовалось докажать.

Семнадцатое ДЗ

1. $\left(\frac{F}{G}\right)' = \left(FG^{-1}\right)' = F'/G + F(G^{-1})' = F'/G - \frac{G'}{G^2}F = \frac{F'G-FG'}{G^2}$.

2. Будем доказывать, что для произвольной производящей функции F, у которой коэффициент при x^1 отличен от нуля, из рассматриваемого класса существует искомая. Подставим G в F, получим:

$$R(x) = F(G(x)) = f_1G(x) + f_2G^2(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} f_kG^k(x).$$

При этом мы хотим, чтобы $r_0 = 0$ (что, очевидно, верно) и $f_1g_1 = 1$ (то есть, $g_1 = \frac{1}{f_1}$, отсюда очевидно становится, что все варианты, когда $f_1 = 0$ не подходят). Также положим, что $g_0 = 0$. Запишем r_2:

$$r_2 = f_1g_2 + f_2g_1 = 0.$$

Тогда $g_2 = \frac{-f_2g_1}{f_1}$. Далее по индукции докажем, что искомаю производящая функция $G(x)$ существует, для этого поочерёдно посчитаем её коэффициенты (первые 3 уже восстановили, это наша база). Предположим, что мы восстановили первые k, тогда $(k+1)$-ый можно представить в следующем виде:

$$r_{k+1} = f_1g_{k+1} + f_2 \sum_{t_1+t_2=k+1} g_{t_1}g_{t_2} + \ldots + f_k \sum_{t_1+t_2+\cdot+t_k=k+1} \prod_{i=1}^{k} g_{t_i} + f_{k+1} \sum_{t_1+t_2+\cdot+t_{k+1}=k+1} \prod_{i=1}^{k+1} g_{t_i} = 0.$$

Таким образом, можно однозначно восстановить значение g_{k+1} так как все слагаемые, кроме первого нам уже известны (так как по индукции мы восстановили все значения $g_i, i \leqslant k$, и g_{k+1} присутствует только в одном слагаемом), а значит, из него мы можем выразить g_{k+1}:

$$g_{k+1} = -\frac{f_2 \sum_{t_1+t_2=k+1} g_{t_1}g_{t_2} + \ldots + f_k \sum_{t_1+t_2+\cdot+t_k=k+1} \prod_{i=1}^{k} g_{t_i} + f_{k+1} \sum_{t_1+t_2+\cdot+t_{k+1}=k+1} \prod_{i=1}^{k+1} g_{t_i}}{f_1}$$

. Таким образом, мы однозначно определяем все занчения g_i то, чтобы $F(G(x)) = x$ тогда и только тогда, когда $f_1 \neq 0$ (при условии, что $f_0 = 0$).

3. Рассмотрим функцию $(1+x)^n$, её производящая функция это $1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$, так как выполняется равенство:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

От обоих частей этого равенства возьмём производную (то, что так можно делать доказывали на лекции), получим:

$$n(1+x)^{n-1} = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

При $x = 1$ левая часть равенства превращается в искомую величину, а правая легко считается, получим:

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots n\binom{n}{n} = n(1+1)^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}.$$

4. Давайте найдём производящую функцию $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$. Заметим, что $F(x) \cdot x = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$, следовательно:

$$F(x) \cdot (1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k.$$

Из материалов лекции мы знаем левую часть, а значит можем переписать равенство следующим образом:

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k.$$

Теперь рассмотрим последовательность частичных сумм вида

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^k \sum_{i=0}^{k} i(i+1) \right).$$

По материалам лекции мы заем, что $G(x)$ можно представить в следующем виде:

$$G(x) = F(x) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Таким образом, $(n-1)$-ый коэффициент (который нас и интересует) мы можем посчитать как

$$\frac{G^{(n)}(0)}{(n-1)!} = \left(\frac{1}{(1-x)^3} \right)^{(n)} \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{3(n-1)!} = \frac{(n-1)(n)(n+1)}{3}$$

5. Рассмотрим выражение вида $F_{100}(x) = \prod_{k=1}^{100} (x + \frac{1}{k})$. Раскрыв в нём скобки, мы получим, что все его коэффиуиенты — числа, обратные к произведению элементов некоторого подмножества $\{1, 3, \ldots, 100\}$ (что очевидно), однако при этом мы также посчитали и пустое подмножество (коэффициент при x^{100}). Тогда искомая сумма равна $F_{100}(1) - 1$.
Рассмотрим $F_i(x) \prod_{k=1}^{i} (x + \frac{1}{k})$ по индукции докажем, что $F_i(1) = i + 1$.
База. $i = 1, F_1(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$. База верна.
Переход. Пусть равенство доказено для всех $i < n$, докажем его для $i = n$.

$$F_n(1) = F_{n-1}(1) \cdot (1 + \frac{1}{n}) = n \cdot \frac{n+1}{n} = n + 1.$$

Таким образом переход доказан, а значит $F_{100}(1) - 1 = 100$, что равняется искомой сумме.

6. Рассмотрим производящую функцию $A(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)}$, тогда верно, что:

$$A(x) = \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{1}{(1-x^5)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{5k} \right).$$

Тогда, раскрыв скобки, получим, что коэффициент $A(x)$ при x^n равен числу способов разложить n в сумму пятёрок и двоек (что очевидно). Тогда коэффициенты при x^n $A(x) \cdot x, A(x) \cdot x^2, A(x) \cdot x^3, A(x) \cdot x^4$ равны числу способов представить n как сумму некоторого числа двоек и пятёрок и одной, двух, трёх и четырёх единиц соответственно. А значит, коэффициент при x^n в $F(x) = A(x) + A(x) \cdot x + A(x) \cdot x^2 + A(x) \cdot x^3 + A(x) \cdot x^4$ равен числу способов представить n как сумму двоек и пятёрок и не более чем 4 единиц. Таким образом, искомая производящая функция равна $\dfrac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}{(1-x^2)(1-x^5)}$.

Восемнадцатое ДЗ

1. Рассмотрим следующую стратегию игры за перовго игрока. Пусть оп в самом начале возьмёт 4 спички, а затем каждым своим ходом будет дополнять пердыдущий ход второго до 6 спичек. Тогда будет соблюдаться следующий инвариант — после хода первого количество спичек всегда кратно 6, а после хода второго — нет. Тогда очевидно, что первый не может проиграть, так как второй не сможет получить 0, а так как игра конечно он выиграет.

2. Докажем, что второй игрок может победить. Пусть первые 9 ходов были сделаны произвольно, докажем, что последним своим ходом второй может гарантировать себе победу не зависимо от того, какие ходы были до этого. На данный момент число выглядит как $\overline{a_1a_2\ldots a_9\bullet}$, из него можно получить слеюудщий числа: $\overline{a_1a_2\ldots a_90}, \overline{a_1a_2\ldots a_91}, \ldots, \overline{a_1a_2\ldots a_99}$. Эти числа — 9 последовательных чисел, а значит они дают 9 последовательных остатков по модулю 7, тогда, очевидно, что среди них найдётся 0, и второй сможет гарантировать себе победу.

3. Будем доказывать, что первый сможет гарантировать себе победу. Для этого рассмотрим стратегию, когда он каждым ходом из своего числа вычитает произвольный нечётный делитель (который всегда найдётся, так как всегда можно вычесть 1). В таком случае будет поддерживаться инвариант, что после хода первого игрока число становится нечётным, а значит и второй игрок обязан вычитать нечётный делитель, и после его хода число станет чётным, таким образом, свой ход первый игрок всегда будет начинать с чётным числом и будет получать изз него нечётное, а значит он не может проиграть, тогда в силу конечности игры, он выиграет.

4. Дла начала скажем, что при n равном 1 и 2 победу себе, очевидно, гарантирует первый, при n равном 3 — второй, так что далее будем считать, что $n > 3$. Также для удобства будет считать, что минусы расположены в вершинах привильного n-угольника, вписанного в окружность Ω с центром O. Предъявим выигрышную стратегию для второго игрока:
Если n чётно. В таком случае второму игроку достаточно отражать хоы первого относительно O (центральная симметрия). Тогда в силу симметрии, если ход нашёлся у первого игрока, то он нашёлся и у второго, а значит второй не может проиграть. Так как игра конечно, то второй выиграет.
Если n нечётно. Рассмотрим ситуацию после хода первого игрока:

1. Изменён они знак, в таком случае изменим 2 знака на противоположной стороне;
2. Изменеы два знака на одной стороне нашего n-угольника, в таком случае изменим знак в противоположной ему вершине.

В обоих случаях изменены 3 знака, 2 из которых лежат на одной стороне, а третий в противоположной к этой стороне вершине. Тогда проведём диаметр Ω (далее l) через эту вершину и середину стороны. Заметим, что l разбил наш n-угольник на две симметричные относительно него части, при это никакой ход не может изменить знаки сразу в обеих частях. После этого второму достаточно отражать ходы первого относительно l (осевая симметрия). Тогда, если ход нашёлся у первого игрока, то симметричный ход возможен и для второго, а значит он ен может проиграть, следовательно выиграет.
Таким образом, выигрышная стратегия у перового игрока есть только при n равном 1 или 2 (достаточно просто сразу изменить все знаки).

5. Вспомним тот известный факт, что любую не полную триангуляцию n-угольника (то есть такую, в которой проведёно меньше $n - 3$ диагоналей, которые не пересекаются) можно дополнить до полной (то есть такой, в которой ровно $n - 3$ диагонали). Это можно доказать полной индукцией по количеству вершин. База очевидна, в переходе можо рассмотреть произвольную диагональ (если такой нет, то её надо провести), она разобъёт наш многоугольник на 2 с меньшим числом вершин, и для обоих надо применить предположение индукции. Таким образом, мы поняли, чт оперед нами «игра-шутка» так как всегда будет проведено ровно $n-3$ диагонали, а значит выигрышная стратегия у первого игрока есть только при чётных n, при нечётных она есть у второго. В обоих случаях она звичит примерно как «делай любой возможный ход» (по вышедоказанному это работает).

6. Давайте доказывать, что при любом n первый игрок может победить. Для этого предъявим выигрышную стратегию:
Пусть до начала игры он выберет произвольную вершину S. После этого он будет каждым своим ходом выбирать некоторую вершину X, которой ещё нельзя добраться до S и красить произвольное ребро из X в одну из вершин множества тех, до которых из S можно добраться (далее R).
Докажем, что стратегия работает. Пусть уже прошло m итераций, тогда в R ровно $m + 1$ вершина. При этом второй игрок сделал m ходов, а значит среди рёбер любой вершины X, от которой ещё нет пути до S закрашено не более m рёбер, а значит найдётся какое-то не покрашенное ребро до вершины из R, так как таких рёбер ровно $m + 1$, а значит

ход по предложенной стратегии всегда возможен. Также легко понять, что через $n-1$ итерацию мы сможем добраться из S до всех вершин, а значит мы получим связный граф на n вершинах и рёбрах первого цвета, а значит победим.
*Осталось заметить, что за это же время второй не сможет нарисовать связный граф. Это очевидно, так как на это ему понадобится не менее, чем $n-1$ ход, однако за то время, которое понадобится на победу первому игроку, он успеет провести только $n-2$ ребра, а значит не получит связного графа.

Девятнадцатое ДЗ

1. По сути, нам достаточно реализовать тернарный поиск, который работает за $O(\log_{\frac{3}{2}}(n))$. В самом начале узнаем значение чсел a_1 и a_n. На очередной итерации будем делить отрезок, на котором работаем ($[l_0, r_0]$) на 3 примерно равные части (то есть такие, что их длина отличается не более, чем на 1) с концами в целых точках (стартуем с отрезка $[1, n]$). В 2 новых границах (левая — l, правая — r) будем узнавать значения чисел в массиве, далее рассмотрим несколько случаев того, какими оказались знаки:

1. $a_l = a_r$, тогда можно сказать, что на отрезке $[l, r]$ есть локальный максимум, а по условию задачи он единственный, так что будем рассматривать отрезок $[l, r]$.
2. $a_l < a_r$, тогда понятно, что на отрезке $[l, r_0]$ находится максимальный элемент, так что будем рассматривать его.
3. $a_l > a_r$. Этот случай аналогичен предыдущему, только надо рассмотреть отрезок $[l_0, r]$.

Таким образом, за одну итерацию мы сокращаем отрезок, на котором работаем не меньше, чем в полтора раза, затратив на это не больше 2 операций, таким образом, наш алгоритм работает за $O(\log_{\frac{3}{2}}(n))$, а так как логарифмы с разными основаниями отличаются домножением на константу, то это тоже самое, что $O(\log(n))$. Что и требовалось доказать.

2. Если n чётно, то достаточно разбить все монеты на пары и сравнить монеты в каждой паре. Из условия очевидно, что ровно один раз мы получим неравенство и так найдём фальшивую монету. Если же монет нечётное число, то отложим одну из них и повторим действия для чётного n. Тогда возможно, что мы получим одно неравенство и так найдём фальшивую монету (так как она ровно одна, и только с ней может получится неравенство), или же во всех взвешиваняих мы получим знаки равенства, что гарантирует, что все монеты, которые мывзвешивали настоящие, тогда методом исключения получим, что фальшивая монета это та, которую мы отложили. Таким образом, мы гарантированно находим фальшивую монету не более, чем за $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ взвешиваний. Что и требовалось доказать.

3. Предположим, что у мы провели некоторые всзвешивания, все из которых показали равенство, и у нас осталось хотя бы 2 монеты, которые мы ни с кем не сравнивали. Тогда мы накак не сможем определить, какая из их фальшивая, поэтому все монеты, кроме, может быть, одной надо сравнить в какой-то другой. Поскольку за одну операцию мы сравниваем 2 монеты, то нам потребуется не меньше, чем $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ операций, что равно $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Что и требовалось доказать.

4. Рассмотрим разрешающее дерево для произвольного решения этой задачи. Вершинам в нём будут соответствовать вопросы типа «Верно ли x_i» для произвольного i от 1 до n. Предположим, что глубина этого дерева не больше $n - 1$. Тогда рассмотрим путь S, который соответствует случаю, когда все x_i ложны. Так как его глубина не превосходит $n - 1$, то гарантированно найдётся некоторое x_k, которое в этом пути не встречается. Тогда, если заменить x_k на истину, то наш путь не изменится, так как не изменятся ответы на вопросы. Таким образом, в первом случае S должен заканчиваться в листе с ложью, а во втором — с истиной. Противоречие, а значит глубина разрешающего дерева должна составлять не менее n. Осталось только построить разрешающее дерево глубины n. Это очень просто, давайте на i-том вопросе спрашивать про x_i. Если x_i верно, то просто проведём ребро в лист с истиной, если x_i ложно, то проведём ребро в следующий вопрос (если мы задавали вопрос про x_n и получили отрацательный ответ, то проведём ребро в лист в ложью). Очевидно, что такое разрешающее дерево подходит, и оно имеет глубину n. Что и требовалось доказать.

5. Давайте каждой операцией делить монеты на 3 примерно равных кучки (то есть таких, что количество монет в них отличается не больше, чем на 1) и сравнивать две из них на весах. Тогда, если весы показывают неравенство, то фальшивая монета гарантированно в той куче, которая лекче, а если равенство, то она, однозначно, в той кучке, котору мы не взсешивали. После этого выберем кучку, в которой лежит фальшивая монета (изначально рассматриваем все n монет) и повторим для неё эту операцию. Таким образом, каждый раз мы уменьшаем количество монет, среди которых лежит фальшивая, примерно в 3 раза, поэтому наш алгоритм работает за $\log_3(n) + O(1)$. Что и требовалось доказать.

6. Давайте доказывать это утверждени по индукции.
База. $n = 2$ и $n = 3$, очевидно, что в обоих случаях понадобится хотя бы одно взвешивание.
Переход. Предположим, мы доказали задачу для всех $n < k$, докажм её для $n = k$. Заметим, что всего возможных ответов на первый вопрос у нас ровно 3, тогда по принципу Дерихле в один из ответов приведёт нас к случаю, когда нам надо найти фальшивую монету в не менее, чем $\frac{k}{3}$. В этом случае по предположению индукции нам понадобится хотя бы $\log_3(\frac{k}{3}) + \Omega(1) = \log_3(k) - 1 + \Omega(1)$ вопросов. При этом мы задали ещё и первый вопрос, так что для $n = k$ понадобится не менее, чем $\log_3(n) + \Omega(1)$ вопросов. Что и требовалось доказать.
Таким образом, нам гарантированно понадобится хотя бы $\log_3(n) + \Omega(1)$ вопросов.

7. Для начала покажем, как найти самую тяжёлую монету среди произвольных m. Для этого на очередной итерации алгоритма будем рассматривать только «интересные монеты» (изначально это все m монет). Будм разбивать на пары (если всег монет нечётное число, то одну просто сравним с какой-то из тех, который оказались наибольшими в своей паре), далее в каждой паре выкидывать ту монету, которая лекче и для нового множества переходить к следующей итерации. Очевидно, что в итоге останется самая тяжёлая монета, так как она не может выбыть ни в одном сравнеии. Посчитаем сложность такого алгоритма. Легко понять, что это в точности $\lceil \frac{m}{2} \rceil + \lceil \frac{m}{2^2} \rceil + \ldots + \lceil \frac{m}{2^i} \rceil + \ldots$, что сравнимо с $m + O(1)$.
Теперь применим наш алгоритм для начальных n монет и за $m + O(1)$ найдём самую тяжёлую. Теперь осталось понять, как искать вторую по весу монету. Лекго заметить, что любая из остальных монет выбыла в сравнении с самой тяжёлой и может оказаться второй, или же выбыла в стравнении с какой-то другой, в тако случае она точно не может оказаться второй по весу, так как она легче какой-то не самой тяжёлой монеты. Значит нам достаточно искать вторую монету только срди тех, которые мы сравнивали с первой. Всего их было, очевидно $\lceil \log(n) \rceil$, так как на каждой итерации поиска самой тяжёлой количество «интересных» монет делилось на 2. А значит применив наш алгоритм повторно для монет, которые сравнивались с первой мы сможем найти самую тяжёлую среди них, а значит (по выше доказанному) вторую по весу среди всех. На это нам понадобится $\log(n) + O(1)$ операций. Таким образом, на поиск первой и второй монеты нам понадобится $n + \log(n) + O(1)$ операций. Что и требовалось доказать.

Двадцатое ДЗ

Для начала введём такое понятие, как блок дизъюнкций и блок конъюнкций (чтобы в бальнейшем скоретить запись и упростить себе жизнь). Оба эти блока принимают несколько элементов и считают их дизъюнкцию и конъюнкцию за линию от их числа (очевидно как).
Так же нам понядобится блок ксор, который будет ксорить все данные своего входа поочерёдно (так же как и первые 2 блока), при этом из материалов лекции мы умеем ксорить 2 значения за константу, а значит весь блок ксор также будет работать за полиномиальное время.
Вот теперь можно приступить к задачам.

1. Построим нашу схему следующим образом:
на первом его уровне будут блоки конъюнкций, соответствующие всем возможным треугольникам в графе (всего их $\binom{n}{3}$);
На втором уровне будет один блок, дизъюнкций принимает результаты всех вершин второго уровня;
На третьем уровне будет одна вершина, которая принимает результат вершины со второго уровня и возвращает отрицание.
Таким образом, мы предъявили схему, сложность которой полиномиальна, так как в ней всего 3 уровня, и каждый из них работает за полиномиальное время, а значит сложность всей схемы так же полиномиальна. Осталось понять, почему она работает. Это очевидно, так как если хотя бы какой-то треугольник в графе существует, то на последней уровень придёт 1, а вернётся 0, и наоборот.

2. Просто предьявим нужныую схему (то, что она работает очевидно):
На первом уровне n вершин, i-тая из которых принимает x_i и y_i и возвращает $x_i\ xor\ y_i$;
На втором уровне один блок дизъюнкций, который принимает значения со всех вершин первого уровня;
на третьем уровне будет отрицание второго.
Снова в нешей схеме конечное число уровней, каждый из которых работает за полиномиальное время, а значит и вся схема тоже.

3. мы уже знаем, что посчитать суммы n переменных мы можем за полиномиальное время, так что давайте сохраним в сумму переменных в $\lceil \log n \rceil$ битах, и в стольки же сохраним сумму их отрицаний. Нам осталось научится сравнивать эти 2 числа за полиномиальное время и вернуть 1 тогда и только тогда, когда первое больше. Заметим, что неравенство из 2 двоичных чисел (длины m) можно записать следующим оброзом:

$$(a_m! = b_m) \vee (a_m = b_m \wedge a_{m-1}! = b_{m-1}) \vee \ldots \vee (a_m = b_m \wedge \ldots \wedge a_2 = b_2 \wedge a_1! = b_1).$$

При этом, мы хотим, чтобы неравенство возвращало 1 тогда и только тогда, когда первое число больше, так что его можно переписать следующим образом:

$$x = y <=> \neg(x \oplus y);$$
$$x! = y <=> x \wedge (x \oplus y).$$

Таким образом, мы получим полиномиальную схему для сравнения чисел, что вместе со схемой сложения даст нам желаемый результат.

4.

5. Заметим, что если у нас получится посчитать выражение «((есть 1) и (нет пары)) или (все 1)», то мы победим, так как именно в этих случаях нам надо вернуть 1. Первую скобку («есть 1») мы посчитаем как блок дизъюнкций от 3 данных переменных, а третью («все 1») мы найдём как блок конъюнкций от тех же переменных. При этом мы не использовали отрицания. Вторую скобку мы получим как отрицание блока дизъюнкций от результатов попарных конъюнкций входных переменны (при этом мы используем единственное отрицание). Осталось посчитать дизъюнкцию первых 2 скобок и результат передать в конъюнкцию с третей, при этом мы не воспользуемся ни одним отрицанием, а значит прдъявим искомую схему.

6. Разделим нашу схему на 2 части. Первая будет проверять свзяность графа (это мы умеем делать согласно материалу лекции (через возведение матрицы смежности с петлями в степень)), на это нам потребудется полиномаильная сложность.
Вторая часть схемы будет возвращать 1 только в том случае, если степени всех вершин чётны (это вместе со связностью является необходимым и достаточным условием того, что в графе найдётся эйлеров цикл).
В ней на первом уровне расположим блоки ксор для каждой вершины (всего n штук), каждый из которых будет

принимать все рёбра, смежные с данной вершиной. При этом мы каждое ребро будем принимать в 2 блока, а значит всего затратим полиномиальное время на вычисления на этом уровне.
На втором уровне расположим блок дизъюнкций, который примет все результаты второго блока и верёт 1 тогда и только тогда, когда для какой-то вершины ксор по рёбрам оказался равен 1 (то есть в исходном графе эта вершина имеет нечётныю степень).
На третьем уровне просто расположим отрицание второго.
Таким образом, проводя вычисления на каждом из 3 уровней мы будем тратить полиномиальное время, а значит и общая сложность тоже полиномиальна.

7. Давайте решим задачу, где надо построить схему, которая будет возвращать 1 тогда и только тогда, когда граф нельзя правильно раскрасить в 2 цвета (потом достаточно просто сделать отрицание). Заметим, что это равносильно тому, чтобы найти в графе какой-то нечётный цикл. В свою очередь, существование нечётного цикла равносильно тому, что между какой-то парой вершин есть путь чётной длины и путь нечётной длины, так что давайте решать задачу поиска таких 2 путей.
Рассмотрим матрицу смежности (без петель). Нам известоно, что в при возведении её в степень k (рассматриваем матрицу и её степени как матрицу над булевыми переменными) на пересечении строки и стольбца будет стоять 1 тогда и только тогда, когда между соответствующими строке и столбцу вершинам есть путь длины k. Зная это посчитаем все степени матрицы от первой до $n-1$-ой (каждая считается за полином, значит и на вычисление всех тоже уйдёт полином), такой степени достаточно так как длина простого пути в графе на n вершинах не может превышать $n-1$. Осталось лишь убедится в том, найти ячейку, в которой одновременно стоит 1 в матрице чётной степени и в матрице нечётной степени.
На первом уровне расположим блоки дизъюнкций, которые будут принимать значения в выбранной ячейке только в чётных степенях и только в нечётных степенях матрицы (по 2 на каждую ячейку). Так как количество ячеек полиномаильно, как и стоимость подсчёта блока дизъюнкций, на вычисления на этом уровне уйдёт полиномиальное время.
На втором уровне расположим $\binom{n}{2}$ конъюнкций, которые будут принимать значения из блоков предыдущего уровня (каждый будет смотреть на то, если ли путь чётной длины между парой и путь неётной длины между этой же парой), соответственно каждый блок вернёт 1 тогда и только тогда, когда между выбранной парой вершин есть путь чётной и нечётной длины.
На третьем уровне расположим блок дизъюнкций, который примет результаты предыдущего блока (которых $\binom{n}{2}$, и за полиномиальное время вернёт 1 тогда и только тогда, когда нашёлся цикл нечётной длины (по вышедоказанному).
Осталось не звбыть сделать отрицание результата третьего уровня на четвёртом.
Таким образом, мы предъявили схему, которая имеет полиномиальный «предподсчёт» и сама работает за полиномиальное время, и при этом решает задачу.

Двадцать первое ДЗ

1. Для начала заметим, что $t(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x = x_0 = \{1, \ldots, 1\}$. При всех $x \neq x_0$ $t(x) = 0$, и желаемое неравенство очевидно (и для f и для g), осталось понять, что из условия следует, что при $x = x_0$ $1 = t(x_0) \leqslant f(x_0)+g(x_0)$, а значит или $g(x_0) = 1$ (и тогда желаемое неравенство достигается для g), или $f(x_0) = 1$ (тогда желаемое неравенство достигается для f). Что и требовалось доказать.

2. Будем говорить, что набор из 3 значений переменных подходит для дизъюнкта, когда на нём этот дизъюнкт принимает значение 1, иначе будем говорить, что набор не подходит. Заметим, что в любой дизъюнкт можно подставить 2 наборов значений, при этом только один из них не будет подходить. Теперь предположим, что у нас получилось использовать n переменных и m дизъюнктов, чтобы получить КНФ, которая не имеет решений. Это означает, что при любой подстановке значений (которых всего 2^n) хотя бы один дизъюнкт обнуляется. Осталось заметить, что любой дизъюнкт обнуляется тогда и только тогда, когда значения переменных, которые в него входят фиксированные, и все остальные произвольные, тогда любой дизъюнкт обнуляется не более, чем в 2^{n-3} подстановках. Отсюда уже очевидно, что для получению желаемой КНФ понадобится не меньше 8 дизъюнктов.
Осталось привести пример, в качестве него можно взять все возможные 8 дизъюнктов на 3 переменных (то есть 2^3 подстановок к ним отрицания). Тогда тот дизъюнкт, в котором все истинные переменные стоят с отрицанием, а ложные — без него, занулится, и при этом очевидно, что такой будет.

3. Начнём с того, что ранжируем нашу схему, подвесив её за вершину, соответствующую выводу. Это возможно так как данная структура представляет из себя ориентированное дерево. После этого, на очередном раше будем рассматривать отрицание, расположенное на самом высоком уровне, и при этом такое, что его потомок не является листом (так как такое отрицание уже представляет из себя отрицание переменной), и по закону Де Моргона заменять $\neg(a \vee b)$ на $\neg a \wedge \neg b$ и $\neg(a \wedge b)$ на $\neg a \vee \neg b$ (то есть, отрицания теперь будут расположены на том же уровне, на котором до этого распологалось утверждение, от которого бралось отрицание). Таким образом, мы «сдвинем» отрицания на один уровень вниз. В силу того, что схема имеет конечную глубину, такой алгоритм рано или поздно закончится, то есть все отрицания будут браться от листьев. На самом деле, в самом начале ещё стоит избавится от всех многократных отрицаний, и только после этого ранжировать схему (очевидно, что после этого мы не увеличим число вершин, а значит оценка для новой схемы так же подойдёт и для старой). Осталось понять, какова сложность новой схемы. В силу того, что на каждой операции мы заменяли конъюнкцию на дизъюнкцию или наоборот и делали что-то с отрицаниями, то число вершин соответствующих не отрицаниям не изменилось. При этом у нас исчезло сколько-то отрицаний, и добавилось не больше, чем число листьев, то есть сложность формулы. Таким образом, новая сложность не превосходит $2s$.

4. Начало будет аналогично предыдущей задаче. Снова ранжируем схему, подвесив её за вывод. Далее снова пойдём по схеме «сверху – вниз» Заметим, что, если значение некоторой ячейки «скармливается» только отрицаниям, то можно провернуть аналогичный фокус (применить закон Де Моргона как в прошлой задаче), если же значение ячейки так же переходит и в некоторую другую, которая не является отрицанием, то давайте создадим её копию (копию той, которая «скармливается» отрицанию) и все выводы не в отрицания из оригинала перекинем в неё, а вводы просто продублируем. Тогда с тем, что осталось снова можно применить закон Де Моргона. Таким образом, у нас опять количество отрицаний на уровне, на котором мы стоим строго убывает при каждой очередной операции, а количество уровней не меняется, а значит предъявленный алгоритм конечен. Аналогично прошлой задаче мы каждой итерацией добавляем не больше одной вершины, однако в новом случае у каждой вершины может дополнительно появится до 1 клона, а значит новую сложность можно оценить как $3s$.

5. Предположим, что существует такая КНФ, которая удовлетворяет условиям, но при этом невыполнима. Тогда рассмотрим случайные значения переменных в этой КНФ. Так как по нашему предположению она невыполнима, то какой-то дизъюнкт (A) даёт 0. Попробуем исправить его так, чтобы не испортить другие. Для этого рассмотрим произвольную переменную, входящую в A, после смены её значения выбранный дизъюнкт станет верным (что очевидно), однако могут испорититься другие. Предположим, что для любого выбора переменной из A хотя бы один другой всегда становится ложным (из тех, которые до этого были верны). Это в свою очередь означает, что для любой переменной этого дизъюнкта существует хотя бы один другой дизъюнкт, в который она входит с другим «знаком» (то есть с отрицанием или без него). Тогда рассмотрим произвольную переменную x из A и произвольный дизъюнкт который она «портит» при замене (B). По условию в A и B есть ещё хотя бы одна переменная y, входящая в оба с разными знаками, что в свою очередь означает, что или A на самом деле принимает истинное значение, или B нельзя испортить заменой x, так как в первом случае значение y удовлетворяет A, а во втором — B, и одно из этих двух условий обязательно выполнено. Таким образом, мы всегда сможем исправить неверный дизъюнкт, а значит рассматриваемая КНФ всегда выполнима. Что и требовалось доказать.

Бонус к первому ДЗ

Бонусная задача 1.

Давайте доказывать задачу индукцией по n.

База. $n = 1$, очевидно, что через 1 ход чёрных клеток не останется.

Переход. Пердположим, что задача реена для всех $n \leqslant k$, решим ее для $n = k+1$. Тогда введём оси координат таким образом, чтобы обе координаты каждой клетки из множества тех, что изначально были чёрными (далее S), были положительными, и нашлось по одной (возможно больше) клетке из S, таких, чтобы у первой $x = 1$, а у второй $y = 1$. Пусть $S_1 = \{a : a \in S$ таких, что их координата по x больше $1\}$. Тогда $|S_1| \leqslant k$, и при этом все клетки, с $x = 1$ не могут оказать влияние на покраску клеток у которых $x > 1$. Тогда по предположению индукции (к S_1) через не более чем k ходов все покрашенные клетки имеют кординату по $x \leqslant 1$. С другой стороны, у нас не могло возникнуть покрашенных клеток с $x < 1$. (в самом деле, изначально их не было, тогда можно рассмотреть первую из них, но для её покраски в черный чвет необходима клетка над ней, а тогда рассматриваемая нами клетка не первая, противоречие, значит таких клеток быть не могло). А значит, что после не более, чем k ходов, все покрашенные клетки имеют координату $x = 1$, аналогично доказывается, что их $y = 1$, а тогда у нас осталось не более одной клетки, которая исчезнат за 1 ход, слоедовательно чёрных клеток не останется не позднее, чем через $k + 1$ ход, что и требовалось доказать. Таким образом, переход индукции доказан, и задача решена.

Бонус ко второму ДЗ

Бонусная задача 2.

Давайте доказывать, что константа $C = 4$ удовлетворяет условию. Доказывать это мы собираемся по индукции по n.
База. $n = 2$ очевидно, так как число единиц не превосходит 3.
Переход. Предположим, что задача решена для $n = k - 1$, докажем, что оно также решена для $n = k$. Для начала скажем, что мы будем называть плохими прмоугольниками такие 4 клетки, что они стоят в пересечениях 2 столбцов и 2 строк, и в них стоят единицы. Тогда мы ходим доказать, что, если в таблиценет плохих прямоугольников, то всего в таблице не более, чем $4k\sqrt{k}$ единиц.
Предположим, что в таблице нашлись такие строка и столбец, что в них в сумме стоит не более $4\sqrt{k}$ единиц. Тогда давайте выкинем из нашей таблицы эти строку и столбец, при этом у нас не возникнет плохих прямоугольникови получатся таблица $(k-1) \times (k-1)$, для которой верно наше предположение индукции, а значит, после выкидывания у нас опсталось не более $4(k-1)\sqrt{k-1}$ единиц, а тогда в исходной таблице их было не более, чем $4((k-1)\sqrt{k-1} + \sqrt{k})$, что не превосходит $4k\sqrt{k}$, таким образом, переход доказан.
Если наше предположение оказалось неверно, и в любой строке и любом столбце в сумме стоит больше $4\sqrt{k}$ единиц, то рассторим наименьшую сумму в одной линии (без ограницения общности, будем считать, что это строка). Если эта сумма больше $2\sqrt{k}$, то во всех столбцах и одной строке количество единиц тоже больше $2\sqrt{k}$. Если же рассматриваемая сумма не превосходит $2\sqrt{k}$, то во всех столбцах строго больше $2\sqrt{k}$ единиц, и по принципу Дирихле найдется строка, в которой их тоже больше $2\sqrt{k}$. В обоих случаях назовём эту строку S, а множество столбцов, в пересецении которых с S назовём A, при этом мы знаем, что $|A| > \sqrt{k}$. В каждом столбце из A стоит больше $2\sqrt{k}-1$ единица (не считая ту, что в пересечении с S). Тогда всего единиц будет строго больше, чем $4\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)$, и при этом по принципу Дирихе какие-то 2 окажутся в одной строке (отличной от S, которых всего $n-1$). Тогда найдётся плохой прямоугольник, образованный найденными 2 единицами и 2 единицами на пересечении выбранных столбцов с S, а значит наше предположение неверно, и переход выполнен.
Что и требовалось доказать.

Бонус к пятому ДЗ

Начнём с того, что обозначим множество всех бесконечных арифметических прогрессий за Θ, докажем, что Θ счётно. Для этого сопоставим каждой бесконечной арифметической прогресии пару из её первого элемента и шага, очевидно, что такое сопоставление является биекцией. Тогда нам просто надо пронумеровать все возможные пары натуральных чисел. Сделаем это по следующему алгоритму:
на i-той итерации нашего алгоритма пронумеруем пары $(k, i), k \in \{1, 2, \dots, i\}$. Тогда очевидно, что каждая пара получит номер и мы построим биекцию с $\mathbb{N}$.
Теперь построим множества A и B ледующим образом:

- изначально все натуральные числа лежат в B;
- на i-той операции будем «удалять» из B i-тую арифметическую прогрессию (елси она еще не удалена, иначе пропускаем итерацию). При этом под «удалением» прогресии мы подразумеваем перенос хотя бы одного её члена в множество A. Покажем, что мы всегда можем так сделать. В любой прогресси, очевидно, что в рассматриваемой прогрессии найдётся сколь угодно большой элемент. Давайте перенесём в A такой, который больше любого числа, которое уже записано в A хотя бы в 239 раз. Тогда, в A гарантированно не возникнет трехчленных арифметических прогрессий, потому что наше число будет больше любого другого из A больше, чем на наибольшую разность, среди пары элементов A до переноса.

Таким образом у нас вышло построить множества A и B такие, что каждое натуральное число попало в одно из них, и при этом в A не т трёхчленных арифметических прогрессий, а в B нет бесконечных. Что и требовалось доказать.

Бонус к девятому ДЗ

Давайте в этой задаче рассматривать антиграф. Тогда в любом подмножестве из n найдётся изолированная вершина и мы хотим доказать, что таковая найдётся во всём графе.
Предположим, что это не так. Тогда каждая вершина связана с хотя бы одной другой. Рассмотрим вершину наименьшей степени (очевидно, что эта степень не больше $n+1$, так как точно есть вершина, которая не связяна хотя бы с $n-1$ другой.

Глава 4

Матан на первом курсе

Домашки

Первое БДЗ

1. (8)
Это утверждение верно, так как в качестве x, y можно взять пару $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, и тогда не найдётся такого рацонального $r : r \in [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
Отрицанием к данному выражению будет являться $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists r \in \mathbb{Q} : r \in [x, y]$.

2. (6)
Давайте предположим обратное, тогда число $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$ представимо в виде $\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}$. Докажем, что такое невозможно:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} = \frac{p}{q};$$
$$\sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{3} = \frac{p}{q};$$
$$7 - 4\sqrt{3} = \frac{p^2}{q^2};$$
$$\sqrt{3} = \frac{7q^2 - p^2}{4q^2}.$$

При этом мы знаем, что корень из 3 иррационален (доказывали на парах, поэтому в я не стану приводить доказательство этого факта), а вот число справа всегда рационально, а значит наше предположение неверно, таким образом, мы доказали, что число $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$ иррационально.

3. (1)
$X = \{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N}\}$. Для начала начала скажем, что последовательность $\{x_i : \sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{2^k}\}$ монотонно возрастает (что очевидно, так как все слагаемые строго больше нуля). При этом каждый член этой последовательности представляет из себя сумму геометрической прогрессии с множителем меньше 1, а начит мы можем посчитать сумму всей прогресси: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. При этом, множество членов последовательности $\{x_i\}$ совпадает с X, а значит $supX = 1$. Так же, мы знаем, что члены $\{x_i\}$ монотонно возрастают, следовательно $inf\{x_i\} = \{x_1\} = \frac{1}{2}$. Тогда, по выше доказанному, $infX = inf\{x_i\} = \frac{1}{2}$.

4. (1)
$x_n = \sqrt[3]{n^3 + n^{\frac{3}{2}}} - \sqrt[3]{n^3 - n^{\frac{3}{2}}}$. Давайте доказывать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Это равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{n^3-n^{\frac{3}{2}}}} = 1$ (так можно сказать, так как, начиная с $n = 2$ знаменател полученной дроби всегда строго больше 0). Так как это выражение можно возвести в куб, получим, что утверждение о том, что предел x_n равне 0 равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n^{\frac{3}{2}}}{n^3-n^{\frac{3}{2}}} = 1$. Докажем последнее утверждение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n^{\frac{3}{2}}}{n^3 - n^{\frac{3}{2}}} = 1;$$
$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{n^3 - n^{\frac{3}{2}}}) = 1;$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{n^3 - n^{\frac{3}{2}}} = 0;$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}} - 1} = 0.$$

Поселнее тожедество является очевидным, так как числитель дроби всегда константа, а при $n > 100$ знаменатель строго больше n. Таким образом, мы доказали, что предел последовательности $\{x_n\} = 0$. При этом легко убедиться, что все члены нашей поселовательности больше нуля (так как, очевидно, $\sqrt[3]{n^3 + n^{\frac{3}{2}}} > \sqrt[3]{n^3 - n^{\frac{3}{2}}}$). Тогда $inf\{x_n\} = 0$. По выше доказанному мы знаем, что $\{x_n\}$ убывает (так как убывает $\{x_n^3\}$), а значит $sup\{x_n\} = x_1 = \sqrt[3]{2}$.

5. (8)

$x_n = \frac{-6n-1}{4-3n} = \frac{6n+1}{3n-4} = 2 + \frac{9}{3n-4}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{3n-4} = 0$, так как для любого $\epsilon > 0\ \exists M\ \forall m > M : \left|\frac{9}{3m-4}\right| < \epsilon$ (для этого достаточно взять $M > \frac{9-4\epsilon}{3\epsilon}$). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{9}{3n-4}) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{3n-4} = 2+0 = 2$. Осталось найти минимальное n_0 такое, что $n > n_0 : x_n < 2 + \frac{1}{1000}$. По выше доказанному мы знаем, что $n_0 > \frac{9-\frac{4}{1000}}{\frac{3}{1000}} \Rightarrow n_0 > 2998\frac{2}{3} \Rightarrow n_0 = 2999$.

Второе БДЗ

6. (8)

$$\lim_{n\mapsto\infty}\{x_n\} = \lim_{n\mapsto\infty}\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1} =$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty}\frac{(\sqrt[n]{2}-1)\left(\sqrt[n]{2}^2+\sqrt[n]{2}+1\right)}{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt[n]{2}+1)(\sqrt[n]{4}+1)} =$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty}\frac{\sqrt[n]{2}^2+\sqrt[n]{2}+1}{(\sqrt[n]{2}+1)(\sqrt[n]{4}+1)} =$$
$$= \frac{\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{2}^2+\sqrt[n]{2}+1}{(\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{2}+1)(\lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{4}+1)} =$$
$$= \frac{3}{4}.$$

7. (1)
Если предел последовательности $\{x_n\}$ существует, то обозначим его за x, тогда верно следующее: $5+\frac{6}{x}=x$. Решениями этого уравнения являются только числа -1 и 6. Легко убедиться, что все члены поледовательноси $\{x_n\}$ больше 0, а значит, если предел существует, то он равен 6.
Тепреь покажем, что предел существует:
$\exists\, x_k = 6+c,\ -1 < c \leqslant 1 => x_{k+1} = 5+\frac{6}{6+c}$. Докажем, что $|c| > \left|6-\left(5+\frac{6}{6+c}\right)\right|$.

$$|c| > \left|6-\left(5+\frac{6}{6+c}\right)\right|;$$
$$|c| > \left|1-\frac{6}{6+c}\right|;$$
$$\left|6c+c^2\right| > |c|\text{, что, очевидно, верно при } -1 \leqslant c \leqslant 1 () c\text{изначально} => \text{всегда } |c| \leqslant 1.$$

Таким образом, мы показали, что предел существует, и он равен 6.

8. (0)
Отдельно разберём 3 случая:

1. $n \not\vdots 2$;
2. $n \vdots 2\ \&\ n \not\vdots 4$;
3. $n \vdots 4$.

1. $n \not\vdots 2$. В этом случае пеовое слагаемое примет значение 0, а второебудет иметь вид $-2\frac{n}{n+1}$, что, очевидно, страмится к -2.

2. $n \vdots 2\ \&\ n \not\vdots 4$. При таких уловиях первое слгаемое будет равно -1, а второе — $2\frac{n}{n+1}$, тогда сумма стремится к 1.

3. $n \vdots 4$. В этом случае вервое слагаемое равно 1, а второе — $2\frac{n}{n+1}$, а значит, сумма стремится к 3. Таким образом, частичными пределами являются значения $-2, 1, 3$. Покажем, что других нет.
Предположим, что такие нашлись, рассмотрим произвольный из них. Обозначим его за x, а подпоследовательность, сходящуюся к нему за $\{x_i\}$. Так как х отличен от чисел -2, 1 и 3, то $\forall N \in \mathbb{N} \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} n_1 > N\ \ \&\ \ n_2 > N$, такие, что x_{n_1} и x_{n_2} лежат в разных из рассмотренных выше поледовательностей, так как каждое число из исходной последовательности попало в одну из них (иначе предел совпадёт с одним из чисел $-2, 1, 3$, а мы предполагали обратное, но тогда легко убедиться, что последвательность $\{x_i\}$ расходится. Следовательно, никаких иныч частичных пределов быть не может.
Таким образом, для исходной последовательности $lim\ sup = 3,\ lim\ inf = -2$.

9. (8)
Давайте докажем, отрицание условия Коши, то есть

$$\exists\epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_0\ \ \&\ \ n_2 > n_0\ \ \&\ \ |x_{n_1} - x_{n_2}| > \epsilon.$$

Покажем, что это утверждение верно, для этого покажем, что $\epsilon = \frac{1}{32}$ подходит. Множитель $(-1)^{\left[\sqrt{\log_2 n}\right]}$ по модулю всегда равен 1, а множитель $\frac{2n-100}{\sqrt{n^2+1}}$ стремится к 2 (просто возведём в квадрат и убедимся в этом), следовательно, начиная с какого-то момента, все члены последовательности по модулю больше 1. Также очевидно, что для первого множетелся найдётся сколь угодно большое значение n, в котором он равен $+1$, и аналогичное верно и для -1, а значит, $\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_0\ \ \&\ \ n_2 > n_0\ \ \&\ \ x_{n_1} > 1\ \ \&\ \ x_{n_2} < -1 => |x_{n_1} - x_{n_2}| > 2 > \frac{1}{32}$. Что и требовалось доказать.

10. (6)

$$\lim_{n\mapsto\infty} x_n = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{n+7}{n+4}\right)^{\frac{2n^2-1}{n+5}} = \lim_{n\mapsto\infty} \left(1 + \frac{3}{n+4}\right)^{\frac{2n^2-1}{n+5}} =$$

$$= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{3}}\right)^{\frac{2n^2-1}{n+5}\cdot\frac{3}{n+4}} = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{3}}\right)^{\frac{6n^2-3}{n^2+9n+20}} =$$

$$= \lim_{n\mapsto\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{3}}\right)^{\lim_{n\mapsto\infty} \frac{6n^2-3}{n^2+9n+20}} = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{3}}\right)^{6};$$

Выполним замену: $\frac{n+4}{3}$. Тогда заметим, что при $n \mapsto \infty$ верно $t \mapsto \infty$.

$$= \lim_{t\mapsto\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{6} = e^6.$$

Третье БДЗ

11. (2).

$$\lim_{x\mapsto -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$$

$$\text{ваполним замену } x = x+2:$$

$$\lim_{x\mapsto -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2} = \lim_{x\mapsto 0}\frac{\sqrt[3]{x-4}+2}{x+4} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{0-4}+2}{0+4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}.$$

12. (0).

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\mapsto 0}\frac{\cos x-(1-\sin^2 x)}{x^2} = \lim_{x\mapsto 0}\frac{\cos x-1}{x^2} + \lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\mapsto 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+1$$

$$\text{Докажем, что } \lim_{x\mapsto 0}\frac{\cos^2 x-1}{2(\cos x-1)} = 1 <=> \lim_{x\mapsto 0}\cos^2 x-1 = \lim_{x\mapsto 0}2(\cos x-1) <=>$$

$$<=> \lim_{x\mapsto 0}\cos^2 x-1-2(\cos x-1) = \lim_{x\mapsto 0}(\cos x-1)^2 = 0,$$

$$\text{что очевидно, тогда можносовершить следующий переход:}$$

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+1 = \lim_{x\mapsto 0}-\frac{1-\cos^2 x}{2x^2}+1 = 0{,}5.$$

13. (6).

$$\lim_{x\mapsto 0}(1-\arcsin x)^{\frac{1}{\sin(x/2)}};$$

$$\text{исходя из эквивалентности } \sin x\sim x, x\mapsto 0, \text{ выполним замену}:$$

$$\lim_{x\mapsto 0}(1-\arcsin x)^{\frac{2}{x}};$$

$$\text{исходя из эквивалентности } \arcsin x\sim x, x\mapsto 0, \text{ выполним замену}:$$

$$\lim_{x\mapsto 0}(1-x)^{\frac{2}{x}} \text{ выполним замену } t=-\frac{1}{x}:$$

$$\lim_{t\mapsto\infty}(1+\frac{1}{t})^{-2t} = e^{-2}.$$

14. (9).

$$\ln(1+\arcsin(2x))(4^{1+\operatorname{arctg}^2(3x)}-4)\sim\alpha x^\beta, x\mapsto 0.$$

$$\ln(1+\arcsin(2x))(4^{1+\operatorname{arctg}^2(3x)}-4) = 4\ln(1+\arcsin(2x))(4^{\operatorname{arctg}^2(3x)}-1);$$

$$\text{исходя из эквивалентности } \ln(1+f(x))\sim f(x), f(x)\mapsto 0, \text{ выполним замену}:$$

$$4\arcsin(2x)(4^{\operatorname{arctg}^2(3x)}-1)$$

$$\text{исходя из эквивалентности } \operatorname{arctg} x\sim x, x\mapsto 0, \text{ выполним замену}:$$

$$4\arcsin(2x)(4^{9x^2}-1)$$

$$\text{исходя из эквивалентности } \arcsin x\sim x, x\mapsto 0, \text{ выполним замену}:$$

$$8x(4^{9x^2}-1)$$

$$\text{исходя из эквивалентности } a^{f(x)}-1\sim f(x)\ln a, f(x)\mapsto 0, \text{ выполним замену}:$$

$$8x\cdot 9x^2\ln 4 = 72ln4\cdot x^3 => \alpha = 72\ln 4, \beta = 3$$

15. (9).

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{(\sqrt[4]{1-3\operatorname{arctg}^2 2x}-1)(e^{\sin^2 6x}-1)}{(1-\cos(3\sin 4x))\log_3(1+7\operatorname{tg}8x^2)};$$

исходя из эквивалентности $a^{f(x)}-1\sim f(x)\ln a, f(x)\mapsto 0$ выполним замену :

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{(\sqrt[4]{1-3\operatorname{arctg}^2 2x}-1)(\sin^2 6x)}{(1-\cos(3\sin 4x))\log_3(1+7\operatorname{tg}8x^2)};$$

исходя из эквивалентности $(1+f(x))^{\frac{1}{p}}-1\sim\dfrac{f(x)}{p}, f(x)\mapsto 0$ выполним замену :

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{\frac{-3\operatorname{arctg}^2 2x}{4}(\sin^2 6x)}{(1-\cos(3\sin 4x))\log_3(1+7\operatorname{tg}8x^2)}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{-3(\operatorname{arctg}^2 2x)(\sin^2 6x)}{4(1-\cos(3\sin 4x))\log_3(1+7\operatorname{tg}8x^2)};$$

исходя из эквивалентности $1-\cos(f(x))\sim\dfrac{f^2(x)}{2}, f(x)\mapsto 0$ выполним замену :

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{-3(\operatorname{arctg}^2 2x)(\sin^2 6x)}{2(3\sin 4x)\log_3(1+7\operatorname{tg}8x^2)};$$

исходя из эквивалентности $\operatorname{arctg} f(x)\sim f(x)$

$\&\ \sin f(f)\sim f(x), f(x)\mapsto 0$ выполним замену :

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{-432x^4}{24x\log_3(1+7\operatorname{tg}8x^2)}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{-18x^3}{\log_3(1+7\operatorname{tg}8x^2)};$$

исходя из эквивалентности $\log_a(1+f(x))\sim\dfrac{f(x)}{\ln a}f(x)\mapsto 0$ выполним замену :

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{-18\ln(3)x^3}{7\operatorname{tg}8x^2};$$

исходя из эквивалентности $\operatorname{tg} f(x)\sim f(x), f(x)\mapsto 0$ выполним замену :

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{-18\ln(3)x^3}{56x^2}=\lim_{x\mapsto 0}-\frac{9\ln(3)x}{28}=0.$$

Четвёртое БДЗ

16. (4).

$$\frac{1}{e^{(x^2+2x)(x+3)^2}};$$

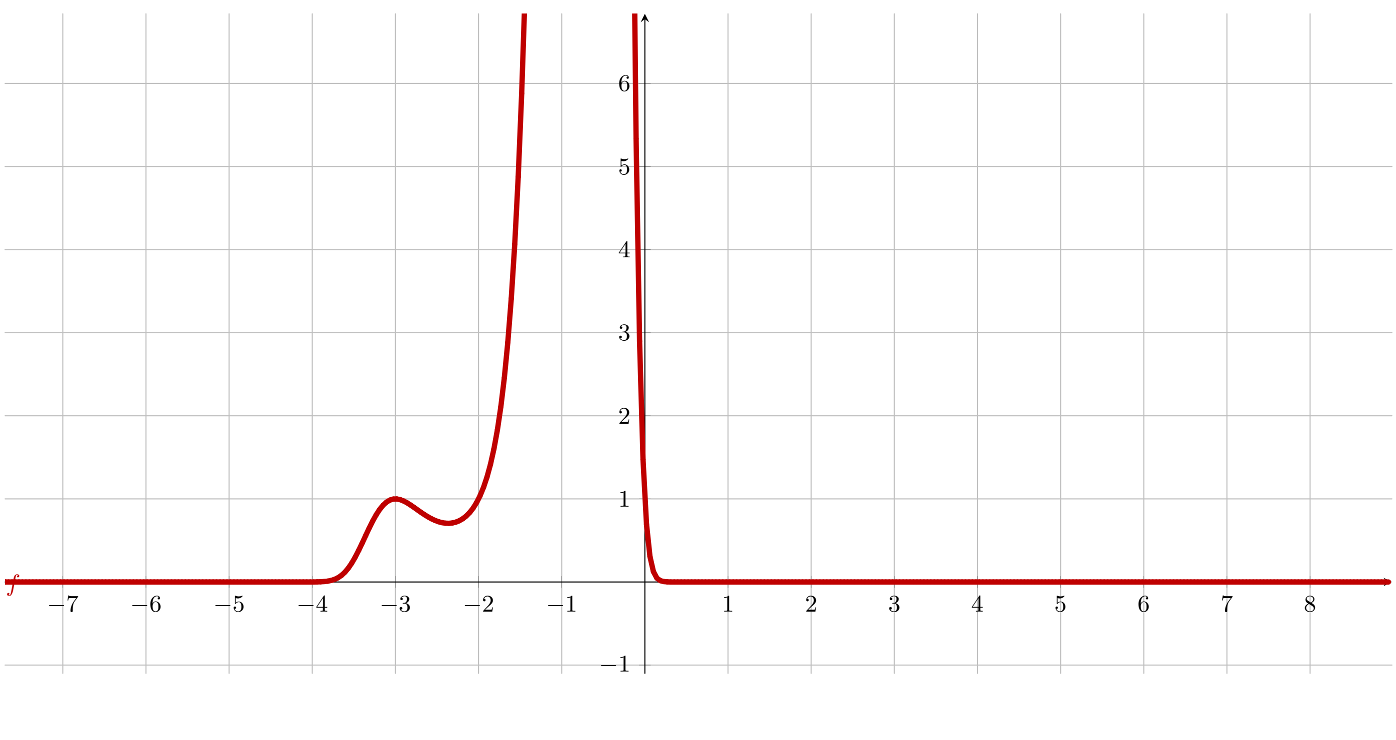
Заметим, что наша функция имеет вид «константа делить на непрерывную функцию», а значит может быть разрывна только в тех точках, в которых знаменатель равен или стремится к нулю:

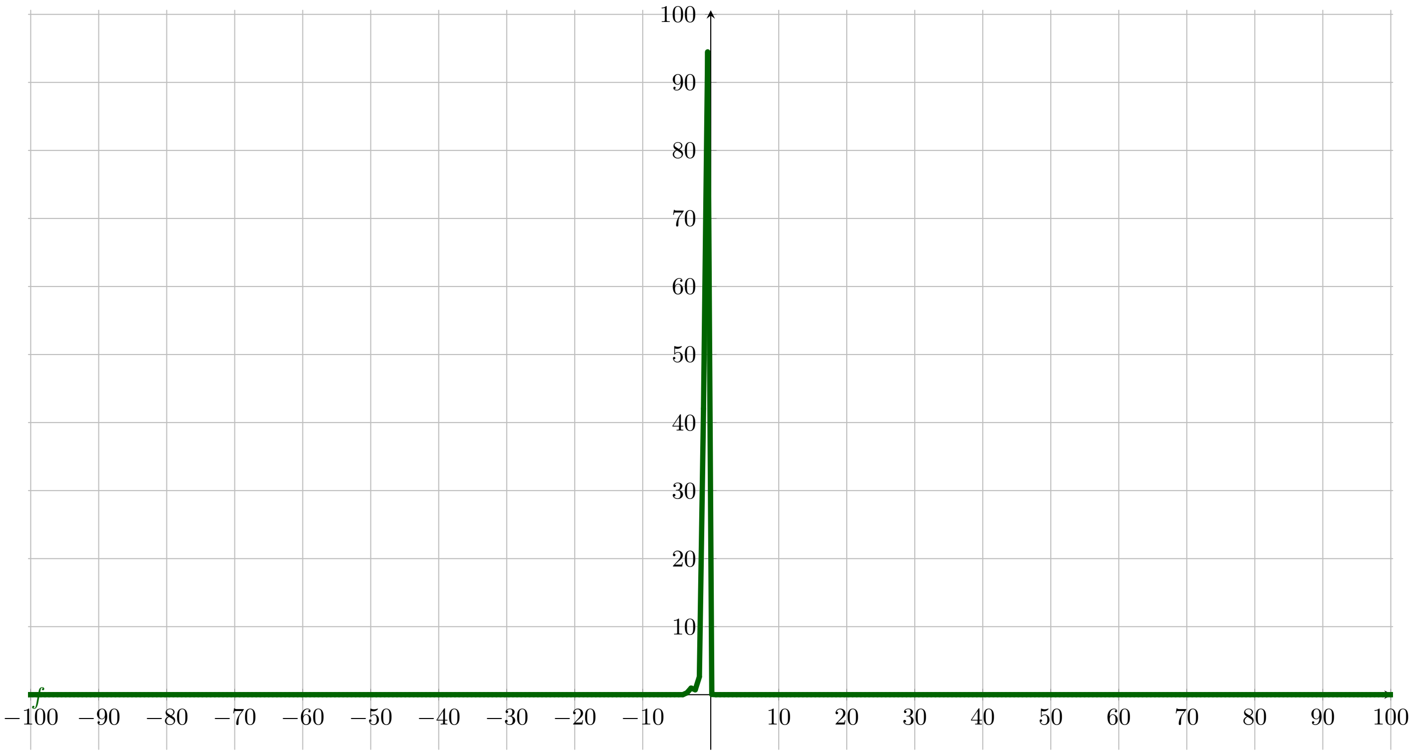
$$\begin{cases} e^{(x^2+2x)(x+3)^2} = 0, & \text{очевидно, не имеет решений,} \\ \lim_{x\mapsto x_0} e^{(x^2+2x)(x+3)^2} = 0, & \text{рассмотрим отдельно;} \end{cases}$$

$$\lim_{x\mapsto x_0} e^{(x^2+2x)(x+3)^2} = 0 <=> \lim_{x\mapsto x_0} (x^2+2x)(x+3)^2 = -\infty;$$

$$\lim_{x\mapsto x_0} (x^2+2x)(x+3)^2 = -\infty;$$

не имеет решений в силу того, что рассматриваетмая функция является многочленом чётной степени, а значит ни в какой точке не стемится к $-\infty$. Таким образом, данная функция является непрерывной на всей числовой оси.
Эскиз графика:





17. (4).

$$f(x) = e^x \sin 3x;$$

$$f'(x) = (e^x)' \sin 3x + e^x(\sin 3x)' = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{\sin 3x(e^x - e^{x_0}) + 3e^x(\sin 3x - \sin 3x_0)}{x - x_0};$$

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{\sin 3x(e^x - e^{x_0}) + 3e^x(\sin 3x - \sin 3x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \sin 3x \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} + \lim_{x \mapsto x_0} 3e^x \frac{\sin 3x - \sin 3x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \mapsto x_0} e^{x_0} \sin 3x \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} + \lim_{x \mapsto x_0} 3e^x \frac{\sin 3x - \sin 3x_0}{x - x_0} \sim$$

$$\sim e^x \sin 3x + 3e^x \lim_{x \mapsto x_0} \frac{\sin 3x - \sin 3x_0}{x - x_0} = e^x \sin 3x + 3e^x \lim_{x \mapsto x_0} \frac{2 \sin \frac{3x - 3x_0}{2} \cos \frac{3x + 3x_0}{2}}{x - x_0} \sim$$

$$\sim e^x \sin 3x + 3e^x \cos 3x = e^x(\sin 3x + 3\cos 3x)$$

18. (2).

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cos(\frac{1}{x^2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{При } x \neq 0: \quad f'(x) = 4x^3 \cos(\frac{1}{x^2}) + x^4(\cos(\frac{1}{x^2}))' =$$

$$= 4x^3 \cos \frac{1}{x^2} - \sin \frac{1}{x^2} (\frac{1}{x^2})' x^4 = 4x^3 \cos \frac{1}{x^2} + 2x \sin \frac{1}{x^2}.$$

Легко убедиться, что полученная функция является непрерывной для всех $x \neq 0$, так как она выражается как сумма и произведение непрерывных функций. Осталось только посчитать производную при $x = 0$. Сделаем это по определению.

$$f'(0) = \lim_{x \mapsto 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \mapsto 0} x^3 \cos(\frac{1}{x^2}).$$

В силу того, что $\left|\cos \frac{1}{x^2}\right| \leqslant 1$ верно, что

$$\lim_{x \mapsto 0} x^3 \cos(\frac{1}{x^2}) = 0.$$

Осталось определить, верно ли, что $\lim_{x\mapsto 0} f'(x) = 0$:

$$\lim_{x\mapsto 0} 4x^3 \cos\frac{1}{x^2} + 2x\sin\frac{1}{x^2} = \lim_{x\mapsto 0} 2x(2x^2\cos\frac{1}{x^2} + \sin\frac{1}{x^2});$$

Тут мы можем аналогично ограничить часть в скобках — $\left|2x^2\cos\frac{1}{x^2} + \sin\frac{1}{x^2}\right| \leqslant \left|2x^2\cos\frac{1}{x^2}\right| + \left|\sin\frac{1}{x^2}\right|$, а при $x\mapsto 0$ — $\left|2x^2\cos\frac{1}{x^2}\right| + \left|\sin\frac{1}{x^2}\right| \leqslant \left|\cos\frac{1}{x^2}\right| + \left|\sin\frac{1}{x^2}\right| \leqslant 2$. Следовательно $\lim_{x\mapsto 0} f'(x) = 0$.
Таким образом, из определение неприрывности по Гейне, производная $f(x)$ непрерывна при всех $\mathbb{R}$.

19. (1).

$$y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}};$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) => dy = f'(x)\cdot dx.$$
$$\daleth\, u = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} : f'(x) = \frac{d\arccos(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{1+2x^2}}} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+2x^2}}}\left(-\frac{\frac{d}{dx}(1+2x^2)}{2(1+2x^2)^{3/2}}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(1+2x^2)}{2(1+2x^2)^{3/2}\sqrt{1-\frac{1}{1+2x^2}}} =$$
$$= \frac{\frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}(2x^2)}{2(1+2x^2)^{3/2}\sqrt{1-\frac{1}{1+2x^2}}} = \frac{0+2x}{(1+2x^2)^{3/2}\sqrt{1-\frac{1}{1+2x^2}}} =$$
$$= 2x\frac{1}{(1+2x)^{3/2}\sqrt{1-\frac{1}{1+2x^2}}} => dy = 2x\frac{1}{(1+2x)^{3/2}\sqrt{1-\frac{1}{1+2x^2}}}\cdot dx.$$

20. (9).

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{e^{\operatorname{tg}x}(x^4+1)}{x\cos x}},\quad g(x) = (\cos x)^{\sqrt{x}}.$$

(a)

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d\sqrt[4]{\frac{(x^4+1)e^{\operatorname{tg}x}\sec x}{x}}}{d\frac{(x^4+1)e^{\operatorname{tg}x}\sec x}{x}}\cdot\frac{d\frac{(x^4+1)e^{\operatorname{tg}x}\sec x}{x}}{dx} =$$
$$= \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\operatorname{tg}x}(x^4+1)\sec x}{x}\right)}{4\left(\frac{(x^4+1)e^{\operatorname{tg}x}\sec x}{x}\right)^{3/4}} = \frac{1}{4\left(\frac{(x^4+1)e^{\operatorname{tg}x}\sec x}{x}\right)^{3/4}} =$$
$$= \frac{\left(-e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\left(\frac{d}{dx}x\right)\sec x + x\left(e^{\operatorname{tg}x}\left(\frac{d}{dx}((1+x^4)\sec x)\right) + (1+x^4)\left(\frac{d}{dx}(e^{\operatorname{tg}x})\sec x\right)\right)\right.}{4x^2\left(\frac{e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec x}{x}\right)^{3/4}} =$$
$$= \frac{-e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec(x) + x(e^{\operatorname{tg}x}((1+x^4)(\frac{d}{dx}\sec x) + (\frac{d}{dx}(1+x^4)\sec x) + e^{\operatorname{tg}x}(\frac{d}{dx}\operatorname{tg}x)(1+x^4)\sec x))}{4x^2\left(\frac{e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec x}{x}\right)^{3/4}} =$$
$$= \frac{-e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec x + x(e^{\operatorname{tg}x}((1+x^4)(\frac{d}{dx}\sec x) + \frac{d}{dx}(1+x^4)\sec x + \sec^2(x)e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec x))}{4x^2\left(\frac{e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec x}{x}\right)^{3/4}} =$$
$$= \frac{-e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec x + x(e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec^3 x + e^{\operatorname{tg}x}((1+x^4)\frac{d}{dx}\sec x + (\frac{d}{dx}(1+x^4))\sec x))}{4x^2\left(\frac{e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec x}{x}\right)^{3/4}} =$$
$$= \frac{-e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)]secx + x(e^{\operatorname{tg}x}((\frac{d}{dx}(1+x^4))\sec x + (1+x^4)(\frac{d}{dx}x)\sec x\operatorname{tg}x))}{4x^2\left(\frac{e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec x}{x}\right)^{3/4}} =$$
$$= \frac{-e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec x + x(e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec^3 x + e^{\operatorname{tg}x}(4x^3\sec x + (1+x^4)\sec x\operatorname{tg}x))}{4x^2\left(\frac{e^{\operatorname{tg}x}(1+x^4)\sec x}{x}\right)^{3/4}}$$

(b)

$$
\begin{gathered}
\ln(g(x)) = \sqrt{x}\ln(\cos x);\\
\frac{d}{dx}\ln(g(x)) = \frac{d}{dx}\sqrt{x}\ln(\cos x);\\
\frac{d}{dx}\sqrt{x}\ln(\cos x) = \frac{d\ln(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx};\\
\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}\sqrt{x}\ln(\cos x);\\
\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)g'(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}\sqrt{x}\ln(\cos x);\\
\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}\sqrt{x}\ln(\cos x);\\
\frac{g'(x)}{g(x)} = \left(\ln(\cos x)\left(\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\left(\frac{d}{dx}\ln(\cos x)\right)\right);\\
\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\ln(\cos x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\left(\frac{d}{dx}x\right)\operatorname{tg} x;\\
g'(x) = (\cos x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(\cos x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\operatorname{tg} x\right).
\end{gathered}
$$

Пятое БДЗ

21. 3.

(a)

$$\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{\ln^2(\operatorname{arctg}x)}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{\ln^2(\operatorname{arctg}x)\sin x}{\cos x}=$$
$$=\frac{\lim_{x\mapsto 0+0}\ln^2(\operatorname{arctg}x)\sin x}{\lim_{x\mapsto 0+0}\cos x}=\lim_{x\mapsto 0+0}\ln^2(\operatorname{arctg}x)\sin x;$$

так как при $x\mapsto 0$, $\ln^2(\operatorname{arctg}x)$ ограничена, а $\sin x$ стремится к нулю, то и их произведение также стремится к нулю.

$$\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{\ln^2(\operatorname{arctg}x)}{=}\lim_{x\mapsto 0+0}\ln^2(\operatorname{arctg}x)\sin x=0.$$

(b)

$$\lim_{x\mapsto 0+0}(\ln x)^{\arcsin x}=\lim_{x\mapsto 0+0}\exp(\ln((\ln x)^{\arcsin x}))=$$
$$=\lim_{x\mapsto 0+0}\exp(\arcsin x\ln(\ln x))=\exp(\lim_{x\mapsto 0+0}\arcsin x(\ln(\ln x)))=$$
$$=\exp\left(\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\arcsin x}}\right);$$

применим правило Лопиталя:

$$=\exp\left(\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{(\ln(\ln x))'}{\left(\frac{1}{\arcsin x}\right)'}\right)=\exp\left(\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{-\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}\arcsin(x)^2}}\right)=$$
$$=\exp\left(\lim_{x\mapsto 0+0}-\frac{\arcsin(x)^2\sqrt{-x^2+1}}{x\ln x}\right)=\exp\left(-1\left(\lim_{x\mapsto 0+0}\sqrt{-x^2+1}\right)\left(\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{\arcsin(x)^2}{x\ln x}\right)\right)=$$
$$=\exp\left(-1\left(\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{\arcsin(x)^2}{x\ln x}\right)\right)=\exp\left(-\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{\arcsin(x)^2}{x}\cdot\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{1}{\ln x}\right)=$$
$$=\exp\left(-0\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{\arcsin(x)^2}{x}\right);$$

снова применим правило Лопиталя:

$$=\exp\left(-0\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{(\arcsin(x)^2)'}{x'}\right)=\exp\left(-0\lim_{x\mapsto 0+0}\frac{2\arcsin x}{\sqrt{-x^2+1}}\right)=$$
$$=\exp\left(-0\cdot\frac{2\arcsin 0}{\sqrt{0+1}}\right)=\exp(-0\cdot 0)=1.$$

22. 8.

$$\begin{cases}x=\frac{\sin t}{1+\cos t},\\ y=\frac{\cos t}{1+\cos t},\end{cases}\quad ,t=\frac{\pi}{4};$$

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)'}{\left(\frac{\cos t}{1+\cos t}\right)'}.$$

$$\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)'=\frac{(1+\cos t)(\sin t)'-(1+\cos t)'\sin t}{(1+\cos t)^2}=\frac{\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}{(1+\cos t)^2}.$$

$$\left(\frac{\cos t}{1+\cos t}\right)'=\frac{(1+\cos t)(\cos t)'-(1+\cos t)'\cos t}{(1+\cos t)^2}=-\frac{\sin t}{(1+\cos t)^2}.$$

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)'}{\left(\frac{\cos t}{1+\cos t}\right)'}=\frac{-\frac{\sin t}{(1+\cos t)^2}}{\frac{\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}{(1+\cos t)^2}}=-\frac{\sin t}{\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}.$$

При $t=\frac{\pi}{4}$:

$$y'(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}}=-\frac{\frac{1}{\sqrt2}}{\frac{1}{\sqrt2}+\frac12+\frac12}=1-\sqrt2.$$

Заметим, что полученное число является тангенсом угла касательной к графику $y(x)$ в точке $(x(\frac{\pi}{4}), y(\frac{\pi}{4})) = (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$ Тогда уравнение касательной имеет вид $\sqrt{2}-1+(1-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+1)$, а перпендикуляр к ней через точку$(0,0)$ задаётся уравнением $x \cdot \frac{11}{1-\sqrt{2}} = x(1+\sqrt{2})$. Коодрината точки пересечения по оси абцисс равна решению уравнения $\sqrt{2}-1+(1-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+1) = x(1+\sqrt{2})$, то есть обцисса точки пересечения равна $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, тогда ордината равна $\frac{1}{2}$.

23. 6.

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t + \operatorname{arctg} t; \end{cases}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \frac{2t}{2+t^2};$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1+\operatorname{arctg} t)'' \ln(t^2+1) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \cdot \ln(1+t^2).$$

24. 2.

$$e^{x-2} + xy - 3y - 2 = 0, \quad x \neq 3$$
$$y(x) = \frac{2e^2 - e^x}{e^2(x-3)};$$
$$y'(x) = \frac{-(2e^2-e^x)(x-3)' - (x-3)e^x}{e^2(x-3)^2} = \frac{-2e^2 + e^x(x-4)}{e^2(x-3)^2}.$$
$$y''(x) = \big(y'(x)\big)' = \left(\frac{-2e^2+e^x(x-4)}{e^2(x-3)^2}\right)' = \frac{2(2e^2-e^x)}{e^2(x-3)^2} - \frac{e^{x-2}}{x-3} + \frac{2e^{x-2}}{(x-3)^2}.$$

При заданных координатах:

$$y'(x_0) = \frac{-2e^2 - 2e^2}{e^2} = -4.$$
$$y''(x_0) = 2 + 1 + 2 = 5.$$

25. 5.

$$f(x) = \sin^2 x(2x+3) = \frac{(1+\cos(2x))(2x+3)}{2};$$
$$f'(x) = (1+\cos(2x)) - (2x+3)\sin(2x);$$
$$f''(x) = 2(-2\sin(2x) - (2x+3)\cos(2x));$$
$$f'''(x) = 4((2x+3)\sin(2x) - 3\cos(2x));$$
$$f^{IV} = 8(4\sin(2x) + (2x+3)\cos(2x));$$
$$f^{V} = 16(-(2x+3)\sin(2x) + 5\cos(2x));$$

Далее давайте по индукции доказывать, что производная n-ной степени (при $n > 1$, $n = 1$ расписана отдельно) имеет следующий вид в зависимости от остатка n при делении на 4:

1. $n \underset{4}{\equiv} 0 => f^{(n)} = 2^{n-1}(n\sin(2x) + (2x+3)\cos(2x))$;
2. $n \underset{4}{\equiv} 1 => f^{(n)} = 2^{n-1}(-(2x+3)\sin(2x) + n\cos(2x))$;
3. $n \underset{4}{\equiv} 2 => f^{(n)} = 2^{n-1}(-n\sin(2x) - (2x+3)\cos(2x))$;
4. $n \underset{4}{\equiv} 3 => f^{(n)} = 2^{n-1}((2x+3)\sin(2x) - n\cos(2x))$;

Осталось показать 4 варианта перехода:

1. $\exists n \underset{4}{\equiv} 0 => \left(f^{(n)}\right)' = \big(2^{n-1}(n\sin(2x) + (2x+3)\cos(2x))\big)' = 2^n(-(2x+3)\sin(2x) + (n+1)\cos(2x))$ — всё ок;
2. $\exists n \underset{4}{\equiv} 1 => \left(f^{(n)}\right)' = \big(2^{n-1}(-(2x+3)\sin(2x) + n\cos(2x))\big)' = 2^n(-(n+1)\sin(2x) - (2x+3)\cos(2x))$ — всё ок;

3. $\exists\, n \underset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow \left(f^{(n)}\right)' = \left(2^{n-1}(-n\sin(2x) - (2x+3)\cos(2x))\right)' = 2^n((2x+3)\sin(2x) - (n+1)\cos(2x))$ — всё ок;
4. $\exists\, n \underset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow \left(f^{(n)}\right)' = \left(2^{n-1}((2x+3)\sin(2x) - n\cos(2x))\right)' = 2^n((n+1)\sin(2x) + (2x+3)\cos(2x))$ — всё ок.

Таким образом мы совершили переход, а значит доказали формулу представления n-ной производной данной функции для произвольного n.

Шестое БДЗ

1. 8
$f(x) = \frac{\sin x}{x},\ x_0 = \frac{\pi}{2}.$
$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \overline{o}((x - x_0)^3);$
$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{8-\pi^2}{\pi^3}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{2(\pi^2-8)}{\pi^4}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \overline{o}((x - \frac{\pi}{2})^3);$

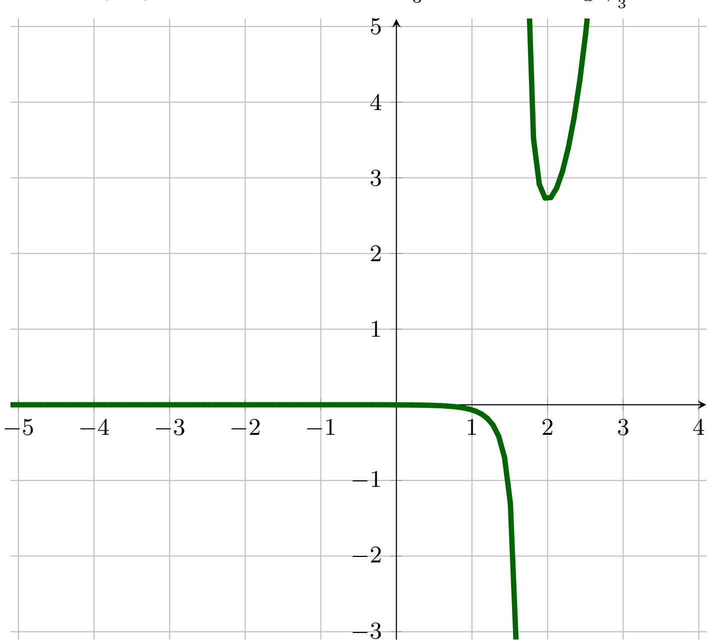
2. 6
$f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{3};$
$\beth\, y = x - \frac{\pi}{3},\ y_0 = 0:$
$f(y) = 1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 + \ldots + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{1}{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!}y^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \overline{o}(y^n);$
$f(x) = 1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{3})^4 + \ldots + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{1}{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!}(x - \frac{\pi}{3})^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \overline{o}((x - \frac{\pi}{3})^n);$

3. 1
Рассмотрим функцию e^x, тогда её остаточный член в форме Лагранжа при записи многочлена Тейлора в нуле до n-той степени будет иметь вид $\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$. При этом $x = \frac{1}{3}$. Нам хочется, чтобы $\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \leqslant \frac{e^{\frac{1}{3}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{4^{\frac{1}{3}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ было меньше 0,001, что верно, начиная с $n = 3$. Значит нам достаточно расписать только первые 4 члена многочлена Лагранжа.
$\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \approx 1{,}39506.$

4. 1

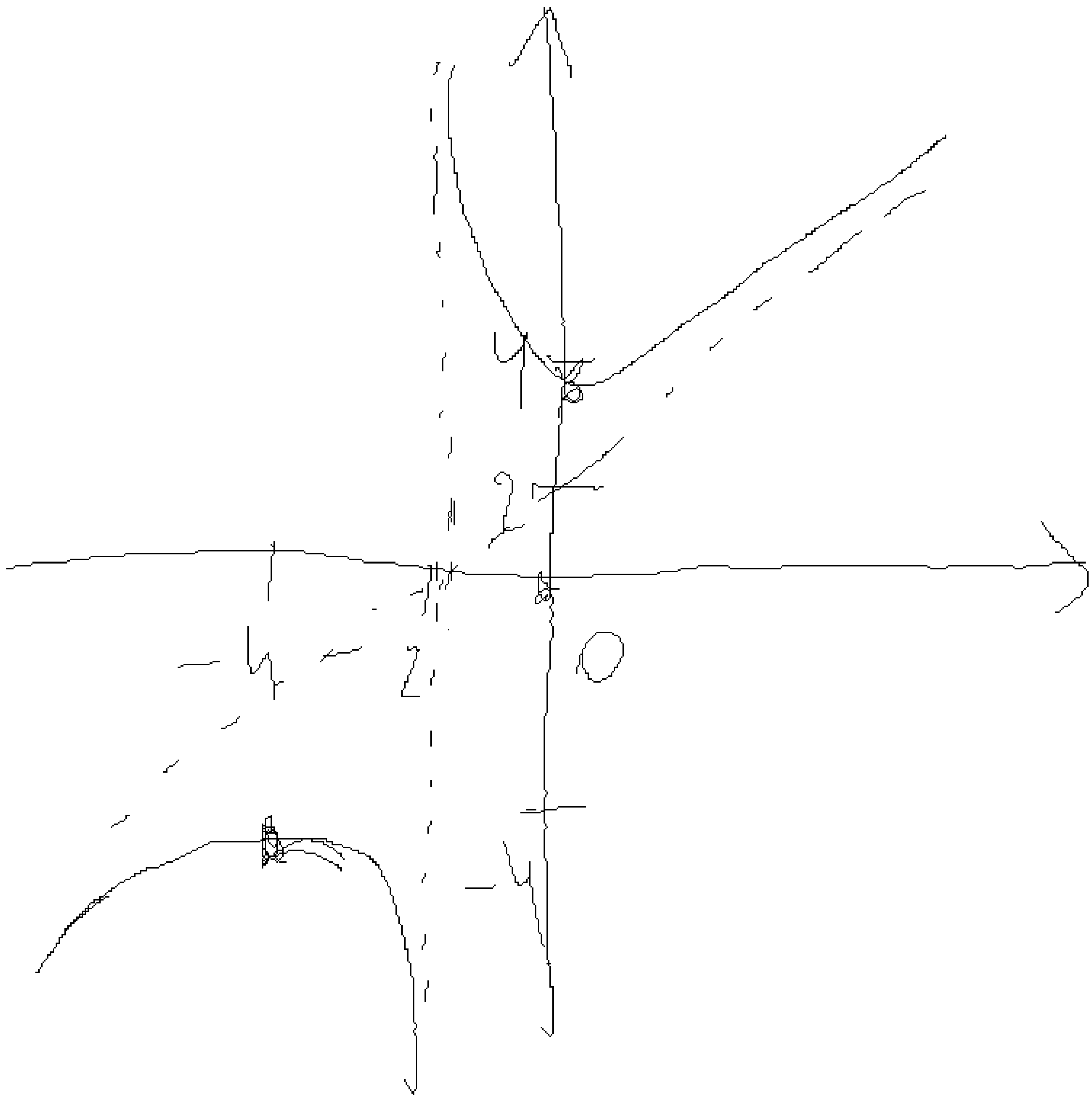
$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x} - x}{\ln(x^2+1) - x^2} = \lim_{x\mapsto 0}\frac{1}{\ln(x^2+1) - x^2} = \lim_{x\mapsto 0}\frac{1}{-\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n} + \ldots} =$$
$$= \lim_{x\mapsto 0}\frac{1}{-0} = -\infty;$$

5. 8
(a) $f(x) = \frac{e^{3x-5}}{3x-5}$. Числитель всегда больше нуля, поэтому функция не имеет нулей, $\frac{5}{3}$ — точка разрыва. $f'(x) = \frac{9e^{3x-5}(x-2)}{(3x-5)^2}$. Ноль первой производной — $x = 2$. $f''(x) = \frac{9e^{3x-5}(9x^2-36x+37)}{(3x-5)^3}$. Вторая производная не имеет нулей. Точка минимума — $(2, e)$, точка разрыва — $x = \frac{5}{3}$, при этом $\lim_{x\mapsto \frac{5}{3}-} = -\infty$, $\lim_{x\mapsto \frac{5}{3}+} = +\infty$. Тогда построим график.



$f(x) = \frac{x^2+4x+8}{x+2}$. Числитель больше нуля, поэтому функция не имеет нулей, $x = -2$ — точка разрыва. $f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$, нули производной — $x = 0$ и $x = -4$. $f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3}$, вторая производная не имеет нулей. Тогда точки экстремума функции — $(0, 4)$ (минимум) и $(-4, -4)$ (максимум). Также функция имеет ассимптоту $y = x + 2$. $\lim_{x\mapsto -2-} = -\infty$ и $\lim_{x\mapsto -2+} = +\infty$. Тогда построим график.

*К сожалению, геогебра отказывалась импортировать гиперболу в Tikz, поэтому мне пришлось рисовать от руки (я очень старался).



Седьмое БДЗ

6. 8

$$\int \frac{2^{\sqrt{\ln(3x+5)}}}{(3x+5)\sqrt{\ln(3x+5)}}dx;$$
$$\exists\, t = \sqrt{\ln(3x+5)}:$$
$$\int \frac{2^t}{e^{t^2}t} d\frac{e^{t^2}-5}{3} = \int \frac{2^t}{e^{t^2}t}\cdot\frac{e^{t^2}2t}{3}dt = \int \frac{2^{t+1}}{3}dt = \frac{2^{t+1}}{\ln 8}+C;$$
$$\frac{2^{\sqrt{\ln(3x+5)}}+1}{\ln 8}+C.$$

7. 1
(a)

$$\int \frac{dx}{x-5\sqrt[4]{x}};$$
$$\exists\, t = \sqrt[4]{x},\ dt = \frac{1}{4x^{3/4}}dx:$$
$$4\int \frac{t^3}{t^4-5t}dt = 4\int \frac{t^2}{t^3-5}dt;$$
$$\exists\, u = t^3-5,\ du = 3t^2dt:$$
$$\frac{4}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{4}{3}\ln(|u|)+C;$$
$$\frac{4}{3}\ln(\left|t^3-5\right|)+C = \frac{4}{3}\ln(\left|x^{3/4}-5\right|)+C.$$

(b)

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}};$$
$$\exists\, x = 4\sin(t),\ dx = 4\cos(t):$$
$$4\int \frac{\csc^2(t)}{64}dt = \frac{1}{16}\int \csc^2(t)dt = -\frac{\cot(t)}{16}+C;$$
$$t = \arcsin(\frac{x}{4}):$$
$$\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x}+C.$$

8. 0 (a)

$$\int x\operatorname{arctg}(x)dx;$$
$$\int fdg = fg - \int gdf\ \ with\ f = \operatorname{arctg}(x),\ g = \frac{x^2}{2},\ dg = xdx,\ df = \frac{1}{x^2+1}dx:$$
$$\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx;$$
$$\frac{1}{2}\left(x^2\operatorname{arctg}x + \int\frac{1}{x^2+1}dx - \int 1dx\right) = \frac{1}{2}\left(x^2\operatorname{arctg}x - x + \operatorname{arctg}x\right)+C;$$
$$\frac{1}{2}\left((x^2+1)\operatorname{arctg}(x) - x\right)+C.$$

(b)

$$\int (x^2 - 4x + 3)\sin(2x)dx;$$
$$\int x^2 \sin(2x)dx - 4\int x\sin(2x)dx + 3\int \sin(2x)dx;$$
$$\int fdg = fg - \int gdf \ with\ f = x^2,\ g = -\frac{1}{2}\cos(2x),\ dg = \sin(2x)dx,\ df = 2xdx :$$
$$\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \int x\cos(2x)dx - 4\int x\sin(2x)dx + 3\int \sin(2x)dx;$$
$$\int fdg = fg - \int gdf \ with\ f = x,\ g = \frac{1}{2}\sin(2x),\ dg = \cos(2x)dx,\ df = dx :$$
$$-\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{5}{2}\int \sin(2x)dx - 4\int x\sin(2x)dx;$$
$$\urcorner\, t = 2x,\ dt = 2dx :$$
$$-\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{5}{4}\int \sin(t)dt - 4\int x\sin(2x)dx =$$
$$= -\frac{5}{4}\cos(2x) - \frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) - 4\int x\sin(2x)dx;$$
$$\int fdg = fg - \int gdf \ with\ f = x,\ g = -\frac{1}{2}\cos(2x),\ df = dx,\ dg = \sin(2x)dx :$$
$$-\frac{5}{4}\cos(2x) + 2x\cos(2x) - \frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) - 2\int \cos(2x)dx;$$
$$\urcorner\, s = 2x,\ ds = 2dx :$$
$$-\frac{5}{4}\cos(2x) + 2x\cos(2x) - \frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) - \int \cos(s)ds =$$
$$= -\sin(2x) - \frac{5}{4}\cos(2x) - \frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + 2x\cos(2x) + C;$$

(c)

$$\int e^{-3x}\cos(x)dx;$$
$$\int fdg = fg - \int gdf \ with\ f = \sin(x),\ g = -\frac{1}{3}e^{-3x},\ df = \cos(x)dx,\ dg = e^{-3x}dx :$$
$$\frac{1}{9}e^{-3x}\sin(x) - \frac{1}{3}e^{-3x}\cos(x) - \frac{1}{9}\int e^{3x}\cos(x)dx =$$
$$= \frac{1}{9}e^{-3x}\sin(x) - \frac{1}{3}e^{-3x}\cos(x) - \frac{1}{3}e^{3x}\cos(x)dx + C =$$
$$= \frac{9}{10}\left(\frac{1}{9}e^{-3x}\sin(x) - \frac{1}{3}e^{-3x}\cos(x)\right) + C =$$
$$= \frac{1}{10}e^{3x}(\sin(x) - 3\cos(x)).$$

9. 8 (a)

$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+17}dx;$$
$$2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+17}dx - 5\int \frac{1}{x^2+2x+17}dx;$$
$$\exists\, t = x^2+2x+17,\ dt = (2x+2)dx:$$
$$2\int \frac{1}{t}dt - 5\int \frac{1}{x^2+2x+17}dx = 2\ln(|t|) - 5\int \frac{1}{x^2+2x+17}dx =$$
$$= 2\ln(\left|x^2+2x+2\right|) - 5\int \frac{1}{x^2+2x+17}dx; +C$$
$$\exists\, s = (x+1),\ ds = dx:$$
$$2\ln(\left|x^2+2x+2\right|) - 5\int \frac{1}{s^2+16}ds + C = 2\ln(x^2+2x+2) - \frac{5}{16}\int \frac{1}{\frac{s^2}{16}+1}ds + C;$$
$$\exists\, p = \frac{s}{4},\ dp = \frac{1}{4}ds:$$
$$2\ln(\left|x^2+2x+2\right|) - \frac{5}{4}\int \frac{1}{p^2+1}dp = 2\ln(x^2+2x+2) - \frac{5}{4}\arctan(p) + C =$$
$$2\ln(\left|x^2+2x+2\right|) - \frac{5}{4}\arctan(\frac{s}{4}) + C =$$
$$= 2\ln(\left|x^2+2x+17\right|) - \frac{5}{4}\arctan(\frac{x+1}{4}) + C.$$

(b)

$$\int \frac{3x-1}{x^2+6x+5}dx;$$
$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+5}dx - 10\int \frac{1}{x^2+6x+5}dx;$$
$$\exists\, t = x^2+6x+5,\ dt = (2x+6)dx:$$
$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{t}dt - 10\int \frac{1}{x^2+6x+5}dx = \frac{3\ln(|t|)}{2} - 10\int \frac{1}{x^2+6x+5} + C;$$
$$\exists\, s = x+3,\ ds = dx:$$
$$\frac{3\ln(|t|)}{2} - 10\int \frac{1}{s^2-4}ds + C = \frac{3\ln(t)}{2} - 10\int -\frac{1}{3\left(1-\frac{s^2}{4}\right)}ds + C;$$
$$\exists\, p = \frac{s}{2},\ dp = \frac{1}{2}ds:$$
$$\frac{3\ln(|t|)}{2} + 5\int \frac{1}{1-p^2}dp + C = 5\arctan(p) + \frac{3\ln(|t|)}{2} + C =$$
$$= 4\ln(|x+5|) - \ln(|x+1|) + C.$$

10. 6

$$\int \frac{2x^4-x^3-x^2+6x+3}{x^3-5x^2+6x}dx;$$
$$\int \left(2x + \frac{49}{x-3} - \frac{35}{2(x-2)} + \frac{1}{2x} + 9\right) dx =$$
$$= 2\int xdx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + \frac{35}{2}\int \frac{1}{x-2}dx + 49\int \frac{1}{x-3}dx + 9\int 1dx =$$
$$= x^2 + \frac{\ln(|x|)}{2} + 9x - \frac{35}{2}\int \frac{1}{x-2}dx + 49\int \frac{1}{x-3} + C;$$
$$\exists\, t = x-2,\ dt = dx,\ s = x-3,\ ds = dx:$$
$$x^2 + \frac{\ln(|x|)}{2} + 9x - \frac{35}{2}\frac{1}{t}dt + 49\int \frac{1}{s}ds + C =$$
$$= x^2 + 9x + \frac{\ln(|x|)}{2} - \frac{35\ln(|x-2|)}{2} + 49\ln(|x-3|) + C.$$

Восьмое БДЗ

11. 2
(a)

$$\int \frac{(4x-3)dx}{(x-3)^2(x^2-x+1)};$$
$$\int \left(\frac{17x-29}{49(x^2-x+1)} - \frac{17}{49(x-3)} + \frac{9}{7(x-3)^2}\right) dx;$$
$$\frac{1}{49}\int \left(\frac{17(2x-1)}{2(x^2-x+1)} - \frac{41}{2(x^2-x+1)}\right) dx - \frac{17}{49}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{9}{7}\int \frac{dx}{(x-3)^2};$$
$$\exists\, t = x^2 - x + 1,\ dt = (2x-1)dx:$$
$$\frac{17}{49}\int \frac{dt}{t} - \frac{41}{98}\int \frac{dx}{x^2-x+1} - \frac{17}{49}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{9}{7}\int \frac{dx}{(x-3)^2};$$
$$\frac{17}{49}\ln|t| - \frac{41}{98}\int \frac{dx}{x^2-x+1} - \frac{17}{49}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{9}{7}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + C;$$
$$\exists\, s = x - \frac{1}{2},\ ds = dx:$$
$$\frac{17}{49}\ln|t| - \frac{41}{98}\int \frac{ds}{s^2+\frac{3}{4}} - \frac{17}{49}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{9}{7}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + c;$$
$$\frac{17}{49}\ln|t| - \frac{82}{147}\int \frac{ds}{\frac{4s^2}{3}+1} - \frac{17}{49}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{9}{7}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + C;$$
$$\exists\, p = \frac{2s}{\sqrt{3}},\ dp = \frac{2}{\sqrt{3}}ds:$$
$$\frac{17}{49}\ln|t| - \frac{41}{49\sqrt{3}}\int \frac{dp}{p^2+1} - \frac{17}{49}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{9}{7}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + C;$$
$$\frac{17}{49}\ln|t| - \frac{41}{49\sqrt{3}}\arctan(p) - \frac{17}{49}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{9}{7}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + C;$$
$$\exists\, w = x-3,\ dw = dx:$$
$$\frac{17}{49}\ln|t| - \frac{41}{49\sqrt{3}}\arctan(p) - \frac{17}{49}\int \frac{dw}{w} + \frac{9}{7}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + C;$$
$$\frac{17}{49}\ln|t| - \frac{41}{49\sqrt{3}}\arctan(p) - \frac{17}{49}\ln|w| + \frac{9}{7}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + C;$$
$$\exists\, v = x-3,\ dv = dx:$$
$$\frac{17}{49}\ln|t| - \frac{41}{49\sqrt{3}}\arctan(p) - \frac{17}{49}\ln|w| + \frac{9}{7}\int \frac{dv}{v^2} + C;$$
$$\frac{17}{49}\ln|t| - \frac{41}{49\sqrt{3}}\arctan(p) - \frac{17}{49}\ln|w| - \frac{9}{7v} + C;$$
$$\frac{1}{294}\left(51\ln\left|x^2-x+1\right| - \frac{378}{x-3} - 102\ln|x-3| - 82\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C.$$

(b)

$$\int \frac{(x^2+2x-1)dx}{x^4-3x^3-8x+24};$$
$$\int \left(\frac{-35x-80}{228(x^2+2x+4)} + \frac{14}{19(x-3)} - \frac{7}{12(x-2)}\right) dx;$$
$$\frac{1}{228}\int \left(-\frac{35(2x+2)}{2(x^2+2x+4)} - \frac{45}{x^2+2x+4}\right) dx - \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{14}{19}\int \frac{dx}{x-3};$$
$$\exists\, t = x^2+2x+4,\ dt = (2x+2)dx:$$
$$-\frac{35}{456}\int \frac{dt}{t} - \frac{15}{76}\int \frac{dx}{x^2+2x+4} - \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{14}{19}\int \frac{dx}{x-3};$$
$$-\frac{35}{456}\ln|t| - \frac{15}{76}\int \frac{dx}{x^2+2x+4} - \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{14}{19}\int \frac{dx}{x-3} + C;$$
$$-\frac{35}{456}\ln|t| - \frac{15}{76}\int \frac{dx}{(x+1)^2+3} - \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{14}{19}\int \frac{dx}{x-3} + C;$$
$$\exists\, s = x+1,\ ds = dx:$$
$$-\frac{35}{456}\ln|t| - \frac{15}{76}\int \frac{ds}{s^2+3} - \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{14}{19}\int \frac{dx}{x-3} + C;$$
$$-\frac{35}{456}\ln|t| - \frac{5}{76}\int \frac{ds}{\frac{s^2}{3}+1} - \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{14}{19}\int \frac{dx}{x-3} + C;$$
$$\exists\, p = \frac{s}{\sqrt{3}},\ dp = \frac{ds}{\sqrt{3}}:$$
$$-\frac{35}{456}\ln|t| - \frac{5\sqrt{3}}{76}\int \frac{dp}{p^2+1} - \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{14}{19}\int \frac{dx}{x-3} + C;$$
$$-\frac{35}{456}\ln|t| - \frac{5\sqrt{3}}{76}\arctan(p) - \frac{7}{12}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{14}{19}\int \frac{dx}{x-3} + C;$$
$$\exists\, w = x-2,\ dw = dx:$$
$$-\frac{35}{456}\ln|t| - \frac{5\sqrt{3}}{76}\arctan(p) - \frac{7}{12}\int \frac{dw}{w} + \frac{14}{19}\int \frac{dx}{x-3} + C;$$
$$-\frac{35}{456}\ln|t| - \frac{5\sqrt{3}}{76}\arctan(p) - \frac{7}{12}\ln|w| + \frac{14}{19}\int \frac{dx}{x-3} + C;$$
$$\exists\, v = x-3,\ dv = dx:$$
$$-\frac{35}{456}\ln|t| - \frac{5\sqrt{3}}{76}\arctan(p) - \frac{7}{12}\ln|w| + \frac{14}{19}\int \frac{dv}{v} + C;$$
$$-\frac{35}{456}\ln|t| - \frac{5\sqrt{3}}{76}\arctan(p) - \frac{7}{12}\ln|w| + \frac{14}{19}\ln|v| + C;$$
$$\frac{1}{456}\left(-7(5\ln\left|x^2+2x+4\right| + 38\ln|x-2| - 48\ln|x-3|) - 30\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C.$$

12. 0 (a)

$$\int (\sin(4x)\cos(6x))\,dx;$$
$$\frac{1}{2}\int(\sin(10x)-\sin(2x))dx;$$
$$\frac{1}{2}\int\sin(10x)dx-\frac{1}{2}\int\sin(2x)dx;$$
$$\daleth\, t=10x,\ dt=10dx:$$
$$\frac{1}{20}\int\sin(t)dt-\frac{1}{2}\int\sin(2x)dx;$$
$$-\frac{\cos(t)}{20}-\frac{1}{2}\int\sin(2x)dx+C;$$
$$\daleth\, s=2x,\ ds=2dx:$$
$$-\frac{\cos(t)}{20}-\frac{1}{4}\int\sin(s)ds+C;$$
$$-\frac{\cos(t)}{20}+\frac{\cos(s)}{4}+C;$$
$$\frac{\cos^2(x)}{2}-\frac{\cos(10x)}{20}+C.$$

(b)

$$\int(\sin^3(x)\cos^4(x))dx;$$
$$-\frac{1}{7}\sin^2(x)\cos^5(x)+\frac{2}{7}\int(\sin(x)\cos^4(x))dx+C;$$
$$\daleth\, t=\cos(x),\ dt=-\sin(x)dx:$$
$$-\frac{1}{7}\sin^2(x)\cos^5(x)+\frac{2}{7}\int t^4dt+C;$$
$$-\frac{1}{7}\sin^2(x)\cos^5(x)+\frac{2t^5}{35}+C;$$
$$-\frac{1}{7}\sin^2(x)\cos^5(x)-\frac{2\cos^5(x)}{35}+C;$$

13. 6

$$\int \frac{dx}{1 - 3\sin(x) - \cos(x)};$$
$$\daleth\, t = \tan(\frac{x}{2}),\ dt = \frac{1}{2} dx \sec^2(\frac{x}{2}) :$$
$$\sin(x) = \frac{2t}{t^2+1},\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{t^2+1},\ dx = \frac{2dt}{t^2+1} :$$
$$\int \frac{2dt}{(t^2+1)\left(-\frac{6t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{t^2+1} + 1\right)};$$
$$\int \frac{dt}{t^2 - 3t};$$
$$\int \frac{dt}{\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}};$$
$$\daleth\, s = t - \frac{3}{2},\ ds = dt :$$
$$\int \frac{ds}{s^2 - \frac{9}{4}};$$
$$-\frac{4}{9}\int \frac{ds}{1 - \frac{4s^2}{9}};$$
$$\daleth\, p = \frac{2s}{3},\ dp = \frac{2ds}{3} :$$
$$-\frac{2}{3}\int \frac{dp}{1 - p^2};$$
$$-\frac{2}{3}\arctan(p) + C;$$
$$\frac{1}{3}\left(\ln\left(3\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) + C.$$

14. 9

$$\int \frac{\sqrt{5+4x-x^2}dx}{x\sqrt{5+4x-x^2} + (5+4x-x^2)};$$

Воспользуемся подстановкой Эйлера $\sqrt{5+2x-x^2} = t(x+1)$, где $x = -1$ — корень;

$$t = \sqrt{\frac{5-x}{x+1}},\ x = \frac{t^2-5}{-t^2-1};$$
$$\int \frac{\sqrt{5+4x-x^2}dx}{x\sqrt{5+4x-x^2} + (5+4x-x^2)} =$$
$$= \int \frac{t\left(\frac{t^2-5}{-t^2-1}+1\right)t'dt}{\frac{t^2-5}{-t^2-1}\left(t\left(\frac{t^2-5}{-t^2-1}+1\right)\right) + \left(t\left(\frac{t^2-5}{-t^2-1}+1\right)\right)^2} =$$
$$= \int \frac{t\left(\frac{t^2-5}{-t^2-1}+1\right)\left(-\frac{3}{\left(\frac{t^2-5}{-t^2-1}+1\right)^2 t}\right)dt}{\frac{t^2-5}{-t^2-1}\left(t\left(\frac{t^2-5}{-t^2-1}+1\right)\right) + \left(t\left(\frac{t^2-5}{-t^2-1}+1\right)\right)^2}$$

15. 9 Решение отдельно (в следующем задании).

Восьмое БДЗ. Продолжение

15. 9 Будем разбивать данный отрезок на n равных по $\frac{4}{n}$ каждый (далее l_n). ξ_i Будем считать равным x_i (то есть концы отрезков). Тогда нас интересует следующая сумма:

$$\int_1^5 f(x)dx = \lim_{n\mapsto\infty} l_n \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i);$$

$$\lim_{n\mapsto\infty} \left(\frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} (5^{1-3+il_n} - (1+il_n)^2 + 2) \right) = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{4}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 5^{1-3+il_n} - \sum_{i=1}^{n} (1+il_n)^2 + \sum_{i=1}^{n} 2 \right);$$

$$8 + \lim_{n\mapsto\infty} \frac{4}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 5^{1-3+il_n} - \sum_{i=1}^{n} (1+il_n)^2 \right)$$

$$8 + \lim_{n\mapsto\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{5^2 - 5^{-2}}{1 - 5^{1/n}} - \sum_{i=1}^{n} \left(1 + 2il_n + i^2 l_n^2\right) \right);$$

$$12 + \lim_{n\mapsto\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{5^2 - 5^{-2}}{1 - 5^{1/n}} - 2l_n \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i^2 l_n^2 \right);$$

$$12 + \lim_{n\mapsto\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{25 - 1/25}{\frac{1}{n}\ln(5)} - 4(n+1) + \frac{16}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right);$$

$$\frac{624}{25\ln(5)} - \frac{100}{3}.$$

Девятое БДЗ

16. (4).

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left(\frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+\ldots+\ln(n+n)}{n}-\ln(n)\right)=$$
$$=\lim_{n\mapsto\infty}\left(\frac{\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n}+\ldots+\ln\frac{2n}{n}}{n}\right)\overset{(1)}{=}\int_1^2\ln(x)dx=\Big|_1^2 x(\ln(x)-1)=$$
$$=\ln(4)-1.$$

(1) Тут мы рассматриваем разбиение отрезка от 1 до 2 на n равных частей (то есть по $\frac{1}{n}$ каждая) со значениями функции в правой границе каждого отрезка.

17. (4).
(a)

$$\int_2^4\left(x^2\sqrt{16-x^2}\right)dx;$$
$$\sqsupset x=4\sin(t),\ dx=4\cos(t)dt:$$
$$\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-16\sin^2(t)}=4\sqrt{\cos^2(t)};$$
$$\int_{\arcsin\frac{1}{2}}^{\arcsin 1}\left(256\sin^2(t)\,|\cos(t)|\cos(t)\right)dt=256\int_{\arcsin\frac{1}{2}}^{\arcsin 1}\left(\sin^2(t)\cos^2(t)\right)dt=$$
$$=256\Big|_{\arcsin\frac{1}{2}}^{\arcsin 1}\int(\sin^2(t)\cos^2(t))dt=256\Big|_{\arcsin\frac{1}{2}}^{\arcsin 1}\int(\sin^2(t)(1-\sin^2(t)))dt=$$
$$=256\Big|_{\arcsin\frac{1}{2}}^{\arcsin 1}\int(\sin^2(t)-\sin^4(t))dt=256\Big|_{\arcsin\frac{1}{2}}^{\arcsin 1}\left(\int(\sin^2(t))dt-\int(\sin^4(t))dt\right)=$$
$$=\Big|_{\arcsin\frac{1}{2}}^{\arcsin 1}\left(\frac{1}{2}(t-\sin(t))\cos(t)-\frac{1}{32}(12t-8\sin(2t)+\sin(4t)+C\right)=$$
$$=\Big|_{\arcsin\frac{1}{2}}^{\arcsin 1}\left(\frac{1}{32}(4t-\sin(4t)+C\right)=4\sqrt{3}+\frac{32\pi}{3}.$$

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4-\sin(x)-2\cos(x)};$$
$$\sqsupset t=\tan\frac{x}{2},\ dt=\frac{1}{2}dx\sec^2\frac{x}{2}:$$
$$\sin(x)=\frac{2t}{t^2+1},\ \cos(x)=\frac{1-t^2}{t^2+1},\ dx=\frac{2dt}{t^2+1}:$$
$$\int_0^1\frac{2dt}{(t^2+1)\left(-\frac{2t}{t^2+1}-\frac{2(1-t^2)}{t^2+1}+4\right)}=$$
$$=\int_0^1\frac{dt}{2(t^2+1)-t-1+t^2}=\int_0^1\frac{dt}{3t^2-t+1}=\int_0^1\frac{dt}{\left(\sqrt{3}t-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\frac{11}{12}};$$
$$\sqsupset s=\sqrt{3}t-\frac{1}{2\sqrt{3}},\ ds=\sqrt{3}dt:$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}}\frac{ds}{s^2-\frac{11}{12}}=\frac{4\sqrt{3}}{11}\int_{-\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}}\frac{ds}{\frac{12s^2}{11}+1};$$
$$\sqsupset u=2\sqrt{\frac{3}{11}}s,\ du=2\sqrt{\frac{3}{11}}ds:$$
$$\int_{-\frac{1}{11}}^{2\sqrt{\frac{3}{11}}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}\frac{du}{u^2+1}=\Big|_{-\frac{1}{11}}^{2\sqrt{\frac{3}{11}}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}\frac{2\arctan u}{\sqrt{11}}=\frac{2\arctan(\sqrt{11})}{\sqrt{11}}.$$

18. (2).
(a)

$$\int_0^2 xe^{x/2}dx = \Big|_0^2 (2xe^{x/2}) - 2\int_0^2 e^{x/2}dx;$$
$$\exists\, t = x/2,\ dt = \frac{1}{2}dx:$$
$$\Big|_0^2 (2xe^{x/2}) - 4\int_0^1 e^t dt = \Big|_0^2 (2xe^{x/2}) - 4\Big|_0^1 e^t = 4.$$

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 3)\cos(2x)dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2x)dx - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)dx + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx =$$
$$= \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x^2\sin(2x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)dx - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)dx + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx =$$
$$= 0 + \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)dx + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx =$$
$$= -\frac{\pi}{4} - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)dx + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx =$$
$$= -\frac{\pi}{4} + \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{5}{2}x\sin(2x)\right) + \frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx =$$
$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{5}{2} + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx;$$
$$\exists\, t = 2x,\ dt = 2dx:$$
$$-\frac{\pi}{4} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\int_0^{\pi} \cos(t)dt = -\frac{\pi}{4} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\Big|_0^{\pi} \sin(t) = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

19. (1).
Решение и код на Google Colab по ссылке
https://colab.research.google.com/drive/1omNNOfpcG3AnbiGaKiyKuRT82N2BUNNC?usp=sharing

Десятое БДЗ

21. 3.
(a)

$$f_1(x) = x^2 + 6x - 9;$$
$$f_2(x) = 2x - 4.$$

Сразу скажем, что точки пересечения этих кривых это $(-5; -14)$ и $(1; -2)$, поэтому нас будет интересовать только модуль разности интегралов этих функций на отрезке $[-5; 1]$.

$$\exists\, F_1 = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 9x,\ F_1 \in \int f_1(x)dx :$$
$$\int_{-5}^{1} f_1(x)dx = F_1(1) - F_1(-5) = -84;$$
$$\exists\, F_2 = x^2 - 4x,\ F_2 \in \int f_2(x)dx :$$
$$\int_{-5}^{1} f_2(x)dx = F_2(1) - F_2(-5) = -48;$$
$$S = \left| \int_{-5}^{1} f_1(x)dx - \int_{-5}^{1} f_2(x)dx \right| = 36.$$

(b)

$$r = 2\sin(4\phi).$$

В силу того, что нас инетересует только одна петля кривой, мы будем рассматривать только начения ϕ на отрезке $[0, \frac{\pi}{4}]$, тогда искомую площадь мы сможем найти как

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2(\phi)d\phi = 2\int_0^{\pi/4} \sin^2(4\phi)d\phi;$$
$$\exists\, \psi = 4\phi, d\psi = 4d\phi :$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2(\psi)d\psi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\psi)\right) dx = \frac{\pi}{4} + 0.$$
$$S = \frac{\pi}{4}.$$

22. 8.

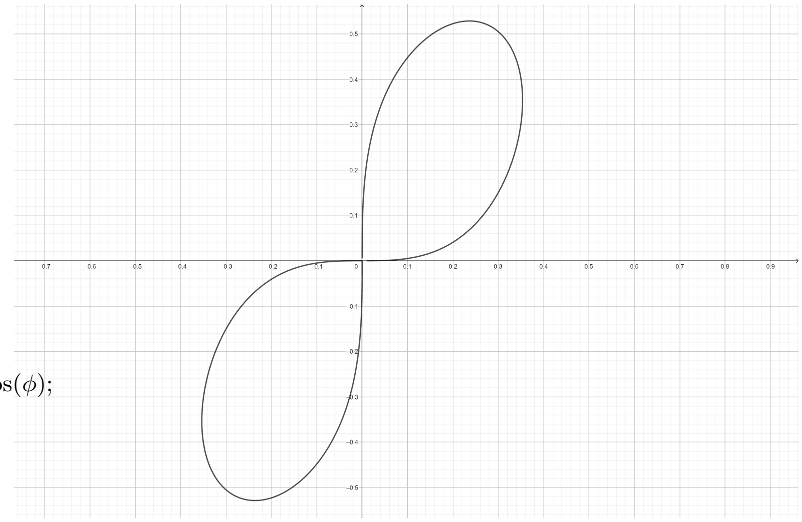
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{1-x^2}};\ x \in [1; \frac{1}{2}].$$

Мы знаем, что объём тела врещинея можно вычислить по формуле

$$V = \pi \int_0^{1/2} f(x)^2 dx = \pi \int_0^{1/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$\exists\, t = x^2,\ dt = 2xdx :$$
$$V = \frac{\pi}{2}\int_0^{1/4} \frac{t}{\sqrt{1-t}}dt;$$
$$\exists\, s = 1 - t,\ ds = -dt :$$
$$V = -\frac{\pi}{2}\int_1^{3/4} \frac{1-s}{\sqrt{s}}ds = -\frac{\pi}{2}\int_1^{3/4} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \sqrt{s}\right) ds = -\frac{\pi}{2}\int_{3/4}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \sqrt{s}\right) ds =$$
$$= -\frac{\pi}{2}\int_{3/4}^{1} \sqrt{s}ds + \frac{\pi}{2}\int_{3/4}^{1} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \left(\frac{\pi s^{3/2}}{3}\right)\Big|_{3/4}^{1} + \left(\pi\sqrt{s}\right)\Big|_{3/4}^{1}.$$
$$V = \left(\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\pi.$$

23. 6.

Как мы видим, наша кривая делает 2 петли, посчитаем площадь той из них, которая получается при $x \geqslant 0$. Зададим нашу кривую в полярных координатах, в этом случае она должна удовлетворять уравнению (1). При этом нас будет интересовать только та часть этой кривой, которая получается при $\phi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ и $r > 0$. Тогда мы с вами получим, что нам нужно найти площадь сектора, который задаётся уравнением $r = \sqrt{\frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{4\cos^3(\phi)+1}}$ на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$.



$$4r^4\cos^4(\phi) + r^4(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))^2 = r^2\sin(\phi)\cos(\phi);$$
$$4r^4\cos^4(\phi) + r^4 = r^2\sin(\phi)\cos(\phi);$$
$$r^2 = \frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{4\cos^4(\phi)+1}. \tag{1}$$

Теперь займёмся подсчётом нужно интеграла.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2(\phi)d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{4\cos^4(\phi)+1}d\phi; \daleth\, t = \cos(\phi),\ dt = -\sin(\phi):$$
$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{4t^4+1}dt;$$
$$\daleth\, s = (2t)^2,\ ds = 4tdt:$$
$$S = \frac{1}{8}\int_0^2 \frac{1}{s^2+1}ds = \frac{1}{8}\arctan(s)\Big|_0^2 = \frac{1}{8}\arctan(2).$$

24. 2.

$$\begin{cases} x = t - \sin(t), \\ y = 1 - \cos(t),\ t \in [0, 2\pi]; \end{cases}$$

как известно, длину кривой можно посчитать по формуле

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2 - 2\cos(t)}dt =$$
$$= 2\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = 2\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|;$$
$$\daleth\, s = \frac{t}{2},\ ds = \frac{1}{2}dt:$$
$$L = 4\int_0^{\pi}|\sin(s)|\,ds = 4\int_0^{\pi}\sin(s)ds = (-4\cos(s))\Big|_0^{\pi} = 8.$$

25. 5.

(a) Если интеграл сходится, то его можно посчитать по формуле

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x\ln(x)} = \lim_{m\mapsto\infty}\int_0^m \frac{dx}{x\ln(x)}.$$

Однако, при $m \geqslant 1$ отрезок $[0, m]$ содержит точку разрыва второго рода с пределами $\pm\infty$, так что интеграл не считается, а значит, нельзя определить предел, поэтому данный интеграл расходится.

(b) Если интеграл сходится, то его можно посчитать по формуле

$$\int_0^{\sqrt{3/\pi}}\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \lim_{\epsilon\mapsto 0+}\int_{\epsilon}^{\sqrt{3/\pi}}\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Посчитаем неопределённый интеграл для подстановки в формулу Ньютона Лейбница:

$$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx;$$

$$\daleth\, t = \frac{1}{x},\ dt = -\frac{1}{x^2} dx :$$

$$-\int \sin(t) dt = \cos(t) + C = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

Положим $F = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \in \int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$, тогда желаемый интеграл можно посчитать по формуле

$$\int_0^{\sqrt{3/\pi}} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \lim_{\epsilon \mapsto 0+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{\epsilon}^{\sqrt{3/\pi}} = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3/\pi}}\right) - \lim_{0+ \mapsto \epsilon} \cos\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Легко заметить, что предел в последнем выражении не считается, а значит, данный интеграл расходится.

Одиннадцатое БДЗ

26. 9.

$$f(x) = 1 - x;$$
$$g(x) = \sqrt{1 - x^2};$$
$$[a, b] = [0, 1].$$

Для начала посчитаем расстояние между f и g в L^∞. Это будет

$$\sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)| = \sqrt{2} - 1.$$

Теперь разберёмся с L^2, расстояние будет иметь вид

$$\sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx} = \sqrt{\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}}.$$

27. 7.

$$f(x) = |x|\,;$$
$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x;$$
$$[a, b] = [-\pi, \pi];$$
$$\rho(f(x), g(x)) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx}.$$

Сперва посчитаем нужный интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} (|x| - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{9\pi}\cos 3x)^2 dx.$$

Он и так выглядит жутко, а тут ещё и модуль. Давайте посчитаем его отдельно на положительных x и на отрицательных.

$$\int_0^{\pi} (x - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{9\pi}\cos 3x)^2 dx =$$
$$= \int_0^{\pi} (x^2 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{16\cos(x)^2}{\pi^2} + \frac{16\cos(3x)^2}{81\pi} - x\pi + \frac{8x\cos(x)}{\pi} + \frac{8x\cos(3x)}{9\pi} - 4\cos(x) +$$
$$+ \frac{32\cos(x)\cos(3x)}{9\pi^2} - \frac{4\cos(3x)}{9}) dx;$$

сейчас всю страшную жесть разобём на отдельные интегралы и посчитаем каждый

$$\int_0^\pi x^2dx - \frac{\pi^2}{4}\int_0^\pi 1dx + \frac{16}{\pi^2}\int_0^\pi \cos(x)^2dx + \frac{16}{81\pi}\int_0^\pi \cos(3x)^2dx - \pi\int_0^\pi xdx +$$
$$+\frac{8}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)dx + \frac{8}{9\pi}\int_0^\pi \cos(3x)dx - 4\int_0^\pi \cos(x)dx + \frac{32}{9\pi^2}\int_0^\pi \cos(x)\cos(3x)dx -$$
$$-\frac{4}{9}\int_0^\pi \cos(3x)dx =$$
$$= \int_0^\pi x^2dx - \frac{\pi^2}{4}\int_0^\pi 1dx + \frac{16}{\pi^2}\int_0^\pi \cos(x)^2dx + \frac{8}{81\pi} - \pi\int_0^\pi xdx +$$
$$+\frac{8}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)dx + \frac{8}{9\pi}\int_0^\pi \cos(3x)dx - 4\int_0^\pi \cos(x)dx + \frac{32}{9\pi^2}\int_0^\pi \cos(x)\cos(3x)dx -$$
$$-\frac{4}{9}\int_0^\pi \cos(3x)dx =$$
$$= \int_0^\pi x^2dx - \frac{\pi^2}{4}\int_0^\pi 1dx + \frac{16}{\pi^2}\int_0^\pi \cos(x)^2dx + \frac{8}{81\pi} - \pi\int_0^\pi xdx +$$
$$+\frac{8}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)dx + \frac{8}{9\pi}\int_0^\pi \cos(3x)dx - 4\int_0^\pi \cos(x)dx + \frac{16}{9\pi^2}\int_0^\pi (\cos(2x) + \cos(4x))dx -$$
$$-\frac{4}{9}\int_0^\pi \cos(3x)dx =$$
$$= \frac{8}{81\pi} - \frac{16}{81\pi} + \int_0^\pi x^2dx - \frac{\pi^2}{4}\int_0^\pi 1dx + \frac{16}{\pi^2}\int_0^\pi \cos(x)^2dx - \pi\int_0^\pi xdx +$$
$$+\frac{8}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)dx + \frac{8}{9\pi}\int_0^\pi \cos(3x)dx - 4\int_0^\pi \cos(x)dx -$$
$$-\frac{4}{9}\int_0^\pi \cos(3x)dx =$$
$$= \frac{-8}{81\pi} + \int_0^\pi x^2dx - \frac{\pi^2}{4}\int_0^\pi 1dx + \frac{16}{\pi^2}\int_0^\pi \cos(x)^2dx - \pi\int_0^\pi xdx +$$
$$+\frac{8}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)dx + \frac{8}{9\pi}\int_0^\pi \cos(3x)dx - 4\int_0^\pi \cos(x)dx - 0 =$$
$$= \frac{-8}{81\pi} + \int_0^\pi x^2dx - \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\right)\int_0^\pi 1dx + \frac{8}{\pi^2}\int_0^\pi \cos(2x)dx - \pi\int_0^\pi xdx +$$
$$+\frac{8}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)dx + \frac{8}{9\pi}\int_0^\pi \cos(3x)dx - 4\int_0^\pi \cos(x)dx =$$
$$= \frac{-8}{81\pi} + \int_0^\pi x^2dx + \frac{32+\pi^4}{4\pi} - \pi\int_0^\pi xdx +$$
$$+\frac{8}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)dx + \frac{8}{9\pi}\int_0^\pi \cos(3x)dx - 4\int_0^\pi \cos(x)dx =$$
$$= \frac{-8}{81\pi} + \int_0^\pi x^2dx + \frac{32+\pi^4}{4\pi} - \pi\int_0^\pi xdx +$$
$$+\frac{8}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)dx + \frac{8}{9\pi}\int_0^\pi \cos(3x)dx - 4\int_0^\pi \cos(x)dx =$$

$$= -\frac{1304}{81\pi} + \frac{32+\pi^4}{4\pi} - 4\int_0^\pi \cos(x)dx + \int_0^\pi x^2dx - \pi\int_0^\pi xdx =$$
$$== -\frac{1304}{81\pi} + \frac{32+\pi^4}{4\pi} + \int_0^\pi x^2dx - \pi\int_0^\pi xdx =$$
$$== -\frac{1304}{81\pi} + \frac{32+\pi^4}{4\pi} + \frac{\pi^3}{3} - \pi\int_0^\pi xdx =$$
$$== -\frac{1304}{81\pi} + \frac{32+\pi^4}{4\pi} - \frac{\pi^3}{6} =$$
$$= \frac{\pi^3}{12} - \frac{656}{81\pi}.$$

Ну и кошмар... Но выбор у нас не слишком большой, продолжим и посчитаем нужное выражения для отрицательных

x

$$\int_{-\pi}^{0}(-x-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\cos x+\frac{4}{9\pi}\cos 3x)^2dx;$$

Поступим как и прошлый разю

$$\int_{-\pi}^{0}\Bigg(x^2+\pi x+\frac{16\cos(x)^2}{\pi^2}+\frac{16\cos(3x)^2}{81\pi^2}-\frac{8x\cos(x)}{\pi}-\frac{8x\cos(3x)}{9\pi}-4\cos(x)+$$
$$+\frac{32\cos(x)\cos(3x)}{9\pi^2}-\frac{4\cos(3x)}{9}+\frac{\pi^2}{4}\Bigg)dx;$$

Запишем это выражение как сумму интегралов, сразу сократим равные нулю.

$$\frac{16}{81\pi^2}\int_{\pi}^{0}\cos(3x)^2dx+\frac{32}{9\pi^2}\int_{\pi}^{0}\cos(x)\cos(3x)dx-\frac{8}{9\pi}\int_{\pi}^{0}x\cos(3x)+\frac{16}{\pi^2}\int_{\pi}^{0}\cos(x)^2dx-$$
$$-\frac{8}{\pi}\int_{\pi}^{0}x\cos(x)+\int_{\pi}^{0}x^2dx+\pi\int_{\pi}^{0}xdx+\frac{\pi^2}{4}\int_{\pi}^{0}1dx=$$
$$=\frac{8}{81\pi}+\frac{16}{9\pi^2}\int_{\pi}^{0}\cos(4x)+\frac{16}{9\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(2x)dx-\frac{8}{9\pi}\int_{\pi}^{0}x\cos(3x)+\frac{16}{\pi^2}\int_{\pi}^{0}\cos(x)^2dx-$$
$$-\frac{8}{\pi}\int_{\pi}^{0}x\cos(x)+\int_{\pi}^{0}x^2dx+\pi\int_{\pi}^{0}xdx+\frac{\pi^2}{4}\int_{\pi}^{0}1dx=$$
$$=\frac{8}{81\pi}+\frac{8}{27\pi}\int_{\pi}^{0}\sin(3x)+\frac{16}{\pi^2}\int_{\pi}^{0}\cos(x)^2dx-$$
$$-\frac{8}{\pi}\int_{\pi}^{0}x\cos(x)+\int_{\pi}^{0}x^2dx+\pi\int_{\pi}^{0}xdx+\frac{\pi^2}{4}\int_{\pi}^{0}1dx=$$
$$=\frac{8}{81\pi}-\frac{16}{81\pi}+\frac{16}{\pi^2}\int_{\pi}^{0}\cos(x)^2dx-$$
$$-\frac{8}{\pi}\int_{\pi}^{0}x\cos(x)+\int_{\pi}^{0}x^2dx+\pi\int_{\pi}^{0}xdx+\frac{\pi^2}{4}\int_{\pi}^{0}1dx=$$

$$=\frac{-8}{81\pi}+\frac{16}{\pi^2}\int_{\pi}^{0}\cos(x)^2dx-\frac{8}{\pi}\int_{\pi}^{0}x\cos(x)+\int_{\pi}^{0}x^2dx+\pi\int_{\pi}^{0}xdx+\frac{\pi^2}{4}\int_{\pi}^{0}1dx=$$
$$=\frac{-8}{81\pi}+\frac{8}{\pi^2}\int_{\pi}^{0}\cos(2x)dx-\frac{8}{\pi}\int_{\pi}^{0}x\cos(x)+\int_{\pi}^{0}x^2dx+\pi\int_{\pi}^{0}xdx+\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\right)\int_{\pi}^{0}1dx=$$
$$=\frac{-8}{81\pi}-\frac{8}{\pi}\int_{\pi}^{0}x\cos(x)+\int_{\pi}^{0}x^2dx+\pi\int_{\pi}^{0}xdx+\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\right)\int_{\pi}^{0}1dx=$$
$$=\frac{-8}{81\pi}-\frac{8}{\pi}\int_{\pi}^{0}x\cos(x)+\int_{\pi}^{0}x^2dx+\pi\int_{\pi}^{0}xdx+\frac{32+4\pi^4}{4\pi}=$$
$$=\frac{-8}{81\pi}+\frac{8}{\pi}\int_{\pi}^{0}\sin(x)+\int_{\pi}^{0}x^2dx+\pi\int_{\pi}^{0}xdx+\frac{32+4\pi^4}{4\pi}=$$
$$=\frac{-8}{81\pi}+\frac{-16}{\pi}+\int_{\pi}^{0}x^2dx+\pi\int_{\pi}^{0}xdx+\frac{32+4\pi^4}{4\pi}=$$
$$=\frac{-1304}{81\pi}+\frac{\pi^3}{3}+\frac{-\pi^3}{2}+\frac{32+4\pi^4}{4\pi}=$$
$$=\frac{\pi^3}{12}-\frac{656}{81\pi}.$$

Итак, кажется, что второй раз интеграл можно было не считать, если заметить чётность функции, но уже поздно...

Таким образом, мы нашли $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx$ теперь найдём расстояние

$$\rho(f(x)-g(x))=\sqrt{\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx\right|}=\sqrt{\left|\frac{\pi^3}{6}-\frac{1312}{81\pi}\right|}$$

28. 0.

Докажем жедаемое утверждение для двух подмножеств, а далее для произвольного натурального n оно будет верно оп индукции так как $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n-2}\cup(A_{n-1}\cup A_n)$, где в скобках открытое множество (по предположению индукции), а значит написано преесечение $n-1$ открытого множества, которое открыто по предположению индукции.

Осталось доказать утверждение для произвольных открытых A и B. Для этого рассмторим произвольный элемент $x \in A \cup B$, заметим, что изначально он содержался в A или B, пусть, без ограничения общности, в A, тогда там же и лежала его некоторая окрестность, а значит она также целиком содержится и в $A \cup B$. Таким образом, мы докзазали, что для любого элемента из $A \cup B$ некоторая его окрестность также содержится в нашем пересечении, а значит оно открыто. Что и требовалось доказать.

29. 0.

Решение отдельно.

30. 4.

Так как ранг матрицы равен 1, её можно представить в следующем виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ak & bk \end{pmatrix},$$

а в силу того, что $A = A^T$ верно, что $b = ak$, а тогда $det(A) = abk - abk = 0$.

$$f(A) = det(A) + tr(A) = tr(A),$$

при этом по условию $tr(A) \geqslant 0$, следовательно $f(A) \geqslant 0$, при этом 0 не достигается, так как для этого должно выполнятся условие

$$\begin{cases} ak = b, \\ a = -bk; \end{cases} \quad => a = \frac{b}{k} = -bk => \frac{1}{k} = -k.$$

Это очевидно невозможно. Ещё стоит сказать, что при $k = 0$ матрица будет иметь вид $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, в этом же случае значение $f(A)$ может быть сколь угодно близким к нулю, и сколь угодно большим. Таким образом, мы получили, что значения $f(A)$ ограничены нулём снизу (при этом 0 не достигается), и не ограничены сверху.

Часть II

Второй курс

Глава 5

Алгоритмы и структуры данных на втором курсе

Домашки

Домашка первая

1. Для начала посчитаем значение префикс-функции для нашей строки s и запишем их в массив P. Далее посмотирм на некоторое значение $P[i]$, заметим, что все префиксы встречаются длины меньше, чем $P[i]$ встречаются в нейшей строке в качестве подстроки соответствующей длины, начинающейся с позиции $i - P[i]$, что верно, так как мы знаем, что строка с $i - P[i]$ по i в точности совпадает с префиксом длины $P[i]$. При этом ни одно совпадение, начинающееся в рассматриваемой позиции, не может иметь длины больше, чем $P[i]$ (что очевидно), а значит мы посчитали все вхождение, начинающиеся в позиции $i - P[i]$, также, пробежавшись по всем $i > 0$ мы, очевидно, посчитаем все вхождения, а значит найдём ответ на задачу и получим $\sum_{i=1}^{s.size()-1} P[i]$. При этом за линию мы посчитали значения префикс-функции, и за линию их просуммировали, получили решение за $O(n)$, а это то, что мы хотели.

2. Будем строить строку итеративно. Для начала скажем, что первая буква равна некоторой букве a (ну а кто нам запретит), после этого мы знаем, что на всех индексах i, таких, что $Z[i] > 0$ стоит буква a (где Z — массив со значениями z-функции). Далее на очередной итерации будем брать первую позицию i, которой ещё не назначена буква. Мы уже знаем, что $Z[i] = 0$, иначе бы там стояла буква a, посмотрим, существует ли j такое, что $j + Z[j] >= i \ \& \ j < i$, то есть мы ищем такую позицию, что префикс, посчитаный в ней накрывает i-тую позицию. Если он существует, то мы однозначно выставляем символ i, так как все предыдущие уже посчитаны, и i-тый совпадает с одним из них. Если этого не случилось, то мы понимаем, что не существует никакой подстроки, которая совпадает с префиксом собираемой строки (s), и при этом содержит сомвол с индекосм i, тогда нет никакой проблемы засунуть туда уникальный символ. При этом на каждой итерации мы проставляем хотя бы один символ, и ни на один из них не смотрим дважды, а значит весь алгоритм работает за линию.

Замечание. Тут я считаю, что алфавит мы выибраем сами (так как обратного не сказано в условии), а значит уникальный символ найдётся всегда.

3. Для начала посчитаем z-функцию для нашей строки s, запишем её в массив Z. Далее посмотрим, может ли суффикс, начинающийся с символа i. мы знаем, что подстрока с i по $i + Z[i]$ в точности совпадает с префиксом s, хамечательно, значит, если следующего символа нет (конец строки), то суффикс, начинающийся с этом месте точно меньше, иначе посмотрим на следующий символ, он точно отличается от того, который добавляется в префикс (иначе значение z-функции было бы больше), а значит суффикс и префикс можно однозначно сравнить, это победа! Таким образом, мы посчитали z-функцию за линию, и дали ответ про каждый из суффиксов за константу, перебрав все за линию, получили $O(n)$, как и хотели!

4. Эту задачу мы разобрали на семинаре, подойдёт «пробаффанный бор» из алгоритма Ахо Корасик.

5. Очень хочется начать с постройки автомата как в 4 задаче, так что так и поступим. Заметим, что в получившемся дереве нельзя ходить по вершинам, по котором через префиксные ссылки можно добратся до терминальной (возможно что за 0 ходов). При этом, очевидно, все остальные вершины посещать можно. Тогда можно просто DFS-ом обойти дерево (обновляя глубину, если можно её увеличить). ТОгда у нас получится нужная асимптотика, победа.

Глава 6

Теория вероятности на втором курсе

Лекции

Лекция вторая

Задача 1 (Задача о сумасшедшей старушке)**.** Задача на условные вероятности (про старушку, которая заходит в автобус и рандомно садится), по индукции доказывается, что последний садится на своё место с вероятностью $\frac{1}{2}$, предпоследний — $\frac{2}{3}$, а оба — $frac16$. Вообще, похоже, что события независимы (но это ещё надо доказать).

Утверждение 2 (Формула Байеса)**.** *Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_n$ — разбиение Ω, A — некоторое событие с вероятностью больше нуля, тогда*

$$P(D_j|A) = \frac{P(A|D_j)P(D_j)}{\sum_{t=0}^{n} P(A|D_t)P(D_t)}.$$

Доказывается через подсчёт по определению (через формулы условной и полной вероятности). Работают и для счётного разбиения.

Определение 3 (Независимость)**.** События события A и B независимы тогда и только тогда

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

события A_i попарно незывисимы, если дял любых разлинчых i, j события независимы.

Определение 4 (Совокупная независимость)**.** Для любого подмножества A_i верно, что вероятность пересечения равна пересечению вероятностей.

Замечание 5. Считаем, что независимость == совокупная независимость.

Определение 6 (Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах)**.** Пусть (Ω, P) — дискретное вероятностное пространство. Случайной величиной (с.в.) на (Ω, P) называется отображение $\xi : \Omega- > \mathbb{R}$. С.в. — числовая характеристика случайного эксперимента.

Определение 7. Пусть с.в. ξ принимает значения $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, обозначим

$$A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_1\} := P(\xi).$$

Лекция третья

Определение 8 (распределение Бернулли).

$$p = (\xi = 1) = pP(\xi = 0) = 1 - p\ (= q)\xi \sim BERN(p)$$

Смысл — распределение индикатора

Определение 9 (Биномиальное распределение). $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ p \in [0, 1]$$

Обозначение — $\xi \sim BIN(n, p)$

Определение 10 (Равномерное распределение). X — множество $|X| = N$

$$\forall x \in X\ P(\xi = x) = \frac{1}{N}$$

Определение 11 (Пуассоновское распределение). $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Обозначение — $\xi \sim POIS(\lambda)$
Модель — редкие события

Определение 12 (Геометрическое распределение).

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1},\ p \in [0, 1]$$

Обозначение — $\xi \sim Geom(p)$
Модель — первое успех в бесконечной схеме Бернулли

Определение 13 (Независимость случайных величин). Пусть ξ, η независимы тогда и только тогда, когда для любого значения a у ξ и b у η

$$P(\{\xi = a\} \cap \{\eta = b\}) = P(\xi = a) \cdot P(\eta = b).$$

Замечание 14. Сейчас и далее вместо $\cap$ пишем запятую.

Независимость для нескольких случайных величин $\exists \xi_i$ — случайные величины, тогда ξ_iнезависимы в совокупности тогда и только тогда, когда

$$\forall i_1, i_2, \ldots, i_n : P(\xi_i = a_{i_1}^{(1)}, \ldots \xi_n = a_{i_n}^{(n)}) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k = a_{i_k}^{(k)}).$$

События независимы с совокупности тогда и только тогда. когда их индикаторы совокупно независимы.

Определение 15 (Математическое ожидание).

$$E\xi = \sum \xi(\omega) P(\omega)$$

Если Ω счётно, то ряд должен сходиться абсолютно.
Смысл — «среднее» взвешенное значение.

Теорема 16 (Свойства математического ожидания).

1. *Линейность (очевидно);*
2. *Сохранение отношения порядка.*
$$\xi(\omega) \leqslant \eta(\omega) => E\xi \leqslant E\eta;$$
3. $|E\xi| \leqslant E\,|\xi|$*;*
4. *Пусть A — множество всех значений ξ, тогда*
$$E\xi = \sum_{a \in A} a \cdot P(\xi = a);$$

5. *Для произвольной функции из* $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$ *то:*

$$Ef(\xi) = \sum f(a) \cdot P(\xi = f(a));$$

6. *Если случайная величина не случайна, то, очевидно, математическое ожидание равно величине;*
7. *Если* $\xi \geqslant 0$ & $E\xi = 0 => P(\xi = 0) = 1$;
8. *Для независимых величин математическое ожидание мультипликативно.*

Рассмотрим матеметическое ожидание индикатора события, очевидно, что оно равно вероятности самого события. В классической модели:

$$E\xi = sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)$$

$\xi \sim Bin(n, p)$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{n} kP(\xi = k) = np$$

Определение 17 (Дисперсия и ковариация)**.** Пусть ξ — случайная величина, с математическим ожиданием $E\xi$, тогда дисперсия равна

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Если ξ и η — случайные величины, то их ковариацией называется

$$cov(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Если ковариация равна нулю, то величины называют некоррелированными, в таком случае дисперсия аддитивна. Если независимы, то некоррелированны (в обратную сторону не работает)

Лемма 18 (Свойства D и cov)**.**

1. *Ковариация биленейна;*
2. $D\xi = cov(\xi, \xi)$;
3. $D(c\xi) = c^2 D\xi$;
4. $D(\xi + c) = D\xi$;
5. $D \geqslant 0$, *при этом* $D\xi = 0 <=> P(\xi = E\xi) = 1$;
6. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$;
7. $cov(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$;
8. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2cov(\xi, \eta)$.

Домашки

Домашка первая

1. Давайте рассмотирм случай, когда ровно $0 \leqslant m \leqslant n$ программистов взяли свои ноутбуки. Так как все перемешивания ноутбуков равновероятны, то вероятность такого события равна $\frac{1}{n!}\binom{n}{m}(n-m-1)!$ (мы вибираем m программистов, которые получают свои ноутбуки, тогда вариантов, когда из остальных свой не получил никто ровно $(n-m-1)!$). Конкретно в этом случае нас интересует только то, что случилось с m программистами со своими ноутами. они потеряют их с вероятностью p^m. Осталось только разобраться с тем случаем, когда никто не получил свой ноут, вероятность таких случаев составляет Осталось только просуммировать по m и получить

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(n-m-1)!}{n!}\binom{n}{m}p^m.$$

2. Для начала следуюет определитсья с вероятностным пространством. Для удобства предлагаю рассматривать в качестве элементарных исходов наборы, в которых содержится информация о первом и втором (с учётом порядка) человеке, у которых брали тест и результаты этих тестов. Также, очевидно, что все упорядоченные пары спортсменов имеют одинаковую вероятность быть выбранными (ровно $\frac{1}{12}$). За P_i обозначим верочтность того, что i-тый спортсмен сдавал тест и получил отрицатеьный результат, тогда легко убедиться в том, что

1. $P_A = 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}05$;
2. $P_A = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}05$;
3. $P_A = 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}05$;
4. $P_A = 1$.

Теперь за p_i обозначим вероятность того, что i-тый спортсмен получил положительный результат (и вообще прошёл тест), если он оказался вторым в очереди на проверку. Для этого достаточно просуммировать желаемые вероятности по всем парам вида (j, i), где j — номер спортсмена отличный от i. Таким образом получим, что

$$p_i = \sum_{j \neq i} P_j(1 - P_i).$$

После этого осталось учесть только то, что все выборы спортсменов для проверки равновероятны, и то, что нас интересует вероятность при условии, что у проверки в итоге оказался положительный результат, а значит искомые числа будут равны

$$X_i = \frac{1}{12}P_i / \sum_{k \in \{A,B,C,D\}} \frac{P_k}{12}.$$

Опустимдолгие и тривиальные вычисления и просто скажем, что

1. $X_A \approx 0{,}613$;
2. $X_B \approx 0{,}296$;
3. $X_C \approx 0{,}091$;
4. $X_D \approx 0$.

Домашка вторая

1. Для начала решим задачу, когда шары различимы. Рассмотрим матожидание индикатора P_i того, что в i-том ящике ровно один шар, тогда искомое матожидание будет равно сумме EP_i. Для того, чтобы в ящике оказался ровно один шар нам достаточно выбрать этот шар (k способов) и разложить остальные вдругие ящики ($(m-1)^{k-1}$ способов). Так как все разбиения шаров п оящикам равновероятны, то мы получаем, что вероятность такого индикатора равна

$$\frac{k(m-1)^{k-1}}{m^k}.$$

Осталось просуммировать и получить:

$$E\xi = m \cdot \frac{k(m-1)^{k-1}}{m^k} = k \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{k-1}.$$

Теперь посчитаем $D\xi$ по определению это

$$E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 - k^2 \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{2k-2} = E(\sum_{i=1}^{m} P_i)^2 - k^2 \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{2k-2} =$$
$$= \left(m \cdot \frac{k(m-1)^{k-1}}{m^k}\right)^2 - k^2 \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{2k-2}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда шары неразличимы. В этом случае значение индикатора P_i будет равнятсья $(m-1)^{k-1}$ так как по сути мы просто забываем про один шар и ящик, общее число разбиений можно посчитать по формуле шаров и перегородок и получить $\binom{k+1}{m-1}$, итого

$$P_i = \frac{(m-1)^{k-1}}{\binom{k+1}{m-1}}.$$

А значит матожидание будет равно

$$E\xi = m \cdot \binom{k+1}{m-1}.$$

Посчитаем дисперсию:

$$E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 - \left(\frac{(m-1)^{k-1}}{\binom{k+1}{m-1}}\right)^2 = E(\sum_{i=1}^{m} P_i)^2 - \left(\frac{(m-1)^{k-1}}{\binom{k+1}{m-1}}\right)^2 =$$
$$= \left(m \cdot \frac{(m-1)^{k-1}}{\binom{k+1}{m-1}}\right)^2 - \left(\frac{(m-1)^{k-1}}{\binom{k+1}{m-1}}\right)^2.$$

2. Рассмотрим индикаторы P_i того, что на i-том шагу вынули последний белый шарик. Для $i < k$ $P_i = 0$, для остальных P_i равно 1 с вероятностью $\frac{k!(n-k)!\binom{i-1}{k-1}}{n!}$ так как мы среди $n!$ равновероятных расстановок выбираем те, где на i-той позиции стоит белвый шар (ещё выбираем позиции среди $i-1$ первых для остальных, и порядок шаров нас не интересует). Тогда матожидание будет равно сумме матожиданий индикаторов умноженных на номер хода

$$E\xi = \sum_{i=k}^{n} \left(i \cdot frack!(n-k)!\binom{i-1}{k-1}n!\right) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{i=k}^{n} \left(i \cdot \binom{i-1}{k-1}\right).$$

Теперь посчитаем дисперсию:

$$E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=k}^{n} \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \cdot i \cdot \left(\binom{i-1}{k-1}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{i=k}^{n} \left(i \cdot \binom{i-1}{k-1}\right)\right)^2$$

3. Мы хотим доказать, что

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева для случайной велисины $\frac{S_n}{n}$ и получим:

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{E(\frac{S_n - ES_n}{n})^2}{a^2};$$
$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{E\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 - \left(E\frac{S_n}{n}\right)^2}{a^2};$$
$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{E\left(S_n\right)^2 - \left(ES_n\right)^2}{n^2a^2};$$

Теперь легко заметить, что при возрастании n $P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geqslant a\right)$ стремится к нулю, а это ровно то, что мы и хотели доказать.

Домашка третья

1. Рассмотрим 2 пункта.

(a) $np(n) - \ln n \mapsto -\infty$. Попробуем применить неравенство Чебышева для оценки $P(X_n = 0)$:

$$P(|X_n - EX_n| \geqslant EX_n) \leqslant \frac{DX_n}{E^2X_n};$$
$$P(X_n = 0) \leqslant \frac{DX_n}{E^2X_n}.$$

Теперь нам надо понять что-нибудь про правую часть неравенства. Для этого введём индикаторы I_i, равные 1 при условии, что i-тая вершина изолирована. Посчитаем EX_n:

$$EX_n = E(\sum_{i=1}^{n} I_i) = \sum_{i=1}^{n} EI_i = \sum_{i=1}^{n} E = P(I_i = 1) = {}^{1}n(1-p)^{n-1}.$$

Посчитаем DX_n:

$$DX_n = E(X_n^2) - (EX_n)^2;$$
$$E(X_n^2) = E(\sum_{i=1}^{n} I_i \times \sum_{i=1}^{n} I_i) = \sum_{i=1}^{n} P(I_i^2) + 2\sum_{i \neq j} P(I_i)P(I_j) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}.$$
$$DX_n = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}.$$

Тогда мы получили, что

$$P(X_n = 0) \leqslant \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}}{n^2(1-p)^{2n-2}} = \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1.$$

Видимо, вот такую штуку нам придётся оценивать, сразу скажем, что из того, что $np(n) - \ln n \mapsto -\infty$ следует, что $\lim_{n \mapsto \infty} p = 0$. Тогда давайте считать:

$$\lim_{n \mapsto \infty} \left(\frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 \right) = \lim_{n \mapsto \infty} \left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} - \frac{1}{n(1-p)} - 1 \right) =$$
$$= \lim_{n \mapsto \infty} \frac{1}{1-p} + \lim_{n \mapsto \infty} \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} - \lim_{n \mapsto \infty} \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} - 1 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0.$$

Что и требовалось доказать!

(b) $np(n) - \ln n \mapsto \infty$. Снова воспользуемся неравенством Чебышева:

$$P(X_n > 0) \leqslant EX_n = n(1-p)^{n-1}.$$

Снова считаем пределы:

$$\lim_{n \mapsto \infty} n(1-p)^{n-1} = \lim_{n \mapsto \infty} e^{\ln n - (n-1)(p + |O(p^2)|)} = {}^{2} \leqslant e^{\ln n - np + p} = 0.$$

Это победа, так как мы получили, что $P(X_n = 0) = 1 - P(X_n > 0) = 1$.

2. Покажем, что Y_n — марковская цепь. Это вполне очевидно, достаточно показать, что

$$P(Y_n = a_n | Y_{n-1} = a_{n-1}) = P(Y_n = a_n | Y_{n-1} = a_{n-1}, Y_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, Y_1 = a_1).$$

При этом верно, что давайте рассмотрим $a_n{}'$ равное множеству значений X_n таких, что $Y_n = a_n$ тогда имеем:

$$P(Y_n = a_n | Y_{n-1} = a_{n-1}) = P(X_n \in a_n{}' | X_{n-1} \in a_{n-1}{}')$$

и

$$P(Y_n = a_n | Y_{n-1} = a_{n-1}, X_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, Y_1 = a_1) = P(X_n \in a_n{}' | X_{n-1} \in a_{n-1}{}', X_{n-2} \in a_{n-2}{}', \ldots, X_1 \in a_1{}')$$

В силу того, что X_n по условию марковская цепь получаем равенство правых частей двух выражений выше, которое и влечёт желаемый результат. Теперь посчитаем матрицу переходов:

- $P(Y_n = 1 | Y_{n-1} = 1) = P(X_n = 1 | X_{n-1} = 1) = \frac{3}{7}$;

[1] Для того, чтобы вершина оказалась изолированной необходимо удалить все рёбра из неё, а их ровно $n - 1$

[2] Так как $0 \leqslant p(n) \leqslant 1$

- $P(Y_n = 2|Y_{n-1} = 2) = P(Y_n = 2|X_{n-1} = 1) = P(X_n = 2|X_{n-1} = 1) + P(X_n = 3|X_{n-1} = 2) = \frac{4}{7}$;
- $P(Y_n = 1|Y_{n-1} = 2) = P(X_n = 1|Y_{n-1} = 2) = P(X_n = 1|X_{n-1} = 2 \cup X_{n-1} = 3) =$
  $= P(X_n = 1|X_{n-1} = 2)P(X_{n-1} = 2|Y_{n-1} = 2) + P(X_n = 1|X_{n-1} = 3)P(X_{n-1} = 3|Yn - 1 = 2) = \frac{10}{11}$;
- $P(Y_n = 2|Y_{n-1} = 2) = 1 - P(Y_n = 1|Y_{n-1} = 2) = \frac{1}{10}$.

3. Для начала обратим внимание на то, что все η_i положительные, а значит можно смело утверждать, что последовательность T_n строго возрастает. Для того чтобы доказать, что X_n является марковской цепью нам достаточно показать, что вероятность очередного её состояние зависит только от предыдущего, то есть

$$P(X_n = a_n|X_{n-1} = a_{n-1}) = P(X_n = a_n|X_{n-1} = a_{n-1}, X_{n-2} = a_{n-2}, \dots, X_1 = a_1).$$

При этом

$$P(X_n = a_n|X_i = a_i) = P(\sum_{i=T_i+1}^{T_n} \xi_i = a_n - a_i|X_i = a_i).$$

Осталось только заметить, что если мы распишем правую вероятность в желаемом равенстве пользуясь утверждением выше, то почти все суммы сократятся с теми, которые стоят в условии. Теперь поймём, что у нас осталось только

$$P(\sum_{i=T_{n-1}+1}^{T_n} \xi_i = a_n - a_{n-1}|X_{n-1} = a_{n-1}).$$

А это именно то, что мы хотим, победа!

Домашка четвёртая

1.

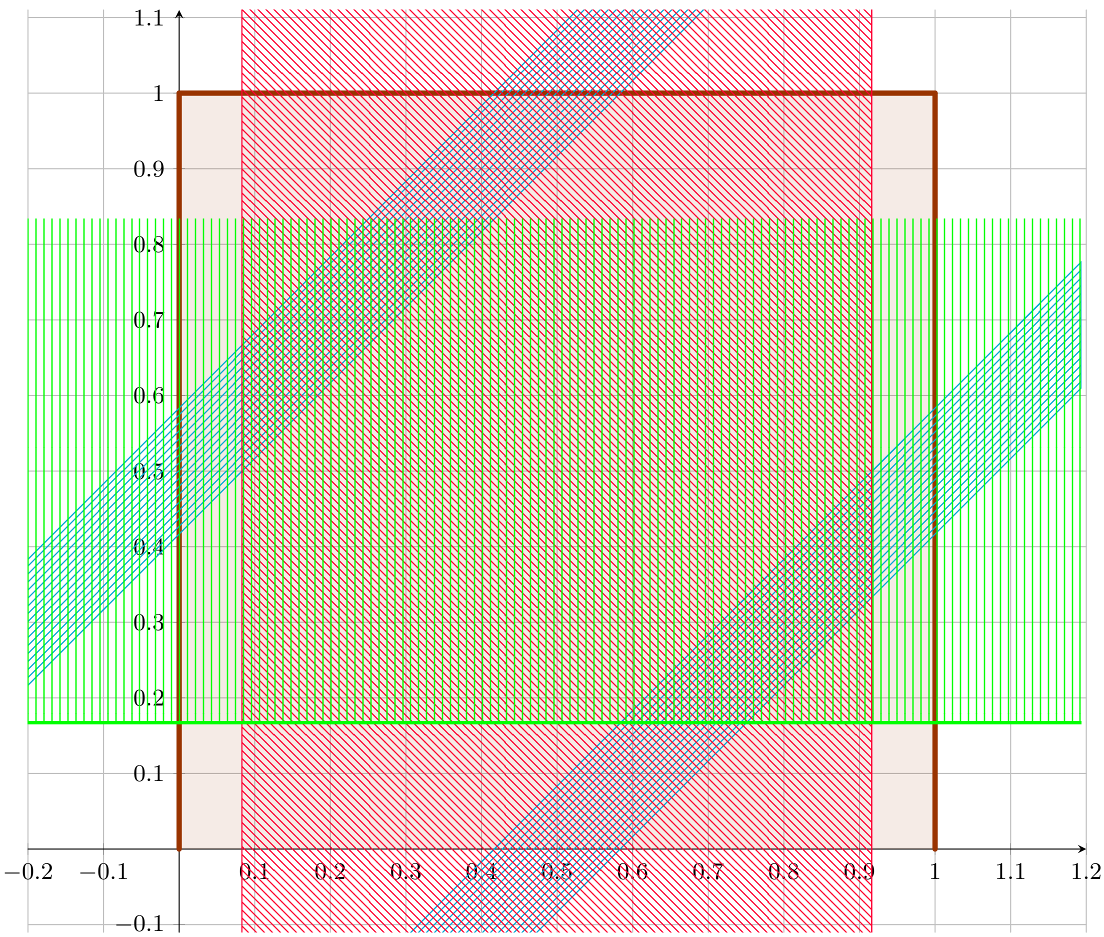
2. Для начала заметим, что $(X_{n+1} = a | X_n = b)$ не зависит от n (так как эта вероятность равна $P(\xi_{n+1} \overset{\equiv}{_4} a - b)$), поэтому X_n будут образовывать постоянную марковскую цепь, запишем её матрицу перехода

$$P_X = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

3. Рассмотрим координатную плоскость, где на оси X будет откладывать координату первого передатчика, а на оси Y — второго. Тогда заметим, что должны выполняться некоторые условия

1. $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \geqslant |x - y| \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$, так как зоны передатчиков не должны перекрываться больше, чем на $\frac{1}{6}$, иначе нам заведомо не хватит площади покрытия, и не могут стоять слишком далеко, иначе между ними будет пустое пространство (бирюзовая штриховка);
2. $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$, так как первый передатчик не может стоять у края, иначе снова не хватит зоны покрытия (красная штриховка);
3. $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$, аналогично со вторым пунктом. (зелёная штриховка).

Таким образом мы получим следующую картинку:



В силу независимости выбора x и y а также равновероятности всех выборов нам достаточно просто посчитать площадь двух трапеций, которые оказались заштрихованы трижды. Упустим скучные и тривиальные вычисления и скажем, что площадь одной трапеции равняется $\frac{1}{24}$, в силу симметрии тому же равняется и площадь второй трапеции, а значит вероятность того, что передатчиками будет покрыт весь отрезок составляем $\frac{2}{24}/1 = \frac{2}{24}$.

Глава 7

Математический анализ на втором курсе

Домашки

Домашка первая

1. В этой задаче мы хотим доказать, расходимость ряда по критерию Коши, то есть доказать, что

$$\exists \epsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geqslant N, p: \left|\sum_{i=n}^{n+p}\right| > \epsilon$$

Давайте просто рассмотрим $\epsilon = \frac{1}{4},\ n = p = N$, тогда мы получим, что

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p}\right| = \sum_{i=N}^{2N} \frac{1}{2i+1} \geqslant \frac{N+1}{4N+1} > \frac{1}{4}.$$

Таким образом, мы получили то, что хотели, победа!

2.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sqrt{2n+1} - 3\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+5}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(2 - 3\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}} - \sqrt{\frac{2n+5}{2n+1}}\right)\cdot\sqrt{2n+1}\right).$$

Теперь давайте посчитаем

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left(2 - 3\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}} - \sqrt{\frac{2n+5}{2n+1}}\right)\cdot\sqrt{2n+1}.$$

Вполне очевидно, что дроби под корнем стремятся к 1, тогда получаем, что

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left(2 - 3\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}} - \sqrt{\frac{2n+5}{2n+1}}\right)\cdot\sqrt{2n+1} = -2\sqrt{2n+1} = -\infty.$$

Таким образом, мы получили, что члены последовательности стремятся к $-\infty$, а значит сумма последовательности тоже сходится к $-\infty$.

(b) Для начала давайте по индукции докажем, что

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}.$$

База $k = 1$ очевидна.
Переход от $k = m$ к $k = m + 1$:

$$\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} = 1 - \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} = 1 - \frac{1}{(m+2)!}.$$

Таким образом мы получили, что частичные суммы по k-тый элемент имеют вид $1 - \frac{1}{(k+1)!}$, а значит, очевидно, последовательность частичных сумм сходится к 1, а значит и сумма ряда равна 1.

3.

(a) Заметим, что последовательность частичных сумм будет строго возрастаять, а значит, если мы докажем ограниченнгость суммы ряда сверху, то докажем и сходимость ряда, так что приступим:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\ln i!}{i^3} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i\ln i}{i^3} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\ln i}{i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1,5}}.$$

Как известро, сумма вида $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$, что верно в нашем случае. Таким образом, мы доказали сходимость исходного ряда.

(b) Попробуем доказать, что ряд расходится, для этого покажем, что при $n \to \infty$ его члены стремятся не к нулю. Давайте развлекаться:

$$\lim_{n\mapsto\infty} n^2 \operatorname{tg}\left(\frac{n^2+1}{n^4+1}\right) = \lim_{n\mapsto\infty}\frac{n^2\sin\left(\frac{n^2+1}{n^4+1}\right)}{\cos\left(\frac{n^2+1}{n^4+1}\right)} = \frac{\lim_{n\mapsto\infty}\left(n^2\sin\left(\frac{n^2+1}{n^4+1}\right)\right)}{\lim_{n\mapsto\infty}\cos\left(\frac{n^2+1}{n^4+1}\right)} =$$

$$= \frac{\lim_{n\mapsto\infty}\left(n^2\sin\left(\frac{n^2+1}{n^4+1}\right)\right)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Таким образом, у нас получилось доказать, что ряд расходится.

4. Видимо, в условии задачи есть опечатка, к сожалению, ответа, как понимать условие, я не нашёл, поэтому выберу самый интересный вариант (по моему мнению): оригиральная последовательность расходится, а при возведении в степень сходится. Также буду считать, что $m > 1$. Очень хочется воспользоваться Дзета-функцией, так и сделаем. Для этого достаточно взять $a_i = \frac{1}{i}$. Как известно, гармонический ряд расходится, также выполнено следующее неравенство при $m \geqslant 2$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^m} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Так как сумма $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^m}$ ограничена сверху и монотонно возрастает, то она сходится. Такой пример подойдёт для любого m, удовлетворяющего условию.

5. Воспользуемся подсказкой и обозначим за $S_{d,l}$ сумму всех членов K_d, знаменатель которых имеет длину l. Тогда будет справедливо равенство

$$K_d = \sum_{i=1}^{\infty} S_{d,i}.$$

Рассмотрим подробнее $S_{d,l}$

в таком случае, каждое $S_{d,l}$ будет иметь не менее 9^l слагаемых[1], каждое из которых не больше, чем 10^{-l+1}, а значит и

$$S_{d,l} \leqslant 9 \left(\frac{9}{10}\right)^{l-1}.$$

Получается, можно написать следующее неравенство:

$$K_d = \sum_{i=1}^{\infty} S_{d,i} \leqslant 9 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{i-1} = 90.$$

Таким образом, мы получили, что сумма ряда ограничена сверху 90, а также все его слагаемые положительны, а значит рад сходится.

[1]если $n = 0$, то на каждое место можно поставить 9 цифр, иначе не первое можно поставить только 8, а на остальные — 9

Домашка вторая

1.

(a) Посмотрим, как себя ведёт $A_i = \frac{1}{1+\frac{1}{\ln\ln n}}$. В силу того, что $\ln\ln n$ при $n \geqslant 3$ монотонно возрастает и не ограничен можно расписать следующее:

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\ln\ln n}} = \frac{1}{1+\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{\ln\ln n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Это означает, что с некоторого момента N все слагаемые нашей суммы больше, скажем, $\frac{1}{2}$, а значит желаемую сумму с некоторого момента можно оценить следующим образом:

$$\sum_{n=3}^{N+k} \frac{1}{1+\frac{1}{\ln\ln n}} \geqslant \frac{k}{2} + X,$$

где X — сумма всех A_i где $i < N$. Таким образом, мы ограничили нашу последовательность снизу другой последовательностью, которая, очевидно, расходится к $+\infty$, а значит и исходная последовательность расходится к $+\infty$.

(b) Аналогично посмотрим на последовательность $A_i = \left(n^2\sin\frac{1}{n^2}\right)^4$:

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left(n^2\sin\frac{1}{n^2}\right)^4 = \left(\lim_{n\mapsto\infty} n^2\sin\frac{1}{n^2}^4\right) =^{2} 1^4 = 1.$$

Дальнейшие рассуждения полностью повторяю предыдущий пункт, в итоге получаем, что рад расходится к $+\infty$.

(c) Давайте напишем следующее неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}(2n)!}{n^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}\prod_{i=n+1}^{2n} i}{n^n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n}.$$

Мы получили, что исходный ряд ограничен снизу рядом, который, очевидно, расходится в $+\infty$, а значит также делает и исходный.

(d) Для решения нам даже не понадобится восстанавливать строгую формулу H_i. Просто покажем, что при $i \geqslant 1$ верно, что $H_i \geqslant 2^{i-1}$. Сделаем это по индукции:

- база: $i \in \{1, 2\}$ — очевидно;
- переход: пусть наше предположение верно для всех $i \leqslant n$, покажем, что оно также верно и для $i = n+1$:

  $$H_{n+1} = 2H_n + H_{n-1} \geqslant 2\cdot 2^{n-1} + 2^{n-2} \geqslant 2^n,$$

  что и требовалось доказать.

В таком случае, можно написать следующее неравенство:

$$\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{H_i} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1.$$

Осталось только сказать, что последовательность частичных сумм для изначального ряда монотонно возрастает и ограничена, а значит имеет предел.

(e) Для начала заметим, что $\lambda_i \in \left[\pi(i-1+\frac{1}{2}), \pi(i+\frac{1}{2})\right]$. Тогда просто возьмём, и ограничим снизу каждое слагаемое вида $\frac{1}{\lambda_i}$ числом $\frac{1}{\pi(i+1)}$. Тогда можно написать следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(i+1)} = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+1}.$$

При этом мы знаем, что гармонический рад расходится, а значит расходится и $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+1}$, а значит исходная сумма тоже расходится к $+\infty$.

2. Давайте рассмотрим ряд

$$b_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} - \sqrt{\sum_{i=i}^{n-1} a_i} > 0.$$

[2] Пользуемся первым замечательным пределом, к которому приходим заменой $x = \frac{1}{n^2}$.

Для начала докажем, что такой ряд разойдётся. Если мы распишем частичные суммы для полученного ряда, то получим:

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i} - \sqrt{\sum_{i=i}^{m-1} a_i} \right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Желаемое мы получим из того, что последовательность частичных сумм для $\{a_i\}$ не ограничена.
Осталось только доказать, что $\lim_{n\mapsto\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$:

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} - \sqrt{\sum_{i=i}^{n-1} a_i}}{a_n} =$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt{\sum_{i=i}^{n-1} a_i}} = 0.$$

Последнее равенство очевидно в силу того, что частичные суммы для $\{a_i\}$ не ограничены. Победа!