Universidad Católica de Córdoba
Universidad Jesuita

TRIGONOMETRÍA

Daniel Sauchelli

EDUCC
EDITORIAL
UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CÓRDOBA

Sauchelli, Daniel
Trigonometría / Daniel Sauchelli. - 1a ed . - Córdoba : EDUCC - Editorial de la Universidad Católica de Córdoba, 2017.
Libro digital, PDF - (Cátedra)
Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-626-362-7
1. Matemática. I. Título.
CDD 516.24

I.S.B.N.: 978-987-626-362-7

Universidad Católica de Córdoba
Universidad Jesuita

Universidad Católica de Córdoba
Obispo Trejo 323, X5000IYG Córdoba. República Argentina
Tel./Fax: +54 351 428-6171
www.ucc.edu.ar - educc@ucc.edu.ar

Índice

Introducción

Vivimos en un mundo en que la sociedad humana está muy condicionada por los desarrollos tecnológicos, los progresos de la ciencia y la tecnología. Durante los últimos años han sido tales que el hombre se siente dueño de la naturaleza en su sueño de dominarla.

En este marco, el ingeniero debe crear lo que nunca ha sido, es necesario que sea partícipe de los cambios.

Los conceptos que se tratan en este curso tienen como intención transmitir al estudiante el buen manejo de la trigonometría como una herramienta de análisis y favorecer una reflexión crítica en el área de la ingeniería.

La utilización de la trigonometría es a veces tan natural que la hemos incluido en nuestra conducta, lograr mejorar nuestra formación, sin dudas, mejorará nuestro proceder.

Espero poder favorecer su vocación en esta formidable profesión de la ingeniería y les deseo el mejor de los éxitos.

Esp. Ing. Daniel Sauchelli

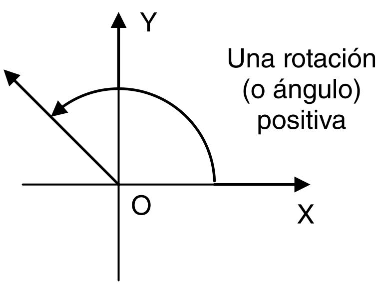
Unidad I

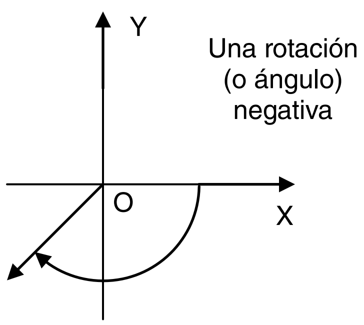
Medidas de ángulos. Definiciones

1.1. Rotaciones y ángulos

Para describir un ángulo se considerará a las rotaciones en forma abstracta. Es decir, en vez de considerar un objeto específico que gira, como una rueda o parte de una máquina, se considera una flecha (o eje) que gira, con su extremo fijo en el origen del plano xy.

La flecha parte de una posición a lo largo del semieje positivo OX. Una rotación en sentido antihorario se llamará positiva, las rotaciones en sentido horario se llamarán negativas. El espacio que se forma entre la flecha que gira y el semieje positivo OX se llama ángulo (indicado por la flecha curva).





Se habla indistintamente de rotación y ángulo. La flecha que gira se llama lado móvil, y la del semieje positivo OX lado fijo.

1.2. Medida de rotaciones o de ángulos

La medida de un ángulo o rotación puede expresarse en grados (sexagecimales), para la cual una rotación completa (o revolución) mide 360°, media revolución 180°, y así sucesivamente.

Un ángulo entre 0° y 90° tiene su lado móvil en el primer cuadrante; un ángulo entre 90° y 180° tiene su lado móvil en el segundo cuadrante; un ángulo entre 0° y –90° tiene su lado móvil en el cuarto cuadrante, y así sucesivamente.

Ejemplos

1. ¿En cuál cuadrante se encuentra el lado móvil de cada ángulo?

a) 47° b) 212° c) –43° d) –135° e) 365° f) –365°

R.: 1 – 3 – 4 – 3 – 1 – 4

2. ¿Cuántos grados hay en :

a) una revolución? b) media revolución? c) un cuarto de rev.?

d) un octavo de rev.? e) un sexto de rev.? f) un doceavo de rev.?

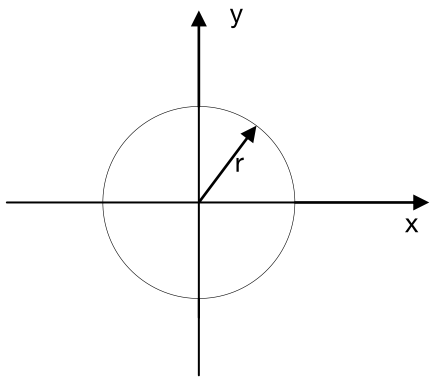
R.: 360° - 180° - 90° - 45° - 60° - 30°

Lo expresado corresponde a la utilización del sistema sexagesimal (una revolución es 360°), en el cual al ángulo se lo puede expresar en fracciones de minutos y segundos

60 minutos = 60’ = 1 grado = 1°, 60 segundos = 60 ‘’ = 1 minuto = 1’

También se puede utilizar el sistema centesimal (una revolución es 400°), pero es de poco uso.

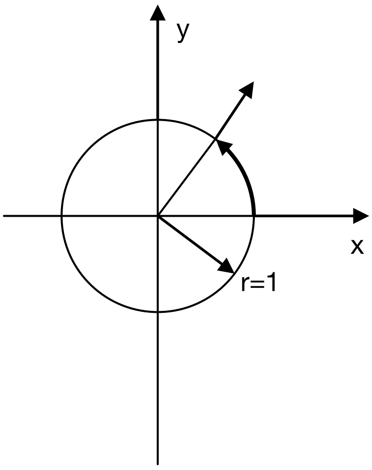
Otra unidad de medida, que se utiliza a menudo, es el radián. Para poder definirlo consideremos una circunferencia de radio r.

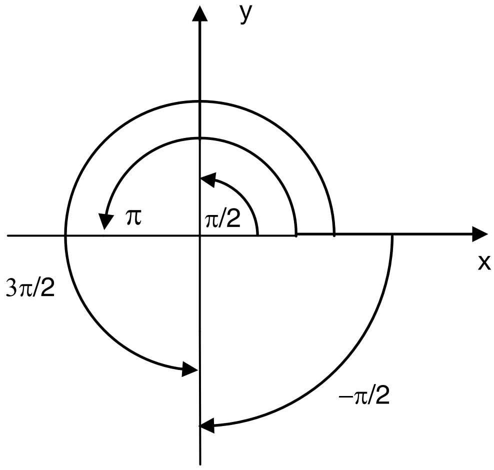


Sabemos que la longitud de la circunferencia (perímetro) vale $2\pi r$; por lo tanto si $r = 1$, el perímetro vale 2π, la longitud de una porción de esta circunferencia, desde el lado fijo de un ángulo hasta el lado móvil, se utiliza como medida de la rotación, llamado radián.

El número π es un número irracional, de valor 3,14159265...

Una rotación de 360° (1 revolución) mide, por lo tanto, 2π radianes. Media revolución es igual a una rotación de 180° ó π radianes. Un cuarto de revolución es igual a una rotación de 90° ó $\pi/2$ radianes, y así sucesivamente.





Para convertir grados en radianes y viceversa, podemos utilizar la noción de "multiplicar por uno".

Observemos que:

$$\frac{1 \text{ revolución}}{1 \text{ revolución}} = \frac{2\,\pi \text{ radianes}}{360 \text{ grados}} = \frac{\pi \text{ radianes}}{180 \text{ grados}} = 1$$

Asimismo:

$$\frac{180 \text{ grados}}{\pi \text{ radianes}} = 1$$

Cuando una rotación (o ángulo) se expresa en radianes, el uso de la palabra "radianes" es opcional y se omite la mayor parte de las veces. Así que, si no se da la unidad en la cual se expresa una rotación (o ángulo), se sobreentiende que se trata en radianes.

Si deseamos expresar 60° en radianes, hacemos:

$$60° = 60 \text{ grados} \,.\, \frac{\pi \text{ radianes}}{180 \text{ grados}} = \frac{60°}{180°}\ \pi \text{ radianes}$$

$$60° = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$$

Ejemplos

3. Convierta en radianes (exprese la respuesta en términos de π):

a) 60° b) 225° c) 315° d) –720° e) 35° 12' 25''

R.: $\pi/3$ - $5\pi/4$ - $7\pi/4$ - -4π - $0.1956\ \pi$

4. Convierta en radianes (no exprese la respuesta en términos de π):

a) 225° b) 300° c) –315° d) –12° 05' e) 450°

R.: 3.927 – 5.236 – -5.498 – -0.211 – 7.854

5. Convierta en grados

a) $4\pi/3$ b) $5\pi/2$ c) $-4\pi/5$

R.: 240° - 450° – -144°

6. ¿En cuál cuadrante se encuentra el lado móvil de cada ángulo?

a) $5\pi/4$ b) $17\pi/8$ c) $-\pi/15$ d) 37.3π

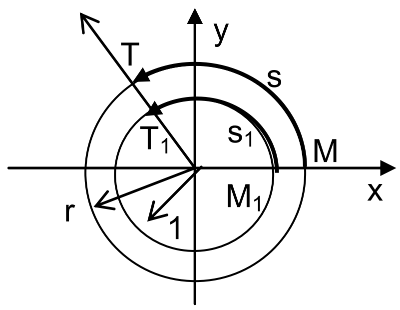
R.: 3 – 1 – 4 – 3

1.3. Longitud de arco

La medida en radianes puede determinarse utilizando una circunferencia distinta de la unitaria.

En la figura siguiente se muestra una circunferencia unitaria (radio=1) y otra diferente.

El ángulo que se muestra es el ángulo del centro de ambas circunferencias y, por lo tanto, los arcos que intercepta tiene sus longitudes en la misma razón que los radios de las circunferencias.



Los radios respectivos de las circunferencias son 1 y r, respectivamente.

Las longitudes de arco correspondiente son MT y Mj_1T_1, o, más sencillamente

s y s_1.

Tenemos, por lo tanto, la proporción:

$$\frac{s}{r} = \frac{s_1}{1}$$

Ahora bien, s_1 es la medida en radianes de la rotación en cuestión. Es más corriente utilizar una letra griega, tal como θ, para representar la medida de un ángulo o de una rotación.

Corrientemente, utilizamos la letra s para representar la longitud de arco.

Adoptando este convenio, la proporción anterior se convierte en $\theta = s / r$.

Para cualquier circunferencia, la longitud de arco, el ángulo y la longitud del radio están relacionados en esta forma.

O sea, en general, la siguiente relación es válida:

"La medida en radianes (θ) de una rotación es la razón entre el arco s recorrido por un punto y la distancia r que separa a éste del centro de rotación"

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Ejemplos

7. Hallar la longitud del arco de una circunferencia de radio de 5 cm asociada con un ángulo de $\pi/3$ radianes.

Sabemos que $s = r.\theta$, por lo tanto:

$$s = 5.\pi/3 \text{ cm} \longrightarrow s = 5.23 \text{ cm}$$

8. Exprese en radianes la medida de una rotación tal que un punto que dista 2 m del centro de rotación recorre 4 m.

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{4m}{2m} = 2 \text{ radianes}$$

Una ojeada a los ejemplos 7 y 8 explicará porqué la palabra "radián" se omite la mayor parte de las veces.

En el ejemplo 8 tenemos la división de 4m/2m, que se simplifica a 2, pues m/m = 1.

Desde este punto de vista, parece más conveniente suprimir la palabra "radianes".

En el ejemplo 7, si hubiésemos usado la palabra "radianes" todo el tiempo, nuestra respuesta hubiese resultado ser 5.23 cm-radianes. Es una distancia lo que buscamos, así que sabemos que la unidad debe expresarse en centímetros. Por lo tanto, es necesario suprimir la palabra "radianes". Normalmente es conveniente suprimir dicha palabra.

Ejemplos

9. Hallar la longitud del arco de una circunferencia de radio de 10 cm, asociado con un ángulo de $11\pi/6$.

R: 57.59 cm

10. Exprese en radianes la medida de una rotación tal que un punto que dista 2.5 cm del centro de rotación recorre 15 cm.

R: 6 radianes

11. Exprese en radianes la medida de una rotación tal que un punto que dista 24 pulgadas del centro de rotación recorre 3 pies.

R.: 1.5 radianes

Ejercicios

1. Para las siguientes medidas de ángulos, indique en cuál cuadrante se encuentra el lado móvil.

a) 34° b) 320° c) –120° d) 175° e) $\pi/3$

f) $-3\pi/4$ g) $11\pi/4$ h) $19\pi/4$

2. Convierta en radianes. Exprese la respuesta en términos de π.

a) 30°12'30" b) 15°27'15" c) 60° d) 200° e)–300°12'12"

3. Convierta en radianes. No exprese la respuesta en términos de π.

a) 120° b) 240° c) 320° d)75° e) 300°

4. Convierta a grados, minutos y segundos

a) 1 radián b) 2 radianes c) 8π d) -12π e) $5\pi/4$

5. En una circunferencia de radio de 120 cm, ¿cuántos radianes mide el ángulo que genera un arco de 132 cm de longitud?

6. En una circunferencia de radio de 200 cm, ¿cuánto mide el ángulo que genera un arco de 65 cm de longitud?

7. Aproximadamente, ¿cuántos radianes gira el minutero de un reloj en 50 minutos?

8. Una rueda de automóvil tiene 14 pulgadas de radio, ¿qué ángulo gira la rueda cuando el automóvil recorre una milla?

9. Para una circunferencia con radio de 10 cm, ¿qué longitud tiene un arco asociado con un ángulo de 1.6 radianes?

10 .Para una circunferencia con radio de 5 m, ¿qué longitud tiene un arco asociado con un ángulo de 120°19'16"?

11. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 2:30 h?

12. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 7:45 h?

Nota: 1 pie = 12 pulgadas; 1 pulgada = 25.4 mm ; 1 milla = 1.61 Km

Unidad II

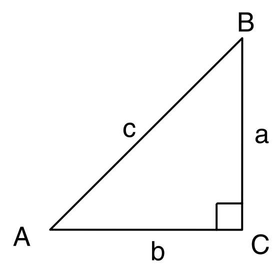
Funciones trigonométricas

2.1. Triángulo rectángulo

Las funciones trigonométricas o circulares se basan, históricamente, en ciertas propiedades de los triángulos.

Concentremos nuestra atención en los triángulos rectángulos.

Los ángulos y vértices de un triángulo rectángulo se indican a menudo en la forma que se muestra a continuación, siendo C un ángulo recto y c la longitud de la hipotenusa. El lado a es el opuesto al ángulo A y el lado b es el opuesto al ángulo B.



La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°. Por lo tanto, en un triángulo rectángulo, la medida de los dos ángulos agudos suman 90°.

Ejemplo

1. Para un triángulo rectángulo, en el cual A = 32°, halle B.

Sabemos que A + B = 90° y que A = 32°, entonces:

$B = 90° - 32° = 58°$

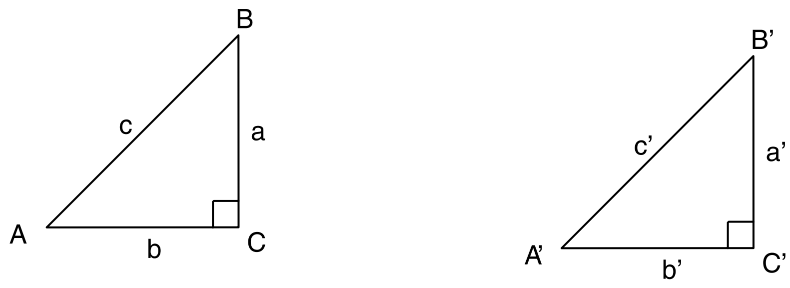
2. Determinar A, si B = 47°.

R.: 43°

2.2. Triángulos semejantes

Los triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.

En los triángulos rectángulos siguientes, si sabemos que A y A' tienen la misma magnitud, entonces sabemos que todos los ángulos correspondientes tienen la misma medida y se trata, por consiguiente de triángulos semejantes.



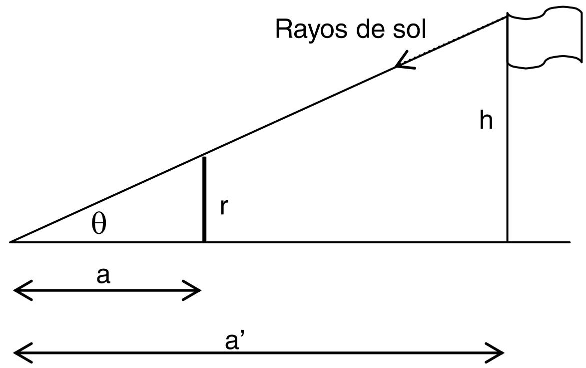
En los triángulos semejantes (o equivalentes), los lados correspondientes se encuentran en la misma razón (son proporcionales):

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Los triángulos semejantes pueden utilizarse para determinar distancias sin medir directamente.

Ejemplo

3. Hallar la altura del asta utilizando, como se muestra, una vara y un aparato para medir.



Coloque la vara, de longitud r, de modo que la parte superior de su sombra coincida con la sombra de la parte superior del asta.

Sabemos que se trata de triángulos semejantes, porque el ángulo agudo θ en la tierra es el mismo para ambos triángulos.

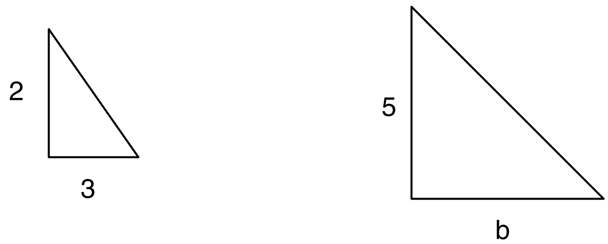
Medimos y hallamos que a=3m , a'=30 m y r=2 m.

Ahora bien, por la semejanza de triángulos:

$$\frac{h}{r} = \frac{a'}{a}$$

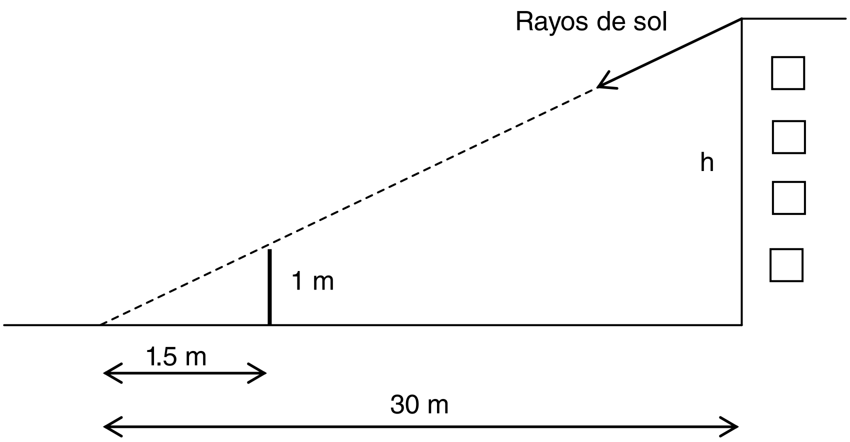
$$h = \frac{r.a'}{a} = 2 \,.\, \frac{30}{3} = 20 \text{ m}$$

4. Hallar el valor de b, en los triángulos semejantes siguientes:



R.: 7.5

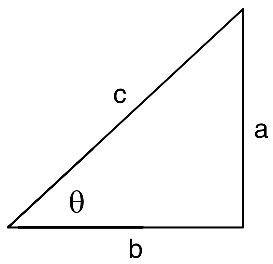
5. Hallar la altura del edificio



R.: 20 m

2.3. Razones trigonométricas

En un triángulo rectángulo, como el que se muestra, la razón a/c, del lado opuesto a θ con respecto a la hipotenusa, depende de la magnitud de θ. En otras palabras, esta razón es una función de θ.



Esta función se llama función “seno”. Otra función semejante, llamada función “coseno”, es la razón b/c, la razón del lado adyacente a θ con respecto de la hipotenusa.

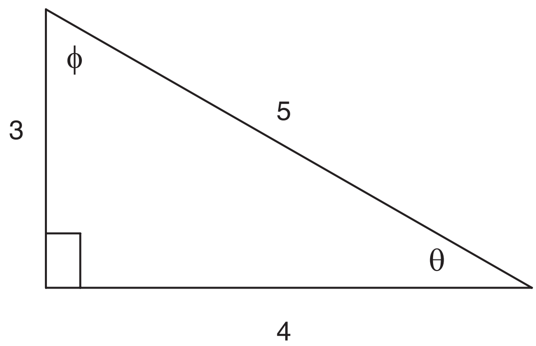
Existen otras razones o funciones que se definen de manera similar, en la tabla siguiente se definen las seis funciones trigonométricas o circulares:

Función	**Abreviatura**	**Razón**
Seno	sen(θ) ó senθ	$\frac{\text{Lado op. a } \theta}{\text{Hipotenusa}}$
Coseno	cos(θ) ó cosθ	$\frac{\text{Lado ady. a } \theta}{\text{Hipotenusa}}$
Tangente	tg(θ) ó tgθ	$\frac{\text{Lado op. a } \theta}{\text{Lado ady. a } \theta}$
Cotangente	cotg(θ) ó cotgθ	$\frac{\text{Lado ady a } \theta}{\text{Lado op. a } \theta}$
Secante	sec(θ) ó secθ	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Lado ady. a } \theta}$
Cosecante	cosec(θ) ó cosecθ	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Lado op. a } \theta}$

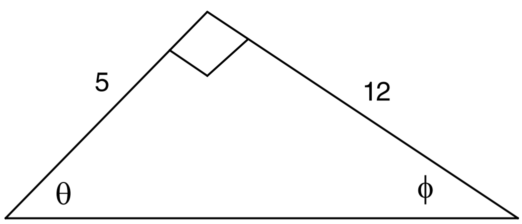
Observemos que los valores de la función trigonométrica no dependen de la magnitud del triángulo, sino solamente de la magnitud del ángulo.

Ejemplos

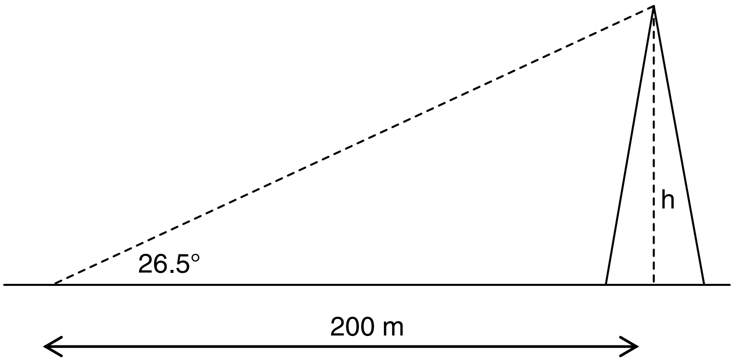
6. Para el triángulo mostrado hallar las funciones trigonométricas de los ángulos θ y ϕ



7. Hallar las funciones trigonométricas de los ángulos ϕ y θ



8. Un hombre está parado sobre un terreno nivelado, a 200 metros de la base de una antena de televisión. Para ver la parte superior de la antena tiene que mirar hacia arriba un ángulo de 26.5°. ¿Cuál es la altura de la torre?



Del esquema que sintetiza la situación, vemos que se forma un triángulo rectángulo. Utilizamos una de las funciones trigonométricas. Esta vez, la función tangente es la más conveniente.

De la definición resulta:

$$tg(26.5°) = \frac{h}{200}$$

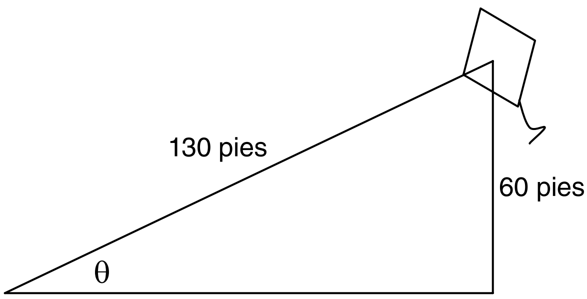
Entonces: $h = 200.\ tg(26.5°)$

$h = 99.7$ m

9. Un hombre, parado a 120 metros de un árbol, encuentra que su línea de visión a la parte superior del árbol es de 32.3° respecto de la horizontal. Hallar la altura del árbol.

R.: 75.9 m

10. Un cometa vuela a una altura de 60 pies cuando se han soltado 130 pies de hilo. Suponiendo que el hilo forma una línea recta, ¿cuál es el ángulo que éste hace con la tierra?



De la definición de seno, tenemos:

$$sen(\theta) = 60/130 = 0.4615$$

$$\theta = arc\ sen(0.4615) = 27.48°$$

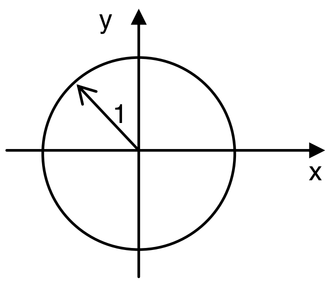
11. Un cable mide 13.6 metros de largo, y tiene un extremo fijo en tierra, y el otro en la parte superior de un poste de 6.5 metros de altura. ¿Qué ángulo forma el cable con la tierra?

R.: 28.55°

2.4. La circunferencia unitaria

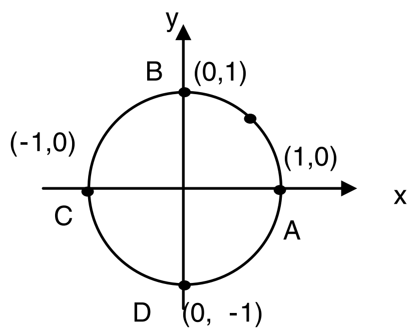
Para desarrollar las funciones trigonométricas o circulares, utilizaremos una circunferencia con radio igual a uno.

Tal circunferencia se llama circunferencia unitaria, que cuando su origen está en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, su ecuación es de la forma:



$$x^2 + y^2 = 1$$

Esta ecuación representa al conjunto de puntos que compone a la circunferencia:

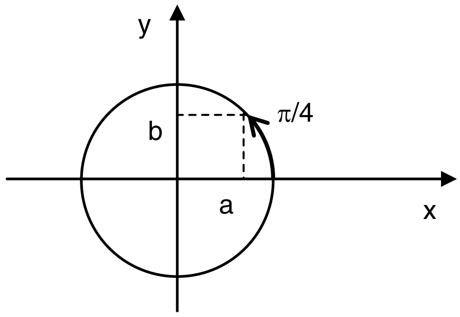


La circunferencia de un círculo (perímetro) de radio r es $2.\pi.r$; por lo tanto, para la circunferencia unitaria su valor es $2.\pi$.

Si un punto comienza en A y se desplaza en el sentido antihorario alrededor de la circunferencia, recorrerá una distancia $2.\pi$.

Si recorre la mitad de la circunferencia, recorrerá una distancia igual a π.

Si un punto se desplaza 1/8 de la distancia alrededor de la circunferencia, recorrerá una distancia igual a $(1/8).2.\pi$, ó $\pi/4$:



Observemos que el punto lo podemos identificar por sus coordenadas:

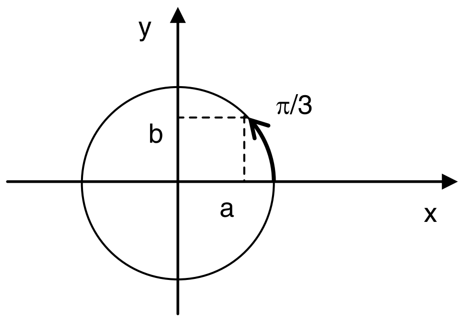
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

es decir, el punto se lo define por el par ordenado: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Las coordenadas de este punto cumplen con la ecuación de la circunferencia unitaria:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

Si un punto se desplaza 1/6 de la distancia alrededor de la circunferencia, recorrerá una distancia igual a (1/6)2π, ó π/3:



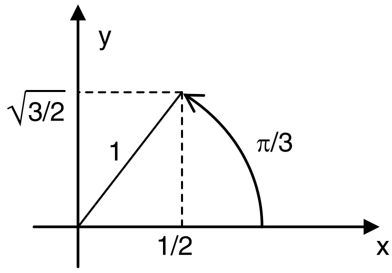
Observemos que las coordenadas del punto son:

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

que cumple con la ecuación de la circunferencia unitaria:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Para la determinación de las coordenadas, observemos la existencia de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa vale 1:



para el cual:

$$a = 1.\cos(\pi / 3) \longrightarrow a = 1/2$$
$$b = 1.\text{sen}(\pi / 3) \longrightarrow b = 0.866 = \sqrt{3/2}$$

Ejemplos

12. ¿Qué distancia recorrerá un punto si se desplaza:

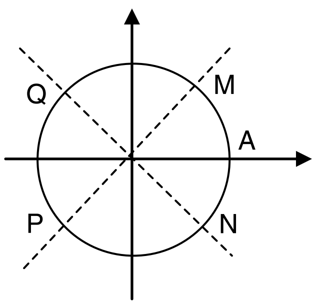
a) ¼ de la distancia alrededor de la circunferencia unitaria.

b) 3/8

c) ¾

¿Qué distancia se desplazará alrededor de la circunferencia unitaria, en sentido antihorario, si va del punto A hacia: (determine las coordenadas del punto):

a) M b) N c) P d) Q



Un punto puede moverse a lo largo de la circunferencia y luego continuar. Por ejemplo, si da la vuelta completa una vez y luego continúa hasta recorrer ¼ de la distancia alrededor de circunferencia, habrá recorrido una distancia igual a $2\pi+\pi/2$, ó $5\pi/2$.

De este modo, cualquier número positivo determina un punto sobre la circunferencia unitaria.

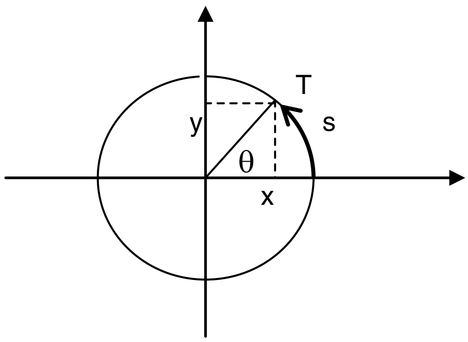
Los números negativos también determinan puntos sobre la circunferencia unitaria. Para un número negativo, nos desplazamos en sentido horario alrededor de la circunferencia.

14. Localice sobre la circunferencia unitaria los puntos determinados por los siguientes números (hallar sus coordenadas):

a) $\pi/4$ b) $7\pi/4$ c) $9\pi/4$ d) $13\pi/4$ e) $-\pi/2$ f) $-3\pi/4$

2.5. Las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante

Todo número real s determina un punto T sobre la circunferencia unitaria:



La longitud de arco s, determina el ángulo θ, así que pensamos en términos de s (en radianes), ó en θ (en forma más general).

Las coordenadas del punto quedan definidas por:

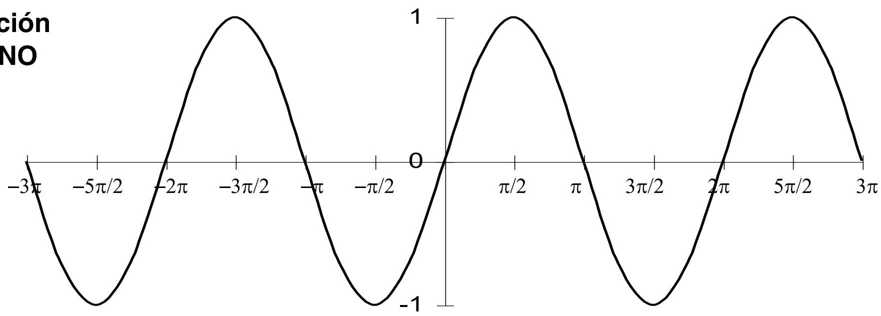
$x = \cos s$; ó ($x = \cos \theta$)

$y = \text{sen } s$; ó ($y = \text{sen } \theta$)

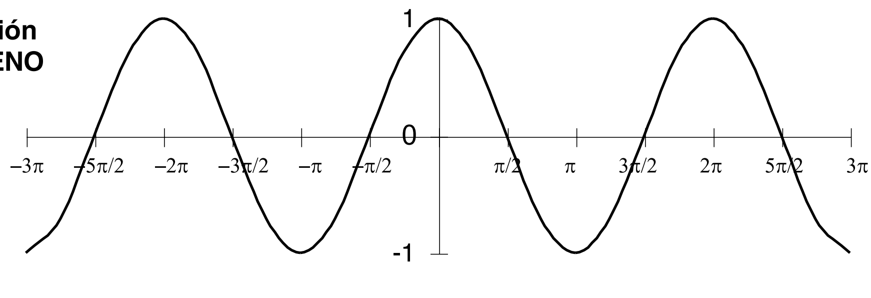
Los valores de las coordenadas, es decir, los valores de las funciones varían entre los valores -1 y 1.

Las gráficas de las funciones seno y coseno y son:

Función SENO



Función COSENO



De estas gráficas se observan ciertas propiedades:

• Estas funciones son periódicas, con período 2π.

• El seno es una función impar: sen(-s) = -sen(s)

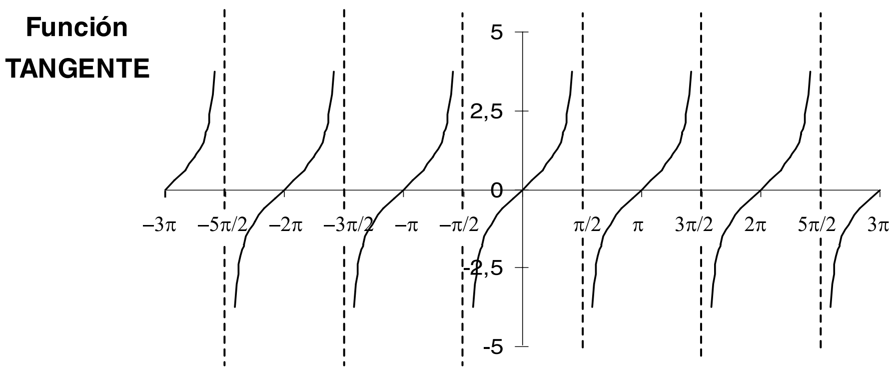
• El coseno es una función par: cos(-s) = cos(s)

La función tangente es el cociente del seno, dividido, por el coseno:

$$tg(s) = \frac{sen(s)}{cos(s)}$$

La función tangente no está definida para números cuyo coseno sea igual a cero.

La gráfica de la función tangente es:



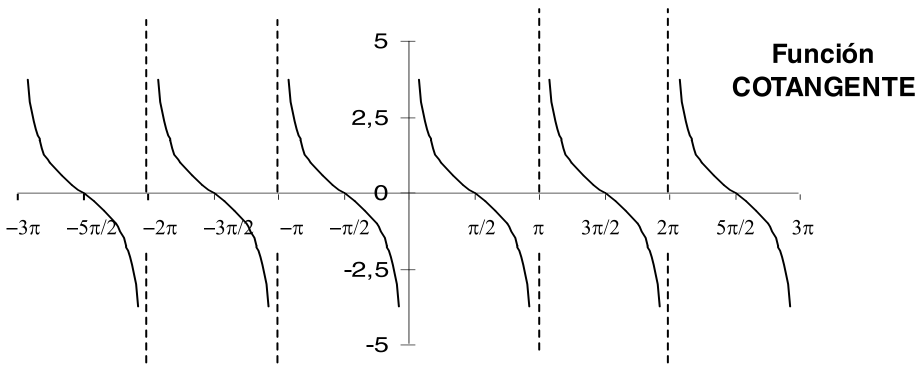
Observamos que la función tangente es periódica, con período π, la gráfica está interrumpida en aquellos valores para el cual el coseno es cero. La función es impar.

La función cotangente de un número es el cociente de su coseno, dividido, por su seno.

$$cotg(s) = \frac{cos(s)}{sen(s)}$$

La función cotangente no está definida para números cuyo seno sea igual a cero.

La gráfica de la función cotangente es:



Observamos que esta función es periódica de período π, la gráfica está interrumpida para aquellos valores en el cual el seno es cero. La función es impar.

También podemos definir a la función cotangente como el recíproco de la función tangente:

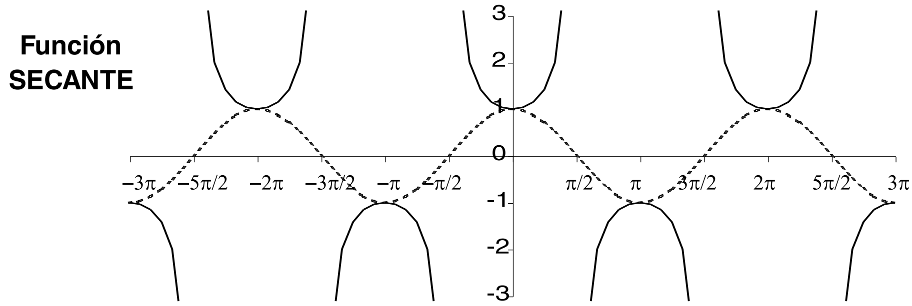
cotg(s) = 1 / tg(s)

La función secante de un número es la recíproca de la función coseno:

sec(s) = 1 / cos(s)

Esta función no estará definida para aquellos números en que el coseno vale cero.

La gráfica de la función secante se muestra abajo, en la cual se ha agregado, en



forma de una curva interrumpida para su referencia, a la función coseno.

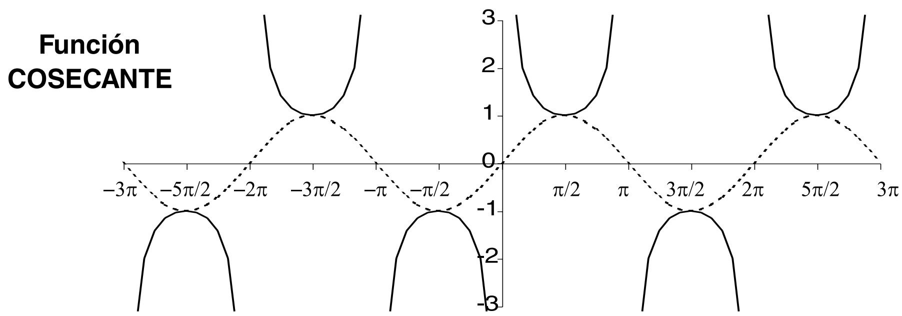
Se observa que la función es periódica, de período 2π, la gráfica está interrumpida para aquellos valores en que el coseno es cero. La función es par.

La función cosecante de un número es la recíproca de la función seno:

cosec(s) = 1 / sen(s)

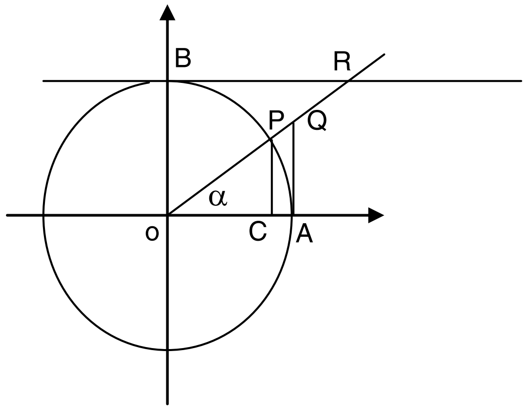
Esta función no estará definida para aquellos números que el seno vale cero.

La gráfica de la función cosecante se muestra abajo, en la cual se ha agregado, en forma de una curva interrumpida para su referencia, la función seno.



Observamos que esta función es periódica, de período 2π, la gráfica está interrumpida para aquellos valores que el seno vale cero. La función es impar.

A partir de la circunferencia unitaria (círculo trigonométrico), y por triángulos semejantes se puede observar:



oP = oA = oB = 1

PC = sen(α)

oC = cos(α)

AQ = tg(α)

BR = cotg(α)

oQ = sec(α)

oR = cosec(α)

Para deducir estas relaciones, partimos identificando, sin problemas, en la circunferencia unitaria, los valores de oP, oA, oB, PC y oC. Luego por triangulos semejantes hacemos:

Triángulos: oPC , oQA

$$QA / PC = oA / oC$$

$$QA = PC / oC = sen(\alpha) / cos(\alpha) = tg(\alpha)$$

$$oQ / oP = oA / oC$$

$$oQ = 1 / cos(\alpha) = sec(\alpha)$$

Triángulos: oPC, oBR:

$$BR / oC = oB / PC$$

$$BR = oC / PC = cos(\alpha) / sen(\alpha) = cotg(\alpha)$$

$$oR / oP = oB / PC$$

$$oR = 1 / PC = 1 / sen(\alpha) = cosec(\alpha)$$

Ejercicios

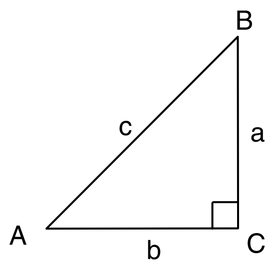
1. Resolver los siguientes triángulos rectángulos

a) a=45 m , B=40.174°

b) a=134 m , b=47 m

c) b=63 m , B=25.578°

d) c=34 m , b=24 m



e) a=90m , B=65°

f) c=374 m , B=45°

g) b=400 m , B=70°

h) c=8 m , a=4 m

i) b=3500 m , c=7000 m

j) c=10 m , B=10°

2. Encontrar los valores de las siguientes funciones:

a) sen 36.45°	b) cos 75.75°	c) tg 43.72°	d) sen 0.1 rad
e) cos π	f) tg 2.5rad	g) cotg 32.55°	h) sec 310°
i) cosec 22.22°	j) cotg 1.25rad	k) sec 1.25rad	l) cosec π

3. Encontrar los ángulos que corresponden a las funciones trigonométricas siguientes:

a) sen x=0.08107	b) cos x= 0.67542	c) tg x=1.4538	d) sec x=1.86798
e) cosec x= 1.95	f) cotg x=8.23	g) sen x= -0.5	h) cos x= -0.5
i) tg x = -1	j) sec x = -2	k) tg x= 0	l) cosec x= -1.5

4. Determinar las coordenadas del punto en el círculo trigonométrico, al siguiente arco s:

a) s=π/8 m b) s= 1.26π m c) s= 2.73m d) s= 3π/2m e) s= 7.25m

5- Graficar las funciones:

$y = 3 + 2 \text{ sen } x$

$y = 4 – 2 \cos x$

$y = \text{tg } 2x$

6. Verificar las gráficas anteriores por medio del uso de la computadora.

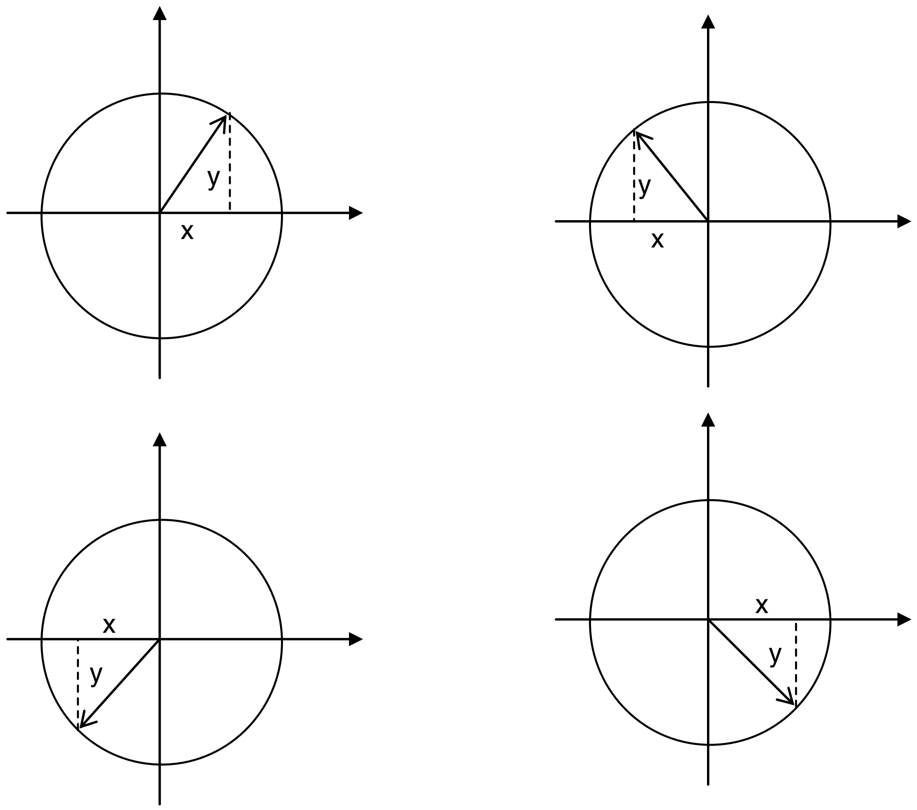
Unidad III

Relaciones fundamentales

3.1. Identidad fundamental

Al identificar un punto sobre el circulo trigonométrico, aparece un triángulo rectángulo, en él se puede observar, inmediatamente, el seno y el coseno, y ampliando el dibujo, las otras funciones trigonométricas (ver lo desarrollado en pag. 19 y 20).

En el círculo trigonométrico tenemos cuatro cuadrantes, el punto en cuestión, que define un triángulo rectángulo, toma la forma:



En estos triángulos rectángulos, el cateto indicado por x, representa el coseno, el cateto indicado por y, representa el seno.

Si consideramos el teorema de Pitágoras, que nos dice que la suma de los cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, y siendo el valor de la hipotenusa igual a uno (ya que el radio es igual a uno), nos queda:

$$x2 + y2 = 1$$

Esta es la ecuación de la circunferencia unitaria que se presentó en la página 13, y por la definición del seno y del coseno, llegamos a la primera relación fundamental:

$$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

De esta identidad fundamental puede explicitarse para una de las funciones:

$$\text{sen}^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \text{sen}^2(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2(\alpha)}$$

Es decir que conociendo el valor del seno o del coseno, se puede conocer el otro, utilizando estas relaciones. Debe tenerse en cuenta la utilización del signo más o del menos, dependiendo a que cuadrante corresponde el ángulo.

3.2. Relaciones derivadas

A partir de la identidad fundamental y de las definiciones de las distintas funciones trigonométricas, se pueden deducir varias otras relaciones que nos liga las distintas funciones trigonométricas.

Por ejemplo, si $\cos(\alpha)$ es distinto de cero, entonces al dividir a la identidad fundamental por el coseno al cuadrado, nos queda:

$$\text{sen}^2(\alpha) / \cos^2(\alpha) + 1 = 1/\cos^2(\alpha)$$

por lo tanto: $\text{tg}^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$

también podemos hacer: $\text{tg}^2(\alpha) + 1 = 1/\cos^2(\alpha)$

despejando nos queda: $\cos(\alpha) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2(\alpha)}}$

Por ejemplo, si ahora el $\text{sen}(\alpha)$ es distinto de cero, entonces al dividir a la identidad fundamental por el seno al cuadrado, nos queda:

$$1 + \cos^2(\alpha) / \text{sen}^2(\alpha) = 1/\text{sen}^2(\alpha)$$

por lo tanto: $1 + \text{cotg}^2(\alpha) = \text{cosec}^2(\alpha)$

también podemos hacer: $1 + \text{cotg}^2(\alpha) = 1/\text{sen}^2(\alpha)$

despejando nos queda: $\text{sen}(\alpha) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2(\alpha)}} = \pm\dfrac{\text{tg}(\alpha)}{\sqrt{1+\text{tg}^2(\alpha)}}$

Podemos obtener muchas otras relaciones que nos ligan las distintas funciones trigonométricas. No es aconsejable aprenderlas de memoria, pero sí ser capaz de su deducción.

3.3. Identidades a demostrar

Es práctica común en el estudio de la Ingeniería, la necesidad de realizar cálculos analíticos de expresiones algebraicas, en las cuales las funciones trigonométricas pueden tomar diversas formas.

Como una ejercitación para este tipo de análisis es bueno demostrar identidades. En las identidades se observa dos expresiones en una ecuación, que a simple inspección no parecen iguales, como ser:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Nuestra práctica consistirá en demostrar que la expresión de la izquierda del signo igual es equivalente a la expresión de la derecha. Este será un cálculo analítico, es decir no se le dará ningún valor al ángulo α, por lo tanto no se usará la calculadora.

Para su realización se puede proceder de dos maneras:

1) Se supone verdadera la identidad y se opera sobre los dos miembros de la ecuación para llegar a una identidad fácilmente observable.

Para la expresión anterior, y para que ésta sea cierta debe ocurrir que:

$1-\cos\alpha \neq 0$,y que, $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$

esto debe ser así ya que esas expresiones están dividiendo, y la división por cero no está permitida.

Luego multiplicamos a la igualdad por $1-\cos\alpha$, y por $\operatorname{sen}\alpha$, esto es lo mismo que decir "si está dividiendo pasa al otro lado multiplicando", y nos queda:

$$\operatorname{sen}\alpha \,.\operatorname{sen}\alpha = (1-\cos\alpha).(1+\cos\alpha)$$

es decir, se puede hacer que: $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

y por lo tanto que: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

que es la identidad fundamental, queda entonces demostrada la identidad.

2) Se transforma uno de los miembros de la identidad dada, haciéndolo igual al otro miembro.

A partir de la identidad fundamental en la cual: $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

podemos hacer: $\operatorname{sen}^2\alpha = (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$

reemplazando en el primer miembro $(1 - \cos\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha / (1 + \cos\alpha)$

nos queda:

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Ejemplo

Verificar que $\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \,.\, \operatorname{cosec}^2\alpha$

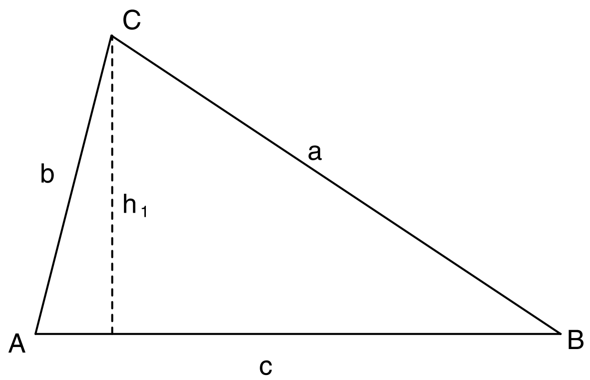
operando sobre el primer miembro

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha.\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha.\operatorname{sen}^2\alpha}=\sec^2\alpha\ \operatorname{cosec}^2\alpha$$

3.4. Teoremas del seno y del coseno

En un triángulo oblicuángulo se pueden establecer unas relaciones entre sus lados y ángulos internos.

Consideremos un triángulo oblicuángulo, en el cual se dibuja una de sus alturas, según se muestra:



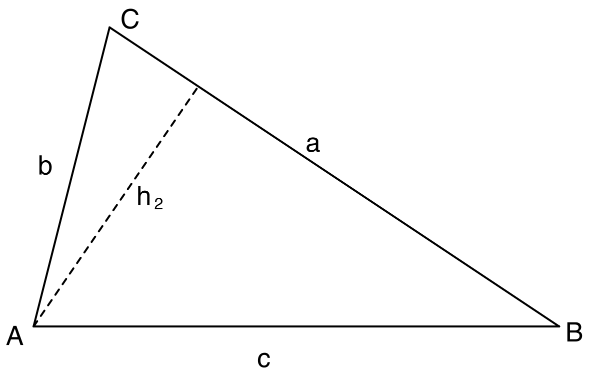
Al dibujar una de sus alturas, el triángulo queda formado por dos triángulos rectángulos, por lo tanto:

$h_1 = b.\operatorname{sen}A = a.\operatorname{sen}B$

es decir que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}$$

Considerando otra altura del triángulo, como ser la definida por el lado a, de acuerdo a la figura siguiente tenemos:



h_2 = b.senC = c.senB

es decir:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Por lo tanto el TEOREMA DEL SENO nos dice que: en todo triángulo la relación entre uno de sus lados y el seno del ángulo opuesto es una constante. Podemos expresar este teorema a través de la siguiente expresión:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Considerando el primer triángulo, podemos aplicar el teorema de Pitágoras a cada uno de los triángulos rectángulos que quedan formados:

$$h_1^2 + (a.\cos B)^2 = a^2$$

$$h_1^2 + (c - a.\cos B)^2 = b^2$$

Restando esta dos expresiones, miembro a miembro, es decir lo de lizquierda entre sí, y lo de la derecha entre sí, a fin de eliminar h_1^2, nos queda:

$$a^2.\cos^2 B - (c^2 - 2.a.c.\cos B + a^2.\cos^2 B) = a^2 - b^2$$

Acomodando esta ecuación, nos queda:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$$

Si operamos con las otras alturas obtendríamos otras expresiones similares, esta expresión corresponde al TEOREMA DEL COSENO, que se puede expresar: en todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma del cuadrado de los otros dos lados menos el duplo de estos lados por el coseno del ángulo comprendido. Entonces será:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$$

Se debe aclarar que en este análisis no se hizo diferencia en las características del triángulo, es decir se aplica a un triángulo rectángulo como así también a uno oblicuángulo.

3.5. Resolución de triángulos

Resolver un triángulo significa obtener los valores de sus lados y de sus ángulos, a partir de una serie de datos

En todo triángulo tenemos tres lados y tres ángulos, y como ecuaciones tenemos el teorema del seno, el teorema del coseno y el hecho que la suma de los ángulos debe dar 180° ó π radianes, ya sea que usemos un sistema u otro de medición para los ángulos.

Se debe considerar ciertos hechos:

- La cantidad mínima de datos que se necesitan son tres.
- En los datos debe haber, al menos, el valor de uno de sus lados.
- El valor de uno de sus lados debe ser menor que la suma de los otros dos.
- Los valores de los ángulos debe ser un valor positivo menor a 180 grados.

En la presentación común que se hace para la resolución de triángulos, se los clasifica en cuatro casos de acuerdo a cómo son los datos, en nuestro curso no haremos tal clasificación, de esa forma evitaremos utilizar reglas de uso y favorecemos el análisis y la reflexión.

Se debe tener en cuenta que al calcular un ángulo a través del seno, si el ángulo es obtuso (es decir es mayor a 90°), la calculadora (ya que NO PIENSA) nos dará un ángulo menor a 90° como respuesta, por lo que nuestro cálculo será incorrecto. Para evitar esto es bueno usar el coseno para obtener ángulos, ya que la calculadora devolverá el valor que estamos buscando.

Ejemplos

2 .Resolver el siguiente triángulo, en el cual se sabe que:

a) A=43.5° , B= 59.6° , c= 25.9 m

Como tenemos dos ángulos, obtenemos el tercero:

$$C = 180 - A - B = 76.9°$$

Aplicando el teorema del seno, obtenemos los lados que faltan:

$$a = c.\text{sen}A/\text{sen}C = 18.3 \text{ m}$$

$$b = c.\text{sen}B/\text{sen}C = 22.9 \text{ m}$$

b) A = 25.7° , a= 350 m , b = 562.3 m

Si aplicamos el teorema del seno para obtener el ángulo B será:

$$B = sen^{-1}(sen25.7 .(562.3/350)) = 44.16°$$

Notemos que B > A, lo mismo que ocurre con b > a.

El ángulo C será: $C = 180 – A – B = 110.14°$

Por el teorema del seno vale: $c = a.senC/senA = 757.74$ m

c) A = 25.7° , a = 350 m , c = 757.74 m

En este caso, que parece ser el mismo que el anterior, hemos elegido como dato al lado c en lugar del lado b.

Si aplicamos el teorema del seno para obtener el ángulo C, será:

$$C = sen^{-1}(sen25.7.(757.74/350)) = 69.86°$$

Notemos que C > A, lo mismo que ocurre con c > a.

El ángulo B será: $B = 180 – A – C = 84.44°$

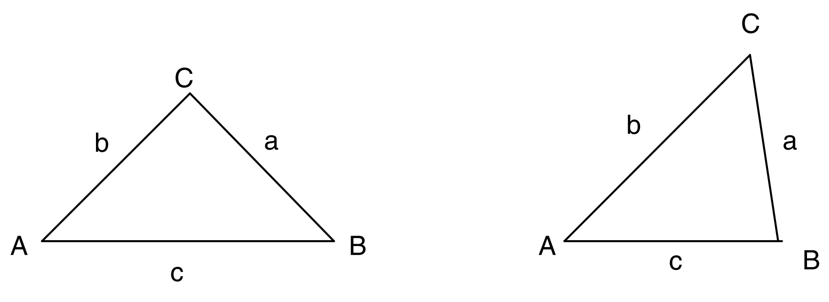
Por el teorema del seno vale. $b= a.senB/senA = 803.29$ m

¡HEMOS OBTENIDO OTROS RESULTADOS!

La calculadora nos tendió una trampa, en realidad no fue la calculadora, fuimos nosotros que sistematizamos el procedimiento y NO PENSAMOS.

Notemos que al calcular el ángulo C, hemos elegido, a través de la calculadora el valor 69.86°, pero también podría haber sido 110.14°. Recordemos que al calcular el argumento de una función trigonométrica, hay más de un valor que la cumple.

En este caso se puede ilustrar dibujando las dos posibilidades que se pueden presentar, según la figura siguiente:



d) a = 5 , b = 7 , c = 10

A partir del teorema del coseno hacemos:

$$cosA = (b^2+c^2 - a^2) / (2bc) \Rightarrow A = 27.66°$$

A partir del teorema del seno: $\text{sen}C = c.\text{sen}A / a \Rightarrow C = 68.19°$

SI hacemos ahora $B = 180 – A – C = 84.15°$

Notemos que no se cumple que $C > B > A$, como ocurre con los lados.

Además si hacemos, usando el teorema del seno que:

$\text{sen}B = b.\text{sen}A/a \Rightarrow B = 40.54°$ (si cumpliría que $C > B > A$) , pero no cumple que

$A + B + C = 180°$.

El error ocurre al calcular el ángulo C, ya que si aplicamos el teorema del coseno

$\cos C = (a^2+b^2 - c^2) / (2ab) \Rightarrow C = 111.8°$

obtenemos el valor correcto.

La dificultad se presenta que al calcular el ángulo a través del teorema del seno, la calculadora nos devuelve una ángulo que está en el primer cuadrante, es decir, menor a 90°; y no hace consideraciones de si el ángulo es mayor a 90°. En cambio al usar el teorema del coseno, esta dificultad no se presenta ya que el ángulo que nos devuelve la calculadora será un ángulo menor a 180°, es decir que se encuentra en primer cuadrante o en el segundo.

Ejercicios

1. Verificar las identidades siguientes:

a) $1+\text{sen}A.\text{tg}A = \dfrac{\text{sen}A + \text{cotg}A}{\text{cotg}A}$

b) $\text{tg}A + \text{cotg}A = \dfrac{1}{\text{sen}A.\cos A}$

c) $\dfrac{(1+\cos A).(1- \cos A)}{\cos A} = \sec A - \cos A$

d) $\dfrac{1+\text{tg}A}{1- \text{tg}A} = -\dfrac{1+\text{cotg}A}{1- \text{cotg}A}$

e) $\text{sen}^4 A - \text{sen}^2 A = \cos^4 A - \cos^2 A$

f) $\sec^4 A - \text{tg}^4 A = \sec^2 A + \text{tg}^2 A$

g) $\dfrac{\text{sen}A + \cos A}{\text{sen}A - \cos A} = \dfrac{1+\text{tg}A}{\text{tg}A - 1}$

h) $\dfrac{1+2\text{sen}A.\cos A}{\text{sen}^2 A - \cos^2 A} = \dfrac{(\text{sen}A + \cos A)^2}{1-2\cos^2 A}$

i) $\dfrac{\sec A + \text{tg}A}{\sec A - \text{tg}A} = \dfrac{1}{(\sec A - \text{tg}A)^2}$

j) $\dfrac{1+\text{sen}A}{1- \text{sen}A} = \dfrac{\text{cosec}A + 1}{\text{cosec}A - 1}$

k) $\dfrac{\text{tg}A - 1}{\text{tg}A + 1} = \dfrac{\sec^2 A - 2}{\sec^2 A + 2\text{tg}A}$

l) $\dfrac{1+\text{sen}A.\cos A}{\cos^2 A} = \sec^2 A + \text{tg}A$

Resolver los triángulos siguientes:

a) $A = 42.62°$ $B = 58.9°$ $c= 24.64$ m

b) $A = 98.75°$ $B = 12.56°$ $a = 105$ m

c) a = 12 m b = 18 m c = 25 m

d) a = 3.5 m b = 4 m c= 3 m

e) A = 58.74° b = 2.5 m c= 2 m

f) A = 22.62° a = 805 m b = 365 m

g) B = 28.33° c= 65.42 m b = 58 m

h) A = 90° C = 10° c = 10 m

Unidad IV
Cálculo trigonométrico

4.1. Ángulos equivalentes

Decimos que dos ángulos, α y β, son equivalentes, cuando se diferencian en k.360° (ó $2k\pi$ radianes), siendo k un número entero (...-3,-2,-1,0,1,2,3,....)

$$\beta = \alpha + 2k\pi \quad \text{(ángulos expresados en radianes)}$$

$$\beta = \alpha + k.360 \quad \text{(ángulo expresado en grados)}$$

Debido a que la función seno, el coseno, la secante, y la cosecante, son periódicas de período 360° (ó 2π radianes), y la tangente y cotangente son periódicas de período de 180° (ó π radianes), las funciones trigonométricas de ángulos equivalentes son iguales.

$$\text{sen}\beta = \text{sen}\alpha$$

$$\cos\beta = \cos\alpha$$

$$\text{tg}\beta = \text{tg}\alpha$$

$$\text{cotg}\beta = \text{cotg}\alpha$$

$$\sec\beta = \sec\alpha$$

$$\text{cosec}\beta = \text{cosec}\alpha$$

Ejemplos

1 Reducir a un ángulo equivalente

a) sen 390°

Podemos observar que 390° = 30° + 360° , por lo tanto:

$$\text{sen } 390° = \text{sen } 30°$$

b) cos 765°

Podemos observar que 765° = 45° + 2.(360°) , por lo tanto:

$$\cos 765° = \cos 45°$$

c) tg(-300°)

Podemos observar que $-300° = 60° - 360°$, por lo tanto:

$$tg(-300°) = tg\ 60°$$

d) sec(5π)

Podemos observar que $5\pi = \pi + 2.(2\pi)$, por lo tanto:

$$sec(5\pi) = sec(\pi)$$

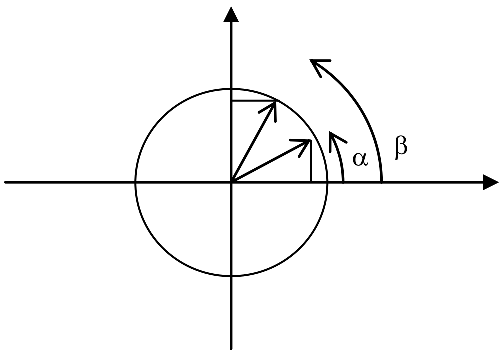
4.2. Ángulos complementarios

Decimos que dos ángulos, α y β, son complementarios, cuando su suma es 90° (ó $\pi/2$ radianes):

$$\beta + \alpha = \pi/2 \text{ (ángulos expresados en radianes)}$$

$$\beta + \alpha = 90° \text{ (ángulo expresado en grados)}$$

A partir del círculo trigonométrico, identificando a los ángulos α y β, para α que pertenece al primer cuadrante:



Se observan dos triángulos rectángulos iguales, a partir de ellos y por medio de las definiciones del seno y del coseno, se verifica:

$$\text{sen}\ \alpha = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \text{sen}\ \beta$$

$$\text{tg}\ \alpha = \text{cotg}\ \beta$$

$$\text{cotg}\ \alpha = \text{tg}\ \beta$$

$$\sec\alpha = \text{cosec}\ \beta$$

$$\text{cosec}\ \alpha = \sec\beta$$

Estos resultados estaban implícitos al tratar las funciones trigonométricas partiendo del triángulo rectángulo, ya que sus ángulos interiores son complementarios (recordemos que el ángulo recto vale 90° o $\pi/2$ radianes).

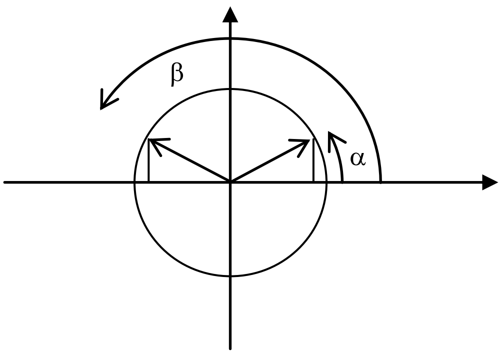
4.3 Ángulos suplementarios

Decimos que dos ángulos, α y β, son suplementarios, cuando su suma es 180° (ó π radianes):

$\beta + \alpha = \pi$ (ángulos expresados en radianes)

$\beta + \alpha = 180°$ (ángulo expresado en grados)

A partir del círculo trigonométrico, identificando a los ángulos α y β, para α que pertenece al primer cuadrante:



Se observan dos triángulos rectángulos iguales, a partir de ellos y por medio de las definiciones del seno y del coseno, se verifica:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta$$

$$\text{cotg } \alpha = -\text{cotg } \beta$$

$$\sec \alpha = -\sec \beta$$

$$\text{cosec } \alpha = \text{cosec } \beta$$

Ejemplo

2. Resolver utilizando la propiedad de ángulos suplementarios

a) sen 120°

Podemos observar que 120° = 180° - 60°, por lo tanto:

$$\text{sen } 120° = \text{sen } 60°$$

b) sen $5\pi/6$

Podemos observar que $5\pi/6 = \pi - \pi/6$, por lo tanto:

$$\text{sen } 5\pi/6 = \text{sen } \pi/6$$

c) cos 135°

Podemos observar que 135° = 180° - 45°, por lo tanto:

$$\cos 135° = -\cos 45°$$

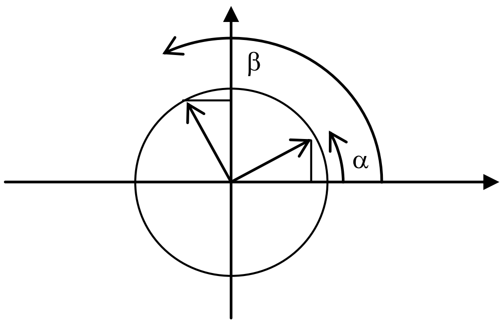
4.4. Ángulos anticomplementarios

Decimos que dos ángulos, α y β, son anticomplementarios, cuando su diferencia es 90° (ó $\pi/2$ radianes):

$\beta - \alpha = \pi/2$ (ángulos expresados en radianes)

$\beta - \alpha = 90°$ (ángulo expresado en grados)

A partir del círculo trigonométrico, identificando a los ángulos α y β, para α que pertenece al primer cuadrante:



Se observan dos triángulos rectángulos iguales, a partir de ellos y por medio de las definiciones del seno y del coseno, se verifica:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\cos \beta$$
$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta$$
$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{cotg} \beta$$
$$\operatorname{cotg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$$
$$\sec \alpha = \operatorname{cosec} \beta$$
$$\operatorname{cosec} \alpha = -\sec \beta$$

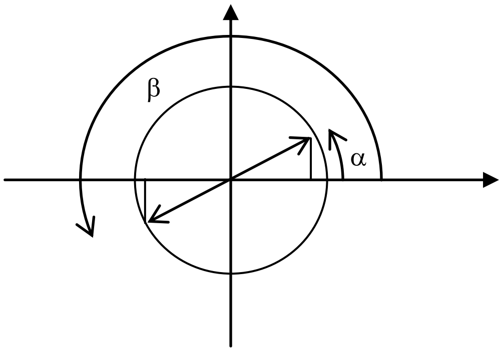
4.5. Ángulos antisuplementarios

Decimos que dos ángulos, α y β, son antisuplementarios, cuando su diferencia es 180° (ó π radianes):

$\beta - \alpha = \pi$ (ángulos expresados en radianes)

$\beta - \alpha = 180°$ (ángulo expresado en grados)

A partir del círculo trigonométrico, identificando a los ángulos α y β, para α que pertenece al primer cuadrante:



Se observan dos triángulos rectángulos iguales, a partir de ellos y por medio de las definiciones del seno y del coseno, se verifica:

$$\text{sen}\ \alpha = -\text{sen}\ \beta$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ \beta$$

$$\text{cotg}\ \alpha = \text{co tg}\ \beta$$

$$\sec \alpha = -\sec \beta$$

$$\text{cosec}\ \alpha = -\text{cosec}\ \beta$$

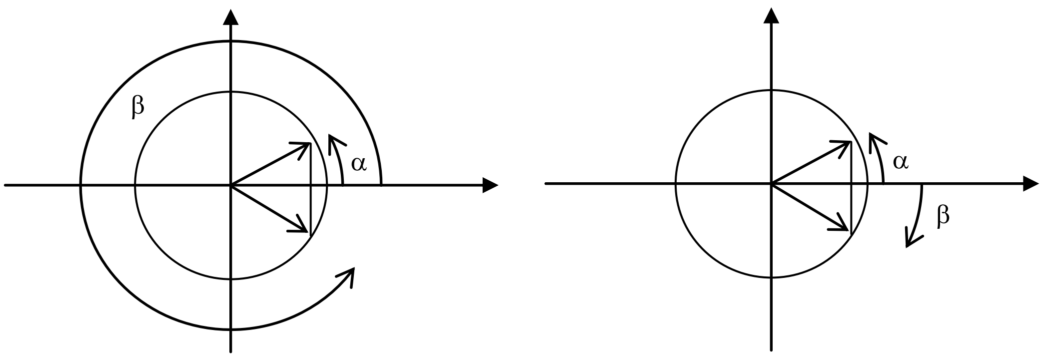
4.6. Ángulos opuestos

Decimos que dos ángulos, α y β, son opuestos, cuando su suma es k.(360°) (ó 2.k.π radianes), siendo k un número entero (...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...):

$$\beta + \alpha = 2.k.\pi \quad \text{(ángulos expresados en radianes)}$$

$$\beta + \alpha = k.(360°) \quad \text{(ángulo expresado en grados)}$$

A partir del círculo trigonométrico, identificando a los ángulos α y β, para α que pertenece al primer cuadrante:



Se observan dos triángulos rectángulos iguales, a partir de ellos y por medio de las definiciones del seno y del coseno, se verifica:

$$\text{sen}\ \alpha = -\text{sen}\ \beta$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$\text{tg}\ \alpha = -\text{tg}\ \beta$$

$$\text{cotg}\ \alpha = -\text{cotg}\ \beta$$

$$\sec \alpha = \sec \beta$$

$$\text{cosec}\ \alpha = -\text{cosec}\ \beta$$

4.7. Reducción al primer cuadrante

Para el cálculo de una función trigonométrica (seno, coseno, tangente, cotangente, secante o cosecante), de un ángulo que no esté comprendido entre 0 y 90° (ó entre 0 y $\pi/2$), puede ser calculada utilizando un ángulo que se encuentre en el primer cuadrante (entre 0 y 90° ó $\pi/2$).

La dificultad se puede presentar con respecto al signo y a la función trigonométrica a usar, situación que fácilmente se supera utilizando el círculo trigonométrico.

Ejemplos

3. Reducir al primer cuadrante para el cálculo de las funciones trigonométricas:

a) $\beta = 840°$

Notemos que $840/360 = 2.333$, por lo tanto $840° = 2.(360°) + 120°$

Luego es equivalente en hablar de un ángulo de 120°, que se encuentra en el segundo cuadrante, que es suplementario con un ángulo de 60°, entonces vale:

$$\text{sen}\ 840° = \text{sen}\ 60°$$

$$\cos 840° = -\cos 60°$$

$$\text{tg}\ 840° = -\text{tg}\ 60°$$

$$\text{cotg}\ 840° = -\text{cotg}\ 60°$$

$$\sec 840° = -\ \sec 60°$$

$$\text{cosec}\ 840° = \text{cosec}\ 60$$

Estas relaciones pueden ser verificadas con la calculadora.

b) $\beta = 31\pi/16$

Notemos que $31\pi/16 - 2\pi = -\pi/16$. Luego es equivalente de hablar de un ángulo, expresado en radianes, de $-\pi/16$, que es un ángulo que está en el cuarto cuadrante, y que es opuesto al $\pi/16$:

$$\text{sen}\ 31\pi/16 = -\text{sen}\ \pi/16$$

$$\cos 31\pi/16 = \cos \pi/16$$

$$\text{tg } 31\pi/16 = -\text{tg } \pi/16$$

$$\text{cotg } 31\pi/16 = -\text{cotg } \pi/16$$

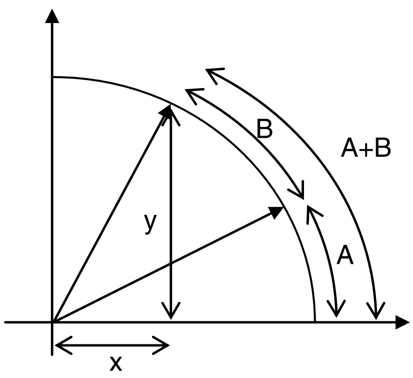
$$\sec 31\pi/16 = \sec \pi/16$$

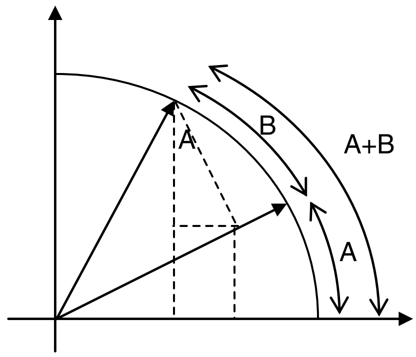
$$\text{cosec } 31\pi/16 = -\text{cosec } \pi/16$$

4.8. Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

Sea A y B dos ángulos, las funciones trigonométricas de A + B, y A – B, se pueden expresar como una relación de las funciones trigonométricas de los ángulos A y B.

Para desarrollar esto usaremos la verificación geométrica a partir del círculo unitario:





$x = \cos (A+B)$

$y = \text{sen } (A+B)$

A partir de la circunferencia trigonométrica, en el cálculo del seno haremos la suma de dos magnitudes, para el coseno la resta de dos magnitudes, quedando:

$$\text{sen}(A+B) = \text{sen } A \, . \cos B + \cos A \, . \text{ sen } B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \, . \cos B - \text{sen } A \, . \text{ sen } B$$

Si tomamos en lugar de B al ángulo -B, obtenemos:

$$\text{sen}(A - B) = \text{sen } A \, . \cos B - \cos A \, . \text{ sen } B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \, . \cos B + \text{sen } A \, . \text{ sen } B$$

Ahora para una expresión de la tangente, se hace el cociente del seno por el coseno:

$$\text{tg}(A+B) = \frac{\text{tg}A + \text{tg}B}{1 - \text{tg}A.\text{tg}B} \qquad \text{tg}(A+B) = \frac{\text{tg}A - \text{tg}B}{1 + \text{tg}A.\text{tg}B}$$

Si en las fórmulas de la suma de dos ángulos se hace A = B, se obtienen las funciones trigonométricas del duplo de un ángulo:

$$sen(2A) = 2.senA.cosA$$

$$cos(2A) = cos^2A - sen^2A$$

$$tg(2A) = 2.tgA / (1\text{-}tg^2A)$$

Podemos recurrir a cualquier libro de trigonometría y encontraremos una infinidad de relaciones, todas ellas son obtenidas haciendo una serie de operaciones algebraicas y utilizando las relaciones que hemos visto.

Ejemplo

4. Calcular el senA, si tg(2A) = 2

Pretendemos obtener el valor del senA sin necesidad de obtener el ángulo A, para ello usaremos las relaciones vistas y generaremos otras.

La estrategia que usaremos será la de considerar tg(2A) = sen2A/cos2A

$$tg^2 2A = (1\text{-}cos^2 2A)/cos^2 2A$$

$$cos^2 2A = 1/(1+tg^2 2A)$$

$$cos2A = \pm(1/5)^1/^2$$

Hemos obtenidos dos posibles valores, esto es correcto, ya que 2A puede ser un ángulo que cae en el primer cuadrante o en el tercero, en donde el coseno es positivo y negativo respectivamente.

A partir de que $cos2A = cos^2A - sen^2A$, y reemplazando $cos^2A = 1\text{-}sen^2A$, queda:

$$cos2A = 1\text{-}2sen^2A$$

$$sen^2A = (1\text{-}cos2A)/2$$

Al considerar los dos valores que nos dio en el cos2A, el sen^2A vale 0.2764, ó 0.7236.

Los valores posibles del senA son cuatro:

$$\pm(0.5257)$$

$$\pm(0.8506)$$

De estos cuatro valores posibles sólo nos quedaremos con los valores positivos, estos es así, ya que si 2A es un ángulo que está en el 1° ó 3° cuadrante, el calor de A es un ángulo que debe estar en el 1° ó 2° cuadrante, lugares en donde el seno es positivo.

La razón por la cual nos da como posibles los valores negativos, provienen del hecho que se uso el cos2A para calcular el seno, ya que para valores negativos del senA , es decir cuando A está en el 3° ó 4° cuadrante, el cos2A puede ser positivo o negativo, entonces, es de aquí la posibilidad del doble signo para el senA.

Consideremos lo realizado calculando el valor de A:

$tg2A = 2 \Rightarrow A = 31.717°$, ó $\Rightarrow A = 121.717°$

sen 31.717° = 0.5257 , sen 121.717° = 0.8506

4.9. Funciones trigonométricas inversas

Para terminar estas notas vale la oportunidad de hacer algunas consideraciones referidas al término de funciones, que serán de un análisis más profundo en el primer año de la carrera de ingeniería.

Cuando nos referimos a una función, se debe considerar dos conjuntos de puntos, el primero, llamado conjunto de salida o Dominio de Definición de la función, y el segundo, llamado conjunto de llegada, Imagen o Rango de la función.

Una de las características que debe guardarse es que para un valor del Dominio le corresponde sólo un valor de la imagen. Es así que viendo las gráficas de la funciones trigonométricas, está bien haberlas definido como funciones.

Ahora bien, si intercambiamos los conjuntos es decir, tomamos como conjunto de salida al de la Imagen y como conjunto de llegada al del Dominio, no todas las relaciones que se establecen entre los conjuntos obedecen a una función.

Si por ejemplo vemos la función seno, al intercambiar los conjuntos podemos observar que para un valor del nuevo conjunto de salida tenemos más de un valor en el nuevo conjunto de llegada. Por lo tanto no es una función en este caso.

Estamos queriendo definir a la función inversa, pero lo deberíamos hacer sobre un conjunto restringido para que cumpla las condiciones de una función.

Si queremos saber el valor para el cual senA = 0.5, haremos:

$$A = \text{arcsen } 0.5 = \text{sen}^{-1} 0.5 = 30°$$

también podría haber sido 150°, pero restringimos a un valor en el 1° y 4° cuadrante.

Notemos que usamos arcsen como la función inversa del seno, que también lo podemos poner como sen^{-1}, ¡PERO CUIDADO!, no significa el recíproco del seno, es decir:

$$\text{sen}^{-1}A \neq 1/\text{sen}A$$

Al usar la calculadora hay que tener cuidado en colocar el MODO en que la misma obtendrá los ángulos (grados, radianes, gradiente), y la misma devolverá en el seno valores en 1° y 4° cuadrante, en el coseno valores en 1° y 2° cuadrante, y en la tangente valores en el 1° y 4° cuadrante al igual que en el seno.

Ejercicios

1 Reducir al primer cuadrante los senos, cosenos y tangentes de:

a) 110° b) 205° c) 310° d) 840° e) $-\pi/4$ f) $5\pi/4$

g) 0.6π h) 5π i) $31\pi/16$ j) $-453°$ k) 22.5π l) -11.5π

2 Verificar las identidades siguientes.

a) $$\frac{\cos(90°+x).\cos(180°-x)}{\operatorname{sen}(90°-x).\operatorname{sen}(x-360°)}+\frac{\operatorname{sen}(180°-x).\cos(180°+x)}{\operatorname{sen}(90°+x).\cos(270°+x)}=0$$

b) $$\frac{\operatorname{tg}(180°+x).\operatorname{tg}(90°+x)}{\operatorname{tg}(270°-x)}+\frac{\operatorname{cotg}(90°-x).\operatorname{cotg}(180°-x)}{\operatorname{tg}(270°+x)}=0$$

c) $$\frac{\operatorname{cosec}(360°+x).\sec(180°-x)}{\operatorname{cosec}(90°-x).\sec(90°+x)}-\frac{\sec(360°-x).\operatorname{cosec}(180°-x)}{\sec(270°+x).\operatorname{cosec}(270°-x)}=2$$

d) $$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\sec(90°-a)}+\frac{\cos(a)}{\operatorname{cosec}(90°-a)}+\frac{\operatorname{tg}(a)}{\operatorname{cotg}(180°+a)}=\sec^2 a$$

e) $$\frac{\sec(a).\operatorname{tg}(180°+a)}{\sec(90°+a)}+\frac{\sec(a)}{\operatorname{cosec}(90°+a)}+\sec^2(a)=2$$

f) $\sec(a) - \operatorname{sen}(90°-a) = \operatorname{tg}(a).\ \cos(90°-a)$

g) $\cos^4(a) + \cos^2(a).\cos^2(\pi/2 - a) + \cos^2(\pi/2 - a) = 1$

h) $\operatorname{sen}(\pi - a).\cos(\pi/2 + a) + \operatorname{sen}(\pi/2 + a).\ \cos(\pi - a) = -1$

3 Utilizando fórmulas calcular el sen2A, cos2A y tg2A, sabiendo que senA = -0.5

4 Sabiendo que tgA = -0.5, tgB = 2/3 , usando fórmulas obtener tg2(A+B).

5 Sabiendo que tgA=6 , tgB= 1/3, usando fórmulas obtener tg(A-2B).

6 Calcular el valor de x menor a 90° que cumple

a) $\operatorname{tg}(x+\pi/4) - \operatorname{tg}(x-\pi/4) = -4$

b) $\operatorname{sen}(2\pi-x).\operatorname{sen}(2\pi+x) = -3/4$

7 Dado senA = 0.6, calcular tgA

8 Dado senA = -0.7, calcular cotgA

9 Dado secA = 3.5, calcular tgA y cosA.

10 Dado cos 2A = 0.56, calcular tgA

11 Demostrar la siguientes igualdades:

a) $\operatorname{arcsen}(15/17) - \operatorname{arcsen}(3/5) = \operatorname{arcsen}(36/85)$

b) $\arcsin(a) + \arccos(a) = \pi/2$

c) $$\frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}=\operatorname{tg}(a)$$

d) $$\frac{\operatorname{sen}(a)+\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(a)-\operatorname{sen}(b)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}$$

e) $$\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\operatorname{sen}(a)+\operatorname{sen}(b)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

f) $\cos(a) + \cos(b) + \cos(a+b) = 4.\cos((a+b)/2).\ \cos(a/2)\ .\ \cos(b/2) - 1$