Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
Fachbereich Medien
Faculty of Media

Potenz und Wurzel

Potenz

Potenz und Wurzel - Potenz

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Definition 1.22 (Potenz)

Für eine natürliche Zahl n bezeichnet man die n-te **Potenz** einer reellen Zahl x mit

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Negative Potenzen entsprechen dem Kehrwert $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Üblicherweise gilt die Festlegung $x^0 = 1$ für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$.

Koch 2019, S. 36

Grundwissen

Potenz und Wurzel - Potenz

Beispiele:

Bildet man den Kehrwert einer Potenz und ändert das Vorzeichen, so entspricht dies der ursprünglichen Potenz.

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$e^{-t} = \frac{1}{e^t}$$

$$a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$$

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Beispiele:

Das gleiche gilt auch für „Pakete“ und nicht nur für einzelne Variablen oder Zahlen

$$\square^{-5} = \frac{1}{\square^5}$$

$$(x+2)^{-5} = \frac{1}{(x+2)^5}$$

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Beispiele:

„Alles zusammen“

$$\frac{d^{-2} \cdot (x^2 + sin(x))^{-5}}{x^{-3} \cdot b^{-1}} = \frac{x^3 \cdot b}{d^2 \cdot (x^2 + sin(x))^5}$$

Den Kehrwert eines Elements in einem Bruch zu bilden, entspricht dem Tausch vom Zähler in den Nenner oder vom Nenner in den Zähler. Passen wir dann noch das Vorzeichen dieses Elements an, ist der gesamte Bruch gleich geblieben.

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Alles hoch Null ist Eins:

$$e^0 = 1$$

$$a^0 = 1$$

$$(x+2)^0 = 1$$

$$\left(\frac{d^{-2}}{x^{-3} \cdot b^{-1}}\right)^0 = 1$$

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Potenz und Wurzel

Potenzgesetze

Grundwissen

Potenz und Wurzel - Potenzgesetze

Satz 1.4 (Potenzgesetze)

Bei der Multiplikation oder Division von Potenzen mit gemeinsamer Basis kann man die Exponenten zusammenfassen:

- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

Bei der Multiplikation oder Division von Potenzen mit gemeinsamem Exponenten kann man die Basen zusammenfassen:

- $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$
- $\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$

Beim Potenzieren multiplizieren sich die Hochzahlen:
- $(x^a)^b = x^{a \cdot b} = (x^b)^a$

Die Potenzgesetze gelten für beliebige Hochzahlen a und b und reelle Zahlen x und y.

Koch 2019, S. 37

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Beispiele:

$$x^4 \cdot x^5 = x^{4+5} = x^9$$

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

$$a^3 \cdot b^3 = (a \cdot b)^3$$

$$\frac{5^4}{a^4} = \left(\frac{5}{a}\right)^4$$

$$\left(x^2\right)^3 = x^{2\cdot 3} = x^6$$

▾ Potenz und Wurzel
Potenz
Potenzgesetze
Wurzel
Binomische Formeln
Binomischer Satz
▸ Trigonometrie
▸ Logarithmus
▸ Gleichungen lösen

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Beispiele – mit negativen Exponenten:

$$x^4 \cdot x^{-5} = x^{4+(-5)} = x^{-1}$$

$$\frac{a^{-5}}{a^3} = a^{-5-3} = a^{-8}$$

$$a^{-3} \cdot b^{-3} = (a \cdot b)^{-3}$$

$$\frac{5^{-4}}{a^{-4}} = \left(\frac{5}{a}\right)^{-4}$$

$$\left(x^{-2}\right)^3 = x^{(-2)\cdot 3} = x^{-6}$$

Beispiele – mit „Paketen“:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$\square^4 \cdot \square^5 = \square^{4+5} = \square^9$$

$$(x+2)^4 \cdot (x+2)^5 = (x+2)^{4+5} = (x+2)^9$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$\frac{\square^5}{\square^3} = \square^{5-3} = \square^2$$

$$\frac{(sin(x)+5x)^5}{(sin(x)+5x)^3} = (sin(x)+5x)^{5-3} = (sin(x)+5x)^2$$

Potenz und Wurzel

Wurzel

Definition 1.23 (Wurzel)

Für eine natürliche Zahl n bezeichnet man die n-te **Wurzel** einer reellen Zahl x mit $\sqrt[n]{x}$ oder $x^{\frac{1}{n}}$. Zwischen Potenz und Wurzel gilt der Zusammenhang

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \Longrightarrow \quad y^n = x.$$

Für gerade Zahlen n darf die Zahl unter der Wurzel nicht negativ sein.

Koch 2019, S. 38

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Beispiele :

$$\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$$

Gilt auch für „Pakete“

und nicht nur für einzelne

Variablen oder Zahlen

$$\sqrt{\square} = \square^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{b + 3a} = (b + 3a)^{\frac{1}{2}}$$

Potenz und Wurzel - Wurzel

Warum darf bei einer geraden Zahl n das Vorzeichen in unter der Wurzel nicht negativ sein?

Haben wir ein negatives Vorzeichen unter der Wurzel, so muss im Umkehrschluss das Ergebnis der Wurzel auch eine negative Zahl sein.
Denn nur dann kann bei einer Potenz auch ein negatives Vorzeichen herauskommen.

Beispiel:

$$(-5)^3 = -125$$

$$\sqrt[3]{-125} = -5$$

Dies kommt aber nur vor, wenn die Potenz ungerade ist, da bei einer geraden Anzahl an negativen Vorzeichen als Ergebnis immer ein positives Vorzeichen entsteht.

Beispiel:

$$(-5)^2 = 25$$

$$(-5)^4 = 625$$

$$(-5)^6 = 15625$$

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
Fachbereich Medien
Faculty of Media

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Beispiele – Kombinationen versch. Regeln:

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

$$\sqrt[4]{a^7} = (a^7)^{\frac{1}{4}} = a^{7 \cdot \frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{4}}$$

$$\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{x}} = \left(\frac{27}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{27^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(x-2)^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(x-2)^3}}$$

▼ Potenz und Wurzel

Potenz

Potenzgesetze

Wurzel

Binomische Formeln

Binomischer Satz

▸ Trigonometrie

▸ Logarithmus

▸ Gleichungen lösen

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
Fachbereich Medien
Faculty of Media

Potenz und Wurzel

Binomische Formeln

Grundwissen

Potenz und Wurzel – Binomische Formeln

Binomische Formeln

Für beliebige Zahlen a und b gelten die binomischen Formeln:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Koch 2019, S. 40

Potenz und Wurzel – Binomische Formeln

HSD Hochschule Düsseldorf University of Applied Sciences
Fachbereich Medien Faculty of Media

Beispiele:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(4+p)^2 = 4^2 + 2\cdot 4\cdot p + p^2 = 16 + 8p + p^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(n-12)^2 = n^2 - 24n + 144$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(x+3)\cdot(x-3) = x^2 - 9$

Beispiele:

Was man sich eventuell fragt, aber selten erläutert wird:

$$(-a-b)^2 = ((-a)+(-b))^2 = (-a)^2 + 2\cdot(-a)\cdot(-b) + (-b)^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$(-a+b)^2 = (-a)^2 + 2\cdot(-a)\cdot b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$= (a-b)^2$$

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Beispiel – mit „Paket“:

$$(x - \Box)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \Box + \Box^2 \qquad \text{mit } \Box = \sqrt{5 + d^3}$$

$$(x - \sqrt{5 + d^3})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{5 + d^3} + \sqrt{5 + d^3}^2$$

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
Fachbereich Medien
Faculty of Media

Potenz und Wurzel

Binomischer Satz

Grundwissen

Potenz und Wurzel – Binomischer Satz

Definition 1.24 (Fakultät)
Die **Fakultät** einer natürlichen Zahl n ist das Produkt aus den Faktoren 1 bis n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Außerdem definiert man $0! = 1$.

Koch 2019, S. 38

Definition 1.25 (Binomialkoeffizient)
Der **Binomialkoeffizient** der beiden natürlichen Zahl $m \geq n$ ist definiert durch

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

Koch 2019, S. 39

Potenz und Wurzel – Binomischer Satz

Pascalsches Dreieck

Die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck ergeben sich jeweils aus der Summe der beiden darüber stehenden Koeffizienten:

$$\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Koch 2019, S. 39

Satz 1.5 (Binomischer Satz)

Für jede natürliche Hochzahl n und beliebige Zahlen a und b gilt die Formel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

Koch 2019, S. 40

Die Anwendung des Pascalsche Dreieck und der binomische Satzes wird auf den folgenden Folien weiter erläutert.

Grundwissen

Potenz und Wurzel – Binomischer Satz

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Das Pascalsche Dreieck baut sich wie folgt auf:

- man startet mit der Spitze und schreibt eine 1 auf
- die nachfolgenden Zeilen haben immer eine Zahl mehr, als die Vorherige.
- die äußersten Zahlen sind immer eine 1 sind
- somit besteht die zweite Zeile aus zwei Einsen
- Um in der dritten Zeile nun die mittlere Zahl zu berechnen schaut man sich die zwei diagonal darüberstehenden Zahlen an und addiert diese (1+1=2)
- Dieses Prinzip setzt sich in den weiteren Zeilen fort (1+2=3; 3+3=6)

Wenn man das Prinzip verstanden hat, kann man das sehr schnell ausrechnen und so die richtigen Werte für die benötigte Potenz herausfinden.

▾ Potenz und Wurzel
Potenz
Potenzgesetze
Wurzel
Binomische Formeln
Binomischer Satz
▸ Trigonometrie
▸ Logarithmus
▸ Gleichungen lösen

Grundwissen

Potenz und Wurzel – Binomischer Satz

Bei binomischen Formeln mit einem Exponenten größer als 2 kann man auf das Pascalsche Dreieck zurückgreifen, um die passenden Koeffizienten für den binomischen Satz zu finden. Zunächst betrachten wir erst exemplarisch $(a + b)^3$.

Der binomische Satz baut sich nun wie folgt auf:

Man startet mit dem Produkt aus a und b, wobei a den Exponenten der gerade betrachteten binomischen Formel erhält – in diesem Fall also 3 – und b den Exponenten 0 erhält. Nun werden weitere Potenzen aus Produkten von a und b aufsummiert, wobei der Exponent von a *runtergezählt* und der Exponent von b *hochgezählt* wird, bis a den Exponenten 0 und b den Exponenten 3 hat. Vor den Produkten lassen wir Platz für Koeffizienten.

$$(a+b)^3 = \square\, a^3b^0 + \square\, a^2b^1 + \square\, a^1b^2 + \square\, a^0b^3$$

Die Wahl der entsprechenden Koeffizienten sehen wir auf der nächsten Folie.

$$(a+b)^3 = \square\, a^3b^0 + \square\, a^2b^1 + \square\, a^1b^2 + \square\, a^0b^3$$

$(a + b)^0$:					1				
$(a + b)^1$:				1		1			
$(a + b)^2$:			1		2		1		
$(a + b)^3$:		1		3		3		1	
$(a + b)^4$:	1		4		6		4		1

$$(a+b)^3 = 1\, a^3b^0 + 3\, a^2b^1 + 3\, a^1b^2 + 1\, a^0b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + b^3$$

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

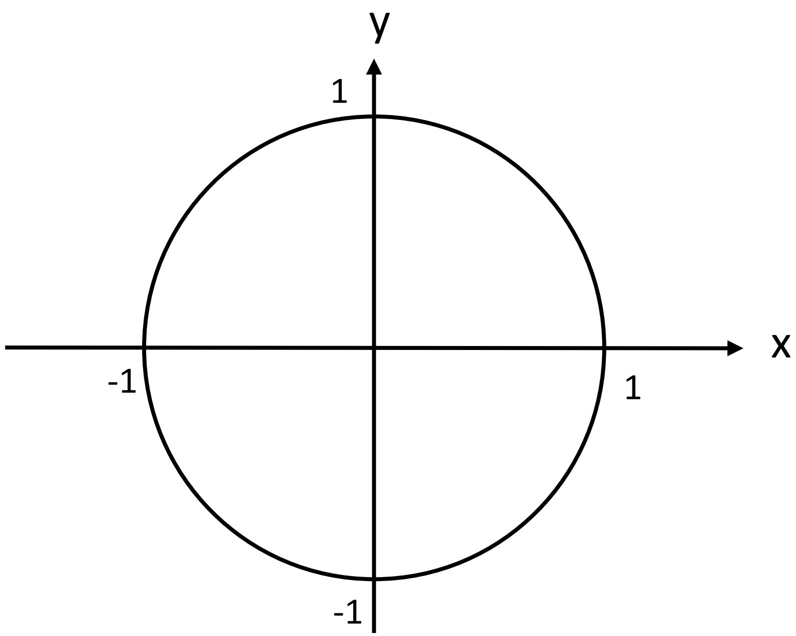
Fachbereich Medien
Faculty of Media

Trigonometrie

Einheitskreis

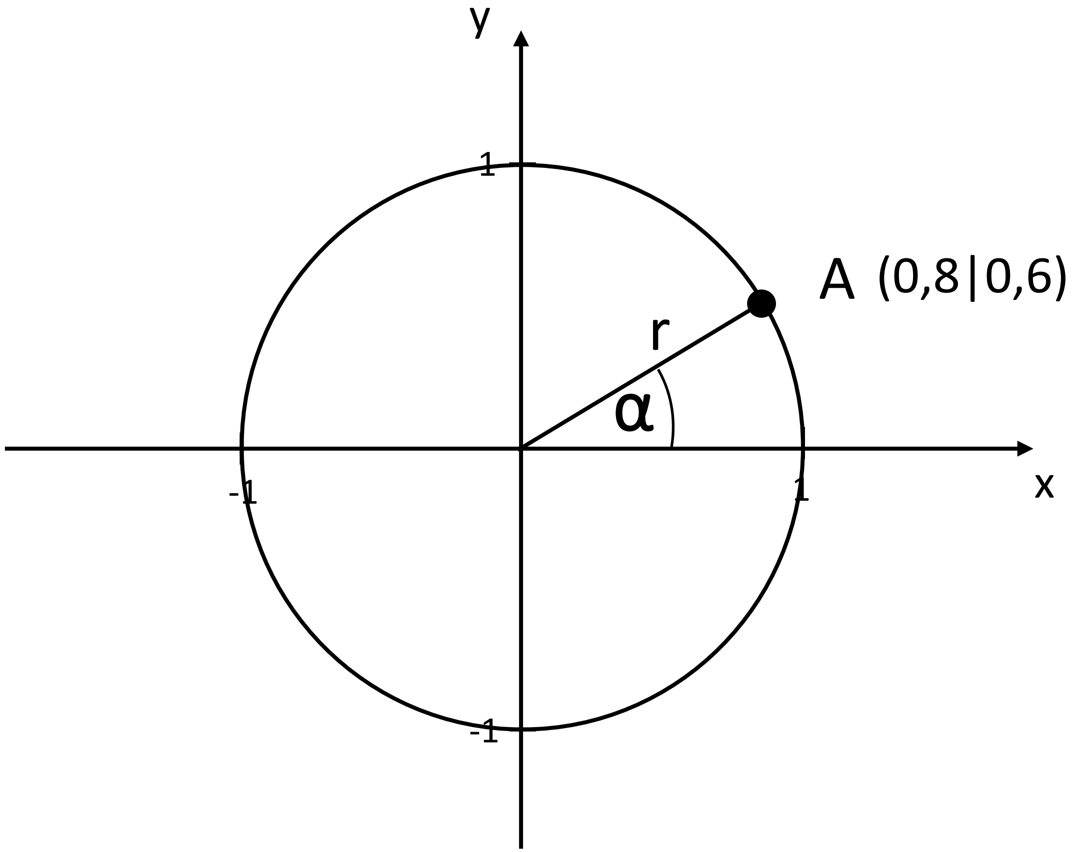
Grundwissen

Der Einheitskreis ist ein Kreis in einem 2D-Koordinatensystems. Der Kreismittelpunkt liegt im Ursprung und hat einen Radius von 1. Die positive Drehrichtung läuft gegen den Uhrzeigersinn. Dies erklärt auch, warum Winkel gegen den Uhrzeigersinn aufgespannt werden.



Grundwissen

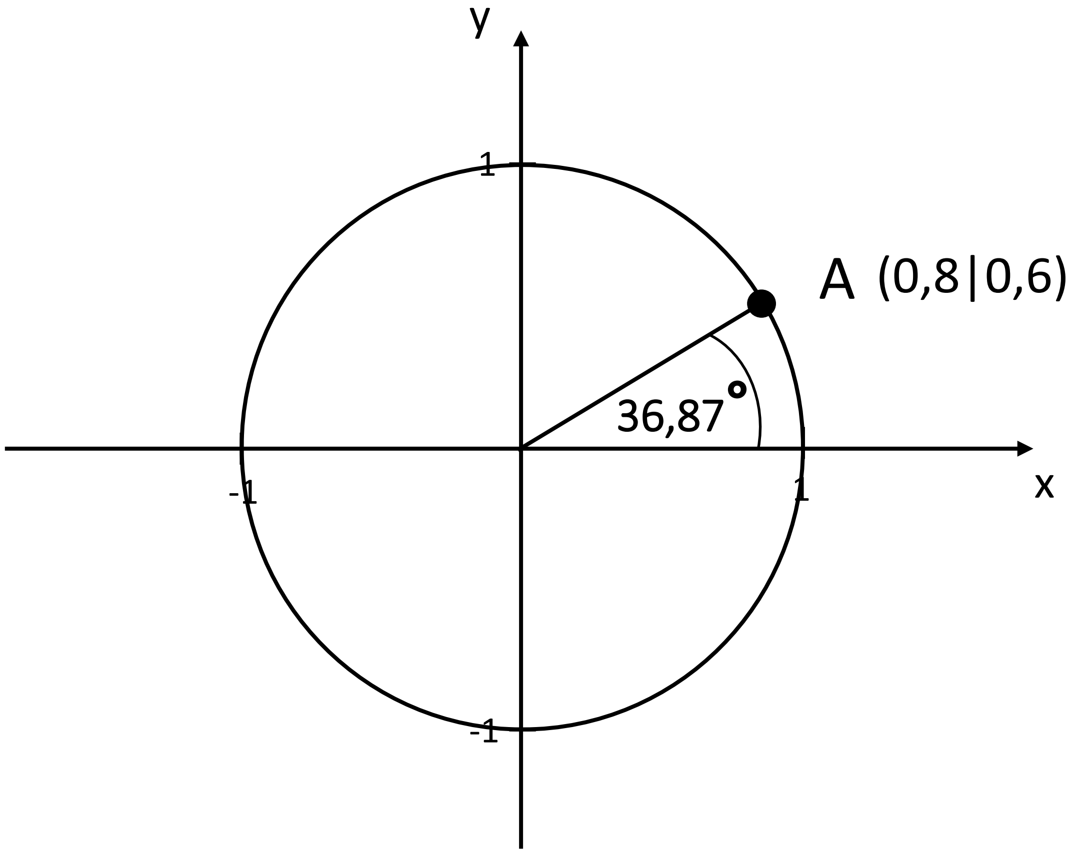
Trigonometrie – Einheitskreis



Wenn man nun den Punkt A mit dem Koordinatenursprung verbindet, kann man zwischen der x-Achse und dem Radius den Winkel α aufspannen.
Da im Koordinatensystem immer gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird, wird der Winkel α wie nebenstehend eingezeichnet.

Grundwissen

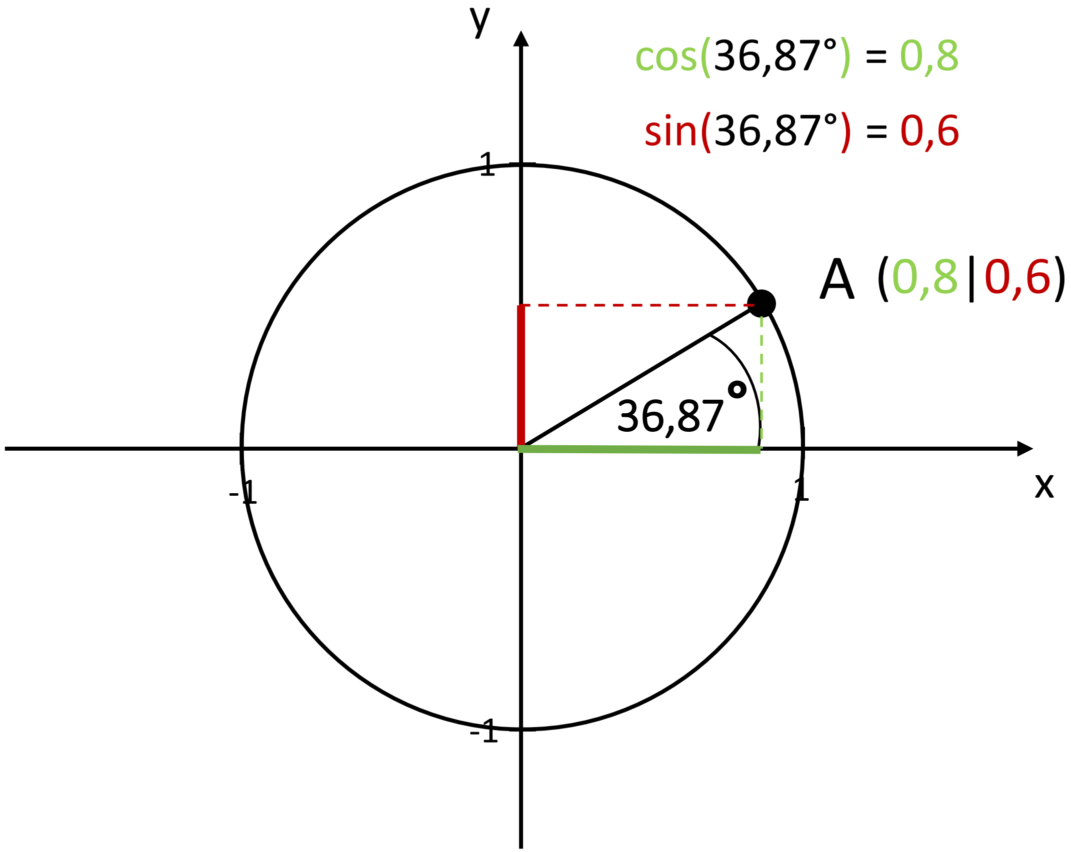
Trigonometrie – Einheitskreis



Um den Winkel α auszurechnen benötigt man nun die trigonomischen Formeln Sinus und Kosinus.

Grundwissen

Trigonometrie – Einheitskreis

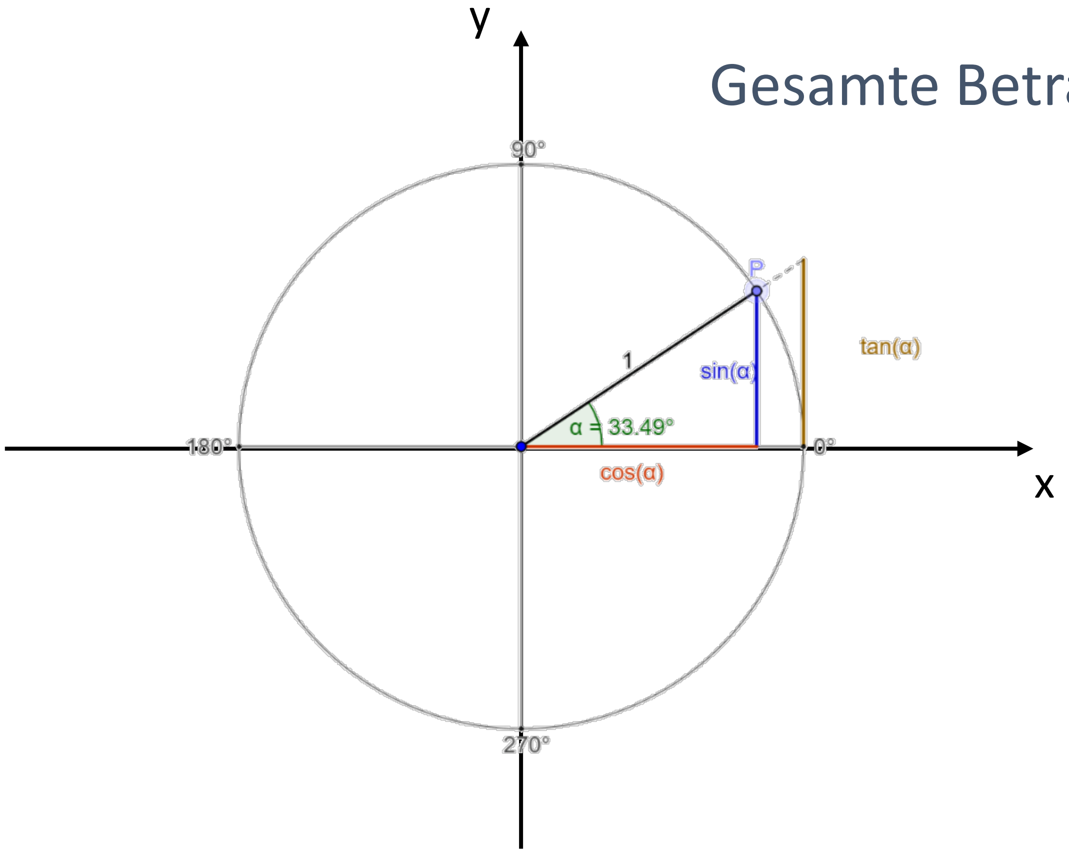


Man kann nun:

- den Kosinus benutzen, um die Projektion des Punktes A auf die x-Achse zu berechnen
- den Sinus benutzen, um die Projektion des Punktes A auf die y-Achse zu berechnen

Grundwissen

Trigonometrie – Einheitskreis



Gesamte Betrachtung:

Liste aller Extremwerte

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$0°$	0	1
$90°$	1	0
$180°$	0	-1
$270°$	-1	0

Das Bild ist ein interaktives Widget, welches man über den untenstehenden Link finden kann.

Geogebra: https://www.geogebra.org/m/ZJNGGKjP , Aufruf 30.05.2023

Trigonometrie

Winkel und Bogenmaß

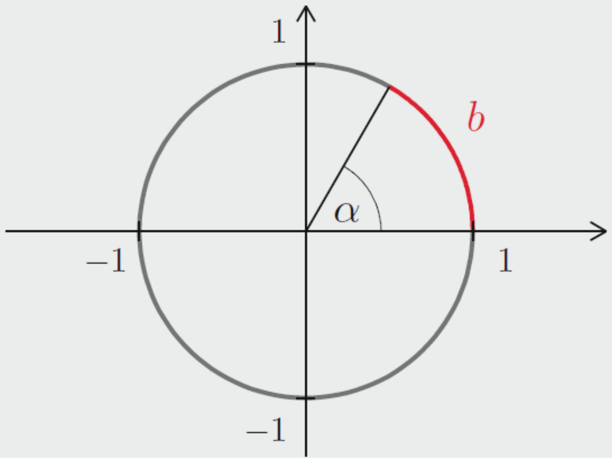
Grundwissen

Trigonometrie – Winkel und Bogenmaß

Das **Bogenmaß** b eines Winkels α im Gradmaß ist die Länge des Kreisbogens im Einheitskreis. Die Umrechnung zwischen dem Bogenmaß und dem Gradmaß erfolgt durch

$$b = \frac{2\pi}{360°}\,\alpha, \qquad \alpha = \frac{360°}{2\pi}\,b.$$

Insbesondere entspricht 2π dem Winkel $360°$.



Koch 2019, S. 42

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
b	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Koch 2019, S. 43

Definition 1.28 (Zahl π)

Die **Zahl** π entspricht der Länge eines Halbkreisbogens mit Radius 1.

Koch 2019, S. 42

▸ Potenz und Wurzel

▾ Trigonometrie

Einheitskreis

Winkel und Bogenmaß

Dreieck mit rechtem Winkel

Dreieck ohne rechten Winkel

▸ Logarithmus

▸ Gleichungen lösen

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Trigonometrie

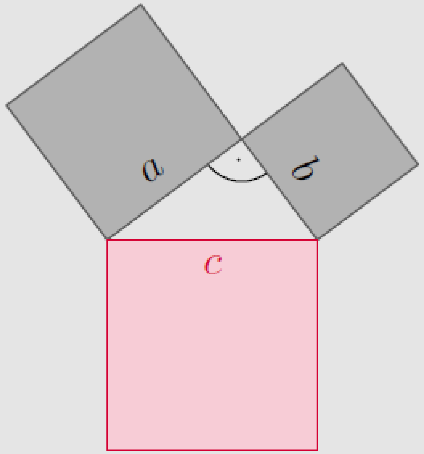
Dreieck mit rechtem Winkel

Grundwissen

Trigonometrie – Dreieck mit rechtem Winkel

Satz 1.6 (Satz des Pythagoras)
Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als **Hypotenuse** und die beiden anderen Seiten als **Katheten**. Zwischen der Länge der Hypotenuse c und den Längen der beiden Katheten a und b gilt die Formel

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Koch 2019, S. 40

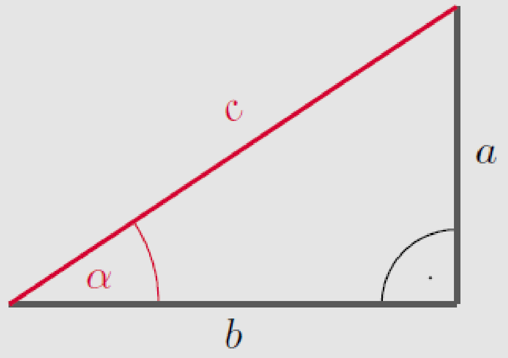
Grundwissen

Trigonometrie – Dreieck mit rechtem Winkel

Definition 1.26 (Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck)

Sinus und **Kosinus** eines Winkels α sind im rechtwinkligen Dreieck durch die Verhältnisse der Längen der drei Seiten Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse definiert:

- $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
- $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$



Definition 1.27 (Tangens und Kotangens im rechtwinkligen Dreieck)

Tangens und **Kotangens** eines Winkels α sind im rechtwinkligen Dreieck durch die Verhältnisse der Längen der Ankathete und der Gegenkathete definiert:

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$

Koch 2019, S. 41 & 42

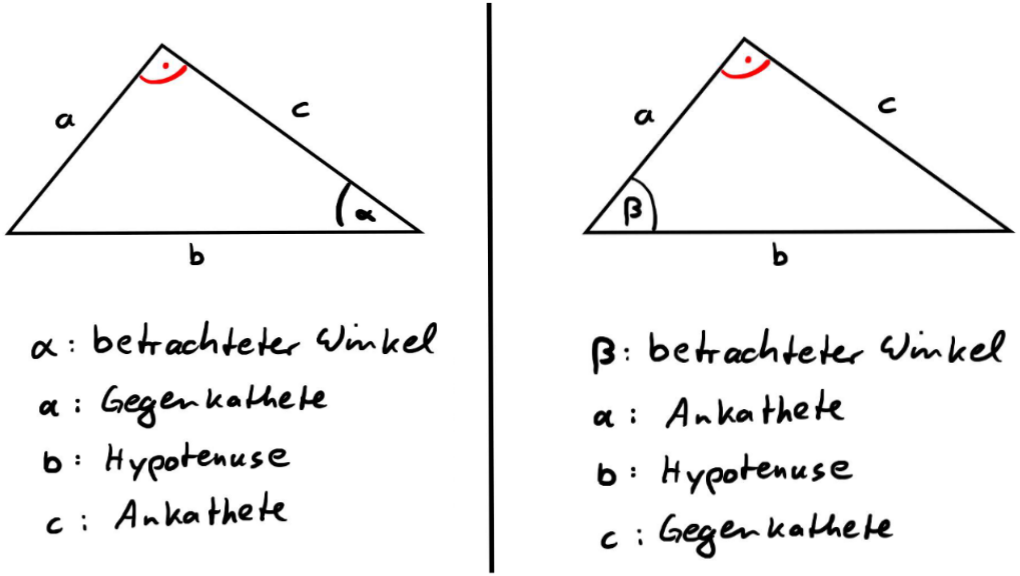
- Potenz und Wurzel
- Trigonometrie
  - Einheitskreis
  - Winkel und Bogenmaß
  - **Dreieck mit rechtem Winkel**
  - Dreieck ohne rechten Winkel
- Logarithmus
- Gleichungen lösen

Grundwissen

Trigonometrie – Dreieck mit rechtem Winkel

Hinweis zu Hypotenuse, An- und Gegenkathete:

- Hypotenuse ist immer die längste Strecke und gegenüber dem rechten Winkel
- Ankathete und Gegenkathete stehen erst fest, wenn man einen Betrachtungswinkel festgelegt hat



▸ Potenz und Wurzel

▾ Trigonometrie

Einheitskreis

Winkel und Bogenmaß

Dreieck mit rechtem Winkel

Dreieck ohne rechten Winkel

▸ Logarithmus

▸ Gleichungen lösen

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
Fachbereich Medien
Faculty of Media

Trigonometrie

Dreieck ohne rechtem Winkel

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
Fachbereich Medien
Faculty of Media

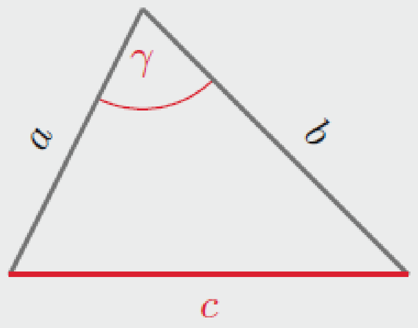
Trigonometrie – Dreieck ohne rechten Winkel

Satz 1.8 (Kosinussatz)

Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks und γ der gegenüber der Seite c liegende Winkel, so gilt die Beziehung

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma.$$

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Phythagoras auf nicht rechtwinklige Dreiecke.

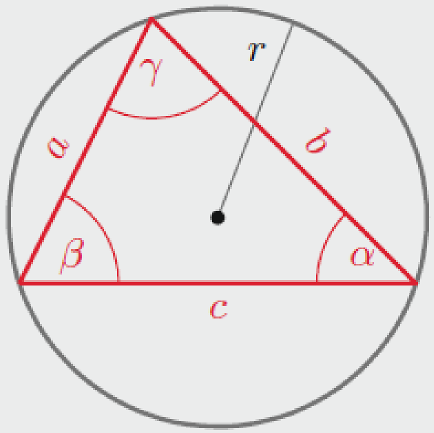


Satz 1.9 (Sinussatz)

Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks und α, β und γ die jeweils gegenüber liegenden Winkel, so gilt die Beziehung

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,r.$$

Dabei ist r der Umkreisradius des Dreiecks.



Koch 2019, S. 43

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
Fachbereich Medien
Faculty of Media

Logarithmus

Was ist das?

Grundwissen

Logarithmus – Was ist das?

Der Logarithmus beantwortet folgende Fragestellung:

2 hoch welcher Zahl ergibt 16?

$$2^{\square} = 16$$

$$log_2(16) = 4$$

Basis

Die Lösung des Exponenten ergibt sich also aus dem Logarithmus von 16 zur Basis 2.

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Zwischenüberlegung:

2 hoch welcher Zahl ergibt 1?

$$2^{\square} = 1$$

3 hoch welcher Zahl ergibt 1?

$$3^{\square} = 1$$

7 hoch welcher Zahl ergibt 1?

$$7^{\square} = 1$$

$$log_a(1) = 0$$

Der Logarithmus von 1 – egal zu welcher Basis – ist immer gleich 0. Denn „Alles hoch 0 ist 1“.

- Potenz und Wurzel
- Trigonometrie
- Logarithmus
  - Was ist das?
  - Gesetze
- Gleichungen lösen

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Eine besondere Basis und ein eigener Name:

Der Logarithmus zur Basis e (also der Euler'schen Zahl) wird Logarithmus Naturalis genannt und mit ln abgekürzt. Es gilt also:

$$log_e(a) = ln(a)$$

$$e = 2.71828182...$$

Logarithmus – Was ist das?

VORSICHT - Wichtige Anmerkung

Der Logarithmus wird häufig ohne Basis angegeben. Dabei handelt es sich in den meisten Fällen um:

$$log(a) = ?$$

Logarithmus zur Basis 10

- Google Online-Rechner
- Einige normale Taschenrechner
- Desmos.com

ODER

Logarithmus Naturalis

- MATLAB
- Python
- Wolframalpha.com

Logarithmus

Gesetze

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
Fachbereich Medien
Faculty of Media

Grundwissen

Logarithmus – Gesetze

Es gelten folgende Gesetze beim Logarithmus:

$$log_c(a \cdot b) = log_c(a) + log_c(b)$$

$$log_c(\frac{a}{b}) = log_c(a) - log_c(b)$$

$$log_c(a^b) = b \cdot log_c(a)$$

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Beispiele:

$$log_2(3 \cdot 5) = log_2(3) + log_2(5)$$

$$log_8(\frac{7}{9}) = log_8(7) - log_8(9)$$

$$log_2(8^3) = 3 \cdot log_2(8)$$

Potenz und Wurzel

Trigonometrie

Logarithmus

Was ist das?

Gesetze

Gleichungen lösen

Auch hier wieder „Pakete“ anwendbar:

$$log_2(\Box \cdot 5) = log_2(\Box) + log_2(5)$$

$$log_2((sin(x^2) - x) \cdot 5) = log_2((sin(x^2) - x)) + log_2(5)$$

- Potenz und Wurzel
- Trigonometrie
- Logarithmus
  - Was ist das?
  - Gesetze
- Gleichungen lösen

Gleichungen lösen

Lineare Gleichungen

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Lineare Gleichung

Eine Gleichung, die man in der Form $a\,x = b$ darstellen kann, bezeichnet man als **lineare Gleichung** für die Unbekannte x. Die Koeffizienten a und b sind dabei beliebige reelle Zahlen. Eine lineare Gleichung besitzt für $a \neq 0$ die eindeutige Lösung $x = \frac{b}{a}$.

Koch 2019, S. 45

Beispiele:

$$\begin{aligned} 5x &= 20 \quad \mid :5 \\ x &= \frac{20}{5} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x-2 &= 25x-12 \quad \mid +2 \\ 5x &= 25x-10 \quad \mid -25x \\ -20x &= -10 \quad \mid :(-20) \\ x &= \frac{-10}{-20} \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$

Gleichungen lösen

Potenzgleichung

Grundwissen

Gleichungen lösen – Potenzgleichung

Potenzgleichung

Eine Gleichung, die man in der Form $x^n = a$ mit einer natürlichen Hochzahl n darstellen kann, bezeichnet man als **Potenzgleichung** für die Unbekannte x. Diese Gleichung hat

- für eine gerade Hochzahl n und $a > 0$ genau zwei Lösungen: $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a = 0$ genau eine Lösung: $x = 0$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a < 0$ keine Lösung,
- für eine ungerade Hochzahl n genau eine Lösung: $x = \sqrt[n]{a}$.

Koch 2019, S. 46

Beispiele:

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 \quad &| \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 &= 16 \quad &| \sqrt[4]{} \\ x_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

- Potenz und Wurzel
- Trigonometrie
- Logarithmus
- Gleichungen lösen
  - Lineare Gleichung
  - Potenzgleichung
  - Quadratische Gleichung
  - Wurzelgleichung

Potenzgleichung

Eine Gleichung, die man in der Form $x^n = a$ mit einer natürlichen Hochzahl n darstellen kann, bezeichnet man als **Potenzgleichung** für die Unbekannte x. Diese Gleichung hat

- für eine gerade Hochzahl n und $a > 0$ genau zwei Lösungen: $x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{a}$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a = 0$ genau eine Lösung: $x = 0$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a < 0$ keine Lösung,
- für eine ungerade Hochzahl n genau eine Lösung: $x = \sqrt[n]{a}$.

Koch 2019, S. 46

Beispiele:

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \quad \mid \sqrt{} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 &= 0 \quad \mid \sqrt[4]{} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Gleichungen lösen – Potenzgleichung

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
Fachbereich Medien
Faculty of Media

Potenzgleichung

Eine Gleichung, die man in der Form $x^n = a$ mit einer natürlichen Hochzahl n darstellen kann, bezeichnet man als **Potenzgleichung** für die Unbekannte x. Diese Gleichung hat

- für eine gerade Hochzahl n und $a > 0$ genau zwei Lösungen: $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a = 0$ genau eine Lösung: $x = 0$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a < 0$ keine Lösung,
- für eine ungerade Hochzahl n genau eine Lösung: $x = \sqrt[n]{a}$.

Koch 2019, S. 46

Beispiele:

$$\begin{aligned} x^2 &= -2 \quad &&|\sqrt{} \\ x &= \sqrt{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 &= -5 \quad &&|\sqrt[4]{} \\ x &= \sqrt[4]{-5} \end{aligned}$$

Grundwissen

Gleichungen lösen – Potenzgleichung

Potenzgleichung

Eine Gleichung, die man in der Form $x^n = a$ mit einer natürlichen Hochzahl n darstellen kann, bezeichnet man als **Potenzgleichung** für die Unbekannte x. Diese Gleichung hat

- für eine gerade Hochzahl n und $a > 0$ genau zwei Lösungen: $x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{a}$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a = 0$ genau eine Lösung: $x = 0$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a < 0$ keine Lösung,
- für eine ungerade Hochzahl n genau eine Lösung: $x = \sqrt[n]{a}$.

Koch 2019, S. 46

Beispiele:

$$\begin{aligned} x^3 &= 0 \quad | \sqrt[3]{} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 \quad | \sqrt[3]{} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= -27 \quad | \sqrt[3]{} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Gleichungen lösen

Quadratische Gleichung

Grundwissen

Gleichungen lösen – Quadratische Gleichung

Quadratische Gleichung

Eine Gleichung, die man in der Form

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c, \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

darstellen kann, bezeichnet man als **quadratische Gleichung** für die Unbekannte x.

Koch 2019, S. 47

Mögliche auftretende Formen:

	nur b = 0	nur c = 0	a, b, c ≠ 0
Form	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
Ansatz	einfache Potenzgleichung	Ausklammern	PQ-Formel

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Beispiele:

nur b = 0
$ax^2 + c = 0$
einfache Potenzgleichung

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 16 &= 0 && \mid +16 \\
4x^2 &= 16 && \mid :4 \\
x^2 &= 4 && \mid \sqrt{} \\
x_{1,2} &= \pm 2
\end{aligned}
$$

- Potenz und Wurzel
- Trigonometrie
- Logarithmus
- Gleichungen lösen
  - Lineare Gleichung
  - Potenzgleichung
  - Quadratische Gleichung
  - Wurzelgleichung

Grundwissen

Gleichungen lösen – Quadratische Gleichung

Beispiele:

nur c = 0
$ax^2 + bx = 0$
Ausklammern

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x &= 0 \\ x(4x+8) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \quad \vee \quad 4x + 8 = 0 \quad |\, -8$$

$$4x = -8 \quad |\, :4$$

$$x = -2$$

Gleichungen lösen – Quadratische Gleichung

Beispiele:

a, b, c ≠ 0
$ax^2 + bx + c = 0$
PQ-Formel

ACHTUNG, wird gerne vergessen:

Voraussetzung für die Nutzung der PQ-Formel ist **a = 1,** falls das nicht zutrifft, muss zunächst durch **a** geteilt werden.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Nehmen wir an wir haben die richtige Form bereits gegeben mit zwei reellen Zahlen p und q ungleich 0 in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

dann lautet die PQ-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

- Potenz und Wurzel
- Trigonometrie
- Logarithmus
- Gleichungen lösen
  - Lineare Gleichung
  - Potenzgleichung
  - **Quadratische Gleichung**
  - Wurzelgleichung

Grundwissen

Gleichungen lösen – Quadratische Gleichung

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 16x - 18 &= 0 \quad | :2 \\
x^2 + 8x - 9 &= 0
\end{aligned}
$$

a, b, c ≠ 0
$ax^2 + bx + c = 0$
PQ-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (-9)} \\
x_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{(4)^2 + 9} \\
x_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{16 + 9} \\
x_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{25} \\
x_{1,2} &= -4 \pm 5
\end{aligned}
$$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -9$

Gleichungen lösen

Wurzelgleichung

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Medien
Faculty of Media

Wurzelgleichung

Gleichungen, bei denen die Unbekannte unter einer Wurzel vorkommt, versucht man durch Potenzieren zu lösen. Dabei ist Folgendes zu beachten:

(1) Vor dem Potenzieren isoliert man eine Wurzel.

(2) Wenn in der Gleichung mehrere Wurzelausdrücke vorkommen, muss man die Vorgehensweise wiederholen.

(3) Bei den durch Potenzieren berechneten Lösungen muss man unbedingt kontrollieren, ob sie tatsächlich die ursprüngliche Wurzelgleichung erfüllen.

Koch 2019, S. 48

Gleichungen lösen – Wurzelgleichung

Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences
Fachbereich Medien
Faculty of Media

Beispiel:

$$\sqrt{8-2x} = 1+\sqrt{5-x} \qquad |\ ^2$$

$$8-2x = \left(1+\sqrt{5-x}\right)^2$$

⚠ Binomische Formel mit „Paket“ !

$$(1+\square)^2$$

$$\square = \sqrt{(5-x)}$$

$$8-2x = 1+2\sqrt{5-x}+(5-x) \qquad |\ -(1+5) \quad |\ +x$$

$$2-x = 2\sqrt{5-x} \qquad |\ ^2$$

$$(2-x)^2 = 4(5-x)$$

$$4-4x+x^2 = 20-4x \qquad |\ -4 \quad |\ +4x$$

$$x^2 = 16 \qquad |\sqrt{\ }$$

$$x_{1,2} = \pm 4$$

Potenz und Wurzel

Trigonometrie

Logarithmus

Gleichungen lösen

Lineare Gleichung

Potenzgleichung

Quadratische Gleichung

Wurzelgleichung

Grundwissen

Gleichungen lösen – Wurzelgleichung

Beispiel:

$$\sqrt{8-2x} = 1+\sqrt{5-x}$$

$$x_{1,2} = \pm 4$$

Probe:

x_1 = 4 einsetzen:

$$\sqrt{8-2\cdot 4} = 1+\sqrt{5-4}$$

$$\sqrt{8-8} = 1+\sqrt{1}$$

$$\sqrt{0} = 1+1$$

$$0 = 2$$

x_2 = -4 einsetzen:

$$\sqrt{8-2\cdot(-4)} = 1+\sqrt{5-(-4)}$$

$$\sqrt{8+8} = 1+\sqrt{5+4}$$

$$\sqrt{16} = 1+\sqrt{9}$$

$$4 = 1+3$$

$$4 = 4$$