

Durchführung: 20.06.2018
Abgabe: 22.06.2018

PRAKTIKUMSPROTOKOLL V47

TEMPERATURABHÄNGIGKEIT DER MOLWÄRME VON FESTKÖRPERN

Anneke Reinold¹,
Paul-Simon Blumenkamp²

¹anneke.reinold@tu-dortmund.de

²paul-simon.blumenkamp@tu-dortmund.de

1 Einleitung

Das Ziel des Versuchs ist die Bestimmung der Molwärme und der Debye-Temperatur Θ_D einer Metallprobe. Hierzu ist es zunächst notwendig, sich die grundlegenden Modelle zur Erklärung der Temperaturabhängigkeit der Molwärme zu vergegenwärtigen. Bei diesen Modellen handelt es sich um das klassische, das Einstein- und das Debye-Modell. Zur Untersuchung der Probe wird ein Aufbau erarbeitet, welcher es erlaubt, die Temperaturabhängigkeit der Molwärme zu bestimmen.

2 Theorie

2.1 Das klassische Modell

Das klassische Modell liefert keinerlei Erklärung für die Temperaturabhängigkeit der Molwärme. Gemäß der klassischen Physik besagt das Äquipartitionstheorem, dass sich die thermische Energie in einem Kristall gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade der Atome verteilt. Die mittlere Energie pro Freiheitsgrad beträgt hierbei $\frac{1}{2}kT$. Da es durch die Kristallstruktur den Atomen nur gestattet ist, sich in drei Richtungen um die Gleichgewichtslage zu bewegen, folgt für die mittlere Energie pro Atom

$$\langle u \rangle = 6\frac{1}{2}k_B T, \quad (1)$$

wobei k_B die Boltzmannsche Konstante darstellt. Hochgerechnet auf ein Mol ergibt sich

$$U = 3RT, \quad (2)$$

mit der allgemeinen Gaskonstante R . Gemäß dieses Ergebnisses folgt bei einem konstanten Volumen V

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R. \quad (3)$$

Dieser Wert wird zwar für hohe Temperatur erreicht, jedoch zeigt sich, dass die klassische Physik an der Erklärung der Temperaturabhängigkeit scheitert und alternative Modelle notwendig sind.

2.2 Das Einstein-Modell

Im Einstein-Modell wird angenommen, dass alle Atome auf Gitterplätzen mit der Frequenz ω schwingen und die Energie, die sie aufnehmen oder abgeben können in ganze Vielfache von $\hbar\omega$ gequantelt ist. Die mittlere Energie pro Oszillator lässt sich über die Boltzmann-Verteilung

$$W(n) = \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}\right) \quad (4)$$

bestimmen. Mit dieser lässt sich die Wahrscheinlichkeit beschreiben, dass ein Oszillator bei Temperatur T eine Energie n besitzt, wenn er sich im Gleichgewicht mit seiner

Umgebung befindet. Wird dies über alle Energie summiert ergibt sich

$$\langle u \rangle_{\text{Einstein}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (5)$$

Hiermit folgt für die Molwärme

$$C_{V, \text{Einstein}} = 3R \frac{\hbar^2\omega^2}{k_B^2 T^2} \quad (6)$$

$$= \frac{\exp(\hbar\omega/k_B T)}{[\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^2}. \quad (7)$$

Es ist zu erkennen, dass dieser Wert für hohe Temperaturen gegen $3R$ läuft. Da jedoch die Annahme, dass die Schwingungen im Kristall nur eine Frequenz besitzen, eine grobe Näherung darstellt, fallen auch im Einstein-Modell Abweichungen zu den experimentellen Werten auf.

2.3 Das Debye-Modell

Das Debye-Modell liefert eine genauere Näherung an die experimentellen Werte, indem es, anders als das Einstein-Modell, von einer spektralen Verteilung $Z(\omega)$ der Eigenschwingungen ausgeht. Diese komplizierte Verteilung wird dabei durch die Annahme, dass die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz und der Ausbreitungsrichtung der Welle im Kristall unabhängig ist, vereinfacht. Da ein Kristall aus N_L Atome nur $3N_L$ Eigenschwingungen besitzen kann, muss es eine maximale Grenzfrequenz ω_D geben, für welche gilt

$$\int_0^{\omega_D} Z(\omega) d\omega = 3N_L. \quad (8)$$

Mit den erwähnten Näherungen und der Debye-Frequenz ω_D , lässt sich die spektrale Dichte der Eigenschwingungen durch:

$$Z(\omega) d\omega = \frac{9N_L}{\omega_D^3} \omega^2 d\omega \quad (9)$$

beschreiben. Somit folgt für die Molwärme:

$$C_{V, \text{Debye}} = 9R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx, \quad (10)$$

hierbei stehen x und $\frac{\theta_D}{T}$ für:

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad \text{und} \quad \frac{\theta_D}{T} = \frac{\hbar\omega_D}{k_B T}. \quad (11)$$

Diese Funktion für C_V ist allgemein und materialunabhängig, stattdessen hängt sie von der Debye-Temperatur θ_D ab, welche durch die Kristalleigenschaften gegeben ist. Es

ist zu erkennen, dass diese Funktion für hohe Temperaturen gegen $3R$ läuft und sich dort somit mit der klassischen Theorie deckt. Für niedrige Temperaturen verläuft C_V hingegen mit einer T^3 Abhängigkeit.

Das Debye-Modell lässt als vereinfachende Annahme den Molwärmefaktor der Leitungselektronen außer acht, da dieser Beitrag bei den betrachteten Temperaturen hinreichend gering ist.

3 Aufbau

Der genutzte Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 dargestellt. Er besteht aus der, mit einer Heizwicklung umfassten, Kupferprobe, welche sich in einem Kupferzylinder befindet. Dieser verfügt ebenfalls über eine separate Heizwicklung. Sowohl der Zylinder, als auch die Probe sind jeweils mit einem Pt-100 Widerstand ausgestattet, welche als Thermometer dienen. Der Zylinder wird in einem Rezipienten befestigt, welcher an eine Vakuumpumpe sowie eine Heliumquelle angeschlossen ist. Der Rezipient wird in ein mit flüssigem Stickstoff gefülltes Dewar-Gefäß gestellt.

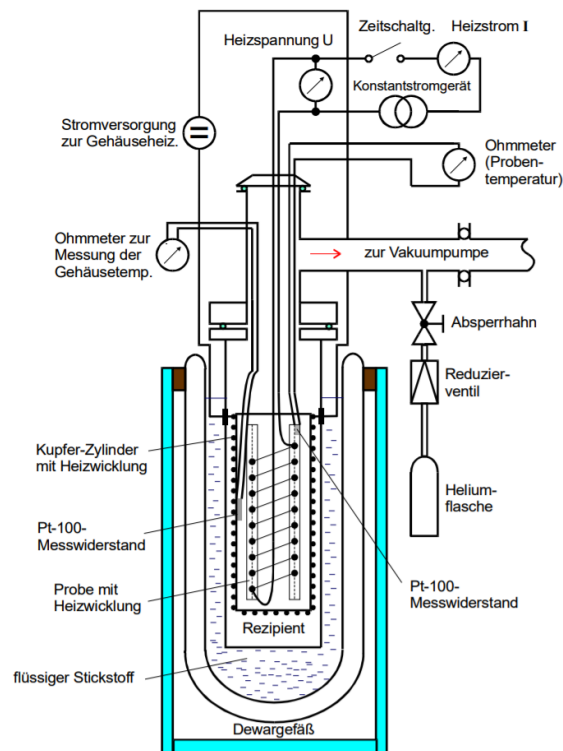


Abbildung 1: Messrichtungen der Projektion.

Zur Untersuchung der Molwärme muss die Probe zunächst auf 80 K heruntergekühlt werden. Hierzu wird zunächst der Rezipient evakuiert und mit Helium als Wärmeleiter befüllt. Wenn die Zieltemperatur erreicht ist, wird das Helium wieder abgepumpt. Die Heitzinstrumente von Probe und Zylinder werden eingeschaltet und es wird Heizspannung, Heizstrom, Heizdauer und Temperaturdifferenz in 7 bis 11 K schritten aufgezeichnet. Um Energieverluste durch Wärmestrahlung zu vermeiden, werden Zylinder und Probe auf der gleichen Temperatur gehalten. Energieverluste durch Konvektion werden durch das Vakuum im Rezipienten verhindert.

4 Auswertung

Die Auswertung, genauer die Fehlerrechnung, die Plots und Ausgleichsrechnung erfolgt mit den Paketen Numpy [5], Uncertainties [4], Matplotlib [2] und Scipy [3] in der Programmiersprache python.

4.1 Fehlerrechnung

Die Mittelwerte werden nach

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i^N x_i \quad (12)$$

und deren Standardabweichung mit

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_i^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (13)$$

berechnet. Für die Fehlerfortpflanzung einer Variablen x_i gilt

$$\sigma = \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2}. \quad (14)$$

Als Fehler für die Messgeräte, das Ampère-, das Volt- und das Ohm-Meter, wird ein Fehler von ± 1 auf die erste Nachkommastelle angenommen; als Reaktions- und Ablesezeit wird mit einem Fehler von 3 s gerechnet.

4.2 Bestimmung der Molwärme von Kupfer

Um die Wärmekapazität C eines Festkörpers zu berechnen, ist es nötig, die Wärmemenge δQ zu kennen. Sie wird aus den gemessenen Strom-Spannungs-Paaren und der Zeit pro Messwertnahme durch

$$\delta Q = UI\delta t \quad (15)$$

berechnet und in

$$C = \frac{\delta Q}{n\delta T} \quad (16)$$

eingesetzt. Durch den linearen Zusammenhang zwischen dem gemessenen Widerstand R und der Temperatur δT

$$T = 0,001\,34 \frac{\text{K}}{\Omega^2} R^2 + 2,296 \frac{\text{K}}{\Omega} R - 243,02 \text{ K} \quad (17)$$

wird das δT zur Molwärme berechnet.

Wird die Molwärme für eine Stoffmenge $n = \frac{m}{M}$ und anstelle eines konstanten Volumens bei einem festen Druck p betrachtet, so folgt

$$C_p = \frac{MUI\delta t}{m\delta T}. \quad (18)$$

Die Masse des Kupferwürfels ist mit $m = 0,342 \text{ kg}$ angegeben [1]. Ferner wird mit einer molaren Masser für Kupfer von $63,546 \text{ u}$ gerechnet [6].

Die Umrechnung von C_P in C_V erfolgt mit

$$C_V = C_P - 9\alpha^2 \kappa V_0 T. \quad (19)$$

Benötigt werden hierfür der Kompressionsmodul κ , der für Kupfer durch $\kappa = 140 \frac{\text{GN}}{\text{m}^2}$ gegeben ist, und auch das molare Volumen V_0 ,

$$V_0 = \frac{M}{\rho} = 7,092 \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \quad (20)$$

mit der molaren Masse M und der Dichte von Kupfer $\rho = 8,96 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ [6].

Der temperaturabhängige lineare Ausdehnungskoeffizient α wurde mit den aus [1] zugehörigen Temperaturwertepaaren durch eine Funktion

$$\alpha(T) = \frac{x}{T} + y \quad (21)$$

gefittet. Der lineare Zusammenhang und das Ergebnis der Regression ist in Abbildung 2 zu sehen.

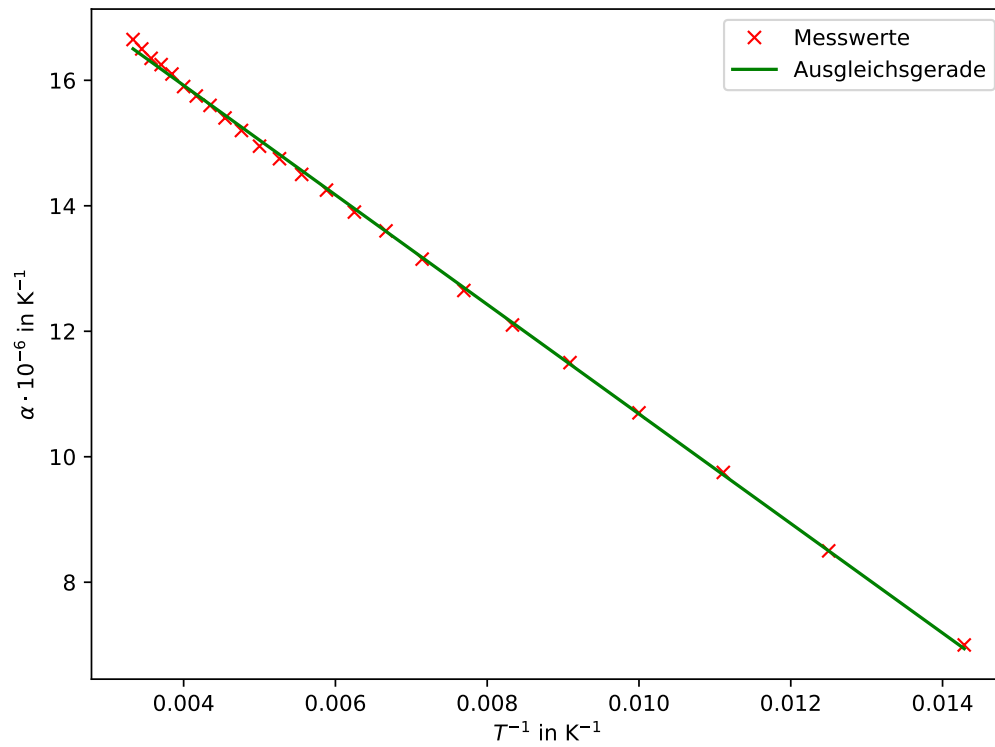


Abbildung 2: Linearer Zusammenhang des Ausdehnungskoeffizienten α gegen die inverse Temperatur $\frac{1}{T}$.

Die Regression liefert folgende Zahlenwerte für die beiden Parameter x und y :

$$x = (-873 \pm 4) \cdot 10^{-6}$$

$$y = (19,41 \pm 0,03) \frac{1}{\text{K}}$$

Im Folgenden findet die Berechnung aus den Messwerten der Molwärme bei konstantem Druck C_P und die daraus abgeleitete Molwärme bei konstantem Volumen C_V nach den oben genannten Formeln statt. Alle Messwerte des Versuchs sowie die errechneten Größen T , C_P und C_V befinden sich in Tabelle 1.

Die nach Formel 19 berechneten Werte für die molare Wärmekapazität C_V befinden sich in Tabelle 2.

Tabelle 1: Größen zur Bestimmung der molaren Wärmekapazität C_P einer Kupferprobe.

δt in s		R in Ω		I in mA		U in V	T in K	C_P in J/(mol K)
0	± 0	22,0	$\pm 0,1$	150,5	$\pm 0,1$	$13,27 \pm 0,01$	$81,29 \pm 0,24$	0 ± 0
302	± 3	26,2	$\pm 0,1$	153,1	$\pm 0,1$	$13,27 \pm 0,01$	$91,21 \pm 0,24$	11,5 $\pm 0,4$
250	± 3	30,0	$\pm 0,1$	154,2	$\pm 0,1$	$13,26 \pm 0,01$	$100,22 \pm 0,24$	10,5 $\pm 0,4$
300	± 3	33,3	$\pm 0,1$	154,8	$\pm 0,1$	$13,25 \pm 0,01$	$108,07 \pm 0,24$	14,6 $\pm 0,6$
330	± 3	37,0	$\pm 0,1$	164,0	$\pm 0,1$	$13,28 \pm 0,01$	$116,92 \pm 0,24$	15,1 $\pm 0,6$
300	± 3	40,8	$\pm 0,1$	173,8	$\pm 0,1$	$13,30 \pm 0,01$	$126,04 \pm 0,24$	14,1 $\pm 0,5$
300	± 3	44,4	$\pm 0,1$	170,3	$\pm 0,1$	$13,29 \pm 0,01$	$134,71 \pm 0,24$	14,6 $\pm 0,6$
300	± 3	48,0	$\pm 0,1$	178,5	$\pm 0,1$	$13,32 \pm 0,01$	$143,43 \pm 0,24$	15,2 $\pm 0,6$
300	± 3	51,7	$\pm 0,1$	181,5	$\pm 0,1$	$13,33 \pm 0,01$	$152,41 \pm 0,24$	15,0 $\pm 0,6$
300	± 3	55,4	$\pm 0,1$	186,3	$\pm 0,1$	$13,34 \pm 0,01$	$161,44 \pm 0,24$	15,3 $\pm 0,6$
300	± 3	59,3	$\pm 0,1$	186,6	$\pm 0,1$	$13,34 \pm 0,01$	$170,99 \pm 0,25$	14,5 $\pm 0,5$
300	± 3	63,1	$\pm 0,1$	186,8	$\pm 0,1$	$13,35 \pm 0,01$	$180,34 \pm 0,25$	14,9 $\pm 0,6$
300	± 3	66,7	$\pm 0,1$	186,9	$\pm 0,1$	$13,35 \pm 0,01$	$189,23 \pm 0,25$	15,6 $\pm 0,6$
300	± 3	70,3	$\pm 0,1$	187,0	$\pm 0,1$	$13,35 \pm 0,01$	$198,16 \pm 0,25$	15,6 $\pm 0,6$
300	± 3	73,8	$\pm 0,1$	188,9	$\pm 0,1$	$13,36 \pm 0,01$	$206,87 \pm 0,25$	16,2 $\pm 0,7$
300	± 3	77,5	$\pm 0,1$	189,1	$\pm 0,1$	$13,37 \pm 0,01$	$216,12 \pm 0,25$	15,2 $\pm 0,6$
300	± 3	81,1	$\pm 0,1$	189,3	$\pm 0,1$	$13,37 \pm 0,01$	$225,15 \pm 0,25$	15,6 $\pm 0,6$
300	± 3	84,3	$\pm 0,1$	189,4	$\pm 0,1$	$13,37 \pm 0,01$	$233,21 \pm 0,25$	17,5 $\pm 0,8$
300	± 3	87,6	$\pm 0,1$	189,4	$\pm 0,1$	$13,38 \pm 0,01$	$241,54 \pm 0,25$	17,0 $\pm 0,7$
330	± 3	91,0	$\pm 0,1$	189,5	$\pm 0,1$	$13,38 \pm 0,01$	$250,16 \pm 0,25$	18,0 $\pm 0,8$
330	± 3	93,6	$\pm 0,1$	189,6	$\pm 0,1$	$13,38 \pm 0,01$	$256,78 \pm 0,25$	23,5 $\pm 0,3$
360	± 3	96,3	$\pm 0,1$	189,6	$\pm 0,1$	$13,38 \pm 0,01$	$263,66 \pm 0,26$	24,7 $\pm 0,3$
360	± 3	100,5	$\pm 0,1$	189,6	$\pm 0,1$	$13,39 \pm 0,01$	$274,41 \pm 0,26$	15,8 $\pm 0,6$
360	± 3	104,8	$\pm 0,1$	189,7	$\pm 0,1$	$13,40 \pm 0,01$	$285,47 \pm 0,26$	15,4 $\pm 0,5$
360	± 3	107,8	$\pm 0,1$	189,8	$\pm 0,1$	$13,40 \pm 0,01$	$293,21 \pm 0,26$	22,0 $\pm 0,1$
300	± 3	109,9	$\pm 0,1$	189,8	$\pm 0,1$	$13,41 \pm 0,01$	$298,64 \pm 0,26$	26,1 $\pm 0,8$

Tabelle 2: Wertetabelle für die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen C_V .

T in K	$\alpha \cdot 10^{-6}$ in $\frac{1}{\text{K}}$	C_V in J/(mol K)
$91,21 \pm 0,24$	$9,84 \pm 0,06$	$11,5 \pm 0,4$
$100,22 \pm 0,24$	$10,70 \pm 0,05$	$10,5 \pm 0,4$
$108,07 \pm 0,24$	$11,33 \pm 0,05$	$14,6 \pm 0,6$
$116,92 \pm 0,24$	$11,94 \pm 0,05$	$15,1 \pm 0,6$
$126,04 \pm 0,24$	$12,48 \pm 0,05$	$14,1 \pm 0,5$
$134,71 \pm 0,24$	$12,93 \pm 0,04$	$14,6 \pm 0,6$
$143,43 \pm 0,24$	$13,32 \pm 0,04$	$15,2 \pm 0,6$
$152,41 \pm 0,24$	$13,68 \pm 0,04$	$15,0 \pm 0,6$
$161,44 \pm 0,24$	$14,00 \pm 0,04$	$15,3 \pm 0,6$
$170,99 \pm 0,25$	$14,30 \pm 0,04$	$14,5 \pm 0,5$
$180,34 \pm 0,25$	$14,57 \pm 0,04$	$14,9 \pm 0,6$
$189,23 \pm 0,25$	$14,80 \pm 0,04$	$15,6 \pm 0,6$
$198,16 \pm 0,25$	$15,00 \pm 0,04$	$15,6 \pm 0,6$
$206,87 \pm 0,25$	$15,19 \pm 0,04$	$15,2 \pm 0,7$
$216,12 \pm 0,25$	$15,37 \pm 0,04$	$15,2 \pm 0,6$
$225,15 \pm 0,25$	$15,53 \pm 0,04$	$15,6 \pm 0,6$
$233,21 \pm 0,25$	$15,67 \pm 0,04$	$17,5 \pm 0,8$
$241,54 \pm 0,25$	$15,80 \pm 0,04$	$17,0 \pm 0,7$
$250,16 \pm 0,25$	$15,92 \pm 0,04$	$18,0 \pm 0,8$
$256,78 \pm 0,25$	$16,01 \pm 0,04$	$23,5 \pm 0,3$
$263,66 \pm 0,26$	$16,10 \pm 0,04$	$24,7 \pm 0,3$
$274,41 \pm 0,26$	$16,23 \pm 0,04$	$15,8 \pm 0,6$
$285,47 \pm 0,26$	$16,35 \pm 0,04$	$15,4 \pm 0,5$
$293,21 \pm 0,26$	$16,43 \pm 0,04$	$22,0 \pm 0,1$
$298,64 \pm 0,26$	$16,49 \pm 0,04$	$26,1 \pm 0,8$

Der Zusammenhang zwischen der Temperatur T und der Molwärme C_V ist durch Abbildung 3 dargestellt.

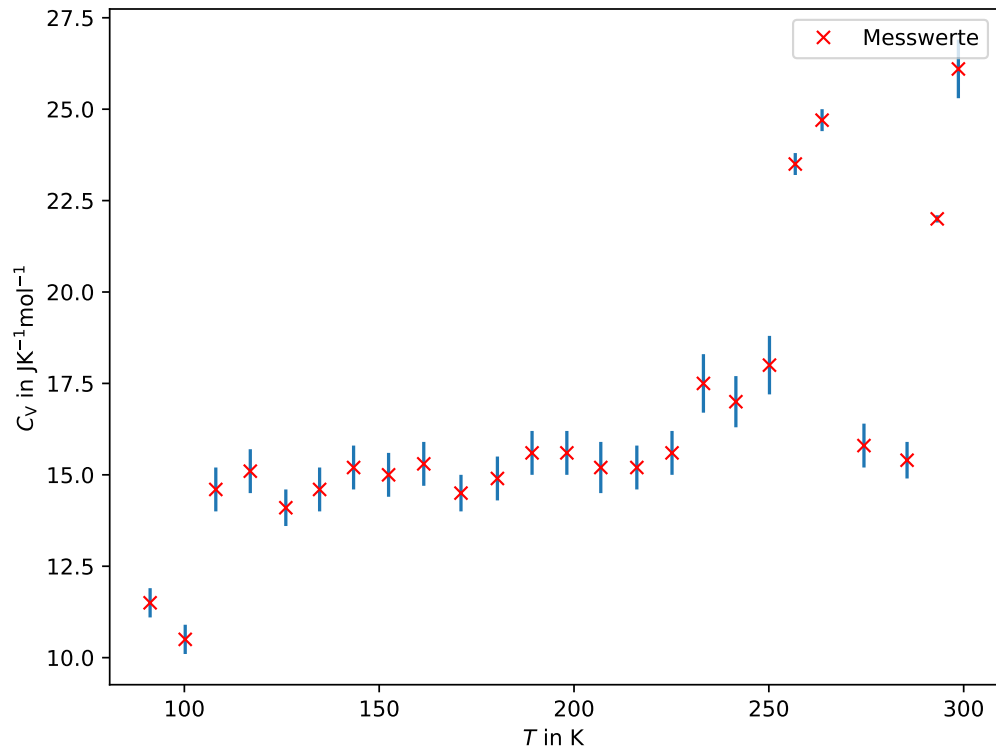


Abbildung 3: Zusammenhang zwischen der Temperatur T und der molaren Wärmekapazität C_V .

4.3 Anpassung der Debye-Temperatur

Für die im Auswertungsteil zuvor bestimmten Wertepaare für T und C_V wird mithilfe von Tabelle 1 aus [1] eine Debye-Temperatur θ_D approximiert. Aus der Tabelle abgelesen werden kann der Quotient $\frac{\theta_D}{T}$, wodurch mit Multiplizieren von T die Debye-Temperatur bestimmt werden kann. Betrachtet werden ausschließlich die Temperaturwerte bis 170 K.

Tabelle 3: Wertetabelle für die Bestimmung der Debye-Temperatur θ_D .

T in K	C_V in J/(mol K)	$\frac{\theta_D}{T}$	θ_D in $\frac{1}{K}$
$91,21 \pm 0,24$	$11,5 \pm 0,4$	4,8	$437,8 \pm 1,2$
$100,22 \pm 0,24$	$10,5 \pm 0,4$	4,5	$451,0 \pm 1,1$
$108,07 \pm 0,24$	$14,6 \pm 0,6$	4,3	$464,7 \pm 1,0$
$116,92 \pm 0,24$	$15,1 \pm 0,6$	4,2	$491,1 \pm 1,0$
$126,04 \pm 0,24$	$14,1 \pm 0,5$	4,0	$504,2 \pm 1,0$
$134,71 \pm 0,24$	$14,6 \pm 0,6$	3,9	$525,4 \pm 0,9$
$143,43 \pm 0,24$	$15,2 \pm 0,6$	3,8	$545,0 \pm 0,9$
$152,41 \pm 0,24$	$15,0 \pm 0,6$	3,7	$563,9 \pm 0,9$
$161,44 \pm 0,24$	$15,3 \pm 0,6$	3,6	$581,2 \pm 0,9$
$170,99 \pm 0,25$	$14,5 \pm 0,5$	3,5	$598,5 \pm 0,9$

Der Mittelwert für den experimentell bestimmten Wert ist

$$\theta_{D_{\text{exp}}} = (516,28 \pm 1,86)\text{K}.$$

Nach Formel 8 ergibt sich für die Debye-Temperatur unter Berücksichtigung von $v_l = 4,7 \text{ km/s}$ und $v_t = 2,26 \text{ km/s}$, dass gilt:

$$\theta_{D_{\text{theo}}} = \frac{\hbar}{k_B} \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 N_A \rho}{M} (v_l^{-3} + 2v_t^{-3})^{-1}}. \quad (22)$$

Als so theoretisch bestimmter Wert ergibt sich eine Debye-Temperatur von

$$\theta_{D_{\text{theo}}} = 332,5 \text{ K}.$$

Für die Debye-Frequenzen folgen aus

$$\omega_D = \frac{k_B \theta_D}{\hbar} \quad (23)$$

$$\omega_{\text{exp}} = (67,59 \pm 0,26) \text{ THz}$$

$$\omega_{\text{theo}} = 43,53 \text{ THz}.$$

5 Diskussion

Werden die beiden berechneten Werte für θ_D mit dem Literaturwert von 347 K verglichen, so fällt eine Abweichung von 48 % für die experimentell bestimmte Debye-Temperatur und eine Abweichung von 5 % für den theoretisch berechneten Wert auf. Somit zeigt sich, dass die theoretische Vorgehensweise nahe an den Literaturwert heranreicht. Die mithilfe des Versuchsaufbaus bestimmte Debye-Temperatur weicht hingegen stark vom Literaturwert ab. Bedingt kann dies einerseits durch nicht ausreichendes Nachfüllen des Stickstoffs sein, da dieser schnell verdampfte und die Probe somit nicht hinreichend gekühlt worden sein könnte, andererseits konnte schon während der Messung beobachtet werden, dass die Widerstandsdifferenz zwischen Kupferzylinder und -würfel zwischenzeitlich groß gewesen ist, sodass Wärmeverluste nicht ausreichend verhindert werden konnten. Auch sollte beachtet werden, dass Restmoleküle trotz des Abpumpens mit der Vakuumpumpe im Rezipienten verblieben sind, die den Wärmetransport förderten und somit Teile der Wärme verloren gegangen sein könnten. Des Weiteren wurde die Spannungsregelung per Hand getätigt, was dazu führte, dass nicht genau auf das träge Verhalten des, im Vergleich zum Würfel, großen Zylinders eingegangen werden konnte.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 606*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V606.pdf> (besucht am 20.06.2018).
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [6] periodensystem.info. *Kupfer: Kenndaten*. URL: <http://www.periodensystem.info/elemente/kupfer/> (besucht am 20.06.2018).