

Durchführung: 25.11.2019

1. Abgabe: 10.12.2019

2. Abgabe: 19.12.2019

PRAKTIKUMSPROTOKOLL V46

FARADAY-EFFEKT

Anneke Reinold¹,
Paul-Simon Blumenkamp²

¹anneke.reinold@tu-dortmund.de

²paul-simon.blumenkamp@tu-dortmund.de

1 Einleitung

Das Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung der effektiven Massen von Kristallelektronen in GaAs durch Ausnutzen des Faraday-Effekts. Hierzu wird der Winkel θ , um den die Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht beim Faraday-Effekt gedreht wird, bestimmt.

2 Theorie

2.1 Die effektive Masse

Die physikalische Beschreibung von Elektronen in einem Kristall lässt sich am besten durch die Betrachtung der unteren Bandkante des Leitungsbandes annähern. Es lässt sich dann die Elektronenenergie $\epsilon(\vec{k})$, wobei \vec{k} der Wellenzahlvektor ist, in einer Taylorreihe zu:

$$\epsilon(\vec{k}) = \epsilon(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \epsilon^2}{\partial k_i^2} \right)_{k=0} k_i^2 + \dots, \quad (1)$$

entwickeln. Vergleicht man dies mit einem harmonischen Oszillator mit

$$\epsilon = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad (2)$$

so stellt man fest, dass die Größe:

$$m_i^* := \frac{\hbar^2}{\left(\frac{\partial \epsilon^2}{\partial k_i^2} \right)_{k=0}}, \quad (3)$$

die Dimension einer Masse hat. Sie wird auch als effektive Masse des Kristallelektrons bezeichnet. Für hinreichend hohe Symmetrien des Kristalls sind die einzelnen m_i^* alle gleich groß und das Elektron lässt sich wie ein freies Teilchen mit Masse m^* behandeln.

2.2 Zirkulare Doppelbrechung

Optische Doppelbrechung bezeichnet die Rotation der Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht beim Durchqueren eines Mediums. Physikalisch lässt sich dieses Phänomen nachvollziehen, indem man linear polarisiertes Licht in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Komponenten zerlegt

$$E(z) = \frac{1}{2}(E_L(z) + E_R(z)). \quad (4)$$

In einem doppeltbrechenden Kristall ist es nun so, dass die Phasengeschwindigkeiten für rechts- und linkszirkular polarisiertes Licht unterschiedlich ist, was zur Polarisationsdrehung um den Winkel θ führt. Für eine Welle, welche bei $z = 0$ eintritt und in x -Richtung polarisiert ist

$$E(0) = E_0 \vec{x}_0, \quad (5)$$

lässt sich mit

$$\psi := \frac{1}{2} (k_R + k_L) \quad (6)$$

und

$$\theta := \frac{1}{2} (k_R - k_L) \quad (7)$$

zeigen, dass sie sich nach einer Länge L durch

$$E(L) = E_0 \exp(i\psi(\cos(\theta)\vec{x}_0 + \sin(\theta)\vec{y}_0)), \quad (8)$$

beschreiben lässt.

Die Ursache des doppelbrechenden Verhaltens einiger Kristalle liegt in induzierten Dipolen im Kristall, welche durch das Feld der Strahlung erzeugt werden. Diese verursachen eine makroskopische Polarisierung \vec{P} des Kristalls

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (9)$$

wobei ϵ_0 die Influenzkonstante und χ die dielektrische Suszeptibilität ist. Für anisotrope Kristalle ist χ ein Tensor der Form

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Während sich hier χ in vielen Fällen diagonalisieren lässt, treten für doppelbrechende Materialien nicht-diagonale Elemente auf, welche komplex konjugiert zueinander sind.

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ i\chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Durch Lösen der Wellengleichung für eine ebene Welle in \vec{z} -Richtung lässt sich zeigen, dass die Wellenzahl für doppelbrechende Medien nur die Werte

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{(1 + \chi_{xx}) \pm \chi_{xy}} \quad (12)$$

annehmen kann, wobei ω die Kreisfrequenz ist. Daraus folgt, dass zwei Phasengeschwindigkeiten möglich sind: Eine für rechtszirkular polarisiertes und eine für linkszirkular polarisiertes Licht

$$v_{\text{Ph}_R} = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_{xx} + \chi_{xy}}} \quad \text{und} \quad v_{\text{Ph}_L} = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_{xx} - \chi_{xy}}}. \quad (13)$$

Nach (7) ist es dann möglich den Drehwinkel mit

$$\theta \approx \frac{L\omega}{2cn} \chi_{xy} \quad (14)$$

zu bestimmen, wobei n der Brechungsindex ist.

2.3 Der Faraday-Effekt

Der Faraday-Effekt beschreibt das Erzeugen von Doppelbrechung in einem an sich optisch inaktiven Medium durch das Anlegen eines äußeren Magnetfelds. Das Magnetfeld beeinflusst die Kristallelektronen, sodass die Bewegungsgleichung durch

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + K \vec{r} = -e_0 \left(\vec{E}(r) + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right) \quad (15)$$

gegeben ist. Hierbei ist \vec{r} die Auslenkung eines Elektrons aus dem Gleichgewicht, K eine Bindungskonstante zur Umgebung, m die Masse, e_0 die Ladung und \vec{E} die elektrische Feldstärke. Unter der Annahme, dass für die Feldstärke $E \sim \exp(-i\omega t)$ gilt und mit der Polarisierung $\vec{P} = -Ne_0 \vec{r}$, wobei N die Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit ist, wird aus der Bewegungsgleichung

$$-m\omega^2 \vec{P} + K \vec{P} = e_0^2 N \vec{E} + ie_0 \omega \vec{P} \times \vec{B}. \quad (16)$$

Bei Betrachtung eines in z -Richtung liegenden Magnetfelds stellt sich heraus, dass der Suszeptibilitätstensor nicht-diagonale Elemente enthält, die komplex konjugiert zueinander sind. Es lässt sich zeigen, dass der Drehwinkel der auftretenden Doppelbrechung durch

$$\theta = \frac{e_0^3 \omega^2 N B L}{2\epsilon_0 c m^2 \left((-\omega^2 + K/m)^2 - \left(\frac{e_0}{m} B \omega \right)^2 \right) n} \quad (17)$$

beschrieben wird. Der Faktor $\sqrt{K/m}$ lässt sich als Resonanzfrequenz ω_0 definieren und $\frac{Be_0}{m}$ als Zyklotron-Frequenz ω_c . Für ein System, bei welchem die Messfrequenz viel kleiner als ω_0 ist und $\omega_0 > \omega_c$ ist, gilt:

$$\theta(\lambda) = \frac{2\pi^2 e_0^3 c}{\epsilon_0} \frac{1}{m^2} \frac{1}{\lambda^2 \omega_0^4} \frac{N B L}{n} \quad (18)$$

Ersetzt man die Elektronenmasse m durch die effektive Masse m^* , so lassen die Kristallelektronen sich wie freie Teilchen behandeln und (18) vereinfacht sich zu

$$\theta_{\text{frei}} = \frac{e_0^3}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{m^{*2}} \lambda^2 \frac{N B L}{n}. \quad (19)$$

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

Der genutzte Versuchsaufbau ist in Abb.1 dargestellt. Die Lichtquelle des Aufbaus ist eine Halogen-Lampe, welche ein Spektrum hat, das größtenteils im Infrarotbereich liegt. Das emittierte Licht wird durch eine Linse gebündelt und durch einen Lichtzerhacker in Pulse eingeteilt. Die Linearpolarisierung des Lichts erfolgt durch ein Glan-Thompson-Prisma, dessen Winkel zum Strahl durch ein Goniometer variiert werden kann. Die Photonen

treffen danach auf die scheibenförmige Probe, welche in einem Elektromagneten mit Feldrichtung parallel zur Photonenrichtung platziert ist. Hinter der Probe befindet sich eine Halterung für austauschbare Interferenzfilter. Zur Untersuchung der Rotation der Polarisationssebene wird die Strahlung mit einem zweiten Glan-Thompson-Prisma in zwei senkrecht zueinander polarisierte Teile zerlegt und die Teilstrahlen werden erneut durch Linsen gebündelt und die Lichtintensität wird mittels Photowiderständen gemessen. Die hohe Rauschspannung, welche an den Photowiderständen auftritt, wird durch die Wechsellichtmethode, welche durch den Lichtzerhacker und einen auf die Frequenz des Zerhackers eingestellten Selektivverstärker gegeben ist, verhindert. Die am Photowiderstand abfallende Wechselspannung wird an Kondensatoren ausgegekoppelt, wobei die Zeitkonstante von einem der Kondensatoren variabel ist. Die Signale beider Photowiderstände werden auf einen Differenzverstärker gegeben und von dort in den Selektivverstärker. Das Signal des Selektivverstärkers wird an einem Oszilloskop angezeigt.

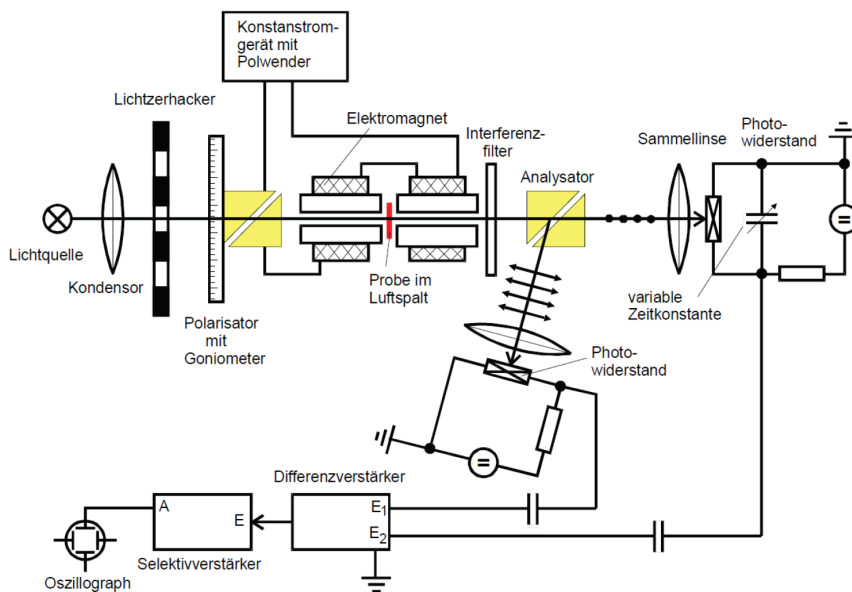


Abbildung 1: Schematische Darstellung des genutzten Versuchsaufbaus [1].

3.2 Versuchsdurchführung

3.2.1 Justierung

Zu Beginn des Versuchs muss der Aufbau justiert werden. Hierzu werden Probe, Interferenzfilter und die Abdeckungen der Photowiderstandgehäuse entfernt. Der Strahlengang des Lichts wird überprüft und es wird getestet, ob die Veränderungen am Goniometer die erwarteten Intensitätsschwankungen an den Teilstrahlen verursachen.

Anschließend kann der Lichtzerhacker eingeschaltet und auf eine Frequenz von 450 Hz gestellt werden. Die Mittenfrequenz des Selektivverstärkers wird auf den Zerhacker

angepasst, indem das Signal eines Photowiderstands am Differenzverstärker gegen ein "Ground"-Signal geschaltet und das resultierende Signal in den Selektivverstärker gegeben wird. Die Frequenz des Selektivverstärkers wird solange variiert bis ein maximales Signal erhalten wird.

3.2.2 Messung

Zur Bestimmung des Drehwinkels wird eine Probe und ein Interferenzfilter in den Aufbau eingesetzt und es wird der Elektromagnet auf die maximale Leistung eingestellt. Mittels des Goniometers wird die Intensität der Teilstrahlen so eingestellt, dass das Signal am Oszilloskop sein Minimum erreicht. Ist dies erreicht so wird der am Goniometer eingestellte Winkel aufgezeichnet und das B-Feld umgepolt. Nun werden erneut die beiden Teilstrahlen abgeglichen und der eingestellte Winkel aufgezeichnet. Die Messung wird für drei Proben und jeweils neun Interferenzfilter durchgeführt. Abschließen wird noch die Stärke des B-Feldes mit einer Hall-Sonde bestimmt.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der maximalen Kraftflussdichte des verwendeten Aufbaus mit Magnetfeld

Im Folgenden werden die Daten ausgewertet, die aufgenommen wurden, um das maximale Magnetfeld innerhalb des Aufbaus zu bestimmen. Wie bereits in Kapitel 3 beschrieben, ist eine Messreihe mit einer Hall-Sonde durchgeführt worden; die erhaltenen Messwerte sind in Tabelle 1 zu sehen. Graphisch aufgetragen sind ebendiese in Abbildung 2. Zur Bestimmung des Maximums ist eine Ausgleichsrechnung der Form

$$B(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e \quad (20)$$

für die Messwerte $B(z) > 100$ durchgeführt worden. Die Form dieser Funktion ist aufgrund der Symmetrie der Messwerte und der Ähnlichkeit zu quadratischen Funktionen gewählt worden. Diese Ausgleichsrechnung dient als Vergleich zu dem Wert für die maximale Magnetfeldstärke, der ebenso leicht per Augenmaß bestimmt werden kann. Als Regressionsparameter ergeben sich

$$\begin{aligned} a &= -(0,0076 \pm 0,0007) \text{ mTmm}^{-4} \\ b &= (0,39 \pm 0,06) \text{ mTmm}^{-3} \\ c &= -(7,6 \pm 0,7) \text{ mTmm}^{-2} \\ d &= (6,6 \pm 6,0) \text{ mTmm}^{-1} \\ e &= -(215 \pm 2) \text{ mT}. \end{aligned}$$

Über die Ableitung der Regressionsfunktion (20)

$$\frac{d}{dz}B(z) = 4a^3 + 3b^2 + 2c + d \stackrel{!}{=} 0 \quad (21)$$

und dem Umstellen nach z folgt ein Maximalwert von

$$z_{\max} = 128,24 \text{ mm.} \quad (22)$$

Hierüber folgt durch Einsetzen in Formel (20)

$$B_{\max} = 414,5 \text{ mT.} \quad (23)$$

Tabelle 1: Mit einer Hall-Sonde gemessene Magnetfeldstärke im Bereich des Luftspalts zur Bestimmung des Maximalwerts.

z / mm	B / mT
100	0
105	3
110	14
111	20
112	27
113	35
114	48
115	68
116	95
117	135
118	183
119	241
120	304
121	341
122	368
123	382
124	393
125	402
126	407
127	409
128	411
129	410
130	408
131	408
132	404
133	399
134	390
135	378
136	364
137	335
138	308
139	263
140	207
141	163
142	106
143	77
144	54
145	39
146	30
147	21
148	16
149	12
150	8
151	6
152	5
153	3
154	2
155	2
160	0

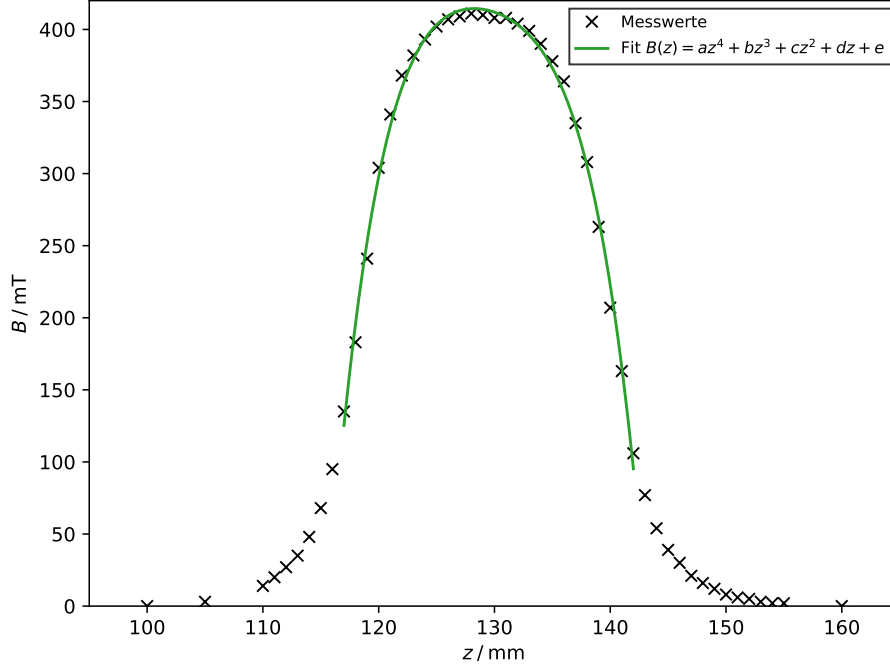


Abbildung 2: Die magnetische Kraftflussdichte B aufgetragen gegen die Längenkoordinate z innerhalb der Magnetspulen. Zur Bestimmung des Maximalwertes von B ist eine Ausgleichsrechnung der Form $B(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$ eingezeichnet.

4.2 Bestimmung der effektiven Masse

Für die Faraday-Rotation wird Licht im Wellenlängenbereich von $1,06 \mu\text{m}$ und $2,65 \mu\text{m}$ verwendet. Die durch Filtern erzeugten neun Wellenlängen sind in den Tabellen 2, 3 und 4 zu sehen. Es folgt die Auswertung der drei Proben mit den Parametern

$$\begin{aligned} d_{\text{hochrein}} &= 5,11 \text{ mm} \\ d_{N=1,2 \cdot 10^{18}} &= 1,36 \text{ mm} \\ d_{N=2,58 \cdot 10^{18}} &= 1,296 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Hierbei ist die erste benannte Probe d_{hochrein} die hochreine und die beiden letzten die dotierten GaAs-Proben mit der Dotierkonzentration N .

Es werden die Differenzen der beiden abgelesenen Winkel zu

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \quad (24)$$

bestimmt. Diese Winkelgrößen und die daraus abgeleitete Größe θ/d sind in den Tabellen 2, 3 und 4 eingetragen. In der Abbildung 3 wird θ/d gegen λ^2 aufgetragen.

Darüber hinaus wird die Differenz der normierten Rotationswinkel θ/d der beiden dotierten GaAs-Proben mit den Daten der hochreinen Probe in Abbildung 4 gebildet und

dargestellt. Für das Ermitteln der effektiven Massen werden zwei lineare Ausgleichsrechnungen der Form

$$f(\lambda^2) = \theta/d(\lambda^2) = a\lambda^2 \quad (25)$$

erstellt, aus denen sich die folgenden Parameter ergeben:

hochreine Probe - n-dotiert $N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$:

$$a_1 = (10,49 \pm 4,17) \cdot 10^{12} \frac{\text{rad}}{\text{m}^{-3}}$$

hochreine Probe - n-dotiert $N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$:

$$a_2 = (17,33 \pm 6,43) \cdot 10^{12} \frac{\text{rad}}{\text{m}^{-3}}$$

Für diese Berechnung sind die negativen Differenzen der normierten Rotationswinkel außer Acht gelassen worden. Dies rührt aus physikalischen Überlegungen, da diese Werte nicht sinnvoll wären. Für das Bestimmen der effektiven Massen wird Gleichung 18 nach der gesuchten Größe umgestellt, sodass sich

$$m^* = \sqrt{\frac{e_0^3}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3} \frac{NB_{\max}}{n} \frac{1}{a}} \quad (26)$$

als Zusammenhang ergibt. Werden nun die Regressionsparameter a_1 und a_2 aus dem vorherigen Schritt benutzt, so ergeben sich

$$m_1^* = (0,061 \pm 0,012) m_e$$

für die GaAs-Probe mit $N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ und

$$m_2^* = (0,072 \pm 0,013) m_e$$

für die GaAs-Probe mit $N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, in Einheiten der Ruhemasse m_e der Elektronen. Der benötigte Brechungsindex für Galliumarsenid von $n = 3,3543$ ist der Literatur entnommen worden [3]. Es liegen Abweichungen zu dem bestimmten Theoriewert der effektiven Masse $m^* = 0,067m_e$ [2] von jeweils 9,0 % und 7,5 % vor.

Tabelle 2: Messwerte und die daraus abgeleiteten Größen θ und θ/d der Messung zur n-dotierten GaAs-Probe mit $N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$.

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	θ / rad	$\frac{\theta}{d} / \text{rad m}^{-1}$
1,06	168,05	158,00	0,0877	64,49
1,29	210,92	196,00	0,1302	95,74
1,45	205,92	200,75	0,0451	33,16
1,72	161,20	158,00	0,0279	20,52
1,96	165,20	146,50	0,1632	119,97
2,156	166,20	161,00	0,0454	33,35
2,34	200,40	187,00	0,1169	85,96
2,51	255,00	250,75	0,0371	27,30
2,65	299,00	294,00	0,0436	32,06

Tabelle 3: Messwerte und die daraus abgeleiteten Größen θ und θ/d der Messung zur n-dotierten GaAs-Probe mit $N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$.

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	θ / rad	$\frac{\theta}{d} / \text{rad m}^{-1}$
1,06	279,48	275,58	0,0340	26,24
1,29	234,25	207,08	0,2371	174,34
1,45	256,50	245,15	0,0990	72,80
1,72	296,62	270,36	0,2292	168,50
1,96	280,33	269,33	0,0960	70,55
2,156	275,35	267,03	0,0726	53,38
2,34	307,82	290,43	0,1518	111,58
2,51	292,66	262,00	0,2676	196,73
2,65	295,05	282,05	0,1134	83,38

Tabelle 4: Messwerte und die daraus abgeleiteten Größen θ und θ/d der Messung zur hochreinen Probe.

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$	θ / rad	$\frac{\theta}{d} / \text{rad m}^{-1}$
1,06	243,00	226,78	0,1415	27,69
1,29	259,82	240,07	0,1724	33,73
1,45	241,25	221,62	0,1713	33,53
1,72	175,25	166,02	0,0805	15,76
1,96	262,12	181,33	0,705	137,97
2,156	178,28	171,23	0,0615	12,04
2,34	184,42	178,50	0,0517	10,11
2,51	188,42	168,33	0,1753	34,31
2,65	203,65	156,15	0,4145	81,12

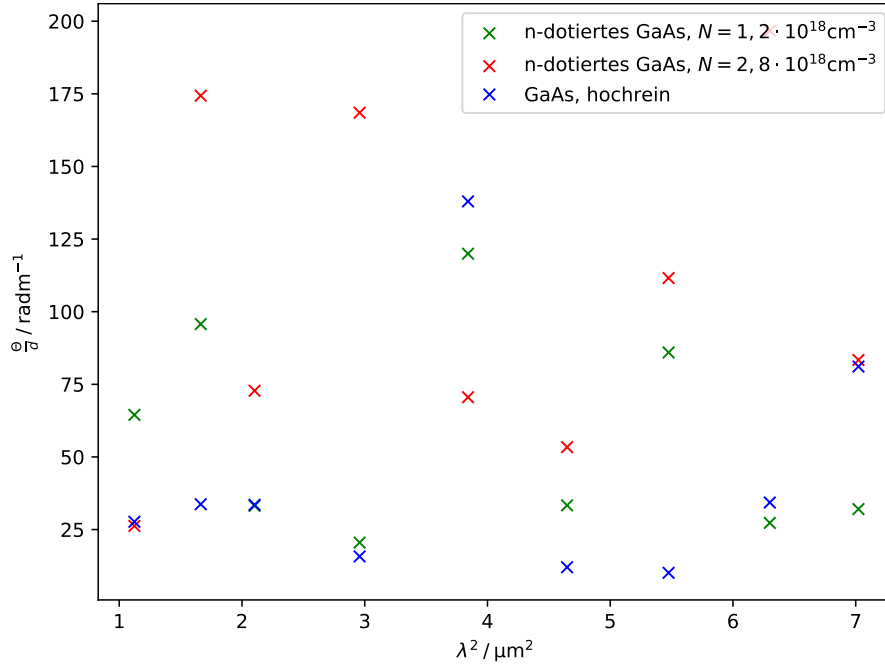


Abbildung 3: Die normierte Faraday-Rotation θ/d aufgetragen gegen das Quadrat der Wellenlänge λ für die n-dotierten und die hochreine GaAs-Probe.

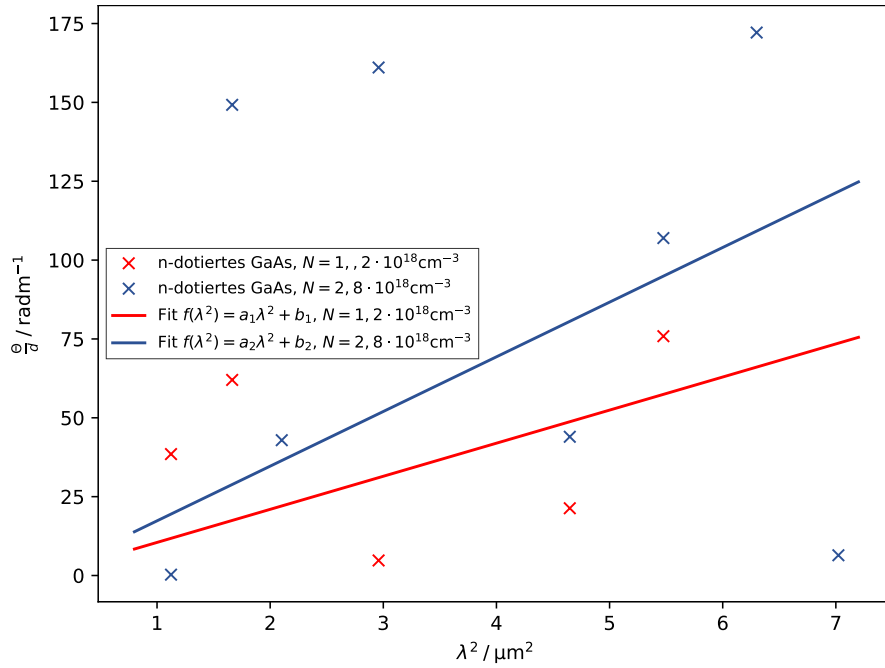


Abbildung 4: Die Differenz der normierten Faraday-Rotationen der dotierten GaAs-Proben mit denen der hochreinen GaAs-Probe aufgetragen gegen λ^2 .

5 Diskussion

Für den ersten Teil der Messung, nämlich der Bestimmung des Maximalwerts des Magnetfeldes, kann festgestellt werden, dass die gewählte Ausgleichsfunktion mit einer vierten Potenz eine sehr gute Näherung liefert. Es ist zu bemerken, dass der Maximalwert genau in der Mitte des Messbereichs liegt und somit ebenso der Mitte des Luftspalts zugeordnet werden kann. Da die Proben während der Messung recht genau an dieser Mitte angebracht gewesen sind, lässt sich dieser Wert als sehr wahrscheinlich annehmen.

Während der Durchführung des zweiten Messabschnitts ist bereits während der Messung aufgefallen, dass das Ablesen am Goniometer nur bedingt genau sein kann. Da das Einstellen des Minimums am Oszilloskop per Augenmaß geschehen ist, hatte dies direkte Auswirkungen auf das Ablesen an dem Winkelmesser. Auch, wenn bei der Durchführung darauf geachtet worden ist, dass die Messung für die beiden Polungen des Magnetfeldes nicht weit voneinander abweichen, ist hier durch die Differenz ein erheblicher Fehler aufgetreten. Somit ergaben sich negative Werte für die Winkeldifferenzen, die für die spätere Auswertung ignoriert worden sind. Da insgesamt pro Probe nur für neun Filter gemessen worden ist, hat dies Auswirkungen, da die Hälfte der Messwerte nicht brauchbar weg gelassen worden sind. Weitere Fehlerquellen können nur vermutet, nicht aber belegt werden, da der Fehler, der durch das Ablesen entstanden ist, zu dominierend ist.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 46*. URL: <https://moodle.tu-dortmund.de/mod/folder/view.php?id=471155> (besucht am 10.12.2018).
- [2] P. Lawaetz. „Valence-Band Parameters in Cubic Semiconductors“. In: *Phys. Rev. B* 4 (10 Nov. 1971), S. 3460–3467. DOI: 10.1103/PhysRevB.4.3460. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.4.3460>.
- [3] Edward D. Palik. „Gallium Arsenide (GaAs)“. In: *Handbook of Optical Constants of Solids*. Hrsg. von Edward D. Palik. Burlington: Academic Press, 1997, S. 429–443. ISBN: 978-0-12-544415-6. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-012544415-6.50018-2>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780125444156500182>.