

ESPERIENZA SPETTROMETRO

A. Rossi¹, G. Lucibello¹, F. Tassi¹

¹Facoltà di Fisica, Università degli Studi Milano Bicocca

Sommario

Lo scopo dell'esperimento è svolgere misure di spettroscopia con l'ausilio di un reticolo e di un prisma. In particolare, vogliamo caratterizzarli, sia studiando il numero di fenditure del reticolo sia valutando la relazione tra indice di rifrazione e lunghezza d'onda della luce per il prisma. Infine vogliamo usare questi strumenti per identificare un gas ignoto studiando il suo spettro di emissione.

1. Preparazione

Per cominciare è stato necessario mettere a fuoco lo spettrometro. Lo strumento è formato da un collimatore, un telescopio e una piattaforma rotante come mostrati in figura 1 [5]. Per mettere a fuoco il telescopio abbiamo portato lo spettrometro su un davanzale e, guardandoci attraverso, abbiamo ruotato la rotella laterale finché l'edificio di fronte (supposto a distanza sufficiente da far sì che i raggi fossero paralleli fra loro) e la croce di puntamento non apparissero entrambi nitidi. Oltre al telescopio abbiamo messo a fuoco anche il collimatore e abbiamo regolato l'apertura della sua fenditura. Per fare ciò abbiamo illuminato la fenditura con la lampada al sodio e, servendoci del reticolo, abbiamo regolato l'apparato finché non abbiamo osservato nitidamente le due righe gialle del doppietto del sodio. Come ultima cosa abbiamo controllato che la piattaforma fosse sullo stesso piano del telescopio e del collimatore, variando la sua altezza grazie alle viti presenti sullo strumento.



Figura 1. Spettrometro

2. Caratterizzazione del prisma

2.1. Obiettivi

Il prisma in dotazione era a base triangolare con due facce lucide e una opaca. L'obiettivo è quello di misurare il suo angolo al vertice e l'angolo di minima deviazione, per poi ricavare da queste misure l'indice di rifrazione.

2.2. Metodo

Utilizzando la lampada al mercurio (Hg) abbiamo controllato che la croce di puntamento fosse centrata nella fenditura e abbiamo appoggiato il prisma sulla piattaforma centrale in modo che la luce incidesse su una delle due facce lucide. Ruotando il telescopio abbiamo cercato il punto in cui veniva riflessa la luce del singoletto e abbiamo letto l'angolo compreso tra telescopio e collimatore grazie al goniometro integrato nella piattaforma. Tenendo poi fermi telescopio e collimatore abbiamo ruotato la piattaforma finché non abbiamo osservato

nuovamente la luce riflessa dall'altra faccia lucida e, facendo attenzione a leggere sempre dalla stessa scala, abbiamo letto il nuovo angolo tra telescopio e collimatore. Il goniometro integrato nello spettrometro aveva una precisione di 1' di grado grazie alla scala di Vernier. Per ottenere un risultato più accurato abbiamo effettuato, come spiegato prima, la misura tre volte, i valori degli angoli iniziali e finali sono riportati nella tabella 1. La differenza fra angolo iniziale e finale sta all'angolo al vertice cercato come la somma degli angoli interni di un triangolo sta all'angolo giro, dunque abbiamo che l'angolo al vertice è la metà della differenza fra angolo iniziale e finale.

Una volta misurato l'angolo al vertice, misuriamo l'angolo di minima deviazione, cioè l'angolo compreso tra il raggio incidente sul prisma e quello uscente quando la linea spettrale inverte il suo moto seppur si ruoti il supporto sempre nella stessa direzione. Svolgiamo la misura per più righe spettrali (tabella 2), usando quelle che si possono vedere in modo nitido.

2.3. Analisi dati

Come detto in precedenza, l'angolo al vertice α vale

$$\alpha = \frac{\theta_f - \theta_i}{2}$$

Avendo svolto la misura più volte, consideriamo la media dei valori ricavati e come errore l'errore della media, tenendo conto che sia θ_i sia θ_f hanno un proprio errore che consideriamo uguale alla sensibilità dello strumento. Abbiamo quindi misurato $\alpha = 1.0456 \pm 0.0002$ rad

Misuriamo l'angolo di minima deviazione δ_m descritto in precedenza. Dato che le righe spettrali non invertivano il loro moto in maniera rapida, consideriamo come errore il valore di 4' di grado, pari all'intervallo angolare compreso fra l'apparente inizio della frenata e l'apparente inizio del moto invertito.

Possiamo ora calcolare l'indice di rifrazione n per ogni riga spettrale a lunghezza d'onda λ tramite la relazione derivata dalle leggi dell'ottica

$$\sin \frac{\delta_m + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2}$$

Per conoscere la lunghezza d'onda delle righe spettrali, consideriamo i valori dati dal NIST [3] che corrispondono ai colori che vediamo e hanno intensità maggiore.

Nota una serie di valori di lunghezze d'onda e di indici di rifrazione, calcoliamo i coefficienti presenti nella formula di Cauchy per poter caratterizzare il prisma

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

In particolare, consideriamo quattro linee spettrali. Non è stato possibile considerarne altre in quanto poco visibili e nitide. Interpoliamo dunque i dati usando la libreria `iminuit` [1] sul modello della legge di Cauchy.

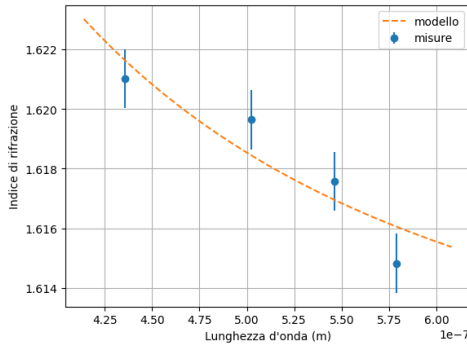


Figura 2. Legge di Cauchy

Otteniamo dunque i valori $a = 1.609 \pm 0.002$ e $b = (2.4 \pm 0.6) \cdot 10^{-3} \mu\text{m}^2$.

2.4. Conclusioni

Nota

Tutti i test d'ipotesi di questa relazione hanno come soglia di accettazione scelta il valore $p = 0.05$

La misura dell'angolo al vertice non sembra intaccata da errori di tipo causale, ma solo da quelli di tipo sistematico, dato i che valori sono tutti compatibili fra loro.

Il fit svolto sulle misure di λ e n sulla legge di Cauchy ha un valore del chi quadro ridotto pari a $\chi^2 = 1.9$. Paragonato al nostro p-value (corrispondente ad un $\chi^2_{critico} = 5.99$), possiamo concludere che il prisma preso in considerazione ha un indice di rifrazione che segue con sufficiente fedeltà il modello dato dalla legge di Cauchy. La matrice di covarianza di a e b è in tabella 3.

Come aspettato, in prima approssimazione il valore di n non dipende dalla lunghezza d'onda e si può considerare costante. Una misura più accurata si ottiene considerando anche una leggera variazione in funzione di λ . I valori di a e b non erano dati o noti a priori, ma si può notare che sono compatibili con i valori dei coefficienti tipici dei vari tipi di vetro. Dato che la correzione del termine quadratico è di circa l'1% del valore dell'indice di rifrazione, concludiamo che la correzione del termine di quarto ordine non è necessario nella nostra analisi in quanto più preciso dell'errore che consideriamo.

3. Caratterizzazione del reticolo

3.1. Obiettivi

Dopo aver studiato le linee spettrali con un prisma, vogliamo ora studiare lo stesso fenomeno, ma tramite l'utilizzo di un reticolo. Infatti, se prima le varie lunghezze d'onda venivano separate per via di un differente indice di rifrazione del prisma in funzione di λ , ora le stesse verranno diffratte ad angoli differenti grazie alle fenditure che compongono il reticolo. In particolare, ogni reticolo indicava il numero di fenditure per millimetro presenti, e il nostro obiettivo è verificare che

la nostra misura di quel valore derivato dalle leggi dell'ottica confermi quello dato dal costruttore.

3.2. Metodo

Montando il reticolo sulla piattaforma rotante abbiamo osservato tramite il telescopio lo spettro di emissione del nostro gas. Le linee spettrali si separano dato che i fasci interferiscono tra loro dando luogo ad una figura di interferenza i quali massimi sono proprio le righe spettrali osservate. Dalle leggi dell'ottica sappiamo che possiamo osservare un massimo quando i contributi si sommano in modo costruttivo, e ciò accade solo quando la differenza fra i cammini ottici è pari ad un multiplo intero della lunghezza d'onda.

Data quindi una linea spettrale, misurando il suo angolo di rotazione rispetto al massimo centrale possiamo ricavare il passo del reticolo d , dato che, come si vede dalla figura 3, la differenza di cammino ottico vale:

$$d \sin \theta = n\lambda$$

dove n è l'ordine del massimo di interferenza.

Illuminando il collimatore con la lampada spettrale, assicurandoci sempre che sia telescopio che collimatore fossero a fuoco, abbiamo verificato di aver montato il reticolo perpendicolarmente alla sorgente verificando che le linee spettrali osservate fossero simmetriche rispetto al massimo centrale, ovvero che l'angolo relativo ad una lunghezza d'onda fosse identico. Fatto questo accertamento abbiamo usato gli angoli misurati per ricavare la distanza tra le fenditure del reticolo. Abbiamo preso i dati utilizzando una lampada al sodio (utilizzando sia un reticolo che il costruttore indicava avere 600 fenditure per millimetro sia una con indicate 1200 fenditure al millimetro) e una al mercurio (usando il reticolo da 1200 fenditure al millimetro).

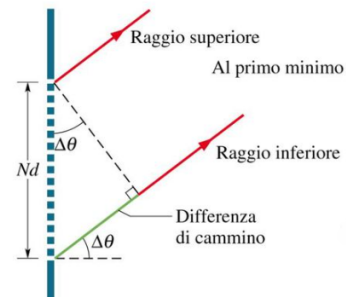


Figura 3. Schema diffrazione reticolo

3.3. Analisi dati

Per tutte le misure prese consideriamo sempre il primo massimo della figura di interferenza. Questo semplifica la relazione fra l'angolo e l'apertura della fenditura a

$$d \sin \theta = \lambda$$

Come angolo θ consideriamo la media degli angoli a sinistra e a destra del centro. Questo perché i due angoli in teoria dovrebbero essere uguali, quindi una loro media permette di ridurre l'errore casuale. Come errore di entrambi gli angoli consideriamo la sensibilità dello strumento ($1'$ di grado), in quanto la larghezza delle righe è sufficientemente sottile per permetterlo.

Per prima cosa abbiamo studiato lo spettro di emissione di una lampada al sodio (Na) attraverso un reticolo da 600 fenditure al millimetro. Le lunghezze d'onda sono state prese dal NIST [4] e consideriamo un errore di 1 nm. Gli angoli misurati sono indicati in tabella 4.

Per ogni linea otteniamo un valore delle aperture delle fenditure d e consideriamo la media di tutti i valori ottenuti. Da quest'ultima calcoliamo il numero di fenditure per millimetro per poterlo confrontare con quello indicato.

Dato che il reticolo usato non permetteva di osservare in maniera separata il classico doppietto giallo del sodio, abbiamo successivamente adottato un reticolo da 1200 fenditure al millimetro per poter studiare tale fenomeno. In questo caso siamo effettivamente riusciti a vedere le due linee come entità distinte. Dato che la differenza di lunghezza d'onda delle due linee è minore del nanometro, consideriamo un errore per λ di 1 Å. Calcoliamo d e successivamente la nostra misura del numero di fenditure per millimetro del reticolo in maniere equivalente al punto precedente (tabella 5).

Studiamo infine con il reticolo da 1200 fenditure per millimetro lo spettro di emissione per il mercurio (tabella 6).

3.4. Conclusioni

La misura degli angoli misurati alla sinistra del centro e di quella a destra conferma l'ipotesi che l'osservazione delle righe sia simmetrica, rendendo quindi valida la nostra scelta di considerare come angolo la loro media.

I valori del numero di fenditure per millimetro misurati sono riportati nella tabella 7. Sono presenti anche i valori di t Student corrispondenti alla misura. Effettuiamo un test del t di Student, sapendo che i valori critici dati i rispettivi gradi di libertà sono 2.92, 6.314 e 2.353.

In particolare, notiamo come i valori per la prima misura del sodio e per la misura del mercurio siano compatibili con il valore riportato dal costruttore nel limite di accettazione dettato dal nostro p -value scelto. Lo stesso non si può dire per quanto riguarda la seconda misura del sodio. Il valore assoluto del dato osservato è in una certa misura vicino al valore previsto, ma non in maniera sufficiente dato il suo errore. Una delle possibili cause si può trovare nel fatto che per poter considerare due linee spettrali così vicine abbiamo dovuto successivamente considerare un errore più piccolo rispetto agli altri due casi per la lunghezza d'onda.

4. Studio del gas ignoto

4.1. Obiettivi

Noti i parametri descrittivi del prisma e del reticolo, vogliamo ora usare la spettroscopia per identificare un gas ignoto. Studiamo quindi le linee spettrali e le confrontiamo con quelle note dei vari gas per risalire all'elemento che è presente nella lampada.

4.2. Metodo

Studiamo per prima cosa il gas usando il prisma per poter separare le linee spettrali. Notiamo che le linee che più si notano sono di colore viola, verde acqua e rosso. Usando i parametri caratterizzanti del prisma precedentemente misurati, calcoliamo le lunghezze d'onda delle linee spettrali dopo aver misurati i vari angoli di minima deviazione (tabella 8).

Successivamente svolgiamo la misura utilizzando il reticolo da 600 fenditure/mm. Calcoliamo anche in questo caso le lunghezze d'onda delle linee dopo aver trovato gli angoli del primo massimo di interferenza (tabella 11) come svolto per la lampada al sodio e al mercurio.

4.3. Analisi dati

Per quanto riguarda la misura con il prisma, la lunghezza d'onda si ottiene noto l'angolo di minima deviazione dalla formula inversa

$$\lambda = \frac{b}{\frac{\sin \frac{\delta_m + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - a}$$

Mentre dalla diffrazione causata dal reticolo osservando il primo massimo di interferenza, la lunghezza d'onda delle linee spettrali si ricava da

$$\lambda = d \sin \theta$$

Come errore per gli angoli consideriamo il valore di 4' di grado data la larghezza non infinitesima delle linee analogamente a quanto deciso per lo studio delle righe spettrali del mercurio.

4.4. Conclusioni

Il gas che ha come spettro di emissione principale le linee di colore viola, verde acqua e rosso è l'idrogeno. Verifichiamo le lunghezze d'onda misurate con quelle date dal NIST [2].

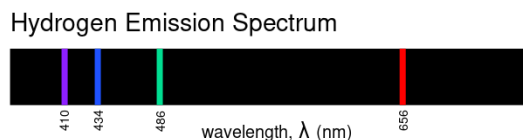


Figura 4. Spettro di emissione dell'idrogeno

Le lunghezze d'onda misurate con il prisma sono in tabella 10. I valori ottenuti possono essere ricondotti ai colori osservati, ma si può notare come l'errore della misura sia oltre la soglia dell'accettabile. Per tale ragione non ha senso svolgere un test del t di Student dato che sarebbe banalmente verificato. Una possibile spiegazione di questo fenomeno è data dal fatto che le linee spettrali non invertivano il loro moto in maniera istantanea, ma era presente un intervallo significativo che impediva di poter considerare un valore angolare con bassa sensibilità. Inoltre, per quanto la legge di Cauchy descriva meglio l'andamento dell'indice di rifrazione in confronto all'ipotesi che quest'ultimo sia costante, è da tenere in considerazione che esistono alternative migliori quali l'equazione di Sellmeier. In una futura ripetizione dell'esperimento può essere presa in considerazione l'ipotesi di usare un modello più complesso per spiegare il fenomeno.

Il risultato della misura con il reticolo è riportato in tabella 11. Confrontando le misure svolte con quelle aspettate, effettuiamo un test t di Student, i cui valori sono presenti nella stessa tabella. Per il valore delle fenditure/mm abbiamo usato quello ricavato sperimentalmente nella misura con la lampada

al sodio. A paragone con un $t_{critico} = 6.3$, concludiamo che effettivamente il gas è idrogeno, come ipotizzato in primo luogo dall'analisi qualitativa dei colori.

In generale, dalla nostra esperienza si è rivelato più preciso ed efficiente l'utilizzo della diffrazione del reticolo rispetto a quella del prisma per effettuare misure spettroscopiche. Questo può essere dovuto al fatto che le leggi della diffrazione attraverso delle fenditure siano esatte e ricavate dalla teoria dell'ottica, mentre la legge di Cauchy è solamente una descrizione empirica nata dalla volontà di descrivere la fenomenologia invece che essere stata ricavata da principi primi. Inoltre, se nel caso del reticolo si ha solo una variabile incognita (d o equivalentemente il numero di fenditure per millimetro), per il prisma è necessario interpolare le misure per trovare due valori (a e b), oltre ad essere necessaria la conoscenza dell'angolo al vertice, nel nostro caso non noto a priori. Questo è sicuramente fonte di maggiore errore, portando in maniera intrinseca la misura ad essere peggiore.

5. Appendice

5.1. Tabelle dati

$\theta_i(\pm 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad})$	$\theta_f(\pm 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad})$
0.9192	3.0104
0.9544	3.0470
0.9861	3.0761

Tabella 1. Angolo iniziale e finale per calcolo angolo al vertice

Riga spettrale	$\delta_m(\pm 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad})$
Giallo	0.830
Verde	0.835
Verde acqua	0.838
Viola	0.841

Tabella 2. Linee spettrali Hg e relativi angoli di minima deviazione

	a	b
a	1	-0.976
b	-0.976	1

Tabella 3. Matrice di covarianza dei coefficienti legge di Cauchy

Riga spettrale	$\theta(\pm 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad})$
Verde acqua	0.3040
Verde	0.3480
Giallo	0.3576

Tabella 4. Angoli del massimo di interferenza per Na con reticolo 600 fenditure/mm

Riga spettrale	$\theta(\pm 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad})$
Giallo 1	0.7764
Giallo 2	0.7774

Tabella 5. Angoli del massimo di interferenza per Na con reticolo 1200 fenditure/mm

Riga spettrale	$\theta(\pm 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad})$
Viola	0.5466
Verde	0.7047
Arancione 1	0.7534
Arancione 2	0.7556

Tabella 6. Angoli del massimo di interferenza per Hg con reticolo 1200 fenditure/mm

	fenditure/mm	t Student
Na 600	598.3 ± 0.7	2.43
Na 1200	1190.9 ± 0.3	34
Hg 1200	1197.5 ± 1.2	2.08

Tabella 7. Valori misurati di fenditure/mm dei reticoli

Riga spettrale	$\delta_m(\pm 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad})$
Viola	0.864
Verde acqua	0.860
Rosso	0.806

Tabella 8. Linee spettrali H e relativi angoli di minima deviazione

Riga spettrale	$\theta(\pm 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad})$
Viola	0.264
Verde acqua	0.299
Rosso	0.408

Tabella 9. Angolo del massimo di interferenza per H con reticolo 600 fenditure/mm

Riga spettrale	Lunghezza d'onda (nm)
Viola	450 ± 60
Verde acqua	530 ± 90
Rosso	600 ± 100

Tabella 10. Linee spettrali dell'H calcolate con il prisma

Riga spettrale	Lunghezza d'onda (nm)	t di Student
Viola	437 ± 2	1.5
Verde acqua	492 ± 2	3
Rosso	664 ± 2	4

Tabella 11. Linee spettrali dell'H calcolate con il reticolo

Riferimenti bibliografici

- [1] H. Dembinski e P. O. et al., «scikit-hep/iminuit», dic. 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3949207. indirizzo: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3949207>.
- [2] «NIST strong lines for H», indirizzo: <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/hydrogentable2.htm>.
- [3] «NIST strong lines for Hg», indirizzo: <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/mercurytable2.htm>.
- [4] «NIST strong lines for Na», indirizzo: <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/sodiumtable2.htm>.
- [5] «Scheda PASCO», indirizzo: https://elearning.unimib.it/pluginfile.php/1665283/mod_resource/content/2/Spettrometro.pdf.