

ESPERIENZA INTERFEROMETRO

A. Rossi, G. Lucibello, F. Tassi

Sommario—Lo scopo dell'esperimento è lo studio del fenomeno dell'interferenza della luce tramite l'utilizzo di un interferometro, in configurazione di Fabry-Perot e di Michelson, e di un reticolo, utilizzando come sorgente un laser He-Ne. Dallo studio dei massimi e minimi di interferenza generati e dallo studio del loro spostamento, vogliamo confermare la validità di varie leggi che governano tali fenomeni.

1. Configurazione di Fabry-Perot

1.1. Obiettivi

Montato l'interferometro in configurazione di Fabry-Perot, ci poniamo come fine la verifica della legge che determina la posizione dei massimi di interferenza e di calibrare il micrometro che regola la distanza fra gli specchi.

1.2. Metodo

1.2.1. Misure preliminari e assemblaggio

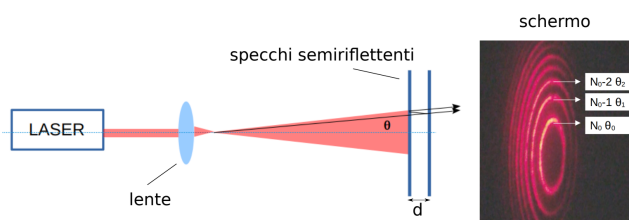


Figura 1. Interferometro in configurazione di Fabry-Perot

Configurando l'interferometro come mostrato nella figura 1, si osservano sullo schermo vari cerchi concentrici, mostrando chiaramente il fenomeno dell'interferenza. Per calcolare a quale angolo si posizionano i punti di massima interferenza abbiamo calcolato il rapporto tra il raggio r delle frange di interferenza e la distanza D tra schermo e fuoco della lente, dalla relazione:

$$\theta = \arctan\left(\frac{r}{D}\right)$$

Con un metro a nastro abbiamo misurato la distanza D_{tot} tra lente e schermo, partendo dalla posizione della lente convergente: l'errore su questa misura è maggiore rispetto a quella dello strumento, data l'impossibilità di mantenere il nastro perfettamente dritto, scegliamo dunque un errore di 5 mm.

Per calcolare D abbiamo quindi sottratto da D_{tot} la distanza focale D_{fuoco} che supponiamo nota senza errore. Le misure ottenute si trovano nella tabella 1.

Per misurare i raggi (tabella 2), infine, abbiamo segnato sul foglio, che ci serviva da schermo nell'esperimento, il centro dei cerchi concentrici proiettati e la posizione dei primi cinque massimi i quali erano i più facilmente distinguibili. Misuriamo quindi i diametri delle frange e otteniamo come errore la metà della sensibilità dello strumento utilizzato, cioè il rigello.

1.2.2. Misurazione dello scorrimento delle frange

Infine mantenendo l'interferometro nella stessa posizione, lasciando quindi D invariata, abbiamo calibrato il micrometro. Vogliamo quindi confermare, supponendo vere le leggi dell'ottica, la giusta taratura delle tacche del micrometro.

Abbiamo ricavato l'angolo di riferimento analogamente a come fatto per la misura precedente. Scelto un punto di riferimento sullo schermo, dopo aver fatto compiere allo strumento un giro a vuoto, una persona faceva ruotare il micrometro di una quantità prefissata Δd mentre un'altra contava il numero di frange ΔN che scorreva attraverso il punto scelto.

1.3. Analisi dati

1.3.1. Conferma della legge dei massimi

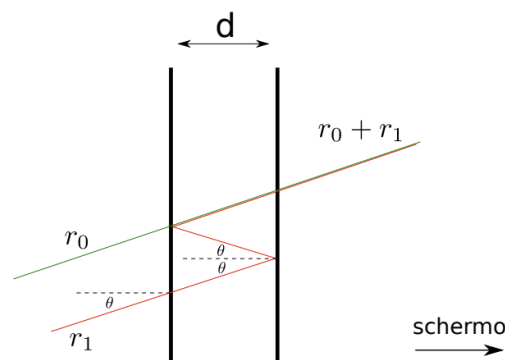


Figura 2. Schema degli specchi semi-riflettenti

In figura 2 vediamo il percorso di un raggio nel caso particolare in cui riflette due volte nella cavità di Fabry-Perot prima di raggiungere lo schermo. Visto che i raggi che tornano indietro non giungono allo schermo e sono dunque irrilevanti per le nostre misure, sappiamo che, prima di uscire dalla cavità, la luce sarà stata riflessa un numero pari di volte e che quindi le onde saranno sempre sfasate di un fattore $\delta_r = 2\pi k$, dove k indica il k -esimo raggio riflesso verso lo schermo.

La relazione che lega i massimi di interferenza è (Cap. 3 [2]):

$$\frac{\lambda}{2\pi} \delta_r + 2d \cos \theta = N\lambda \quad (1)$$

e si ottiene dunque

$$2d \cos \theta = (N - k)\lambda \quad (2)$$

$N - k$ sarà un numero intero che avrà come massimo un numero N_0 , che corrisponde al primo anello di interferenza nell'immagine generata. Si può quindi scrivere $N - k = N_0 - n$, dove n indica l' n -esimo anello di interferenza costruttiva partendo dal raggio più piccolo ($n = 0, 1, \dots$). Si ottiene dunque una relazione del tipo

$$\cos \theta = \frac{N_0 \lambda}{2d} - \frac{n \lambda}{2d} \quad (3)$$

Per limitare l'errore nella stima di N_0 e d scriviamo

$$\frac{2 \cos \theta}{\lambda} = \frac{N_0}{d} - \frac{n}{d} \rightsquigarrow y = A + Bn \quad (4)$$

Conoscendo quindi θ per l' n -esimo raggio è possibile interpolare i dati per ottenere sia N_0 sia d .

1.3.2. Analisi dello scorrimento delle frange

Assumendo $D \gg r \rightsquigarrow \cos \theta \sim 1$ si ottiene:

$$2\Delta d = \Delta N \lambda \rightsquigarrow \Delta d' = \frac{1}{2} \Delta N \lambda$$

Per la propagazione degli errori:

$$\sigma_{\Delta d'} = |\Delta d'| \cdot \sigma_{\Delta N}$$

Conoscendo la stima di $\Delta d'$ possiamo confrontare la bontà del nostro modello con la misurazione del micrometro attraverso un test di t di Student della variabile

$$t = \frac{|\Delta d - \Delta d'|}{\sqrt{\sigma_{\Delta d}^2 + \sigma_{\Delta d'}^2}} \quad (5)$$

2. Conclusioni

Nota

Tutti i test d'ipotesi di questa relazione hanno come soglia di accettazione scelta il valore $p = 0.05$

2.1. Legge di interferenza

Per confermare la bontà del fit che abbiamo svolto, avendo usando il metodo dei minimi quadrati per ricavare una variabile distribuita normalmente, possiamo effettuare un test del chi quadro. Dati i numeri di gradi di libertà abbiamo calcolato il valore del chi quadro ridotto critico equivalente alla nostra soglia di accettazione essere $\tilde{\chi}_{critico}^2 = 2.6$. Il chi quadro ridotto della nostra misura vale $\tilde{\chi}^2 = 1.2$. Concludiamo dunque che le misure sono in accordo con il modello. Nella figura 3 è mostrato il confronto fra i dati previsti ed osservati, dove sull'asse delle ordinate è posta la variabile ausiliaria y definita nell'equazione 4. Otteniamo dal nostro fit i seguenti valori:

$$d = (5.26 \pm 0.01) \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad N_0 = (1.661 \pm 0.003) \cdot 10^4$$

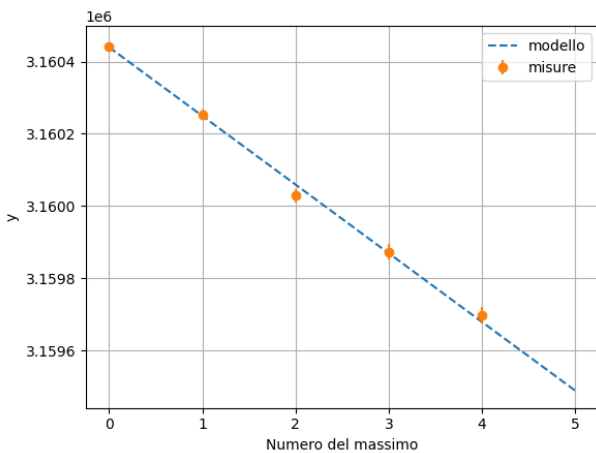


Figura 3. Confronto fra misure e modello

Per effettuare verifiche future più precise, si potrebbe misurare la distanza d fra i due specchi invece di ricavarla tramite un fit; questa operazione era irrealizzabile da parte nostra data la necessità di effettuare questa misura all'ordine dei micrometri.

2.2. Calibrazione micrometro in configurazione di Fabry-Perot

Osservando i valori di t nella tabella 3 e calcolando il valore critico di t equivalente alla nostra soglia di accettazione ($t_{critico} = 2.78$), possiamo concludere che tutte e tre le misurazioni sono in accordo con il modello teorico. Per effettuare un controllo più preciso, si potrebbe usare un metodo più raffinato per misurare la distanza dell'apparato dallo schermo per evitare di dover approssimare il coseno.

3. Configurazione di Michelson

3.1. Obiettivi

Dopo aver smontato i componenti dell'interferometro e averli posti in configurazione di Michelson, vogliamo calibrare nuovamente il micrometro per confermare in modo indipendente la misura precedente. Successivamente, ci poniamo come obiettivo la misura dell'indice di rifrazione del vetro aggiungendo al sistema di specchi una lastra di vetro.

3.2. Metodo

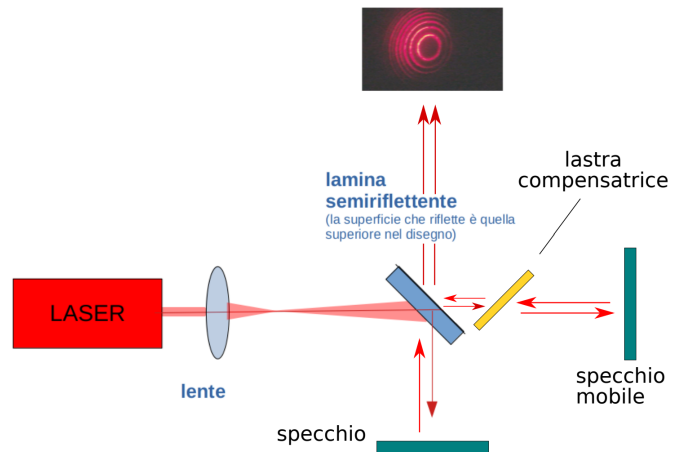


Figura 4. Interferometro in configurazione di Michelson

Per le successive misure l'interferometro è come mostrato nella figura 4. L'unica differenza è l'assenza della lastra compensatrice poiché l'osservazione del fenomeno dell'interferenza si poteva osservare ugualmente.

Per verificare la calibrazione del micrometro precedentemente svolta ripetiamo la misura in maniera analoga a quanto fatto in precedenza.

Rimanendo nella stessa configurazione, aggiungiamo una lastra di vetro fra il beam splitter e lo specchio mobile per poter misurare l'indice di rifrazione del vetro. Misurato lo spessore della lastra usando un righello, misuriamo il numero di frange ΔN che scorrono attraverso un punto riferimento inclinando la lastra di un certo angolo prefissato.

3.3. Analisi dati

3.3.1. Calibrazione micrometro

Facciamo le stesse considerazioni svolte in precedenza in 1.3.2. Le misure sono nella tabella 4.

3.3.2. Misura dell'indice di rifrazione del vetro

Abbiamo interposto tra lo specchio semiriflettente e quello mobile una lastra di vetro di spessore $\Delta s = (5 \pm 1) \cdot 10^{-3}$ m montata sul 'rotational pointer' (un supporto che consentiva di ruotarla). Inclinando la lastra di vetro abbiamo cercato il punto in cui le frange invertono la loro direzione, e grazie al goniometro riportato sull'interferometro abbiamo misurato che ciò avveniva a 0° . Scelto un angolo di rotazione abbiamo poi mosso la lastra di vetro e contato quante frange scorressero per un determinato punto di riferimento. Il numero di frange osservato e l'indice di rifrazione del vetro sono legati dalla relazione (Cap. 4.1.3 [2]):

$$n_{\text{vetro}} = \frac{(2 \cdot \Delta s - \Delta N \cdot \lambda)(1 - \cos \theta)}{2 \cdot \Delta s \cdot (1 - \cos \theta) - \Delta N \cdot \lambda} \quad (6)$$

L'errore per la misura è stato calcolato numericamente con la propagazione degli errori.

Le misure sono presenti nella tabella 5.

3.4. Conclusioni

3.4.1. Calibrazione micrometro in configurazione di Michelson

Per gli stessi motivi di quanto detto in precedenza per l'analoga misura in configurazione di Fabry-Perot, posto $t_{\text{critico}} = 2.78$, possiamo concludere che le nostre misure indicano che il micrometro sia ben calibrato. L'errore che abbiamo in questo caso è comparabile con quello precedente, ma a livello teorico la configurazione di Michelson permette di effettuare una misura più precisa data la presenza di un numero minore di fattori. Nel nostro calcolo, però, abbiamo approssimato il coseno dell'angolo, portando dunque al caso particolare nel quale i due errori sono del tutto equivalenti.

3.4.2. Indice di rifrazione del vetro

Le tre misure indipendenti dell'indice di rifrazione della lastra di vetro danno misure altamente compatibili e sovrapponibili fra loro. Tuttavia, non avendo un valore teorico o dato di riferimento, non possiamo concludere nulla se non in maniera qualitativa. L'indice di rifrazione del vetro ottico si aggira fra 1.4 e 2.4 [1]. Il nostro valore sarebbe dunque ragionevole.

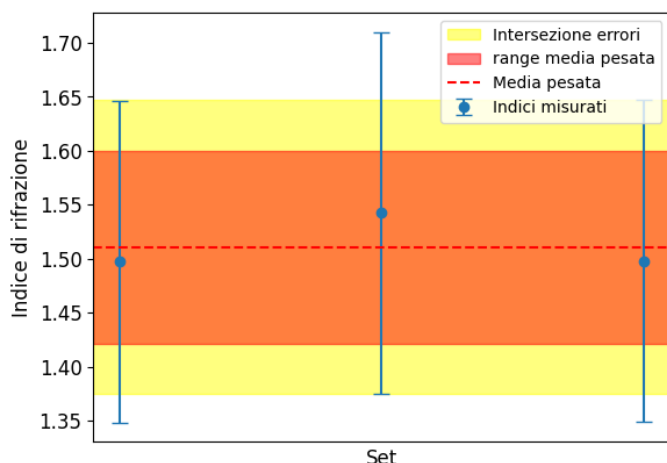


Figura 5. Indici di rifrazione misurati e banda di errore

4. Interferenza con un reticolo

4.1. Obiettivi

Infine studiamo il fenomeno dell'interferenza che si forma quando il raggio laser incontra un reticolo, che nel nostro esperimento sarà formato dalle tacche di un righello distanziate fra loro $d = 1$ mm. Questa misura è svolta con il fine di misurare la lunghezza d'onda della luce emessa dal laser.

4.2. Metodo

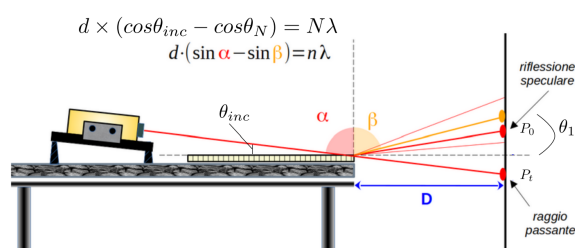


Figura 6. Modello del reticolo

Abbiamo posto un righello metallico all'estremo del banco ottico facendolo brevemente sporgere successivamente abbiamo proiettato il raggio laser in modo che incidesse sullo spigolo del righello cosicché una parte della luce proseguisse in linea retta in direzione dello schermo e una parte venisse parzialmente riflessa verso l'alto. Osserviamo quindi sullo schermo una serie di punti (come in figura 6) tra cui due più luminosi degli altri, che chiameremo P_t e P_0 , corrispondenti il primo al raggio passante e il secondo alla sua riflessione speculare. Quest'ultimo è il massimo di ordine 0 della figura di interferenza, abbiamo tenuto conto di altri quattro massimi, ognuno dei quali forma un angolo θ_N con l'orizzontale, riportati in tabella 6. Analogamente a quanto già visto, abbiamo ricavato i vari $\cos \theta_i$, dove la distanza $D = 1.605 \pm 0.005$ m tra lo schermo e il banco rappresenta il cateto maggiore, mentre quello minore è dato dalla distanza tra i punti e l'orizzontale.

Possiamo quindi concludere che le tacche del righello, seppur di dimensione molto maggiore della lunghezza d'onda del raggio, hanno dato origine a dei fenomeni di diffrazione e interferenza, in accordo con il principio di Huygens-Fresnel.

4.3. Modello teorico

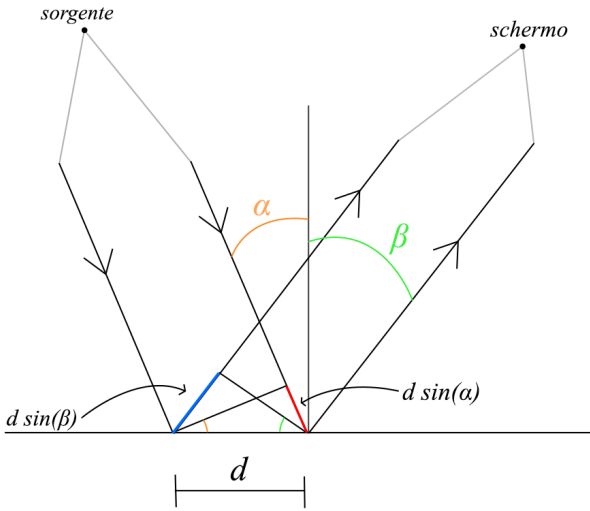


Figura 7. Interferenza locale

Dalla figura 7 si evince che la differenza di cammino tra i due raggi riflessi sarà $\delta x = d(\sin \alpha - \sin \beta)$. La differenza di fase dovuta a δx per generare una interferenza costruttiva dovrà quindi soddisfare la relazione:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \delta x = 2\pi N$$

Dalla quale si ottiene:

$$d(\sin \alpha - \sin \beta) = N\lambda \quad (7)$$

che può essere tradotta sostituendo ad α, β i corrispettivi angoli complementari:

$$d(\cos \theta_{inc} - \cos \theta_N) = N\lambda \quad (8)$$

4.4. Analisi dati

Definendo

$$l := d(P_t, P_0)$$

$$L(N) := d(P_0, P_N)$$

e osservando che $D \gg L \wedge D \gg l$ (D è maggiore di due ordini di grandezza rispetto ad entrambi) allora si possono applicare le seguenti approssimazioni:

$$\theta_{inc} = \arctan\left(\frac{l/2}{D}\right) \sim \frac{l}{2D} \quad (9)$$

$$\theta_N = \arctan\left(\frac{L + l/2}{D}\right) \sim \frac{L + l/2}{D} \quad (10)$$

$$\cos(\theta_{inc}) \sim 1 - \theta_{inc}^2/2 \quad (11)$$

$$\cos(\theta_N) \sim 1 - \theta_N^2/2 \quad (12)$$

Considerando 11 e 12 e sostituendo in 8 si ottiene:

$$\underbrace{\frac{d}{2}(\theta_N^2 - \theta_{inc}^2)}_y = N\lambda \quad (13)$$

Date le approssimazioni si ottiene la seguente formula di propagazione degli errori per y :

$$\sigma_y(N) = \frac{d}{D^2} \sqrt{\left(\frac{Ll - L^2}{D} \sigma_D\right)^2 + ((l - 2L)\sigma_L)^2 + (L\sigma_L)^2} \quad (14)$$

Utilizziamo il metodo dei minimi quadrati per eseguire un fit della relazione $y = N\lambda$ con errore $\sigma_y(N)$.

Abbiamo raccolto in totale quattro misure (tabella 6), ma una di esse era anomala rispetto alle altre (8). Per tale ragione, supponiamo sia più probabile che ci sia stato un problema non ben definito nell'atto di misurazione e la scartiamo.

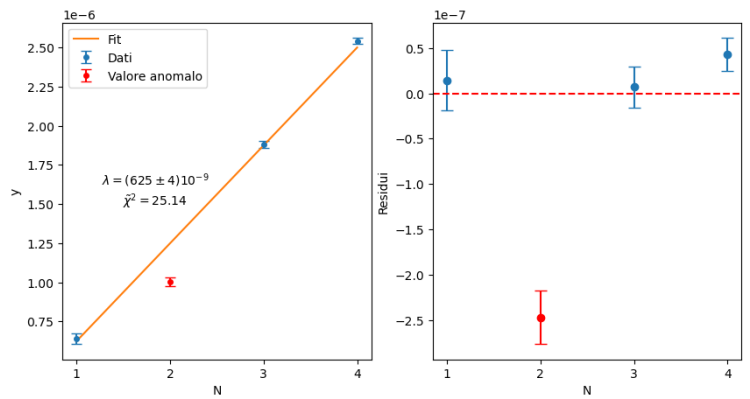


Figura 8. Fit anomalo

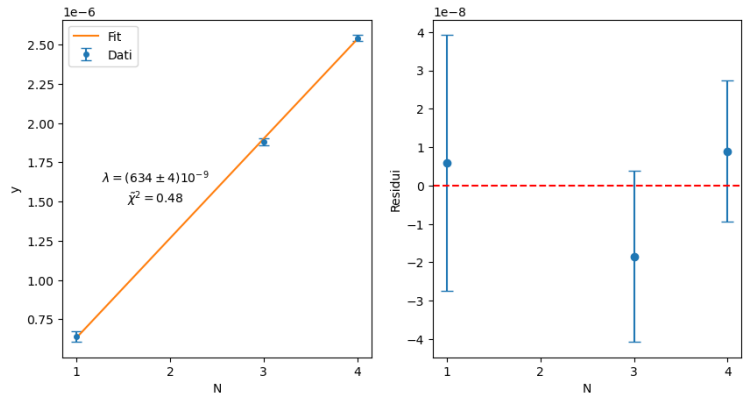


Figura 9. Fit corretto

4.5. Conclusioni

Come precedentemente accennato, scartiamo una misura data la sua evidente anomalia. Con i dati rimanenti, svolgiamo un fit con il metodo dei minimi quadrati, ottenendo un chi quadro ridotto pari a $\chi^2_{critico} = 0.48$, confermando la validità del modello. Consideriamo poi il valore noto della lunghezza d'onda del laser $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, e possiamo dunque dire che il t di Student della nostra misura vale $t = 0.19$. Ricordando che il corrispettivo valore critico per la nostra accettazione dati i gradi di libertà di questa misurazione è $t_{critico} = 4.30$, concludiamo che abbiamo ottenuto un risultato compatibile con il valore dato.

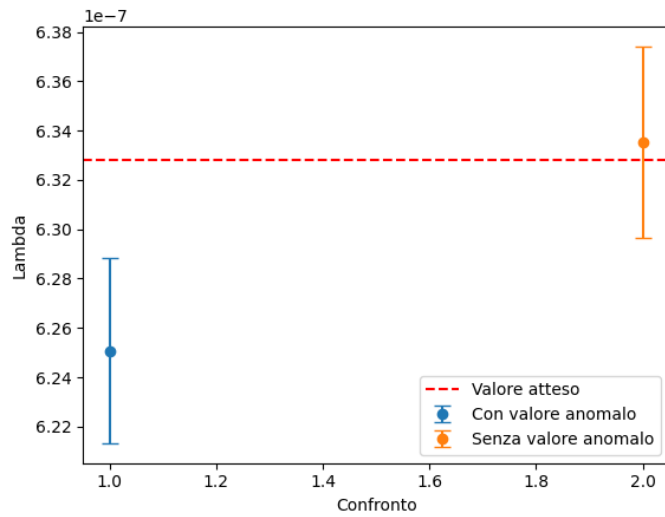


Figura 10. Lunghezza d'onda misurata con e senza valore anomalo

Riferimenti bibliografici

- [1] H. Bach e N. Neuroth, *The Properties of Optical Glass* (Schott Series on Glass and Glass Ceramics). Springer Berlin Heidelberg, 2012, ISBN: 9783642577697. indirizzo: <https://books.google.it/books?id=y3nnCAAQBAJ>.
- [2] «Scheda esperienza», indirizzo: https://elearning.unimib.it/pluginfile.php/1678321/mod_resource/content/2/Interferometro-3.pdf.

D_{tot}	D_{fuoco}	D
$(1.605 \pm 0.005) \text{ m}$	$1.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$(1.587 \pm 0.005) \text{ m}$

Tabella 1. Misure distanze

n	1	2	3	4	5
$r \text{ (cm)}$	1.35	2.20	2.90	3.30	3.70

Tabella 2. Posizione dei massimi di interferenza

$\Delta d \text{ (}\mu\text{m)}$	ΔN					$\langle \Delta N \rangle$	$\sigma_{\langle \Delta N \rangle}$	$\Delta d' \text{ (}\mu\text{m)}$	$\sigma_{\Delta d'}$	$t_{Student}$
10 ± 0.25	27	32	29	30	29	29.4	0.7	9.3	0.3	2.05
7 ± 0.25	19	22	20	20	21	20.4	0.5	6.5	0.3	1.89
5 ± 0.25	15	14	14	14	16	14.6	0.4	4.6	0.3	1.39

Tabella 3. Conteggio ΔN per Fabry-Perot

$\Delta d \text{ (}\mu\text{m)}$	ΔN					$\langle \Delta N \rangle$	$\sigma_{\langle \Delta N \rangle}$	$\Delta d' \text{ (}\mu\text{m)}$	$\sigma_{\Delta d'}$	$t_{Student}$
10 ± 0.25	29	33	28	29	31	30.0	0.8	9.5	0.4	1.43
7 ± 0.25	22	21	18	21	20	20.4	0.6	6.5	0.3	1.73
5 ± 0.25	14	15	17	15	16	15.4	0.5	4.9	0.3	0.441

Tabella 4. Conteggio ΔN per Michelson

$\Delta \theta \text{ (}^\circ\text{)}$	ΔN					$\langle \Delta N \rangle$	$\sigma_{\langle \Delta N \rangle}$	n_{vetro}	$\sigma_{n_{vetro}}$
2 ± 1	3	4	3	3	3	3.2	0.2	1.5	0.1
3 ± 1	7	9	7	6	7	7.2	0.4	1.5	0.2
5 ± 1	21	22	21	20	22	21.2	0.3	1.5	0.1

Tabella 5. Conteggio ΔN per vetro

N	$\theta \text{ (} 10^{-3} \text{ rad)}$	σ_θ
0	5,34	0,05
1	6,43	0,04
2	6,97	0,04
3	8,12	0,03
4	8,89	0,03

Tabella 6. Angoli massimi righello