

# ESPERIENZA CIRCUITI 1

A. Rossi<sup>1</sup>, G. Lucibello<sup>1</sup>, F. Tassi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facoltà di Fisica, Università degli Studi Milano Bicocca

## Sommario

In questo esperimento vogliamo caratterizzare un voltmetro e un amperometro studiandone le relative resistenze per poi verificare due leggi fondamentali dell'elettronica quali la prima legge di Ohm e la legge di Shockley, usando successivamente quest'ultima per caratterizzare un diodo.

## 1. Strumentazione

Per la costruzione dei circuiti ci siamo serviti di una breadboard, la quale collegata ad un generatore di tensione permetteva di portare la corrente su delle piste connettive, e di vari resistori con diversi valori di resistenza. Inoltre avevamo in dotazione una cassetta a decade di resistenze che ci consentiva di variare ampiamente e velocemente la resistenza applicata al circuito. Per le misurazioni abbiamo usato un multimetro palmare per la tensione e un multimetro da banco per la corrente. Per collegare questi strumenti al circuito nelle apposite configurazioni abbiamo usato dei cavi con connettori a banana.

## 2. Caratterizzazione della strumentazione

### 2.1. Obiettivi

Il primo obiettivo di questo esperimento è ricavare dalla legge di Ohm le resistenze di voltmetro e amperometro tenendo conto di come questi strumenti si comportano all'interno del nostro circuito.

### 2.2. Metodo

Per misurare le resistenze degli strumenti che avevamo in dotazione abbiamo ragionato sugli ordini di grandezza di quest'ultime. Un voltmetro va collegato in parallelo al circuito in modo che sia sottoposto alla stessa differenza di potenziale della resistenza, ciò significa che affinché un voltmetro misuri una tensione perturbando al minimo il circuito a cui viene collegato esso deve avere una resistenza interna molto alta. Per un amperometro, che va collegato in serie, essendo che la corrente in un circuito in serie è la stessa in tutto il circuito, vale dunque l'opposto e deve avere una resistenza interna molto piccola. Per questo motivo abbiamo configurato i nostri strumenti in maniera differente in base al nostro obiettivo, seguendo gli schemi in figura 1 presa dalla scheda dell'esperienza [2].

Come resistenza abbiamo usato la decade la quale ci permetteva di variare in un range tra 1  $\Omega$  e 10  $M\Omega$ . Per misurare la resistenza dell'amperometro  $R_A$  abbiamo quindi usato la prima configurazione, la quale ci permetteva di trascurare la resistenza del voltmetro. Variando quindi il voltaggio, abbiamo misurato come variasse l'intensità di corrente in base alla resistenza che immettevamo. Per questa configurazione abbiamo usato resistenze piccole, da un minimo di 10  $\Omega$  fino a un massimo di 400  $\Omega$ .

Successivamente passando alla seconda configurazione abbiamo, nello stesso modo, calcolato la resistenza interna del voltmetro. In questo caso abbiamo usato resistenze dell'ordine dei  $M\Omega$ .

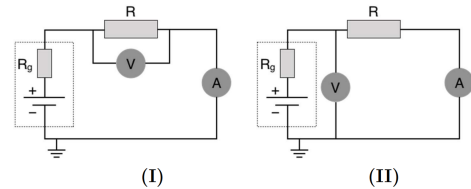


Figura 1. Configurazioni circuiti per misura resistenze

Per entrambe le misure consideriamo sia per il voltaggio del generatore sia per la corrente misurata dall'amperometro un errore relativo dell'1%. La decade di resistenze riportava un errore strumentale pari all'1% + 0.2 $\Omega$ .

### 2.3. Analisi dati

#### 2.3.1. Resistenza interna amperometro

Facendo riferimento alla configurazione I e considerando  $R_V \gg R$  vale che

$$R_{eq} = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \right)^{-1} + R_A = \frac{R \cdot R_V}{R + R_V} + R_A \sim R + R_A$$

Quindi, note tensione  $V$  e intensità di corrente  $I$  otteniamo la resistenza dell'amperometro come

$$R_A = \frac{V}{I} - R$$

I dati presi per questa misura sono in tabella 1.

#### 2.3.2. Resistenza interna voltmetro

Usando la configurazione II e considerando  $R \gg R_A$  abbiamo che

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R + R_A} \sim \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}$$

Note tensione  $V$  e intensità di corrente  $I$  otteniamo la resistenza del voltmetro come

$$R_V = \frac{R \cdot V/I}{R - V/I}$$

I dati presi per questa misura sono in tabella 2.

### 2.4. Conclusioni

Calcolate le resistenze per ogni misura, facciamo successivamente la media per ottenere un singolo valore per entrambi gli strumenti. Come errore consideriamo l'errore della media. Dalle nostre misure concludiamo che l'amperometro e il voltmetro hanno resistenze costanti e di valori  $R_A = (95 \pm 1) \Omega$  e  $R_V = (1.0 \pm 0.1) M\Omega$ .

Non avendo un valore noto, non possiamo effettuare test d'ipotesi per valutare quantitativamente la bontà della nostra misura. Gli ordini di grandezza delle resistenze dei due strumenti sono sensati con le approssimazioni che abbiamo fatto, rendendo quindi valido il nostro ragionamento e di conseguenza la misura.

### 3. Legge di Ohm

#### 3.1. Obiettivi

Vogliamo verificare la prima legge di Ohm studiando la relazione tra la differenza di potenziale ai capi di un resistore e l'intensità di corrente che attraversa il circuito.

#### 3.2. Metodo

In dotazione avevamo più resistori, noi abbiamo scelto di costruire il circuito con uno che il multimetro segnava avere resistenza pari a 997  $\Omega$ . Abbiamo reputato questo valore più preciso rispetto a quelli tabulati in quanto le resistenze fornite potrebbero essersi usurate col tempo. Come errore della misura del multimetro consideriamo l'1% del valore.

Abbiamo disposto i nostri strumenti come mostrato nella seconda configurazione, quindi abbiamo variato la tensione aumentandola di mezzo volt per misura e abbiamo letto di quanto variasse l'intensità sull'amperometro.

#### 3.3. Analisi dati

Nota la resistenza  $R$  e la tensione  $V$ , la legge di Ohm afferma che l'intensità di corrente  $I$  segua una relazione lineare rispetto alla tensione

$$I = \frac{V}{R}$$

La resistenza presente nell'equazione è quella equivalente del circuito. Il nostro resistore non ha resistenza tale da trascurare la resistenza interna dell'amperometro, quindi va considerata effettivamente come un secondo resistore in serie. Possiamo invece ignorare quella del voltmetro dato che è di vari ordini di grandezza superiore ed è collegato in parallelo. Trascuriamo anche la resistenza del generatore in quanto il suo ordine di grandezza è trascurabile rispetto alle resistenze utilizzate.

Consideriamo un errore dell'1% sulle misure date dall'amperometro.

Le misure sono in tabella 3. Con esse svolgiamo un'interpolazione lineare con iminuit [1].

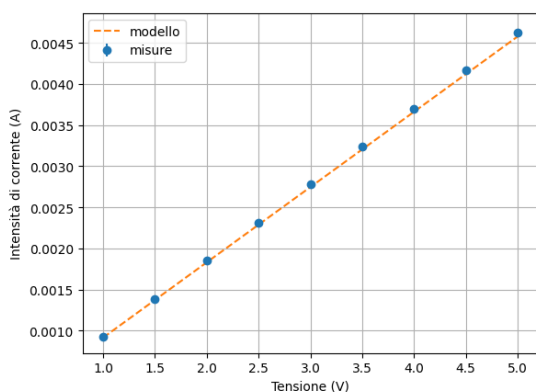


Figura 2. Misure di  $V$  e  $I$  a confronto con il modello ricavato con interpolazione

La resistenza equivalente del circuito data dal fit è  $R_{fit} = (1080 \pm 4) \Omega$ .

### 3.4. Conclusioni

#### Nota

Tutti i test d'ipotesi di questa relazione hanno come soglia di accettazione scelta il valore  $p = 0.05$

Nota la resistenza del resistore  $R$  e quella dell'amperometro  $R_A$ , abbiamo che la resistenza equivalente del circuito è  $R_{eq} = (1092 \pm 10)$ . Facendo un test di  $t$  di Student sul valore misurato e sul valore interpolato, abbiamo che  $t = 1.11$ , a paragone con un  $t_{critico} = 1.86$ . Concludiamo dunque che nei limiti della nostra precisione la legge di Ohm è valida.

### 4. Misura di resistenze in serie e in parallelo

#### 4.1. Obiettivi

Verificata la prima legge di Ohm, vogliamo adesso testare il modello che permette di ricavare la resistenza equivalente dati dei resistori in serie o in parallelo.

#### 4.2. Metodo

Abbiamo usato due resistori uguali con resistenza 997  $\Omega$  (errore 1%). Il circuito è disposto secondo la seconda configurazione, montando prima i due resistori in serie e successivamente in parallelo. Abbiamo aumentato gradualmente la tensione di mezzo volt e abbiamo misurato ogni volta l'intensità.

#### 4.3. Analisi dati

Date  $k$  resistenze in serie, la resistenza equivalente è data

$$R_{eq} = \sum_{n=1}^k R_n$$

Il caso di resistenze in parallelo invece è descritto dalla legge

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{R_n}$$

Per entrambi i casi consideriamo un errore dell'1% sulle misure date dall'amperometro.

Interpoliamo in entrambi i casi le misure svolte (tabella 4 per resistenze in serie, tabella 5 per resistenze in parallelo) sulla legge di Ohm per ottenere la resistenza equivalente del circuito. Da quest'ultima ricaviamo successivamente la misura di entrambe le resistenze equivalenti.

I nostri resistori non hanno resistenza tale da trascurare la resistenza interna dell'amperometro, quindi quest'ultima va considerata effettivamente come un resistore in serie in entrambi i casi. Possiamo invece ignorare quella del voltmetro dato che è di vari ordini di grandezza superiore ed è collegato in parallelo. Trascuriamo anche la resistenza del generatore in quanto il suo ordine di grandezza è trascurabile rispetto alle resistenze utilizzate.

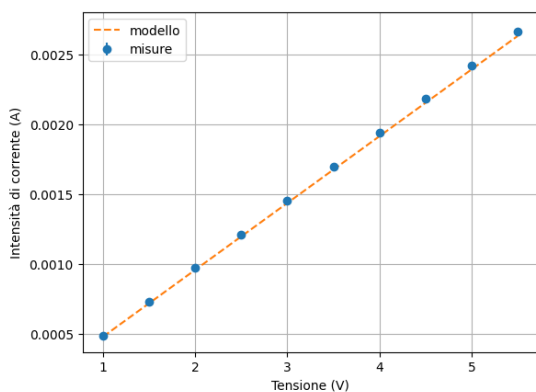


Figura 3. Resistenze in serie

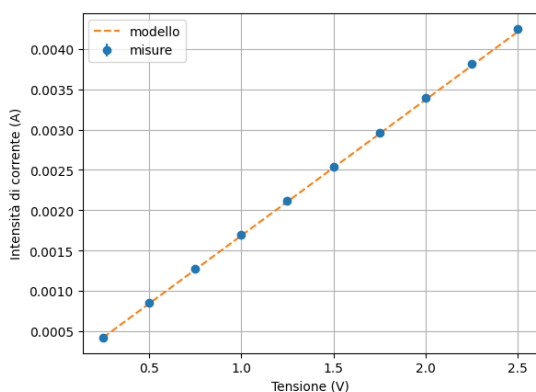


Figura 4. Resistenze in parallelo

Le resistenze equivalenti ottenute dalle interpolazioni sono  $R_{serie}^{fit} = (2064 \pm 7) \Omega$  e  $R_{parallelo}^{fit} = (589.6 \pm 0.2) \Omega$ .

#### 4.4. Conclusioni

Noto che entrambi i resistori hanno la stessa resistenza e noto il fatto che non è possibile approssimare la resistenza interna dell'amperometro, calcoliamo le resistenze equivalenti dei due circuiti dai dati misurati con il multimetro e dalla caratterizzazione degli strumenti: abbiamo che  $R_{serie} = (2090 \pm 20) \Omega$  e  $R_{parallelo} = (594 \pm 5) \Omega$ . Effettuiamo infine un test del t di Student per poter verificare le leggi usate. Per il caso delle resistenze in serie abbiamo che  $t = 1.22$  a confronto con un  $t_{critico} = 1.83$ . Invece per il caso delle resistenze in parallelo abbiamo che  $t = 0.80$  a confronto con un  $t_{critico} = 1.83$ . Come nel caso precedente concludiamo che le nostre osservazioni sono in accordo con quanto previsto dalla teoria.

### 5. Partitore resistivo

#### 5.1. Obiettivi

L'obiettivo di questa parte è creare un partitore resistivo in modo che la tensione applicata al circuito si dimezzi in uscita.

#### 5.2. Metodo

Costruiamo un circuito come quello in immagine 5

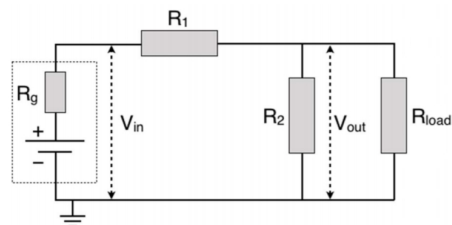


Figura 5. Partitore resistivo

#### 5.3. Analisi dati

Si ricava dalla legge di Kirchhoff per le tensioni applicata alla maglia di sinistra che:

$$V_{out} = V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

è quindi evidente che affinché valga  $V_{out} = 0.5V_{in}$ , deve valere che  $R_1 = R_2$ . La resistenza  $R_{load}$  non influisce sul risultato dato che quest'ultima è in parallelo con  $R_2$ , dunque avranno la stessa differenza di potenziale ai capi come ricavato dalla legge di Kirchhoff per le tensioni applicata alla maglia di destra. Per la misurazione, abbiamo usato gli stessi resistori utilizzati per il punto precedente il quali avevano resistenza pari a  $997 \Omega$ .

Non colleghiamo l'amperometro dato che non è necessario conoscere l'intensità di corrente che scorre nel circuito. Poniamo invece il voltmetro in parallelo alla resistenza  $R_2$ . Per lo stesso discorso fatto in precedenza per  $R_{load}$ , il valore della resistenza del voltmetro è ininfluente ai fini della misura dato che si trova posto in parallelo con  $R_2$ .

Prese le misure, calcoliamo il rapporto  $\alpha$  fra  $V_{out}$  e  $V_{in}$ . I valori di tutti e tre i dati per ogni misura sono in tabella 6. Consideriamo un errore relativo del 2% sulle misure del voltmetro. Noti i vari valori di  $\alpha$ , calcoliamo la loro media. Come errore prendiamo l'errore della media.

Il valore risultante dalle nostre osservazioni è  $\alpha_{mean} = 0.508 \pm 0.005$ .

#### 5.4. Conclusioni

Effettuiamo un test del t di Student fra il nostro valore di  $\alpha_{mean}$  e quello atteso (ovvero 0.5). Risulta che  $t = 1.69$ , a confronto con un  $t_{critico} = 2.015$  dati i gradi di libertà della misura, uguali al numero di misure dato che non è stato ricavato alcun parametro. Concludiamo che le nostre osservazioni rispecchiano la teoria e i nostri ragionamenti nei margini dati dal nostro errore.

### 6. Diodo

#### 6.1. Obiettivi

Come ultima cosa vogliamo sostituire i nostri resistori con un diodo per verificare la legge di Shockley.

#### 6.2. Metodo

Il diodo ha uno specifico lato negativo (anodo) e uno positivo (catodo), ciò permette alla corrente di fluire solo se il diodo è montato in un preciso verso, altrimenti il flusso viene interrotto. Per l'esperimento ci siamo assicurati quindi che l'anodo, indicato sul diodo da una linea, fosse collegato al polo positivo del generatore. In questo caso si dice che il diodo è in polarizzazione diretta. Il comportamento di un diodo è simile ad un

resistore ad alta resistenza per tensioni basse e ad un resistore a bassa resistenza per tensioni alte.

Sapendo questo facendo sempre riferimento alla figura 1 abbiamo configurato il nostro circuito seguendo il primo diagramma e, variando il potenziale dal generatore, misuriamo quindi la tensione ai capi del diodo e la corrente che fluisce nel circuito.

### 6.3. Analisi dati

La legge di Shockley lega la tensione  $V$  e l'intensità di corrente  $I$  tramite alcuni parametri caratteristici di un diodo, quali la corrente di saturazione inversa  $I_0$  e una costante  $g$ . Essa ha la forma

$$I = I_0(e^{\beta V/g} - 1)$$

dove  $\beta = q/kT$  è una costante che racchiude la carica dell'elettrone  $q$ , la costante di Boltzmann  $k$  e la temperatura  $T$ . A temperatura ambiente, abbiamo che  $\beta = 38.6 \text{ V}^{-1}$ . Per effetto Joule, il diodo dissipa calore e quindi di conseguenza dovrebbe scaldarsi, ma date le nostre tensioni e correnti il fenomeno non dovrebbe impattare sulle nostre misurazioni e dunque consideriamo la temperatura come effettivamente costante.

Per l'intensità di corrente consideriamo un'errore relativo del 4% dato che la legge di Shockley è una legge che descrive un diodo ideale e non uno reale.

Abbiamo effettuato 64 misure in cui la tensione ai capi del diodo variava fra  $0.4 \text{ V}$  e  $0.8 \text{ V}$  e abbiamo svolto un fit sulla legge. Studiando i residui normalizzati (figura 6), ci siamo però accorti che il nostro ragionamento era fallace dato che i residui non potevano essere ricondotti al solo errore casuale. Per poter affermare quanto detto, abbiamo ad esempio notato che solamente il 18.97% dei dati ha un residuo normalizzato compreso nell'intervallo  $[-1, 1]$ , quando la teoria prevede un valore del 68%. Inoltre, si può notare che essi seguano un pattern di tipo parabolico, mentre se l'errore fosse stato solo di tipo casuale, i residui si sarebbero disposti in maniera randomica senza seguire alcuna curva.

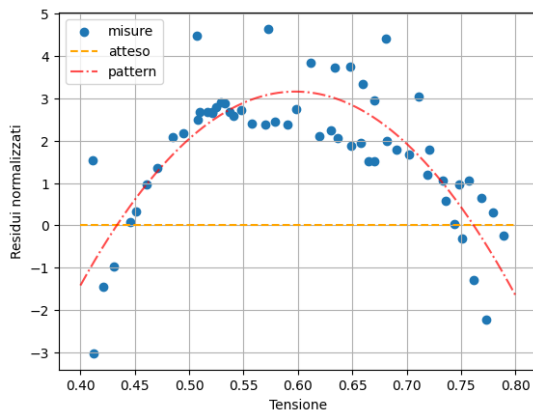


Figura 6. Residui normalizzati con pattern anomalo evidenziato

Questo ci ha portato a notare che i residui associati ai valori compresi fra  $0.5 \text{ V}$  e  $0.7 \text{ V}$  siano in realtà molto simili. Questi valori sono tali per cui la corrente che circola nel circuito è paragonabile a quella usata per studiare la resistenza dell'amperometro. Le osservazioni svolte ci portano a concludere

che per basse correnti e per alte correnti il valore della resistenza dell'amperometro è diversa da quella ricavata. Questo comportamento è in realtà tipico di questo tipo di strumento data la necessità di evitare di influenzare il circuito in maniera significativa.

Per tali ragioni, consideriamo solo i dati con tensione ai capi del diodo compresa fra  $0.5 \text{ V}$  e  $0.7 \text{ V}$  (tabella 7). Il totale dei dati passa dunque da 64 a 33 misurazioni. Svolgiamo dunque una seconda volta il fit sulla legge di Shockley, mostrato nelle figure 7 e 8 rispettivamente in scala logaritmica e lineare.

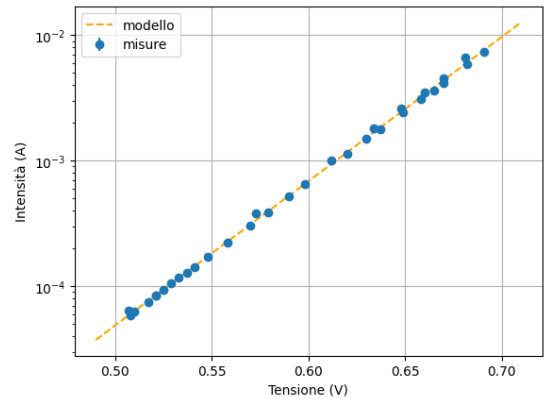


Figura 7. Misure sul modello della legge di Shockley in scala logaritmica

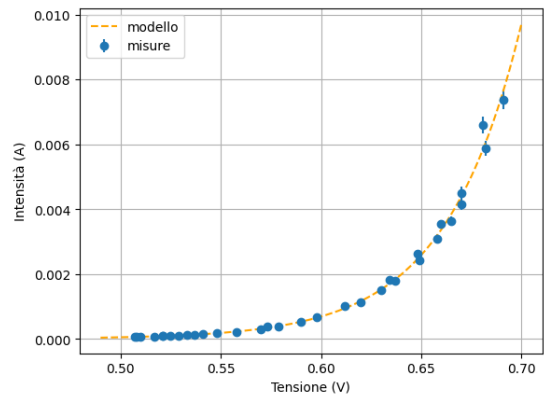


Figura 8. Misure sul modello della legge di Shockley in scala lineare

Guardando questa volta i residui normalizzati (figura 9), vogliamo ora controllare se sono compatibili con un errore di tipo casuale. Per verificare ciò studiamo la percentuale di dati presente negli intervalli da  $-n$  a  $n$  sull'asse delle ordinate, ricordando che il valore atteso dei residui normalizzati è 0 e la deviazione standard è 1. Nell'intervallo  $[-1, 1]$ , sono presenti il 72.73% dei dati, nell'intervallo  $[-2, 2]$ , sono presenti il 90.91% dei dati, nell'intervallo  $[-3, 3]$ , è presente il 100% dei dati. Se l'errore fosse normale, i valori per i tre intervalli sarebbero rispettivamente 68%, 95% e 99.7%. Osserviamo inoltre che questa volta i residui sono disposti in maniera casuale. Possiamo quindi concludere che effettivamente in questo range di tensioni l'errore è principalmente casuale.

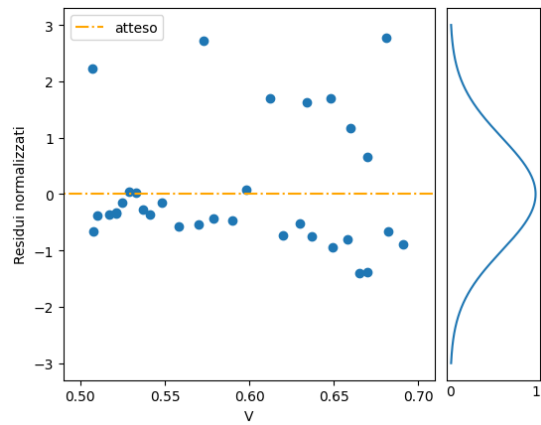


Figura 9. Residui normalizzati con dati scelti

Dall'interpolazione, ricaviamo come valore della corrente di saturazione inversa  $I_0 = (87 \pm 6) \cdot 10^{-12} \text{ A}$ . Per la costante del diodo che abbiamo chiamato  $g$ , il nostro fit dà come valore  $g = 1.458 \pm 0.006$ .

6.4. Conclusioni

Il fit svolto sui soli dati nel range da 0.5 V e 0.7 V ha un chi quadro ridotto  $\tilde{\chi} = 1.3$ . Avendo confermato dall'analisi dei residui che l'errore è principalmente di tipo casuale, possiamo svolgere un test del chi quadro. Dato il valore del p-value e i gradi di libertà, abbiamo che  $\tilde{\chi}_{ridotto} = 1.45$ . Concludiamo che nei limiti del nostro errore le nostre misure seguono la legge di Shockley.

Non abbiamo valori di  $I_0$  o di  $g$  di riferimento, dunque non possiamo valutare la bontà della nostra misura. Vale la pena notare che il valore di  $g$  è dell'ordine di grandezza di un'unità, valore tipico per questa costante.

Per poter confermare in maniera più precisa la legge, in future misurazioni può essere svolta una caratterizzazione dell'amperometro a correnti più basse e più alte di quelle da noi studiate per poter correttamente tenere in considerazione l'influenza dello strumento sulle nostre misure e poter dunque valutare il modello al di fuori del range a cui ci siamo limitati. Questo permetterebbe di fare valutazioni che a noi sono risultate impossibili, ad esempio calcolare il valore della tensione di soglia, ovvero il valore della tensione oltre la quale il diodo si comporta come una resistenza ohmica ed è possibile considerare una relazione di tipo lineare fra la tensione e l'intensità di corrente.

7. Appendice

7.1. Tabelle dati

| Resistenza ( $\Omega$ ) | Tensione (V) | Intensità (mA) |
|-------------------------|--------------|----------------|
| 10                      | 0.1          | 0.959          |
| 30                      | 0.5          | 3.89           |
| 43                      | 0.5          | 3.55           |
| 70                      | 0.5          | 2.98           |
| 100                     | 0.5          | 2.53           |
| 110                     | 0.1          | 0.502          |
| 168                     | 0.5          | 1.900          |
| 200                     | 1            | 3.39           |
| 200                     | 1            | 3.37           |
| 238                     | 0.5          | 1.50           |
| 300                     | 1            | 2.55           |
| 400                     | 1            | 2.03           |

Tabella 1. Dati presi per misurare la resistenza dell'amperometro

| Resistenza ( $M\Omega$ ) | Tensione (V) | Intensità ( $\mu A$ ) |
|--------------------------|--------------|-----------------------|
| 2                        | 5            | 2.99                  |
| 3                        |              | 2.15                  |
| 4                        |              | 1.72                  |
| 5                        |              | 1.48                  |
| 6                        |              | 1.30                  |
| 7                        |              | 1.19                  |

Tabella 2. Dati presi per misurare la resistenza del voltmetro

| Tensione (V) | Intensità (mA) |
|--------------|----------------|
| 1            | 0.926          |
| 1.5          | 1.39           |
| 2            | 1.85           |
| 2.5          | 2.32           |
| 3            | 2.78           |
| 3.5          | 3.24           |
| 4            | 3.70           |
| 4.5          | 4.16           |
| 5            | 4.63           |

Tabella 3. Dati presi per verificare la legge di Ohm

| Tensione (V) | Intensità ( $\mu A$ ) |
|--------------|-----------------------|
| 1            | 485                   |
| 1.5          | 729                   |
| 2            | 971                   |
| 2.5          | 1210                  |
| 3            | 1450                  |
| 3.5          | 1700                  |
| 4            | 1940                  |
| 4.5          | 2180                  |
| 5            | 2420                  |
| 5.5          | 2670                  |

Tabella 4. Dati presi per verificare la resistenza equivalente di resistenze in serie

| Tensione (V) | Intensità ( $\mu A$ ) |
|--------------|-----------------------|
| 0.25         | 423                   |
| 0.5          | 850                   |
| 0.75         | 1280                  |
| 1            | 1700                  |
| 1.25         | 2120                  |
| 1.5          | 2540                  |
| 1.75         | 2970                  |
| 2            | 3390                  |
| 2.25         | 3810                  |
| 2.5          | 4250                  |

**Tabella 5.** Dati presi per verificare la resistenza equivalente di resistenze in parallelo

| Tensione in entrata (V) | Tensione in uscita (V) | $\alpha$ |
|-------------------------|------------------------|----------|
| 1                       | 0.510                  | 0.510    |
| 2                       | 1.01                   | 0.507    |
| 3                       | 1.52                   | 0.507    |
| 4                       | 2.03                   | 0.507    |
| 5                       | 2.54                   | 0.507    |

**Tabella 6.** Dati presi per lo studio del partitore resistivo

| Tensione ( $10^{-1}$ V) | Intensità (A) |
|-------------------------|---------------|
| 5.07                    | 6.44          |
| 5.08                    | 5.87          |
| 5.10                    | 6.25          |
| 5.17                    | 7.53          |
| 5.21                    | 8.37          |
| 5.21                    | 8.38          |
| 5.25                    | 9.38          |
| 5.29                    | 1.05          |
| 5.33                    | 1.17          |
| 5.37                    | 1.28          |
| 5.41                    | 1.42          |
| 5.48                    | 1.73          |
| 5.58                    | 2.21          |
| 5.70                    | 3.04          |
| 5.73                    | 3.78          |
| 5.79                    | 3.88          |
| 5.90                    | 5.18          |
| 5.98                    | 6.54          |
| 6.12                    | 1.01          |
| 6.20                    | 1.13          |
| 6.30                    | 1.49          |
| 6.34                    | 1.81          |
| 6.37                    | 1.78          |
| 6.48                    | 2.63          |
| 6.49                    | 2.42          |
| 6.58                    | 3.10          |
| 6.60                    | 3.53          |
| 6.65                    | 3.64          |
| 6.70                    | 4.15          |
| 6.70                    | 4.50          |
| 6.81                    | 6.60          |
| 6.82                    | 5.87          |
| 6.91                    | 7.38          |

**Tabella 7.** Dati usati nel fit della legge di Shockley

## Riferimenti bibliografici

- [1] H. Dembinski e P. O. et al., «scikit-hep/iminuit», dic. 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3949207. indirizzo: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3949207>.
- [2] «Scheda», indirizzo: [https://elearning.unimib.it/pluginfile.php/1679478/mod\\_resource/content/1/main.pdf](https://elearning.unimib.it/pluginfile.php/1679478/mod_resource/content/1/main.pdf).