

# ESPERIENZA CIRCUITI 2

A. Rossi<sup>1</sup>, G. Lucibello<sup>1</sup>, F. Tassi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facoltà di Fisica, Università degli Studi Milano Bicocca

## Sommario

In questo esperimento vogliamo studiare le caratteristiche di resistenze, condensatori e induttanze in condizione di corrente impulsata e comprenderne il funzionamento all'interno di un circuito.

## 1. Strumentazione

Per ogni circuito costruito, ci siamo serviti di un generatore di funzioni e di un oscilloscopio.

Il generatore di funzioni (figura 1 [2]) è uno strumento in grado di poter produrre un segnale che può assumere svariate forme, rendendolo dunque un apparecchio versatile per vari tipi di misure. In questa esperienza ci siamo serviti sempre di segnali aventi la forma di un'onda quadra. Questo ci ha permesso di simulare un circuito in corrente continua che veniva periodicamente aperto e successivamente richiuso. La frequenza del segnale è regolabile, e ci siamo sempre posti in condizione tale che ogni fenomeno osservato avente un tempo proprio potesse considerarsi concluso anche se a livello teorico ciò avrebbe richiesto un tempo tendente all'infinito. Il generatore ha una resistenza interna che abbiamo misurato costruendo un circuito puramente resistivo e applicando la legge di Ohm. Misuriamo che  $R_{gen} = (51.7 \pm 0.6) \Omega$ .

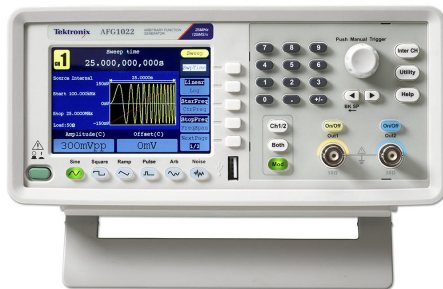


Figura 1. Generatore di funzioni

### Nota

Anche se il processo di carica teoricamente si completa in un tempo infinito, abbiamo sempre scelto una frequenza per l'onda quadra tale che i condensatori e gli induttori potessero considerarsi completamente carichi nei margini del nostro errore.

L'oscilloscopio (figura 2 [2]) è stato lo strumento di cui ci siamo serviti per misurare la tensione ai capi di tutti gli elementi circuitali che abbiamo usato. Grazie al suo display è possibile osservare l'andamento della tensione in maniera grafica, operazione non possibile con un multimetro. L'oscilloscopio è sempre stato collegato al generatore per poter verificare in ogni momento che il segnale utilizzato fosse realmente un'onda quadra. L'oscilloscopio ha una sua resistenza interna, e dato che misura delle tensioni il suo valore è molto maggiore delle resistenze usate nei circuiti ed è posto in parallelo ad esse. Inoltre ha anche una trascurabile capacità interna.

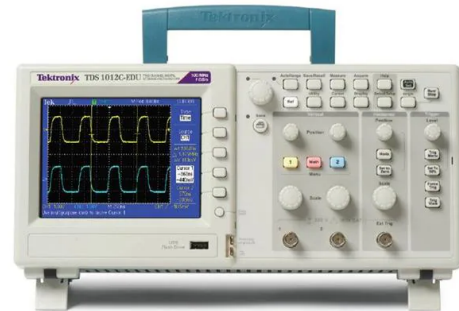


Figura 2. Oscilloscopio

## 2. Circuito RC

### 2.1. Obiettivi

Il primo circuito che abbiamo costruito era composto da una resistenza messa in serie con un condensatore. Abbiamo studiato l'andamento della tensione ai capi di un condensatore sia in fase di carica sia in quella di scarica. Infine abbiamo calcolato la capacità del condensatore.

### 2.2. Metodo

Abbiamo posto la resistenza e il condensatore in serie (figura 3). Le sonde dell'oscilloscopio misurano la tensione ai capi del condensatore. Abbiamo quindi campionato il grafico della tensione mostrata dall'oscilloscopio tramite il cursore integrato e abbiamo interpolato le nostre misure con le relazioni dettate dalla teoria sia per la carica che per la scarica.

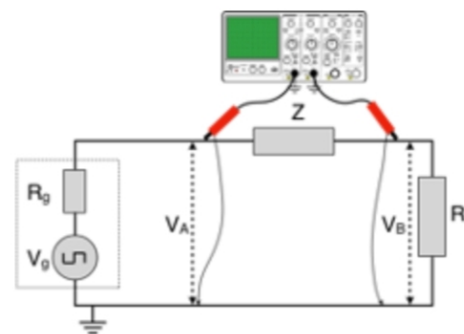


Figura 3. Schema circuito RC/RL

### 2.3. Analisi dati

La capacità del condensatore è definita come il rapporto fra la carica presente sulle armature del conduttore e la tensione a cui è posto

$$C = \frac{Q}{V}$$

Nella fase di carica, la legge di Kirchhoff applicata al circuito afferma che

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0$$

dove denominiamo  $V_0$  la tensione del generatore.

Risolvendo l'equazione differenziale per  $Q$ , ricaviamo da questa l'andamento della tensione ai capi del condensatore nel tempo

$$V_C = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

dove indichiamo con  $\tau = RC$  il tempo proprio del sistema.

Analogamente per la fase di scarica abbiamo

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

La tensione ai capi del condensatore quindi è

$$V_C = V_0 e^{-t/\tau}$$

Per entrambe le situazioni campioniamo la curva mostrata dall'oscilloscopio e interpoliamo con iminuit [1] successivamente le misure (tabelle 1 e 2) con i modelli teorici descritti.

#### Nota

Per ogni interpolazione di questa relazione è stato necessario considerare due termini correttivi nelle nostre equazioni dato che l'origine dei valori di tempo e tensione dell'oscilloscopio non coincide con l'origine del generatore. In altri termini, effettuiamo uno cambio di variabili

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t - t_0 \\ V &\rightarrow V - q \end{aligned}$$

Come errore della misura della tensione, consideriamo un errore relativo dell'1%.

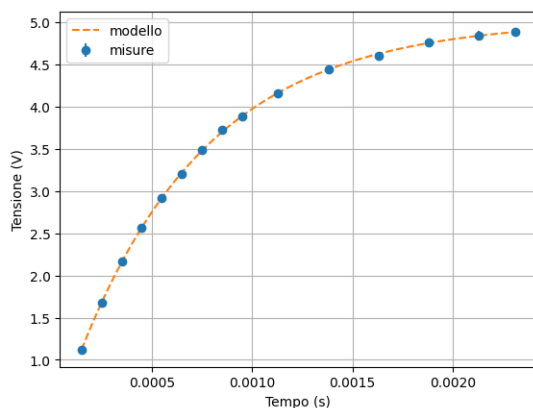


Figura 4. Circuito RC in fase di carica

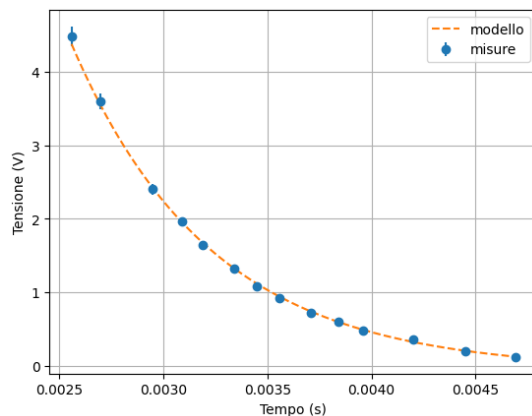


Figura 5. Circuito RC in fase di scarica

I valori di  $\tau$  ottenuti sono  $\tau_1 = (650 \pm 10) \cdot 10^{-3} \text{ s}$  e  $\tau_2 = (670 \pm 10) \cdot 10^{-3} \text{ s}$ .

Per calcolare la capacità del condensatore, misuriamo con un multimetro la resistenza del resistore usato e prendiamo la media dei due tempi propri. Ignoriamo la resistenza del generatore in quanto minore di vari ordini di grandezza rispetto a quella del resistore. Abbiamo che  $R = (67 \pm 0.7) \text{ k}\Omega$  e  $\langle \tau \rangle = (660 \pm 7) \cdot 10^{-3} \text{ s}$ . Quindi misuriamo che  $C = (9.8 \pm 0.2) \text{ nF}$ .

## 2.4. Conclusioni

### Nota

Tutti i test d'ipotesi di questa relazione hanno come soglia di accettazione scelta il valore  $p = 0.05$

Le due interpolazioni hanno riportato come chi quadro ridotto rispettivamente  $\chi^2 = 0.1$  e  $0.9$ . Il primo valore ci ha dato il sospetto che l'errore da noi considerato sia troppo grande, ma ci siamo accorti che affinché il valore del chi quadro ridotto sia uguale a 1 come la teoria si aspetta da un errore casuale sarebbe necessario un errore sulla misura della tensione inferiore alle sensibilità dello strumento. I chi quadro ridotti critici corrispondenti al nostro p-value sono rispettivamente 1.83 e 1.75, dunque concludiamo che le nostre misure confermano il modello considerato.

Effettuiamo ora un test del t di Student per confermare che i due valori per il tempo proprio del sistema siano compatibili fra loro. Otteniamo che  $t = 1.1$ , a paragone con un valore critico  $t_{critico} = 1.72$ . Concludiamo dunque la consistenza delle nostre misure con il fatto che il tempo proprio del sistema sia lo stesso sia in carica sia in scarica.

Infine, sul condensatore utilizzato era riportato un valore teorico della capacità di  $10 \text{ nF}$ . Effettuando un altro test del di Student, abbiamo che  $t = 1$ , da confrontare con un valore critico  $t_{critico} = 1.72$ . Concludiamo che la nostra misura della capacità è accettabile con il valore dato dal produttore.

## 3. Circuito RL

### 3.1. Obiettivi

Abbiamo successivamente costruito un circuito composto da una resistenza messa in serie con un induttore. Abbiamo studiato l'andamento della tensione ai capi dell'induttore sia in fase di carica sia in quella di scarica. Infine abbiamo calcolato l'induttanza dell'induttore.

### 3.2. Metodo

Abbiamo posto la resistenza e l'induttore in serie (figura 3). Le sonde dell'oscilloscopio misurano la tensione ai capi dell'induttore. Abbiamo quindi campionato il grafico della tensione mostrata dall'oscilloscopio tramite il cursore integrato e abbiamo interpolato le nostre misure con le relazioni dettate dalla teoria sia per la carica che per la scarica.

### 3.3. Analisi dati

L'induttanza di un induttore lega la tensione ai suoi capi con la variazione di corrente che gli scorre nel tempo tramite la relazione

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

Abbiamo quindi che la legge di Kirchhoff per la carica di un induttore è

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V_0$$

Risolta l'equazione differenziale per l'intensità di corrente, otteniamo successivamente la tensione ai capi dell'induttore come

$$V_L = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

dove il tempo proprio del processo vale  $\tau = L/R$ .

Per quanto riguarda la scarica abbiamo invece che

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0$$

Ciò porta la relazione fra tempo e tensione a

$$V_L = V_0 e^{-t/\tau}$$

Per entrambe le situazioni campioniamo la curva mostrata dall'oscilloscopio e interpoliamo successivamente le misure (tabelle 3 e 4) con i modelli teorici descritti. In analogia con quanto svolto in precedenza, consideriamo i due termini correttivi che permettono di legare l'origine dell'oscilloscopio con quello del generatore di funzioni.

Come errore della misura della tensione, consideriamo un errore relativo dell'1%.

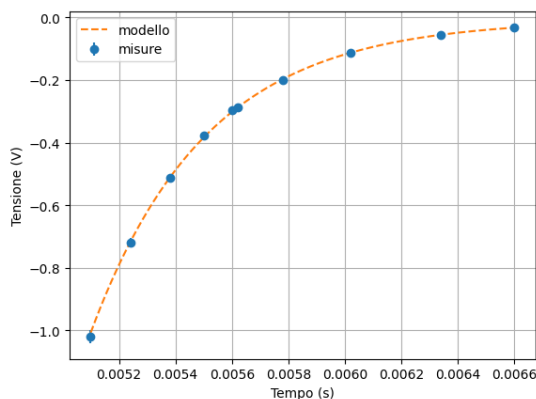


Figura 6. Circuito RL in fase di carica

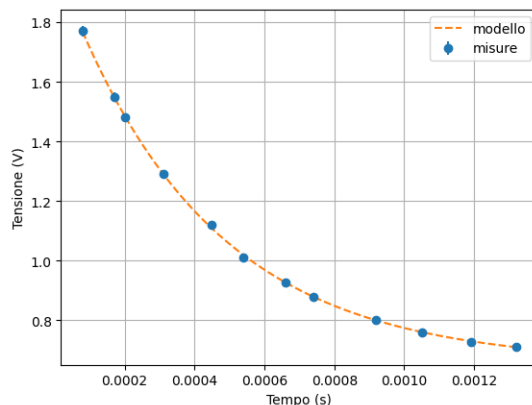


Figura 7. Circuito RL in fase di scarica

I valori di  $\tau$  ottenuti sono  $\tau_1 = (409 \pm 6) \cdot 10^{-6} \text{ s}$  e  $\tau_2 = (410 \pm 10) \cdot 10^{-6} \text{ s}$ .

Per calcolare l'induttanza dell'induttore, misuriamo con un multimetro la resistenza del resistore usato e prendiamo la media dei due tempi propri. Bisogna inoltre considerare la resistenza del generatore di funzioni in quanto non è trascurabile quando messa a confronto con la resistenza usata. Ignoriamo invece la resistenza dell'induttore in quanto per i valori tipici che assume non dovrebbe essere rilevante. Abbiamo che  $R_{res} = (32.7 \pm 0.3) \Omega$ , mentre per il generatore avevamo ricavato all'inizio dell'esperienza che  $R_{gen} = (51.7 \pm 0.6) \Omega$ . Le resistenze possono essere contate come in serie, quindi abbiamo che  $R_{tot} = (84.4 \pm 0.7) \Omega$ . Per quanto riguarda il tempo proprio, abbiamo che  $\langle \tau \rangle = (411 \pm 7) \cdot 10^{-6} \text{ s}$ . Quindi misuriamo che  $L = (34.6 \pm 0.6) \text{ mH}$ .

### 3.4. Conclusioni

Le due interpolazioni hanno riportato come chi quadro ridotto rispettivamente  $\tilde{\chi}^2 = 0.7$  e  $0.3$ . I chi quadro ridotti critici corrispondenti al nostro p-value sono rispettivamente 2.1 e 1.94, dunque concludiamo che le nostre misure confermano il modello considerato.

Effettuiamo ora un test del t di Student per confermare che i due valori per il tempo proprio del sistema siano compatibili fra loro. Otteniamo che  $t = 0.17$ , a paragone con un valore critico  $t_{critico} = 1.69$ . Concludiamo dunque la consistenza delle nostre misure con il fatto che il tempo proprio del sistema sia lo stesso sia in carica sia in scarica.

Infine, non avevamo alcun valore teorico del valore dell'induttanza. Dunque non possiamo concludere nulla per quanto riguarda la nostra misura di  $L$ . In una futura ripetizione della misura si potrebbe calcolare la resistenza dell'induttore per verificare se effettivamente essa è stata correttamente approssimata.

## 4. Circuito RLC

### 4.1. Obiettivi

Infine abbiamo costruito un circuito composto da una resistenza, un induttore ed un condensatore disposti in serie. Abbiamo studiato l'andamento della tensione ai capi del sistema induttore-condensatore in fase di scarica.

## 4.2. Metodo

Abbiamo posto la resistenza, l'induttore e il condensatore in serie (figura 8 [2]). Come resistenza abbiamo usato alternativamente dei resistori e una cassetta a decadi di resistenze per poter facilmente ottenere il valore di resistenza che ci sembrava più adatto alla misura che stavamo compiendo. Le sonde dell'oscilloscopio misurano la tensione ai capi del sistema induttore-condensatore. Abbiamo quindi campionato il grafico della tensione mostrata dall'oscilloscopio tramite il cursore integrato e abbiamo interpolato le nostre misure con le relazioni dettate dalla teoria sia per il caso in cui il sistema è sottosmorzato sia quando è criticamente smorzato.

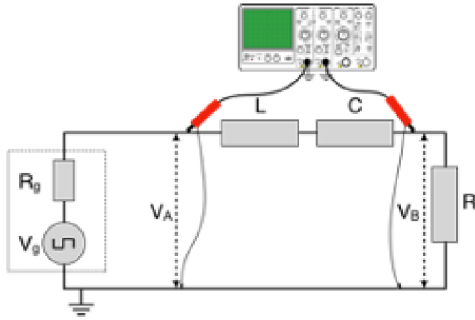


Figura 8. Schema circuito RLC

## 4.3. Analisi dati

### 4.3.1. Modello teorico

Applicando la legge di Kirchhoff al circuito RLC che abbiamo costruito, abbiamo che in fase di scarica vale l'equazione differenziale

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Essa ha la stessa forma dell'equazione del moto di un oscillatore armonico smorzato. Quindi le soluzioni e le considerazioni possono essere fatte ad ambo i casi senza distinzione. In particolare, possiamo definire due costanti che descrivono il sistema: il coefficiente di smorzamento  $\gamma$  e la pulsazione propria  $\omega_0$

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Possiamo quindi descrivere tre situazioni in base a come si relazionano questi due parametri. Se  $\omega_0 > \gamma$ , il sistema è sottosmorzato e la soluzione generale ha la forma

$$V_{LC} = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

dove

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Nel caso in cui  $\omega_0 < \gamma$ , si verifica che il sistema è sovrasmorzato e la soluzione generale è

$$V_{LC} = e^{-\gamma t} (Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t})$$

Se invece vale che  $\omega_0 = \gamma$ , abbiamo il caso dello smorzamento critico, con soluzione

$$V_{LC} = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

### 4.3.2. Sistema sottosmorzato

Come prima misura abbiamo cercato di ottenere un sistema sottosmorzato. Abbiamo usato un resistore con resistenza  $R = 32.7 \, \Omega$  misurata con il multimetro, quindi come errore della misura consideriamo un errore relativo pari a 1%. Cambiando vari induttori e condensatori, abbiamo infine osservato il tipico grafico del caso sottosmorzato sul display dell'oscilloscopio e abbiamo dunque campionato la curva (tabella 5). Per interpolare i dati con il modello teorico, consideriamo anche in questo caso due parametri aggiuntivi che tengono conto del diverso riferimento per l'origine dei tempi e delle tensioni del generatore e dell'oscilloscopio. Come errore della tensione misurata dall'oscilloscopio consideriamo un errore relativo del 5% dato che il segnale a causa dell'errore di fondo non ritornava mai un valore preciso, ma una serie di valori che oscillava. Come misura prendiamo il valore intorno al quale il segnale sembrava oscillare.

La nostra interpolazione era però distorta da dati che troppo si discostavano dal modello, portandoci dunque a studiare i residui normalizzati e a rigettare i dati che si discostavano da più di  $2\sigma$  dal valore atteso. Questo perché l'errore della misura è casuale, dunque ci aspettiamo che il 95% delle misure cada in questo intervallo.

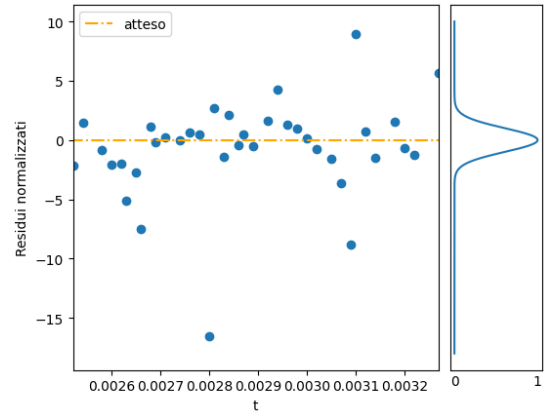


Figura 9. Residui normalizzati per circuito RLC sottosmorzato

Rifacendo un'interpolazione con i dati non rigettati, notiamo che questa volta nessun dato si discosta in maniera statisticamente improbabile dal valore atteso.

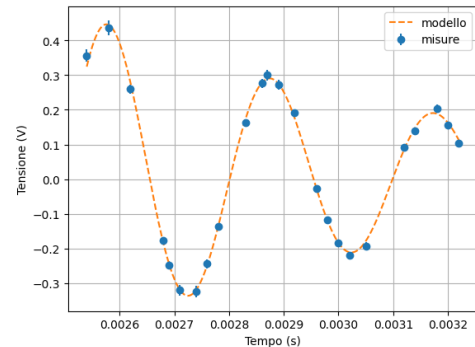
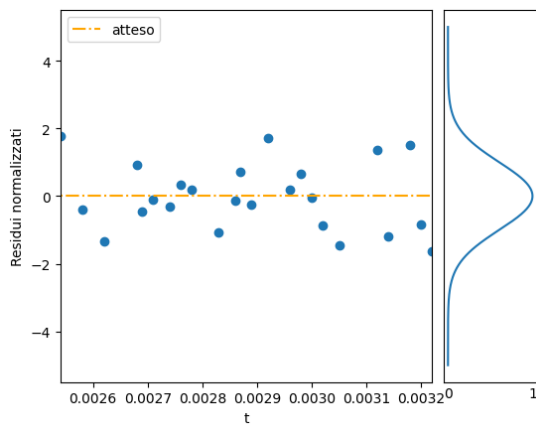


Figura 10. Misure a confronto con il modello per circuito RLC sottosmorzato



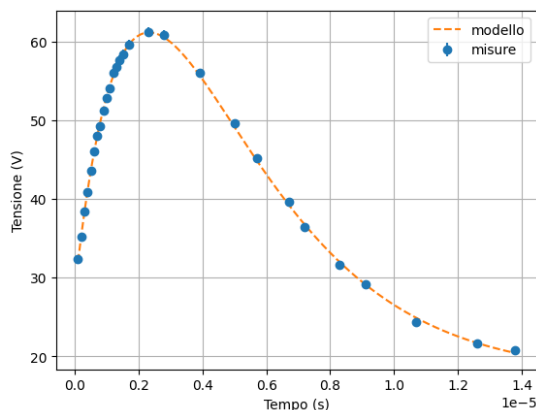
**Figura 11.** Residui normalizzati dopo rigetto dati per circuito RLC sottosmorzato

Dal fit otteniamo che  $\gamma = (1.49 \pm 0.05) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  e  $\omega = (2.105 \pm 0.005) \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ . Vale quindi che  $\omega_0 = (2.110 \pm 0.005) \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$  e notiamo che vale  $\omega_0 > \gamma$  come atteso. Noti i valori di  $R$ ,  $\gamma$  e  $\omega_0$ , possiamo invertire le relazioni e ricavare i valori di  $L$  e  $C$ .

Abbiamo che  $L = (11.0 \pm 0.4) \text{ mH}$  e  $C = (205 \pm 8) \text{ nF}$ .

#### 4.3.3. Sistema criticamente smorzato

Dopo questa prima parte di misure, cerchiamo ora di osservare lo smorzamento critico. Questa è la situazione in cui il valore della tensione tende più rapidamente a zero. Grazie a questo fatto, abbiamo cercato una nuova combinazione di resistenze, induttori e condensatori che sembrasse mostrare questa caratteristica dal display dell'oscilloscopio. Alla fine della fase di scelta dei tre componenti, ci siamo posizionati con la cassetta a resistenza  $R = (10.0 \pm 0.1) \text{ k}\Omega$ . Campioniamo quindi la curva (tabella 6) e interpoliamo i dati con il modello teorico, tenendo conto dei due parametri aggiuntivi necessari per far combaciare le due origini. Come errore della tensione consideriamo un errore relativo dell'1% in quanto rispetto al caso precedente osserviamo in misura notevolmente ridotta gli effetti del rumore di fondo.



**Figura 12.** Misure a confronto con il modello per circuito RLC criticamente smorzato

Dal fit otteniamo che  $\gamma = (3.86 \pm 0.02) \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ , e ci aspettiamo che la pulsazione propria  $\omega_0$  abbia lo stesso valore. Noti i valori di  $R$ ,  $\gamma$  e  $\omega_0$ , possiamo invertire le relazioni e ricavare i valori di  $L$  e  $C$ .

Abbiamo che  $L = (12.96 \pm 0.06) \text{ mH}$  e  $C = (0.519 \pm 0.003) \text{ nF}$ .

#### 4.4. Conclusioni

L'interpolazione delle misure nel caso sottosmorzato dopo il rigetto riporta chi quadro ridotto pari a  $\tilde{\chi}^2 = 1.3$ , a confronto con un  $\tilde{\chi}_{critico}^2 = 1.6$ . Per quanto riguarda invece il secondo set di misure abbiamo che  $\tilde{\chi}^2 = 0.8$  e  $\tilde{\chi}_{critico}^2 = 1.53$ . Concludiamo dunque che entrambe le misure sono in accordo con il modello teorico.

Avendo provato varie combinazioni di induttori e condensatori con più valori della resistenza della cassetta, non conosciamo i valori di induttanza e capacità dei componenti usati. Per poter confermare anche quell'aspetto della teoria, può essere utile in futuro svolgere prima la misura di circuiti RLC per poter trovare gli elementi circuitali più adatti a questo caso e successivamente svolgere le misure per i circuiti RC e RL.

5. Appendice

5.1. Tabelle dati

Tempo ( $10^{-8}$ s)	Tensione ( $10^{-6}$ V)
0.5	0.48
1.5	1.12
2.5	1.68
3.5	2.16
4.5	2.56
5.5	2.92
6.5	3.20
7.5	3.48
8.5	3.72
9.5	3.88
11.3	4.16
13.8	4.44
16.3	4.60
18.8	4.76
21.3	4.84
23.1	4.88

Tabella 1. Campionamento carica circuito RC

Tempo ( $10^{-3}$ s)	Tensione (V)
2.56	4.48
2.70	3.60
2.95	2.40
3.09	1.96
3.19	1.64
3.34	1.32
3.45	1.08
3.56	0.92
3.71	0.72
3.84	0.60
3.96	0.48
4.20	0.36
4.45	0.20
4.69	0.12

Tabella 2. Campionamento scarica circuito RC

Tempo ( $10^{-3}$ s)	Tensione ( $10^{-1}$ V)
5.10	-10.20
5.24	-7.20
5.38	-5.12
5.60	-2.96
5.78	-2.00
6.02	-1.12
6.34	-0.56
6.60	-0.32
5.50	-3.76
5.62	-2.88

Tabella 3. Campionamento carica circuito RL

Tempo ( $10^{-4}$ s)	Tensione ( $10^{-1}$ V)
0.8	17.70
1.7	15.50
2.0	14.80
3.1	12.90
4.5	11.20
5.4	10.10
6.6	9.28
7.4	8.80
9.2	8.00
10.5	7.60
11.9	7.28
13.2	7.12

Tabella 4. Campionamento scarica circuito RL

Tempo ( $10^{-3}$ s)	Tensione ( $10^{-1}$ V)
2.54	3.56
2.58	4.36
2.62	2.60
2.68	-1.76
2.69	-2.48
2.71	-3.20
2.74	-3.24
2.76	-2.44
2.78	-1.36
2.83	1.64
2.86	2.76
2.87	3.00
2.89	2.72
2.92	1.92
2.96	-0.28
2.98	-1.16
3.00	-1.84
3.02	-2.20
3.05	-1.92
3.12	0.92
3.14	1.40
3.18	2.04
3.20	1.56
3.22	1.04

Tabella 5. Campionamento RLC per segnale sottosmorzato



Tempo ( $10^{-9}$ s)	Tensione (V)
100	32.4
200	35.2
300	38.4
400	40.8
500	43.6
600	46.0
700	48.0
800	49.2
900	51.2
1000	52.8
1100	54.0
1200	56.0
1300	56.8
1400	57.6
1500	58.4
1700	59.6
2300	61.2
2800	60.8
3900	56.0
5000	49.6
5700	45.2
6700	39.6
7200	36.4
8300	31.6
9100	29.2
10700	24.4
12600	21.6
13800	20.8

**Tabella 6.** Campionamento RLC per segnale criticamente smorzato

## Riferimenti bibliografici

- [1] H. Dembinski e P. O. et al., «scikit-hep/iminuit», dic. 2020. DOI: [10.5281/zenodo.3949207](https://doi.org/10.5281/zenodo.3949207). indirizzo: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3949207>.
- [2] «Scheda», indirizzo: [https://elearning.unimib.it/pluginfile.php/1671537/mod\\_resource/content/2/Scheda\\_circuiti2\\_v1.pdf](https://elearning.unimib.it/pluginfile.php/1671537/mod_resource/content/2/Scheda_circuiti2_v1.pdf).