

# ESPERIENZA CIRCUITI 3

A. Rossi<sup>1</sup>, G. Lucibello<sup>1</sup>, F. Tassi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facoltà di Fisica, Università degli Studi Milano Bicocca

## Sommario

In questo esperimento vogliamo studiare il comportamento di circuiti RC, RL e RLC in corrente alternata, misurando in ognuno di questi casi la funzione di trasferimento di ogni elemento circuitale presente. Vogliamo infine calcolare dai modelli noti delle funzioni di trasferimento i valori delle capacità e delle induttanze dei componenti usati.

## 1. Strumentazione

Per alimentare ogni circuito costruito, ci siamo serviti di un generatore di funzioni. Per misurare le tensioni abbiamo usato un oscilloscopio.

Il generatore di funzioni (figura 1 [2]) è uno strumento in grado di produrre un segnale che può assumere svariate forme, rendendolo dunque un apparecchio versatile per vari tipi di misure. In questa esperienza ci siamo serviti sempre di segnali aventi la forma di un'onda sinusoidale così da simulare un circuito in corrente alternata. La frequenza del segnale è regolabile a piacere e questo ci è servito per poter studiare il comportamento del circuito a frequenze diverse. Il generatore ha una resistenza interna che abbiamo misurato costruendo un circuito puramente resistivo e applicando la legge di Ohm. Abbiamo misurato nell'esperienza "Circuiti 2" che  $R_{gen} = (51.7 \pm 0.6) \Omega$ .

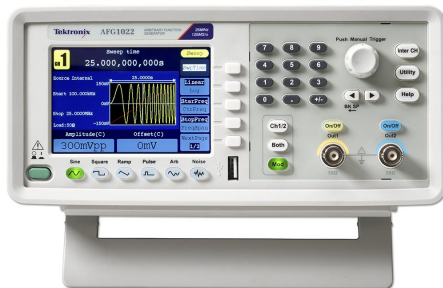


Figura 1. Generatore di funzioni

L'oscilloscopio (figura 2 [2]) è stato lo strumento di cui ci siamo serviti per misurare la tensione ai capi di tutti gli elementi circuitali che abbiamo usato. Grazie al suo display è possibile osservare l'andamento della tensione in maniera grafica, operazione non possibile con un multimetro. Inoltre lo strumento in dotazione ci dava la possibilità, tramite la funzione *math*, di ottenere la differenza tra due misure della tensione. Un'altra funzionalità di cui abbiamo fatto uso è l'opzione per calcolare la differenza di fase fra due misure sinusoidali. L'oscilloscopio è sempre stato collegato al generatore per poter verificare in ogni momento che il segnale utilizzato fosse realmente una sinusoide. L'oscilloscopio ha una sua resistenza interna, e dato che misura delle tensioni il suo valore è molto maggiore delle resistenze usate nei circuiti ed è posto in parallelo ad esse, quindi possiamo trascurarlo. Inoltre ha anche una trascurabile capacità interna.

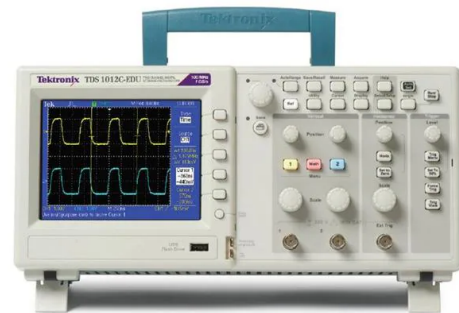


Figura 2. Oscilloscopio

## 2. Circuito RC

### 2.1. Obiettivi

L'obiettivo è studiare la funzione di trasferimento di ogni elemento di un circuito in cui è presente un resistore collegato in serie con un condensatore. Vogliamo successivamente calcolare il valore della capacità del condensatore.

### 2.2. Metodo

Abbiamo costruito il circuito ponendo un resistore in serie con un condensatore. Il segnale veniva trasmesso all'oscilloscopio tramite delle sonde che abbiamo collegato all'inizio del circuito e ai capi del condensatore, per studiare la differenza di tensione ai suoi capi (figura 3). Come valore abbiamo scelto la misura picco-picco, ovvero la differenza fra il picco massimo misurato e quello minimo. Abbiamo misurato la resistenza utilizzando un multimetro, e con il valore della capacità calcolato nell'esperimento precedente abbiamo stimato la frequenza di taglio e abbiamo proceduto a prendere i dati nell'intorno di due ordini di grandezza rispetto essa. Variando la frequenza tramite il generatore, abbiamo misurato l'ampiezza del segnale d'ingresso e ai capi del condensatore, oltre che la loro relativa differenza di fase. Tramite la funzione *math* dell'oscilloscopio abbiamo inoltre calcolato l'ampiezza della tensione ai capi della resistenza sottraendo i due segnali misurati sperimentalmente. Per ridurre il rumore di fondo, abbiamo usato un'opzione dell'oscilloscopio che calcolava la media su un certo numero di set di dati da noi scelto che acquisiva dal circuito.

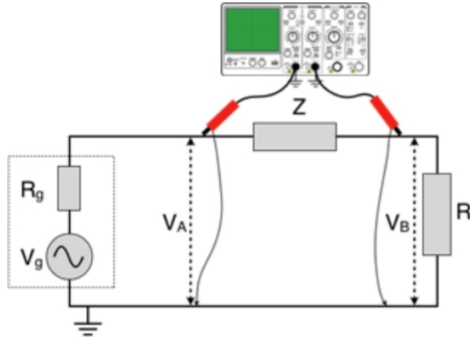


Figura 3. Schema circuito RC/RL

### 2.3. Modello teorico

La funzione di trasferimento per il componente  $i$ -esimo di un circuito a cui viene data una tensione iniziale di ampiezza  $V_0$  è definita come

$$H_i = \frac{V_i}{V_0}$$

Essendo una funzione in generale a variabile complessa, per essere caratterizzata è necessario conoscere il suo modulo e la sua fase.

L'ampiezza della tensione ai capi del componente  $i$ -esimo di impedenza  $Z_i$  in un circuito con impedenza totale  $Z$  è data da

$$V_i = \frac{Z_i}{Z} V_0$$

Ricordando che una resistenza  $R$  ha impedenza  $Z = R$  e un condensatore posto in un circuito a frequenza  $\nu$  (pulsazione  $\omega = 2\pi\nu$ ) ha impedenza  $Z = -j\frac{1}{\omega C}$  (dove  $j$  indica l'unità immaginaria  $j^2 = -1$ ), concludiamo che l'impedenza è il suo modulo valgono

$$Z = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$$

I moduli delle funzioni di trasferimento per i due componenti sono quindi dati da

$$|H_C| = \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}$$

$$|H_R| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}$$

Possiamo notare che a basse frequenze domina l'impedenza capacitiva, mentre ad alte frequenze avviene l'opposto.

Le fasi invece sono legate al parametro  $\phi$  dato come

$$\tan \phi = -\frac{1}{\omega RC}$$

Se facciamo coincidere la fase di  $H_R$  con lo stesso  $\phi$ , la fase di  $H_C$  è data da  $\phi - \pi/2$ .

Una costante caratteristica del circuito è la frequenza di taglio  $\nu_C$ . Essa è calcolata come

$$\nu_C = \frac{1}{2\pi RC}$$

La sua proprietà è che a quella frequenza i moduli delle funzioni di trasferimento di condensatore e resistenza sono uguali e valgono  $1/\sqrt{2} \approx 0.7071$ . Vale inoltre che  $\phi(\nu_C) = -\pi/4 \approx -0.7854$ .

### 2.4. Analisi dati

Le misure sono nella tabella 1. Come errore delle misure della tensione usiamo 1% del valore. Come resistenza abbiamo usato un resistore da  $R = (267 \pm 3) \Omega$ . Teniamo conto anche della resistenza del generatore di funzioni  $R_{gen}$ .

Interpoliamo con iminuit [1] il rapporto fra l'ampiezza della tensione ai capi del condensatore e l'ampiezza della tensione d'entrata con il modello descritto in precedenza. Per far sì che il fit avesse successo, abbiamo semplificato il modello interpolando le misure con la funzione

$$y = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + 1}}$$

dove  $x$  è la frequenza  $\nu$  e vale che  $a = 4\pi^2 R^2 C^2$ .

#### Nota

Tutti i grafici di questa relazione hanno l'asse delle ascisse in scala logaritmica

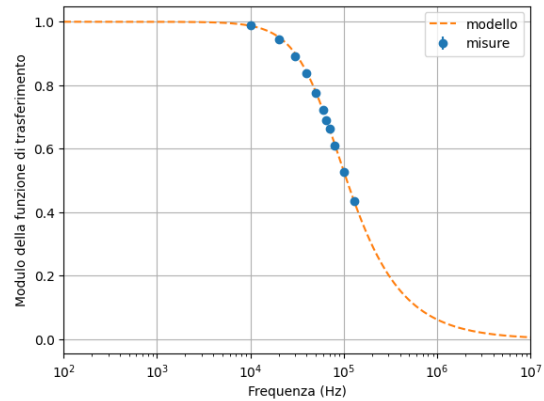


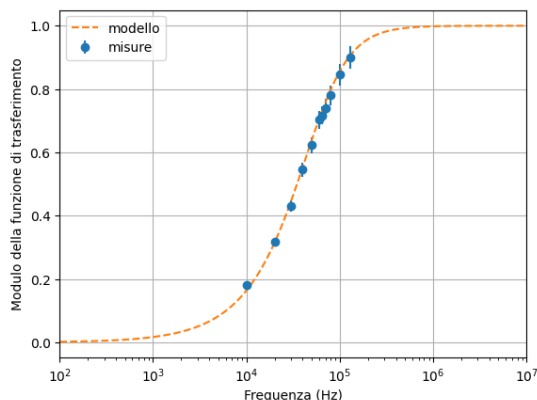
Figura 4. Modulo della funzione di trasferimento per il condensatore in un circuito RC in corrente alternata

Da questa interpolazione otteniamo un valore della capacità pari a  $C = (8.03 \pm 0.09) \text{ nF}$ .

In modo analogo svolgiamo il fit del rapporto fra l'ampiezza della tensione ai capi del resistore e l'ampiezza della tensione d'entrata con il modello corrispondente. Anche in questo caso semplifichiamo il modello e interpoliamo le misure con la funzione

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + a/x^2}}$$

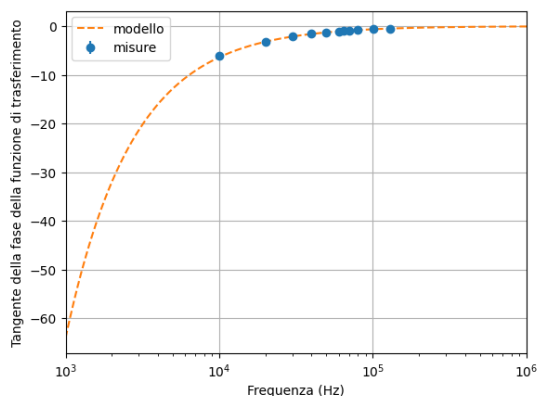
dove  $x$  è la frequenza  $\nu$  e  $a = 1/4\pi^2 R^2 C^2$ .



**Figura 5.** Modulo della funzione di trasferimento per la resistenza in un circuito RC in corrente alternata

Da questa seconda interpolazione otteniamo che  $C = (8.29 \pm 0.08) \text{ nF}$ .

Infine confrontiamo le misure prese per la differenza di fase fra il segnale d'ingresso e il segnale ai capi del condensatore.



**Figura 6.** Tangente della fase della funzione di trasferimento per il condensatore in un circuito RC in corrente alternata

Osserviamo dal display dell'oscilloscopio che la tensione ai capi della resistenza è sfasata di  $\pi/2$  rispetto alla tensione del condensatore. Il valore della capacità misurato in quest'ultimo caso è  $C = (7.81 \pm 0.08) \text{ nF}$ .

Per ottenere un valore unico della capacità del condensatore, calcoliamo la media dei tre valori ottenuti. Abbiamo che  $\langle C \rangle = (8.04 \pm 0.08) \text{ nF}$ . Da quest'ultimo possiamo calcolare la frequenza di taglio del circuito, il cui valore ci esce  $\nu_C = (62.16 \pm 0.13) \text{ kHz}$ .

Con i parametri dei fit ottenuti nei tre casi precedenti e con la frequenza di taglio appena ricavata, calcoliamo i valori dei moduli di  $H_R$  e  $H_C$  alla frequenza  $\nu_C$ . Abbiamo che  $|H_R|(\nu_C) = 0.7176$  e  $|H_C|(\nu_C) = 0.7077$ . Per la fase abbiamo invece che  $\phi(\nu_C) = -0.8000$ .

## 2.5. Conclusioni

### Nota

Tutti i test d'ipotesi di questa relazione hanno come soglia di accettazione scelta il valore  $p = 0.05$

Avendo svolto tre interpolazioni su misure affette da errore casuale, svolgiamo un test del chi quadro per valutare la

loro bontà. Dato l'uguale numero dei gradi di libertà dei fit, abbiamo che il valore critico è comune e vale  $\chi^2_{critico} = 1.83$ . I chi quadri ridotti delle tre interpolazioni sono 0.4, 0.4 e 0.8, in ordine per come sono stati posti nell'analisi dati. Concludiamo dunque che tutte le interpolazioni svolte sono accettabili e che le misure confermano il modello teorico da noi usato.

I tre valori della capacità da noi misurati sono dell'ordine di grandezza tipico dei condensatori presenti in laboratorio. Dato che si riferiscono allo stesso condensatore, svolgiamo un test del t di Student per comprendere se sono compatibili fra loro. Il valore critico dati i gradi di libertà è  $t_{critico} = 1.73$ . I valori dei t di Student sono in ordine crescente 1.83, 2.14 e 4.36. I valori non sono dunque compatibili fra loro. Una possibile spiegazione è data dal fatto che abbiamo fatto alcune approssimazioni che potrebbero aver portato a valori diversi della capacità. Ad esempio, non abbiamo considerato la resistenza e la capacità interna dell'oscilloscopio. Inoltre, avendo preso come misura della tensione il valore picco-picco, i nostri valori della tensione possono subire un effetto maggiore del rumore di fondo.

Per quanto riguarda la frequenza di taglio, constatiamo che i moduli e le fasi delle funzioni di trasferimento valutati in  $\nu_C$  hanno i valori che ci aspettiamo dalla teoria, dato che lo scostamento dei valori ricavati da quelli teorici è sempre inferiore del 2%. Il valore di  $\nu_C$  è stato calcolato a partire dai tre valori di capacità che soffrono dei problemi illustrati in precedenza, ma l'aver preso la media dei tre ha ridotto l'errore di ogni singola misura bilanciando ogni misura all'eccesso con una in difetto. Concludiamo quindi che  $\langle C \rangle$  è la migliore stima della capacità che abbiamo misurato.

## 3. Circuito RL

### 3.1. Obiettivi

Abbiamo successivamente costruito un circuito ponendo un resistore in serie con un induttore (facendo sempre riferimento allo schema 3). Anche in questo caso vogliamo caratterizzare le funzioni di trasferimento e ricavare da queste il valore dell'induttanza.

### 3.2. Metodo

Abbiamo misurato tramite il multimetro il valore della resistenza e abbiamo di nuovo stimato la frequenza di taglio. Abbiamo collegato le sonde ai capi dell'induttore e variando la frequenza nel range di due ordini di grandezza rispetto alla frequenza di taglio stimata abbiamo acquisito i dati relativi all'ampiezza del segnale della tensione ai capi dell'induttanza e alla differenza di fase. L'ampiezza della tensione ai capi della resistenza è stata ottenuta usato la funzione *math*.

Come valore della tensione consideriamo anche in questo caso la misura picco-picco.

### 3.3. Modello teorico

Calcoliamo l'impedenza totale del circuito ed il suo modulo dopo aver ricordato che l'impedenza di un induttore è  $Z = j\omega L$

$$Z = R + j\omega L$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

I moduli delle funzioni di trasferimento per induttore e resistenza in un circuito RL in corrente alternata sono dunque rispettivamente

$$|H_L| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$|H_R| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Abbiamo quindi che ad alte frequenza la caduta di tensione è quasi completamente sull'induttore, mentre a basse frequenza si trova ai capi della resistenza. Per quanto riguarda la fase, abbiamo in analogia con il circuito RC che se definiamo  $\phi$  come

$$\tan \phi = \frac{\omega L}{R}$$

possiamo dunque dire che la fase di  $H_R$  è  $\phi$ , mentre quella di  $H_L$  è  $\phi + \pi/2$ .

Una costante caratteristica del circuito è la frequenza di taglio  $\nu_C$ . Essa è calcolata come

$$\nu_C = \frac{R}{2\pi L}$$

La sua proprietà è che a quella frequenza i moduli delle funzioni di trasferimento di induttore e resistenza sono uguali e valgono  $1/\sqrt{2} \simeq 0.7071$ . Vale inoltre che  $\phi(\nu_C) = \pi/4 \simeq 0.7854$ .

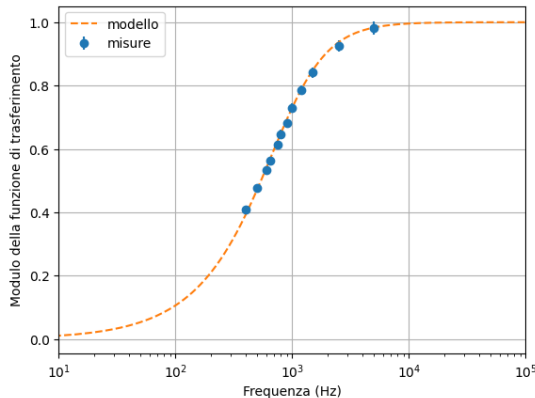
### 3.4. Analisi dati

Le misure sono nella tabella 2. Come errore delle misure della tensione usiamo 1% del valore. Come resistenza abbiamo usato lo stesso resistore da  $R = (267 \pm 3) \Omega$  del punto precedente, a cui sommiamo la resistenza del generatore di funzioni  $R_{gen}$ .

Interpoliamo con iminuit il rapporto fra l'ampiezza della tensione ai capi dell'induttore e l'ampiezza della tensione d'entrata con il modello descritto in precedenza, semplificato per aiutare l'interpolazione in

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + a/x^2}}$$

dove  $x$  è la frequenza  $\nu$  e  $a = R^2/4\pi L^2$ .



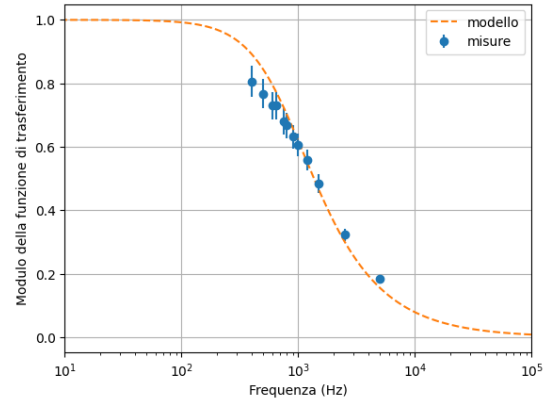
**Figura 7.** Modulo della funzione di trasferimento per l'induttore in un circuito RL in corrente alternata

Da questa interpolazione otteniamo un valore della induttanza pari a  $L = (9.2 \pm 0.3) \text{ mH}$ .

In modo analogo svolgiamo il fit del rapporto fra l'ampiezza della tensione ai capi del resistore e l'ampiezza della tensione d'entrata con il modello corrispondente. Anche in questo caso semplifichiamo il modello e interpoliamo le misure con la funzione

$$y = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + 1}}$$

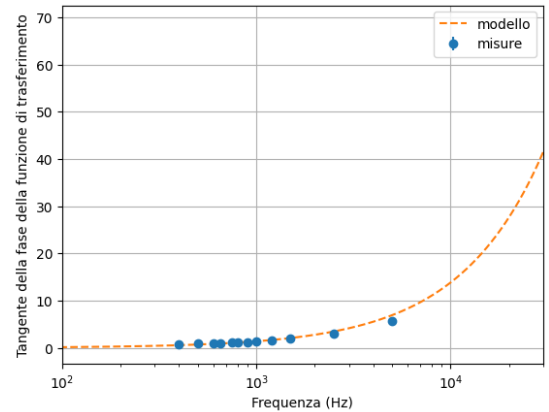
dove  $x$  è la frequenza  $\nu$  e  $a = 4\pi L^2/R^2$ .



**Figura 8.** Modulo della funzione di trasferimento per la resistenza in un circuito RL in corrente alternata

Da questa seconda interpolazione otteniamo che  $L = (12.9 \pm 0.8) \text{ mH}$ .

Infine confrontiamo le misure prese per la differenza di fase fra il segnale d'ingresso e il segnale ai capi del condensatore.



**Figura 9.** Tangente della fase della funzione di trasferimento per l'induttore in un circuito RL in corrente alternata

Osserviamo dal display dell'oscilloscopio che la tensione ai capi della resistenza è sfasata di  $\pi/2$  rispetto alla tensione del condensatore. Il valore dell'induttanza misurato in quest'ultimo caso è  $L = (70.0 \pm 1.1) \text{ mH}$ . Le misure però non seguono il modello (la discussione completa di questa affermazione è nelle conclusioni), quindi non teniamo conto di questo terzo valore.

Per ottenere un valore unico dell'induttanza, calcoliamo la media dei due valori rimanenti. Abbiamo che  $\langle L \rangle = (11.1 \pm$

0.5)  $mH$ . Da quest'ultimo possiamo calcolare la frequenza di taglio del circuito, il cui valore ci esce  $\nu_C = (4.58 \pm 0.17) kHz$ .

Con i parametri dei fit ottenuti nei fit che hanno avuto successo e con la frequenza di taglio appena ricavata, calcoliamo i valori dei moduli di  $H_R$  e  $H_C$  alla frequenza  $\nu_C$ . Abbiamo che  $|H_R|(\nu_C) = 0.1698$  e  $|H_C|(\nu_C) = 0.9797$ .

### 3.5. Conclusioni

Avendo svolto tre interpolazioni su misure affette da errore casuale, svolgiamo un test del chi quadro per valutare la loro bontà. Dato l'uguale numero dei gradi di libertà dei fit, abbiamo che il valore critico è comune e vale  $\chi^2_{critico} = 1.79$ . I chi quadri ridotti delle tre interpolazioni sono 0.7, 1.78 e 16.7, in ordine per come sono stati posti nell'analisi dati. Concludiamo dunque che le interpolazioni dei moduli delle funzioni di trasferimento sono accettabili e che le misure confermano il modello teorico da noi usato, mentre per la fase, seppur le nostre misure mostrino un andamento coerente con quanto atteso, concludiamo che l'interpolazione è fallita.

I due valori usati dell'induttanza da noi misurati sono dell'ordine di grandezza tipico degli induttori presenti in laboratorio. Svolgiamo un test del t di Student per valutare la loro compatibilità. Il valore critico dati i gradi di libertà è  $t_{critico} = 1.72$ , mentre il t di Student vale 4.34. I valori non sono dunque compatibili fra loro. Anche in questo caso la causa di questa discrepanza può essere stato il non aver considerato la resistenza interna dell'oscilloscopio e l'aver usato valori sovrastimati della tensione per via dell'uso dei valori picco-picco.

Anche per quanto riguarda la frequenza di taglio, il valore di  $\nu_C$  ricavato non riporta i valori dei moduli che ci aspettiamo dalla teoria. La frequenza di taglio usata è più alta di quella reale, dato che l'induttore ha una caduta di tensione notevole, mentre la resistenza ne ha una decisamente più marginale rispetto al caso in cui fosse davvero la frequenza di taglio. Per provare a stimare  $\nu_C$ , abbiamo calcolato numericamente con il metodo della bisezione il valore della frequenza per cui  $|H_R|$  e  $|H_L|$  assumono valore  $1/\sqrt{2}$ . Otteniamo che per entrambe  $\nu_C$  si aggira fra gli 800 e i 1000 Hz, confermando che la frequenza di taglio da noi ricavata è in eccesso. Ciò può essere dovuto ad aver considerato un valore della resistenza troppo grande o un valore dell'induttanza troppo piccola. Dato che il primo caso è ragionevolmente il meno probabile, concludiamo che le nostre misure abbiano sottostimato il valore dell'induttanza  $L$ .

## 4. Circuito RLC

### 4.1. Obiettivi

Infine abbiamo costruito un circuito composto da un resistore, un condensatore e un induttore posti in serie. Abbiamo quindi costruito la funzione di trasferimento caratteristica di ogni componente del circuito da cui abbiamo ricavato il valore sia dell'induttanza che della capacità.

### 4.2. Metodo

Abbiamo configurato il nostro circuito in tre modi diversi, ponendo alla fine l'elemento circuitale di cui volevamo misurare la tensione (figura 10).

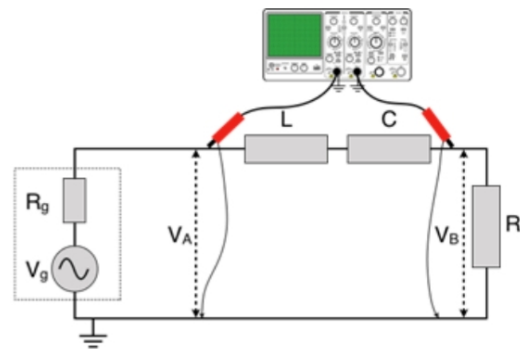


Figura 10. Schema circuito RLC

Come valore della tensione abbiamo scelto la misura picco-picco. Come resistenza abbiamo usato una cassetta a decade per poter utilizzare il valore che più ci veniva comodo. Variando la frequenza tramite il generatore, abbiamo misurato l'ampiezza del segnale d'ingresso e ai capi dell'ultimo elemento circuitale, oltre che alla differenza di fase delle due. Per ridurre il rumore di fondo, abbiamo usato l'opzione dell'oscilloscopio che calcolava la media su un certo numero di set di dati da noi scelto che acquisiva dal circuito.

Questa parte dell'esperienza è stata iniziata in un giorno e finita in un altro, quindi abbiamo usato componenti diversi per il calcolo della funzione di trasferimento di  $R$ ,  $L$  e  $C$ .

### 4.3. Modello teorico

Per calcolare le funzioni di trasferimento di ogni componente, consideriamo l'impedenza totale del circuito RLC data da

$$Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$$

il cui modulo vale

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

Calcoliamo quindi i moduli delle funzioni di trasferimento di ogni elemento circuitale

$$|H_R| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$|H_C| = \frac{1}{\omega C \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$|H_L| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

A basse frequenze la caduta di tensione si trova principalmente ai capi del condensatore, mentre ad alte frequenze ciò avviene ai capi dell'induttore. Inoltre il modulo della funzione di trasferimento della resistenza ha un picco alla frequenza

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

La fase di tutte e tre le funzioni è invece legata al parametro  $\phi$  che segue la relazione

$$\tan \phi = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}$$

Fissata la fase di  $H_R$  uguale a  $\phi$ , abbiamo che la fase di  $H_L$  è  $\phi + \pi/2$  e che la fase di  $H_C$  è  $\phi - \pi/2$ .



## 4.4. Analisi dati

### 4.4.1. Resistenza

Le misure sono nella tabella 3. Come errore delle misure della tensione usiamo 1% del valore. Come resistenza abbiamo usato il resistore da  $R = (267 \pm 3) \Omega$  dei punti precedenti, a cui aggiungiamo la resistenza del generatore di funzioni  $R_{gen}$ .

Interpoliamo con iminuit il rapporto fra l'ampiezza della tensione ai capi della resistenza e l'ampiezza della tensione d'entrata con il modello teorico per la resistenza. Per far sì che il fit avesse successo, abbiamo dovuto sia semplificare il modello sia effettuare un cambio di variabile per le misure. Infatti, se chiamiamo  $y$  le misure da noi prese di  $|H_R|$ , prima abbiamo fatto un cambio di variabile definito come

$$y' = \frac{1}{y^2}$$

Successivamente abbiamo interpolato le  $y'$  con il loro modello corrispondente

$$y' = ax^2 + b/x^2 + 1 - 2\sqrt{ab}$$

dove  $x$  è la frequenza  $\nu$  e vale che  $a = \frac{4\pi^2 L^2}{R^2}$  e  $b = \frac{1}{4\pi^2 R^2 C^2}$ .

L'ulteriore semplificazione del modello attraverso il cambio di variabile è stato cruciale in quanto altrimenti era impossibile per l'algoritmo *migrad* trovare il minimo. Infatti, il modello polinomiale è più semplice da trattare rispetto all'inverso di una radice.

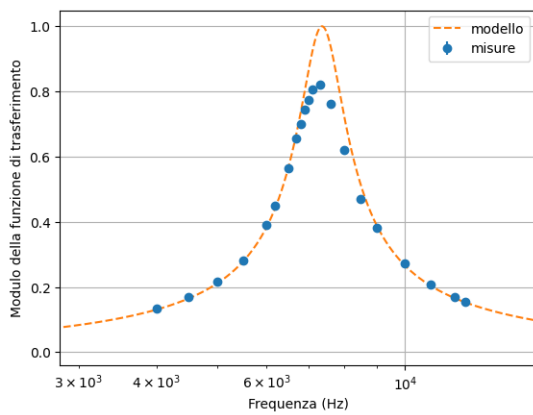


Figura 11. Modulo della funzione di trasferimento per la resistenza in un circuito RLC in corrente alternata

Notiamo come per le code il modello descrive bene le nostre misure, mentre nell'intorno del picco c'è un chiaro scostamento fra quanto atteso e quanto osservato. Non avrebbe quindi senso provare a ricavare i valori di  $L$  e  $C$  dai parametri di questa interpolazione. Consideriamo quindi solo le code.

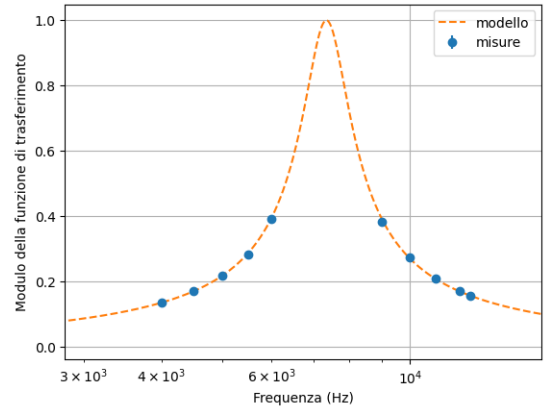


Figura 12. Modulo della funzione di trasferimento per la resistenza in un circuito RLC in corrente alternata solo lungo le code

Otteniamo che  $L = (39.2 \pm 0.1) \text{ mH}$  e  $C = (11.97 \pm 0.04) \text{ nF}$ . Svolgiamo ora l'interpolazione per la fase

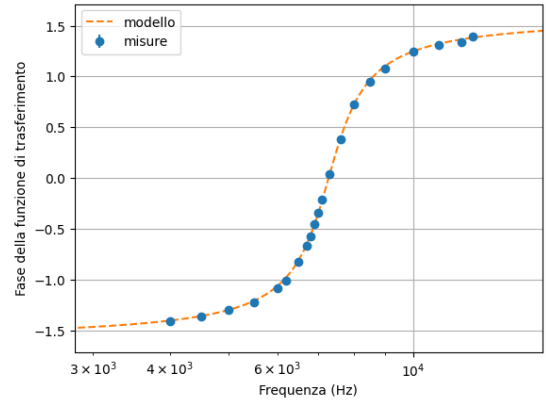


Figura 13. Fase della funzione di trasferimento per la resistenza in un circuito RLC in corrente alternata

Otteniamo dai parametri dell'interpolazione che  $L = (32.0 \pm 0.4) \text{ mH}$  e  $C = (15.0 \pm 0.2) \text{ nF}$ .

### 4.4.2. Condensatore

Le misure sono nella tabella 4. Come errore delle misure della tensione usiamo 1% del valore. Come resistenza abbiamo usato la cassetta a decade impostata per avere una resistenza  $R = (300 \pm 3) \Omega$ . Teniamo poi conto della resistenza del generatore di funzioni  $R_{gen}$ . Abbiamo usato un condensatore e un induttore differente dato che questa parte è stata svolta un giorno diverso.

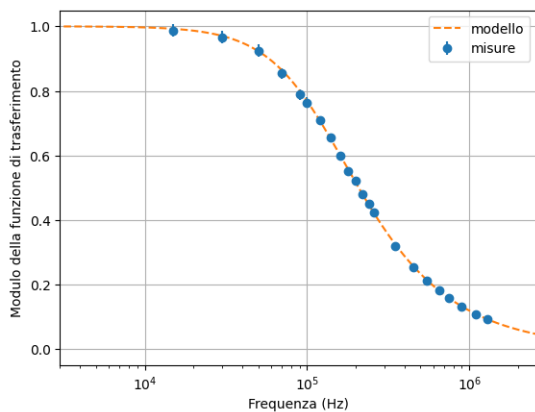
Interpoliamo con iminuit il rapporto fra l'ampiezza della tensione ai capi del condensatore e l'ampiezza della tensione d'entrata con il modello teorico per il condensatore. Analogamente a quanto svolto in precedenza, effettuiamo il cambio di variabile definito come

$$y' = \frac{1}{y^2}$$

Successivamente abbiamo interpolato le  $y'$  con il loro modello corrispondente

$$y' = ax^4 + bx^2 + 1$$

dove  $x$  è la frequenza  $\nu$  e vale che  $a = 16\pi^4 L^2 C^2$  e  $b = 4\pi^2(R^2 C^2 - 2LC)$ .



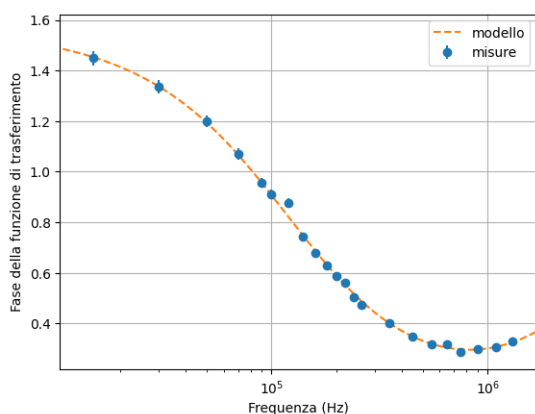
**Figura 14.** Modulo della funzione di trasferimento per il condensatore in un circuito RLC in corrente alternata

Abbiamo quindi le relazioni per  $L$  e  $C$  in funzione di  $a$  e  $b$

$$C = \sqrt{\frac{b + 2\sqrt{a}}{4\pi^2 R^2}}$$

$$L = \sqrt{\frac{a}{b + 2\sqrt{a}} \frac{R^2}{4\pi^2}}$$

Vale quindi che  $L = (114 \pm 1) \text{ mH}$  e  $C = (1850 \pm 20) \text{ nF}$ . Svolgiamo ora l'interpolazione per la fase



**Figura 15.** Fase della funzione di trasferimento per il condensatore in un circuito RLC in corrente alternata

Otteniamo dai parametri dell'interpolazione che  $L = (1.03 \pm 0.4) \cdot 10^{-5} \text{ H}$  e  $C = (3.59 \pm 0.06) \text{ nF}$ .

#### 4.4.3. Induttore

Le misure sono nella tabella 5. Come errore delle misure della tensione usiamo 1% del valore. Come resistenza abbiamo usato la cassetta a decade impostata per avere una resistenza  $R = (300 \pm 3) \Omega$ . Teniamo poi conto della resistenza del generatore di funzioni  $R_{gen}$ . Abbiamo usato lo stesso conduttore e induttore del punto precedente.

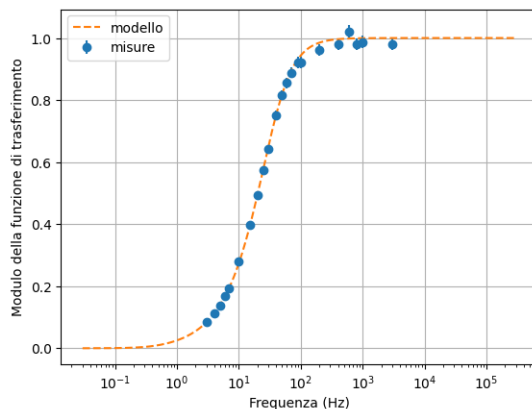
Interpoliamo con iminuit il rapporto fra l'ampiezza della tensione ai capi dell'induttore e l'ampiezza della tensione d'entrata con il modello teorico per l'induttore. Analogamente a quanto svolto in precedenza, effettuiamo il cambio di variabile definito come

$$y' = \frac{1}{y^2}$$

Successivamente abbiamo interpolato le  $y'$  con il loro modello corrispondente

$$y' = a/x^4 + b/x^2 + 1$$

dove  $x$  è la frequenza  $\nu$  e vale che  $a = \frac{1}{16\pi^4 L^2 C^2}$  e  $b = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{R^2/L^2 - 2/LC}$ .



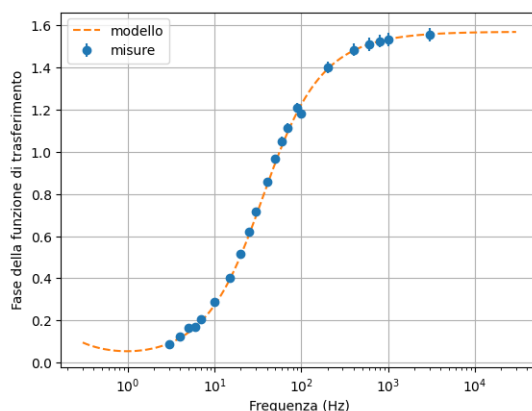
**Figura 16.** Modulo della funzione di trasferimento per l'induttore in un circuito RLC in corrente alternata

Abbiamo quindi le relazioni per  $L$  e  $C$  in funzione di  $a$  e  $b$

$$C = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{b + 2\sqrt{a}}{a}}$$

$$L = \frac{R}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{b + 2\sqrt{a}}}$$

Vale quindi che  $L = (3 \pm 1) \text{ H}$  e  $C = (1.6 \pm 0.7) \cdot 10^{-3} \text{ F}$ . Svolgiamo ora l'interpolazione per la fase



**Figura 17.** Fase della funzione di trasferimento per l'induttore in un circuito RLC in corrente alternata

Otteniamo dai parametri dell'interpolazione che  $L = (1.56 \pm 0.03) \text{ H}$  e  $C = (2 \pm 1) \text{ F}$ .

#### 4.5. Conclusioni

Gli andamenti di tutte e tre le funzioni di trasferimento sono quelli attesi. Per ogni interpolazione che abbiamo svolto, facciamo un test del chi quadro per valutarne la bontà. In tabella 6 sono presenti i chi quadri ridotti di ogni fit. Concludiamo quindi che, a parte per quanto riguarda il picco della resistenza, tutte le interpolazioni hanno avuto successo.

Per quanto riguarda la misura di  $L$  e  $C$ , dividiamo il primo punto dagli altri due dato che sono stati usati componenti diversi. Nel primo caso i valori di  $L$  e  $C$  sono dell'ordine di grandezza tipico di quelli che si trovano in laboratorio, ma non sono compatibili fra loro quando messi a paragone quelli calcolati dal modulo con quelli calcolati dalla fase. Invece, i valori di  $L$  e  $C$  degli altri due punti sono di ordini di grandezza illogici. Concludiamo quindi che il calcolo di questi due valori è fallito in tutte e tre le situazioni.

L'esperienza è stata condizionata dal verificarsi di un fenomeno che non siamo riusciti a spiegare durante la presa delle misure per la funzione di trasferimento del conduttore e dell'induttore. In quei casi sono stati usati gli stessi tre componenti, ma la risposta del sistema avveniva a frequenze totalmente diverse. Infatti la funzione di trasferimento del condensatore iniziava a non tendere più ad 1 circa a  $10^4$  Hz, ma allo stesso tempo quella dell'induttore tendeva già ad 1 a partire da circa  $10^2$  Hz. Abbiamo controllato varie volte i collegamenti dei vari elementi, ma tutto sembrava a posto. Abbiamo anche ipotizzato un danneggiamento dei componenti, ma ciò ci pare strano dati i giusti andamenti del sistema. Abbiamo sempre fatto le approssimazioni dei punti precedenti, ma in questo caso i valori dell'induttanza e della capacità trovati negli ultimi due casi sono discostati ordini di grandezza da quanto atteso.

sto avrebbe potuto diminuire il rumore di fondo che abbiamo sovrastimato a causa della natura della misura picco-picco.

In sintesi quindi, l'esperienza ha avuto successo nel mostrare come i dati da noi presi rispettino i modelli teorici delle funzioni di trasferimento, ma è fallita nella misura delle induttanze e delle capacità.

### 5. Conclusioni generali

Dall'intera esperienza possiamo trarre varie conclusioni. Per prima cosa, abbiamo sempre osservato gli andamenti teorici attesi dalle nostre misure: a basse frequenza i condensatori hanno dimostrato una grande impedenza, mentre per alte frequenze erano le induttanze a mostrare questa caratteristica. Le interpolazioni sono risultate valide nella quasi totalità, dunque possiamo affermare di aver osservato e confermato quanto la teoria predice nei casi di circuiti alimentati a corrente alternata per tutte le combinazioni di componenti.

Allo stesso tempo però, non è mai stato possibile ricavare valori attendibili per le induttanze e le capacità. Nella maggior parte dei casi gli ordini di grandezza misurati erano quelli attesi per la strumentazione prevista nel laboratorio, ma in generale i valori di  $L$  e di  $C$  riferiti allo stesso componente ottenuti per strade differenti non si sono quasi mai dimostrati compatibili. Questo può essere avvenuto a causa di varie possibilità. La prima è stato il sottostimare l'errore dell'oscilloscopio. Esso è uno strumento preciso, ma può darsi che l'errore da noi scelto non tenesse sufficientemente conto del rumore di fondo. Inoltre non abbiamo mai tenuto conto della sua resistenza interna, e questo può essere stato fonte di errore. Anche per quanto riguarda le induttanze, noi le abbiamo sempre considerate come ideali e senza resistenza, e questo potrebbe aver influito sulle nostre misure. Infine, la scelta di misurare la tensione come il valore picco-picco può essere stata una scelta sbagliata e sarebbe stato più opportuno prendere le misure RMS. Que-



6. Appendice

6.1. Tabelle dati

$\nu$ (kHz)	$V_{in}$ (V)	$V_{out}$ (V)	$Math$ (V)	$\Delta\phi$ (deg)
10	6.64	6.56	1.20	9.36
20	6.56	6.20	2.08	17.60
30	6.32	5.64	2.72	25.50
40	6.16	5.16	3.36	32.00
50	6.04	4.68	3.76	38.20
60	5.92	4.28	4.16	43.20
65	5.92	4.08	4.24	45.40
70	5.84	3.88	4.32	46.90
80	5.84	3.56	4.56	50.40
101	5.68	3.00	4.80	57.10
130	5.60	2.44	5.04	63.20

Tabella 1. Dati circuito RC

$\nu$ (kHz)	$V_{in}$ (V)	$V_{out}$ (V)	$Math$ (V)	$\Delta\phi$ (deg)
0.40	5.76	2.36	4.64	50.7
0.50	5.84	2.78	4.48	47.9
0.60	5.92	3.16	4.32	45.8
0.65	5.92	3.34	4.32	44.5
0.75	6.00	3.68	4.08	42.6
0.80	6.00	3.88	4.00	41.5
0.90	6.08	4.14	3.84	38.9
1.00	6.08	4.44	3.68	37.1
1.20	6.16	4.84	3.44	32.8
1.50	6.28	5.28	3.04	27.5
2.50	6.44	5.96	2.08	18.7
5.00	6.56	6.44	1.20	10.1

Tabella 2. Dati circuito RL

$\nu$ (kHz)	$V_{in}$ (V)	$V_{out}$ (V)	$\Delta\phi$ (deg)
4.0	6.56	0.88	-80.9
4.5	6.56	1.11	-77.8
5.0	6.56	1.42	-74.2
5.5	6.48	1.83	-70.1
6.0	6.44	2.52	-62.2
6.2	6.40	2.88	-58.0
6.5	6.28	3.54	-47.0
6.7	6.16	4.04	-37.9
6.8	6.12	4.28	-32.8
6.9	6.08	4.52	-25.8
7.0	6.04	4.68	-19.7
7.1	6.00	4.84	-12.0
7.3	6.00	4.92	2.10
7.6	6.04	4.60	21.9
8.0	6.24	3.88	41.5
8.5	6.36	3.00	54.4
9.0	6.40	2.44	61.6
10.0	6.48	1.76	71.3
11.0	6.56	1.36	74.9
12.0	6.56	1.12	76.8
12.5	6.56	1.02	79.7

Tabella 3. Dati circuito RLC presi ai capi di R

$\nu$ (kHz)	$V_{in}$ (V)	$V_{out}$ (V)	$\Delta\phi$ (deg)
15	6.08	6.00	-7.02
30	6.00	5.80	-13.4
50	5.84	5.40	-21.3
70	5.76	4.92	-28.7
90	5.68	4.48	-35.3
100	5.60	4.28	-37.9
120	5.48	3.88	-39.7
140	5.44	3.56	-47.4
160	5.40	3.24	-51.2
180	5.36	2.96	-53.9
200	5.28	2.76	-56.4
220	5.32	2.56	-57.9
240	5.28	2.38	-61.2
260	5.28	2.24	-62.9
350	5.28	1.68	-67.0
450	65.28	1.34	-70.0
550	5.20	1.11	-71.7
650	5.20	0.952	-71.8
750	5.20	0.832	-73.5
900	5.20	0.688	-72.9
1100	5.20	0.654	-72.5
1300	5.20	0.480	-71.2

Tabella 4. Dati circuito RLC presi ai capi di C

$\nu$ (Hz)	$V_{in}$ (V)	$V_{out}$ (V)	$\Delta\phi$ (deg)
3	6.12	0.52	85.10
4	6.12	0.68	83.00
5	6.08	0.84	80.60
6	6.08	1.02	80.30
7	6.08	1.18	78.20
10	5.84	1.64	73.50
15	6.00	2.38	66.90
20	6.12	3.02	60.40
25	6.08	3.50	54.40
30	6.08	3.90	48.80
40	6.08	4.56	40.90
50	6.08	4.96	34.60
60	6.08	5.20	29.80
70	6.08	5.40	26.20
90	6.08	5.60	20.70
100	6.08	5.60	22.30
200	6.12	5.88	9.79
400	6.08	5.96	4.90
600	5.84	5.96	3.45
800	6.08	5.96	2.59
1000	6.08	6.00	2.16
3000	6.12	6.00	0.86

Tabella 5. Dati circuito RLC presi ai capi di L

Interpolazione			$\tilde{\chi}^2$	$\tilde{\chi}_{critico}^2$
R	Modulo	Totale	58.4	1.59
		Solo code	1.8	1.94
	Fase		1.1	1.59
C	Modulo		0.9	1.57
	Fase		0.4	
L	Modulo		1.0	
	Fase		1.4	

**Tabella 6.** Test del chi quadro per il circuito RLC

## Riferimenti bibliografici

- [1] H. Dembinski e P. O. et al., «scikit-hep/iminuit», dic. 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3949207. indirizzo: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3949207>.
- [2] «Scheda», indirizzo: [https://elearning.unimib.it/pluginfile.php/1690022/mod\\_resource/content/2/C3.pdf](https://elearning.unimib.it/pluginfile.php/1690022/mod_resource/content/2/C3.pdf).