Problemas de derivabilidad de funciones. Estudio local de funciones.

1. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$.

Solución

a) Dominio.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ al ser una función polinómica.

b) Puntos de discontinuidad.

No tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte:

- Eje de abscisas o eje X. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$$x^3 - 5x^2 + 12 = 0.$$

Probamos con Ruffini en $x = 2$:

	1	-5	0	12
2		2	-6	-12
	1	-3	-6	0

Vemos que $x = 2$. Para hallar las demás hemos de resolver la ecuación siguiente de segundo grado:

$$x^2 - 3x - 6 = 0, \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+24}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2} \approx -1.3723, 4.3723.$$

Entonces la función f pasa por los tres puntos siguientes: $(2,0)$, $\left(\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}, 0\right)$.

- Eje de ordenadas o eje Y. El valor de $f(0)$ és $f(0) = 12$. Por tanto, la función f pasa por el punto $(0, 12)$.

d) Simetrías.

El valor de $f(-x)$ vale $f(-x) = -x^3 - 5x^2 + 12$, valor que no está relacionado con $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$. Por tanto, no tiene simetrías respecto al eje Y ni respecto al origen.

e) Asíntotas.

Al ser una función polinómica, la función $f(x)$ no tiene asíntotas.

f) Crecimiento y decrecimiento.

Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de hallar la función derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x.$$

Los posibles extremos se hallan resolviendo $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 10x = 0, \Rightarrow x(3x - 10) = 0, \Rightarrow x = 0, \ x = \frac{10}{3}.$$

Hemos hallado dos candidatos a extremos. Hallemos a continuación la región de crecimiento y decrecimiento y el tipo de extremos que son los candidatos hallados:

x	$-\infty$		0		$\frac{10}{3}$		∞
y'		$+$		$-$		$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

La función es creciente en la región $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{10}{3}, \infty\right)$, es decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{10}{3}\right)$, tiene un máximo en el punto $(0, 12)$ y un mínimo en el punto $\left(\frac{10}{3}, \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 12\right) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{176}{27}\right) \approx (3.3333, -6.5185)$.

g) Concavidad y convexidad.

Para estudiar la concavidad y la convexidad, hemos de hallar la función derivada segunda:

$$f''(x) = 6x - 10.$$

Los posibles puntos de inflexión se hallan resolviendo $f''(x) = 0$:

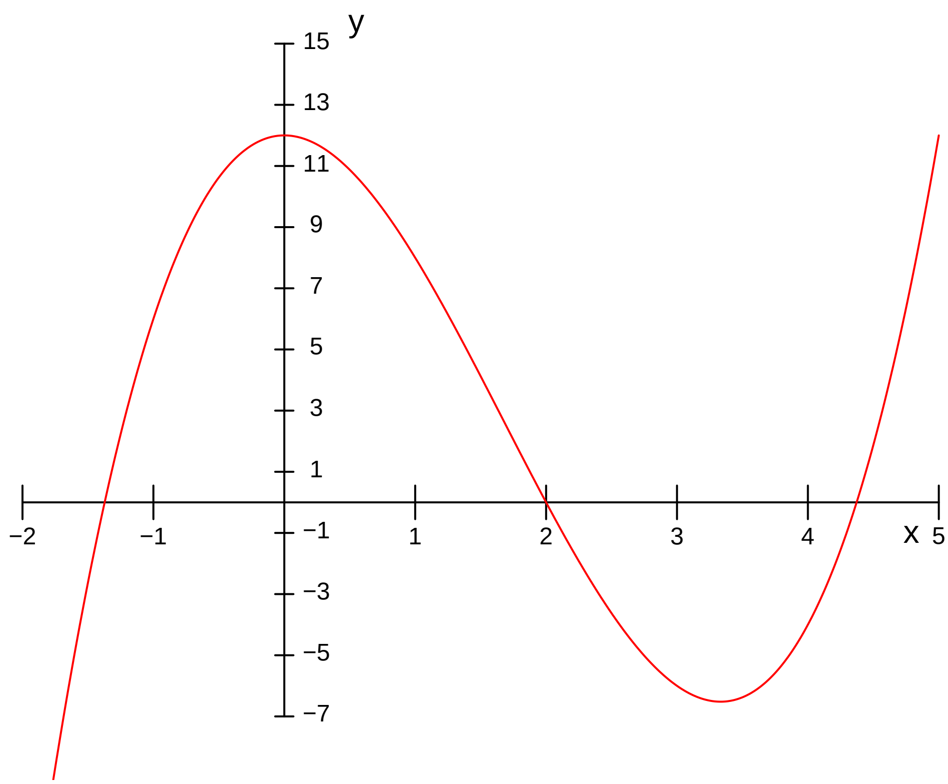
$$6x - 10 = 0, \Rightarrow x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \approx 1.6667.$$

Hemos hallado un candidato a punto de inflexión. Hallemos a continuación la región de concavidad y convexidad:

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		∞
y''		$-$		$+$	
y		$\bigcap$		$\bigcup$	

La función será cóncava en el intervalo $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$, convexa en el intervalo $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$ y tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{5}{3}, \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 12\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{74}{27}\right) \approx (1.6667, 2.7407)$.

Usando todas propiedades anteriores ya podemos dibujar la función $y = f(x)$:


y
15
13
11
9
7
5
3
1
−1
−3
−5
−7
−2
−1
1
2
3
4
x
5

2. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

Solución

3. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = \ln(\cos^2 x)$.

Solución

4. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Solución