Problemas de límites de sucesiones

1. Calcula los límites siguientes:
   a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^5+4n^4-n+7}{-n^5-n^4+2n^3+3n+4}$.
   b) $\lim_{n\to\infty} 2n-\sqrt{4n^2-n}$.

Solución

a) El valor del límite vale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5+4n^4-n+7}{-n^5-n^4+2n^3+3n+4} = \frac{3}{-1} = -3.$$

b) Para calcular el límite, multiplicamos por el conjugado del numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2-n})\cdot\frac{2n+\sqrt{4n^2-n}}{2n+\sqrt{4n^2-n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-(4n^2-n)}{2n+\sqrt{4n^2-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+\sqrt{4n^2-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n}+\sqrt{4\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}}} = \frac{1}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2. Calcula los límites siguientes:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}\right)^{2n-1}$.

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\ln n}$.

Solución

a) Como el límite de la base, $\frac{n^2}{n^2+n+1}$ tiende a 1 y el exponente, $2n-1$, a infinito, el límite propuesto es tipo e:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}\right)^{2n-1} &= \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}(2n-1)\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}-1\right)} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}(2n-1)\left(-\frac{(n+1)}{n^2+n+1}\right)}\\ &= \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)} = \mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}.\end{aligned}$$

b) Como el límite de la base, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$ tiende a 1, ya que por el criterio de Stolz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)-\ln(n+1)}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

y el exponente, $\ln n$, a infinito, el límite propuesto es tipo e:

3. Calcula el valor del límite de las sucesiones siguientes definidas de forma recurrente:
    a) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$.
    b) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$.

Solución

4. Calcula los límites siguientes:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, si $b > a > 0$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[m]{k^m + k}}$, si $k \geq 2$ es un número natural.

Solución

5. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n^2+n+1} \right)^{2n-1}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)^{\ln n}$.

Solución

4. Calcula los límites siguientes:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+3^3+\cdots+(2n+1)^3}{n^4}$.
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+3+\cdots+2n-1}{n+1} - \dfrac{(2n+1)}{2}\right)$.

Solución

a) Aplicamos el criterio de Stolz ya que la sucesión $(2n+1)^3$ es estrictamente creciente y no acotada:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+3^3+\cdots+(2n+1)^3}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^3}{(n+1)^4-n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+36n^2+54n+27}{4n^3+6n^2+4n+1} = \frac{8}{4} = 2.$$

b) En primer lugar, operamos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+\cdots+2n-1}{n+1} - \frac{(2n+1)}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+6+\cdots+2(2n-1)-(n+1)(2n+1)}{2(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+6+\cdots+4n-2-(n+1)(2n+1)}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

A continuación, aplicamos el criterio de Stolz ya que la sucesión $2(n+1)$ es estrictamente creciente y no acotada:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+2-(n+2)(2n+3)+(n+1)(2n+1)}{2(n+2)-2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}.$$