Ejercicios resueltos de derivación. 2a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

a) Desarrollar la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}$ en desarrollo de MacLaurin de grado n dando el error cometido.

b) Dar una estimación de $\frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con 4 valores exactos.

Solución

Apartado a).

Fórmula de Taylor

Solución

Apartado a).
En los apuntes vimos que el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = (x + C)^\alpha$ alrededor de $x = x_0$ era:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \cdot (x_0 + C)^{\alpha-k} \cdot (x - x_0)^k,$$

donde $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

donde $i!!!! = i \cdot (i-4) \cdot (i-8) \cdots 1$.

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

donde $i!!!! = i \cdot (i-4) \cdot (i-8) \cdots 1$.
Ejemplos: $5!!!! = 5 \cdot 1 = 5$, $8!!!! = 8 \cdot 4 = 32$.

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$R_n(x - x_0) \quad = \quad \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c + C)^{\alpha - n - 1} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} R_n(x - x_0) &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c + C)^{\alpha - n - 1} \cdot (x - x_0)^{n+1} \\ &= \binom{-\frac{1}{4}}{n+1} \cdot (1 + c)^{-\frac{1}{4} - n - 1} \cdot x^{n+1} \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} R_n(x-x_0) &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c+C)^{\alpha-n-1} \cdot (x-x_0)^{n+1} \\ &= \binom{-\frac{1}{4}}{n+1} \cdot (1+c)^{-\frac{1}{4}-n-1} \cdot x^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)!!!!}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot (1+c)^{-n-\frac{5}{4}} \cdot x^{n+1}, \end{aligned}$$

donde $c \in < 0, x >$.

Solución (cont.)

Apartado b).

Solución (cont.)

Apartado b).
En el apartado b) nos piden hallar $f(0.1) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con un error menor o igual que 10^{-4}.

Solución (cont.)

Apartado b).

En el apartado b) nos piden hallar $f(0.1) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con un error menor o igual que 10^{-4}.

Primero tenemos que hallar el grado del polinomio n tal que $|f(0.1) - P_n(0.1)| \leq 10^{-4}$.

Solución (cont.)

Apartado b).
En el apartado b) nos piden hallar $f(0.1) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con un error menor o igual que 10^{-4}.
Primero tenemos que hallar el grado del polinomio n tal que $|f(0.1) - P_n(0.1)| \leq 10^{-4}$.
Es decir:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)!!!!}{4^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot(1+c)^{-n-\frac{5}{4}}\cdot 0.1^{n+1}\right| \leq 10^{-4},$$

con $c \in (0, 0.1)$.

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

$$(1+c)^{-n-\frac{5}{4}} = \frac{1}{(1+c)^{n+\frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para $c = 0$.

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

$$(1+c)^{-n-\frac{5}{4}} = \frac{1}{(1+c)^{n+\frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para $c = 0$. Así el error puede acotarse por:

$$\left|\frac{(4n+1)!!!!\cdot 0.1^{n+1}}{4^{n+1}\cdot (n+1)!}\right| = \left|\frac{(4n+1)!!!!}{40^{n+1}\cdot (n+1)!}\right| \leq 10^{-4}.$$

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

$$(1+c)^{-n-\frac{5}{4}} = \frac{1}{(1+c)^{n+\frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para $c = 0$. Así el error puede acotarse por:

$$\left|\frac{(4n+1)!!!! \cdot 0.1^{n+1}}{4^{n+1} \cdot (n+1)!}\right| = \left|\frac{(4n+1)!!!!}{40^{n+1} \cdot (n+1)!}\right| \leq 10^{-4}.$$

Hagamos un programa en python que nos halle el n:

Fórmula de Taylor

```
from math import *
def fourthfactorial(n):
  if n in (1, 2, 3, 4):
    return n
  else:
    if n == 0:
      return 1
    else:
      return n * fourthfactorial(n-4)
```

Fórmula de Taylor

```
def calculo_n(error):
  x=0.1
  m=2
  cota_error=(fourthfactorial(4*m+1)/(4.**(m+1)*
              factorial(m+1)))*(x**(m+1))
  while(cota_error >= error):
    m=m+1
    cota_error=(fourthfactorial(4*m+1)/(4.**(m+1)*
                factorial(m+1)))*(x**(m+1))
  return(m)

calculo_n(0.0001)
3
```

Fórmula de Taylor

Solución (cont.)

El valor de n será 3 y por tanto $P_3(0.1)$ valdrá:

```
def termino_k(x,k):
  y=((-1)**k*fourthfactorial(4*k-3)/
              (4.**k*factorial(k)))*x**k
  return(y)
```

```
def Pn(x,n):
  p=1
  k=1
  while k <= n:
    p=p+termino_k(x,k)
    k=k+1
  return(p)

Pn(0.1,3)
0.9764453125
```

Ejercicio 2

Desarrollar en polinomios de Taylor las funciones siguientes alrededor del punto x_0 hasta la n indicada y realizar un gráfico de la función y los polinomios de Taylor obtenidos:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ hasta $n = 4$.
b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x_0 = 0$ hasta $n = 4$.

Fórmula de Taylor

Solución

En general, dada una función $f(x)$, $n+1$-veces derivable, el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = x_0$ vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Fórmula de Taylor

Solución

En general, dada una función $f(x)$, $n+1$-veces derivable, el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = x_0$ vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Apartado a). La función f vale $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ y $n = 4$.

Solución

En general, dada una función $f(x)$, $n+1$-veces derivable, el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = x_0$ vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Apartado a). La función f vale $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ y $n = 4$. Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}},$$

Solución

En general, dada una función $f(x)$, $n+1$-veces derivable, el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = x_0$ vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Apartado a). La función f vale $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ y $n = 4$. Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}, \quad f^{(iv)}(x) = -\frac{15}{16} \cdot x^{-\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 4$ valen:

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 4$ valen:

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 4$ valen:

$$
\begin{aligned}
f'(4) &= \frac{1}{2}\cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\
f''(4) &= -\frac{1}{4}\cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{32},
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 4$ valen:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\ f''(4) &= -\frac{1}{4} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{32}, \\ f'''(4) &= \frac{3}{8} \cdot 4^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3}{256}, \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 4$ valen:

$$
\begin{aligned}
f'(4) &= \frac{1}{2}\cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},\\
f''(4) &= -\frac{1}{4}\cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{32},\\
f'''(4) &= \frac{3}{8}\cdot 4^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{3}{256},\\
f^{(iv)}(4) &= -\frac{15}{16}\cdot 4^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2^7} = -\frac{15}{2048}.
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$P_4(x) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x-4) - \frac{1}{2! \cdot 32} \cdot (x-4)^2$$

Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 2+\frac{1}{4}\cdot(x-4)-\frac{1}{2!\cdot 32}\cdot(x-4)^2 \\ &\quad +\frac{3}{3!\cdot 256}\cdot(x-4)^3-\frac{15}{4!\cdot 2048}\cdot(x-4)^4 \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

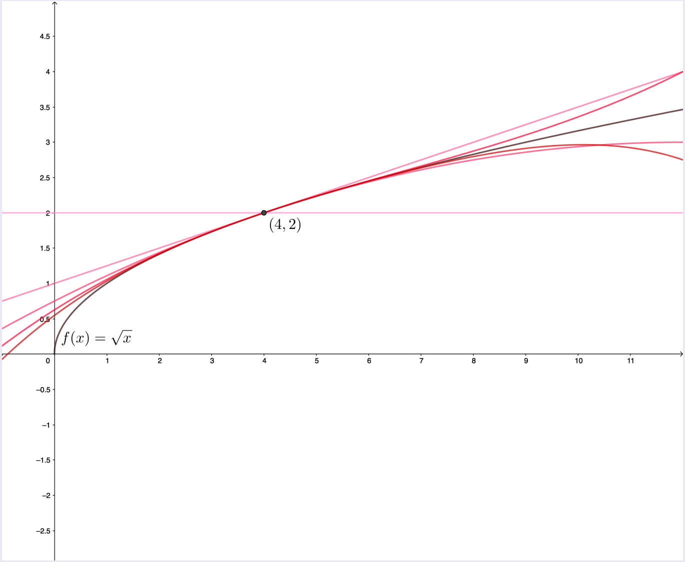
$$\begin{aligned} P_4(x) &= 2+\frac{1}{4}\cdot(x-4)-\frac{1}{2!\cdot 32}\cdot(x-4)^2 \\ &\quad +\frac{3}{3!\cdot 256}\cdot(x-4)^3-\frac{15}{4!\cdot 2048}\cdot(x-4)^4 \\ &= 2+\frac{1}{4}\cdot(x-4)-\frac{1}{64}\cdot(x-4)^2 \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 2+\frac{1}{4}\cdot(x-4)-\frac{1}{2!\cdot 32}\cdot(x-4)^2 \\ &\quad +\frac{3}{3!\cdot 256}\cdot(x-4)^3-\frac{15}{4!\cdot 2048}\cdot(x-4)^4 \\ &= 2+\frac{1}{4}\cdot(x-4)-\frac{1}{64}\cdot(x-4)^2 \\ &\quad +\frac{1}{512}\cdot(x-4)^3-\frac{5}{16384}\cdot(x-4)^4. \end{aligned}$$

Solución (cont.)



Solución (cont.)

Apartado b). La función f vale $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x_0 = 0$ y $n = 4$.

Solución (cont.)

Apartado b). La función f vale $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x_0 = 0$ y $n = 4$. Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$f'(x) = -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2},$$

Solución (cont.)

Apartado b). La función f vale $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x_0 = 0$ y $n = 4$. Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}, \\
f''(x) &= (4 \cdot x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

Apartado b). La función f vale $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x_0 = 0$ y $n = 4$.
Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}, \\ f''(x) &= (4 \cdot x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \\ f'''(x) &= -4\mathrm{e}^{-x^2} x \left(2x^2 - 3\right) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). La función f vale $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x_0 = 0$ y $n = 4$. Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}, \\
f''(x) &= (4 \cdot x^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \\
f'''(x) &= -4\mathrm{e}^{-x^2} x \left(2x^2 - 3\right) \\
f^{(iv)} &= 4\mathrm{e}^{-x^2} \left(4x^4 - 12x^2 + 3\right).
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 0$ valen:

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 0$ valen:

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = -2, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(iv)}(0) = 12.$$

Solución (cont.)

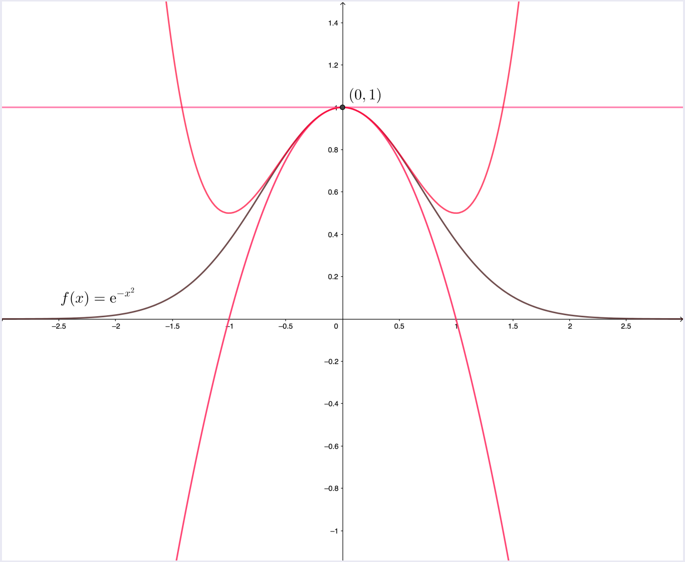
Las derivadas en $x = x_0 = 0$ valen:

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = -2, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(iv)}(0) = 12.$$

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$P_4(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^4.$$

Solución (cont.)



Ejercicio 3

Realizar un estudio local de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Solución

a) Dominio.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

Estudio local de una función

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.
   - Eje X o eje de abscisas.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.
   - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$,

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.
   - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.
   - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.
   - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
   - Eje Y o eje de ordenadas.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.
   - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
   - Eje Y o eje de ordenadas. Hemos de calcular $f(0) = -1$.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.
   - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
   - Eje Y o eje de ordenadas. Hemos de calcular $f(0) = -1$. Por tanto, pasa por el punto $(0, -1)$.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.
   - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
   - Eje Y o eje de ordenadas. Hemos de calcular $f(0) = -1$. Por tanto, pasa por el punto $(0, -1)$.

d) Simetrías.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.
   - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
   - Eje Y o eje de ordenadas. Hemos de calcular $f(0) = -1$. Por tanto, pasa por el punto $(0, -1)$.

d) Simetrías.
   - Respecto al eje Y: hemos de comprobar si $f(x) = f(-x)$. Vemos que sí se cumple, por tanto, f es simétrica respecto al eje Y.

Solución

a) Dominio. El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x.

b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte.
   - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
   - Eje Y o eje de ordenadas. Hemos de calcular $f(0) = -1$. Por tanto, pasa por el punto $(0, -1)$.

d) Simetrías.
   - Respecto al eje Y: hemos de comprobar si $f(x) = f(-x)$. Vemos que sí se cumple, por tanto, f es simétrica respecto al eje Y.
   - Respecto al origen. Al ser simétrica respecto al eje Y, no es

Solución (cont.)

e) Asíntotas.

Solución (cont.)

e) Asíntotas.
   - Horizontales. Hemos de calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1.$$

Solución (cont.)

e) Asíntotas.
   - Horizontales. Hemos de calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1.$$

     Al existir el límite anterior, deducimos que tiene la asíntota horizontal $y = 1$.

Solución (cont.)

e) Asíntotas.

Solución (cont.)

e) Asíntotas.
   - Verticales. La asíntota $x = a$ es una asíntota vertical si:

Solución (cont.)

e) Asíntotas.
   - Verticales. La asíntota $x = a$ es una asíntota vertical si:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Solución (cont.)

e) Asíntotas.
   - Verticales. La asíntota $x = a$ es una asíntota vertical si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

   En nuestro caso, no existe ningún a que verifique la condición anterior ya que estos valores son puntos de discontinuidad de la función y nuestra función no tiene puntos de discontinuidad.

Solución (cont.)

e) Asíntotas.
- Verticales. La asíntota $x = a$ es una asíntota vertical si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

En nuestro caso, no existe ningún a que verifique la condición anterior ya que estos valores son puntos de discontinuidad de la función y nuestra función no tiene puntos de discontinuidad.
- Oblicuas. La asíntota de la forma $y = m \cdot x + n$ es una asíntota oblicua de pendiente:

Solución (cont.)

e) Asíntotas.
- Verticales. La asíntota $x = a$ es una asíntota vertical si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

  En nuestro caso, no existe ningún a que verifique la condición anterior ya que estos valores son puntos de discontinuidad de la función y nuestra función no tiene puntos de discontinuidad.
- Oblicuas. La asíntota de la forma $y = m \cdot x + n$ es una asíntota oblicua de pendiente:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x \cdot (x^2 + 1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = 0.$$

Solución (cont.)

e) Asíntotas.

- Verticales. La asíntota $x = a$ es una asíntota vertical si:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

  En nuestro caso, no existe ningún a que verifique la condición anterior ya que estos valores son puntos de discontinuidad de la función y nuestra función no tiene puntos de discontinuidad.

- Oblicuas. La asíntota de la forma $y = m \cdot x + n$ es una asíntota oblicua de pendiente:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x\cdot(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^3+x} = 0.$$

  Como la pendiente es $m = 0$, la asíntota no puede ser oblicua sino horizontal y éstas ya han sido estudiadas.

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento.

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento. Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de calcular la función derivada:

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento. Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de calcular la función derivada:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento. Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de calcular la función derivada:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Igualando la función derivada a cero, calculamos los puntos candidatos a extremos relativos de la función:

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento. Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de calcular la función derivada:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Igualando la función derivada a cero, calculamos los puntos candidatos a extremos relativos de la función:

$$f'(x) = 0, \Rightarrow \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0, \Rightarrow x = 0.$$

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento. Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de calcular la función derivada:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Igualando la función derivada a cero, calculamos los puntos candidatos a extremos relativos de la función:

$$f'(x) = 0, \Rightarrow \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0, \Rightarrow x = 0.$$

El punto $(0, -1)$ es un candidato a extremo relativo.

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento. A continuación realizamos la tabla siguiente para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función:

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento. A continuación realizamos la tabla siguiente para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función:

x	$-\infty$		0		∞
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento. A continuación realizamos la tabla siguiente para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función:

x	$-\infty$		0		∞
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Vemos que la función es decreciente en la región $(-\infty, 0)$,

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento. A continuación realizamos la tabla siguiente para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función:

x	$-\infty$		0		∞
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Vemos que la función es decreciente en la región $(-\infty, 0)$, es creciente en la región $(0, \infty)$

Solución (cont.)

f) Crecimiento y decrecimiento. A continuación realizamos la tabla siguiente para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función:

x	$-\infty$		0		∞
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Vemos que la función es decreciente en la región $(-\infty, 0)$, es creciente en la región $(0, \infty)$ y tiene un mínimo en el punto $(0, -1)$.

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad.

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. Para estudiar la concavidad y convexidad, hemos de calcular la función derivada segunda:

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. Para estudiar la concavidad y convexidad, hemos de calcular la función derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{4 \cdot (x^2+1)^2 - 4x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. Para estudiar la concavidad y convexidad, hemos de calcular la función derivada segunda:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{4\cdot(x^2+1)^2-4x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{4(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}.
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. Para estudiar la concavidad y convexidad, hemos de calcular la función derivada segunda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4\cdot(x^2+1)^2 - 4x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{4(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Igualando la función derivada segunda a cero, calculamos los puntos candidatos a puntos de inflexión:

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. Para estudiar la concavidad y convexidad, hemos de calcular la función derivada segunda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4\cdot(x^2+1)^2 - 4x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{4(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Igualando la función derivada segunda a cero, calculamos los puntos candidatos a puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0, \Rightarrow \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}, \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. Para estudiar la concavidad y convexidad, hemos de calcular la función derivada segunda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4\cdot(x^2+1)^2 - 4x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{4(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Igualando la función derivada segunda a cero, calculamos los puntos candidatos a puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0, \Rightarrow \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}, \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Los puntos $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ son candidatos a puntos de inflexión.

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad.

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. A continuación realizamos la tabla siguiente para estudiar el la concavidad y la convexidad de la función:

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. A continuación realizamos la tabla siguiente para estudiar el la concavidad y la convexidad de la función:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		∞
y''		$-$		$+$		$-$	
y		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. A continuación realizamos la tabla siguiente para estudiar el la concavidad y la convexidad de la función:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		∞
y''		$-$		$+$		$-$	
y		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

La función es cóncava en la región $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$,

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. A continuación realizamos la tabla siguiente para estudiar el la concavidad y la convexidad de la función:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		∞
y''		$-$		$+$		$-$	
y		$\bigcap$		$\bigcup$		$\bigcap$	

La función es cóncava en la región $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\infty\right)$, es convexa en la región $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

Solución (cont.)

g) Concavidad y convexidad. A continuación realizamos la tabla siguiente para estudiar el la concavidad y la convexidad de la función:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		∞
y''		$-$		$+$		$-$	
y		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

La función es cóncava en la región $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$, es convexa en la región $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ y los puntos $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ son puntos de inflexión.

Solución (cont.)