Problemas de límites de sucesiones

1. Calcula los límites siguientes:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^5+4n^4-n+7}{-n^5-n^4+2n^3+3n+4}$.
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2n-\sqrt{4n^2-n}$.

Solución

a) El valor del límite vale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5+4n^4-n+7}{-n^5-n^4+2n^3+3n+4} = \frac{3}{-1} = -3.$$

b) Para calcular el límite, multiplicamos por el conjugado del numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2-n})\cdot\frac{2n+\sqrt{4n^2-n}}{2n+\sqrt{4n^2-n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-(4n^2-n)}{2n+\sqrt{4n^2-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+\sqrt{4n^2-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n}+\sqrt{4\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}}} = \frac{1}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2. Calcula los límites siguientes:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2+n+1}\right)^{2n-1}$.
   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\ln n}$.

Solución

a) Como el límite de la base, $\frac{n^2}{n^2+n+1}$ tiende a 1 y el exponente, $2n-1$, a infinito, el límite propuesto es tipo e:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}\right)^{2n-1} &= \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}(2n-1)\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}-1\right)} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}(2n-1)\left(-\frac{(n+1)}{n^2+n+1}\right)}\\ &= \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)} = \mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}.\end{aligned}$$

b) Como el límite de la base, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$ tiende a 1, ya que por el criterio de Stolz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)-\ln(n+1)}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}}\\ &= \ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}} = \ln\left(\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right)\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\ln\left(\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}-1\right)}\right)} = \frac{1}{\ln\left(\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right)} = \frac{1}{\ln\mathrm{e}^1} = 1.\end{aligned}$$

y el exponente, $\ln n$, a infinito, el límite propuesto es tipo e:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\ln n} &= \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1\right)} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot\left(\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n}\right)} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln n)}\\ &= \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{(n+1)}{n}\right)} = \mathrm{e}^{\ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{\ln 1} = 1.\end{aligned}$$

3. Calcula el valor del límite de las sucesiones siguientes definidas de forma recurrente:
   a) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$.
   b) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$.

Solución

a) Veamos que la sucesión $(a_n)_n$ es decreciente por inducción.

Para $n = 1$, tenemos que
$$a_1 = \sqrt{2} \approx 1.4142 > a_2 \approx 1.1892.$$
Supongamos ahora que $a_n > a_{n+1}$. Veamos que $a_{n+1} > a_{n+2}$: si $a_n > a_{n+1}$, tendremos que $\sqrt{a_n} > \sqrt{a_{n+1}}$, lo que significa que $a_{n+1} > a_{n+2}$, tal como queríamos demostrar.

Veamos a continuación que $a_n > 1$ por inducción. Para $n = 1$ se cumple claramente. Supongamos ahora que $a_n > 1$, entonces $\sqrt{a_n} > 1$, lo que significa que $a_{n+1} > 1$ tal como queríamos demostrar.

Como a_n es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, tiene límite. Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$ y L verificará que $L = \sqrt{L}$, de donde $L^2 = L$. Entonces $L = 0, 1$. Como $a_n > 1$, para todo n, L necesariamente vale 1: $L = 1$.

b) Veamos primero que $x_n > 2$ por inducción. El caso $n = 1$ es claro. Supongamos ahora que $x_n > 2$. Entonces:
$$x_n > 2,\ \Rightarrow 0 < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{2},\ \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{x_n} < 0,\ \Rightarrow 2 < 3 - \frac{1}{2} < 3 - \frac{1}{x_n} < 3,\ \Rightarrow 2 < a_{n+1},$$
tal como queríamos demostrar.

A continuación veamos que la sucesión $(x_n)_n$ es decreciente por inducción.

Para $n = 1$ tenemos que
$$x_1 = 3 > x_2 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$
Supongamos ahora que $x_n > x_{n+1}$. Veamos que $x_{n+1} > x_{n+2}$:
$$x_n > x_{n+1},\ \Rightarrow \frac{1}{x_n} < \frac{1}{x_{n+1}} (\text{ya que } x_n > 2 > 0),\ \Rightarrow 3 - \frac{1}{x_n} > 3 - \frac{1}{x_{n+1}},\ \Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2},$$
tal como queríamos demostrar.

Como x_n es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por 2, tiene límite. Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. L cumple:
$$L = 3 - \frac{1}{L},\ \Rightarrow L^2 = 3L - 1,\ \Rightarrow L^2 - 3L + 1 = 0,\ \Rightarrow L = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$
Como $x_n > 2$, el valor de L es: $L = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$.

4. Calcula los límites siguientes:
   a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, si $b > a > 0$.
   b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[m]{n^m+k}}$, si $m \geq 2$ es un número natural.

Solución

a) Si $b > a > 0$, tenemos lo siguiente:

$$b = \sqrt[n]{b^n} < \sqrt[n]{a^n+b^n} < \sqrt[n]{b^n+b^n} = b\sqrt[n]{2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ ya que si $L = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}$, aplicando logaritmos, tenemos que:

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} \ln 2^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln 2 = 0, \ \Rightarrow L = 1,$$

aplicando el criterio del sandwitch, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = b$.

b) Observemos en primer lugar que para todo $k = 1, \ldots, n$,

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n^m+n}} < \frac{1}{\sqrt[m]{n^m+k}} < \frac{1}{\sqrt[m]{n^m}} = \frac{1}{n}.$$

Por tanto,

$$\frac{n}{\sqrt[m]{n^m+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[m]{n^m+n}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[m]{n^m+k}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[m]{n^m+n}} = 1$, ya que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[m]{n^m+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt[m]{\frac{n^m}{n^m}+\frac{n}{n^m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{1+0}} = 1,$$

por el criterio del sandwich, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[m]{n^m+k}} = 1$.

5. Calcula los límites siguientes:
   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+3^3+\cdots+(2n+1)^3}{n^4}$.
   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+\cdots+2n-1}{n+1} - \frac{(2n+1)}{2}\right)$.

Solución

a) Aplicamos el criterio de Stolz ya que la sucesión $(2n+1)^3$ es estrictamente creciente y no acotada:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+3^3+\cdots+(2n+1)^3}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^3}{(n+1)^4-n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+36n^2+54n+27}{4n^3+6n^2+4n+1} = \frac{8}{4} = 2.$$

b) En primer lugar, operamos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+\cdots+2n-1}{n+1} - \frac{(2n+1)}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+6+\cdots+2(2n-1)-(n+1)(2n+1)}{2(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+6+\cdots+4n-2-(n+1)(2n+1)}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

A continuación, aplicamos el criterio de Stolz ya que la sucesión $2(n+1)$ es estrictamente creciente y no acotada:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+2-(n+2)(2n+3)+(n+1)(2n+1)}{2(n+2)-2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}.$$