Problemas de estudio de derivabilidad de funciones

1. Usando la definición, calcular la derivada de la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$ para $x > 0$ en un valor $x_0 > 0$.

   Solución:
   Usando la definición, la derivada de la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en $x_0 > 0$ será:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x_0}}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{x}}{\sqrt{x \cdot x_0} \cdot (x - x_0)} \cdot \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x_0 - x}{\sqrt{x \cdot x_0} \cdot (x - x_0) \cdot (\sqrt{x_0} + \sqrt{x})} = -\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x \cdot x_0} \cdot (\sqrt{x_0} + \sqrt{x})} = -\frac{1}{2x_0 \cdot \sqrt{x_0}} \\ &= -\frac{1}{x_0^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

2. Demostrar que la función $f(x) = \sqrt[5]{x}$ no es derivable en $x = 0$.

   Solución:
   Intentemos calcular la derivada en $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{0} = \infty!$$

3. Sea la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Demostrar que $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

Solución:
Intentemos hallar la derivada en $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Veamos que el límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Hay que ver que para todo valor $\epsilon > 0$, existe un valor $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \epsilon$.
Consideremos $\delta = \epsilon$. Entonces, si $|x| < \delta = \epsilon$, tendremos que $\left|\frac{f(x)}{x}\right|$ valdrá $\left|\frac{x^2}{x}\right| = |x|$, si x es racional o $\left|\frac{0}{x}\right| = 0$, si x es irracional. En cualquiera de los dos casos, $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \epsilon$, tal como queríamos demostrar.

4. Hallar los valores de x en donde la siguiente función es derivable: $f(x) = |x| + |x+1|$ y hallar la derivada correspondiente.

Solución
Escribamos la función anterior a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x - (x+1) = -2x - 1, & \text{si } x < -1, \\ -x + (x+1) = 1, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ x + (x+1) = 2x + 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Se puede verificar que dicha función es continua. Los únicos valores donde se tiene que estudiar la derivabilidad es en los puntos donde f cambia de expresión que son los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
Veamos si es derivable en el punto $x = -1$, o si existe el límite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - 1}{x+1}.$$

Si hacemos el límite anterior por la izquierda o para valores $x < -1$, obtenemos:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - 1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{-2x - 1 - 1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{-2(x+1)}{x+1} = -2.$$

Si hacemos el límite por la derecha o para valores $x > -1$, obtenemos:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - 1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{1 - 1}{x+1} = 0.$$

Como los dos límites anteriores no coinciden, concluimos que f no es derivable en $x = -1$.
Para $x = 0$, hacemos una cosa parecida:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}.$$

Si hacemos el límite anterior por la izquierda o para valores $x < 0$, obtenemos:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - 1}{x} = 0.$$

Si lo hacemos por la derecha o para valores $x > 0$, obtenemos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{x} = 2.$$

Como los dos límites anteriores no coinciden, concluimos que f no es derivable en $x = 0$.

5. Sea $f(x)$ una función derivable en un punto x_0. Demostrar que:

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \left(f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)\right)\right).$$

Demostrar que el recíproco es falso, es decir, dar un ejemplo de una función y un valor x_0 tal que exista el límite anterior pero la función no sea derivable en x_0.
Indicación: considerar la función $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Ver que el límite anterior para $x_0 = 0$ existe pero $f(x)$ no es derivable en $x_0 = 0$.

Solución
Como f es derivable en x_0, tenemos que existe el límite siguiente $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. En particular se verifica que si $(x_n)_n$ es una sucesión de valores reales con límite x_0 ($\lim\limits_{x\to x_0} x_n = x_0$), entonces existe el límite $f'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ y vale $f'(x_0)$. Consideremos la sucesión siguiente $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$. Aplicando el resultado anterior a dicha sucesión, sale el resultado pedido.
Para ver que el recíproco es falso, tal como dice la indicación, consideremos la función $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Dicha función no es derivable en $x = 0$ ya que el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right),$$

no existe ya que si consideramos la sucesiones siguientes $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{\frac{1}{2}+2n}$, las dos tienden a cero pero:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{y_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

En cambio, el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}(n \cdot \sin(\pi n)) = 0,$$

existe y vale 0.

6. Calcular la derivada de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.
   b) $f(x) = \tan(x^3 + x^2 + x - 1)$.
   c) $f(x) = x^x$, para $x > 0$. Indicación: considerar $g(x) = \ln f(x)$. Derivar la función $g(x)$ y a partir de la derivada de $g(x)$, hallar la derivada de la función $f(x)$.

   Solución
   Las funciones derivadas son las siguientes:
   Para $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$.
   Para $f(x) = \tan(x^3 + x^2 + x - 1)$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x^3+x^2+x-1)} \cdot (3x^2 + 2x + 1) = \frac{3x^2+2x+1}{\cos^2(x^3+x^2+x-1)}$.
   Para $f(x) = x^x$, sea $g(x) = \ln f(x) = \ln x^x = x \cdot \ln x$. La derivada de la función $g(x)$ será, pon un lado, aplicando la derivada de la función logaritmo, $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ y, por otro, aplicando la regla del producto será: $g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Por tanto

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1, \ \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

7. Consideremos la función $f(x) = \frac{a}{a+x}$, donde a es un valor real. Hallar la derivada n-ésima de f en un valor $x_0 \neq -a$.

Solución
Hagamos las tres primeras derivadas:

$$f'(x) = -\frac{a}{(a+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2a}{(a+x)^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6a}{(a+x)^4}, \dots$$

Parece que la expresión de la derivada n-ésima es:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!a}{(a+x)^{n+1}}.$$

Dejamos al lector que lo demuestre como ejercicio por inducción.

8. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Hallar la recta tangente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0 = 0, y_0 = f(x_0) = -1)$.

Solución
La ecuación de la recta tangente en un punto $(x_0, f(x_0))$ a la curva $y = f(x)$ es la siguiente:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

En nuestro caso, $x_0 = 0$, $f(x_0) = -1$ y

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Por tanto $f'(x_0) = f'(0) = 0$. La ecuación de la recta tangente pedida será, pues: $y = -1$. Se trataría de una recta horizontal.

9. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es par si para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ y diremos que es impar si para todo valor $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$. Demostrar que la función derivada de toda función par es impar y viceversa, que la función derivada de toda función impar es par.

   Solución
   Si la función es par, tendremos que para todo valor x, $f(x) = f(-x)$. Derivando la expresión anterior y aplicando la regla de la cadena obtenemos $f'(x) = -f'(-x)$ concluyendo que la función derivada es impar. Dejamos como ejercicio demostrar que la derivada de toda función impar es par.

10. Sea $h(x)$ la función de Heaviside: $h(x) = 1$, para $x \geq 0$ y $h(x) = 0$, para $x < 0$. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución
Supongamos que existe una función $f(x)$ tal que $f'(x) = h(x)$.
Como $f'(x) = h(x) = 1$ para $x > 0$, tendremos que $f(x) = x + C$ donde C es una constante.
De la misma manera como $f'(x) = h(x) = 0$ para $x < 0$, tendremos que $f(x) = D$ donde D es constante.
La función f al ser derivable en todos los puntos, debe ser continua. En particular será continua en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x). \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} x + C = C = \lim_{x\to 0^+} D = D.$$

El valor de $f(x)$ será pues $f(x) = C$ si $x < 0$ y $f(x) = x + C$ si $x \geq 0$. Veamos que dicha función no es derivable en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{C - C}{x} = 0,$$

pero

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{C + x - C}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Al no coincidir los límites anteriores, vemos que f no es derivable en $x = 0$ llegando a una contradicción ya que f, como hemos indicado antes, debería ser derivable en todos los puntos.