Problemas de integración. Integración Impropia.

1. Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,dx$ y calcular su valor en función de n en el caso en que sea convergente.
2. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias en función del parámetro α:
   a) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R},\ -\infty < a < b < +\infty.$
   b) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln x\,dx.$
   c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}.$
3. Provar que las integrales siguientes son convergentes:
$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx, \quad J = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx,$$
   y que $I + J = 0$.
4. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias:
   a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{2\mathrm{e}^x + 1}.$
   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$
   c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx.$
5. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias en función del parámetro α:
   a) $\displaystyle\int_\alpha^{\infty} \frac{x^\alpha}{x^4-1}\,dx.$
   b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx,\ \alpha > 0.$
   c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \sin(x^\alpha)\,dx,\ \alpha > 1.$
6. Explicar por qué el valor de las integrales siguientes no es correcto, estudiar su convergencia y, en el caso en que sean convergentes, hallar su valor:
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -2, \quad \int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{4}{3}.$$