

Problemas de integración. Teorema fundamental del cálculo.

1. Hallar las integrales definidas siguientes:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, dx.$

b) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6 + 4}} \, dx.$

c) $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx.$

d) $\int_0^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx.$

2. Resolver las integrales siguientes haciendo un cambio de variable adecuado:

a) $\int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, dx.$

b) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} \, dx.$

3. Resolver las integrales siguientes usando la técnica de integración por partes:

a) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx.$

b) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} \, dx.$

c) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(bx) \, dx, \text{ con } a > 0.$

4. Hallar los extremos relativos de la función siguiente:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt, \quad x > 0.$$

5. Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $f_1(x) = \int_1^{\ln(x^2+1)} e^t \, dt.$

b) $f_2(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} \, dt.$

c) $f_3(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 \, dt.$