

Problemas de integración. Integración Impropia.

1. Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ y calcular su valor en función de n en el caso en que sea convergente.
2. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias en función del parámetro α :
 - a) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$.
 - b) $\int_0^1 x^\alpha \ln x dx$.
 - c) $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$.

3. Provar que las integrales siguientes son convergentes:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad J = \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx,$$

y que $I + J = 0$.

4. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias:

- a) $\int_1^\infty \frac{dx}{2e^x + 1}$.
- b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.
- c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$.

5. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias en función del parámetro α :

- a) $\int_\alpha^\infty \frac{x^\alpha}{x^4 - 1} dx$.
- b) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$.
- c) $\int_1^\infty \sin(x^\alpha) dx$, $\alpha > 1$.

6. Explicar por qué el valor de las integrales siguientes no es correcto, estudiar su convergencia y, en el caso en que sean convergentes, hallar su valor:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -2, \quad \int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{4}{3}.$$