

# Problemas de derivabilidad de funciones. Teoremas de derivabilidad

1. Consideremos el polinomio de grado 4,  $p_4(x) = x^4 - a^2x^2 + b$  donde  $a$  y  $b$  son valores reales. Demostrar que  $p_4(x)$  tiene tres extremos relativos, dos mínimos y un máximo.
2. Demostrar que para todo valor  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ .
3. Sean  $a > b > 0$  números reales y  $n \in \mathbb{N}$  un entero positivo con  $n \geq 2$ . Demostrar que  $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a - b)^{\frac{1}{n}}$ .  
Indicación: demostrar que la función  $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x - 1)^{\frac{1}{n}}$  es decreciente para  $x \geq 1$  y evaluarla en  $x = 1$  y  $x = \frac{a}{b}$ .
4. Sea  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua en  $[0, 2]$  y derivable en  $(0, 2)$ . Supongamos que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = f(2) = 1$ .
  - a) Demostrar que existe un valor  $c_1 \in (0, 1)$  tal que  $f'(c_1) = 1$ .
  - b) Demostrar que existe un valor  $c_2 \in (1, 2)$  tal que  $f'(c_2) = 0$ .
  - c) Demostrar que existe un valor  $c_3 \in (0, 2)$  tal que  $f'(c_3) = \frac{1}{3}$ .