

Problemas de estudio de derivabilidad de funciones

1. Usando la definición, calcular la derivada de la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$ para $x > 0$ en un valor $x_0 > 0$.
2. Demostrar que la función $f(x) = \sqrt[5]{x}$ no es derivable en $x = 0$.
3. Sea la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Demostrar que $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

4. Hallar los valores de x en donde la siguiente función es derivable: $f(x) = |x| + |x+1|$ y hallar la derivada correspondiente.
5. Sea $f(x)$ una función derivable en un punto x_0 . Demostrar que:

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \left(f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) \right) \right).$$

Demostrar que el recíproco es falso, es decir, dar un ejemplo de una función y un valor x_0 tal que exista el límite anterior pero la función no sea derivable en x_0 .

Indicación: considerar la función $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Ver que el límite anterior para $x_0 = 0$ existe pero $f(x)$ no es derivable en $x_0 = 0$.

6. Calcular la derivada de las funciones siguientes:
 - a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.
 - b) $f(x) = \tan(x^3 + x^2 + x - 1)$.
 - c) $f(x) = x^x$, para $x > 0$. Indicación: considerar $g(x) = \ln f(x)$. Derivar la función $g(x)$ y a partir de la derivada de $g(x)$, hallar la derivada de la función $f(x)$.
7. Consideremos la función $f(x) = \frac{a}{a+x}$, donde a es un valor real. Hallar la derivada n -ésima de f en un valor $x_0 \neq -a$.
8. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Hallar la recta tangente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0 = 0, y_0 = f(x_0) = -1)$.