Problemas de integración. Teorema fundamental del cálculo.

1. Hallar las integrales definidas siguientes:
   a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$.
   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}\, dx$.
   c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} dx$.
   d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$.

Solución

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \approx 0.6427.$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{(x^3)^2+4}}\, dx.$$

Si hacemos el cambio de variable $t = x^3$, nos queda $dt = 3x^2 dx$ y la nueva integral en la variable t vale: (si $x = 0$, $t = 0$ y si $x = 1$, $t = 1$)

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{3}[\ln(t+\sqrt{t^2+4})]_0^1 = \frac{1}{3}(\ln(1+\sqrt{5}) - \ln(0+2)) = \frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.1604.$$

c) Hacemos el cambio de variable $t = \mathrm{e}^x$, $dt = \mathrm{e}^x dx = t dx$, $dx = \frac{dt}{t}$, si $x = 0$, $t = 1$ y si $x = 1$, $t = \mathrm{e}$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} dx = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan t]_1^{\mathrm{e}} = \arctan \mathrm{e} - \arctan 1 = \arctan \mathrm{e} - \frac{\pi}{4} \approx 0.4329.$$

d) Hacemos el cambio de variable $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}\, dx$, para $x = 1$, $t = 0$ y para $x = \mathrm{e}$, $t = \ln \mathrm{e} = 1$:

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx = \int_0^1 \sin t\, dt = [-\cos t]_0^1 = -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1 \approx 0.4597.$$

2. Resolver las integrales siguientes haciendo un cambio de variable adecuado:
   a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$
   b) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3}dx.$

Solución

a) Hacemos el cambio siguiente: $t=\sqrt{x}$. Entonces, la relación entre los diferenciales será:

$$dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2t}, \Rightarrow dx = 2t\,dt.$$

Si $x=0$, el valor de la nueva variable t vale $t=\sqrt{0}=0$ y si $x=4$, $t=\sqrt{4}=2$. La integral en la nueva variable t será:

$$\int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\,dt = 2[t-\ln(1+t)]_0^2 = 2\cdot(2-\ln(3)) \approx 1.8028.$$

b) Hacemos el cambio $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$. Entonces, la relación entre los diferenciales será:

$$dt = \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,dx = \frac{t^2+1}{2t}\,dx, \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2+1}\,dt.$$

Si $x=0$, el valor de la nueva variable t vale $t=\sqrt{\mathrm{e}^0-1}=0$ y si $x=\ln 5$, $t=\sqrt{\mathrm{e}^{\ln 5}-1}=\sqrt{5-1}=2$. La integral en la nueva variable t será:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{(t^2+1)\cdot t}{(t^2+1)+3}\cdot\frac{2t}{t^2+1}\,dt &= 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}\,dt = 2\int_0^2\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)\,dt = 2\cdot\left[t-2\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^2 \\ &= 2\cdot(2-2\cdot\arctan 1) = 4\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 4-\pi \approx 0.8584.\end{aligned}$$

3. Resolver las integrales siguientes usando la técnica de integración por partes:
   a) $\displaystyle\int_0^1 x\cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx.$
   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,dx$, con $a>0$.
   c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^n\cdot \ln x\,dx$, con $n\in\mathbb{N}$.
   d) $\displaystyle\int_0^2 x^3\cdot \arctan x\,dx.$

Solución

a) Sean
$$\begin{aligned} u &= x, & du &= dx,\\ dv &= \mathrm{e}^{-x}, & v &= -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

La integral, aplicando la fórmula de integración por partes $\displaystyle\int udv = u\cdot v - \int vdu$, queda:
$$\begin{aligned} \int_0^1 x\cdot\mathrm{e}^{-x}\,dx &= [-x\cdot\mathrm{e}^{-x}]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx = -\mathrm{e}^{-1} - [\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - (-\mathrm{e}^{-1}-1)\\ &= 1 - 2\cdot\mathrm{e}^{-1} \approx 0.2642. \end{aligned}$$

b) Sean
$$\begin{aligned} u &= \sin(bx), & du &= b\cos(bx)dx,\\ dv &= \mathrm{e}^{-ax}, & v &= -\tfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión de integración por partes, la integral anterior será:
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,dx = \left[-\frac{1}{a}\sin(bx)\mathrm{e}^{-ax}\right]_0^{2\pi} + \frac{b}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,dx.$$

Volvemos a aplicar la expresión de la integración por partes a la nueva integral que nos ha salido:
$$\begin{aligned} u &= \cos(bx), & du &= -b\sin(bx)dx,\\ dv &= \mathrm{e}^{-ax}, & v &= -\tfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}. \end{aligned}$$

Así, la integral a calcular será:
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,dx &= \left[-\frac{1}{a}\sin(bx)\mathrm{e}^{-ax}\right]_0^{2\pi} + \frac{b}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,dx\\ &= -\frac{1}{a}\sin(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} + \frac{b}{a}\left(\left[-\frac{1}{a}\cos(bx)\mathrm{e}^{-ax}\right]_0^{2\pi} - \frac{b}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,dx\right)\\ &= -\frac{1}{a}\sin(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - \frac{b}{a^2}(\cos(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a}-1) - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,dx. \end{aligned}$$

Si despejamos la integral a calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,dx$ de la expresión anterior, obtenemos:
$$\begin{aligned} \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,dx &= -\frac{1}{a}\sin(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - \frac{b}{a^2}(\cos(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a}-1),\\ \int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,dx &= \frac{a^2}{a^2+b^2}\left(-\frac{1}{a}\sin(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - \frac{b}{a^2}(\cos(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a}-1)\right),\\ \int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,dx &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(-a\sin(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - b(\cos(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a}-1)\right). \end{aligned}$$

c) Sean

$$\begin{aligned} u &= \ln x, \quad du &= \tfrac{1}{x}\,dx,\\ dv &= x^n, \quad v &= \tfrac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión de integración por partes, la integral anterior será:

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} x^n \cdot \ln x\,dx &= \frac{1}{n+1}\left[\ln x \cdot x^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} x^n\,dx = \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}(\mathrm{e}^{n+1}-1) = \mathrm{e}^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n\mathrm{e}^{n+1}+1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

d) Sean

$$\begin{aligned} u &= \arctan x, \quad du &= \tfrac{1}{1+x^2}\,dx,\\ dv &= x^3, \quad v &= \tfrac{x^4}{4}. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión de integración por partes, la integral anterior será:

$$\int_0^2 x^3 \cdot \arctan x\,dx = \frac{1}{4}\left[\arctan x \cdot x^4\right]_0^2 - \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = 4\cdot\arctan 2 - \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx.$$

Observamos que nos queda una integral racional $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ donde el grado del numerador es mayor que el del denominador. Para resolver este tipo de integrales, primero tenemos que dividir el numerador entre el denominador de cara a transformarla en una integral de tal forma que el grado del numerador sea menor que el del denominador:

$$\begin{array}{r|l} x^4 \qquad & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^4-x^2 \qquad & x^2-1 \\ \cline{1-1} -x^2 \qquad & \\ x^2+1 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

La integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ se calcula de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx &= \int_0^2 (x^2-1)\,dx + \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^2 + [\arctan x]_0^2\\ &= \frac{8}{3} - 2 + \arctan 2 = \frac{2}{3} + \arctan 2. \end{aligned}$$

El valor de la integral pedida será, pues:

$$\int_0^2 x^3 \cdot \arctan x\,dx = 4\cdot\arctan 2 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \arctan 2\right) = \frac{15}{4}\arctan 2 - \frac{1}{6} \approx 3.9851.$$

4. Hallar los extremos relativos de la función siguiente:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt,\ \ x > 0.$$

5. Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

   a) $f_1(x) = \displaystyle\int_1^{\ln(x^2+1)} e^t \, dt.$

   b) $f_2(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^4} \, dt.$

   c) $f_3(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 \, dt.$