Problemas de derivabilidad de funciones. Fórmula de Taylor

1. Usando inducción, demostrar la regla de Leibnitz para hallar la derivada n-ésima del producto de dos funciones:
$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x).$$
2. Si $x > 0$, demostrar que:
$$\left| (1+x)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right) \right| \leq \frac{5}{81}x^3.$$
Usar la desigualdad anterior para hallar aproximaciones de $\sqrt[3]{1.2}$ y de $\sqrt[3]{2}$.
3. Si $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, demostrar que:
$$\left| \ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1.}$$
Usar la expresión anterior para calcular $\ln 1.5$ con un error menor que 0.001.
4. Sea $I = (a,b)$ un intervalo abierto y $c \in I$. Sean f y g dos funciones definidas en I tal que las funciones derivadas $f^{(k)}$ y $g^{(k)}$ existen y son continuas en I, para $k = 0, 1, \ldots, n$. Supongamos que $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c) = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ y $g^{(n)} \neq 0$. Demostrar que:
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$