

Problemas de derivabilidad de funciones. Teoremas de derivabilidad

1. Consideremos el polinomio de grado 4, $p_4(x) = x^4 - a^2x^2 + b$ donde a y b son valores reales. Demostrar que $p_4(x)$ tiene tres extremos relativos, dos mínimos y un máximo.

Solución

Para hallar los extremos hallemos la derivada de $p_4(x)$ y calculemos los valores que la anulan:

$$p'_4(x) = 4x^3 - 2a^2x = 0, \Rightarrow 2x \cdot (2x^2 - a^2) = 0, \Rightarrow x = -\frac{|a|}{\sqrt{2}}, 0, \frac{|a|}{\sqrt{2}}.$$

Para saber si son máximos o mínimos, miramos el signo de $p''_4(x)$:

$$p''_4(x) = 12x^2 - 2a^2.$$

Para $x = -\frac{|a|}{\sqrt{2}}$, $p''_4\left(-\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = 12 \cdot \frac{a^2}{2} - 2a^2 = 4a^2 > 0$. Se trataría de un mínimo.

Para $x = 0$, $p''_4(0) = -2a^2 < 0$. Se trataría de un máximo.

Para $x = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$, $p''_4\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = 12 \cdot \frac{a^2}{2} - 2a^2 = 4a^2 > 0$. Se trataría de un mínimo.

Por tanto, $p_4(x)$ tiene dos mínimos y un máximo.

2. Demostrar que para todo valor $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos x - \cos y \leq |x - y|$.

Solución

Sea $f(x) = \cos x$. Supongamos para fijar ideas que $x < y$. Como $f(x)$ es derivable y continua en \mathbb{R} , podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a la función $f(x)$ en el intervalo (x, y) y obtener:

$$f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y), \Rightarrow \cos x - \cos y = -\sin c \cdot (x - y), \Rightarrow |\cos x - \cos y| = |\sin c| \cdot |x - y| \leq |x - y|,$$

tal como queríamos ver.

3. Dar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

- a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$,
- b) $h(x) = x^3 - 3x - 4$,
- c) $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$.

Solución

a) Para hallar los extremos de $f(x) = x^2 - 3x + 5$, primero tenemos que derivar e igualar la derivada a cero:

$$f'(x) = 2x - 3 = 0, \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	∞
f'		-	+
f		\searrow	\nearrow

Para comprobar los signos de la tabla anterior, hemos de hacer lo siguiente:

- Signo de y' en el intervalo $(-\infty, \frac{3}{2})$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 0$, el valor de $f'(0)$ vale $f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$.
 - Signo de y' en el intervalo $(\frac{3}{2}, \infty)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 2$, el valor de $f'(2)$ vale $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$.
- La función $f(x)$ crece en el intervalo $(\frac{3}{2}, \infty)$, decrece en el intervalo $(-\infty, \frac{3}{2})$ y tiene un mínimo en el punto $(\frac{3}{2}, (\frac{3}{2})^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 5) = (1.5, 2.75)$.

b) Hagamos lo mismo para la función $h(x) = x^3 - 3x - 4$:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$

Tabla:

x	$-\infty$	-1	1	∞
h'		+	-	+
h		\nearrow	\searrow	\nearrow

Para comprobar los signos de la tabla anterior, hemos de hacer lo siguiente:

- Signo de y' en el intervalo $(-\infty, -1)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = -2$, el valor de $h'(-2)$ vale $h'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0$.
- Signo de y' en el intervalo $(-1, 1)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 0$, el valor de $h'(0)$ vale $h'(0) = 3 \cdot (0)^2 - 3 = -3 < 0$.
- Signo de y' en el intervalo $(1, \infty)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 2$, el valor de $h'(2)$ vale $h'(2) = 3 \cdot (2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función $h(x)$ crece en la región $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, decrece en el intervalo $(-1, 1)$, tiene un máximo en $(-1, -2)$ y un mínimo en $(1, -6)$.

c) Función $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$:

$$k'(x) = 4x^3 + 4x = 0, \Rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0, \Rightarrow x = 0.$$

Tabla:

x	$-\infty$	0	∞
k'		-	+
k		\searrow	\nearrow

La función $k(x)$ crece en el intervalo $(0, \infty)$, decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y tiene un mínimo en el punto $(0, -4)$.

4. Dar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

- a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$,
 b) $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}$ para $x > 0$,
 c) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución

- a) Para hallar los extremos relativos de la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ hay que derivar e igualar a cero la función derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$

Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
f'		+	-	-	+
f		\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow

La función $f(x)$ crece en la región $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, decrece en la región $(-1, 0) \cup (0, 1)$, tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en el punto $(1, 2)$.

- b) Estudio para la función $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}$ para $x > 0$. La derivada y los ceros de la misma son:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x}, \Rightarrow x+1 = 4x, \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Como hemos elevado al cuadrado, tenemos que comprobar que la solución hallada es efectivamente una solución de $h'(x) = 0$:

$$h'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	0	$\frac{1}{3}$	∞
h'		+	-
h		\nearrow	\searrow

La función $h(x)$ crece en el intervalo $(0, \frac{1}{3})$, decrece en el intervalo $(\frac{1}{3}, \infty)$ y tiene un máximo en el punto $(\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{1}{3}} - 2\sqrt{\frac{1}{3}+1}) = (\frac{1}{3}, -\sqrt{3})$.

- c) Estudio para la función $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$. La derivada y los ceros de la misma son:

$$g'(x) = \frac{x^2+1-2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$

Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	$-\infty$	-1	1	∞
g'		-	+	-
g		\searrow	\nearrow	\searrow

La función $g(x)$ crece en el intervalo $(-1, 1)$, decrece en la región $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, tiene un mínimo en el punto $(-1, -\frac{1}{2})$ y un máximo en el punto $(1, \frac{1}{2})$.

5. Sean $a > b > 0$ números reales y $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo con $n \geq 2$. Demostrar que $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a - b)^{\frac{1}{n}}$.

Indicación: demostrar que la función $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x - 1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente para $x \geq 1$ y evaluarla en $x = 1$ y $x = \frac{a}{b}$.

Solución

Veamos que la función $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x - 1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente para $x \geq 1$. Si hacemos su derivada obtenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{n} \cdot (x - 1)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \left(x^{\frac{1}{n}-1} - (x - 1)^{\frac{1}{n}-1} \right).$$

Como $\frac{1}{n} - 1 < 0$ si $n \geq 2$ y como $x \geq x - 1$, si $x \geq 1$, tenemos que $x^{\frac{1}{n}-1} < (x - 1)^{\frac{1}{n}-1}$. Por tanto, $f'(x) < 0$ y $f(x)$ será decreciente para $x \geq 1$.

Como $a > b$, $\frac{a}{b} > 1$ y, como $f(x)$ es decreciente,

$$f\left(\frac{a}{b}\right) < f(1), \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a}{b} - 1\right)^{\frac{1}{n}} < 1, \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a - b}{b}\right)^{\frac{1}{n}} < 1, \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} - (a - b)^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}, \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a - b)^{\frac{1}{n}}.$$

6. Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. Supongamos que $f(0) = 0$, $f(1) = f(2) = 1$.
- a) Demostrar que existe un valor $c_1 \in (0, 1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.
 - b) Demostrar que existe un valor $c_2 \in (1, 2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.
 - c) Demostrar que existe un valor $c_3 \in (0, 2)$ tal que $f'(c_3) = \frac{1}{2}$.

Solución

- a) Aplicando el Teorema del valor medio en el intervalo $[0, 1]$ tenemos que existe un valor $c_1 \in (0, 1)$ tal que

$$f'(c_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = 1.$$

- b) Aplicando el Teorema del valor medio en el intervalo $[1, 2]$ tenemos que existe un valor $c_2 \in (1, 2)$ tal que

$$f'(c_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 1}{1} = 0.$$

- c) Aplicando el Teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ tenemos que existe un valor $c_3 \in (0, 2)$ tal que

$$f'(c_3) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

7. Usando la regla de L'Hôpital calcular los límites siguientes:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x},$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4},$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x},$ con n valor entero, $n \geq 1,$
- d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x).$

Solución

a) El valor del límite será:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

b) El valor del límite será:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4(-\cos x \sin x - \sin x \cos x)}{24x}$$

8. Descomponer un número a en dos sumandos x e y tal que el valor de $x^2 + y^2$ sea mínimo.
9. Determinar las dimensiones que ha de tener un bote cilíndrico de 2 litros de capacidad para que se construya con la cantidad mínima de material.
10. De todos los rectángulos de igual perímetro, ¿cuál es el que tiene área mayor?