Problemas de derivabilidad de funciones. Teoremas de derivabilidad

1. Consideremos el polinomio de grado 4, $p_4(x) = x^4 - a^2x^2 + b$ donde a y b son valores reales. Demostrar que $p_4(x)$ tiene tres extremos relativos, dos mínimos y un máximo.

Solución

Para hallar los extremos hallemos la derivada de $p_4(x)$ y calculemos los valores que la anulan:

$$p_4'(x) = 4x^3 - 2a^2x = 0, \Rightarrow 2x \cdot (2x^2 - a^2) = 0, \Rightarrow x = -\frac{|a|}{\sqrt{2}}, 0, \frac{|a|}{\sqrt{2}}.$$

Para saber si son máximos o mínimos, miramos el signo de $p_4''(x)$:

$$p_4''(x) = 12x^2 - 2a^2.$$

Para $x = -\frac{|a|}{\sqrt{2}}$, $p_4''\left(-\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = 12 \cdot \frac{a^2}{2} - 2a^2 = 4a^2 > 0$. Se trataría de un mínimo.
Para $x = 0$, $p_4''(0) = -2a^2 < 0$. Se trataría de un máximo.
Para $x = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$, $p_4''\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = 12 \cdot \frac{a^2}{2} - 2a^2 = 4a^2 > 0$. Se trataría de un mínimo.
Por tanto, $p_4(x)$ tiene dos mínimos y un máximo.

2. Demostrar que para todo valor $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

Solución

Sea $f(x) = \cos x$. Supongamos para fijar ideas que $x < y$. Como $f(x)$ es derivable y continua en $\mathbb{R}$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a la función $f(x)$ en el intervalo (x, y) y obtener:

$$f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y), \Rightarrow \cos x - \cos y = -\sin c \cdot (x - y), \Rightarrow |\cos x - \cos y| = |\sin c| \cdot |x - y| \leq |x - y|,$$

tal como queríamos ver.

3. Dar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$,
   b) $h(x) = x^3 - 3x - 4$,
   c) $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$.

Solución

a) Para hallar los extremos de $f(x) = x^2 - 3x + 5$, primero tenemos que derivar e igualar la derivada a cero:

$$f'(x) = 2x - 3 = 0, \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		∞
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Para comprobar los signos de la tabla anterior, hemos de hacer lo siguiente:

- Signo de y' en el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 0$, el valor de $f'(0)$ vale $f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$.
- Signo de y' en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 2$, el valor de $f'(2)$ vale $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$.
  La función $f(x)$ crece en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, decrece en el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y tiene un mínimo en el punto $\left(\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 5\right) = (1.5, 2.75)$.

b) Hagamos lo mismo para la función $h(x) = x^3 - 3x - 4$:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$

Tabla:

x	$-\infty$		-1		1		∞
h'		$+$		$-$		$+$	
h		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Para comprobar los signos de la tabla anterior, hemos de hacer lo siguiente:

- Signo de y' en el intervalo $(-\infty, -1)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = -2$, el valor de $h'(-2)$ vale $h'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0$.
- Signo de y' en el intervalo $(-1, 1)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 0$, el valor de $h'(0)$ vale $h'(0) = 3 \cdot (0)^2 - 3 = -3 < 0$.
- Signo de y' en el intervalo $(1, \infty)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 2$, el valor de $h'(2)$ vale $h'(2) = 3 \cdot (2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función $h(x)$ crece en la región $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, decrece en el intervalo $(-1, 1)$, tiene un máximo en $(-1, -2)$ y un mínimo en $(1, -6)$.

c) Función $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$:

$$k'(x) = 4x^3 + 4x = 0, \Rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0, \Rightarrow x = 0.$$

Tabla:

x	$-\infty$		0		∞
k'		$-$		$+$	
k		$\searrow$		$\nearrow$	

La función $k(x)$ crece en el intervalo $(0, \infty)$, decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y tiene un mínimo en el punto $(0, -4)$.

4. Dar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$,
   b) $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}$ para $x > 0$,
   c) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución

a) Para hallar los extremos relativos de la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ hay que derivar e igualar a cero la función derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0, \ \Rightarrow x = \pm 1.$$

Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
f'		$+$		$-$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

La función $f(x)$ crece en la región $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, decrece en la región $(-1, 0) \cup (0, 1)$, tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en el punto $(1, 2)$.

b) Estudio para la función $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}$ para $x > 0$. La derivada y los ceros de la misma son:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \ \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x}, \ \Rightarrow x + 1 = 4x, \ \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Como hemos elevado al cuadrado, tenemos que comprobar que la solución hallada es efectivamente una solución de $h'(x) = 0$:

$$h'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	0		$\frac{1}{3}$		∞
h'		$+$		$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$	

La función $h(x)$ crece en el intervalo $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, decrece en el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ y tiene un máximo en el punto $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{1}{3}} - 2\sqrt{\frac{1}{3}+1}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\sqrt{3}\right)$.

c) Estudio para la función $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$. La derivada y los ceros de la misma son:

$$g'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0, \ \Rightarrow x = \pm 1.$$

Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	$-\infty$		-1		1		∞
g'		$-$		$+$		$-$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

La función $g(x)$ crece en el intervalo $(-1, 1)$, decrece en la región $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, tiene un mínimo en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ y un máximo en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

5. Sean $a > b > 0$ números reales y $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo con $n \geq 2$. Demostrar que $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a-b)^{\frac{1}{n}}$.
Indicación: demostrar que la función $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente para $x \geq 1$ y evaluarla en $x = 1$ y $x = \frac{a}{b}$.

Solución

Veamos que la función $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente para $x \geq 1$. Si hacemos su derivada obtenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{n} \cdot (x-1)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}-1} - (x-1)^{\frac{1}{n}-1}\right).$$

Como $\frac{1}{n} - 1 < 0$ si $n \geq 2$ y como $x \geq x-1$, si $x \geq 1$, tenemos que $x^{\frac{1}{n}-1} < (x-1)^{\frac{1}{n}-1}$. Por tanto, $f'(x) < 0$ y $f(x)$ será decreciente para $x \geq 1$.

Como $a > b$, $\frac{a}{b} > 1$ y, como $f(x)$ es decreciente,

$$f\left(\frac{a}{b}\right) < f(1), \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a}{b} - 1\right)^{\frac{1}{n}} < 1, \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a-b}{b}\right)^{\frac{1}{n}} < 1, \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} - (a-b)^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}, \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a-b)^{\frac{1}{n}}.$$

6. Sea $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$. Supongamos que $f(0) = 0$, $f(1) = f(2) = 1$.
   a) Demostrar que existe un valor $c_1 \in (0,1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.
   b) Demostrar que existe un valor $c_2 \in (1,2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.
   c) Demostrar que existe un valor $c_3 \in (0,2)$ tal que $f'(c_3) = \frac{1}{2}$.

Solución

a) Aplicando el Teorema del valor medio en el intervalo $[0,1]$ tenemos que existe un valor $c_1 \in (0,1)$ tal que

$$f'(c_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = 1.$$

b) Aplicando el Teorema del valor medio en el intervalo $[1,2]$ tenemos que existe un valor $c_2 \in (1,2)$ tal que

$$f'(c_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 1}{1} = 0.$$

c) Aplicando el Teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ tenemos que existe un valor $c_3 \in (0,2)$ tal que

$$f'(c_3) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

7. Usando la regla de L'Hôpital calcular los límites siguientes:
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$,
   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$,
   c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$, con n valor entero, $n \geq 1$,
   d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$.

Solución

a) El valor del límite será:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

b) El valor del límite será:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\sin x \cos x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-4(-\cos x \sin x - \sin x \cos x)}{24x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{8\cos x \sin x}{24x} = \lim_{x\to 0} \frac{-8(\sin^2 x - \cos^2 x)}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

c) El valor del límite será:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to \infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

d) El valor del límite será:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

8. Descomponer un número a en dos sumandos x e y tal que el valor de $x^2 + y^2$ sea mínimo.

Solución

Se tiene que verificar que $x + y = a$ y hay que minimizar la función $x^2 + y^2$.

Escribiendo dicha función sólo en función de x, obtenemos $f(x) = x^2 + (a - x)^2$.

Para hallar el mínimo, tenemos que derivar e igualar a cero:

$$f'(x) = 2x - 2(a - x) = 0, \Rightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Los valores x e y pedidos son: $x = \frac{a}{2}$, $y = a - x = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$.

Comprobemos que es un mínimo:

$$f''(x) = 2 + 2 = 4 > 0.$$

9. Determinar las dimensiones que ha de tener un bote cilíndrico de 2 litros de capacidad para que se construya con la cantidad mínima de material.

Solución

Sea r el radio de la base del bote y h la altura del mismo. La superficie lateral del bote será $2\pi rh$ y la superficie de las dos tapas, $2\pi r^2$. Por tanto, hay que minimizar la función $2\pi rh + 2\pi r^2$.

Sabemos que la capacidad del bote vale $\pi r^2 h = \frac{2}{1000}$ (2 litros son $\frac{2}{1000}$ m^3). Por tanto $h = \frac{2}{1000\pi r^2}$.

La función a minimizar será:

$$f(r) = 2\pi r \frac{2}{1000\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{4}{1000r} + 2\pi r^2.$$

Para hallar el mínimo, tenemos que derivar e igualar a cero:

$$f'(r) = -\frac{4}{1000r^2} + 4\pi r = 0, \Rightarrow r^3 = \frac{1}{1000\pi}, \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{1000\pi}} \approx 0.068 \text{ m.}$$

El valor de h será: $h = \frac{2}{1000\pi r^2} = \frac{2}{1000\pi\left(\frac{1}{1000\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{1000\pi}} \approx 0.137$ m.

Comprobemos que es un mínimo:

$$f''(r) = \frac{8}{1000r^3} + 4\pi > 0.$$

10. De todos los rectángulos de igual perímetro, ¿cuál es el que tiene área mayor?

Solución

Sean a y b las dimensiones del rectángulo y P el perímetro. Nos dicen que $2a + 2b = P$ o, si se quiere $a + b = \frac{P}{2}$.
La función a maximizar es el área $a \cdot b$. Si la escribimos en función de a, obtenemos:

$$f(a) = a \cdot \left(\frac{P}{2} - a\right).$$

Para hallar el máximo, tenemos que derivar e igualar a cero:

$$f'(a) = \frac{P}{2} - a - a = 0, \Rightarrow a = \frac{P}{4}.$$

Las dimensiones del rectángulo serán: $a = \frac{P}{4}$ y $b = \frac{P}{2} - a = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}$.
Comprobemos que es un máximo:

$$f''(a) = -2 < 0.$$