La función Gamma de Euler

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Section 1

La función Gamma de Euler

Introducción

La función Gamma de Euler se define de la forma siguiente como una integral impropia:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Esta función tiene aplicaciones en física cuántica, astrofísica y dinámica de fluidos.

También se usa para resolver problemas de convergencia de series y problemas de integración impropia para estudiar si determinadas integrales convergen o no.

En esta presentación, estudiaremos para qué valores de t la función Gamma está definida o la integral impropia anterior converge.

Estudio de la convergencia

Para ver para qué valores de t la integral anterior converge, nos fijamos en que:

- si $t-1 \geq 0$ o $t \geq 1$, la integral impropia es de primera especie ya que la función a integrar, $x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}$ no tiene ninguna singularidad en el dominio de integración $[0, \infty]$.

Estudio de la convergencia

Para ver para qué valores de t la integral anterior converge, nos fijamos en que:

- si $t-1\geq 0$ o $t\geq 1$, la integral impropia es de primera especie ya que la función a integrar, $x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}$ no tiene ninguna singularidad en el dominio de integración $[0,\infty]$.
- si en cambio $t-1<0$, o $t<1$, la integral impropia es de tercera especie ya que en este caso hay dos valores singulares: $t=0$ y $t=\infty$.

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

En este caso la integral impropia es de primera especie y la resolvemos usando la técnica de integración por partes: con:

$$\begin{aligned} u &= x^{t-1}, & du &= (t-1)x^{t-2}\,dx, \\ dv &= \mathrm{e}^{-x}, & v &= -\mathrm{e}^{-x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \lim_{z\to\infty} \int_0^z x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &= \lim_{z\to\infty} \left([-x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z + (t-1)\int_0^z x^{t-2}\mathrm{e}^{-x} \right). \end{aligned}$$

El límite correspondiente al primer sumando vale:

$$\lim_{z\to\infty} [-x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z = -\lim_{z\to\infty} \frac{z^{t-1}}{\mathrm{e}^z}.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

El límite anterior, al ser $t \geq 1$, es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Para resolverlo vamos a aplicar la regla de l'Hôpital. Como $t \geq 1$, sea $j \geq 1$ el natural tal que $j \leq t < j+1$. Entonces aplicando la regla de l'Hôpital j veces al límite anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty} [-x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z &= -\lim_{z\to\infty} \frac{z^{t-1}}{\mathrm{e}^z} = -\lim_{z\to\infty} \frac{(t-1)z^{t-2}}{\mathrm{e}^z} = \cdots \\ &= -\lim_{z\to\infty} \frac{(t-1)\ldots(t-j)z^{t-(j+1)}}{\mathrm{e}^z} = 0,\end{aligned}$$

ya que el último límite es de la forma $\frac{0}{\infty} = 0$, al ser $t-(j+1) < 0$.

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

En resumen,

$$\Gamma(t) = (t-1) \lim_{z\to\infty} \int_0^z x^{t-2} \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Volviendo a aplicar la técnica de integración por partes hasta llegar a una integral de la forma $\displaystyle\int_0^z x^{t-(j+1)} \mathrm{e}^{-x}\, dx$, obtenemos:

$$\Gamma(t) = (t-1)\cdots(t-j) \lim_{z\to\infty} \int_0^z x^{t-(j+1)} \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

Si aplicamos el criterio de comparación por cociente a la integral impropia obtenida $\int_0^{\infty} x^{t-(j+1)} \mathrm{e}^{-x}\, dx$ comparando con la función e^{-x}, obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{t-(j+1)}\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} x^{t-(j+1)} = 0,$$

ya que $t-(j+1)<0$.

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

Por tanto, como la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ es convergente ya que,

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^{z} \mathrm{e}^{-x}\,dx \lim_{z\to\infty} [-\mathrm{e}^{-x}]_0^z = \lim_{z\to\infty} (1-\mathrm{e}^{-z}) = 1,$$

nuestra integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{t-(j+1)}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ también lo será.

Concluimos que la función Gamma de Euler $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ está definida para $t \geq 1$.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$

En este caso la integral impropia $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx$ es de tercera especie con dos puntos singulares $x = 0$ y $x = \infty$.

En este caso, escribimos la función Gamma de Euler de la forma siguiente:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx = \int_0^{1} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx + \int_1^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$

De esta forma, hemos separado la función $\Gamma(t)$ en dos integrales impropias:

- una de segunda especie: $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ y

Estudiemos la convergencia de cada una de las integrales impropias anteriores.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$

De esta forma, hemos separado la función $\Gamma(t)$ en dos integrales impropias:

- una de segunda especie: $I_1 = \int_0^1 x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ y
- otra de primera especie: $I_2 = \int_1^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$.

Estudiemos la convergencia de cada una de las integrales impropias anteriores.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_1

La integral impropia I_1 vale:

$$I_1 = \lim_{z \to 0} \int_z^1 x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Para estudiar su convergencia, aplicaremos el criterio de comparación por cociente con la función x^{p-1}:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}}{x^{t-1}} = \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{-x} = 1.$$

Las integrales impropias $\int_0^1 x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx$ y $\int_0^1 x^{t-1}\, dx$ tienen el mismo carácter.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_1

Estudiemos la convergencia de la integral impropia $\int_0^1 x^{t-1}\,dx$:

$$\int_0^1 x^{t-1}\,dx = \lim_{z\to 0}\int_z^1 x^{t-1}\,dt = \lim_{z\to 0}\left[\frac{x^t}{t}\right]_z^1 = \frac{1}{t}\lim_{z\to 0}(1-z^t) = \frac{1}{t},$$

si, y sólo si, $t > 0$. Por tanto, la integral impropia I_1 es convergente si, y sólo si, $0 < t < 1$.

El caso $t = 0$ debe ser estudiado aparte pero se puede ver que la integral $\int_0^1 x^{-1}\,dx$ es divergente:

$$\int_0^1 x^{-1}\,dx = \lim_{z\to 0}\int_z^1 x^{-1}\,dt = \lim_{z\to 0}\,[\ln t]_z^1 = \lim_{z\to 0}(-\ln z) = \infty.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_2

Para estudiar la convergencia de la integral impropia $I_2 = I_2 = \int_1^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$, aplicamos el criterio de comparación por cociente con la integral impropia $\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} x^{t-1} = 0,$$

ya que $t-1<0$. Como la integral impropia $\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ es convergente (ver el estudio del caso $t \geq 1$), tendremos que nuestra integral impropia $I_2 = \int_1^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ también lo será.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$.

Concluimos que en el caso $t < 1$ la función Gamma de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx,$$

está definida si $0 < t < 1$.

Entonces la función Gamma de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx,$$

está definida para todo valor de t estrictamente positivo: $t > 0$.