La función Gamma de Euler

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Section 1

La función Gamma de Euler

Introducción

La función Gamma de Euler se define de la forma siguiente como una integral impropia:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Esta función tiene aplicaciones en física cuántica, astrofísica y dinámica de fluidos.

También se usa para resolver problemas de convergencia de series y problemas de integración impropia para estudiar si determinadas integrales convergen o no.

En esta presentación, estudiaremos para qué valores de t la función Gamma está definida o la integral impropia anterior converge.

Estudio de la convergencia

Para ver para qué valores de t la integral anterior converge, nos fijamos en que:

- si $t-1 \geq 0$ o $t \geq 1$, la integral impropia es de primera especie ya que la función a integrar, $x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}$ no tiene ninguna singularidad en el dominio de integración $[0,\infty]$.

Estudio de la convergencia

Para ver para qué valores de t la integral anterior converge, nos fijamos en que:

- si $t-1\geq 0$ o $t\geq 1$, la integral impropia es de primera especie ya que la función a integrar, $x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}$ no tiene ninguna singularidad en el dominio de integración $[0,\infty]$.
- si en cambio $t-1<0$, o $t<1$, la integral impropia es de tercera especie ya que en este caso hay dos valores singulares: $t=0$ y $t=\infty$.

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

En este caso la integral impropia es de primera especie y la resolvemos usando la técnica de integración por partes: con:

$$\begin{array}{llll} u & = x^{t-1}, & du & = (t-1)x^{t-2}\,dx, \\ dv & = \mathrm{e}^{-x}, & v & = -\mathrm{e}^{-x}, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \lim_{z\to\infty} \int_0^z x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &= \lim_{z\to\infty} \left([-x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z + (t-1)\int_0^z x^{t-2}\mathrm{e}^{-x} \right). \end{aligned}$$