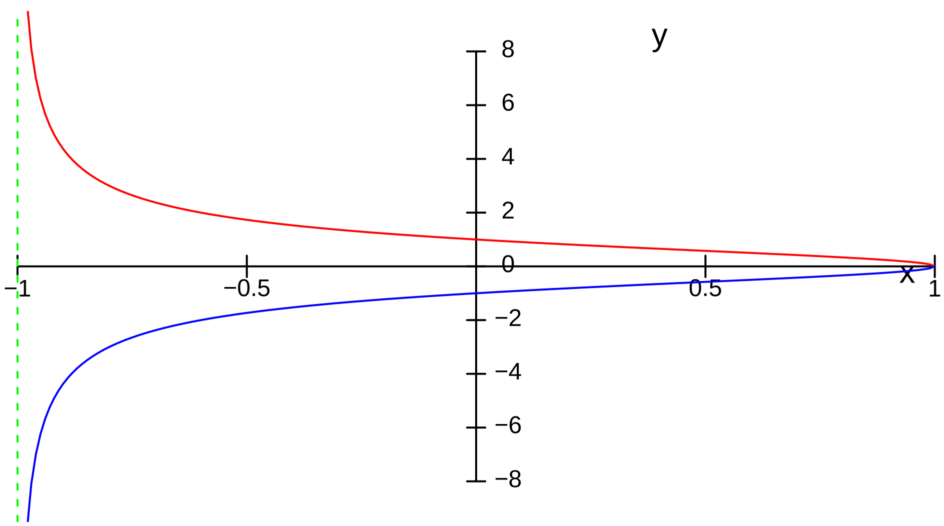
Problemas de integración. Aplicaciones de la integral.

1. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$ y su asíntota.

Solución

Veamos primero cómo es la gráfica de la curva para idear una estrategia con el objetivo de encontrar el área que delimita:



La primera observación es que la asíntota de la curva se encuentra en $x = -1$ ya que $\lim_{x \to -1} \dfrac{1-x}{1+x} = \infty$. Observamos por la gráfica que la curva $y^2 = \dfrac{1-x}{1+x}$ no se puede expresar como una función real de variable real de la forma $y = f(x)$ ya que dado un valor de x existen dos posibles valores de y. Entonces, si despejamos y de la expresión de la curva vemos que:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Luego, de esta expresión y de la gráfica podemos observar que el área que queremos calcular se puede expresar como la suma del valor absoluto de la integral de $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ que en este caso es $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ entre -1 y 1 (pintada de rojo) más el valor absoluto de la integral de $g(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ que en este caso es $\displaystyle -\int_{-1}^{1} -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ entre -1 y 1 (pintada de azul):

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx-\int_{-1}^{1}-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=2\int_{-1}^{1}\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$=2\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+2\int_{-1}^{1}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Ahora vemos que cada uno de los sumandos anteriores es una integral inmediata:

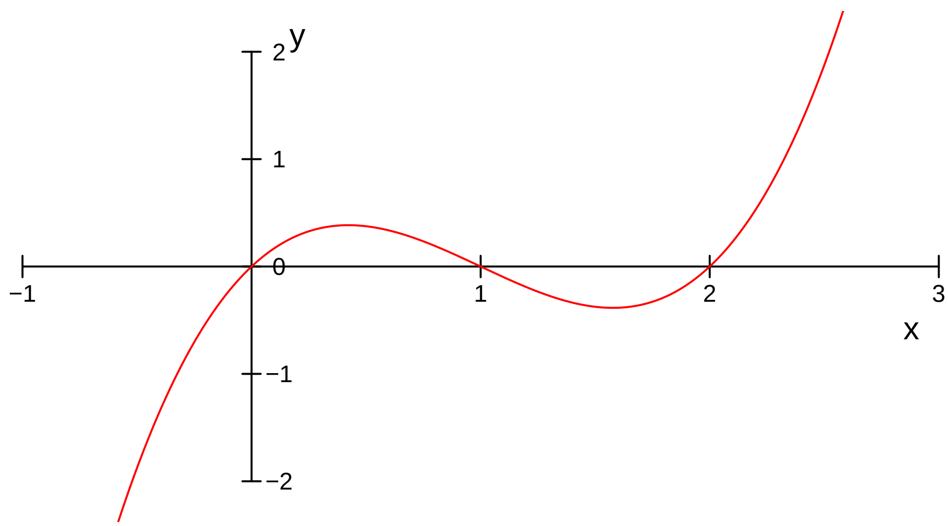
$$2\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=2[\arcsin(x)]_{-1}^{1}=2(\arcsin(1)-\arcsin(-1))=2\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi,$$
$$2\int_{-1}^{1}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{1}=\frac{\sqrt{1-1^2}}{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{1-(-1)^2}}{\frac{1}{2}}=0.$$

Por lo tanto, el área que delimita la curva es π.

2. Hallar el área limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje x.

Solución

Para encontrar el área limitada por esta curva primero veamos la imagen de su gráfica:



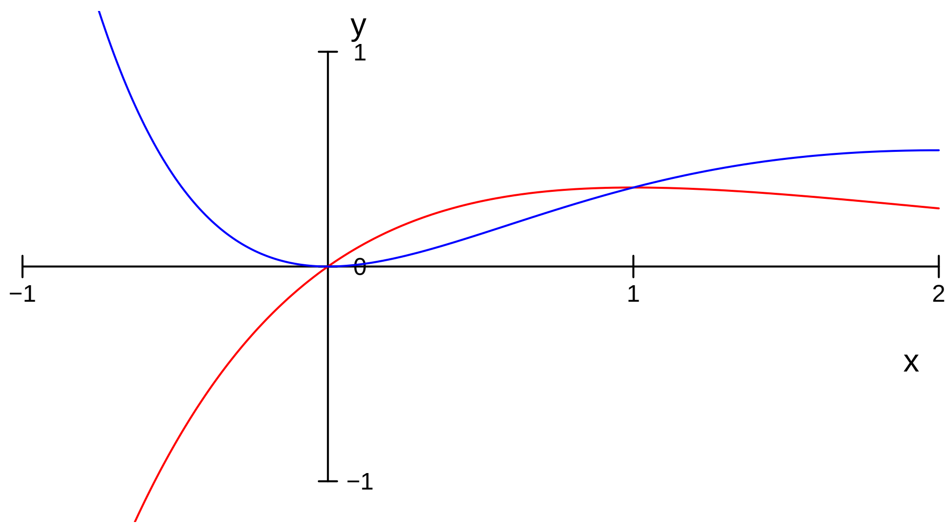
Primero, a partir de la gráfica se puede deducir que el área que nos interesa está comprendida entre $x = 0$ y $x = 2$, y que en $x = 1$ la función cambia de signo y por lo tanto podemos observar que para $x \in (0,1)$, $f(x) > 0$ y que para $x \in (1,2)$, $f(x) < 0$. Entonces, como la función entre $x = 1$ y $x = 2$ es negativa, su área también lo será. Esto hace que tengamos que cambiar el signo de dicha área para obtener un área positiva:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx + \int_1^2 -x(x-1)(x-2)\,dx &= \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x\,dx + \int_1^2 -x^3 + 3x^2 - 2x\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 \\ &= \frac{1^4}{4} - 1^2 + 1^2 - \frac{2^4}{4} + 2^3 - 2^2 + \frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Hallar el área limitada por la curva $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$ y $g(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

Solución

Veamos primero las gráficas de las funciones:



Primero hallamos los valores x que intersecan ambas gráficas: $g(x) = f(x) \Rightarrow g(x) - f(x) = 0$:

$$g(x) - f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x} - x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} = x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (1 - x) = 0.$$

Sabemos que $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$. Por tanto, los valores x de los puntos de intersección de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son $x = 0, 1$. Nótese también que para $x \in (0, 1)$ $g(x) - f(x) > 0$. Por lo tanto podemos calcular el área comprendida entre estas dos curvas como:

$$\int_0^1 g(x) - f(x)dx = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,dx - \int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx = I_1 - I_2.$$

Para hallar la integral definida anterior, aplicaremos el método de integración por partes con $u = x, dv = \mathrm{e}^{-x}dx$ en la primera integral y $u = x^2, dv = \mathrm{e}^{-x}$ en la segunda.

El valor de la primera integral usando que $du = dx$ y $v = -\mathrm{e}^{-x}$ será:

$$I_1 = [-x \cdot \mathrm{e}^{-x}]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx = -\mathrm{e}^{-1} + [-\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - 2\mathrm{e}^{-1} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

El valor de la segunda integral usando que $du = 2xdx$ y $v = -\mathrm{e}^{-x}$ será:

$$I_2 = [-x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}]_0^1 + 2\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,dx = -\mathrm{e}^{-1} + 2I_1 = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 2\left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\right) = 2 - \frac{5}{\mathrm{e}}.$$

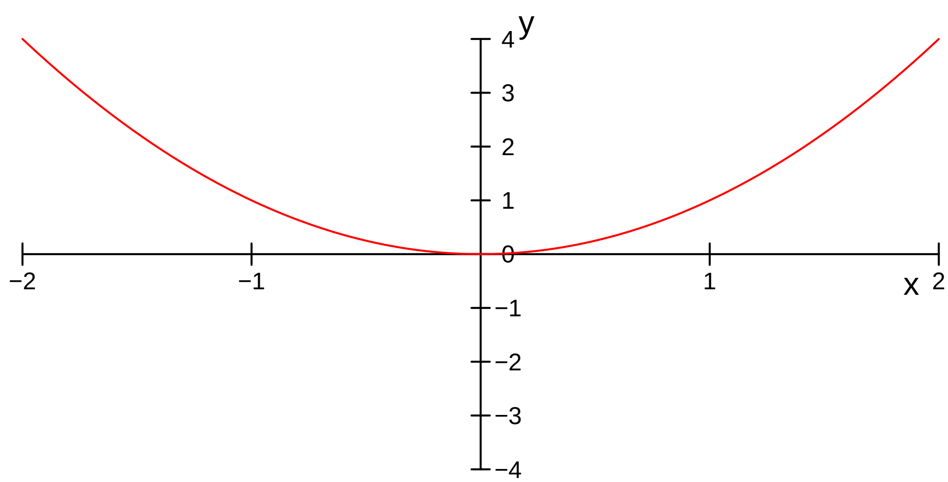
El área pedida será:

$$I_1 - I_2 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} - 2 + \frac{5}{\mathrm{e}} = -1 + \frac{3}{\mathrm{e}} \approx 0.1036.$$

4. Hallar los volúmenes engendrados al girar alrededor del eje x por los recintos de ordenadas de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = x^2$, $x = -1$, $x = 2$.
   b) $f(x) = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$.

Solución

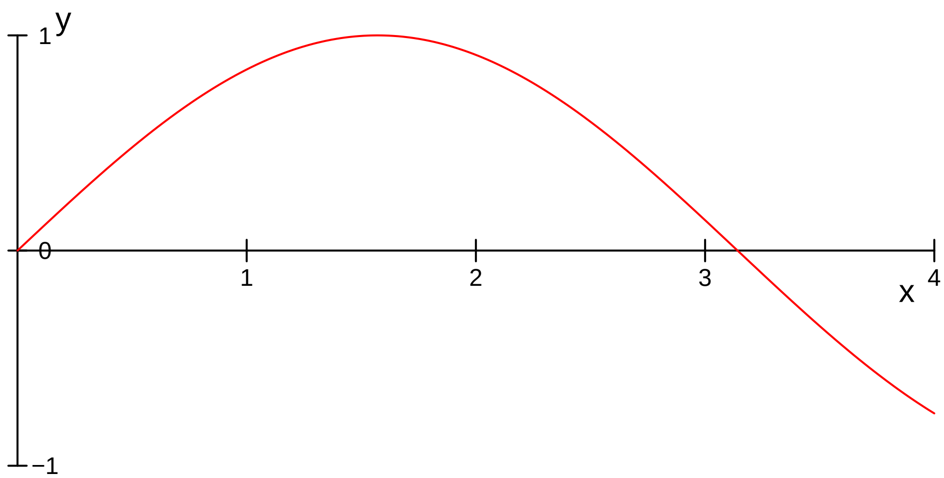
a) La gráfica de la función es la siguiente:



El volumen de revolución sobre el eje x será:

$$\pi \int_{-1}^{2} f(x)^2 dx = \pi \int_{-1}^{2} x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{2} = \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{-1^5}{5} \right) = \pi \frac{33}{5} \approx 20.7345.$$

b) La gráfica de la función es la siguiente:



El volumen engengrado sera como una especie de dos sólidos separados en $x = \pi$ que es donde la función $\sin x$ cambia de signo. A su izquierda aparecerá una especie de peonza y a su derecha una especie de paraboloide.

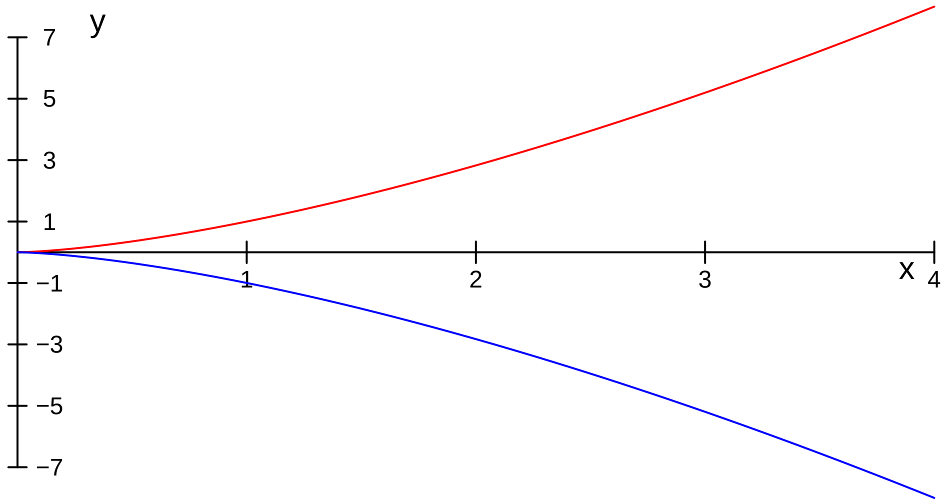
El volumen total será:

$$\pi \int_0^\pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^\pi = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} \approx 4.9348.$$

5. Hallar la longitud del arco de curva $y^2 = x^3$ desde el origen al punto $(4, 8)$.

Solución

El gráfico de la curva es el siguiente:



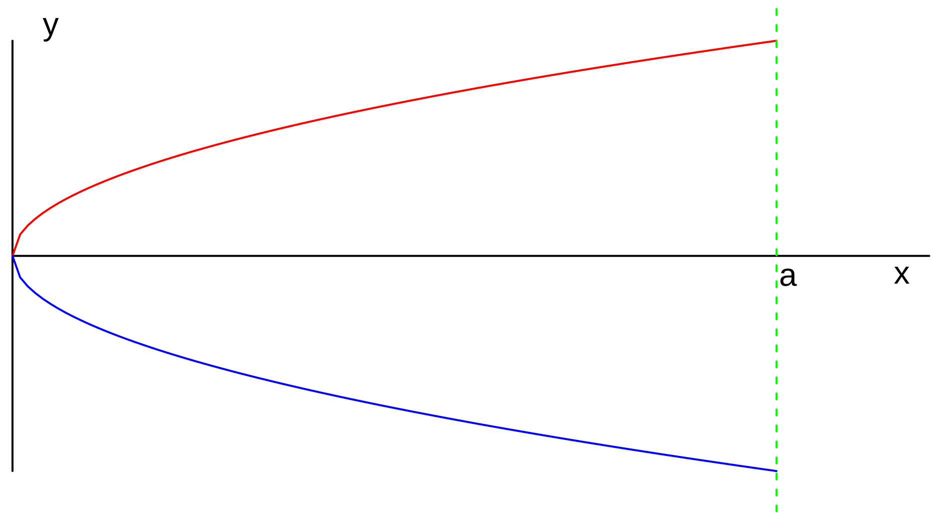
Observando la gráfica y teniendo en cuenta la expresión de la curva $y = \pm\sqrt{x^3}$, vemos que el arco que va desde el origen hasta el punto (4,8) corresponde a la función $f(x) = \sqrt{x^3}$ (pintada de color rojo). Por lo tanto, usando que $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, la longitud del arco será:

$$\int_0^4 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\left[\frac{(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{9}\left(\frac{10^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 9.0734.$$

6. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje y, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$, que intercepta la recta $x = a$.

Solución

La gráfica de la parábola $y^2 = 4ax$ entre $x = 0$ y $x = a$ es la siguiente:



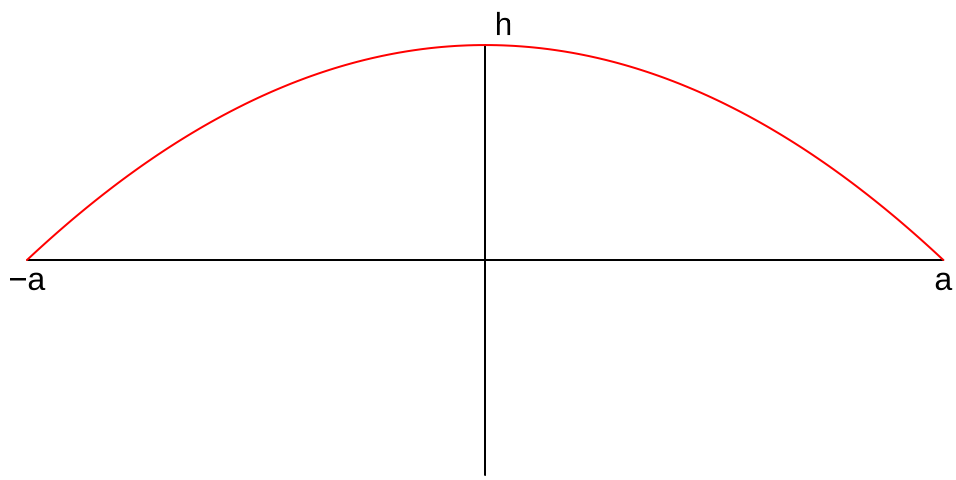
Se puede observar que la función pintada de roja corresponde a $f(x) = 2\sqrt{ax}$ y la pintada de azul, a $f(x) = -2\sqrt{ax}$. El volumen de revolución sobre el eje y será la suma de los volúmenes generado por estas dos funciones, que al ser la misma pero cambiada de signo se puede expresar como:

$$4\pi \int_0^a 2x\sqrt{ax}dx = 8\pi\sqrt{a} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx = 8\pi\sqrt{a}\frac{a^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{16a^3\pi}{5}.$$

7. Un segmento parabólico recto, de base igual a $2a$ y de altura h gira alrededor de su base. Determinar el volumen del cuerpo de revolución que se engendra (*limón de Cavalieri*).

Solución

La gráfica del segmento parabólico de base $2a$ se puede interpretar como una parábola que pasa por los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Como la altura es h, pasa por el punto $(0, h)$:



La gráfica de la función anterior será de la forma $y = C(x - a)(x + a)$ con C una constante a determinar. Como $y(0) = h$, el valor de C será: $h = -C \cdot a^2, \Rightarrow C = -\frac{h}{a^2}$. El trozo de segmento parabólico corresponderá a la función $y = -\frac{h}{a^2}(x - a)(x + a)$.

El "limon de Cavalieri" se genera girando la función anterior alrededor del eje X. Por tanto, su valor será:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2\, dx = \pi \int_{-a}^{a} \frac{h^2}{a^4}(x-a)^2(x+a)^2\, dx = \frac{\pi h^2}{a^4} \int_{-a}^{a} (x^2 - a^2)^2\, dx = \frac{\pi h^2}{a^4} \int_{-a}^{a} \left(x^4 - 2a^2x^2 + a^4\right)\, dx$$
$$= \frac{\pi h^2}{a^4} \left[\frac{x^5}{5} - 2a^2\frac{x^3}{3} + a^4x\right]_{-a}^{a} = 2a\pi h^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{16a\pi h^2}{15}.$$