Problemas de integración.

1. Consideramos la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $[0, 2]$. Usando una sucesión de particiones $(P_n)_n$ con nodos equiespaciados, calcular la suma inferior y superior $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ y demostrar que $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$. Deducir que f es integrable en el intervalo $[0, 2]$ y hallar el valor de la integral $\displaystyle\int_0^2 f$.

   Indicación: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

2. Consideramos la función $f(x) = 2^x$ definida en el intervalo $[0, 5]$. Usando una sucesión de particiones $(P_n)_n$ con nodos equiespaciados, calcular la suma inferior y superior $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ y demostrar que $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$. Deducir que f es integrable en el intervalo $[0, 5]$ y hallar el valor de la integral $\displaystyle\int_0^2 f$.

3. a) Demostrar que, si $g(x) = 0$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $g(x) = 1$ para $\frac{1}{2} < x \leq 1$, entonces $\displaystyle\int_0^1 g = \frac{1}{2}$.

   b) ¿Es válida la conclusión si se cambia el valor de g en el punto $\frac{1}{2}$ por 7?

4. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado. Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que difieren sólo en un número finito de puntos. Provar que f es integrable si, y sólo si, lo es g y que se cumple $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

5. Sigui $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Supongamos que, para cualquier función integrable $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, el producto $f \cdot g$ es integrable $\displaystyle\int_a^b f \cdot g = 0$. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.