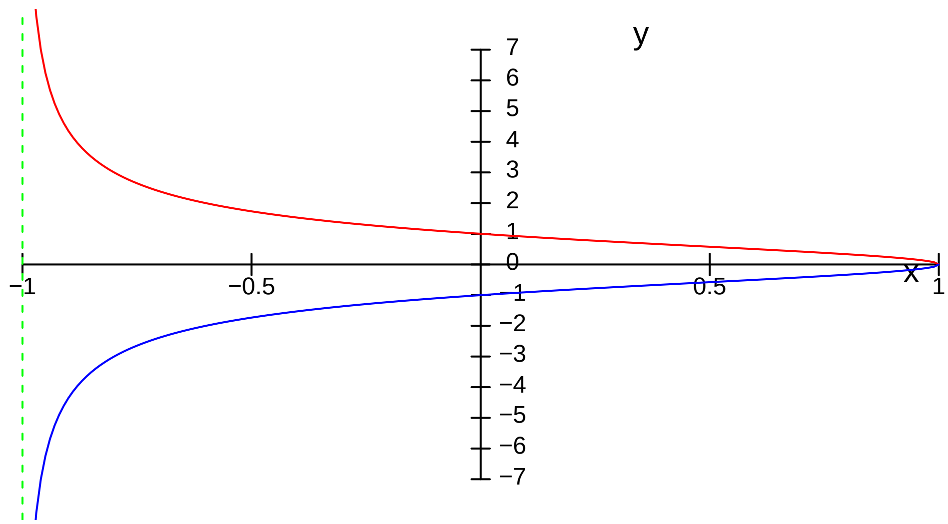
Problemas de integración. Aplicaciones de la integral.

1. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$ y su asíntota.

Solución Veamos primero como és la gráfica de la curva para idear una estrategia con el objetivo de encontrar el area que delimita:



La primera observación és que la asíndota de la curva se encuentra en $x = -1$ ya que $\lim_{x\to -1} \frac{1-x}{1+x} = \infty$. Después, observamos no solo por la gráfica que $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$ no és una función, además que si aislamos y de la expressión de la curva vemos que:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Por lo tanto dado un valor de x existen dos possible valores de y. Luego, de esta expressión y de la gráfica podemos observar que el area que queremos calcular se puede expressar como la suma del valor absoluto de la integral de $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ que en este caso és $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ entre -1 y 1 (Pintada de rojo) más el valor absoluto de la integral de $g(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ que en este caso és $-\int_{-1}^{1} -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ entre -1 y 1 (Pintada de azul):

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \int_{-1}^{1} -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 2\int_{-1}^{1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\int_{-1}^{1} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ahora vemos que cada uno de los sumandos és una integral inmediata por lo tanto resolvemos:

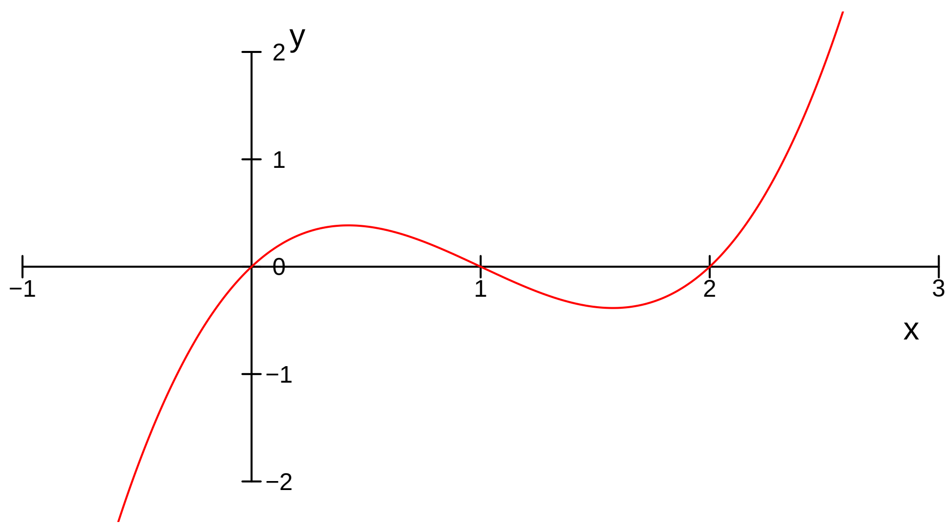
$$2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2(\arcsin(1) - arcsin(-1)) = \pi$$

$$2\int_{-1}^{1} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-1^2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{1-(-1)^2}}{\frac{1}{2}} = 0$$

por lo tanto el area que delimita la curva es π.

2. Hallar el área limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje x.

Solución Para encontrar el area limitada por esta curva primero veamos la imagen de su gráfica:



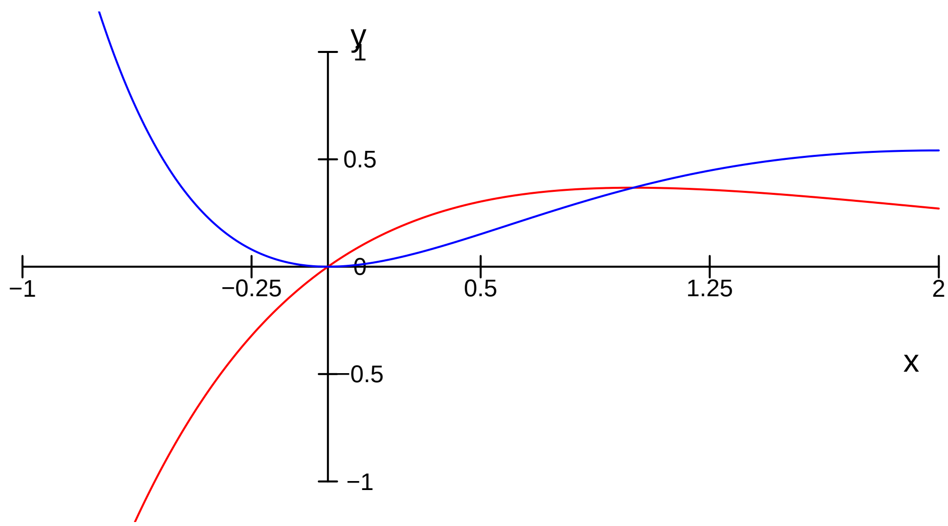
Primero, a partir de la gràfica se puede deducir que el àrea que nos interesa és la comprendida entre $x = 0$ y $x = 2$, que són el mínimo de los zeros de la función i el máximo de los zeros de la función respectivamente. Nótese también que $x = 1$ és el otro único zero de la función que esta comprendido entre $x = 0$ y $x = 2$, cosa que nos indica un cambio de signo i vemos que para $x \in (0,1) \quad f(x) > 0$ y que para $x \in (1,2) \quad f(x) < 0$, por lo tanto, como el cálculo de la integral tiene en cuenta el signo para calcular el area entre $x = 1$ y $x = 2$ haremos un cambio de signo de tal manera que:

$$\int_0^1 x(x-1)(x-2) + \int_1^2 -x(x-1)(x-2) = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x + \int_1^2 -x^3 + 3x^2 - 2x = \frac{1^4}{4} - 3\frac{1^3}{3} + 2\frac{1^2}{2} - \frac{2^4}{4} + 3\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + \frac{1^4}{4} - 3\frac{1^3}{3} + 2\frac{1^2}{2}$$

i el cálculo total és $\frac{1}{2}$

3. Hallar el área limitada por la curva $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$ y $g(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

Solución Veamos primero las gráficas de las funciones:



Ahora intentamos calcular en que x se producen las intersecciones igualando $g(x) = f(x) \to g(x) - f(x) = 0$:

$$g(x) - f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x} - x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} = x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (1 - x) = 0$$

sabemos que como e^{-x} siempre es distinto de 0 $g(x) - f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0, 1$. Nótese también que para $x \in (0, 1)$ $g(x) - f(x) > 0$. Por lo tanto podemos calcular el àrea comprendida entre estas dos curvas como:

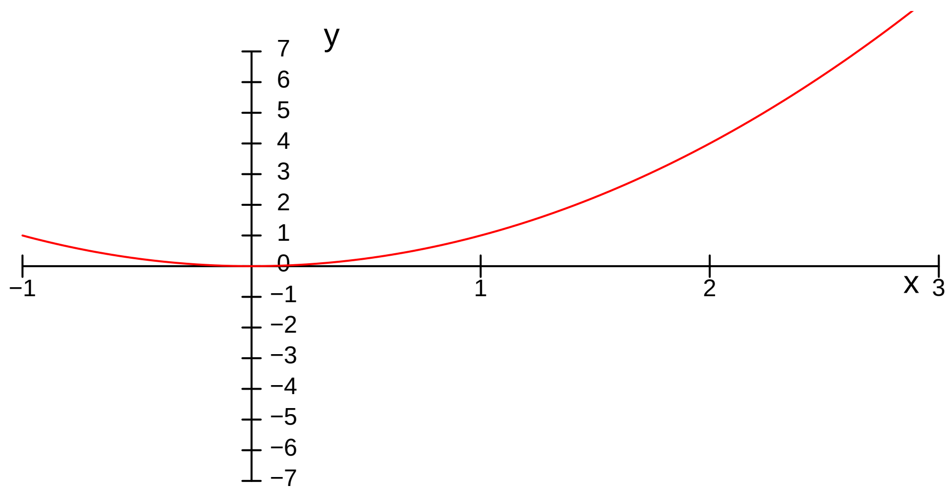
$$\int_0^1 g(x) - f(x) = \int_0^1 -xe^{-x} + x^2 e^{-x}$$

separamos los sumandos de las integrales y aplicamos el método de partes a cada una con $u = x, dv = e^{-x}dx$ y $u = x^2, dv = e^{-x}$:

$$-|_0^1 xe^{-x} + \int_0^1 -e^{-x} + |_0^1 x^2 - \int_0^1 -xe^{-x} = -|_0^1 xe^{-x} + \int_0^1 -e^{-x} + |_0^1 x^2 e^{-x} + |_0^1 xe^{-x} - \int_0^1 -e^{-x} = |_0^1 x^2 e^{-x} = \frac{1}{e}$$

4. Hallar los volúmenes engendrados al girar alrededor del eje x por los recintos de ordenadas de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = x^2$, $x = -1$, $x = 2$.
   b) $f(x) = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$.

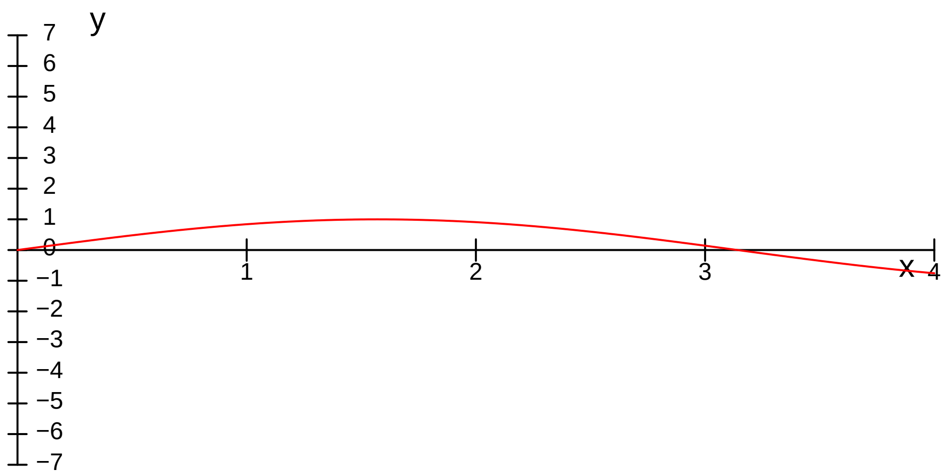
Solución
En el apartado a) veamos primero la gráfica de la función:



al ser una función positiva se puede calcular el volumen de revolución sobre el eje x con la integral:

$$\pi \int_{-1}^{2} f(x)^2 = \pi \int_{-1}^{2} x^4 = \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{-1^5}{5} \right) = \pi \frac{33}{5}$$

En el apartado b) veamos primero la gráfica de la función:

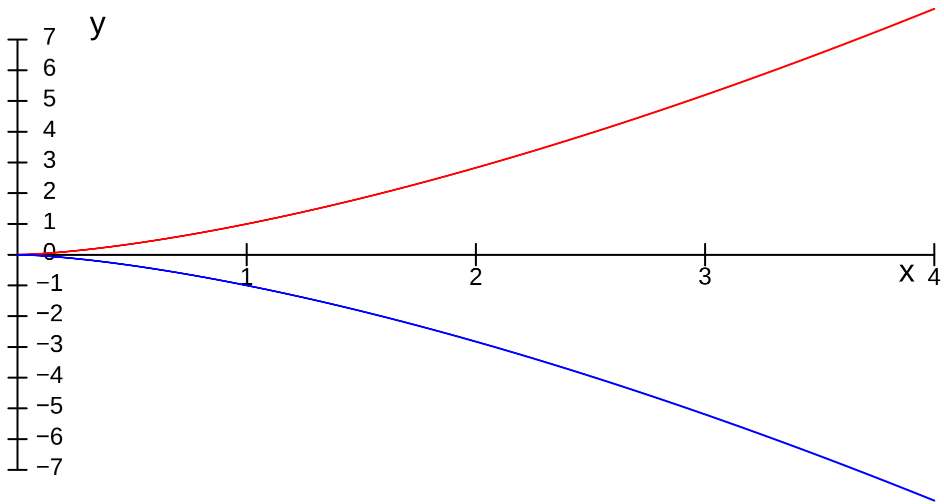


Observamos otra vez que és una función positiva y por lo tanto podemos usar la misma técnica:

$$\pi \int_0^\pi f(x)^2 = \pi \int_0^\pi \sin^2(x) = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2} = \pi \left(|_0^\pi \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2x) \right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{4} |_0^\pi \sin(2x) = \frac{\pi^2}{2}$$

5. Hallar la longitud del arco de curva $y^2 = x^3$ desde el origen al punto $(4, 8)$.

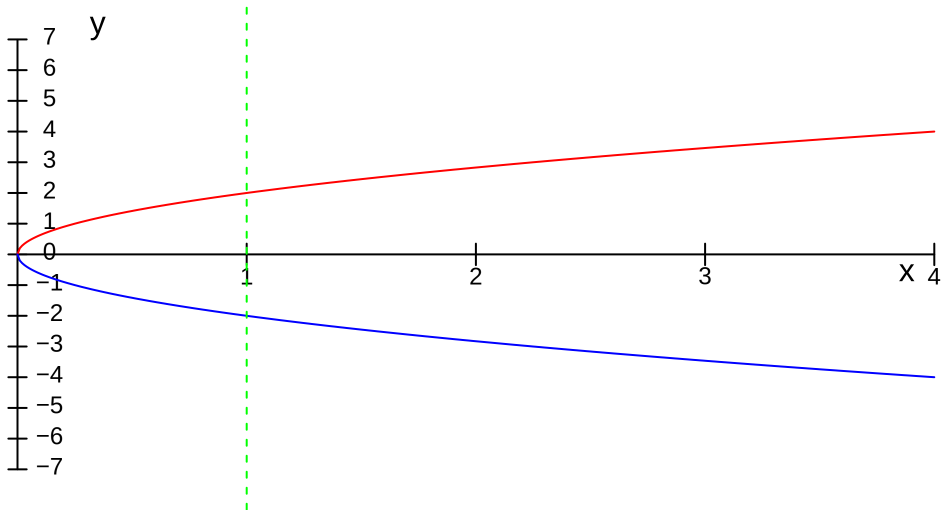
Solución veamos primero que forma tiene la curva:

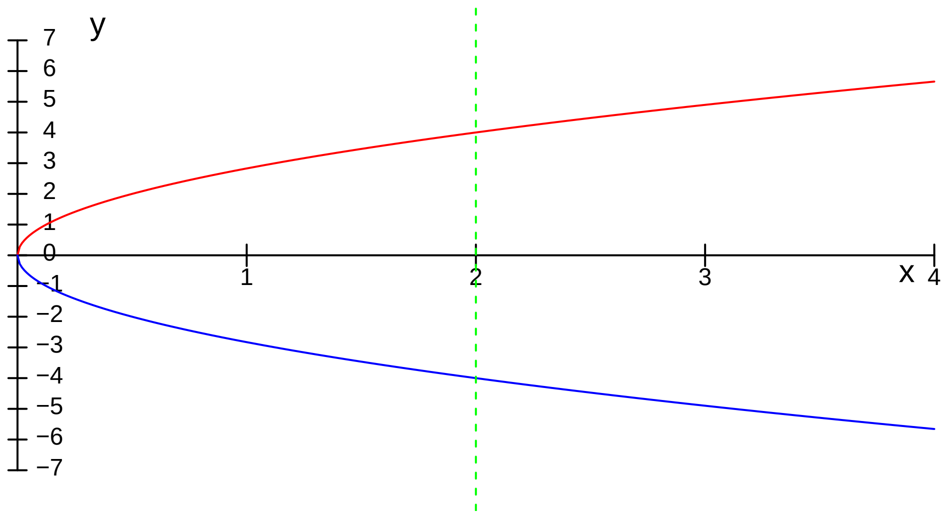


Obsevando la gráfica y teniendo en cuenta la expressión de la curva $y = \pm\sqrt{x^3}$, vemos que el arco que va desde el origen hasta el punto (4,8) corresponde a la función $f(x) = \sqrt{x^3}$ (Pintada de roja). Por lo tanto, para calcular la longitud del arco tenemos que calcular la integral:

$$\int_0^4 \sqrt{1 + f'(x)^2} = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} = \frac{4}{9}|_0^4 \frac{(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9}\left(\frac{10^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\right) = 9.07342$$

6. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje y, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$, que intercepta la recta $x = a$. **Solución** Veamos primero la gráfica de la función para $a = 1, 2$ para idear una estrategia para el cálculo:





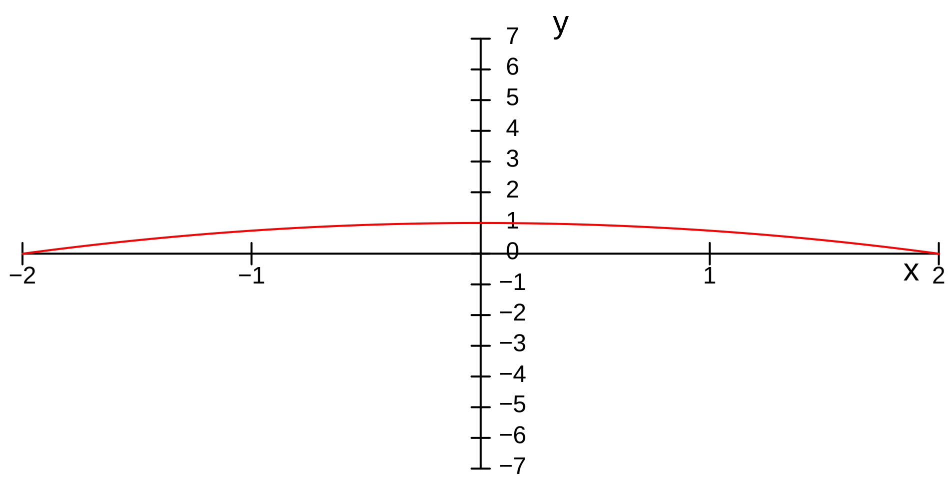
Se puede observar que la función pintada de roja corresponde a $f(x) = 2\sqrt{ax}$, la pintada de azul corresponde a $f(x) = -2\sqrt{ax}$ y que se puede calcular el volumen de revolución sobre el eje y como la suma de los volumenes generado por estas dos funciones, que al ser la misma pero canviada de signo se puede expressar como:

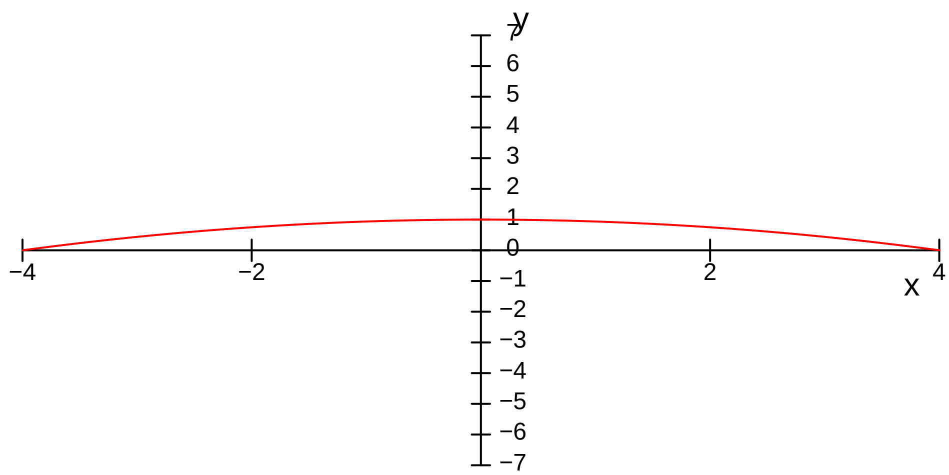
$$4\pi \int_0^a 2x\sqrt{ax} = 8\pi\sqrt{a} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} = 8\pi\sqrt{a}\frac{a^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{16a^3}{5}$$

7. Un segmento parabólico recto, de base igual a $2a$ y de altura h gira alrededor de su base. Determinar el volumen del cuerpo de revolución que se engendra (*limón de Cavalieri*).

Solución

Primero, vamos a encontrar la ecuación explícita que describe nuestro segmento. Existen dos formas de encontrar la función que describe los puntos: Usando que pertenecen a una parábola y crear un sistema de ecuaciones lineal imponiendo que la parábola pasa por los puntos $(-a, 0), (0, h), (a, 0)$ o directamente considerar la ecuación $y = (x - a)(x + a)\frac{h}{-a^2}$, que notemos que passa por los puntos $(-a, 0), (0, h), (a, 0)$. Veamos ahora la forma de la gráfica para idear una estrategia para calcular el volumen para a=2,4 y h=1:





Viendo la gráfica podemos observar que si usamos la fórmula de la integral del volumen revolución sobre el eje y entre $-a$ y a y sobre la función $f(x) = (x-a)(x+a)\frac{h}{-a^2}$ obtendremos el volumen deseado:

$$2\pi \int_{-a}^{a} (x-a)(x+a)\frac{h}{-a^2} = \frac{-2h\pi}{a^2} \int_{-a}^{a} x^2 - 2ax - a^2 = \frac{2h\pi}{a^2} a^2 = 2h\pi$$