

Ejercicios resueltos de integración. 1a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

Consideremos la función $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.
Demostrar que la función es integrable en el intervalo anterior.

Definición de integral

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \dots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

Definición de integral

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \dots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Definición de integral

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \end{aligned}$$

Definición de integral

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \end{aligned}$$

Definición de integral

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{(i-1)^2}{n^2}\right) = \end{aligned}$$

Definición de integral

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{(i-1)^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \left(n + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2\right) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^m i^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^m i^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

La suma inferior de f respecto de P_n será:

$$L(f, P_n) = \frac{1}{n} \left(n + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1) \right)$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^m i^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

La suma inferior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \frac{1}{n} \left(n + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{6n^3} \cdot (n-1)n(2n-1) = 1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^m i^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

La suma inferior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \frac{1}{n} \left(n + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2(n-1)+1) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{6n^3} \cdot (n-1)n(2n-1) = 1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Definición de integral

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Definición de integral

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned}U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\&= \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{1}{n} =\end{aligned}$$

Definición de integral

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned}U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\&= \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \\&= \end{aligned}$$

Definición de integral

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned}U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\&= \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) =\end{aligned}$$

Definición de integral

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned}U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\&= \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \left(n + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2\right)\end{aligned}$$

Definición de integral

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned}U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\&= \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \left(n + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2\right) \\&= 1 + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

Definición de integral

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned}U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\&= \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \left(n + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2\right) \\&= 1 + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.\end{aligned}$$

Definición de integral

Solución (cont.)

A continuación calculemos $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n)$:

$$L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3},$$

Definición de integral

Solución (cont.)

A continuación calculemos $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n)$:

$$L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3},$$

$$U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3}.$$

Definición de integral

Solución (cont.)

A continuación calculemos $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n)$:

$$L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3},$$

$$U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3}.$$

Como los dos límites anteriores coinciden y además

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, deducimos que la función f es integrable en el intervalo $[0, 1]$ y además $\int_{[0,1]} f = \frac{4}{3}$.

Ejercicio 2

Calcular la integrales definidas siguientes:

a) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$

b) $\int_0^1 x e^{-x^2} dx.$

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2} dx.$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2} dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2} dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y cuando $x = 2$, el valor de t es $t = \frac{1}{2}$.

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2} dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y cuando $x = 2$, el valor de t es $t = \frac{1}{2}$.

La integral a calcular nos queda en la nueva variable t :

$$\int_1^{\frac{1}{2}} e^t (-dt) =$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2} dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y cuando $x = 2$, el valor de t es $t = \frac{1}{2}$.

La integral a calcular nos queda en la nueva variable t :

$$\int_1^{\frac{1}{2}} e^t (-dt) = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt =$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2} dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y cuando $x = 2$, el valor de t es $t = \frac{1}{2}$.

La integral a calcular nos queda en la nueva variable t :

$$\int_1^{\frac{1}{2}} e^t (-dt) = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = [e^t]_{\frac{1}{2}}^1 =$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2} dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y cuando $x = 2$, el valor de t es $t = \frac{1}{2}$.

La integral a calcular nos queda en la nueva variable t :

$$\int_1^{\frac{1}{2}} e^t (-dt) = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = [e^t]_{\frac{1}{2}}^1 = e^1 - e^{\frac{1}{2}} \approx 1.0696.$$

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (-2x) e^{-x^2} dx$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (-2x) e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^1$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (-2x) e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1) =\end{aligned}$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (-2x) e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)\end{aligned}$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (-2x) e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{e-1}{2e} \approx 0.3161.\end{aligned}$$

Ejercicio 3

La función error:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

se usa en probabilidad, estadística y ingeniería.

- a) Demostrar que $\int_a^b e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a))$.
- b) Demostrar que la función $y = x^2 \operatorname{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $\sqrt{\pi} x y' = 2\sqrt{\pi} y + 2x^3 e^{-x^2}$.

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^b e^{-t^2} dt - \int_0^a e^{-t^2} dt \right)$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^b e^{-t^2} dt - \int_0^a e^{-t^2} dt \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-t^2} dt,$$

y, por tanto,

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^b e^{-t^2} dt - \int_0^a e^{-t^2} dt \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-t^2} dt,$$

y, por tanto,

$$\int_a^b e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)).$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\operatorname{erf}(x)$:

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\operatorname{erf}(x)$:

$$\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\operatorname{erf}(x)$:

$$\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$y' = 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \operatorname{erf}'(x) =$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\operatorname{erf}(x)$:

$$\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$y' = 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \operatorname{erf}'(x) = 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\operatorname{erf}(x)$:

$$\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \operatorname{erf}'(x) = 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \\ &= 2x \cdot \frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \end{aligned}$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\operatorname{erf}(x)$:

$$\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \operatorname{erf}'(x) = 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \\ &= 2x \cdot \frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{2y}{x} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\operatorname{erf}(x)$:

$$\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \operatorname{erf}'(x) = 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \\ &= 2x \cdot \frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{2y}{x} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\sqrt{\pi}x$ nos queda:

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\operatorname{erf}(x)$:

$$\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \operatorname{erf}'(x) = 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \\ &= 2x \cdot \frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{2y}{x} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\sqrt{\pi}x$ nos queda:

$$\sqrt{\pi}xy' = 2\sqrt{\pi}y + 2x^3e^{-x^2}.$$

Ejercicio 4

La función seno integral:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

es importante en ingeniería eléctrica. Fijarse que aunque el integrando $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ no está definido para $t = 0$, sabemos que su límite cuando t tiende a 0 vale 1. Por tanto, si definimos $f(0) = 1$, tenemos que f es continua para todo valor de x .

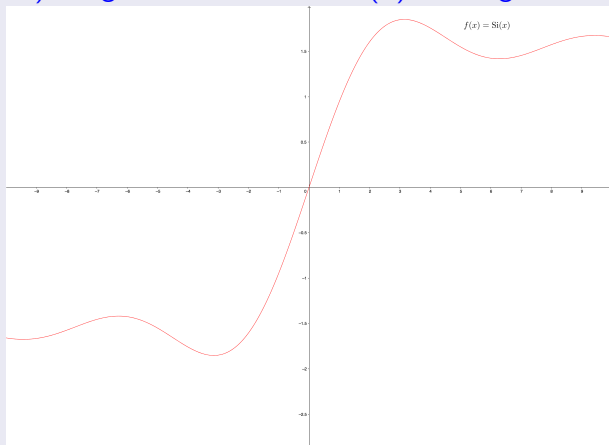
Ejercicio 4 (cont.)

- a) Hacer un gráfico de la función $\text{Si}(x)$.
- b) ¿Para qué valores de x , la función $\text{Si}(x)$ tiene un máximo relativo?
- c) Hallar el primer punto de inflexión a la derecha del origen. Es decir hallar el mínimo valor $x_0 > 0$ tal que $(x_0, \text{Si}(x_0))$ es un punto de inflexión de la función $\text{Si}(x)$.

Teorema fundamental del cálculo

Solución

Apartado a). El gráfico de la función $\text{Si}(x)$ es el siguiente:



Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\text{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\text{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

$$\text{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0,$$

Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\text{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

$$\text{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0, \Rightarrow \sin x = 0, (x \neq 0),$$

Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\text{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

$$\text{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0, \Rightarrow \sin x = 0, (x \neq 0), \Rightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\text{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

$$\text{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0, \Rightarrow \sin x = 0, (x \neq 0), \Rightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Las abscisas de los candidatos a extremos serán de la forma $x_n = n\pi$, con $n \neq 0$.

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\text{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

$$\text{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0, \Rightarrow \sin x = 0, (x \neq 0), \Rightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Las abscisas de los candidatos a extremos serán de la forma $x_n = n\pi$, con $n \neq 0$.

Veamos si son máximos o mínimos:

x	$-\infty$	\dots	-2π	$-\pi$	π	2π	\dots	∞
y'			-	+	-			
y			\searrow	\nearrow	\searrow			

Solución (cont.)

Entonces:

- si $n > 0$, los puntos con $x_n = n\pi$, con n par serán mínimos y los puntos $x_n = n\pi$ con n impar serán máximos,

Solución (cont.)

Entonces:

- si $n > 0$, los puntos con $x_n = n\pi$, con n par serán mínimos y los puntos $x_n = n\pi$ con n impar serán máximos,
- si $n < 0$, los puntos con $x_n = n\pi$, con n par serán máximos y los puntos $x_n = n\pi$ con n impar serán mínimos.

Solución (cont.)

Apartado c). Los puntos de inflexión se hallan igualando a cero la derivada segunda:

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado c). Los puntos de inflexión se hallan igualando a cero la derivada segunda:

$$Si''(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = 0, \Rightarrow x \cdot \cos x - \sin x = 0, \Rightarrow x = \tan x.$$

Solución (cont.)

Apartado c). Los puntos de inflexión se hallan igualando a cero la derivada segunda:

$$\text{Si}''(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = 0, \Rightarrow x \cdot \cos x - \sin x = 0, \Rightarrow x = \tan x.$$

Nos piden hallar la primera solución $x > 0$ de la solución anterior.

Solución (cont.)

Apartado c). Los puntos de inflexión se hallan igualando a cero la derivada segunda:

$$\text{Si}''(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = 0, \Rightarrow x \cdot \cos x - \sin x = 0, \Rightarrow x = \tan x.$$

Nos piden hallar la primera solución $x > 0$ de la solución anterior. Fijarse que $x = 0$ es una solución de la ecuación anterior y de hecho el valor $(0,0)$ es un punto de inflexión de la función $\text{Si}(x)$.

Solución (cont.)

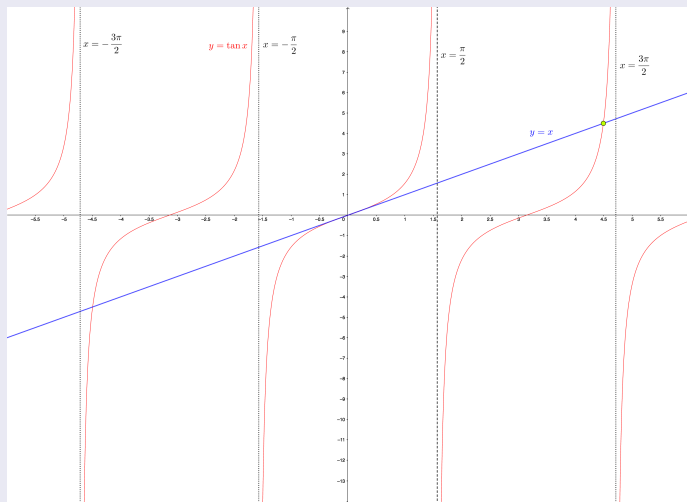
Apartado c). Los puntos de inflexión se hallan igualando a cero la derivada segunda:

$$\text{Si}''(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = 0, \Rightarrow x \cdot \cos x - \sin x = 0, \Rightarrow x = \tan x.$$

Nos piden hallar la primera solución $x > 0$ de la solución anterior. Fijarse que $x = 0$ es una solución de la ecuación anterior y de hecho el valor $(0, 0)$ es un punto de inflexión de la función $\text{Si}(x)$. Para resolver la ecuación anterior, hagamos primero un gráfico ilustrativo:

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)



Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n}$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n} \\&= \frac{x_n(\tan^2 x_n + 1) - \tan x_n}{\tan^2 x_n}\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n} \\&= \frac{x_n(\tan^2 x_n + 1) - \tan x_n}{\tan^2 x_n} = \frac{\frac{x_n}{\cos^2 x_n} - \frac{\sin x_n}{\cos x_n}}{\frac{\sin^2 x_n}{\cos^2 x_n}}\end{aligned}$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n} \\&= \frac{x_n(\tan^2 x_n + 1) - \tan x_n}{\tan^2 x_n} = \frac{\frac{x_n}{\cos^2 x_n} - \frac{\sin x_n}{\cos x_n}}{\frac{\sin^2 x_n}{\cos^2 x_n}} \\&= \frac{x_n - \sin x_n \cos x_n}{\sin^2 x_n},\end{aligned}$$

con $x_0 = 4.5$.

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n} \\&= \frac{x_n(\tan^2 x_n + 1) - \tan x_n}{\tan^2 x_n} = \frac{\frac{x_n}{\cos^2 x_n} - \frac{\sin x_n}{\cos x_n}}{\frac{\sin^2 x_n}{\cos^2 x_n}} \\&= \frac{x_n - \sin x_n \cos x_n}{\sin^2 x_n},\end{aligned}$$

con $x_0 = 4.5$.

El programa en 'python' que resuelve la ecuación anterior es el siguiente:

Teorema fundamental del cálculo

```
from math import *
def f(x):
    return((x-sin(x)*cos(x))/(sin(x)**2))

epsilon=0.0001; x0=4.5; x=x0; n=0

while abs(tan(x)-x) >= epsilon:
    x=f(x)
    n=n+1
    print("El término {0:2} de la sucesión vale {1:.7f}".
          format(n,x))
```

El término 1 de la sucesión vale 4.4936139

El término 2 de la sucesión vale 4.4934097

Ejercicio 5

Hallar la derivada de las funciones siguientes:

a) $h(x) = \int_2^{\frac{1}{x}} \arctan t \, dt.$

b) $h(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+r^3} \, dr.$

Derivación bajo el signo integral

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

Derivación bajo el signo integral

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

$$\textcircled{1} \quad h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

Derivación bajo el signo integral

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

$$\textcircled{1} \quad h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

Derivación bajo el signo integral

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

$$\textcircled{1} \quad h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}.$$

Derivación bajo el signo integral

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

$$\textcircled{1} \quad h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad h'(x) = \sqrt{1 + (x^2)^3} \cdot (x^2)' =$$

Derivación bajo el signo integral

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

$$\textcircled{1} \quad h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad h'(x) = \sqrt{1 + (x^2)^3} \cdot (x^2)' = \sqrt{1 + x^6} \cdot 2x =$$

Derivación bajo el signo integral

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

$$\textcircled{1} \quad h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad h'(x) = \sqrt{1 + (x^2)^3} \cdot (x^2)' = \sqrt{1 + x^6} \cdot 2x = 2x \cdot \sqrt{1 + x^6}.$$