Problemas de integración. Integración Impropia.

1. Estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$ y calcular su valor en función de n en el caso en que sea convergente.

Solución

Se trata de una integral impropia de primera especie.

Veamos primero que es convergente. Para ello, vamos a usar el criterio de comparación por cociente de la función a integrar $x^n e^{-x}$ con la función $e^{-\frac{x}{2}}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = 2n\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{\frac{x}{2}}} = 2^2\cdot n\cdot(n-1)\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{e^{\frac{x}{2}}}\\ &= \cdots = 2^{n-1}\cdot n!\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = 2^n\cdot n!\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = 0.\end{aligned}$$

Como la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ es convergente ya que:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^t = 2\lim_{t\to\infty}\left(-e^{-\frac{t}{2}}+1\right) = 2\cdot(0+1) = 2,$$

la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$, usando el criterio de comparación por cociente, también lo sería.

Hallemos su valor en función de n. Si llamamos $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$, usando la técnica de integración por partes con:

$$\begin{aligned} u &= x^n, & du &= nx^{n-1}\,dx,\\ dv &= e^{-x}, & v &= -e^{-x},\end{aligned}$$

obtenemos:

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = \left[-x^n\cdot e^{-x}\right]_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = n\cdot I_{n-1}.$$

En el último cálculo hemos usado que si $n\geq 0$,

$$\lim_{x\to\infty} x^n\cdot e^{-x} = 0,$$

ya que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^n\cdot e^{-x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = n\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^x} = n\cdot(n-1)\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{e^x}\\ &= \cdots = n!\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = n!\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0.\end{aligned}$$

Como $I_n = n\cdot I_{n-1}$, obtenemos:

$$I_n = n\cdot I_{n-1} = n\cdot(n-1)\cdot I_{n-2} = n!\cdot I_0 = n!\cdot\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = n!\cdot\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = n!\cdot(0+1) = n!$$

2. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias en función del parámetro α:
   a) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R},\ -\infty < a < b < +\infty.$
   b) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln x\, dx.$
   c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}.$

Solución

a) Se trataría de una integral impropia de segunda especie. Si hacemos el cambio $t = x - a$, la integral impropia sería en función de la variable t:

$$\int_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha},$$

ya que $dt = dx$, y si $x = a$, $t = 0$ y si $x = b$, $t = b - a$.

Estudiemos la convergencia de la integral impropia anterior. Consideremos dos casos:

- $\alpha \neq 1$:

$$\int_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^{b-a} t^{-\alpha}\, dt = \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_c^{b-a} = \frac{1}{1-\alpha}\left((b-a)^{1-\alpha} - \lim_{c\to 0^+} c^{1-\alpha}\right).$$

  A partir de aquí, tenemos dos nuevos casos:
  - si $1-\alpha < 0$ o $\alpha > 1$, $\lim\limits_{c\to 0^+} c^{1-\alpha} = \infty$ y la integral sería divergente.
  - si $1-\alpha > 0$ o $\alpha < 1$, $\lim\limits_{c\to 0^+} c^{1-\alpha} = 0$ y la integral sería convergente de valor

$$\int_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

- $\alpha = 1$:

$$\int_0^{b-a} \frac{dt}{t} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^{b-a} t^{-1}\, dt = \lim_{c\to 0^+} [\ln t]_c^{b-a} = \ln(b-a) - \lim_{c\to 0^+} \ln c = \infty.$$

  La integral sería divergente.

b) Consideremos dos casos:

- $\alpha \neq -1$. Apliquemos la técnica de integración por partes con:

$$\begin{aligned} u &= \ln x, & du &= \tfrac{1}{x}\, dx, \\ dv &= x^\alpha, & v &= \tfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^\alpha \ln x\, dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^\alpha \ln x\, dx = \lim_{c\to 0^+} \left[\ln x \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_c^1 - \frac{1}{\alpha+1}\int_c^1 x^\alpha\, dx.$$

  En los apuntes vimos que la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\, dx$ es convergente si $-1 < \alpha$ y, en este caso:

$$\int_0^1 x^\alpha\, dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^\alpha\, dx = \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_c^1 = \frac{1}{\alpha+1} \lim_{c\to 0^+} (1 - c^{\alpha+1}) = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Para $\alpha > -1$, la integral inicial valdrá:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^\alpha \ln x\, dx &= \lim_{c\to 0^+} \left[\ln x \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_c^1 - \frac{1}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{c\to 0^+} \ln x \cdot x^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{c\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-(\alpha+1)}} - \frac{1}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{c\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(\alpha+1)x^{-(\alpha+2)}} - \frac{1}{\alpha+1}\right) \\
&= \lim_{c\to 0^+} \frac{1}{-x^{-(\alpha+1)}} - \frac{1}{(\alpha+1)^2} = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, la integral inicial será convergente en este caso y su valor será $-\frac{1}{(\alpha+1)^2}$.

- $\alpha = -1$. En este caso la integral impropia es:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

Para resolver la integral impropia anterior, aplicaremos el criterio de comparación por cociente usando las funciones $\frac{\ln x}{x}$ y $\frac{1}{x}$. Si hacemos el límite del cociente, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Sabemos por los apuntes que la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ es divergente y usando el límite anterior, podemos afirmar que nuestra integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx$ también lo es.

3. Provar que las integrales siguientes son convergentes:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx, \quad J = \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx,$$

y que $I + J = 0$.

4. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{2\mathrm{e}^x + 1}$.

   b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$.

   c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}\, dx$.

5. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias en función del parámetro α:

   a) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^4 - 1}\, dx.$

   b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx.$

   c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \sin(x^{\alpha})\, dx,\ \ \alpha > 1.$

6. Explicar por qué el valor de las integrales siguientes no es correcto, estudiar su convergencia y, en el caso en que sean convergentes, hallar su valor:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -2, \quad \int_{0}^{4} \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{4}{3}.$$