Problemas de integración. Integración Impropia.

1. Estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x}\,dx$ y calcular su valor en función de n en el caso en que sea convergente.

Solución

Se trata de una integral impropia de primera especie.

Veamos primero que es convergente. Para ello, vamos a usar el criterio de comparación por cociente de la función a integrar $x^n\mathrm{e}^{-x}$ con la función $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 2n\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 2^2\cdot n\cdot(n-1)\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\\ &= \cdots = 2^{n-1}\cdot n!\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 2^n\cdot n!\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 0.\end{aligned}$$

Como la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx$ es convergente ya que:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_0^t = 2\lim_{t\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+1\right) = 2\cdot(0+1) = 2,$$

la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\,dx$, usando el criterio de comparación por cociente, también lo sería.

Hallemos su valor en función de n. Si llamamos $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\,dx$, usando la técnica de integración por partes con:

$$\begin{aligned} u &= x^n, & du &= nx^{n-1}\,dx,\\ dv &= \mathrm{e}^{-x}, & v &= -\mathrm{e}^{-x},\end{aligned}$$

obtenemos:

$$I_n = \int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\,dx = \left[-x^n\cdot\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx = n\cdot I_{n-1}.$$

En el último cálculo hemos usado que si $n\geq 0$,

$$\lim_{x\to\infty} x^n\cdot\mathrm{e}^{-x} = 0,$$

ya que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^n\cdot\mathrm{e}^{-x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{\mathrm{e}^x} = n\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{\mathrm{e}^x} = n\cdot(n-1)\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{\mathrm{e}^x}\\ &= \cdots = n!\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x} = n!\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0.\end{aligned}$$

Como $I_n = n\cdot I_{n-1}$, obtenemos:

$$I_n = n\cdot I_{n-1} = n\cdot(n-1)\cdot I_{n-2} = n!\cdot I_0 = n!\cdot\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx = n!\cdot\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty = n!\cdot(0+1) = n!$$

2. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias en función del parámetro α:
   a) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$.
   b) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln x\, dx$.
   c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$.

Solución

a) Se trataría de una integral impropia de segunda especie. Si hacemos el cambio $t = x - a$, la integral impropia sería en función de la variable t:

$$\int_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha},$$

ya que $dt = dx$, y si $x = a$, $t = 0$ y si $x = b$, $t = b - a$.

Estudiemos la convergencia de la integral impropia anterior. Consideremos dos casos:

- $\alpha \neq 1$:

$$\int_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^{b-a} t^{-\alpha}\, dt = \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_c^{b-a} = \frac{1}{1-\alpha}\left((b-a)^{1-\alpha} - \lim_{c\to 0^+} c^{1-\alpha}\right).$$

A partir de aquí, tenemos dos nuevos casos:
  - si $1-\alpha < 0$ o $\alpha > 1$, $\lim\limits_{c\to 0^+} c^{1-\alpha} = \infty$ y la integral sería divergente.
  - si $1-\alpha > 0$ o $\alpha < 1$, $\lim\limits_{c\to 0^+} c^{1-\alpha} = 0$ y la integral sería convergente de valor

$$\int_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

- $\alpha = 1$:

$$\int_0^{b-a} \frac{dt}{t} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^{b-a} t^{-1}\, dt = \lim_{c\to 0^+} [\ln t]_c^{b-a} = \ln(b-a) - \lim_{c\to 0^+} \ln c = \infty.$$

La integral sería divergente.

b) Consideremos dos casos:

- $\alpha \neq -1$. Apliquemos la técnica de integración por partes con:

$$\begin{aligned} u &= \ln x, & du &= \tfrac{1}{x}\, dx, \\ dv &= x^\alpha, & v &= \tfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^\alpha \ln x\, dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^\alpha \ln x\, dx = \lim_{c\to 0^+} \left[\ln x \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_c^1 - \frac{1}{\alpha+1}\int_c^1 x^\alpha\, dx.$$

En los apuntes vimos que la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\, dx$ es convergente si $-1 < \alpha$ y, en este caso:

$$\int_0^1 x^\alpha\, dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^\alpha\, dx = \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_c^1 = \frac{1}{\alpha+1} \lim_{c\to 0^+} (1 - c^{\alpha+1}) = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Para $\alpha > -1$, la integral inicial valdrá:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\alpha \ln x\, dx &= \lim_{c\to 0^+}\left[\ln x \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_c^1 - \frac{1}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{c\to 0^+} \ln x \cdot x^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\right)\\ &= \frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{c\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-(\alpha+1)}} - \frac{1}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{c\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-(\alpha+1)x^{-(\alpha+2)}} - \frac{1}{\alpha+1}\right)\\ &= \lim_{c\to 0^+}\frac{1}{-x^{-(\alpha+1)}} - \frac{1}{(\alpha+1)^2} = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto, la integral inicial será convergente en este caso y su valor será $-\frac{1}{(\alpha+1)^2}$.

- $\alpha = -1$. En este caso la integral impropia es:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

Para resolver la integral impropia anterior, aplicaremos el criterio de comparación por cociente usando las funciones $\frac{\ln x}{x}$ y $\frac{1}{x}$. Si hacemos el límite del cociente, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty.$$

Sabemos por los apuntes que la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ es divergente y usando el límite anterior, podemos afirmar que nuestra integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx$ también lo es.

3. Provar que las integrales siguientes son convergentes:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx, \quad J = \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx,$$

y que $I + J = 0$.

Solución

La integral impropia I es de segunda especie con una singularidad en $x = 0$.

Para demostrar que I es convergente aplicaremos la técnica de integración por partes con:

$$\begin{array}{llll} u & = \ln x, & du & = \frac{1}{x}\,dx, \\ dv & = \frac{1}{1+x^2}\,dx, & v & = \arctan x. \end{array}$$

Usando la técnica anterior, podemos escribir la integral I como:

$$I = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^+} [\ln x \cdot \arctan x]_c^1 - \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx.$$

El primer término de la expresión anterior se calcula como:

$$\lim_{c\to 0^+} [\ln x \cdot \arctan x]_c^1 = -\lim_{c\to 0^+} \ln c \cdot \arctan c.$$

Usando que $\displaystyle\lim_{c\to 0^+} \frac{\arctan c}{c} = 1$, ya que usando la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{c\to 0^+} \frac{\arctan c}{c} = \lim_{c\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+c^2}}{1} = 1,$$

podemos sustituir $\arctan c$ por c en el límite a calcular y nos queda,

$$\lim_{c\to 0^+} [\ln x \cdot \arctan x]_c^1 = -\lim_{c\to 0^+} \ln c \cdot c = -\lim_{c\to 0^+} \frac{\ln c}{\frac{1}{c}} = -\lim_{c\to 0^+} \frac{\frac{1}{c}}{-\frac{1}{c^2}} = -\lim_{c\to 0^+} -c = 0.$$

Entonces la integral I puede escribirse como:

$$I = -\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx.$$

Ahora bien, tal como hemos indicado antes, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1$, por tanto, usando el criterio de comparación por cociente, como $\displaystyle\int_0^1 1\,dx$ es convergente, la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx$ también será convergente y como conclusión, la integral impropia I será convergente.

La integral J es una integral impropia de primera especie. Para ver que J es convergente, aplicaremos el criterio de comparación por cociente usando las funciones $\frac{\ln x}{1+x^2}$ y $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x + x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x + x^{\frac{1}{2}}}{2x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\ln x + 1\right)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\ln x + 1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Como la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ es convergente ya que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \lim_{c\to\infty} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^c = -2\cdot \lim_{c\to\infty} c^{-\frac{1}{2}} - 1 = 2,$$

la integral impropia J también lo será usando el límite anterior.

Por último veamos que $I+J=0$. Para ello, realizamos el cambio de variable siguiente en la integral impropia I, $t=\frac{1}{x}$. La relación entre los diferenciales es $dt=-\frac{1}{x^2}\,dx=-t^2\,dx$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$ y cuando $x=0$, $t=\infty$ y cuando $x=1$, $t=1$. La integral I en la nueva variable t será:

$$I=\int_{\infty}^{1}\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt.$$

Usando que, en general $\displaystyle\int_{\infty}^{1}h(t)\,dt=-\int_{1}^{\infty}h(t)\,dt$, podemos escribir la integral anterior como:

$$I=-\int_{1}^{\infty}\frac{-\ln t}{\frac{t^2+1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt=-\int_{1}^{\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt=-J,$$

con lo cual, $I+J=0$, tal como queríamos demostrar.

4. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias:
   a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{2\mathrm{e}^x+1}$.
   b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.
   c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$.

Solución

a) Para estudiar el carácter de la integral impropia propuesta, realizamos el cambio de variable siguiente $t=\mathrm{e}^x$. La relación entre los diferenciales es $dt=\mathrm{e}^x\,dx=t\,dx$, $dx=\frac{dt}{t}$. Cuando $x=1$, $t=\mathrm{e}$ y cuando $x=\infty$, $t=\infty$:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2\mathrm{e}^x+1}=\int_{\mathrm{e}}^{\infty}\frac{1}{2t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\int_{\mathrm{e}}^{\infty}\frac{1}{t\cdot(2t+1)}\,dt=\frac{1}{2}\lim_{c\to\infty}\int_{\mathrm{e}}^{c}\frac{1}{t\cdot\left(t+\frac{1}{2}\right)}\,dt.$$

Obtenemos una integral racional. Para resolverla, descomponemos la función a integrar de la forma siguiente:

$$\frac{1}{t\cdot\left(t+\frac{1}{2}\right)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+\frac{1}{2}}=\frac{A\left(t+\frac{1}{2}\right)+Bt}{t\cdot\left(t+\frac{1}{2}\right)}.$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores deben serlo:

$$A\left(t+\frac{1}{2}\right)+Bt=1.$$

Si damos el valor de $t=0$, obtenemos el valor de A:

$$\frac{1}{2}\cdot A=1,\ \Rightarrow A=2,$$

y si damos el valor de $t=-\frac{1}{2}$, obtenemos el valor de B:

$$-\frac{1}{2}\cdot B=1,\ \Rightarrow B=-2.$$

La integral a resolver queda, pues:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{dx}{2\mathrm{e}^x+1}&=\frac{1}{2}\lim_{c\to\infty}\int_{\mathrm{e}}^{c}\left(\frac{2}{t}-\frac{2}{t+\frac{1}{2}}\right)dt=\lim_{c\to\infty}\left[\ln t-\ln\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]_{\mathrm{e}}^{c}=\lim_{c\to\infty}\left[\ln\frac{t}{t+\frac{1}{2}}\right]_{\mathrm{e}}^{c}\\&=\lim_{c\to\infty}\ln\frac{c}{c+\frac{1}{2}}-\ln\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\frac{1}{2}}=\ln 1-\left(\ln e-\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{2}\right)\right)=-1+\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{2}\right)\approx 0.1688.\end{aligned}$$

b) Se trataría de una integral impropia de segunda especie con una singularidad en $x=1$. Para resolverla aplicaremos el criterio por cociente usando las funciones $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ y $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$.

¿Cuál es la razón de que hayamos escogido la función $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$ para comparar?

Veamos intuitivamente cómo se comporta la singularidad de nuestra función $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ en $x=1$. En primer lugar, "separamos" nuestra función en dos partes: una que conserva la singularidad y la otra no:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(1-x^2)\cdot(1+x^2)}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}.$$

Vemos que la función que "hereda" la singularidad $x=1$ es $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$. La otra, $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}$ no tiene ninguna singularidad en $x=1$.

A su vez, podemos descomponer la función $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ como:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}.$$

La singularidad $x = 1$ se "hereda" en la función $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$. En resumen, nuestra función a integrar puede descomponerse de la forma siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}} \right).$$

La función del paréntesis no tiene ningún "problema" en $x = 1$, es decir, vemos que la función donde hay "problemas" es $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$. De ahí que parece que intuitivamente es equivalente estudiar el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ a estudiar el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\, dx$. Veámoslo:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}} \right)}{\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}},$$

tal como queríamos ver.

A continuación, estudiemos el carácter de la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\, dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\, dx &= \lim_{c\to 1^-} \int_0^c (1-x)^{-\frac{1}{4}}\, dx = \lim_{c\to 1^-} -\left[\frac{(1-x)^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} \right]_0^c = -\lim_{c\to 1^-} \left[\frac{(1-x)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} \right]_0^c \\ &= -\frac{4}{3} \lim_{c\to 1^-} ((1-c)^{\frac{3}{4}} - 1) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Como la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\, dx$ es convergente, nuestra integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ también lo será al tener las dos el mismo carácter.

c) La función de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\, dx$ sólo puede tener problemas en $x = 0$ ya que este valor es el único valor donde se anula el denominador $\sqrt{1-\cos x}$ en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Veamos si realmente es una singularidad. Usando la igualdad trigonométrica $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, de donde $\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Usando el criterio por cociente, como la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx$ es convergente, nuestra integral impropia $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\, dx$ también lo será ya que gracias al límite anterior, las dos integrales anteriores tienen el mismo carácter.

5. Estudiar el carácter de las siguientes integrales impropias en función del parámetro α:

   a) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^4 - 1}\, dx.$

   b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx.$

   c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \sin(x^{\alpha})\, dx, \ \alpha > 1.$

6. Explicar por qué el valor de las integrales siguientes no es correcto, estudiar su convergencia y, en el caso en que sean convergentes, hallar su valor:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -2, \quad \int_{0}^{4} \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{4}{3}.$$