Ejercicios resueltos de derivación. 2a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

a) Desarrollar la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}$ en desarrollo de MacLaurin de grado n dando el error cometido.

b) Dar una estimación de $\frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con 4 valores exactos.

Solución

Apartado a).

Fórmula de Taylor

Solución

Apartado a).

En los apuntes vimos que el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = (x+C)^{\alpha}$ alrededor de $x = x_0$ era:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \cdot (x_0 + C)^{\alpha - k} \cdot (x - x_0)^k,$$

donde $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{4}-k+1\right)}{k!} \\
&= \frac{-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\cdots\left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k(4k-3)!!!!}{4^k\cdot k!},
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C=1$, $\alpha=-\frac{1}{4}$ y $x_0=0$:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{-\frac{1}{4}}{k}\cdot x^k=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{-\frac{1}{4}}{k}\cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{4}-k+1\right)}{k!}\\ &= \frac{-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\cdots\left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!}=\frac{(-1)^k(4k-3)!!!!}{4^k\cdot k!},\end{aligned}$$

donde $i!!!!=i\cdot(i-4)\cdot(i-8)\cdots 1$.

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

donde $i!!!! = i \cdot (i-4) \cdot (i-8) \cdots 1$.
Ejemplos: $5!!!! = 5 \cdot 1 = 5$, $8!!!! = 8 \cdot 4 = 32$.

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$R_n(x - x_0) \quad = \quad \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c + C)^{\alpha - n - 1} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} R_n(x-x_0) &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c+C)^{\alpha-n-1} \cdot (x-x_0)^{n+1} \\ &= \binom{-\frac{1}{4}}{n+1} \cdot (1+c)^{-\frac{1}{4}-n-1} \cdot x^{n+1} \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} R_n(x-x_0) &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c+C)^{\alpha-n-1} \cdot (x-x_0)^{n+1} \\ &= \binom{-\frac{1}{4}}{n+1} \cdot (1+c)^{-\frac{1}{4}-n-1} \cdot x^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)!!!!}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot (1+c)^{-n-\frac{5}{4}} \cdot x^{n+1}, \end{aligned}$$

donde $c \in < 0, x >$.

Solución (cont.)

Apartado b).

Solución (cont.)

Apartado b).

En el apartado b) nos piden hallar $f(0.1) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con un error menor o igual que 10^{-4}.

Solución (cont.)

Apartado b).
En el apartado b) nos piden hallar $f(0.1)=\frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con un error menor o igual que 10^{-4}.
Primero tenemos que hallar el grado del polinomio n tal que $|f(0.1)-P_n(0.1)|\leq 10^{-4}$.

Solución (cont.)

Apartado b).
En el apartado b) nos piden hallar $f(0.1)=\frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con un error menor o igual que 10^{-4}.
Primero tenemos que hallar el grado del polinomio n tal que $|f(0.1)-P_n(0.1)|\leq 10^{-4}$.
Es decir:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)!!!!}{4^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot(1+c)^{-n-\frac{5}{4}}\cdot 0.1^{n+1}\right|\leq 10^{-4},$$

con $c\in(0,0.1)$.

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

$$(1+c)^{-n-\frac{5}{4}} = \frac{1}{(1+c)^{n+\frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para $c = 0$.

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

$$(1+c)^{-n-\frac{5}{4}} = \frac{1}{(1+c)^{n+\frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para $c = 0$. Así el error puede acotarse por:

$$\left|\frac{(4n+1)!!!!\cdot 0.1^{n+1}}{4^{n+1}\cdot (n+1)!}\right| = \left|\frac{(4n+1)!!!!}{40^{n+1}\cdot (n+1)!}\right| \leq 10^{-4}.$$

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

$$(1+c)^{-n-\frac{5}{4}} = \frac{1}{(1+c)^{n+\frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para $c=0$. Así el error puede acotarse por:

$$\left|\frac{(4n+1)!!!!\cdot 0.1^{n+1}}{4^{n+1}\cdot (n+1)!}\right| = \left|\frac{(4n+1)!!!!}{40^{n+1}\cdot (n+1)!}\right| \leq 10^{-4}.$$

Hagamos un programa en python que nos halle el n:

```python
from math import *
def fourthfactorial(n):
  if n in (1, 2, 3, 4):
    return n
  else:
    if n == 0:
      return 1
    else:
      return n * fourthfactorial(n-4)
```

Fórmula de Taylor

```
def calculo_n(error):
  x=0.1
  m=2
  cota_error=(fourthfactorial(4*m+1)/(4.**(m+1)*
              factorial(m+1)))*(x**(m+1))
  while(cota_error >= error):
    m=m+1
    cota_error=(fourthfactorial(4*m+1)/(4.**(m+1)*
                factorial(m+1)))*(x**(m+1))
  return(m)

calculo_n(0.0001)
3
```

Solución (cont.)

El valor de n será 3 y por tanto $P_3(0.1)$ valdrá:

```
def termino_k(x,k):
  y=((-1)**k*fourthfactorial(4*k-3)/
              (4.**k*factorial(k)))*x**k
  return(y)
```

Fórmula de Taylor

```
def Pn(x,n):
  p=1
  k=1
  while k <= n:
    p=p+termino_k(x,k)
    k=k+1
  return(p)

Pn(0.1,3)
0.9764453125
```

Ejercicio 2

Desarrollar en polinomios de Taylor las funciones siguientes alrededor del punto x_0 hasta la n indicada y realizar un gráfico de la función y los polinomios de Taylor obtenidos:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ hasta $n = 4$.

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x_0 = 0$ hasta $n = 3$.

c) $f(x) = \ln(1 + 2x)$, $x_0 = 1$ hasta $n = 3$.