Ejercicios resueltos de integración. 2a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

a) Calcular el área entre las curvas $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = -3x^2 + 10$, para $-1 \leq x \leq 1$.

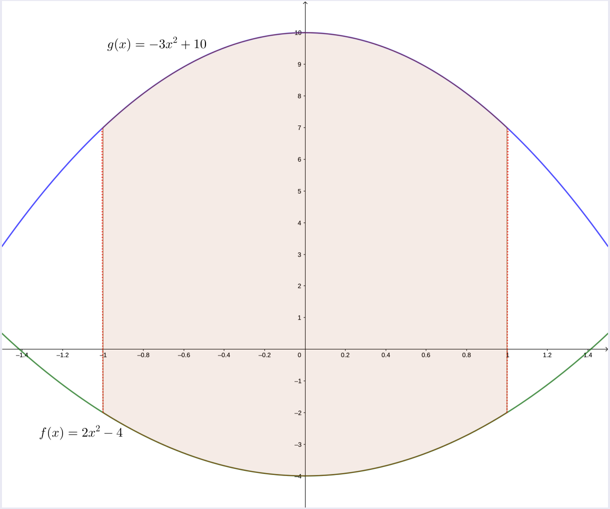
b) Calcular el área encerrada por las curvas $f(x) = x^4$ y $g(x) = -2x^2 + 3$.

Solución

Apartado a). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g para x entre -1 y 1:

Solución

Apartado a). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g para x entre -1 y 1:



Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx \quad =$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx = \int_{-1}^{1}(-3x^2+10-2x^2+4)\,dx$$

$$=$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-3x^2+10-2x^2+4)\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}(-5x^2+14)\,dx\end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-3x^2+10-2x^2+4)\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}(-5x^2+14)\,dx = \left[-5\frac{x^3}{3}+14x\right]_{-1}^{1}\\ &=\end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx &= \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-5x^2 + 14)\, dx = \left[-5\frac{x^3}{3} + 14x \right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{5}{3} + 14 - \left(-\frac{5}{3} - 14 \right) \\
&=
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

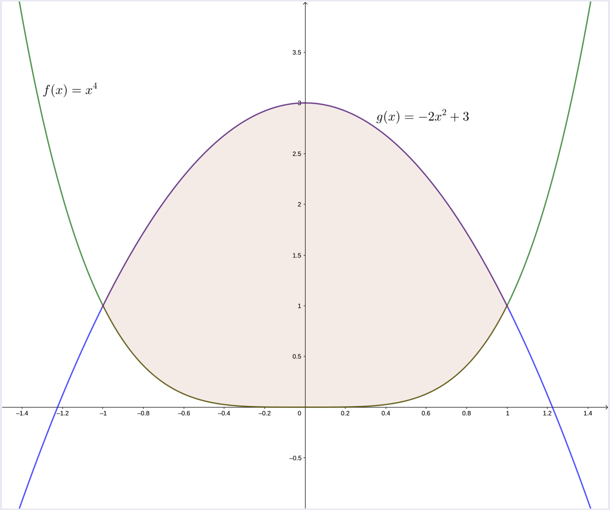
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-3x^2+10-2x^2+4)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}(-5x^2+14)\,dx = \left[-5\frac{x^3}{3}+14x\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{5}{3}+14-\left(-\frac{5}{3}-14\right) \\
&= -\frac{10}{3}+28=\frac{74}{3}\approx 24.6667.
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g:

Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g:



Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) = g(x),$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) \;=\; g(x), \;\Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3,$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) = g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0,$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \;\Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \;\Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\ x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \ \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \ \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\ x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \ \Rightarrow x^4 = -2x^2+3, \ \Rightarrow x^4+2x^2-3=0, \\ x^2 &= \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = 1, -3. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \ \Rightarrow x^4 = -2x^2+3, \ \Rightarrow x^4+2x^2-3=0, \\ x^2 &= \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = 1, -3. \end{aligned}$$

La única solución admisible es $x^2 = 1$,

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \ \Rightarrow x^4 = -2x^2+3, \ \Rightarrow x^4+2x^2-3=0, \\ x^2 &= \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = 1, -3. \end{aligned}$$

La única solución admisible es $x^2=1$, de donde $x=\pm 1$.

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \ \Rightarrow x^4 = -2x^2+3, \ \Rightarrow x^4+2x^2-3=0, \\ x^2 &= \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = 1, -3. \end{aligned}$$

La única solución admisible es $x^2 = 1$, de donde $x = \pm 1$.
Los puntos de corte serán, pues $(-1, 1)$ y $(1, 1)$, tal como se observa en la gráfica de las funciones f y g.

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx \quad =$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-2x^2+3-x^4)\,dx \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx &= \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 3 - x^4)\, dx \\
&= \left[-2\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\
&=
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx &= \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 3 - x^4)\, dx \\
&= \left[-2\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2}{3} + 3 - \frac{1}{5} - \left(\frac{2}{3} - 3 + \frac{1}{5} \right) \\
&=
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-2x^2+3-x^4)\,dx \\
&= \left[-2\frac{x^3}{3}+3x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2}{3}+3-\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{3}-3+\frac{1}{5}\right) \\
&= -\frac{4}{3}+6-\frac{2}{5}=\frac{64}{15}\approx 4.2667.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2

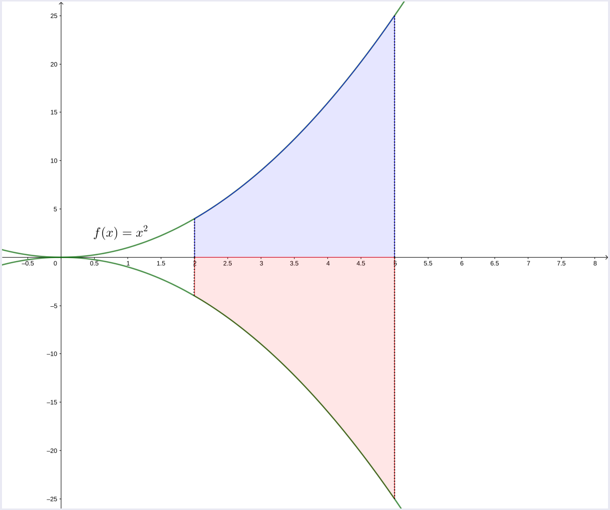
a) Calcular el volumen de revolución al girar la curva $y = x^2$ alrededor del eje X para $2 \leq x \leq 5$.
b) Calcular el volumen de revolución al girar la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje Y para $1 \leq x \leq 9$.
c) Calcular el volumen de revolución al girar la curva $y = x + 3$ alrededor del eje $y = 5$ para $0 \leq x \leq 5$.

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:



Solución (cont.)

El volumen pedido será:

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 \, dx$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2\, dx = \pi \int_2^5 x^4\, dx =$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2\, dx = \pi \int_2^5 x^4\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^5 =$$

Volúmenes de revolución

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2\, dx = \pi \int_2^5 x^4\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^5 = \frac{\pi}{5}\left(5^5 - 2^5\right)$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

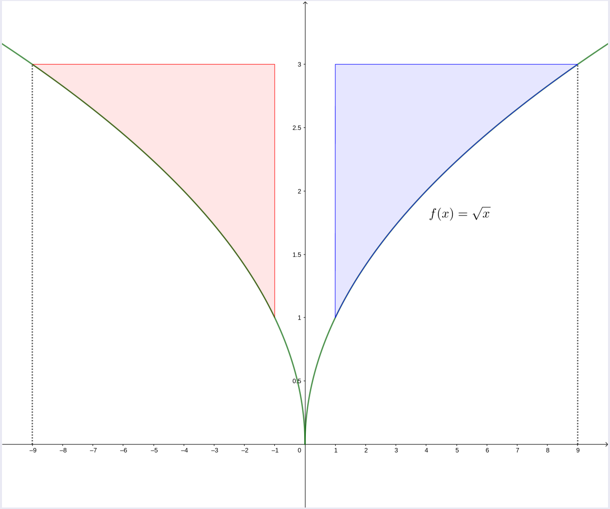
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^5 (x^2)^2\, dx = \pi \int_2^5 x^4\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^5 = \frac{\pi}{5}\left(5^5 - 2^5\right) \\ &= \frac{3093\pi}{5} \approx 1943.3892. \end{aligned}$$

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:



Solución (cont.)

El volumen pedido será:

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x}\, dx$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x}\, dx = 2\pi \int_1^9 x^{\frac{3}{2}}\, dx =$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x}\, dx = 2\pi \int_1^9 x^{\frac{3}{2}}\, dx = 2\pi \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^9 \\
&=
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x}\, dx = 2\pi \int_1^9 x^{\frac{3}{2}}\, dx = 2\pi \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^9 \\ &= \frac{4\pi}{5} \left(9^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{968\pi}{5} \approx 608.2123. \end{aligned}$$