Problemas de derivabilidad de funciones. Crecimiento, decrecimiento y regla de l'Hôpital

1. Dar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$,
   b) $h(x) = x^3 - 3x - 4$,
   c) $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$.

Solución

a) Para hallar los extremos de $f(x) = x^2 - 3x + 5$, primero tenemos que derivar e igualar la derivada a cero:

$$f'(x) = 2x - 3 = 0, \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		∞
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Para comprobar los signos de la tabla anterior, hemos de hacer lo siguiente:

- Signo de y' en el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 0$, el valor de $f'(0)$ vale $f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$.
- Signo de y' en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 2$, el valor de $f'(2)$ vale $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$.
  La función $f(x)$ crece en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, decrece en el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y tiene un mínimo en el punto $\left(\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 5\right) = (1.5, 2.75)$.

b) Hagamos lo mismo para la función $h(x) = x^3 - 3x - 4$:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$

Tabla:

x	$-\infty$		-1		1		∞
h'		$+$		$-$		$+$	
h		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Para comprobar los signos de la tabla anterior, hemos de hacer lo siguiente:

- Signo de y' en el intervalo $(-\infty, -1)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = -2$, el valor de $h'(-2)$ vale $h'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0$.
- Signo de y' en el intervalo $(-1, 1)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 0$, el valor de $h'(0)$ vale $h'(0) = 3 \cdot (0)^2 - 3 = -3 < 0$.
- Signo de y' en el intervalo $(1, \infty)$. Consideremos un valor en dicho intervalo, por ejemplo $x = 2$, el valor de $h'(2)$ vale $h'(2) = 3 \cdot (2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función $h(x)$ crece en la región $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, decrece en el intervalo $(-1, 1)$, tiene un máximo en $(-1, -2)$ y un mínimo en $(1, -6)$.

c) Función $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$:

$$k'(x) = 4x^3 + 4x = 0, \Rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0, \Rightarrow x = 0.$$

Tabla:

x	$-\infty$		0		∞
k'		$-$		$+$	
k		$\searrow$		$\nearrow$	

La función $k(x)$ crece en el intervalo $(0, \infty)$, decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y tiene un mínimo en el punto $(0, -4)$.

2. Dar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$,
   b) $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}$ para $x > 0$,
   c) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución

a) Para hallar los extremos relativos de la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ hay que derivar e igualar a cero la función derivada:
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$
Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
f'		$+$		$-$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

La función $f(x)$ crece en la región $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, decrece en la región $(-1, 0) \cup (0, 1)$, tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en el punto $(1, 2)$.

b) Estudio para la función $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}$ para $x > 0$. La derivada y los ceros de la misma son:
$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x}, \Rightarrow x + 1 = 4x, \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$
Como hemos elevado al cuadrado, tenemos que comprobar que la solución hallada es efectivamente una solución de $h'(x) = 0$:
$$h'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$
Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	0		$\frac{1}{3}$		∞
h'		$+$		$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$	

La función $h(x)$ crece en el intervalo $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, decrece en el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ y tiene un máximo en el punto $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{1}{3}} - 2\sqrt{\frac{1}{3}+1}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\sqrt{3}\right)$.

c) Estudio para la función $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$. La derivada y los ceros de la misma son:
$$g'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$
Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	$-\infty$		-1		1		∞
g'		$-$		$+$		$-$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

La función $g(x)$ crece en el intervalo $(-1, 1)$, decrece en la región $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, tiene un mínimo en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ y un máximo en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

3. Usando la regla de L'Hôpital calcular los límites siguientes:

   a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x}$,

   b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$,

   c) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$, con n valor entero, $n \geq 1$,

   d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$.

Solución

a) El valor del límite será:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

b) El valor del límite será:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\sin x\cos x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-4(-\cos x\sin x - \sin x\cos x)}{24x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{8\cos x\sin x}{24x} = \lim_{x\to 0} \frac{-8(\sin^2 x - \cos^2 x)}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

c) El valor del límite será:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n\cdot x^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

d) El valor del límite será:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$