Problemas de integración. Teorema fundamental del cálculo.

1. Hallar las integrales definidas siguientes:
   a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx.$
   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}\, dx.$
   c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$
   d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx.$

Solución

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \approx 0.6427.$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{(x^3)^2+4}}\, dx.$$

Si hacemos el cambio de variable $t = x^3$, nos queda $dt = 3x^2 dx$ y la nueva integral en la variable t vale: (si $x = 0$, $t = 0$ y si $x = 1$, $t = 1$)

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{3}[\ln(t+\sqrt{t^2+4})]_0^1 = \frac{1}{3}(\ln(1+\sqrt{5}) - \ln(0+2)) = \frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.1604.$$

c) Hacemos el cambio de variable $t = e^x$, $dt = e^x dx = t dx$, $dx = \frac{dt}{t}$, si $x = 0$, $t = 1$ y si $x = 1$, $t = e$:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_1^e \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan t]_1^e = \arctan e - \arctan 1 = \arctan e - \frac{\pi}{4} \approx 0.4329.$$

d) Hacemos el cambio de variable $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}\, dx$, para $x = 1$, $t = 0$ y para $x = e$, $t = \ln e = 1$:

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx = \int_0^1 \sin t\, dt = [-\cos t]_0^1 = -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1 \approx 0.4597.$$

2. Resolver las integrales siguientes haciendo un cambio de variable adecuado:

   a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$

   b) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3}dx.$

3. Resolver las integrales siguientes usando la técnica de integración por partes:

   a) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^{-x}\, dx.$

   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax} \sin(bx)\, dx$, con $a > 0$.

   c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^n \cdot \ln x\, dx$, con $n \in \mathbb{N}$.

   d) $\displaystyle\int_0^2 x^3 \cdot \arctan x\, dx.$

4. Hallar los extremos relativos de la función siguiente:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt, \ x > 0.$$

5. Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

   a) $f_1(x) = \displaystyle\int_1^{\ln(x^2+1)} e^t \, dt.$

   b) $f_2(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^4} \, dt.$

   c) $f_3(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 \, dt.$