Suma de series

1. Calcula la suma de la serie siguiente:
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Solución

Se trata de una serie geométrica de razón $1-\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.2929<1$. Usando la expresión $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n=\frac{r^{n_0}}{1-r}$, tenemos que:
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\approx 0.1213.$$

2. Calcula la suma de la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)},$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$.

Solución

Primeramente descomponemos la fracción $\frac{1}{(n+a)(n+a+1)}$ como:

$$\frac{1}{(n+a)(n+a+1)} = \frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+a+1}.$$

Entonces se trataría de una serie telescópica de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1}$, con $b_n = \frac{1}{a+n}$. Su suma será:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)} = b_1 = \frac{1}{a+1}.$$

3. Calcula la suma de la serie siguiente:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n-1)}.$$

Solución

Descomponemos $\frac{1}{(n+2)(n-1)}$ de la forma:

$$\frac{1}{(n+2)(n-1)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n-1} = \frac{A(n-1)+B(n+2)}{(n+2)(n-1)}.$$

Para hallar los coeficientes A y B imponemos que $A(n-1)+B(n+2) = 1$, de donde $A = -\frac{1}{3}$ y $B = \frac{1}{3}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n-1)} &= \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right).\end{aligned}$$

Nos queda la suma de tres series telescópicas multiplicadas por una constante. Su valor será:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{36}.$$

1. Calcula la suma de la serie siguiente:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-2}{3^n}.$$
2. Calcula la suma de la serie siguiente:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (an+b)r^n,$$
donde $a, b, r \in \mathbb{R}$ y $|r| < 1$.