# Ejercicios resueltos de derivación. 2a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

### Ejercicio 1

a) Desarrollar la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}$ en desarrollo de MacLaurin de grado $n$ dando el error cometido.

b) Dar una estimación de $\frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con 4 valores exactos.

**Solución**

Apartado a).

# Fórmula de Taylor

## Solución

Apartado a).

En los apuntes vimos que el desarrollo de Taylor de la función $f(x)=(x+C)^{\alpha}$ alrededor de $x=x_0$ era:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\cdot(x_0+C)^{\alpha-k}\cdot(x-x_0)^k,$$

donde $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

## Solución

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

## Solución

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

### Solución

En nuestro caso, $C=1$, $\alpha=-\frac{1}{4}$ y $x_0=0$:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{-\frac{1}{4}}{k}\cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{4}-k+1\right)}{k!}\\ &= \frac{-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\cdots\left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!}=\frac{(-1)^k(4k-3)!!!!}{4^k\cdot k!},\end{aligned}$$

donde $i!!!!=i\cdot(i-4)\cdot(i-8)\cdots 1$.

# Fórmula de Taylor

## Solución

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

donde $i!!!! = i \cdot (i-4) \cdot (i-8) \cdots 1$.
Ejemplos: $5!!!! = 5 \cdot 1 = 5$, $8!!!! = 8 \cdot 4 = 32$.

# Fórmula de Taylor

## Solución

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

### Solución

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$R_n(x-x_0) = \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c+C)^{\alpha-n-1} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

## Solución

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} R_n(x-x_0) &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c+C)^{\alpha-n-1} \cdot (x-x_0)^{n+1} \\ &= \binom{-\frac{1}{4}}{n+1} \cdot (1+c)^{-\frac{1}{4}-n-1} \cdot x^{n+1} \end{aligned}$$

### Solución

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} R_n(x-x_0) &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c+C)^{\alpha-n-1} \cdot (x-x_0)^{n+1} \\ &= \binom{-\frac{1}{4}}{n+1} \cdot (1+c)^{-\frac{1}{4}-n-1} \cdot x^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)!!!!}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot (1+c)^{-n-\frac{5}{4}} \cdot x^{n+1}, \end{aligned}$$

donde $c \in < 0, x >$.