

# Problemas de optimización

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

# Problemas de optimización. Una aplicación del cálculo de extremos relativos.

# Introducción

- El cálculo de **extremos relativos** de funciones derivables puede aplicarse a problemas de **optimización** de la **vida real**.

# Introducción

- El cálculo de **extremos relativos** de funciones derivables puede aplicarse a problemas de **optimización** de la **vida real**.
- Concretamente, si tenemos un problema del que hay que calcular un **máximo** o un **mínimo** y somos capaces de **modelizar** el problema definiendo una función de la que hay que calcular algún **extremo relativo**, podemos resolver dicho problema aplicando la “maquinaria” vista de cálculo de extremos relativos para funciones derivables.

# Introducción

- El cálculo de **extremos relativos** de funciones derivables puede aplicarse a problemas de **optimización** de la **vida real**.
- Concretamente, si tenemos un problema del que hay que calcular un **máximo** o un **mínimo** y somos capaces de **modelizar** el problema definiendo una función de la que hay que calcular algún **extremo relativo**, podemos resolver dicho problema aplicando la “maquinaria” vista de cálculo de extremos relativos para funciones derivables.
- En esta presentación veremos una serie de ejemplos donde resolveremos unos problemas de este tipo.

## Ejemplo: maximización de ganancias

### Planteamiento

Los **costes de fabricación**,  $C(x)$  en euros, de cierta variedad de salchichas, dependen de la cantidad elaborada ( $x$  en kilos) de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C(x) = 10 + 2x.$$

El fabricante estima que el **precio de venta** en euros de cada kilogramo de salchichas viene dado por:

$$P(x) = 20 - \frac{6x^2}{800}.$$

Se pide obtener la función de **ganancias** y la cantidad de salchichas que interesa producir para maximizar dichas ganancias. En este caso, calcular el **precio de venta** y la **ganancia** que se obtiene.

## Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- La función de **ganancias** será la diferencia entre el dinero obtenido de las **ventas** ( $x \cdot P(x)$ ) y los costes de fabricación:

$$\begin{aligned} G(x) &= x \cdot P(x) - C(x) = x \cdot \left(20 - \frac{6x^2}{800}\right) - (10 + 2x) \\ &= 18x - 10 - \frac{6x^3}{800} = 18x - 10 - \frac{3x^3}{400}. \end{aligned}$$

## Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- La función de **ganancias** será la diferencia entre el dinero obtenido de las **ventas** ( $x \cdot P(x)$ ) y los costes de fabricación:

$$\begin{aligned} G(x) &= x \cdot P(x) - C(x) = x \cdot \left(20 - \frac{6x^2}{800}\right) - (10 + 2x) \\ &= 18x - 10 - \frac{6x^3}{800} = 18x - 10 - \frac{3x^3}{400}. \end{aligned}$$

- Para hallar la cantidad de salchichas  $x$  que maximizan las ganancias  $G(x)$  tenemos que derivar dicha función e igualarla a cero:

$$G'(x) = 18 - \frac{9x^2}{400} = 0, \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{18 \cdot 400}{9}} = \pm \sqrt{800}.$$



## Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- Como  $x$  debe ser positivo, tendremos que dicho valor será  $x = \sqrt{800} \approx 28.2843$  kilos.

## Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- Como  $x$  debe ser positivo, tendremos que dicho valor será  $x = \sqrt{800} \approx 28.2843$  kilos.
- Veamos que dicho valor es máximo:

$$G''(x) = -\frac{18x}{400} = -\frac{9x}{200}, \quad G''(\sqrt{800}) = -\frac{9 \cdot \sqrt{800}}{200} < 0.$$

## Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- Como  $x$  debe ser positivo, tendremos que dicho valor será  $x = \sqrt{800} \approx 28.2843$  kilos.
- Veamos que dicho valor es máximo:

$$G''(x) = -\frac{18x}{400} = -\frac{9x}{200}, \quad G''(\sqrt{800}) = -\frac{9 \cdot \sqrt{800}}{200} < 0.$$

- El precio de venta para dicho valor de  $x = \sqrt{800}$  será:

$$P(\sqrt{800}) = 20 - \frac{6 \cdot 800}{800} = 20 - 6 = 14 \text{ euros.}$$

## Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- Como  $x$  debe ser positivo, tendremos que dicho valor será  $x = \sqrt{800} \approx 28.2843$  kilos.
- Veamos que dicho valor es máximo:

$$G''(x) = -\frac{18x}{400} = -\frac{9x}{200}, \quad G''(\sqrt{800}) = -\frac{9 \cdot \sqrt{800}}{200} < 0.$$

- El precio de venta para dicho valor de  $x = \sqrt{800}$  será:

$$P(\sqrt{800}) = 20 - \frac{6 \cdot 800}{800} = 20 - 6 = 14 \text{ euros.}$$

- La ganancia máxima será:

$$G(\sqrt{800}) = 18 \cdot \sqrt{800} - 10 - \frac{3 \cdot 800 \cdot \sqrt{800}}{400} = 329.4113 \text{ euros.}$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo

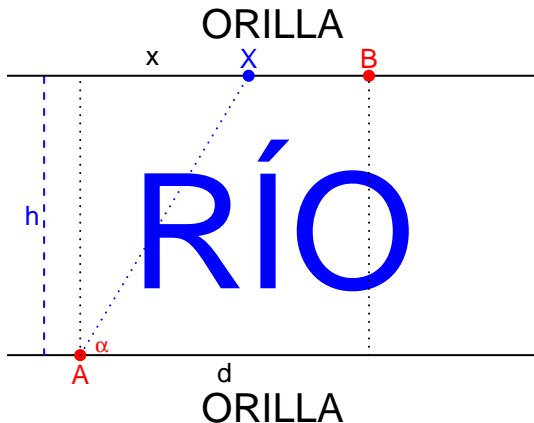
### Enunciado

Un excursionista tiene que atravesar un río yendo desde el punto  $A$  al punto  $B$ . Dichos puntos están separados horizontalmente por una **distancia  $d$**  y el río tiene una **anchura  $h$** .

Nos dicen que la **velocidad de movimiento** por la orilla es  $k$  veces mayor que la **velocidad de movimiento** por el río.

Nos piden bajo qué ángulo  $\alpha$  tiene el excursionista que atravesar el río en el menor **tiempo** posible.

## Ejemplo 2: minimización del tiempo



## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Sea  $X$  el punto de la otra orilla donde está el punto  $B$  donde el excursionista llega.

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Sea  $X$  el punto de la otra orilla donde está el punto  $B$  donde el excursionista llega.
- Sea  $x$  la distancia horizontal entre el punto  $A$  y el punto  $X$ .



## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Sea  $X$  el punto de la otra orilla donde está el punto  $B$  donde el excursionista llega.
- Sea  $x$  la **distancia horizontal entre el punto  $A$  y el punto  $X$** .
- Podemos suponer que  $0 \leq x \leq d$  ya que

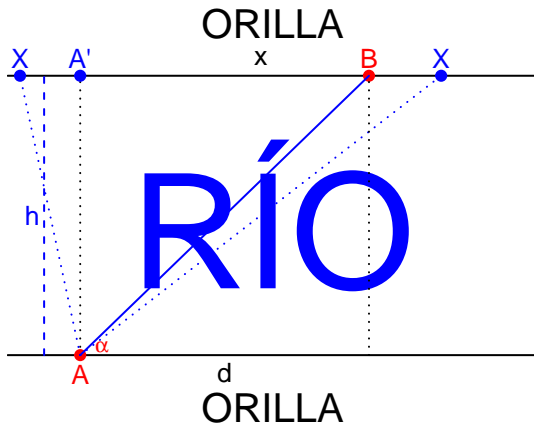
## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Sea  $X$  el punto de la otra orilla donde está el punto  $B$  donde el excursionista llega.
- Sea  $x$  la **distancia horizontal entre el punto  $A$  y el punto  $X$** .
- Podemos suponer que  $0 \leq x \leq d$  ya que
  - si  $x > d$  o el punto  $X$  está a la derecha del punto  $B$ , el tiempo que tardará el excursionista de ir desde  $A$  hasta  $X$  más el tiempo de ir desde  $X$  a  $B$  seguro que superará el tiempo de ir del punto  $A$  al punto  $B$  por el río ya que la distancia  $AX$  es mayor que  $AB$ .

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Sea  $X$  el punto de la otra orilla donde está el punto  $B$  donde el excursionista llega.
- Sea  $x$  la **distancia horizontal entre el punto  $A$  y el punto  $X$** .
- Podemos suponer que  $0 \leq x \leq d$  ya que
  - si  $x > d$  o el punto  $X$  está a la derecha del punto  $B$ , el tiempo que tardará el excursionista de ir desde  $A$  hasta  $X$  más el tiempo de ir desde  $X$  a  $B$  seguro que superará el tiempo de ir del punto  $A$  al punto  $B$  por el río ya que la distancia  $AX$  es mayor que  $AB$ .
  - si  $x < 0$  o el punto  $X$  está a la izquierda del punto  $A'$ , el tiempo que tardará el excursionista de ir desde  $A$  hasta  $X$  más el tiempo de ir desde  $X$  a  $B$  seguro que superará el tiempo de ir desde  $A$  hasta  $A'$  y desde  $A'$  hasta  $B$ .

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución



## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- La distancia que habrá recorrido el excursionista por la orilla para llegar al punto  $B$  será  $d - x$  y la distancia que habrá recorrido por el río será  $\sqrt{h^2 + x^2}$  usando el Teorema de Pitágoras.

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- La distancia que habrá recorrido el excursionista por la orilla para llegar al punto  $B$  será  $d - x$  y la distancia que habrá recorrido por el río será  $\sqrt{h^2 + x^2}$  usando el Teorema de Pitágoras.
- Sea  $v_o$  la velocidad de movimiento por la orilla y  $v_r$ , la velocidad de movimiento por el río. Nos dicen que  $v_o = k \cdot v_r$ .

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- La distancia que habrá recorrido el excursionista por la orilla para llegar al punto  $B$  será  $d - x$  y la distancia que habrá recorrido por el río será  $\sqrt{h^2 + x^2}$  usando el Teorema de Pitágoras.
- Sea  $v_o$  la velocidad de movimiento por la orilla y  $v_r$ , la velocidad de movimiento por el río. Nos dicen que  $v_o = k \cdot v_r$ .
- El tiempo que tarda en ir por la orilla será  $t_o = \frac{d-x}{v_o}$  y el tiempo que tarda en ir por el río,  $t_r = \frac{\sqrt{h^2+x^2}}{v_r}$ .

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El **tiempo total** será:

$$t = t_o + t_r = \frac{d - x}{v_o} + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_r} = \frac{d - x}{k \cdot v_r} + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_r},$$

donde hemos usado que  $v_o = k \cdot v_r$ .



## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El **tiempo total** será:

$$t = t_o + t_r = \frac{d - x}{v_o} + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_r} = \frac{d - x}{k \cdot v_r} + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_r},$$

donde hemos usado que  $v_o = k \cdot v_r$ .

- Hemos de **minimizar** la función anterior. Si derivamos e igualamos a cero, obtenemos:

$$t' = -\frac{1}{k \cdot v_r} + \frac{1}{v_r} \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = 0.$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} &= \frac{1}{k}, \Rightarrow \frac{x^2}{h^2+x^2} = \frac{1}{k^2}, \Rightarrow x^2(k^2-1) = h^2, \Rightarrow \\ x &= \pm \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}.\end{aligned}$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} &= \frac{1}{k}, \Rightarrow \frac{x^2}{h^2+x^2} = \frac{1}{k^2}, \Rightarrow x^2(k^2-1) = h^2, \Rightarrow \\ x &= \pm \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}.\end{aligned}$$

- El valor de  $x$  es positivo:  $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$ .

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Veamos que se trata de un **mínimo relativo**:

$$t'' = \frac{1}{v_r} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}}{h^2 + x^2} = \frac{1}{v_r} \cdot \frac{h^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Veamos que se trata de un **mínimo relativo**:

$$t'' = \frac{1}{v_r} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}}{h^2 + x^2} = \frac{1}{v_r} \cdot \frac{h^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

- Para la  $x$  hallada, el tiempo mínimo será:

$$t = \frac{d - \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}}{k \cdot v_r} + \frac{\sqrt{h^2 + \frac{h^2}{k^2 - 1}}}{v_r} = \frac{d + h\sqrt{k^2 - 1}}{kv_r}.$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Hallemos el tiempo que tarda el excursionista en los extremos del intervalo  $[0, d]$ .

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Hallemos el tiempo que tarda el excursionista en los extremos del intervalo  $[0, d]$ .
  - Para  $x = 0$ , el tiempo que tarda el excursionista es:

$$t(x = 0) = \frac{d}{k \cdot v_r} + \frac{h}{v_r} = \frac{d + hk}{kv_r}.$$

Fijémonos que dicho tiempo siempre será mayor que el tiempo tardado usando la  $x$  anterior,  $x = \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}$  ya que:

$$\frac{d + hk}{kv_r} > \frac{d + h\sqrt{k^2 - 1}}{kv_r}, \Leftrightarrow k > \sqrt{k^2 - 1}, \Leftrightarrow k^2 > k^2 - 1.$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Para  $x = d$ , el tiempo que tarda el excursionista es:

$$t(x = d) = \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{v_r}.$$

En este caso, también el tiempo será mayor que el tiempo tardado usando la  $x$  anterior,  $x = \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}$  ya que:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{v_r} &> \frac{d + h\sqrt{k^2 - 1}}{kv_r}, \Leftrightarrow \\ k\sqrt{h^2 + d^2} &> d + h\sqrt{k^2 - 1}, \Leftrightarrow \\ k^2(h^2 + d^2) &> d^2 + h^2(k^2 - 1) + 2dh\sqrt{k^2 - 1}, \Leftrightarrow \\ (k^2 - 1)d^2 + h^2 &> 2dh\sqrt{k^2 - 1}, \Leftrightarrow \\ (\sqrt{k^2 - 1}d - h)^2 &> 0. \end{aligned}$$



## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Para hallar el tiempo mínimo, consideremos dos casos:

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Para hallar el tiempo mínimo, consideremos dos casos:

- si  $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} < d$ , el tiempo mínimo se alcanza para

$$x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}:$$

$$t_{\min} = \frac{d + h\sqrt{k^2-1}}{kv_r}.$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Para hallar el tiempo mínimo, consideremos dos casos:

- si  $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} < d$ , el tiempo mínimo se alcanza para

$$x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}:$$

$$t_{\min} = \frac{d + h\sqrt{k^2-1}}{kv_r}.$$

- si  $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} \geq d$ , significa que la función  $t$  no tiene ningún extremo relativo en el intervalo  $[0, d]$  ya que el único extremo hallado  $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$  se encuentra fuera de dicho intervalo. Por tanto, la función será creciente o decreciente en el intervalo  $[0, d]$ . Recordemos que  $t'(x) = -\frac{1}{k \cdot v_r} + \frac{1}{v_r} \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$ . Como  $t'(x=0) = -\frac{1}{k \cdot v_r} < 0$ , la función será decreciente y el mínimo se alcanzará para  $x = d$ :

$$t_{\min} = \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{v_r}.$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo  $\alpha$  con que atraviesa el río tiene como tangente será:

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo  $\alpha$  con que atraviesa el río tiene como tangente será:
  - si  $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} < d$ , el ángulo  $\alpha$  tiene como tangente:

$$\tan \alpha = \frac{h}{x} = \frac{h}{\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}} = \sqrt{k^2-1}, \Rightarrow \alpha = \arctan(\sqrt{k^2-1}).$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo  $\alpha$  con que atraviesa el río tiene como tangente será:
  - si  $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} < d$ , el ángulo  $\alpha$  tiene como tangente:

$$\tan \alpha = \frac{h}{x} = \frac{h}{\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}} = \sqrt{k^2-1}, \Rightarrow \alpha = \arctan(k^2-1).$$

- si  $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} \geq d$ , el ángulo  $\alpha$  tiene como tangente:

$$\tan \alpha = \frac{h}{d}, \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{h}{d}\right).$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Por ejemplo, supongamos que la velocidad de movimiento por la orilla es el doble de la velocidad de movimiento por el río, es decir,  $k = 2$ , con una anchura de  $h = 900$  m. y con una distancia de  $d = 500$  m. Hallemos el tiempo mínimo para llegar de  $A$  a  $B$ .

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Por ejemplo, supongamos que la velocidad de movimiento por la orilla es el doble de la velocidad de movimiento por el río, es decir,  $k = 2$ , con una anchura de  $h = 900$  m. y con una distancia de  $d = 500$  m. Hallemos el tiempo mínimo para llegar de  $A$  a  $B$ .
- En este caso, el valor de  $\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$  vale  $\frac{900}{\sqrt{3}} \approx 519.6152 > d = 500$ . Estamos en el segundo caso.



## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Por ejemplo, supongamos que la velocidad de movimiento por la orilla es el doble de la velocidad de movimiento por el río, es decir,  $k = 2$ , con una anchura de  $h = 900$  m. y con una distancia de  $d = 500$  m. Hallemos el tiempo mínimo para llegar de  $A$  a  $B$ .
- En este caso, el valor de  $\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$  vale  $\frac{900}{\sqrt{3}} \approx 519.6152 > d = 500$ . Estamos en el segundo caso.
- El tiempo mínimo será, pues:

$$t_{\min} = \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{v_r} = \frac{\sqrt{900^2 + 500^2}}{v_r} = \frac{1029.563}{v_r},$$

siendo  $v_r$  la velocidad de movimiento por el río.

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo  $\alpha$  será en este caso,

$$\alpha = \arctan \frac{900}{500} \approx 1.0637 \text{ radianes} \approx 60.9454 \text{ grados.}$$

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo  $\alpha$  será en este caso,

$$\alpha = \arctan \frac{900}{500} \approx 1.0637 \text{ radianes} \approx 60.9454 \text{ grados.}$$

- Supongamos ahora que  $k = 2$ ,  $h = 500$  y  $d = 900$ . En este caso, el valor de  $\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$  vale  $\frac{500}{\sqrt{3}} \approx 288.6751 \leq d = 900$ . Estamos en el primer caso.

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo  $\alpha$  será en este caso,

$$\alpha = \arctan \frac{900}{500} \approx 1.0637 \text{ radianes} \approx 60.9454 \text{ grados.}$$

- Supongamos ahora que  $k = 2$ ,  $h = 500$  y  $d = 900$ . En este caso, el valor de  $\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$  vale  $\frac{500}{\sqrt{3}} \approx 288.6751 \leq d = 900$ . Estamos en el primer caso.
- El tiempo mínimo será, pues:

$$t_{\min} = \frac{d + h\sqrt{k^2-1}}{kv_r} = \frac{900 + 500 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot v_r} = \frac{1766.0254}{2 \cdot v_r},$$

siendo  $v_r$  la velocidad de movimiento por el río.

## Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo  $\alpha$  será en este caso,

$$\alpha = \arctan(k^2 - 1) = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes} = 60 \text{ grados.}$$