Problemas de derivabilidad de funciones. Optimización

1. Descomponer un número a en dos sumandos x e y tal que el valor de $x^2 + y^2$ sea mínimo.

Solución

Se tiene que verificar que $x + y = a$ y hay que minimizar la función $x^2 + y^2$.

Escribiendo dicha función sólo en función de x, obtenemos $f(x) = x^2 + (a - x)^2$.

Para hallar el mínimo, tenemos que derivar e igualar a cero:

$$f'(x) = 2x - 2(a - x) = 0, \Rightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Los valores x e y pedidos son: $x = \frac{a}{2}$, $y = a - x = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$.

Comprobemos que es un mínimo:

$$f''(x) = 2 + 2 = 4 > 0.$$

2. Determinar las dimensiones que ha de tener un bote cilíndrico de 2 litros de capacidad para que se construya con la cantidad mínima de material.

Solución

Sea r el radio de la base del bote y h la altura del mismo. La superficie lateral del bote será $2\pi rh$ y la superficie de las dos tapas, $2\pi r^2$. Por tanto, hay que minimizar la función $2\pi rh + 2\pi r^2$.

Sabemos que la capacidad del bote vale $\pi r^2 h = \frac{2}{1000}$ (2 litros son $\frac{2}{1000}$ m^3). Por tanto $h = \frac{2}{1000\pi r^2}$.

La función a minimizar será:

$$f(r) = 2\pi r \frac{2}{1000\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{4}{1000r} + 2\pi r^2.$$

Para hallar el mínimo, tenemos que derivar e igualar a cero:

$$f'(r) = -\frac{4}{1000r^2} + 4\pi r = 0, \ \Rightarrow r^3 = \frac{1}{1000\pi}, \ \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{1000\pi}} \approx 0.068 \text{ m.}$$

El valor de h será: $h = \frac{2}{1000\pi r^2} = \frac{2}{1000\pi\left(\frac{1}{1000\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{1000\pi}} \approx 0.137$ m.

Comprobemos que es un mínimo:

$$f''(r) = \frac{8}{1000r^3} + 4\pi > 0.$$

3. De todos los rectángulos de igual perímetro, ¿cuál es el que tiene área mayor?

Solución

Sean a y b las dimensiones del rectángulo y P el perímetro. Nos dicen que $2a + 2b = P$ o, si se quiere $a + b = \frac{P}{2}$.

La función a maximizar es el área $a \cdot b$. Si la escribimos en función de a, obtenemos:

$$f(a) = a \cdot \left(\frac{P}{2} - a \right).$$

Para hallar el máximo, tenemos que derivar e igualar a cero:

$$f'(a) = \frac{P}{2} - a - a = 0, \Rightarrow a = \frac{P}{4}.$$

Las dimensiones del rectángulo serán: $a = \frac{P}{4}$ y $b = \frac{P}{2} - a = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}$.

Comprobemos que es un máximo:

$$f''(a) = -2 < 0.$$