Problemas de integración. Teorema fundamental del cálculo.

1. Hallar las integrales definidas siguientes:
   a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$.
   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}\, dx$.
   c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.
   d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$.

Solución

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \approx 0.6427.$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{(x^3)^2+4}}\, dx.$$

Si hacemos el cambio de variable $t = x^3$, nos queda $dt = 3x^2dx$ y la nueva integral en la variable t vale: (si $x = 0$, $t = 0$ y si $x = 1$, $t = 1$)

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{3}[\ln(t+\sqrt{t^2+4})]_0^1 = \frac{1}{3}(\ln(1+\sqrt{5}) - \ln(0+2)) = \frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.1604.$$

c) Hacemos el cambio de variable $t = e^x$, $dt = e^x dx = t dx$, $dx = \frac{dt}{t}$, si $x = 0$, $t = 1$ y si $x = 1$, $t = e$:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_1^e \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan t]_1^e = \arctan e - \arctan 1 = \arctan e - \frac{\pi}{4} \approx 0.4329.$$

d) Hacemos el cambio de variable $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}\, dx$, para $x = 1$, $t = 0$ y para $x = e$, $t = \ln e = 1$:

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx = \int_0^1 \sin t\, dt = [-\cos t]_0^1 = -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1 \approx 0.4597.$$

2. Resolver las integrales siguientes haciendo un cambio de variable adecuado:
   a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$
   b) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3} dx.$

Solución

a) Hacemos el cambio siguiente: $t=\sqrt{x}$. Entonces, la relación entre los diferenciales será:

$$dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2t}, \Rightarrow dx = 2t\,dt.$$

Si $x=0$, el valor de la nueva variable t vale $t=\sqrt{0}=0$ y si $x=4$, $t=\sqrt{4}=2$. La integral en la nueva variable t será:

$$\int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\,dt = 2[t-\ln(1+t)]_0^2 = 2\cdot(2-\ln(3)) \approx 1.8028.$$

b) Hacemos el cambio $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$. Entonces, la relación entre los diferenciales será:

$$dt = \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,dx = \frac{t^2+1}{2t}\,dx, \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2+1}\,dt.$$

Si $x=0$, el valor de la nueva variable t vale $t=\sqrt{\mathrm{e}^0-1}=0$ y si $x=\ln 5$, $t=\sqrt{\mathrm{e}^{\ln 5}-1}=\sqrt{5-1}=2$. La integral en la nueva variable t será:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{(t^2+1)\cdot t}{(t^2+1)+3}\cdot\frac{2t}{t^2+1}\,dt &= 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}\,dt = 2\int_0^2\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)\,dt = 2\cdot\left[t-2\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^2 \\ &= 2\cdot(2-2\cdot\arctan 1) = 4\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 4-\pi \approx 0.8584.\end{aligned}$$

3. Resolver las integrales siguientes usando la técnica de integración por partes:
   a) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^{-x}\, dx$.
   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax} \sin(bx)\, dx$, con $a > 0$.
   c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^n \cdot \ln x\, dx$, con $n \in \mathbb{N}$.
   d) $\displaystyle\int_0^2 x^3 \cdot \arctan x\, dx$.

Solución

a) Sean

$$\begin{aligned} u &= x, & du &= dx, \\ dv &= \mathrm{e}^{-x}, & v &= -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

La integral, aplicando la fórmula de integración por partes $\displaystyle\int u dv = u \cdot v - \int v du$, queda:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^{-x}\, dx &= [-x \cdot \mathrm{e}^{-x}]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dx = -\mathrm{e}^{-1} - [\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - (-\mathrm{e}^{-1} - 1) \\ &= 1 - 2 \cdot \mathrm{e}^{-1} \approx 0.2642. \end{aligned}$$

b) Sean

$$\begin{aligned} u &= \sin(bx), & du &= b\cos(bx)dx, \\ dv &= \mathrm{e}^{-ax}, & v &= -\tfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión de integración por partes, la integral anterior será:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax} \sin(bx)\, dx = \left[-\frac{1}{a}\sin(bx)\mathrm{e}^{-ax}\right]_0^{2\pi} + \frac{b}{a}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\, dx.$$

Volvemos a aplicar la expresión de la integración por partes a la nueva integral que nos ha salido:

$$\begin{aligned} u &= \cos(bx), & du &= -b\sin(bx)dx, \\ dv &= \mathrm{e}^{-ax}, & v &= -\tfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}. \end{aligned}$$

Así, la integral a calcular será:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\, dx &= \left[-\frac{1}{a}\sin(bx)\mathrm{e}^{-ax}\right]_0^{2\pi} + \frac{b}{a}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\, dx \\ &= -\frac{1}{a}\sin(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} + \frac{b}{a}\left(\left[-\frac{1}{a}\cos(bx)\mathrm{e}^{-ax}\right]_0^{2\pi} - \frac{b}{a}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\, dx\right) \\ &= -\frac{1}{a}\sin(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - \frac{b}{a^2}(\cos(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - 1) - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\, dx. \end{aligned}$$

Si despejamos la integral a calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\, dx$ de la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\, dx &= -\frac{1}{a}\sin(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - \frac{b}{a^2}(\cos(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - 1), \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\, dx &= \frac{a^2}{a^2 + b^2}\left(-\frac{1}{a}\sin(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - \frac{b}{a^2}(\cos(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - 1)\right), \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\, dx &= \frac{1}{a^2 + b^2}\left(-a\sin(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - b(\cos(2\pi b)\mathrm{e}^{-2\pi a} - 1)\right). \end{aligned}$$

c) Sean

$$\begin{aligned} u &= \ln x, \quad du &&= \tfrac{1}{x}\,dx,\\ dv &= x^n, \quad v &&= \tfrac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión de integración por partes, la integral anterior será:

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x^n \cdot \ln x\,dx &= \frac{1}{n+1}\left[\ln x \cdot x^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} x^n\,dx = \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}(\mathrm{e}^{n+1}-1) = \mathrm{e}^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n\mathrm{e}^{n+1}+1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

d) Sean

$$\begin{aligned} u &= \arctan x, \quad du &&= \tfrac{1}{1+x^2}\,dx,\\ dv &= x^3, \quad v &&= \tfrac{x^4}{4}. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión de integración por partes, la integral anterior será:

$$\int_0^2 x^3 \cdot \arctan x\,dx = \frac{1}{4}\left[\arctan x \cdot x^4\right]_0^2 - \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = 4\cdot\arctan 2 - \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx.$$

Observamos que nos queda una integral racional $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ donde el grado del numerador es mayor que el del denominador. Para resolver este tipo de integrales, primero tenemos que dividir el numerador entre el denominador de cara a transformarla en una integral de tal forma que el grado del numerador sea menor que el del denominador:

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^4-x^2 & x^2-1 \\ \cline{1-1} -x^2 & \\ x^2+1 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

La integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ se calcula de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx &= \int_0^2 (x^2-1)\,dx + \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^2 + \left[\arctan x\right]_0^2\\ &= \frac{8}{3} - 2 + \arctan 2 = \frac{2}{3} + \arctan 2.\end{aligned}$$

El valor de la integral pedida será, pues:

$$\int_0^2 x^3 \cdot \arctan x\,dx = 4\cdot\arctan 2 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \arctan 2\right) = \frac{15}{4}\arctan 2 - \frac{1}{6} \approx 3.9851.$$

4. Hallar los extremos relativos de la función siguiente:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt, \ x > 0.$$

Solución

Para hallar los extremos relativos de la función anterior tenemos que derivarla e igualar la función derivada a cero para calcular los candidatos a extremos relativos. Usando el Teorema fundamental del Cálculo, tenemos que la función derivada vale:

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Los candidatos a extremos relativos cumplen:

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0, \ \Rightarrow \sin x = 0, \ \Rightarrow x = \pi n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Veamos si se trata de máximos o mínimos relativos:

x	0		π		2π		3π		$\dots$		$2k\pi$		$(2k+1)\pi$		$(2k+2)\pi$		$\dots$		∞
y'		$+$		$-$		$+$		$-$		$\dots$		$+$		$-$		$+$		$\dots$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\dots$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\dots$	

Entonces los valores $x_{2k+1} = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$, corresponden a máximos relativos y los valores $x_{2k} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, a mínimos relativos.

5. Calcular las derivadas de las funciones siguientes:
   a) $f_1(x) = \displaystyle\int_1^{\ln(x^2+1)} \mathrm{e}^t \, dt.$
   b) $f_2(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^4} \, dt.$
   c) $f_3(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 \, dt.$

Solución

Antes de exponer la solución del problema, veamos el resultado siguiente:

Proposición 1 *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua siendo D su dominio de definición. Sean $g, h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables tales que $g([a,b]) \subseteq D$, $h([a,b]) \subseteq D$. Definimos la función*

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt.$$

Entonces F es derivable y el valor de su función derivada $F'(x)$ puede expresarse como:

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Demostración.

Usando las propiedades de la integral de una función podemos escribir la función $F(x)$ como:

$$F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\, dt - \int_a^{g(x)} f(t)\, dt, \tag{1}$$

siendo $a \in D$.

Para demostrar la proposición anterior basta demostrar que la derivada de las funciones:

$$H(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\, dt, \quad G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\, dt$$

valen, respectivamente,

$$H'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x), \quad G'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

ya que usando la expresión (1), podemos escribir la derivada de la función $F(x)$ como:

$$F'(x) = H'(x) - G'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Para ver las expresiones de las derivadas de las funciones $H(x)$ y $G(x)$, basta ver la expresión por ejemplo de $H'(x)$ ya que la otra, la expresión de $G'(x)$, se obtendría cambiando los papeles de la función $h(x)$ por $g(x)$.

Veamos pues que $H'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x)$. Notemos en primer lugar que podemos escribir la función $H(x)$ como la composición de las funciones siguientes: $H(x) = (\hat{F} \circ h)(x)$, siendo $\hat{F}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$. Efectivamente,

$$(\hat{F} \circ h)(x) = \hat{F}(h(x)) = \int_a^{h(x)} f(t)\, dt = H(x).$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos,

$$H'(x) = \hat{F}'(h(x)) \cdot h'(x),$$

pero usando el Teorema Fundamental del cálculo, tenemos que $\hat{F}'(z) = f(z)$. Por tanto, cambiando z por $h(x)$, tenemos lo que queríamos demostrar:

$$H'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x).$$

$\square$

Resolvamos el ejercicio usando la proposición anterior:

a) Basta considerar $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = 1$ y $h(x) = \ln(x^2+1)$:

$$f_1'(x) = \mathrm{e}^{\ln(x^2+1)} \cdot h'(x) = (x^2+1) \cdot \frac{2x}{x^2+1} = 2x,$$

ya que en este caso $g'(x) = 0$ y sólo aparece un término en la expresión de $f_1'(x)$.

b) Basta considerar $f(x) = \sqrt{1+x^4}$, $g(x) = x$ y $h(x) = 0$:

$$f_2'(x) = -\sqrt{1+x^4} \cdot g'(x) = -\sqrt{1+x^4},$$

ya que en este caso $h'(x) = 0$ y sólo aparece un término en la expresión de $f_2'(x)$.

c) Basta considerar $f(x) = \cos(x^2)$, $g(x) = \frac{1}{x}$ y $h(x) = \sqrt{x}$:

$$f_3'(x) = \cos(\sqrt{x}^2) \cdot h'(x) - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot g'(x) = \cos(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}.$$