

# Ejercicios resueltos de integración. 2a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

## Ejercicio 1

- a) Calcular el área entre las curvas  $f(x) = 2x^2 - 4$  y  $g(x) = -3x^2 + 10$ , para  $-1 \leq x \leq 1$ .
- b) Calcular el área encerrada por las curvas  $f(x) = x^4$  y  $g(x) = -2x^2 + 3$ .

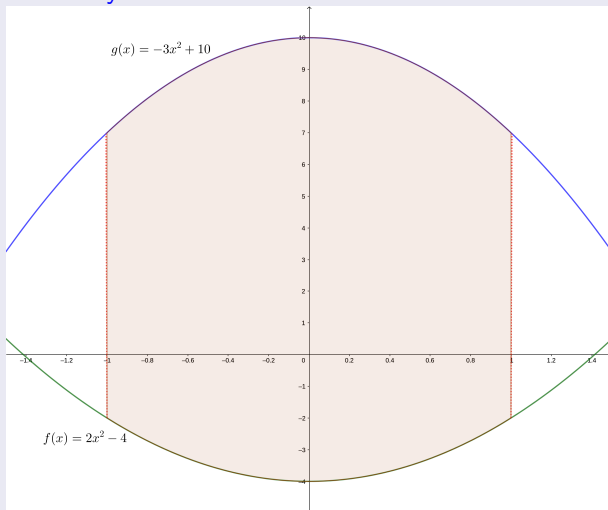
## Solución

Apartado a). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de  $f$  y  $g$  para  $x$  entre  $-1$  y  $1$ :

# Áreas de figuras planas

## Solución

Apartado a). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de  $f$  y  $g$  para  $x$  entre  $-1$  y  $1$ :



## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx =$$

## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) \, dx &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4) \, dx \\ &= \end{aligned}$$

## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) \, dx &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (-5x^2 + 14) \, dx\end{aligned}$$

## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4) dx \\ &= \int_{-1}^1 (-5x^2 + 14) dx = \left[ -5\frac{x^3}{3} + 14x \right]_{-1}^1 \\ &= \end{aligned}$$



## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4) dx \\&= \int_{-1}^1 (-5x^2 + 14) dx = \left[ -5\frac{x^3}{3} + 14x \right]_{-1}^1 \\&= -\frac{5}{3} + 14 - \left( -\frac{5}{3} - 14 \right) \\&= \end{aligned}$$

## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4) dx \\&= \int_{-1}^1 (-5x^2 + 14) dx = \left[ -5\frac{x^3}{3} + 14x \right]_{-1}^1 \\&= -\frac{5}{3} + 14 - \left( -\frac{5}{3} - 14 \right) \\&= -\frac{10}{3} + 28 = \frac{74}{3} \approx 24.6667.\end{aligned}$$

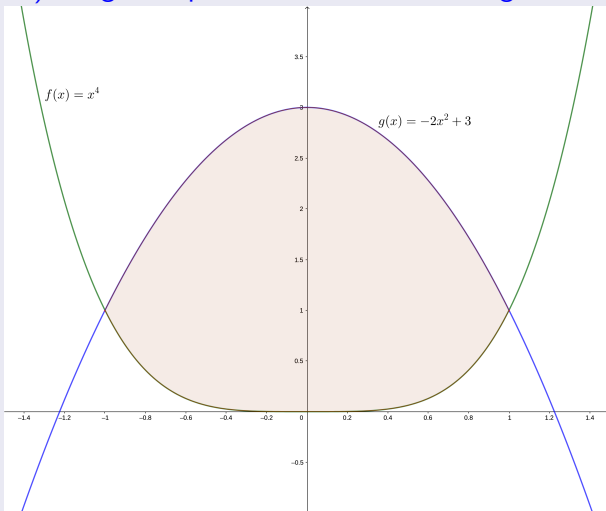
## Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de  $f$  y  $g$ :

# Áreas de figuras planas

## Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de  $f$  y  $g$ :



## Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

## Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) = g(x),$$

## Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) = g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3,$$

## Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) = g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0,$$



## Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} =\end{aligned}$$

## Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} =\end{aligned}$$

## Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1, -3.\end{aligned}$$

## Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1, -3.\end{aligned}$$

La única solución admisible es  $x^2 = 1$ ,

## Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1, -3.\end{aligned}$$

La única solución admisible es  $x^2 = 1$ , de donde  $x = \pm 1$ .

## Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1, -3.\end{aligned}$$

La única solución admisible es  $x^2 = 1$ , de donde  $x = \pm 1$ .

Los puntos de corte serán, pues  $(-1, 1)$  y  $(1, 1)$ , tal como se observa en la gráfica de las funciones  $f$  y  $g$ .

## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx =$$

## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3 - x^4) dx \\ &= \end{aligned}$$



## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3 - x^4) dx \\ &= \left[ -2\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \end{aligned}$$

## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3 - x^4) dx \\&= \left[ -2\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\&= -\frac{2}{3} + 3 - \frac{1}{5} - \left( \frac{2}{3} - 3 + \frac{1}{5} \right) \\&= \end{aligned}$$

## Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3 - x^4) dx \\&= \left[ -2\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\&= -\frac{2}{3} + 3 - \frac{1}{5} - \left( \frac{2}{3} - 3 + \frac{1}{5} \right) \\&= -\frac{4}{3} + 6 - \frac{2}{5} = \frac{64}{15} \approx 4.2667.\end{aligned}$$

## Ejercicio 2

- a) Calcular el volumen de revolución al girar la curva  $y = x^2$  alrededor del eje  $X$  para  $2 \leq x \leq 5$ .
- b) Calcular el volumen de revolución al girar la curva  $y = \sqrt{x}$  alrededor del eje  $Y$  para  $1 \leq x \leq 9$ .
- c) Calcular el volumen de revolución al girar la curva  $y = x + 3$  alrededor del eje  $y = 5$  para  $0 \leq x \leq 5$ .

# Volúmenes de revolución

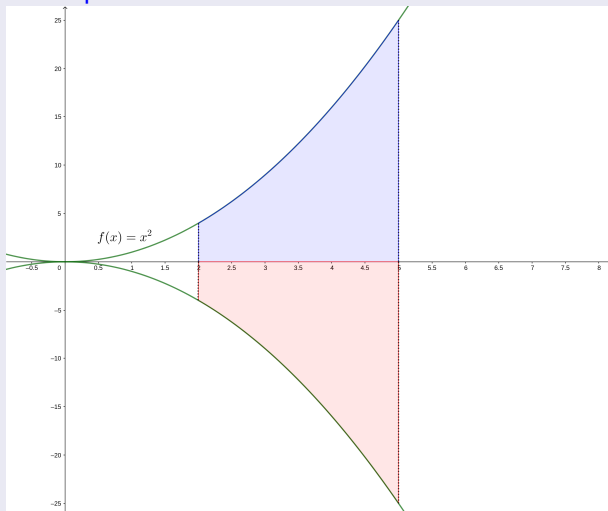
## Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:

# Volúmenes de revolución

## Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:



## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 dx$$



## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 dx = \pi \int_2^5 x^4 dx =$$

# Volúmenes de revolución

## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 dx = \pi \int_2^5 x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_2^5 =$$

# Volúmenes de revolución

## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 dx = \pi \int_2^5 x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_2^5 = \frac{\pi}{5} (5^5 - 2^5)$$

# Volúmenes de revolución

## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^5 (x^2)^2 dx = \pi \int_2^5 x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_2^5 = \frac{\pi}{5} (5^5 - 2^5) \\ &= \frac{3093\pi}{5} \approx 1943.3892. \end{aligned}$$

# Volúmenes de revolución

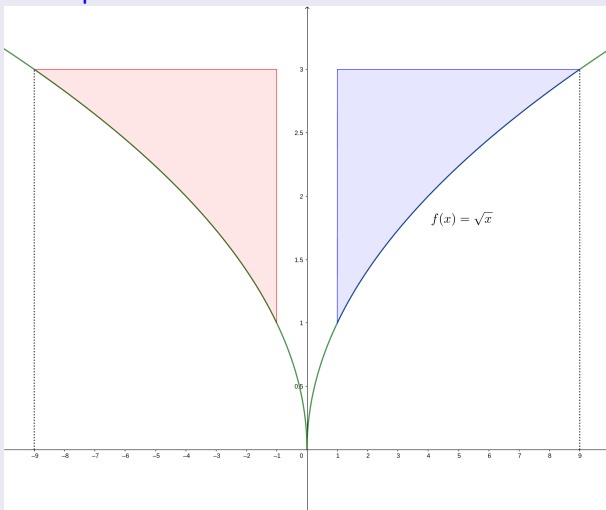
## Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:

# Volúmenes de revolución

## Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:



## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x} \, dx$$



## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x} \, dx = 2\pi \int_1^9 x^{\frac{3}{2}} \, dx =$$

# Volúmenes de revolución

## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x} \, dx = 2\pi \int_1^9 x^{\frac{3}{2}} \, dx = 2\pi \left[ \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^9 \\ &= \end{aligned}$$

## Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x} \, dx = 2\pi \int_1^9 x^{\frac{3}{2}} \, dx = 2\pi \left[ \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^9 \\ &= \frac{4\pi}{5} \left( 9^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{968\pi}{5} \approx 608.2123. \end{aligned}$$