Problemas de derivabilidad de funciones. Teoremas de derivabilidad

1. Consideremos el polinomio de grado 4, $p_4(x) = x^4 - a^2x^2 + b$ donde a y b son valores reales. Demostrar que $p_4(x)$ tiene tres extremos relativos, dos mínimos y un máximo.

Solución

Para hallar los extremos hallemos la derivada de $p_4(x)$ y calculemos los valores que la anulan:

$$p_4'(x) = 4x^3 - 2a^2x = 0, \Rightarrow 2x \cdot (2x^2 - a^2) = 0, \Rightarrow x = -\frac{|a|}{\sqrt{2}}, 0, \frac{|a|}{\sqrt{2}}.$$

Para saber si son máximos o mínimos, miramos el signo de $p_4''(x)$:

$$p_4''(x) = 12x^2 - 2a^2.$$

Para $x = -\frac{|a|}{\sqrt{2}}$, $p_4''\left(-\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = 12 \cdot \frac{a^2}{2} - 2a^2 = 4a^2 > 0$. Se trataría de un mínimo.
Para $x = 0$, $p_4''(0) = -2a^2 < 0$. Se trataría de un máximo.
Para $x = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$, $p_4''\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = 12 \cdot \frac{a^2}{2} - 2a^2 = 4a^2 > 0$. Se trataría de un mínimo.
Por tanto, $p_4(x)$ tiene dos mínimos y un máximo.

2. Demostrar que para todo valor $x, y \in \mathbb{R}$, $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

Solución

Sea $f(x) = \cos x$. Supongamos para fijar ideas que $x < y$. Como $f(x)$ es derivable y continua en $\mathbb{R}$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a la función $f(x)$ en el intervalo (x, y) y obtener:

$$f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y), \ \Rightarrow \cos x - \cos y = -\sin c \cdot (x - y), \ \Rightarrow |\cos x - \cos y| = |\sin c| \cdot |x - y| \leq |x - y|,$$

tal como queríamos ver.

3. Sean $a > b > 0$ números reales y $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo con $n \geq 2$. Demostrar que $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a-b)^{\frac{1}{n}}$.
Indicación: demostrar que la función $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente para $x \geq 1$ y evaluarla en $x = 1$ y $x = \frac{a}{b}$.

Solución

Veamos que la función $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente para $x \geq 1$. Si hacemos su derivada obtenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{n} \cdot (x-1)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}-1} - (x-1)^{\frac{1}{n}-1}\right).$$

Como $\frac{1}{n} - 1 < 0$ si $n \geq 2$ y como $x \geq x-1$, si $x \geq 1$, tenemos que $x^{\frac{1}{n}-1} < (x-1)^{\frac{1}{n}-1}$. Por tanto, $f'(x) < 0$ y $f(x)$ será decreciente para $x \geq 1$.

Como $a > b$, $\frac{a}{b} > 1$ y, como $f(x)$ es decreciente,

$$f\left(\frac{a}{b}\right) < f(1), \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a}{b} - 1\right)^{\frac{1}{n}} < 1, \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a-b}{b}\right)^{\frac{1}{n}} < 1, \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} - (a-b)^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}, \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a-b)^{\frac{1}{n}}.$$

4. Sea $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$. Supongamos que $f(0) = 0,\ f(1) = f(2) = 1$.
   a) Demostrar que existe un valor $c_1 \in (0,1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.
   b) Demostrar que existe un valor $c_2 \in (1,2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.
   c) Demostrar que existe un valor $c_3 \in (0,2)$ tal que $f'(c_3) = \frac{1}{2}$.

Solución

a) Aplicando el Teorema del valor medio en el intervalo $[0,1]$ tenemos que existe un valor $c_1 \in (0,1)$ tal que

$$f'(c_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = 1.$$

b) Aplicando el Teorema del valor medio en el intervalo $[1,2]$ tenemos que existe un valor $c_2 \in (1,2)$ tal que

$$f'(c_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 1}{1} = 0.$$

c) Aplicando el Teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ tenemos que existe un valor $c_3 \in (0,2)$ tal que

$$f'(c_3) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}.$$