Ejercicios resueltos de integración. 1a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

Consideremos la función $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.
Demostrar que la función es integrable en el intervalo anterior.

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.
La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.
La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \end{aligned}$$

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.
La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \end{aligned}$$

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.
La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{(i-1)^2}{n^2}\right) =
\end{aligned}$$

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.
La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{(i-1)^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2\right)
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1).$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1).$$

La suma inferior de f respecto de P_n será:

$$L(f, P_n) = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)\right)$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1).$$

La suma inferior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{6n^3}\cdot(n-1)n(2n-1) = 1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1).$$

La suma inferior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{6n^3}\cdot(n-1)n(2n-1) = 1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n} = \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&=
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i-x_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right) =
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i-x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(n+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned}
U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación calculemos $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)$ y $\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)$:

$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = 1+\frac{2}{6}=\frac{4}{3},$$

Solución (cont.)

A continuación calculemos $\lim\limits_{n\to\infty} L(f, P_n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} U(f, P_n)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} &= 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3}, \\ \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} &= 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación calculemos $\lim\limits_{n\to\infty} L(f,P_n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} U(f,P_n)$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} 1+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} &= 1+\frac{2}{6}=\frac{4}{3},\\ \lim_{n\to\infty} 1+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} &= 1+\frac{2}{6}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Como los dos límites anteriores coinciden y además $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(P_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, deducimos que la función f es integrable en el intervalo $[0,1]$ y además $\int_{[0,1]} f=\frac{4}{3}$.

Ejercicio 2

Calcular la integrales definidas siguientes:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}\, dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}\,dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}\,dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y cuando $x = 2$, el valor de t es $t = \frac{1}{2}$.

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}\,dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y cuando $x = 2$, el valor de t es $t = \frac{1}{2}$.

La integral a calcular nos queda en la nueva variable t:

$$\int_1^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^t\,(-dt) =$$

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}\, dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y cuando $x = 2$, el valor de t es $t = \frac{1}{2}$.
La integral a calcular nos queda en la nueva variable t:

$$\int_1^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^t\, (-dt) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{e}^t\, dt =$$

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x}, \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}\,dx, \Rightarrow -dt = \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Cuando $x = 1$, el valor de t es: $t = \frac{1}{1} = 1$ y cuando $x = 2$, el valor de t es $t = \frac{1}{2}$.

La integral a calcular nos queda en la nueva variable t:

$$\int_1^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^t\,(-dt) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{e}^t\,dt = \left[\mathrm{e}^t\right]_{\frac{1}{2}}^1 =$$

Solución

Apartado a). Aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$t=\frac{1}{x},\ \Rightarrow dt=-\frac{1}{x^2}\,dx,\ \Rightarrow -dt=\frac{1}{x^2}\,dx.$$

Cuando $x=1$, el valor de t es: $t=\frac{1}{1}=1$ y cuando $x=2$, el valor de t es $t=\frac{1}{2}$.
La integral a calcular nos queda en la nueva variable t:

$$\int_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^t\,(-dt)=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{e}^t\,dt=\left[\mathrm{e}^t\right]_{\frac{1}{2}}^1=\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\approx 1.0696.$$

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \quad = \quad -\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 (-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \quad = \quad -\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 (-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1$$

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\cdot\int_0^1(-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1}-1\right) = \end{aligned}$$

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 (-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1}-1\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

Apartado b). El valor de la integral será:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\cdot\int_0^1(-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1}-1\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}} \approx 0.3161.\end{aligned}$$

Ejercicio 3

La función error:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

se usa en probabilidad, estadística y ingeniería.

a) Demostrar que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\mathrm{erf}(\mathrm{b}) - \mathrm{erf}(a))$.

b) Demostrar que la función $y = x^2\mathrm{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $\sqrt{\pi}xy' = 2\sqrt{\pi}y + 2x^3\mathrm{e}^{-x^2}$.

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$\mathrm{erf}(b) - \mathrm{erf}(a)$

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\mathrm{erf}(b)-\mathrm{erf}(a)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt-\int_0^a \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right)$$

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\mathrm{erf}(b)-\mathrm{erf}(a)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt-\int_0^a \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt,$$

y, por tanto,

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\mathrm{erf}(b)-\mathrm{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt - \int_0^a \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt,$$

y, por tanto,

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\mathrm{erf}(b)-\mathrm{erf}(a)).$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$y' = 2x \cdot \mathrm{erf}(x) + x^2 \cdot \mathrm{erf}'(x) =$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$y' = 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\mathrm{erf}'(x) = 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\mathrm{erf}'(x) = 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2x\cdot\frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} = \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\mathrm{erf}'(x) = 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2x\cdot\frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{2y}{x} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\mathrm{erf}'(x) = 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2x\cdot\frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{2y}{x} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\sqrt{\pi}x$ nos queda:

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x \cdot \mathrm{erf}(x) + x^2 \cdot \mathrm{erf}'(x) = 2x \cdot \mathrm{erf}(x) + x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2x \cdot \frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{2y}{x} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\sqrt{\pi}x$ nos queda:

$$\sqrt{\pi}xy' = 2\sqrt{\pi}y + 2x^3\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Ejercicio 4

La función seno integral:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

es importante en ingeniería eléctrica. Fijarse que aunque el integrando $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ no está definido para $t = 0$, sabemos que su límite cuando t tiende a 0 vale 1. Por tanto, si definimos $f(0) = 1$, tenemos que f es continua para todo valor de x.

Ejercicio 4 (cont.)

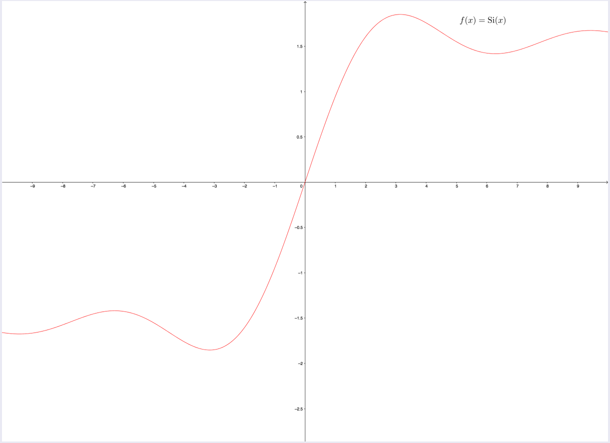
a) Hacer un gráfico de la función $\mathrm{Si}(x)$.

b) ¿Para qué valores de x, la función $\mathrm{Si}(x)$ tiene un máximo relativo?

c) Hallar el primer punto de inflexión a la derecha del origen. Es decir hallar el mínimo valor $x_0 > 0$ tal que $(x_0, \mathrm{Si}(x_0))$ es un punto de inflexión de la función $\mathrm{Si}(x)$.

Solución

Apartado a). El gráfico de la funció $\mathrm{Si}(x)$ es el siguiente:



Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\mathrm{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\mathrm{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

$$\mathrm{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0,$$

Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\mathrm{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

$$\mathrm{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0, \;\; \Rightarrow \sin x = 0, \; (x \neq 0),$$

Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\mathrm{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

$$\mathrm{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0, \;\Rightarrow \sin x = 0,\ (x \neq 0), \;\Rightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\mathrm{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

$$\mathrm{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0, \ \Rightarrow \sin x = 0, \ (x \neq 0), \ \Rightarrow x = n\pi, \ n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Las abscisas de los candidatos a extremos serán de la forma $x_n = n\pi$, con $n \neq 0$.

Solución (cont.)

Apartado b). Para hallar los extremos relativos de la función $\mathrm{Si}(x)$ hemos de calcular primero su derivada e igualarla a cero:

$$\mathrm{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0, \;\; \Rightarrow \sin x = 0,\; (x \neq 0), \;\; \Rightarrow x = n\pi,\; n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Las abscisas de los candidatos a extremos serán de la forma $x_n = n\pi$, con $n \neq 0$.
Veamos si son máximos o mínimos:

x	$-\infty$	$\cdots$	-2π		$-\pi$		π		2π	$\cdots$	∞
y'				$-$		$+$		$-$			
y				$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$			

Solución (cont.)

Entonces:

- si $n > 0$, los puntos con $x_n = n\pi$, con n par serán mínimos y los puntos $x_n = n\pi$ con n impar serán máximos,

Solución (cont.)

Entonces:

- si $n > 0$, los puntos con $x_n = n\pi$, con n par serán mínimos y los puntos $x_n = n\pi$ con n impar serán máximos,
- si $n < 0$, los puntos con $x_n = n\pi$, con n par serán máximos y los puntos $x_n = n\pi$ con n impar serán mínimos.

Solución (cont.)

Apartado c). Los puntos de inflexión se hallan igualando a cero la derivada segunda:

Solución (cont.)

Apartado c). Los puntos de inflexión se hallan igualando a cero la derivada segunda:

$$\mathrm{Si}''(x) = \frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2} = 0, \Rightarrow x\cdot\cos x - \sin x = 0, \Rightarrow x = \tan x.$$

Solución (cont.)

Apartado c). Los puntos de inflexión se hallan igualando a cero la derivada segunda:

$$\mathrm{Si}''(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = 0, \Rightarrow x \cdot \cos x - \sin x = 0, \Rightarrow x = \tan x.$$

Nos piden hallar la primera solución $x > 0$ de la solución anterior.

Solución (cont.)

Apartado c). Los puntos de inflexión se hallan igualando a cero la derivada segunda:

$$\mathrm{Si}''(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = 0, \Rightarrow x{\cdot}\cos x{-}\sin x = 0, \Rightarrow x = \tan x.$$

Nos piden hallar la primera solución $x > 0$ de la solución anterior. Fijarse que $x = 0$ es una solución de la ecuación anterior y de hecho el valor $(0, 0)$ es un punto de inflexión de la función $\mathrm{Si}(x)$.

Solución (cont.)

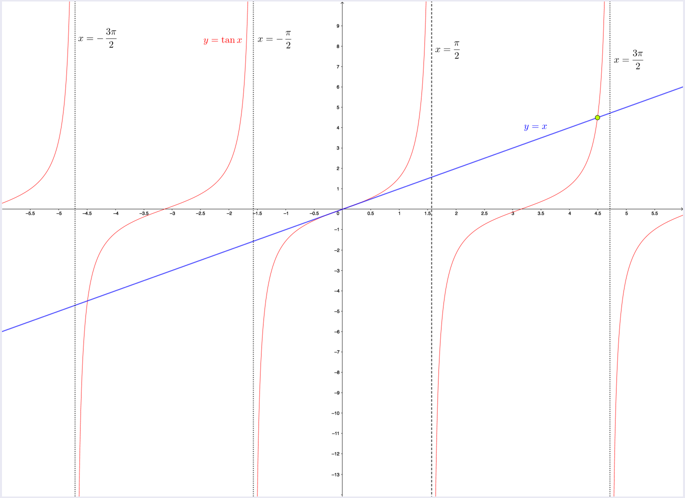
Apartado c). Los puntos de inflexión se hallan igualando a cero la derivada segunda:

$$\mathrm{Si}''(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = 0, \Rightarrow x{\cdot}\cos x{-}\sin x = 0, \Rightarrow x = \tan x.$$

Nos piden hallar la primera solución $x > 0$ de la solución anterior. Fijarse que $x = 0$ es una solución de la ecuación anterior y de hecho el valor $(0, 0)$ es un punto de inflexión de la función $\mathrm{Si}(x)$.
Para resolver la ecuación anterior, hagamos primero un gráfico ilustrativo:

Teorema fundamental del cálculo

Solución (cont.)



Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n}$$

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n} \\ &= \frac{x_n(\tan^2 x_n + 1) - \tan x_n}{\tan^2 x_n} \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n} \\ &= \frac{x_n(\tan^2 x_n + 1) - \tan x_n}{\tan^2 x_n} = \frac{\frac{x_n}{\cos^2 x_n} - \frac{\sin x_n}{\cos x_n}}{\frac{\sin^2 x_n}{\cos^2 x_n}} \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n} \\ &= \frac{x_n(\tan^2 x_n + 1) - \tan x_n}{\tan^2 x_n} = \frac{\frac{x_n}{\cos^2 x_n} - \frac{\sin x_n}{\cos x_n}}{\frac{\sin^2 x_n}{\cos^2 x_n}} \\ &= \frac{x_n - \sin x_n \cos x_n}{\sin^2 x_n}, \end{aligned}$$

con $x_0 = 4.5$.

Solución (cont.)

Resolveremos la ecuación anterior $g(x) = \tan x - x = 0$, por el método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n - x_n}{\tan^2 x_n} \\ &= \frac{x_n(\tan^2 x_n + 1) - \tan x_n}{\tan^2 x_n} = \frac{\frac{x_n}{\cos^2 x_n} - \frac{\sin x_n}{\cos x_n}}{\frac{\sin^2 x_n}{\cos^2 x_n}} \\ &= \frac{x_n - \sin x_n \cos x_n}{\sin^2 x_n}, \end{aligned}$$

con $x_0 = 4.5$.

El programa en ‘python‘ que resuelve la ecuación anterior es el siguiente:

Teorema fundamental del cálculo

```
from math import *
def f(x):
 return((x-sin(x)*cos(x))/(sin(x)**2))

epsilon=0.0001; x0=4.5; x=x0; n=0

while abs(tan(x)-x) >= epsilon:
  x=f(x)
  n=n+1
  print("El término {0:2} de la sucesión vale {1:.7f}".
      format(n,x))

El término  1 de la sucesión vale 4.4936139
El término  2 de la sucesión vale 4.4934097
```

Ejercicio 5

Hallar la derivada de las funciones siguientes:

a) $h(x) = \displaystyle\int_2^{\frac{1}{x}} \arctan t \, dt.$

b) $h(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1+r^3} \, dr.$

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

1. $h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

1. $h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

1. $h'(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}.$

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

1. $h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$.
2. $h'(x) = \sqrt{1+(x^2)^3} \cdot (x^2)' =$

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

1. $h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}.$
2. $h'(x) = \sqrt{1+(x^2)^3} \cdot (x^2)' = \sqrt{1+x^6} \cdot 2x =$

Solución

Aplicando la fórmula de derivación bajo el signo integral, las derivadas son:

1. $h'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$.
2. $h'(x) = \sqrt{1 + (x^2)^3} \cdot (x^2)' = \sqrt{1 + x^6} \cdot 2x = 2x \cdot \sqrt{1 + x^6}$.