Problemas de estudio de derivabilidad de funciones

1. Usando la definición, calcular la derivada de la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$ para $x > 0$ en un valor $x_0 > 0$.
2. Demostrar que la función $f(x) = \sqrt[5]{x}$ no es derivable en $x = 0$.
3. Sea la función siguiente:
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$
Demostrar que $f(x)$ es derivable en $x = 0$.
4. Hallar los valores de x en donde la siguiente función es derivable: $f(x) = |x|+|x+1|$ y hallar la derivada correspondiente.
5. Sea $f(x)$ una función derivable en un punto x_0. Demostrar que:
$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \left(f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)\right)\right).$$
Demostrar que el recíproco es falso, es decir, dar un ejemplo de una función y un valor x_0 tal que exista el límite anterior pero la función no sea derivable en x_0.
Indicación: considerar la función $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Ver que el límite anterior para $x_0 = 0$ existe pero $f(x)$ no es derivable en $x_0 = 0$.
6. Calcular la derivada de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.
   b) $f(x) = \tan(x^3 + x^2 + x - 1)$.
   c) $f(x) = x^x$, para $x > 0$. Indicación: considerar $g(x) = \ln f(x)$. Derivar la función $g(x)$ y a partir de la derivada de $g(x)$, hallar la derivada de la función $f(x)$.
7. Consideremos la función $f(x) = \frac{a}{a+x}$, donde a es un valor real. Hallar la derivada n-ésima de f en un valor $x_0 \neq -a$.
8. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Hallar la recta tangente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0 = 0, y_0 = f(x_0) = -1)$.
9. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es par si para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ y diremos que es impar si para todo valor $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$. Demostrar que la función derivada de toda función par es impar y viceversa, que la función derivada de toda función impar es par.
10. Sea $h(x)$ la función de Heaviside: $h(x) = 1$, para $x \geq 0$ y $h(x) = 0$, para $x < 0$. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.