

Ejercicios resueltos de derivación. 2a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

- a) Desarrollar la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}$ en desarrollo de MacLaurin de grado n dando el error cometido.
- b) Dar una estimación de $\frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con 4 valores exactos.

Solución

Apartado a).

Solución

Apartado a).

En los apuntes vimos que el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = (x + C)^\alpha$ alrededor de $x = x_0$ era:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \cdot (x_0 + C)^{\alpha-k} \cdot (x - x_0)^k,$$

donde $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}$.

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

donde $i!!!! = i \cdot (i-4) \cdot (i-8) \cdots 1$.

Fórmula de Taylor

Solución (cont.)

En nuestro caso, $C = 1$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $x_0 = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

donde $i!!!! = i \cdot (i-4) \cdot (i-8) \cdots 1$.

Ejemplos: $5!!!! = 5 \cdot 1 = 5$, $8!!!! = 8 \cdot 4 = 32$.

Fórmula de Taylor

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$R_n(x - x_0) = \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c + C)^{\alpha-n-1} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} R_n(x - x_0) &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c + C)^{\alpha-n-1} \cdot (x - x_0)^{n+1} \\ &= \binom{-\frac{1}{4}}{n+1} \cdot (1 + c)^{-\frac{1}{4}-n-1} \cdot x^{n+1} \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} R_n(x - x_0) &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c + C)^{\alpha-n-1} \cdot (x - x_0)^{n+1} \\ &= \binom{-\frac{1}{4}}{n+1} \cdot (1 + c)^{-\frac{1}{4}-n-1} \cdot x^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (4n+1)!!!!}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot (1 + c)^{-n-\frac{5}{4}} \cdot x^{n+1}, \end{aligned}$$

donde $c \in \langle 0, x \rangle$.

Solución (cont.)

Apartado b).

Solución (cont.)

Apartado b).

En el apartado b) nos piden hallar $f(0.1) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con un error menor o igual que 10^{-4} .

Solución (cont.)

Apartado b).

En el apartado b) nos piden hallar $f(0.1) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con un error menor o igual que 10^{-4} .

Primero tenemos que hallar el grado del polinomio n tal que $|f(0.1) - P_n(0.1)| \leq 10^{-4}$.

Solución (cont.)

Apartado b).

En el apartado b) nos piden hallar $f(0.1) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con un error menor o igual que 10^{-4} .

Primero tenemos que hallar el grado del polinomio n tal que $|f(0.1) - P_n(0.1)| \leq 10^{-4}$.

Es decir:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)!!!!}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot (1+c)^{-n-\frac{5}{4}} \cdot 0.1^{n+1} \right| \leq 10^{-4},$$

con $c \in (0, 0.1)$.

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

$$(1 + c)^{-n - \frac{5}{4}} = \frac{1}{(1 + c)^{n + \frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para $c = 0$.

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

$$(1 + c)^{-n - \frac{5}{4}} = \frac{1}{(1 + c)^{n + \frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para $c = 0$.
Así el error puede acotarse por:

$$\left| \frac{(4n + 1)!!!! \cdot 0.1^{n+1}}{4^{n+1} \cdot (n + 1)!} \right| = \left| \frac{(4n + 1)!!!!}{40^{n+1} \cdot (n + 1)!} \right| \leq 10^{-4}.$$

Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de c ya que c es desconocido:

$$(1 + c)^{-n - \frac{5}{4}} = \frac{1}{(1 + c)^{n + \frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para $c = 0$.
Así el error puede acotarse por:

$$\left| \frac{(4n + 1)!!!! \cdot 0.1^{n+1}}{4^{n+1} \cdot (n + 1)!} \right| = \left| \frac{(4n + 1)!!!!}{40^{n+1} \cdot (n + 1)!} \right| \leq 10^{-4}.$$

Hagamos un programa en python que nos halle el n :

Fórmula de Taylor

```
from math import *  
def fourthfactorial(n):  
    if n in (1, 2, 3, 4):  
        return n  
    else:  
        if n == 0:  
            return 1  
        else:  
            return n * fourthfactorial(n-4)
```

Fórmula de Taylor

```
def calculo_n(error):  
    x=0.1  
    m=2  
    cota_error=(fourthfactorial(4*m+1)/(4.**m+1)*  
                factorial(m+1))*(x**(m+1))  
    while(cota_error >= error):  
        m=m+1  
        cota_error=(fourthfactorial(4*m+1)/(4.**m+1)*  
                    factorial(m+1))*(x**(m+1))  
    return(m)  
  
calculo_n(0.0001)  
3
```

Solución (cont.)

El valor de n será 3 y por tanto $P_3(0.1)$ valdrá:

```
def termino_k(x,k):  
    y=(-1)**k*fourthfactorial(4*k-3)/  
        (4.**k*factorial(k))*x**k  
    return(y)
```

Fórmula de Taylor

```
def Pn(x,n):  
    p=1  
    k=1  
    while k <= n:  
        p=p+termino_k(x,k)  
        k=k+1  
    return(p)
```

```
Pn(0.1,3)  
0.9764453125
```


Ejercicio 2

Desarrollar en polinomios de Taylor las funciones siguientes alrededor del punto x_0 hasta la n indicada y realizar un gráfico de la función y los polinomios de Taylor obtenidos:

- a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ hasta $n = 4$.
- b) $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$ hasta $n = 4$.

Fórmula de Taylor

Solución

En general, dada una función $f(x)$, $n + 1$ -veces derivable, el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = x_0$ vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Solución

En general, dada una función $f(x)$, $n + 1$ -veces derivable, el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = x_0$ vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Apartado a). La función f vale $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ y $n = 4$.

Fórmula de Taylor

Solución

En general, dada una función $f(x)$, $n + 1$ -veces derivable, el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = x_0$ vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Apartado a). La función f vale $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ y $n = 4$.
Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}},$$

Fórmula de Taylor

Solución

En general, dada una función $f(x)$, $n + 1$ -veces derivable, el polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = x_0$ vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Apartado a). La función f vale $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ y $n = 4$.
Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}, & f''(x) &= -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}, & f^{(iv)}(x) &= -\frac{15}{16} \cdot x^{-\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 4$ valen:

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 4$ valen:

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 4$ valen:

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$f''(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{32},$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 4$ valen:

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$f''(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{32},$$

$$f'''(4) = \frac{3}{8} \cdot 4^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3}{256},$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 4$ valen:

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$f''(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{32},$$

$$f'''(4) = \frac{3}{8} \cdot 4^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3}{256},$$

$$f^{(iv)}(4) = -\frac{15}{16} \cdot 4^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2^7} = -\frac{15}{2048}.$$

Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$P_4(x) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{2! \cdot 32} \cdot (x - 4)^2$$

Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$\begin{aligned} P_4(x) = & 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{2! \cdot 32} \cdot (x - 4)^2 \\ & + \frac{3}{3! \cdot 256} \cdot (x - 4)^3 - \frac{15}{4! \cdot 2048} \cdot (x - 4)^4 \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$\begin{aligned}P_4(x) &= 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{2! \cdot 32} \cdot (x - 4)^2 \\&\quad + \frac{3}{3! \cdot 256} \cdot (x - 4)^3 - \frac{15}{4! \cdot 2048} \cdot (x - 4)^4 \\&= 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{64} \cdot (x - 4)^2\end{aligned}$$

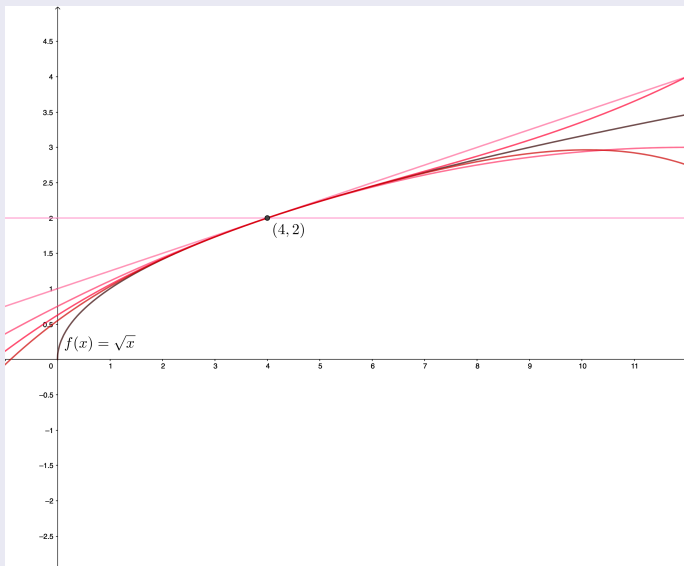
Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$\begin{aligned}P_4(x) &= 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{2! \cdot 32} \cdot (x - 4)^2 \\&\quad + \frac{3}{3! \cdot 256} \cdot (x - 4)^3 - \frac{15}{4! \cdot 2048} \cdot (x - 4)^4 \\&= 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{64} \cdot (x - 4)^2 \\&\quad + \frac{1}{512} \cdot (x - 4)^3 - \frac{5}{16384} \cdot (x - 4)^4.\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor

Solución (cont.)



Solución (cont.)

Apartado b). La función f vale $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$ y $n = 4$.

Solución (cont.)

Apartado b). La función f vale $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$ y $n = 4$.
Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2},$$

Solución (cont.)

Apartado b). La función f vale $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$ y $n = 4$.
Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2x \cdot e^{-x^2}, \\f''(x) &= (4 \cdot x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). La función f vale $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$ y $n = 4$.
Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2x \cdot e^{-x^2}, \\f''(x) &= (4 \cdot x^2 - 2) \cdot e^{-x^2} \\f'''(x) &= -4e^{-x^2}x(2x^2 - 3)\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). La función f vale $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$ y $n = 4$.
Calculemos las cuatro primeras derivadas de $f(x)$:

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2},$$

$$f''(x) = (4 \cdot x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$$

$$f'''(x) = -4e^{-x^2}x(2x^2 - 3)$$

$$f^{(iv)} = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3).$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 0$ valen:

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 0$ valen:

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = -2, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(iv)}(0) = 12.$$

Solución (cont.)

Las derivadas en $x = x_0 = 0$ valen:

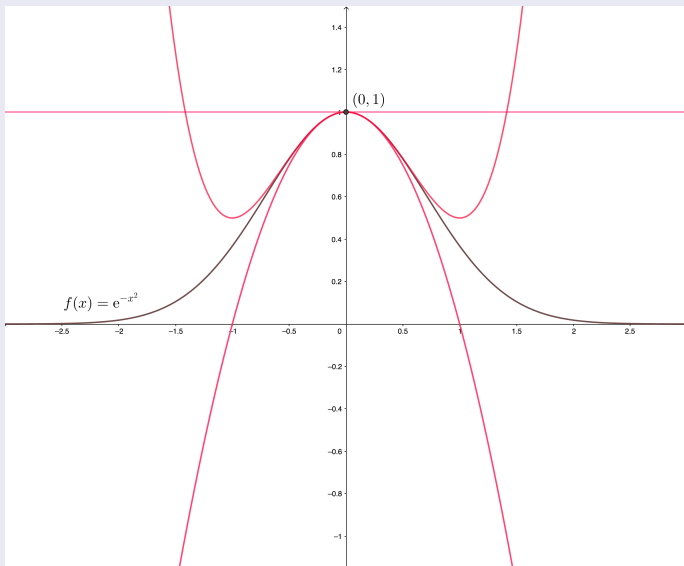
$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = -2, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(iv)}(0) = 12.$$

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$P_4(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^4.$$

Fórmula de Taylor

Solución (cont.)



Ejercicio 3

Realizar un estudio local de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Solución

a) Dominio.

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .

Estudio local de una función

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad.

Estudio local de una función

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.
 - Eje X o eje de abscisas.

Estudio local de una función

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.
 - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$,
o $x^2 - 1 = 0$,

Estudio local de una función

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.
 - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$.

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.
 - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.
 - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
 - Eje Y o eje de ordenadas.

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.
 - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
 - Eje Y o eje de ordenadas. Hemos de calcular $f(0) = -1$.

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.
 - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
 - Eje Y o eje de ordenadas. Hemos de calcular $f(0) = -1$. Por tanto, pasa por el punto $(0, -1)$.

Estudio local de una función

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.
 - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
 - Eje Y o eje de ordenadas. Hemos de calcular $f(0) = -1$. Por tanto, pasa por el punto $(0, -1)$.
- d) Simetrías.

Estudio local de una función

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.
 - Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
 - Eje Y o eje de ordenadas. Hemos de calcular $f(0) = -1$. Por tanto, pasa por el punto $(0, -1)$.
- d) Simetrías.
 - Respecto al eje Y : hemos de comprobar si $f(x) = f(-x)$. Vemos que sí se cumple, por tanto, f es simétrica respecto al eje Y .

Estudio local de una función

Solución

- a) Dominio. El dominio de la función es \mathbb{R} ya que sólo podría "tener problemas" en los puntos que anulen el denominador pero en este caso el denominador es diferente de cero para cualquier valor de x .
- b) Puntos de discontinuidad. No tiene ya que su dominio es todo \mathbb{R} .
- c) Puntos de corte.
- Eje X o eje de abscisas. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm 1$. Por tanto, corta en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
 - Eje Y o eje de ordenadas. Hemos de calcular $f(0) = -1$. Por tanto, pasa por el punto $(0, -1)$.
- d) Simetrías.
- Respecto al eje Y : hemos de comprobar si $f(x) = f(-x)$. Vemos que sí se cumple, por tanto, f es simétrica respecto al eje Y .
 - Respecto al origen. Al ser simétrica respecto al eje Y , no es simétrica respecto al origen, se tendría que cumplir que $f(-x) = -f(x)$.

Solución

d) Simetrías.

Solución

d) Simetrías.

- Respecto al eje Y : hemos de comprobar si $f(x) = f(-x)$. Vemos que sí se cumple, por tanto, f es simétrica respecto al eje Y .

Solución

d) Simetrías.

- Respecto al eje Y : hemos de comprobar si $f(x) = f(-x)$. Vemos que sí se cumple, por tanto, f es simétrica respecto al eje Y .
- Respecto al origen. Al ser simétrica respecto al eje Y , no es simétrica respecto al origen, se tendría que cumplir que $f(-x) = -f(x)$.

Solución

d) Simetrías.

- Respecto al eje Y : hemos de comprobar si $f(x) = f(-x)$. Vemos que sí se cumple, por tanto, f es simétrica respecto al eje Y .
- Respecto al origen. Al ser simétrica respecto al eje Y , no es simétrica respecto al origen, se tendría que cumplir que $f(-x) = -f(x)$.

e) Asíntotas.

Solución

d) Simetrías.

- Respecto al eje Y : hemos de comprobar si $f(x) = f(-x)$. Vemos que sí se cumple, por tanto, f es simétrica respecto al eje Y .
- Respecto al origen. Al ser simétrica respecto al eje Y , no es simétrica respecto al origen, se tendría que cumplir que $f(-x) = -f(x)$.

e) Asíntotas.

- Horizontales. Hemos de calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Solución

d) Simetrías.

- Respecto al eje Y : hemos de comprobar si $f(x) = f(-x)$. Vemos que sí se cumple, por tanto, f es simétrica respecto al eje Y .
- Respecto al origen. Al ser simétrica respecto al eje Y , no es simétrica respecto al origen, se tendría que cumplir que $f(-x) = -f(x)$.

e) Asíntotas.

- Horizontales. Hemos de calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Al existir el límite anterior, deducimos que tiene la asíntota horizontal $y = 1$.