Ejercicios resueltos de integración. Integración impropia. 3a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

Estudiar la convergencia de las integrales siguientes y hallar su valor en caso de que sean convergentes:

a) $\displaystyle\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx.$

b) $\displaystyle\int_1^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx.$

Solución

Apartado a). Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto singular en $x = 8$.

Solución

Apartado a). Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto singular en $x = 8$.
Para estudiar la convergencia, apliquemos el criterio del límite comparando las funciones siguientes:

Solución

Apartado a). Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto singular en $x = 8$.
Para estudiar la convergencia, apliquemos el criterio del límite comparando las funciones siguientes:

$$\frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}.$$

Solución

Apartado a). Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto singular en $x = 8$.
Para estudiar la convergencia, apliquemos el criterio del límite comparando las funciones siguientes:

$$\frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}.$$

Como

$$\lim_{x\to 8} \frac{\frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}} = \lim_{x\to 8} x + 4 = 12,$$

las dos integrales tienen el mismo criterio,

Solución

Apartado a). Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto singular en $x = 8$.
Para estudiar la convergencia, apliquemos el criterio del límite comparando las funciones siguientes:

$$\frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}.$$

Como

$$\lim_{x\to 8} \frac{\frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}} = \lim_{x\to 8} x+4 = 12,$$

las dos integrales tienen el mismo criterio, es decir, una es convergente si, y sólo si, la otra lo es.

Solución (cont.)

Estudiemos la convergencia de la integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

Solución (cont.)

Estudiemos la convergencia de la integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx \quad = \quad \lim_{t\to 8}\int_4^t (x-8)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

Solución (cont.)

Estudiemos la convergencia de la integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \lim_{t\to 8}\int_4^t (x-8)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{t\to 8}\left[\frac{(x-8)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_4^t$$

Solución (cont.)

Estudiemos la convergencia de la integral impropia:

$$\begin{aligned}
\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx &= \lim_{t\to 8}\int_4^t (x-8)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{t\to 8}\left[\frac{(x-8)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_4^t \\
&= \lim_{t\to 8}\left[\frac{(x-8)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_4^t
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Estudiemos la convergencia de la integral impropia:

$$\begin{aligned}\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx &= \lim_{t\to 8}\int_4^t (x-8)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{t\to 8}\left[\frac{(x-8)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_4^t \\ &= \lim_{t\to 8}\left[\frac{(x-8)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_4^t = \frac{3}{2}\lim_{t\to 8}\left((t-8)^{\frac{2}{3}}-(-4)^{\frac{2}{3}}\right)\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Estudiemos la convergencia de la integral impropia:

$$\begin{aligned}
\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx &= \lim_{t\to 8}\int_4^t (x-8)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{t\to 8}\left[\frac{(x-8)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_4^t \\
&= \lim_{t\to 8}\left[\frac{(x-8)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_4^t = \frac{3}{2}\lim_{t\to 8}\left((t-8)^{\frac{2}{3}}-(-4)^{\frac{2}{3}}\right) \\
&= -\frac{3\sqrt[3]{16}}{2} = -3\sqrt[3]{2}.
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Como la integral impropia $\displaystyle\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$ es impropia, nuestra integral impropia $\displaystyle\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$ también lo será ya que hemos visto que tienen el mismo carácter.

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx =$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$=$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$= \int_4^8 \frac{x-8}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx + \int_4^8 \frac{12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$
$$= \int_4^8 \frac{x-8}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx + \int_4^8 \frac{12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$
$$= \int_4^8 (x-8)^{\frac{2}{3}}\,dx + 12\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\begin{aligned}
\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx &= \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx \\
&= \int_4^8 \frac{x-8}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx + \int_4^8 \frac{12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx \\
&= \int_4^8 (x-8)^{\frac{2}{3}}\,dx + 12\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx \\
&= \left[\frac{(x-8)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_4^8 + 12\cdot(-3\sqrt[3]{2})
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$= \int_4^8 \frac{x-8}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx + \int_4^8 \frac{12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$= \int_4^8 (x-8)^{\frac{2}{3}}\,dx + 12\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$= \left[\frac{(x-8)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_4^8 + 12\cdot(-3\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{4^5} - 36\sqrt[3]{2}$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$
\begin{aligned}
\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx &= \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx \\
&= \int_4^8 \frac{x-8}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx + \int_4^8 \frac{12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx \\
&= \int_4^8 (x-8)^{\frac{2}{3}}\,dx + 12\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}\,dx \\
&= \left[\frac{(x-8)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_4^8 + 12\cdot(-3\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{4^5} - 36\sqrt[3]{2} \\
&= \frac{3}{5}\cdot 8\sqrt[3]{2} - 36\sqrt[3]{2} = -\frac{156}{5}\sqrt[3]{2} \approx -39.3095.
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

Apartado b). Evaluaremos la integral usando la técnica de integración por partes:

Solución (cont.)

Apartado b). Evaluaremos la integral usando la técnica de integración por partes:

$$\int_1^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} x^2 \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

Solución (cont.)

Apartado b). Evaluaremos la integral usando la técnica de integración por partes:

$$\int_1^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^2 \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

Sean:

$$\begin{aligned} u &= x^2, & du &= 2x\,dx,\\ dv &= \mathrm{e}^{-x}\,dx, & v &= -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). Evaluaremos la integral usando la técnica de integración por partes:

$$\int_1^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Sean:

$$\begin{array}{llll} u & = x^2, & du & = 2x\, dx, \\ dv & = \mathrm{e}^{-x}\, dx, & v & = -\mathrm{e}^{-x}. \end{array}$$

La integral será:

$$\lim_{t\to\infty} \left[-x^2\mathrm{e}^{-x}\right]_1^t + 2\int_1^t x\mathrm{e}^{-x}\, dx$$

Solución (cont.)

Apartado b). Evaluaremos la integral usando la técnica de integración por partes:

$$\int_1^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Sean:

$$\begin{aligned} u &= x^2, & du &= 2x\, dx, \\ dv &= \mathrm{e}^{-x}\, dx, & v &= -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

La integral será:

$$\begin{aligned} & \lim_{t\to\infty} \left[-x^2 \mathrm{e}^{-x}\right]_1^t + 2\int_1^t x\mathrm{e}^{-x}\, dx \\ = \; & \lim_{t\to\infty} \left(-t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-1} + 2\int_1^t x\mathrm{e}^{-x}\, dx\right). \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El límite $\lim_{t\to\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t}$ vale 0 ya que aplicando la regla de Hôpital obtenemos:

Solución (cont.)

El límite $\lim_{t\to\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t}$ vale 0 ya que aplicando la regla de Hôpital obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{e}^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^t} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Solución (cont.)

El límite $\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}$ vale 0 ya que aplicando la regla de Hôpital obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{e}^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^t} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

La integral quedará, pues:

$$\frac{1}{\mathrm{e}} + 2\lim_{t\to\infty}\int_1^t x\mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

Solución (cont.)

El límite $\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}$ vale 0 ya que aplicando la regla de Hôpital obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{e}^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^t} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

La integral quedará, pues:

$$\frac{1}{\mathrm{e}} + 2 \lim_{t\to\infty} \int_1^t x\mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Volvemos a aplicar la técnica de integración por parte a la integral que queda:

Solución (cont.)

El límite $\lim\limits_{t\to\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}$ vale 0 ya que aplicando la regla de Hôpital obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{e}^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^t} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

La integral quedará, pues:

$$\frac{1}{\mathrm{e}} + 2\lim_{t\to\infty} \int_1^t x\mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

Volvemos a aplicar la técnica de integración por parte a la integral que queda:

$$\begin{aligned} u &= x, & du &= dx, \\ dv &= \mathrm{e}^{-x}\,dx, & v &= -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La integral será:

$$\frac{1}{\mathrm{e}} + 2\left(\lim_{t\to\infty}\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_1^t + \int_1^t \mathrm{e}^{-x}\,dx\right)$$

Solución (cont.)

La integral será:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathrm{e}}+2\left(\lim_{t\to\infty}\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_1^t+\int_1^t \mathrm{e}^{-x}\,dx\right) \\
= \ & \frac{1}{\mathrm{e}}+2\left(\frac{1}{\mathrm{e}}+\lim_{t\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^t\right)
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

La integral será:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathrm{e}} + 2\left(\lim_{t\to\infty}\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_1^t + \int_1^t \mathrm{e}^{-x}\,dx\right) \\ = \; & \frac{1}{\mathrm{e}} + 2\left(\frac{1}{\mathrm{e}} + \lim_{t\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^t\right) = \frac{3}{\mathrm{e}} + 2\lim_{t\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La integral será:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathrm{e}} + 2\left(\lim_{t\to\infty} \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_1^t + \int_1^t \mathrm{e}^{-x}\,dx\right) \\ = \; & \frac{1}{\mathrm{e}} + 2\left(\frac{1}{\mathrm{e}} + \lim_{t\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^t\right) = \frac{3}{\mathrm{e}} + 2\lim_{t\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{5}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2

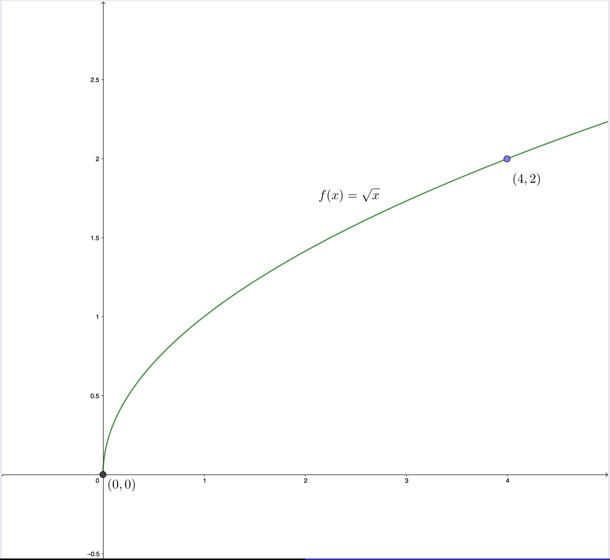
Calcular la longitud de la curva $y = f(x) = \sqrt{x}$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(4, 2)$.

Solución

Hagamos un gráfico tal como hemos hecho anteriormente:

Solución

Hagamos un gráfico tal como hemos hecho anteriormente:



Solución (cont.)

La longitud de la curva pedida será:

Solución (cont.)

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx =$$

Solución (cont.)

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx.$$

Solución (cont.)

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx.$$

Fijarse que se trata de una integral impropia de segunda especie con una singularidad en $x = 0$.

Solución (cont.)

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx.$$

Fijarse que se trata de una integral impropia de segunda especie con una singularidad en $x=0$.
Para resolver la integral anterior hacemos el cambio de variable siguiente:

$$\sqrt{1+\frac{1}{4x}} = t,$$

Solución (cont.)

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\, dx.$$

Fijarse que se trata de una integral impropia de segunda especie con una singularidad en $x = 0$.
Para resolver la integral anterior hacemos el cambio de variable siguiente:

$$\sqrt{1+\frac{1}{4x}} = t, \;\; \Rightarrow x = \frac{1}{4(t^2-1)},$$

Solución (cont.)

La longitud de la curva pedida será:

$$L=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx.$$

Fijarse que se trata de una integral impropia de segunda especie con una singularidad en $x=0$.

Para resolver la integral anterior hacemos el cambio de variable siguiente:

$$\sqrt{1+\frac{1}{4x}}=t,\ \Rightarrow x=\frac{1}{4(t^2-1)},\ \Rightarrow dx=-\frac{t}{2(t^2-1)^2}\,dt.$$

Solución (cont.)

Los extremos de integración serán en la nueva variable t:

Solución (cont.)

Los extremos de integración serán en la nueva variable t:

$x = 0$: en este caso $t \to \infty$.
$x = 4$: en este caso $t = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

Solución (cont.)

Los extremos de integración serán en la nueva variable t:

$x = 0$: en este caso $t \to \infty$.
$x = 4$: en este caso $t = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

La integral a calcular en la nueva variable t será:

$$L = \int_{\infty}^{\frac{\sqrt{17}}{4}} \left(-\frac{t^2}{2(t^2-1)^2} \right) dt =$$

Solución (cont.)

Los extremos de integración serán en la nueva variable t:

$x = 0$: en este caso $t \to \infty$.
$x = 4$: en este caso $t = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

La integral a calcular en la nueva variable t será:

$$L = \int_{\infty}^{\frac{\sqrt{17}}{4}} \left(-\frac{t^2}{2(t^2-1)^2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\, dt.$$

Solución (cont.)

Los extremos de integración serán en la nueva variable t:

$x = 0$: en este caso $t \to \infty$.
$x = 4$: en este caso $t = \sqrt{1+\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

La integral a calcular en la nueva variable t será:

$$L = \int_{\infty}^{\frac{\sqrt{17}}{4}} \left(-\frac{t^2}{2(t^2-1)^2}\right)\, dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\, dt.$$

Se trata de una integral racional en el que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Solución (cont.)

Por tanto, hemos de descomponer la función a integral de la forma siguiente usando que la descomposición del denominador es:

$$(t^2-1)^2 = (t-1)^2 \cdot (t+1)^2.$$

Solución (cont.)

Por tanto, hemos de descomponer la función a integral de la forma siguiente usando que la descomposición del denominador es:

$$(t^2-1)^2=(t-1)^2\cdot(t+1)^2.$$

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2}=\frac{A_1}{t-1}+\frac{A_2}{(t-1)^2}+\frac{A_3}{t+1}+\frac{A_4}{(t+1)^2}.$$

Solución (cont.)

Por tanto, hemos de descomponer la función a integral de la forma siguiente usando que la descomposición del denominador es:

$$(t^2-1)^2 = (t-1)^2 \cdot (t+1)^2.$$

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{(t-1)^2} + \frac{A_3}{t+1} + \frac{A_4}{(t+1)^2}.$$

Los valores A_i son los siguientes:

Solución (cont.)

Por tanto, hemos de descomponer la función a integral de la forma siguiente usando que la descomposición del denominador es:

$$(t^2-1)^2 = (t-1)^2 \cdot (t+1)^2.$$

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{(t-1)^2} + \frac{A_3}{t+1} + \frac{A_4}{(t+1)^2}.$$

Los valores A_i son los siguientes:

$$A_1 = \frac{1}{4},\ A_2 = \frac{1}{4},\ A_3 = -\frac{1}{4},\ A_4 = \frac{1}{4}.$$

Solución (cont.)

La longitud de la curva será:

$$L = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4(t+1)}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty}$$

Solución (cont.)

La longitud de la curva será:

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4(t+1)}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \\
&= \frac{1}{8}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{2t}{t^2-1}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty}
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

La longitud de la curva será:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4(t+1)}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{8}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{2t}{t^2-1}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} = -\frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{17}}{4}-1}{\frac{\sqrt{17}}{4}+1}\right| - \frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{17}{16}-1}\right) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La longitud de la curva será:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4(t+1)}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{8}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{2t}{t^2-1}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} = -\frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{17}}{4}-1}{\frac{\sqrt{17}}{4}+1}\right| - \frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{17}{16}-1}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(8\sqrt{17} - \ln\left(\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}\right)\right) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La longitud de la curva será:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4(t+1)}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{8}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{2t}{t^2-1}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} = -\frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{17}}{4}-1}{\frac{\sqrt{17}}{4}+1}\right| - \frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{17}{16}-1}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(8\sqrt{17} - \ln\left(\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}\right)\right) = \sqrt{17} - \frac{1}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}\right) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La longitud de la curva será:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4(t+1)}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \\
&= \frac{1}{8}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{2t}{t^2-1}\right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} = -\frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{17}}{4}-1}{\frac{\sqrt{17}}{4}+1}\right| - \frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{17}{16}-1}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(8\sqrt{17} - \ln\left(\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}\right)\right) = \sqrt{17} - \frac{1}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4}\right) \\
&\approx 4.6468.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Consideremos la región en el plano siguiente:

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 1,\ 0\leq y\leq \frac{1}{x}\right\}.$$

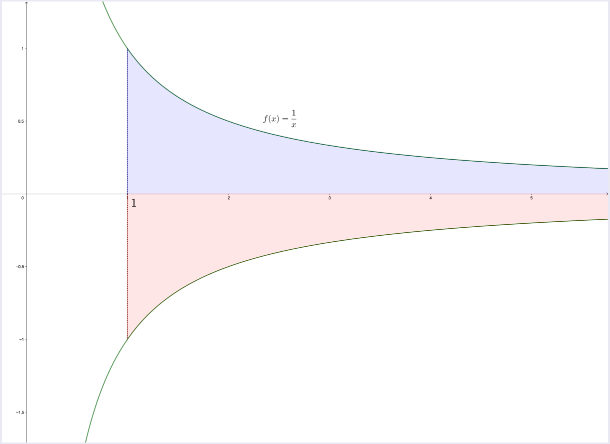
Rotamos dicha región alrededor del eje X. Demostrar que el volumen de la figura obtenida es finito; sin embargo el área de la superficie obtenida es infinita. A dicha superficie se le llama **cuerno de Gabriel.**

Solución

Hagamos un gráfico tal como hemos hecho anteriormente:

Solución

Hagamos un gráfico tal como hemos hecho anteriormente:



Solución (cont.)

El volumen del cuerno de Gabriel será:

Solución (cont.)

El volumen del cuerno de Gabriel será:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Solución (cont.)

El volumen del cuerno de Gabriel será:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Solución (cont.)

El volumen del cuerno de Gabriel será:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \pi \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\, dx = \pi \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t$$

Solución (cont.)

El volumen del cuerno de Gabriel será:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t \\ &= \pi\left(-\frac{1}{t}+1\right) = \pi. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Para calcular el área del cuerno de Gabriel hemos de estudiar la integral impropia siguiente:

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

Solución (cont.)

Para calcular el área del cuerno de Gabriel hemos de estudiar la integral impropia siguiente:

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\, dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx$$

Solución (cont.)

Para calcular el área del cuerno de Gabriel hemos de estudiar la integral impropia siguiente:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\, dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Para calcular el área del cuerno de Gabriel hemos de estudiar la integral impropia siguiente:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx \\ &= 2\pi\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Para ver que dicha integral es divergente aplicaremos el criterio del límite a las funciones:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2},\quad \frac{1}{x}.$$

Solución (cont.)

El límite del cociente de las funciones anteriores vale:

Solución (cont.)

El límite del cociente de las funciones anteriores vale:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1.$$

Solución (cont.)

El límite del cociente de las funciones anteriores vale:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1.$$

Entonces las integrales impropias $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$ y $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ tienen es mismo carácter.

Solución (cont.)

El límite del cociente de las funciones anteriores vale:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1.$$

Entonces las integrales impropias $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, dx$ y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ tienen es mismo carácter.

Estudiemos pues la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$:

Solución (cont.)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$$

Solución (cont.)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\, dx =$$

Solución (cont.)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty.$$

Solución (cont.)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty.$$

Como la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ es divergente, la nuestra $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, dx$ también lo es

Volumen y área

Solución (cont.)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty.$$

Como la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ es divergente, la nuestra $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$ también lo es y concluimos que el cuerno de Gabriel tiene área infinita.