

Problemas resueltos de derivación

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Section 1

Regla de l'Hôpital

Enunciado

Calcular los límites siguientes:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

Solución del primer límite

Para calcular el primer límite, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos” x por ∞ :

Solución del primer límite

Para calcular el primer límite, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos” x por ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} =$$

Solución del primer límite

Para calcular el primer límite, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos” x por ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\tan \frac{\pi}{2} \right)^0 =$$

Solución del primer límite

Para calcular el primer límite, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos” x por ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\tan \frac{\pi}{2} \right)^0 = \infty^0.$$

Solución del primer límite

Para calcular el primer límite, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos” x por ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\tan \frac{\pi}{2} \right)^0 = \infty^0.$$

Tenemos una indeterminación del tipo ∞^0 .

Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right) =$$

Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x} =$$

Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x} = \frac{\infty}{\infty},$$

Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x} = \frac{\infty}{\infty},$$

donde ahora tenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Solución del primer límite

Para resolverla, aplicamos la regla de l'Hôpital:

Solución del primer límite

Para resolverla, aplicamos la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} \cdot \left(\frac{\pi x}{2x+1} \right)'}{\tan \frac{\pi x}{2x+1}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} \cdot \left(\frac{\pi}{(2x+1)^2} \right)}{\tan \frac{\pi x}{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{(2x+1)^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos \frac{\pi x}{2x+1}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{(2x+1)^2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{2x+1}} = \frac{2\pi}{\infty \cdot \sin \pi} = \frac{2\pi}{\infty \cdot 0}.\end{aligned}$$

Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:

Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)^2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)'}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cos \frac{2\pi x}{2x+1}}{-\frac{4}{(2x+1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cdot (-1)}{0} = \infty.\end{aligned}$$

Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)^2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)'}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cos \frac{2\pi x}{2x+1}}{-\frac{4}{(2x+1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cdot (-1)}{0} = \infty.\end{aligned}$$

Nuestro límite será, pues:

$$\ln L = \frac{2\pi}{\infty} = 0,$$

Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)^2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)'}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cos \frac{2\pi x}{2x+1}}{-\frac{4}{(2x+1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cdot (-1)}{0} = \infty.\end{aligned}$$

Nuestro límite será, pues:

$$\ln L = \frac{2\pi}{\infty} = 0,$$

y, por tanto, $L = e^0 = 1$.

El segundo límite era el siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

Solución del segundo límite

El segundo límite era el siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Solución del segundo límite

El segundo límite era el siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Si aplicamos la regla de l'Hôpital, obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right)'$$

Solución del segundo límite

A continuación vamos a derivar la función $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

Solución del segundo límite

A continuación vamos a derivar la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Para ello, consideramos la función $\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$.

Solución del segundo límite

A continuación vamos a derivar la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Para ello, consideramos la función $\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$.

La derivada de la función anterior será:

Solución del segundo límite

A continuación vamos a derivar la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Para ello, consideramos la función $\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$.

La derivada de la función anterior será:

$$\begin{aligned} (\ln f(x))' &= \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{-(1+x) \ln(1+x) + x}{x^2(1+x)}. \end{aligned}$$

Solución del segundo límite

Por tanto,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right)' = f(x) \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)} \\&= (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)}.\end{aligned}$$

Solución del segundo límite

Por tanto,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right)' = f(x) \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)} \\&= (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)}.\end{aligned}$$

El límite a calcular valdrá:

Solución del segundo límite

Por tanto,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' = f(x) \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)} \\&= (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)}.\end{aligned}$$

El límite a calcular valdrá:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)} \\&= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2 + x^3} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x) - 1 + 1}{2x + 3x^2} \\&= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x + 3x^2} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2 + 6x} = e \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}.\end{aligned}$$

Section 2

Cálculo de extremos

Enunciado

Hallar los valores máximos y mínimos de las funciones siguientes:

- 1 $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ para x en el intervalo $[-1, 1]$.
- 2 $g(x) = |3x - x^2|$ para $|x| \leq 2$.

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

- 1 $[-1, 1]$ en el primer caso y

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

- 1 $[-1, 1]$ en el primer caso y
- 2 $[-2, 2]$ en el segundo caso.

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

- 1 $[-1, 1]$ en el primer caso y
- 2 $[-2, 2]$ en el segundo caso.

Los extremos se pueden alcanzar en el interior del intervalo o en los extremos del mismo.

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

- 1 $[-1, 1]$ en el primer caso y
- 2 $[-2, 2]$ en el segundo caso.

Los extremos se pueden alcanzar en el interior del intervalo o en los extremos del mismo.

Para hallar los posibles extremos en el interior del intervalo, hemos de resolver $f'(x) = 0$ (primer caso) o $g'(x) = 0$ (segundo caso).

En general, sean x_1, \dots, x_k los extremos hallados en el interior de un intervalo $[a, b]$,

En general, sean x_1, \dots, x_k los extremos hallados en el interior de un intervalo $[a, b]$, es decir, valores que anulan la derivada.

En general, sean x_1, \dots, x_k los extremos hallados en el interior de un intervalo $[a, b]$, es decir, valores que anulan la derivada.

Para hallar el mínimo absoluto y el máximo absoluto, realizamos la tabla siguiente:

a	x_1	\dots	x_k	b
$f(a)$	$f(x_1)$	\dots	$f(x_k)$	$f(b)$

En general, sean x_1, \dots, x_k los extremos hallados en el interior de un intervalo $[a, b]$, es decir, valores que anulan la derivada.

Para hallar el mínimo absoluto y el máximo absoluto, realizamos la tabla siguiente:

a	x_1	\dots	x_k	b
$f(a)$	$f(x_1)$	\dots	$f(x_k)$	$f(b)$

El valor mínimo de la función f corresponderá al mínimo absoluto y el valor máximo, al máximo absoluto.

Solución para la primera función

La función era $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución para la primera función

La función era $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

Solución para la primera función

La función era $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{5 - 4x}} \neq 0.$$

Vemos que no hay.

Solución para la primera función

La función era $f(x) = \sqrt{5-4x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{5-4x}} \neq 0.$$

Vemos que no hay.

Por tanto, los extremos se alcanzan en los extremos del intervalo $[-1, 1]$:

-1	1
$f(-1) = \sqrt{9} = 3$	$f(1) = \sqrt{1} = 1$

Solución para la primera función

La función era $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{5-4x}} \neq 0.$$

Vemos que no hay.

Por tanto, los extremos se alcanzan en los extremos del intervalo $[-1, 1]$:

-1	1
$f(-1) = \sqrt{9} = 3$	$f(1) = \sqrt{1} = 1$

El mínimo absoluto será el punto $(1, 1)$ y el máximo absoluto, $(-1, 3)$.

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Veamos en primer lugar cuándo $3x - x^2 \geq 0$ y cuándo $3x - x^2 < 0$ ya que tenemos un valor absoluto:

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Veamos en primer lugar cuándo $3x - x^2 \geq 0$ y cuándo $3x - x^2 < 0$ ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Veamos en primer lugar cuándo $3x - x^2 \geq 0$ y cuándo $3x - x^2 < 0$ ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Hemos de mirar los posibles cambios de signo en $x = 0$ y $x = 3$:

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Veamos en primer lugar cuándo $3x - x^2 \geq 0$ y cuándo $3x - x^2 < 0$ ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Hemos de mirar los posibles cambios de signo en $x = 0$ y $x = 3$:

$-\infty$	0	3	∞
<hr/>			
	$-$	$+$	$-$
<hr/>			

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Veamos en primer lugar cuándo $3x - x^2 \geq 0$ y cuándo $3x - x^2 < 0$ ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Hemos de mirar los posibles cambios de signo en $x = 0$ y $x = 3$:

$-\infty$	0	3	∞
<hr/>			
	$-$	$+$	$-$
<hr/>			

Entonces $3x - x^2 \geq 0$ si $x \in [0, 3]$ y $3x - x^2 < 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$.

Solución para la segunda función

Podemos escribir la función $g(x)$ de la forma siguiente:

Solución para la segunda función

Podemos escribir la función $g(x)$ de la forma siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 3x - x^2, & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Solución para la segunda función

Podemos escribir la función $g(x)$ de la forma siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 3x - x^2, & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo $[-2, 2]$:

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x \in (-2, 0), \\ 3 - 2x, & \text{si } x \in (0, 2). \end{cases}$$

Solución para la segunda función

Podemos escribir la función $g(x)$ de la forma siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 3x - x^2, & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo $[-2, 2]$:

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x \in (-2, 0), \\ 3 - 2x, & \text{si } x \in (0, 2). \end{cases}$$

El único valor que verifica $g'(x) = 0$ es $x = \frac{3}{2}$.

Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

- $x = -2$, por ser extremo del intervalo,

Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

- $x = -2$, por ser extremo del intervalo,
- $x = 0$, porque la función g no es derivable en $x = 0$ y hay que considerarlo,

Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

- $x = -2$, por ser extremo del intervalo,
- $x = 0$, porque la función g no es derivable en $x = 0$ y hay que considerarlo,
- $x = \frac{3}{2}$, porque está en el interior del intervalo y anula la derivada y,
- $x = 2$, por ser extremo del intervalo.

Solución para la segunda función

-2	0	$\frac{3}{2}$	2
$g(-2) = 10$	$g(0) = 0$	$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2.25$	$g(2) = 2$

Solución para la segunda función

-2	0	$\frac{3}{2}$	2
$g(-2) = 10$	$g(0) = 0$	$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2.25$	$g(2) = 2$

El máximo absoluto se alcanza en el punto $(-2, 10)$ y el mínimo absoluto, $(0, 0)$.