Problemas resueltos de derivación

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Section 1

Regla de l'Hôpital

Enunciado

Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

Solución del primer límite

Para calcular el primer límite, $\lim_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos” x por ∞:

Solución del primer límite

Para calcular el primer límite, $\lim_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si "sustituimos" x por ∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

Solución del primer límite

Para calcular el primer límite, $\lim_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si "sustituimos" x por ∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\tan\frac{\pi}{2}\right)^{0} =$$

Solución del primer límite

Para calcular el primer límite, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si "sustituimos" x por ∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\tan\frac{\pi}{2}\right)^{0} = \infty^{0}.$$

Solución del primer límite

Para calcular el primer límite, $\lim_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si "sustituimos" x por ∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\tan\frac{\pi}{2}\right)^{0} = \infty^{0}.$$

Tenemos una indeterminación del tipo ∞^0.

Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x\to\infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x\to\infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right) =$$

Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x\to\infty} \left(\tan \dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x} =$$

Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x\to\infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x} = \frac{\infty}{\infty},$$

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x} = \frac{\infty}{\infty},$$

donde ahora tenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Para resolverla, aplicamos la regla de l'Hôpital:

Para resolverla, aplicamos la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)'}{\tan\frac{\pi x}{2x+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\left(\frac{\pi}{(2x+1)^2}\right)}{\tan\frac{\pi x}{2x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{(2x+1)^2\cdot\sin\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos\frac{\pi x}{2x+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2\pi}{(2x+1)^2\cdot\sin\frac{2\pi x}{2x+1}} = \frac{2\pi}{\infty\cdot\sin\pi} = \frac{2\pi}{\infty\cdot 0}.
\end{aligned}$$

Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:

Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:

$$\lim_{x\to\infty}(2x+1)^2\cdot\sin\frac{2\pi x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{2\pi x}{2x+1}\cdot\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)'}{-\frac{4}{(2x+1)^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{2\pi x}{2x+1}\cdot\frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{-\frac{4}{(2x+1)^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\pi\cos\frac{2\pi x}{2x+1}}{-\frac{4}{(2x+1)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\pi\cdot(-1)}{0}=\infty.$$

Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:

$$\lim_{x\to\infty}(2x+1)^2\cdot\sin\frac{2\pi x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{2\pi x}{2x+1}\cdot\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)'}{-\frac{4}{(2x+1)^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{2\pi x}{2x+1}\cdot\frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{-\frac{4}{(2x+1)^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\pi\cos\frac{2\pi x}{2x+1}}{-\frac{4}{(2x+1)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\pi\cdot(-1)}{0}=\infty.$$

Nuestro límite será, pues:

$$\ln L=\frac{2\pi}{\infty}=0,$$

Resolvamos la última indeterminación aparte:

$$\lim_{x\to\infty}(2x+1)^2\cdot\sin\frac{2\pi x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{2\pi x}{2x+1}\cdot\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)'}{-\frac{4}{(2x+1)^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{2\pi x}{2x+1}\cdot\frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{-\frac{4}{(2x+1)^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\pi\cos\frac{2\pi x}{2x+1}}{-\frac{4}{(2x+1)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\pi\cdot(-1)}{0}=\infty.$$

Nuestro límite será, pues:

$$\ln L=\frac{2\pi}{\infty}=0,$$

y, por tanto, $L=\mathrm{e}^0=1$.

Solución del segundo límite

El segundo límite era el siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}.$$

Solución del segundo límite

El segundo límite era el siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}.$$

Como $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

El segundo límite era el siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Si aplicamos la regla de l'Hôpital, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x} = \lim_{x\to 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)'$$

A continuación vamos a derivar la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Solución del segundo límite

A continuación vamos a derivar la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Para ello, consideramos la función $\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$.

A continuación vamos a derivar la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Para ello, consideramos la función $\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$.

La derivada de la función anterior será:

A continuación vamos a derivar la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Para ello, consideramos la función $\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$.

La derivada de la función anterior será:

$$
\begin{aligned}
(\ln f(x))' =& \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \\
=& \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)}.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' &= f(x) \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x)+x}{x^2(1+x)} \\
&= (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x)+x}{x^2(1+x)}.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$f'(x) = \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' = f(x) \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x)+x}{x^2(1+x)}$$
$$=(1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x)+x}{x^2(1+x)}.$$

El límite a calcular valdrá:

Solución del segundo límite

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' &= f(x)\cdot\frac{-(1+x)\ln(1+x)+x}{x^2(1+x)}\\
&=(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-(1+x)\ln(1+x)+x}{x^2(1+x)}.
\end{aligned}
$$

El límite a calcular valdrá:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-(1+x)\ln(1+x)+x}{x^2(1+x)}\\
&= \mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-(1+x)\ln(1+x)+x}{x^2+x^3)} = \mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)-1+1}{2x+3x^2}\\
&= \mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2} = \mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x} = \mathrm{e}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\mathrm{e}}{2}.
\end{aligned}
$$

Section 2

Cálculo de extremos

Enunciado

Hallar los valores máximos y mínimos de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \sqrt{5-4x}$ para x en el intervalo $[-1, 1]$.
2. $g(x) = |3x - x^2|$ para $|x| \leq 2$.

Solución

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

Solución

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

1. $[-1, 1]$ en el primer caso y

Solución

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

1. $[-1, 1]$ en el primer caso y
2. $[-2, 2]$ en el segundo caso.

Solución

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

1. $[-1, 1]$ en el primer caso y
2. $[-2, 2]$ en el segundo caso.

Los extremos se pueden alcanzar en el interior del intervalo o en los extremos del mismo.

Solución

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

1. $[-1, 1]$ en el primer caso y
2. $[-2, 2]$ en el segundo caso.

Los extremos se pueden alcanzar en el interior del intervalo o en los extremos del mismo.

Para hallar los posibles extremos en el interior del intervalo, hemos de resolver $f'(x) = 0$ (primer caso) o $g'(x) = 0$ (segundo caso).

Solución

En general, sean $x_1, \ldots, x_k$ los extremos hallados en el interior de un intervalo $[a, b]$,

Solución

En general, sean $x_1, \ldots, x_k$ los extremos hallados en el interior de un intervalo $[a, b]$, es decir, valores que anulan la derivada.

Solución

En general, sean $x_1, \ldots, x_k$ los extremos hallados en el interior de un intervalo $[a, b]$, es decir, valores que anulan la derivada.

Para hallar el mínimo absoluto y el máximo absoluto, realizamos la tabla siguiente:

a	x_1	$\cdots$	x_k	b
$f(a)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_k)$	$f(b)$

Solución

En general, sean $x_1, \ldots, x_k$ los extremos hallados en el interior de un intervalo $[a, b]$, es decir, valores que anulan la derivada.

Para hallar el mínimo absoluto y el máximo absoluto, realizamos la tabla siguiente:

a	x_1	$\cdots$	x_k	b
$f(a)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_k)$	$f(b)$

El valor mínimo de la función f corresponderá al mínimo absoluto y el valor máximo, al máximo absoluto.

Solución para la primera función

La función era $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución para la primera función

La función era $f(x) = \sqrt{5-4x}$ en el intervalo $[-1,1]$.

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

Solución para la primera función

La función era $f(x) = \sqrt{5-4x}$ en el intervalo $[-1,1]$.

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{5-4x}} \neq 0.$$

Vemos que no hay.

Solución para la primera función

La función era $f(x) = \sqrt{5-4x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{5-4x}} \neq 0.$$

Vemos que no hay.

Por tanto, los extremos se alcanzan en los extremos del intervalo $[-1, 1]$:

-1	1
$f(-1) = \sqrt{9} = 3$	$f(1) = \sqrt{1} = 1$

Solución para la primera función

La función era $f(x) = \sqrt{5-4x}$ en el intervalo $[-1,1]$.

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{5-4x}} \neq 0.$$

Vemos que no hay.

Por tanto, los extremos se alcanzan en los extremos del intervalo $[-1,1]$:

-1	1
$f(-1)=\sqrt{9}=3$	$f(1)=\sqrt{1}=1$

El mínimo absoluto será el punto $(1,1)$ y el máximo absoluto, $(-1,3)$.

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Veamos en primer lugar cuándo $3x - x^2 \geq 0$ y cuándo $3x - x^2 < 0$ ya que tenemos un valor absoluto:

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Veamos en primer lugar cuándo $3x - x^2 \geq 0$ y cuándo $3x - x^2 < 0$ ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Veamos en primer lugar cuándo $3x - x^2 \geq 0$ y cuándo $3x - x^2 < 0$ ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Hemos de mirar los posibles cambios de signo en $x = 0$ y $x = 3$:

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Veamos en primer lugar cuándo $3x - x^2 \geq 0$ y cuándo $3x - x^2 < 0$ ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Hemos de mirar los posibles cambios de signo en $x = 0$ y $x = 3$:

$-\infty$		0		3		∞
	$-$		$+$		$-$	

Solución para la segunda función

La función era $g(x) = |3x - x^2|$ para $x \in [-2, 2]$.

Veamos en primer lugar cuándo $3x - x^2 \geq 0$ y cuándo $3x - x^2 < 0$ ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Hemos de mirar los posibles cambios de signo en $x = 0$ y $x = 3$:

$-\infty$		0		3		∞
	$-$		$+$		$-$	

Entonces $3x - x^2 \geq 0$ si $x \in [0, 3]$ y $3x - x^2 < 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$.

Solución para la segunda función

Podemos escribir la función $g(x)$ de la forma siguiente:

Solución para la segunda función

Podemos escribir la función $g(x)$ de la forma siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 3x - x^2, & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Solución para la segunda función

Podemos escribir la función $g(x)$ de la forma siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 3x - x^2, & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo $[-2, 2]$:

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x \in (-2, 0), \\ 3 - 2x, & \text{si } x \in (0, 2). \end{cases}$$

Solución para la segunda función

Podemos escribir la función $g(x)$ de la forma siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 3x - x^2, & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo $[-2, 2]$:

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x \in (-2, 0), \\ 3 - 2x, & \text{si } x \in (0, 2). \end{cases}$$

El único valor que verifica $g'(x) = 0$ es $x = \frac{3}{2}$.

Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

- $x = -2$, por ser extremo del intervalo,

Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

- $x = -2$, por ser extremo del intervalo,
- $x = 0$, porque la función g no es derivable en $x = 0$ y hay que considerarlo,

Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

- $x = -2$, por ser extremo del intervalo,
- $x = 0$, porque la función g no es derivable en $x = 0$ y hay que considerarlo,
- $x = \frac{3}{2}$, porque está en el interior del intervalo y anula la derivada y,
- $x = 2$, por ser extremo del intervalo.

Solución para la segunda función

-2	0	$\frac{3}{2}$	2
$g(-2)=10$	$g(0)=0$	$g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}=2.25$	$g(2)=2$

Solución para la segunda función

-2	0	$\frac{3}{2}$	2
$g(-2)=10$	$g(0)=0$	$g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}=2.25$	$g(2)=2$

El máximo absoluto se alcanza en el punto $(-2,10)$ y el mínimo absoluto, $(0,0)$.

Section 3

Problemas de desigualdades

Desigualdades planteadas

Enunciado

Demostrar las desigualdades siguientes:

1. $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$, si $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y $x > a > 0$.
2. $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$, si $0 \leq x \leq 1$ y $p > 1$.

Solución de la primera desigualdad

Para demostrarla, haremos el cambio de variable siguiente $t = \sqrt[n]{x - a}$.

Solución de la primera desigualdad

Para demostrarla, haremos el cambio de variable siguiente $t = \sqrt[n]{x-a}$.

El valor de x será en función de t,

Solución de la primera desigualdad

Para demostrarla, haremos el cambio de variable siguiente $t = \sqrt[n]{x-a}$.

El valor de x será en función de t,

$$t^n = x - a, \Rightarrow x = t^n + a.$$

Solución de la primera desigualdad

Para demostrarla, haremos el cambio de variable siguiente $t = \sqrt[n]{x-a}$.

El valor de x será en función de t,

$$t^n = x - a, \Rightarrow x = t^n + a.$$

Reescribamos lo que tenemos que demostrar en función de la nueva variable t:

Solución de la primera desigualdad

Para demostrarla, haremos el cambio de variable siguiente $t = \sqrt[n]{x-a}$.

El valor de x será en función de t,

$$t^n = x - a, \Rightarrow x = t^n + a.$$

Reescribamos lo que tenemos que demostrar en función de la nueva variable t:

$$\sqrt[n]{t^n + a} - \sqrt[n]{a} < t,$$

si $n \geq 2$ y $t > 0$.

Solución de la primera desigualdad

Consideremos la función para $t \geq 0$, $f(t) = \sqrt[n]{t^n + a}$.

Consideremos la función para $t \geq 0$, $f(t) = \sqrt[n]{t^n + a}$.

Sea $t > 0$. Si aplicamos el Teorema del valor medio de la función anterior en el intervalo $[0, t]$,

Solución de la primera desigualdad

Consideremos la función para $t \geq 0$, $f(t) = \sqrt[n]{t^n + a}$.

Sea $t > 0$. Si aplicamos el Teorema del valor medio de la función anterior en el intervalo $[0, t]$, obtenemos que existe un valor $c \in (0, t)$ tal que:

Solución de la primera desigualdad

Consideremos la función para $t \geq 0$, $f(t) = \sqrt[n]{t^n + a}$.

Sea $t > 0$. Si aplicamos el Teorema del valor medio de la función anterior en el intervalo $[0, t]$, obtenemos que existe un valor $c \in (0, t)$ tal que:

$$\begin{aligned} f(t) - f(0) =& \sqrt[n]{t^n + a} - \sqrt[n]{a} = f'(c) \cdot t \\ =& \frac{1}{n} \cdot (c^n + a)^{\frac{1}{n} - 1} \cdot n \cdot c^{n-1} \cdot t = \frac{c^{n-1}}{(c^n + a)^{1 - \frac{1}{n}}} \cdot t \end{aligned}$$

Solución de la primera desigualdad

Como $c \in (0, 1)$,

Solución de la primera desigualdad

Como $c \in (0,1)$,

$$\frac{c^{n-1}}{(c^n+a)^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{c^{n-1}}{(c^n+a)^{\frac{n-1}{n}}} = \left(\frac{c}{(c^n+a)^{\frac{1}{n}}}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\left(\frac{c^n}{c^n+a}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = \left(\frac{c^n}{c^n+a}\right)^{\frac{n-1}{n}} < 1.$$

Como $c \in (0,1)$,

$$\frac{c^{n-1}}{(c^n+a)^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{c^{n-1}}{(c^n+a)^{\frac{n-1}{n}}} = \left(\frac{c}{(c^n+a)^{\frac{1}{n}}}\right)^{n-1}$$
$$= \left(\left(\frac{c^n}{c^n+a}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = \left(\frac{c^n}{c^n+a}\right)^{\frac{n-1}{n}} < 1.$$

Por tanto,

$$\sqrt[n]{t^n+a} - \sqrt[n]{a} = \frac{c^{n-1}}{(c^n+a)^{1-\frac{1}{n}}} \cdot t < t,$$

como queríamos demostrar.

Recordemos que hemos de demostrar que:

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1,$$

si $0 \leq x \leq 1$ y $p > 1$.

Recordemos que hemos de demostrar que:

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1,$$

si $0 \leq x \leq 1$ y $p > 1$.

Definimos la función $f(x) = x^p + (1-x)^p$.

Solución de la segunda desigualdad

Recordemos que hemos de demostrar que:

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1,$$

si $0 \leq x \leq 1$ y $p > 1$.

Definimos la función $f(x) = x^p + (1-x)^p$.

Hallemos el máximo y mínimos absolutos de la función anterior en el intervalo $[0, 1]$.

Solución de la segunda desigualdad

Primero hallemos los extremos relativos en el interior del intervalo:

Solución de la segunda desigualdad

Primero hallemos los extremos relativos en el interior del intervalo:

$$\begin{aligned} f'(x) =& p \cdot x^{p-1} - p \cdot (1-x)^{p-1} = 0, \ \Rightarrow \\ p \cdot x^{p-1} =& p \cdot (1-x)^{p-1}, \ \Rightarrow \\ x^{p-1} =& (1-x)^{p-1}, \ \Rightarrow \\ x =& 1-x, \Rightarrow 2x = 1, \ \Rightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comparamos los valores de la función en $x = 0, \frac{1}{2}$ y $x = 1$:

Comparamos los valores de la función en $x = 0, \frac{1}{2}$ y $x = 1$:

0	$\frac{1}{2}$	1
$f(0) = 1$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$	$f(1) = 1$

Solución de la segunda desigualdad

Comparamos los valores de la función en $x = 0, \frac{1}{2}$ y $x = 1$:

0	$\frac{1}{2}$	1
$f(0) = 1$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$	$f(1) = 1$

Los máximos absolutos se alcanzan en $x = 0$ y $x = 1$ y el mínimo absoluto, en $x = \frac{1}{2}$.

Comparamos los valores de la función en $x = 0, \frac{1}{2}$ y $x = 1$:

0	$\frac{1}{2}$	1
$f(0) = 1$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$	$f(1) = 1$

Los máximos absolutos se alcanzan en $x = 0$ y $x = 1$ y el mínimo absoluto, en $x = \frac{1}{2}$.

Podemos escribir por tanto,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0), \Rightarrow \frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1,$$

tal como queríamos demostrar.