Problemas de derivabilidad de funciones. Teoremas de derivabilidad

1. Demostrar que todo polinomio de grado 3 tiene necesariamente una raíz real. Es decir si $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con $a_3 \neq 0$, existe siempre un valor $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$.
2. Demostrar que para todo valor $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.
3. Dar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$,
   b) $h(x) = x^3 - 3x - 4$,
   c) $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$.
4. Dar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$,
   b) $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}$ para $x > 0$,
   c) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ para $x \in \mathbb{R}$.
5. Sean $a > b > 0$ números reales y $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo con $n \geq 2$. Demostrar que $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a-b)^{\frac{1}{n}}$. Indicación: demostrar que la función $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente para $x \geq 1$ y evaluarla en $x = 1$ y $x = \frac{a}{b}$.
6. Sea $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$. Supongamos que $f(0) = 0,\ f(1) = f(2) = 1$.
   a) Demostrar que existe un valor $c_1 \in (0,1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.
   b) Demostrar que existe un valor $c_2 \in (1,2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.
   c) Demostrar que existe un valor $c_3 \in (0,2)$ tal que $f'(c_3) = \frac{1}{3}$.
7. Usando la regla de L'Hôpital calcular los límites siguientes:
   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$,
   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$,
   c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$, con n valor entero, $n \geq 1$,
   d) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$.
8. Descomponer un número a en dos sumandos x e y tal que el valor de $x^2 + y^2$ sea mínimo.
9. Determinar las dimensiones que ha de tener un bote cilíndrico de 2 litros de capacidad para que se construya con la cantidad mínima de material.
10. De todos los rectángulos de igual perímetro, ¿cuál es el que tiene área mayor?