Derivación bajo el signo integral

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Derivación bajo el signo integral

Introducción

En esta presentación vamos a combinar lo aprendido en el capítulo de derivación y en el de integración con el objetivo de hallar la derivada de funciones del tipo:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt.$$

donde $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son funciones reales de variable real.

Antes de proceder con su resolución, veamos un ejemplo ilustrativo:

Introducción

Consideremos la función siguiente para valores $x > 0$:

$$F(x) = \int_x^{x^2} \sin t \, dt,$$

es decir el área de la función $\sin x$ entre dos valores que van cambiando con la variable x: los valores x y x^2.

Introducción

Introducción

Nos preguntamos cuál es la expresión de la derivada de la función $F(x)$:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt.$$

El siguiente resultado nos da la solución a nuestro problema.

Derivada de una función bajo el signo integral

Theorem

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua siendo D su dominio de definición. Sean $g, h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables tales que $g([a, b]) \subseteq D$, $h([a, b]) \subseteq D$. Definimos la función

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt.$$

Entonces F es derivable y el valor de su función derivada $F'(x)$ puede expresarse como:

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Derivada de una función bajo el signo integral

Demostración.

Usando las propiedades de la integral de una función podemos escribir la función $F(x)$ como:

$$F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\, dt - \int_a^{g(x)} f(t)\, dt, \tag{1}$$

siendo $a \in D$.

Derivada de una función bajo el signo integral

Para demostrar la proposición anterior basta demostrar que la derivada de las funciones:

$$H(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\,dt, \quad G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

valen, respectivamente,

$$H'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x), \quad G'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

ya que usando la expresión (1), podemos escribir la derivada de la función $F(x)$ como:

$$F'(x) = H'(x) - G'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Derivada de una función bajo el signo integral

Para ver las expresiones de las derivadas de las funciones $H(x)$ y $G(x)$, basta ver la expresión por ejemplo de $H'(x)$ ya que la otra, la expresión de $G'(x)$, se obtendría cambiando los papeles de la función $h(x)$ por $g(x)$.
Veamos pues que $H'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x)$.
Notemos en primer lugar que podemos escribir la función $H(x)$ como la composición de las funciones siguientes:
$H(x) = (\hat{F} \circ h)(x)$, siendo $\hat{F}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$. Efectivamente,

$$(\hat{F} \circ h)(x) = \hat{F}(h(x)) = \int_a^{h(x)} f(t)\, dt = H(x).$$

Derivada de una función bajo el signo integral

Aplicando la regla de la cadena obtenemos,

$$H'(x) = \hat{F}'(h(x)) \cdot h'(x),$$

pero usando el Teorema Fundamental del cálculo, tenemos que $\hat{F}'(z) = f(z)$. Por tanto, cambiando z por $h(x)$, tenemos lo que queríamos demostrar:

$$H'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x).$$

$\square$

Ejemplo

Calculemos, usando el resultado anterior, la derivada de la función que introdujimos al principio de esta presentación:

$$F(x) = \int_{x}^{x^2} \sin x \, dx.$$

En este caso, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ y $f(x) = \sin x$. Entonces:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \sin(x^2) \cdot (2x) - \sin(x) \cdot 1 = 2x \cdot \sin(x^2) - \sin x. \end{aligned}$$