Ejercicios resueltos de integración. 1a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

Consideremos la función $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Demostrar que la función es integrable en el intervalo anterior.

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.
La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$L(f, P_n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.
La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \end{aligned}$$

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.
La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \end{aligned}$$

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.
La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{(i-1)^2}{n^2}\right) = \end{aligned}$$

Solución

Consideremos la sucesión de particiones siguiente:

$$P_n = x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = x_n = 1,$$

es decir $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.
La suma inferior de f respecto la particion P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{(i-1)^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \left(n + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2\right) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1).$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1).$$

La suma inferior de f respecto de P_n será:

$$L(f, P_n) = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)\right)$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1).$$

La suma inferior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{6n^3} \cdot (n-1)n(2n-1) = 1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación usamos la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1).$$

La suma inferior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{6n^3}\cdot(n-1)n(2n-1) = 1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \frac{1}{n} =
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot (x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot (x_i-x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right) =
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \end{aligned}$$

Definición de integral

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(n+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \\ &= 1+\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La suma superior de f respecto de P_n será:

$$\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i-x_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(n+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\\
&= 1+\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = 1+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación calculemos $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n)$ y $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$:

$$L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3},$$

Solución (cont.)

A continuación calculemos $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n)$ y $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n)$:

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3}, \\
U(f, P_n) &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación calculemos $\lim\limits_{n\to\infty} L(f,P_n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} U(f,P_n)$:

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \lim_{n\to\infty} 1+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1+\frac{2}{6}=\frac{4}{3}, \\ U(f,P_n) &= \lim_{n\to\infty} 1+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1+\frac{2}{6}=\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Como los dos límites anteriores coinciden y además $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(P_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, deducimos que la función f es integrable en el intervalo $[0,1]$ y además $\int_{[0,1]} f = \frac{4}{3}$.

Teorema fundamental del cálculo

Ejercicio 2

La función error:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

se usa en probabilidad, estadística y ingeniería.

a) Demostrar que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\mathrm{erf}(\mathrm{b}) - \mathrm{erf}(a))$.

b) Demostrar que la función $y = x^2\mathrm{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $\sqrt{\pi}xy' = 2\sqrt{\pi}y + 2x^3\mathrm{e}^{-x^2}$.

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\mathrm{erf}(b) - \mathrm{erf}(a)$$

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\mathrm{erf}(b)-\mathrm{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt - \int_0^a \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right)$$

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\mathrm{erf}(b)-\mathrm{erf}(a)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt-\int_0^a \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt,$$

y, por tanto,

Solución

Apartado a). Aplicando la propiedad de la aditividad de la integral en un intervalo tenemos que:

$$\mathrm{erf}(b)-\mathrm{erf}(a)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt-\int_0^a \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt,$$

y, por tanto,

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\mathrm{erf}(b)-\mathrm{erf}(a)).$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$y' = 2x \cdot \mathrm{erf}(x) + x^2 \cdot \mathrm{erf}'(x) =$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\operatorname{erf}(x)$:

$$\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$y' = 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \operatorname{erf}'(x) = 2x \cdot \operatorname{erf}(x) + x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x \cdot \mathrm{erf}(x) + x^2 \cdot \mathrm{erf}'(x) = 2x \cdot \mathrm{erf}(x) + x^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2x \cdot \frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} = \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\mathrm{erf}'(x) = 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2x\cdot\frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{2y}{x} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\mathrm{erf}'(x) = 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2x\cdot\frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{2y}{x} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\sqrt{\pi}x$ nos queda:

Solución (cont.)

Apartado b). Aplicando el Teorema fundamental del cálculo, podemos hallar la derivada de la función $\mathrm{erf}(x)$:

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\mathrm{erf}'(x) = 2x\cdot\mathrm{erf}(x) + x^2\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2x\cdot\frac{y}{x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{2y}{x} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\sqrt{\pi}x$ nos queda:

$$\sqrt{\pi}xy' = 2\sqrt{\pi}y + 2x^3\mathrm{e}^{-x^2}.$$