

Ejercicios resueltos de integración. 2a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

- a) Calcular el área entre las curvas $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = -3x^2 + 10$, para $-1 \leq x \leq 1$.
- b) Calcular el área encerrada por las curvas $f(x) = x^4$ y $g(x) = -2x^2 + 3$.

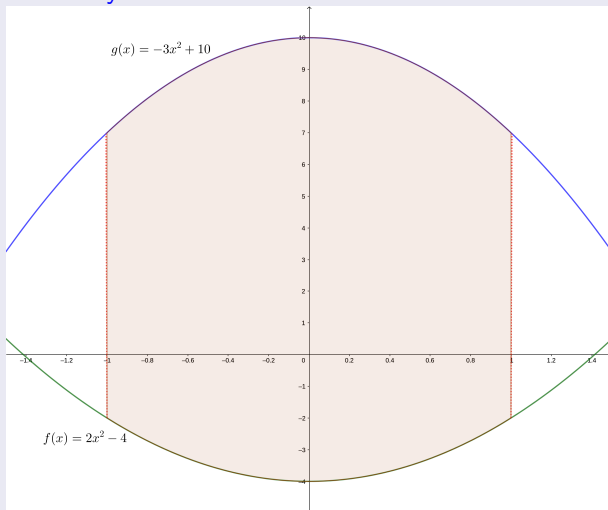
Solución

Apartado a). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g para x entre -1 y 1 :

Áreas de figuras planas

Solución

Apartado a). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g para x entre -1 y 1 :



Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx =$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4) dx \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) \, dx &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (-5x^2 + 14) \, dx\end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4) dx \\ &= \int_{-1}^1 (-5x^2 + 14) dx = \left[-5\frac{x^3}{3} + 14x \right]_{-1}^1 \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4) dx \\&= \int_{-1}^1 (-5x^2 + 14) dx = \left[-5\frac{x^3}{3} + 14x \right]_{-1}^1 \\&= -\frac{5}{3} + 14 - \left(\frac{5}{3} - 14 \right) \\&= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4) dx \\&= \int_{-1}^1 (-5x^2 + 14) dx = \left[-5\frac{x^3}{3} + 14x \right]_{-1}^1 \\&= -\frac{5}{3} + 14 - \left(\frac{5}{3} - 14 \right) \\&= -\frac{10}{3} + 28 = \frac{74}{3} \approx 24.6667.\end{aligned}$$

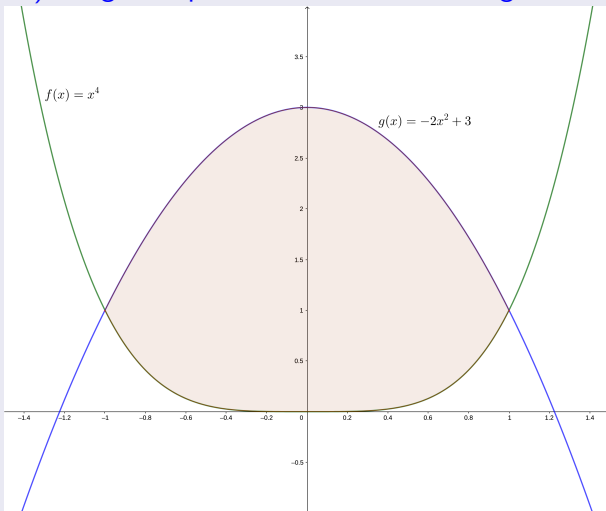
Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g :

Áreas de figuras planas

Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g :



Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) = g(x),$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) = g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3,$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) = g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0,$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} =\end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} =\end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1, -3.\end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1, -3.\end{aligned}$$

La única solución admisible es $x^2 = 1$,

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1, -3.\end{aligned}$$

La única solución admisible es $x^2 = 1$, de donde $x = \pm 1$.

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1, -3.\end{aligned}$$

La única solución admisible es $x^2 = 1$, de donde $x = \pm 1$.

Los puntos de corte serán, pues $(-1, 1)$ y $(1, 1)$, tal como se observa en la gráfica de las funciones f y g .

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx =$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3 - x^4) dx \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3 - x^4) dx \\ &= \left[-2\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3 - x^4) dx \\&= \left[-2\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\&= -\frac{2}{3} + 3 - \frac{1}{5} - \left(\frac{2}{3} - 3 + \frac{1}{5} \right) \\&= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3 - x^4) dx \\&= \left[-2\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\&= -\frac{2}{3} + 3 - \frac{1}{5} - \left(\frac{2}{3} - 3 + \frac{1}{5} \right) \\&= -\frac{4}{3} + 6 - \frac{2}{5} = \frac{64}{15} \approx 4.2667.\end{aligned}$$

Ejercicio 2

- a) Calcular el volumen de revolución al girar la curva $y = x^2$ alrededor del eje X para $2 \leq x \leq 5$.
- b) Calcular el volumen de revolución al girar la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje Y para $1 \leq x \leq 9$.
- c) Calcular el volumen de revolución al girar la curva $y = x + 3$ alrededor del eje $y = 5$ para $0 \leq x \leq 5$.

Volúmenes de revolución

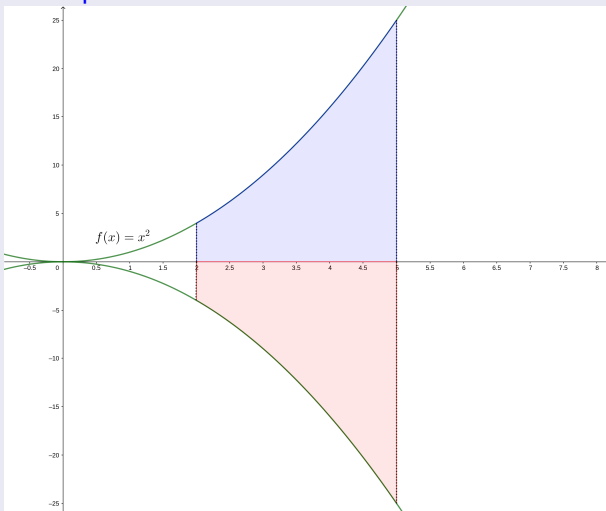
Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:

Volúmenes de revolución

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:



Solución (cont.)

El volumen pedido será:

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 dx$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 dx = \pi \int_2^5 x^4 dx =$$

Volúmenes de revolución

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 dx = \pi \int_2^5 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_2^5 =$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 dx = \pi \int_2^5 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_2^5 = \frac{\pi}{5} (5^5 - 2^5)$$

Volúmenes de revolución

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^5 (x^2)^2 dx = \pi \int_2^5 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_2^5 = \frac{\pi}{5} (5^5 - 2^5) \\ &= \frac{3093\pi}{5} \approx 1943.3892. \end{aligned}$$

Volúmenes de revolución

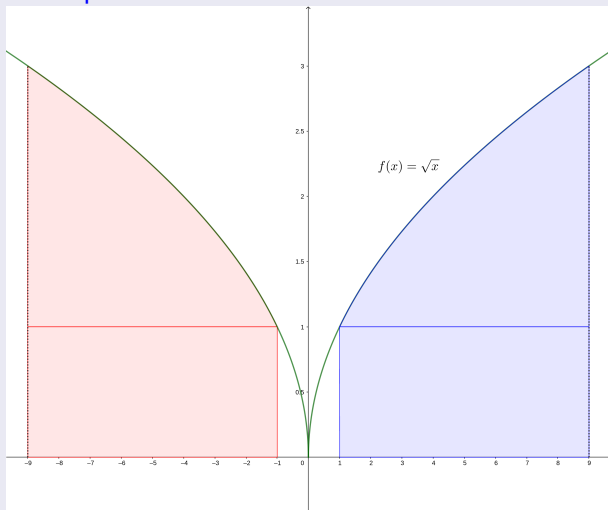
Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:

Volúmenes de revolución

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:



Solución (cont.)

El volumen pedido será:

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x} \, dx$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x} \, dx = 2\pi \int_1^9 x^{\frac{3}{2}} \, dx =$$

Volúmenes de revolución

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x} \, dx = 2\pi \int_1^9 x^{\frac{3}{2}} \, dx = 2\pi \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^9 \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x} \, dx = 2\pi \int_1^9 x^{\frac{3}{2}} \, dx = 2\pi \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^9 \\ &= \frac{4\pi}{5} \left(9^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{968\pi}{5} \approx 608.2123. \end{aligned}$$

Volúmenes de revolución

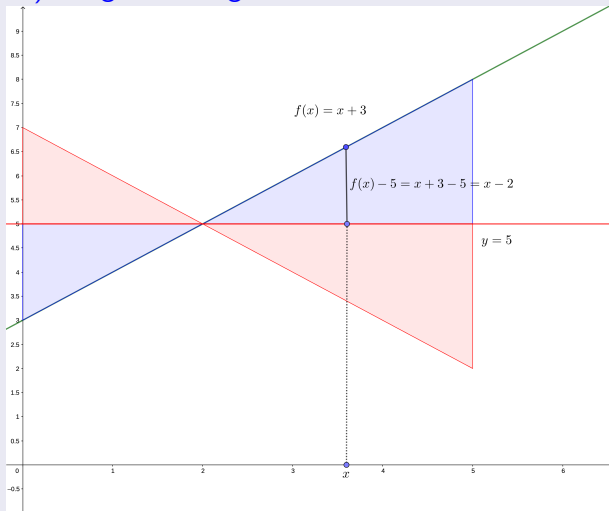
Solución (cont.)

Apartado c). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:

Volúmenes de revolución

Solución (cont.)

Apartado c). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:



Solución (cont.)

El volumen pedido será:

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_0^5 (x - 2)^2 dx$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_0^5 (x-2)^2 dx = \pi \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^5 =$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^5 (x-2)^2 dx = \pi \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^5 = \frac{\pi}{3} (3^3 - (-2)^3) \\ &= \end{aligned}$$

Volúmenes de revolución

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^5 (x-2)^2 dx = \pi \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^5 = \frac{\pi}{3} (3^3 - (-2)^3) \\ &= \frac{35\pi}{3} \approx 36.6519. \end{aligned}$$

Ejercicio 3

- a) Calcular el área de la superficie de revolución al girar la curva $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ alrededor del eje X para $0 \leq x \leq 4$.
- b) Calcular el área de la superficie de revolución al girar la curva $f(x) = \sqrt{x}$ alrededor del eje Y para $0 \leq x \leq 3$.

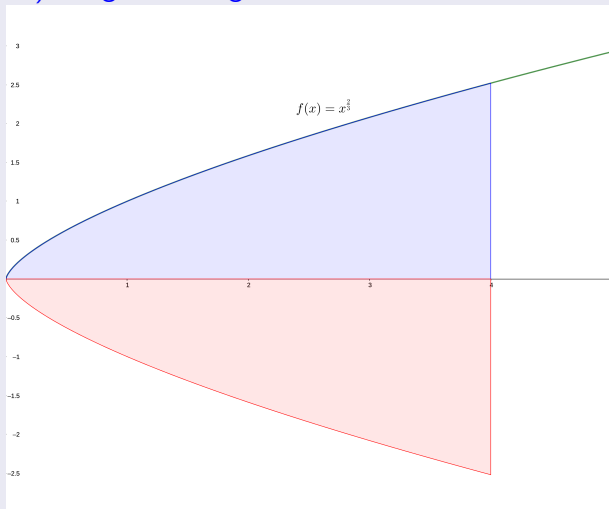
Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:

Áreas de revolución

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:



Solución (cont.)

El área pedida será:

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} dx =$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}} dx$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}} dx \\ &= 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{9x^{\frac{2}{3}} + 4}{9x^{\frac{2}{3}}}} dx = \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}} dx \\ &= 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{9x^{\frac{2}{3}} + 4}{9x^{\frac{2}{3}}}} dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{3x^{\frac{1}{3}}} dx \end{aligned}$$

Áreas de revolución

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}} dx \\ &= 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{9x^{\frac{2}{3}} + 4}{9x^{\frac{2}{3}}}} dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{3x^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^4 x^{\frac{1}{3}} \sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4} dx \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Para resolver la integral anterior aplicaremos la técnica de integración por partes arreglando un poco la integral primero:

Solución (cont.)

Para resolver la integral anterior aplicaremos la técnica de integración por partes arreglando un poco la integral primero:

$$A = \frac{2\pi}{3} \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4} dx$$

Solución (cont.)

Para resolver la integral anterior aplicaremos la técnica de integración por partes arreglando un poco la integral primero:

$$A = \frac{2\pi}{3} \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4} dx$$

Sean:

$$\begin{aligned} u &= x^{\frac{2}{3}}, & du &= \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx, \\ dv &= x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4} dx, & v &= \frac{1}{9} \left(9x^{\frac{2}{3}} + 4 \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área será:

$$A = \frac{2\pi}{3} \left(\left[\frac{1}{9} x^{\frac{2}{3}} \cdot (9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \frac{2}{27} \int_0^4 x^{-\frac{1}{3}} \cdot (9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} dx \right)$$

Solución (cont.)

El área será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi}{3} \left(\left[\frac{1}{9} x^{\frac{2}{3}} \cdot (9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \frac{2}{27} \int_0^4 x^{-\frac{1}{3}} \cdot (9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} dx \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{9} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot (9 \cdot 4^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{15} \left[(9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 \right) \end{aligned}$$

Áreas de revolución

Solución (cont.)

El área será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi}{3} \left(\left[\frac{1}{9} x^{\frac{2}{3}} \cdot (9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \frac{2}{27} \int_0^4 x^{-\frac{1}{3}} \cdot (9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} dx \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{9} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot (9 \cdot 4^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{15} \left[(9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{9} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot (9 \cdot 4^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{405} \left((9 \cdot 4^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{5}{2}} - 4^{\frac{5}{2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi}{3} \left(\left[\frac{1}{9} x^{\frac{2}{3}} \cdot (9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \frac{2}{27} \int_0^4 x^{-\frac{1}{3}} \cdot (9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} dx \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{9} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot (9 \cdot 4^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{15} \left[(9x^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{9} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot (9 \cdot 4^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{405} \left((9 \cdot 4^{\frac{2}{3}} + 4)^{\frac{5}{2}} - 4^{\frac{5}{2}} \right) \right) \\ &\approx 43.1126. \end{aligned}$$

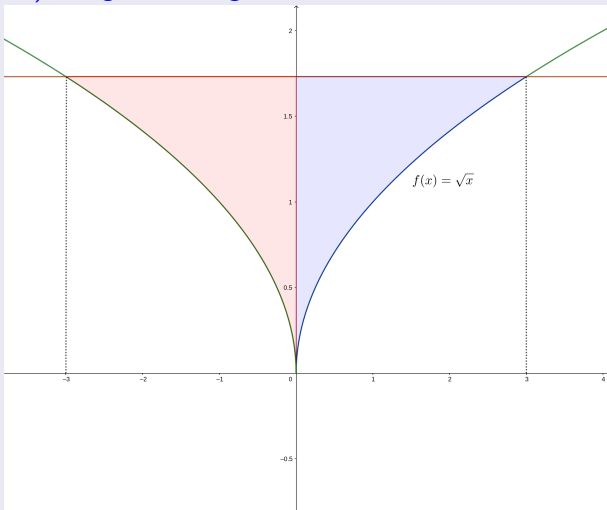
Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:

Áreas de revolución

Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:



Solución (cont.)

El área pedida será:

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + (2y)^2} dy =$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + (2y)^2} dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + 4y^2} dy$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + (2y)^2} dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + 4y^2} dy$$

Para hacer la integral anterior, consideramos el cambio de variable siguiente:

$$2y = \tan u,$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + (2y)^2} dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + 4y^2} dy$$

Para hacer la integral anterior, consideramos el cambio de variable siguiente:

$$2y = \tan u, \Rightarrow 2 dy = \frac{1}{\cos^2 u} du,$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + (2y)^2} dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + 4y^2} dy$$

Para hacer la integral anterior, consideramos el cambio de variable siguiente:

$$2y = \tan u, \Rightarrow 2 dy = \frac{1}{\cos^2 u} du, \Rightarrow dy = \frac{1}{2 \cos^2 u} du.$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + (2y)^2} dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + 4y^2} dy$$

Para hacer la integral anterior, consideramos el cambio de variable siguiente:

$$2y = \tan u, \Rightarrow 2 dy = \frac{1}{\cos^2 u} du, \Rightarrow dy = \frac{1}{2 \cos^2 u} du.$$

Cuando $y = 0$, el valor de u será $0 = \tan u$, $u = 0$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + (2y)^2} dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + 4y^2} dy$$

Para hacer la integral anterior, consideramos el cambio de variable siguiente:

$$2y = \tan u, \Rightarrow 2 dy = \frac{1}{\cos^2 u} du, \Rightarrow dy = \frac{1}{2 \cos^2 u} du.$$

Cuando $y = 0$, el valor de u será $0 = \tan u$, $u = 0$ y cuando $y = \sqrt{3}$, el valor de u será $2\sqrt{3} = \tan u$, $u = \arctan(2\sqrt{3})$.

Solución (cont.)

La integral queda en la nueva variable u :

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{1}{4} \tan^2 u \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 u} du \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La integral queda en la nueva variable u :

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{1}{4} \tan^2 u \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 u} du \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{\sin^2 u}{\cos^5 u} du. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La integral queda en la nueva variable u :

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{1}{4} \tan^2 u \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 u} du \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{\sin^2 u}{\cos^5 u} du. \end{aligned}$$

Como la función a integrar es impar en $\cos u$, hacemos el cambio siguiente:

$$\sin u = v,$$

Solución (cont.)

La integral queda en la nueva variable u :

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{1}{4} \tan^2 u \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 u} du \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{\sin^2 u}{\cos^5 u} du. \end{aligned}$$

Como la función a integrar es impar en $\cos u$, hacemos el cambio siguiente:

$$\sin u = v, \Rightarrow \cos u \, du = dv,$$

Solución (cont.)

La integral queda en la nueva variable u :

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{1}{4} \tan^2 u \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 u} du \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{\sin^2 u}{\cos^5 u} du. \end{aligned}$$

Como la función a integrar es impar en $\cos u$, hacemos el cambio siguiente:

$$\sin u = v, \Rightarrow \cos u \, du = dv, \Rightarrow du = \frac{dv}{\cos u}.$$

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$ y cuando $u = \arctan(2\sqrt{3})$ el valor de v será $v = \sin(\arctan(2\sqrt{3}))$. Calculemos dicho valor:

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$ y cuando $u = \arctan(2\sqrt{3})$ el valor de v será $v = \sin(\arctan(2\sqrt{3}))$. Calculemos dicho valor: sea $\alpha = \arctan(2\sqrt{3})$, es decir, $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$.

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$ y cuando $u = \arctan(2\sqrt{3})$ el valor de v será $v = \sin(\arctan(2\sqrt{3}))$. Calculemos dicho valor: sea $\alpha = \arctan(2\sqrt{3})$, es decir, $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$. Por tanto $1 + \tan^2 \alpha = 1 + 12 = 13 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, de donde $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$,

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$ y cuando $u = \arctan(2\sqrt{3})$ el valor de v será $v = \sin(\arctan(2\sqrt{3}))$. Calculemos dicho valor: sea $\alpha = \arctan(2\sqrt{3})$, es decir, $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$. Por tanto $1 + \tan^2 \alpha = 1 + 12 = 13 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, de donde $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$, y por tanto, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{13}} = \sqrt{\frac{12}{13}}$.

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$ y cuando $u = \arctan(2\sqrt{3})$ el valor de v será $v = \sin(\arctan(2\sqrt{3}))$. Calculemos dicho valor: sea $\alpha = \arctan(2\sqrt{3})$, es decir, $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$. Por tanto $1 + \tan^2 \alpha = 1 + 12 = 13 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, de donde $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$, y por tanto, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{13}} = \sqrt{\frac{12}{13}}$.

El valor de v para $u = \arctan(2\sqrt{3})$ será $v = \sqrt{\frac{12}{13}}$.

Solución (cont.)

La integral en la nueva variable v será:

$$A = \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{\cos^6 u} dv$$

Solución (cont.)

La integral en la nueva variable v será:

$$A = \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{\cos^6 u} dv = \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1 - \sin^2 u)^3} dv$$

Solución (cont.)

La integral en la nueva variable v será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{\cos^6 u} dv = \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1 - \sin^2 u)^3} dv \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1 - v^2)^3} dv \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La integral en la nueva variable v será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{\cos^6 u} dv = \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1 - \sin^2 u)^3} dv \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1 - v^2)^3} dv \end{aligned}$$

Se trata de una integral racional donde el grado del numerador es menor que el del denominador (no hace falta dividir)

Solución (cont.)

La integral en la nueva variable v será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{\cos^6 u} dv = \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1 - \sin^2 u)^3} dv \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1 - v^2)^3} dv \end{aligned}$$

Se trata de una integral racional donde el grado del numerador es menor que el del denominador (no hace falta dividir) y las raíces del denominador son $v = \pm 1$ y son triples.

Solución (cont.)

Hemos de descomponer la función a integrar de la forma siguiente:

$$\frac{v^2}{(1-v^2)^3} = \frac{A_1}{1-v} + \frac{A_2}{(1-v)^2} + \frac{A_3}{(1-v)^3} + \frac{A_4}{(1+v)} \\ + \frac{A_5}{(1+v)^2} + \frac{A_6}{(1+v)^3}.$$

Solución (cont.)

Hemos de descomponer la función a integrar de la forma siguiente:

$$\frac{v^2}{(1-v^2)^3} = \frac{A_1}{1-v} + \frac{A_2}{(1-v)^2} + \frac{A_3}{(1-v)^3} + \frac{A_4}{(1+v)} \\ + \frac{A_5}{(1+v)^2} + \frac{A_6}{(1+v)^3}.$$

Los valores A_i son los siguientes:

$$A_1 = -\frac{1}{16}, \quad A_2 = -\frac{1}{16}, \quad A_3 = \frac{1}{8}, \quad A_4 = -\frac{1}{16}, \quad A_5 = -\frac{1}{16}, \quad A_6 = \frac{1}{8}.$$

Solución (cont.)

El área será:

$$A = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{16} \ln |1 - v| - \frac{1}{16(1 - v)} + \frac{1}{16(1 - v)^2} - \frac{1}{16} \ln |1 + v| + \frac{1}{16(1 + v)} - \frac{1}{16(1 + v)^2} \right] \sqrt{\frac{12}{13}} \Bigg|_0$$

Solución (cont.)

El área será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{16} \ln |1 - v| - \frac{1}{16(1 - v)} + \frac{1}{16(1 - v)^2} - \frac{1}{16} \ln |1 + v| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16(1 + v)} - \frac{1}{16(1 + v)^2} \right] \sqrt{\frac{12}{13}} \\ &= \frac{\pi}{64} \left[\ln \left| \frac{1 - v}{1 + v} \right| - \frac{2v}{1 - v^2} + \frac{4v}{(1 - v^2)^2} \right] \sqrt{\frac{12}{13}} \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{16} \ln |1 - v| - \frac{1}{16(1 - v)} + \frac{1}{16(1 - v)^2} - \frac{1}{16} \ln |1 + v| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16(1 + v)} - \frac{1}{16(1 + v)^2} \right] \sqrt{\frac{12}{13}} \\ &= \frac{\pi}{64} \left[\ln \left| \frac{1 - v}{1 + v} \right| - \frac{2v}{1 - v^2} + \frac{4v}{(1 - v^2)^2} \right] \sqrt{\frac{12}{13}} \\ &= \frac{\pi}{64} \left(\ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{12}{13}}}{1 + \sqrt{\frac{12}{13}}} \right) - \frac{2\sqrt{\frac{12}{13}}}{1 - \frac{12}{13}} + \frac{4\sqrt{\frac{12}{13}}}{\left(1 - \frac{12}{13}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área será:

$$A = \frac{\pi}{64} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{13} - \sqrt{12}}{\sqrt{13} + \sqrt{12}} \right) + 650 \sqrt{\frac{12}{13}} \right) \approx 30.4631.$$