Problemas de optimización

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Problemas de optimización. Una aplicación del cálculo de extremos relativos.

Introducción

- El cálculo de extremos relativos de funciones derivables puede aplicarse a problemas de optimización de la vida real.

Introducción

- El cálculo de extremos relativos de funciones derivables puede aplicarse a problemas de optimización de la vida real.
- Concretamente, si tenemos un problema del que hay que calcular un máximo o un mínimo y somos capaces de modelizar el problema definiendo una función de la que hay que calcular algún extremo relativo, podemos resolver dicho problema aplicando la “maquinaría” vista de cálculo de extremos relativos para funciones derivables.

Introducción

- El cálculo de extremos relativos de funciones derivables puede aplicarse a problemas de optimización de la vida real.
- Concretamente, si tenemos un problema del que hay que calcular un máximo o un mínimo y somos capaces de modelizar el problema definiendo una función de la que hay que calcular algún extremo relativo, podemos resolver dicho problema aplicando la “maquinaría” vista de cálculo de extremos relativos para funciones derivables.
- En esta presentación veremos una serie de ejemplos donde resolveremos unos problemas de este tipo.

Ejemplo: maximización de ganancias

Planteamiento

Los costes de fabricación, $C(x)$ en euros, de cierta variedad de salchichas, dependen de la cantidad elaborada (x en kilos) de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C(x) = 10 + 2x.$$

El fabricante estima que el precio de venta en euros de cada kilogramo de salchichas viene dado por:

$$P(x) = 20 - \frac{6x^2}{800}.$$

Se pide obtener la función de ganancias y la cantidad de salchichas que interesa producir para maximizar dichas ganancias. En este caso, calcular el precio de venta y la ganancia que se obtiene.

Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- La función de ganancias será la diferencia entre el dinero obtenido de las ventas $(x \cdot P(x))$ y los costes de fabricación:

$$\begin{aligned} G(x) &= x \cdot P(x) - C(x) = x \cdot \left(20 - \frac{6x^2}{800}\right) - (10 + 2x) \\ &= 18x - 10 - \frac{6x^3}{800} = 18x - 10 - \frac{3x^3}{400}. \end{aligned}$$

Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- La función de ganancias será la diferencia entre el dinero obtenido de las ventas ($x \cdot P(x)$) y los costes de fabricación:

$$\begin{aligned} G(x) &= x \cdot P(x) - C(x) = x \cdot \left(20 - \tfrac{6x^2}{800}\right) - (10 + 2x) \\ &= 18x - 10 - \tfrac{6x^3}{800} = 18x - 10 - \tfrac{3x^3}{400}. \end{aligned}$$

- Para hallar la cantidad de salchichas x que maximizan las ganancias $G(x)$ tenemos que derivar dicha función e igualarla a cero:

$$G'(x) = 18 - \frac{9x^2}{400} = 0, \ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{18 \cdot 400}{9}} = \pm\sqrt{800}.$$

Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- Como x debe ser positivo, tendremos que dicho valor será $x = \sqrt{800} \approx 28.2843$ kilos.

Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- Como x debe ser positivo, tendremos que dicho valor será $x = \sqrt{800} \approx 28.2843$ kilos.
- Veamos que dicho valor és máximo:

$$G''(x) = -\frac{18x}{400} = -\frac{9x}{200}, \quad G''(\sqrt{800}) = -\frac{9 \cdot \sqrt{800}}{200} < 0.$$

Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- Como x debe ser positivo, tendremos que dicho valor será $x = \sqrt{800} \approx 28.2843$ kilos.
- Veamos que dicho valor és máximo:

$$G''(x) = -\frac{18x}{400} = -\frac{9x}{200}, \quad G''(\sqrt{800}) = -\frac{9 \cdot \sqrt{800}}{200} < 0.$$

- El precio de venta para dicho valor de $x = \sqrt{800}$ será:

$$P(\sqrt{800}) = 20 - \frac{6 \cdot 800}{800} = 20 - 6 = 14 \text{ euros.}$$

Ejemplo: maximización de ganancias. Resolución

- Como x debe ser positivo, tendremos que dicho valor será $x = \sqrt{800} \approx 28.2843$ kilos.
- Veamos que dicho valor és máximo:

$$G''(x) = -\frac{18x}{400} = -\frac{9x}{200}, \quad G''(\sqrt{800}) = -\frac{9 \cdot \sqrt{800}}{200} < 0.$$

- El precio de venta para dicho valor de $x = \sqrt{800}$ será:

$$P(\sqrt{800}) = 20 - \frac{6 \cdot 800}{800} = 20 - 6 = 14 \text{ euros.}$$

- La ganancia máxima será:

$$G(\sqrt{800}) = 18 \cdot \sqrt{800} - 10 - \frac{3 \cdot 800 \cdot \sqrt{800}}{400} = 329.4113 \text{ euros.}$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo

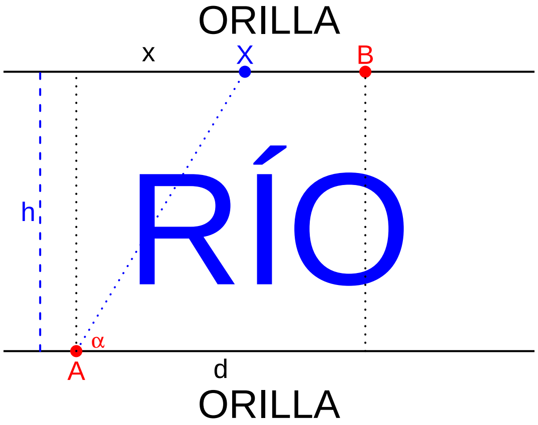
Enunciado

Un excursionista tiene que atravesar un río yendo desde el punto A al punto B. Dichos puntos están separados horizontalmente por una distancia d y el río tiene una anchura h.

Nos dicen que la velocidad de movimiento por la orilla es k veces mayor que la velocidad de movimiento por el río.

Nos piden bajo qué ángulo α tiene el excursionista que atravesar el río en el menor tiempo posible.

Ejemplo 2: minimización del tiempo



Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Sea X el punto de la otra orilla donde está el punto B donde el excursionista llega.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Sea X el punto de la otra orilla donde está el punto B donde el excursionista llega.
- Sea x la distancia horizontal entre el punto A y el punto X.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Sea X el punto de la otra orilla donde está el punto B donde el excursionista llega.
- Sea x la distancia horizontal entre el punto A y el punto X.
- Podemos suponer que $0 \leq x \leq d$ ya que

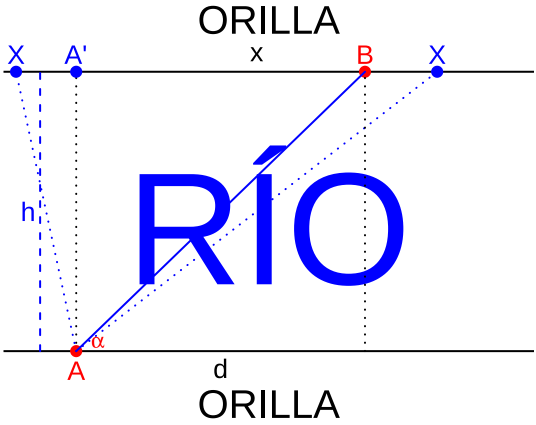
Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Sea X el punto de la otra orilla donde está el punto B donde el excursionista llega.
- Sea x la distancia horizontal entre el punto A y el punto X.
- Podemos suponer que $0 \leq x \leq d$ ya que
  - si $x > d$ o el punto X está a la derecha del punto B, el tiempo que tardará el excursionista de ir desde A hasta X más el tiempo de ir desde X a B seguro que superará el tiempo de ir del punto A al punto B por el río ya que la distancia AX es mayor que AB.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Sea X el punto de la otra orilla donde está el punto B donde el excursionista llega.
- Sea x la distancia horizontal entre el punto A y el punto X.
- Podemos suponer que $0 \leq x \leq d$ ya que
  - si $x > d$ o el punto X está a la derecha del punto B, el tiempo que tardará el excursionista de ir desde A hasta X más el tiempo de ir desde X a B seguro que superará el tiempo de ir del punto A al punto B por el río ya que la distancia AX es mayor que AB.
  - si $x < 0$ o el punto X está a la izquierda del punto A', el tiempo que tardará el excursionista de ir desde A hasta X más el tiempo de ir desde X a B seguro que superará el tiempo de ir desde A hasta A' y desde A' hasta B.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución



Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- La distancia que habrá recorrido el excursionista por la orilla para llegar al punto B será $d - x$ y la distancia que habrá recorrido por el río será $\sqrt{h^2 + x^2}$ usando el Teorema de Pitágoras.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- La distancia que habrá recorrido el excursionista por la orilla para llegar al punto B será $d - x$ y la distancia que habrá recorrido por el río será $\sqrt{h^2 + x^2}$ usando el Teorema de Pitágoras.
- Sea v_o la velocidad de movimiento por la orilla y v_r, la velocidad de movimiento por el río. Nos dicen que $v_o = k \cdot v_r$.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- La distancia que habrá recorrido el excursionista por la orilla para llegar al punto B será $d-x$ y la distancia que habrá recorrido por el río será $\sqrt{h^2+x^2}$ usando el Teorema de Pitágoras.
- Sea v_o la velocidad de movimiento por la orilla y v_r, la velocidad de movimiento por el río. Nos dicen que $v_o = k\cdot v_r$.
- El tiempo que tarda en ir por la orilla será $t_o = \frac{d-x}{v_o}$ y el tiempo que tarda en ir por el río, $t_r = \frac{\sqrt{h^2+x^2}}{v_r}$.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El tiempo total será:

$$t = t_o + t_r = \frac{d-x}{v_o} + \frac{\sqrt{h^2+x^2}}{v_r} = \frac{d-x}{k \cdot v_r} + \frac{\sqrt{h^2+x^2}}{v_r},$$

donde hemos usado que $v_o = k \cdot v_r$.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El tiempo total será:

$$t = t_o + t_r = \frac{d-x}{v_o} + \frac{\sqrt{h^2+x^2}}{v_r} = \frac{d-x}{k\cdot v_r} + \frac{\sqrt{h^2+x^2}}{v_r},$$

donde hemos usado que $v_o = k \cdot v_r$.

- Hemos de minimizar la función anterior. Si derivamos e igualamos a cero, obtenemos:

$$t' = -\frac{1}{k\cdot v_r} + \frac{1}{v_r}\cdot\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} = 0.$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} &= \frac{1}{k}, \Rightarrow \frac{x^2}{h^2+x^2} = \frac{1}{k^2}, \Rightarrow x^2(k^2-1) = h^2, \Rightarrow \\ x &= \pm\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} &= \frac{1}{k}, \Rightarrow \frac{x^2}{h^2+x^2} = \frac{1}{k^2}, \Rightarrow x^2(k^2-1) = h^2, \Rightarrow \\ x &= \pm\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}. \end{aligned}$$

- El valor de x es positivo: $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Veamos que se trata de un mínimo relativo:

$$t'' = \frac{1}{v_r} \cdot \frac{\sqrt{h^2+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}}{h^2+x^2} = \frac{1}{v_r} \cdot \frac{h^2}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Veamos que se trata de un mínimo relativo:

$$t'' = \frac{1}{v_r} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}}{h^2 + x^2} = \frac{1}{v_r} \cdot \frac{h^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

- Para la x hallada, el tiempo mínimo será:

$$t = \frac{d - \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}}{k \cdot v_r} + \frac{\sqrt{h^2 + \frac{h^2}{k^2-1}}}{v_r} = \frac{d + h\sqrt{k^2 - 1}}{kv_r}.$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Hallemos el tiempo que tarda el excursionista en los extremos del intervalo $[0, d]$.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Hallemos el tiempo que tarda el excursionista en los extremos del intervalo $[0, d]$.
  - Para $x = 0$, el tiempo que tarda el excursionista es:

$$t(x = 0) = \frac{d}{k \cdot v_r} + \frac{h}{v_r} = \frac{d + hk}{kv_r}.$$

Fijémonos que dicho tiempo siempre será mayor que el tiempo tardado usando la x anterior, $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$ ya que:

$$\frac{d + hk}{kv_r} > \frac{d + h\sqrt{k^2 - 1}}{kv_r}, \Leftrightarrow k > \sqrt{k^2 - 1}, \Leftrightarrow k^2 > k^2 - 1.$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Para $x = d$, el tiempo que tarda el excursionista es:

$$t(x = d) = \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{v_r}.$$

En este caso, también el tiempo será mayor que el tiempo tardado usando la x anterior, $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$ ya que:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{h^2+d^2}}{v_r} &> \frac{d+h\sqrt{k^2-1}}{kv_r}, \Leftrightarrow \\
k\sqrt{h^2 + d^2} &> d + h\sqrt{k^2 - 1}, \Leftrightarrow \\
k^2(h^2 + d^2) &> d^2 + h^2(k^2 - 1) + 2dh\sqrt{k^2 - 1}, \Leftrightarrow \\
(k^2 - 1)d^2 + h^2 &> 2dh\sqrt{k^2 - 1}, \Leftrightarrow \\
(\sqrt{k^2 - 1}d - h)^2 &> 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Para hallar el tiempo mínimo, consideremos dos casos:

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Para hallar el tiempo mínimo, consideremos dos casos:
  - si $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} < d$, el tiempo mínimo se alcanza para $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$:

$$t_{\text{mín}} = \frac{d + h\sqrt{k^2-1}}{kv_r}.$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Para hallar el tiempo mínimo, consideremos dos casos:
  - si $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} < d$, el tiempo mínimo se alcanza para $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$:
  $$t_{\text{mín}} = \frac{d + h\sqrt{k^2-1}}{kv_r}.$$
  - si $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} \geq d$, significa que la función t no tiene ningún extremo relativo en el intervalo $[0, d]$ ya que el único extremo hallado $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$ se encuentra fuera de dicho intervalo. Por tanto, la función será creciente o decreciente en el intervalo $[0, d]$. Recordemos que $t'(x) = -\frac{1}{k\cdot v_r} + \frac{1}{v_r} \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$. Como $t'(x = 0) = -\frac{1}{k\cdot v_r} < 0$, la función será decreciente y el mínimo se alcanzará para $x = d$:
  $$t_{\text{mín}} = \frac{\sqrt{h^2+d^2}}{v_r}.$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo α con que atraviesa el río tiene como tangente será:

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo α con que atraviesa el río tiene como tangente será:
  - si $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} < d$, el ángulo α tiene como tangente:

$$\tan\alpha = \frac{h}{x} = \frac{h}{\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}} = \sqrt{k^2-1}, \Rightarrow \alpha = \arctan(\sqrt{k^2-1}).$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo α con que atraviesa el río tiene como tangente será:
  - si $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} < d$, el ángulo α tiene como tangente:

$$\tan\alpha = \frac{h}{x} = \frac{h}{\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}} = \sqrt{k^2-1}, \Rightarrow \alpha = \arctan(\sqrt{k^2-1}).$$

  - si $x = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}} \geq d$, el ángulo α tiene como tangente:

$$tan\alpha = \frac{h}{d}, \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{h}{d}\right).$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Por ejemplo, supongamos que la velocidad de movimiento por la orilla es el doble de la velocidad de movimiento por el río, es decir, $k = 2$, con una anchura de $h = 900$ m. y con una distancia de $d = 500$ m. Hallemos el tiempo mínimo para llegar de A a B.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Por ejemplo, supongamos que la velocidad de movimiento por la orilla es el doble de la velocidad de movimiento por el río, es decir, $k=2$, con una anchura de $h=900$ m. y con una distancia de $d=500$ m. Hallemos el tiempo mínimo para llegar de A a B.
- En este caso, el valor de $\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$ vale $\frac{900}{\sqrt{3}} \approx 519.6152 > d = 500$. Estamos en el segundo caso.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- Por ejemplo, supongamos que la velocidad de movimiento por la orilla es el doble de la velocidad de movimiento por el río, es decir, $k = 2$, con una anchura de $h = 900$ m. y con una distancia de $d = 500$ m. Hallemos el tiempo mínimo para llegar de A a B.
- En este caso, el valor de $\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$ vale $\frac{900}{\sqrt{3}} \approx 519.6152 > d = 500$. Estamos en el segundo caso.
- El tiempo mínimo será, pues:

$$t_{\text{mín}} = \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{v_r} = \frac{\sqrt{900^2 + 500^2}}{v_r} = \frac{1029.563}{v_r},$$

siendo v_r la velocidad de movimiento por el río.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo α será en este caso,

$$\alpha = \arctan\frac{900}{500} \approx 1.0637 \text{ radianes} \approx 60.9454 \text{ grados.}$$

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo α será en este caso,

$$\alpha = \arctan \frac{900}{500} \approx 1.0637 \text{ radianes} \approx 60.9454 \text{ grados}.$$

- Supongamos ahora que $k = 2$, $h = 500$ y $d = 900$. En este caso, el valor de $\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$ vale $\frac{500}{\sqrt{3}} \approx 288.6751 \leq d = 900$. Estamos en el primer caso.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo α será en este caso,

$$\alpha = \arctan \frac{900}{500} \approx 1.0637 \text{ radianes} \approx 60.9454 \text{ grados.}$$

- Supongamos ahora que $k = 2$, $h = 500$ y $d = 900$. En este caso, el valor de $\frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$ vale $\frac{500}{\sqrt{3}} \approx 288.6751 \leq d = 900$. Estamos en el primer caso.

- El tiempo mínimo será, pues:

$$t_{\text{mín}} = \frac{d + h\sqrt{k^2-1}}{kv_r} = \frac{900 + 500 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot v_r} = \frac{1766.0254}{2 \cdot v_r},$$

siendo v_r la velocidad de movimiento por el río.

Ejemplo 2: minimización del tiempo. Resolución

- El ángulo α será en este caso,

$$\alpha = \arctan(\sqrt{k^2 - 1}) = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes} = 60 \text{ grados.}$$