La función Gamma de Euler

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Section 1

La función Gamma de Euler

Introducción

- La función Gamma de Euler se define de la forma siguiente como una integral impropia:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Introducción

- La función Gamma de Euler se define de la forma siguiente como una integral impropia:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

- Esta función tiene aplicaciones en física cuántica, astrofísica y dinámica de fluidos.

Introducción

- La función Gamma de Euler se define de la forma siguiente como una integral impropia:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

- Esta función tiene aplicaciones en física cuántica, astrofísica y dinámica de fluidos.
- También se usa para resolver problemas de convergencia de series y problemas de integración impropia para estudiar si determinadas integrales convergen o no.

Introducción

- La función Gamma de Euler se define de la forma siguiente como una integral impropia:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

- Esta función tiene aplicaciones en física cuántica, astrofísica y dinámica de fluidos.
- También se usa para resolver problemas de convergencia de series y problemas de integración impropia para estudiar si determinadas integrales convergen o no.
- En esta presentación, estudiaremos para qué valores de t la función Gamma está definida o la integral impropia anterior converge.

Estudio de la convergencia

- Para ver para qué valores de t la integral anterior converge, nos fijamos en que:

Estudio de la convergencia

- Para ver para qué valores de t la integral anterior converge, nos fijamos en que:
    - si $t - 1 \geq 0$ o $t \geq 1$, la integral impropia es de primera especie ya que la función a integrar, $x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}$ no tiene ninguna singularidad en el dominio de integración $[0, \infty]$.

Estudio de la convergencia

- Para ver para qué valores de t la integral anterior converge, nos fijamos en que:
  - si $t-1\geq 0$ o $t\geq 1$, la integral impropia es de primera especie ya que la función a integrar, $x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}$ no tiene ninguna singularidad en el dominio de integración $[0,\infty]$.
  - si en cambio $t-1<0$, o $t<1$, la integral impropia es de tercera especie ya que en este caso hay dos valores singulares: $t=0$ y $t=\infty$.

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- En este caso la integral impropia es de primera especie y la resolvemos usando la técnica de integración por partes: con:

$$\begin{array}{llll} u & = x^{t-1}, & du & = (t-1)x^{t-2}\,dx, \\ dv & = \mathrm{e}^{-x}, & v & = -\mathrm{e}^{-x}, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \lim_{z\to\infty} \int_0^z x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &= \lim_{z\to\infty} \left([-x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z + (t-1)\int_0^z x^{t-2}\mathrm{e}^{-x}\,dx \right). \end{aligned}$$

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- En este caso la integral impropia es de primera especie y la resolvemos usando la técnica de integración por partes: con:

$$\begin{aligned} u &= x^{t-1}, & du &= (t-1)x^{t-2}\,dx, \\ dv &= \mathrm{e}^{-x}, & v &= -\mathrm{e}^{-x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \lim_{z\to\infty} \int_0^z x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &= \lim_{z\to\infty} \left([-x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z + (t-1)\int_0^z x^{t-2}\mathrm{e}^{-x}\,dx \right). \end{aligned}$$

- El límite correspondiente al primer sumando vale:

$$\lim_{z\to\infty} [-x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z = -\lim_{z\to\infty} \frac{z^{t-1}}{\mathrm{e}^z}.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- El límite anterior, al ser $t \geq 1$, es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- El límite anterior, al ser $t \geq 1$, es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
- Para resolverlo vamos a aplicar la regla de l'Hôpital. Como $t \geq 1$, sea $j \geq 1$ el natural tal que $j \leq t < j+1$. Entonces aplicando la regla de l'Hôpital j veces al límite anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} [-x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z &= -\lim_{z\to\infty} \frac{z^{t-1}}{\mathrm{e}^z} = -\lim_{z\to\infty} \frac{(t-1)z^{t-2}}{\mathrm{e}^z} = \cdots \\ &= -\lim_{z\to\infty} \frac{(t-1)\ldots(t-j)z^{t-(j+1)}}{\mathrm{e}^z} = 0, \end{aligned}$$

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- El límite anterior, al ser $t \geq 1$, es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
- Para resolverlo vamos a aplicar la regla de l'Hôpital. Como $t \geq 1$, sea $j \geq 1$ el natural tal que $j \leq t < j+1$. Entonces aplicando la regla de l'Hôpital j veces al límite anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty} [-x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z &= -\lim_{z\to\infty} \frac{z^{t-1}}{\mathrm{e}^z} = -\lim_{z\to\infty} \frac{(t-1)z^{t-2}}{\mathrm{e}^z} = \cdots \\ &= -\lim_{z\to\infty} \frac{(t-1)\ldots(t-j)z^{t-(j+1)}}{\mathrm{e}^z} = 0,\end{aligned}$$

- ya que el último límite es de la forma $\frac{0}{\infty} = 0$, al ser $t-(j+1) < 0$.

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- En resumen,

$$\Gamma(t) = (t-1) \lim_{z \to \infty} \int_0^z x^{t-2} \mathrm{e}^{-x} \, dx.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- En resumen,

$$\Gamma(t) = (t-1) \lim_{z\to\infty} \int_0^z x^{t-2} \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

- Volviendo a aplicar la técnica de integración por partes hasta llegar a una integral de la forma $\int_0^z x^{t-(j+1)} \mathrm{e}^{-x}\, dx$, obtenemos:

$$\Gamma(t) = (t-1)\cdots(t-j) \lim_{z\to\infty} \int_0^z x^{t-(j+1)} \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- Si aplicamos el criterio de comparación por cociente a la integral impropia obtenida $\int_0^{\infty} x^{t-(j+1)}\mathrm{e}^{-x}\, dx$ comparando con la función e^{-x}, obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{t-(j+1)}\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} x^{t-(j+1)} = 0,$$

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- Si aplicamos el criterio de comparación por cociente a la integral impropia obtenida $\int_0^{\infty} x^{t-(j+1)} \mathrm{e}^{-x}\, dx$ comparando con la función e^{-x}, obtenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{t-(j+1)} \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x \to \infty} x^{t-(j+1)} = 0,$$

- ya que $t - (j+1) < 0$.

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- Por tanto, como la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx$ es convergente ya que,

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^{z} \mathrm{e}^{-x}\, dx \lim_{z\to\infty} [-\mathrm{e}^{-x}]_0^z = \lim_{z\to\infty} (1-\mathrm{e}^{-z}) = 1,$$

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- Por tanto, como la integral impropia $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx$ es convergente ya que,

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^{z} \mathrm{e}^{-x}\, dx \lim_{z\to\infty} [-\mathrm{e}^{-x}]_0^z = \lim_{z\to\infty} (1-\mathrm{e}^{-z}) = 1,$$

- nuestra integral impropia $\int_0^{\infty} x^{t-(j+1)}\mathrm{e}^{-x}\, dx$ también lo será.

Estudio de la convergencia. Caso $t \geq 1$

- Por tanto, como la integral impropia $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ es convergente ya que,

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^{z} \mathrm{e}^{-x}\,dx \lim_{z\to\infty} [-\mathrm{e}^{-x}]_0^z = \lim_{z\to\infty} (1-\mathrm{e}^{-z}) = 1,$$

- nuestra integral impropia $\int_0^{\infty} x^{t-(j+1)}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ también lo será.
- Concluimos que la función Gamma de Euler $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ está definida para $t \geq 1$.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$

- En este caso la integral impropia $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ es de tercera especie con dos puntos singulares $x = 0$ y $x = \infty$.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$

- En este caso la integral impropia $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ es de tercera especie con dos puntos singulares $x = 0$ y $x = \infty$.
- En este caso, escribimos la función Gamma de Euler de la forma siguiente:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$

- De esta forma, hemos separado la función $\Gamma(t)$ en dos integrales impropias:

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$

- De esta forma, hemos separado la función $\Gamma(t)$ en dos integrales impropias:
  - una de segunda especie: $I_1 = \int_0^1 x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx$ y

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$

- De esta forma, hemos separado la función $\Gamma(t)$ en dos integrales impropias:
  - una de segunda especie: $I_1 = \int_0^1 x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx$ y
  - otra de primera especie: $I_2 = \int_1^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx$.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$

- De esta forma, hemos separado la función $\Gamma(t)$ en dos integrales impropias:
  - una de segunda especie: $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx$ y
  - otra de primera especie: $I_2 = \displaystyle\int_1^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx$.
- Estudiemos la convergencia de cada una de las integrales impropias anteriores.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_1

- La integral impropia I_1 vale:

$$I_1 = \lim_{z \to 0} \int_z^1 x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_1

- La integral impropia I_1 vale:

$$I_1 = \lim_{z \to 0} \int_z^1 x^{t-1} \mathrm{e}^{-x} \, dx.$$

- Para estudiar su convergencia, aplicaremos el criterio de comparación por cociente con la función x^{t-1}:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}}{x^{t-1}} = \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{-x} = 1.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_1

- La integral impropia I_1 vale:

$$I_1 = \lim_{z\to 0} \int_z^1 x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

- Para estudiar su convergencia, aplicaremos el criterio de comparación por cociente con la función x^{t-1}:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}}{x^{t-1}} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x} = 1.$$

- Las integrales impropias $\displaystyle\int_0^1 x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^1 x^{t-1}\,dx$ tienen el mismo carácter.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_1

- Estudiemos la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 x^{t-1}\,dx$:

$$\int_0^1 x^{t-1}\,dx = \lim_{z\to 0}\int_z^1 x^{t-1}\,dt = \lim_{z\to 0}\left[\frac{x^t}{t}\right]_z^1 = \frac{1}{t}\lim_{z\to 0}(1-z^t) = \frac{1}{t},$$

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_1

- Estudiemos la convergencia de la integral impropia $\int_0^1 x^{t-1}\,dx$:

$$\int_0^1 x^{t-1}\,dx = \lim_{z\to 0}\int_z^1 x^{t-1}\,dt = \lim_{z\to 0}\left[\frac{x^t}{t}\right]_z^1 = \frac{1}{t}\lim_{z\to 0}(1-z^t) = \frac{1}{t},$$

- si, y sólo si, $t > 0$. Por tanto, la integral impropia I_1 es convergente si, y sólo si, $0 < t < 1$.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_1

- Estudiemos la convergencia de la integral impropia $\int_0^1 x^{t-1}\,dx$:

$$\int_0^1 x^{t-1}\,dx = \lim_{z\to 0}\int_z^1 x^{t-1}\,dt = \lim_{z\to 0}\left[\frac{x^t}{t}\right]_z^1 = \frac{1}{t}\lim_{z\to 0}(1-z^t) = \frac{1}{t},$$

- si, y sólo si, $t > 0$. Por tanto, la integral impropia I_1 es convergente si, y sólo si, $0 < t < 1$.
- El caso $t = 0$ debe ser estudiado aparte pero se puede ver que la integral $\int_0^1 x^{-1}\,dx$ es divergente:

$$\int_0^1 x^{-1}\,dx = \lim_{z\to 0}\int_z^1 x^{-1}\,dt = \lim_{z\to 0}[\ln t]_z^1 = \lim_{z\to 0}(-\ln z) = \infty.$$

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_2

- Para estudiar la convergencia de la integral impropia $I_2 = \int_1^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx$, aplicamos el criterio de comparación por cociente con la integral impropia $\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} x^{t-1} = 0,$$

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$. Estudio de I_2

- Para estudiar la convergencia de la integral impropia $I_2 = \int_1^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx$, aplicamos el criterio de comparación por cociente con la integral impropia $\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} x^{t-1} = 0,$$

- ya que $t-1<0$. Como la integral impropia $\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx$ es convergente (ver el estudio del caso $t \geq 1$), tendremos que nuestra integral impropia $I_2 = \int_1^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx$ también lo será.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$.

- Concluimos que en el caso $t < 1$ la función Gamma de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx,$$

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$.

- Concluimos que en el caso $t < 1$ la función Gamma de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx,$$

- está definida si $0 < t < 1$.

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$.

- Concluimos que en el caso $t < 1$ la función Gamma de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx,$$

- está definida si $0 < t < 1$.
- Entonces la función Gamma de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx,$$

Estudio de la convergencia. Caso $t < 1$.

- Concluimos que en el caso $t < 1$ la función Gamma de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx,$$

- está definida si $0 < t < 1$.
- Entonces la función Gamma de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx,$$

- está definida para todo valor de t estrictamente positivo: $t > 0$.

Cálculo de $\Gamma(t)$ para t entero positivo

- Hemos visto que si $t > 0$, $\Gamma(t)$ está definido. Veamos cuanto vale $\Gamma(n)$ para $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$.

Cálculo de $\Gamma(t)$ para t entero positivo

- Hemos visto que si $t > 0$, $\Gamma(t)$ está definido. Veamos cuanto vale $\Gamma(n)$ para $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$.
- Para calcular $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$ usamos la técnica de integración por partes con:

$$\begin{array}{llll} u & = x^{n-1}, & du & = (n-1)x^{n-2}\,dx, \\ dv & = \mathrm{e}^{-x}, & v & = -\mathrm{e}^{-x}, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \lim_{z\to\infty} \int_0^z x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &= \lim_{z\to\infty} \left(\left[-x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^z + (n-1)\int_0^z x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}\,dx \right). \end{aligned}$$

Cálculo de $\Gamma(t)$ para t entero positivo

- El valor del límite $\lim\limits_{z\to\infty}[-x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z$ vale 0 como vimos anteriormente.

Cálculo de $\Gamma(t)$ para t entero positivo

- El valor del límite $\lim\limits_{z\to\infty}[-x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}]_0^z$ vale 0 como vimos anteriormente.
- Por tanto, tendremos que:

$$\Gamma(n) = (n-1)\int_0^{\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}\,dx = (n-1)\Gamma(n-2).$$

Cálculo de $\Gamma(t)$ para t entero positivo

- Usando que $\Gamma(1)$ vale:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{z\to\infty} [-\mathrm{e}^{-x}]_0^z = -\lim_{z\to\infty} (\mathrm{e}^{-z} - 1) = 1,$$

Cálculo de $\Gamma(t)$ para t entero positivo

- Usando que $\Gamma(1)$ vale:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{z\to\infty} [-\mathrm{e}^{-x}]_0^z = -\lim_{z\to\infty} (\mathrm{e}^{-z} - 1) = 1,$$

- tendremos que

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)\cdots 2\Gamma(1) = (n-1)!$$

Cálculo de $\Gamma(t)$ para t entero positivo

- Usando que $\Gamma(1)$ vale:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{z\to\infty} [-\mathrm{e}^{-x}]_0^z = -\lim_{z\to\infty} (\mathrm{e}^{-z} - 1) = 1,$$

- tendremos que

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)\cdots 2\Gamma(1) = (n-1)!$$

- De ahí que se conozca la función Gamma como la generalización del factorial para valores reales.