Problemas de integración. Teorema fundamental del cálculo.

1. Hallar las integrales definidas siguientes:
   a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx.$
   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}\, dx.$
   c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} dx.$
   d) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx.$
2. Resolver las integrales siguientes haciendo un cambio de variable adecuado:
   a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$
   b) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3} dx.$
3. Resolver las integrales siguientes usando la técnica de integración por partes:
   a) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^{-x}\, dx.$
   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax} \sin(bx)\, dx$, con $a > 0$.
   c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^n \cdot \ln x\, dx$, con $n \in \mathbb{N}$.
   d) $\displaystyle\int_0^2 x^3 \cdot \arctan x\, dx.$
4. Hallar los extremos relativos de la función siguiente:
$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt,\ \ x > 0.$$
5. Calcular las derivadas de las funciones siguientes:
   a) $\displaystyle f_1(x) = \int_1^{\ln(x^2+1)} e^t\, dt.$
   b) $\displaystyle f_2(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4}\, dt.$
   c) $\displaystyle f_3(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2\, dt.$