

Problemas de integración. Teorema fundamental del cálculo.

1. Hallar las integrales definidas siguientes:

- a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, dx.$
- b) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6 + 4}} \, dx.$
- c) $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx.$
- d) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx.$

Solución

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \approx 0.6427.$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6 + 4}} \, dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{(x^3)^2 + 4}} \, dx.$$

Si hacemos el cambio de variable $t = x^3$, nos queda $dt = 3x^2 dx$ y la nueva integral en la variable t vale:
(si $x = 0$, $t = 0$ y si $x = 1$, $t = 1$)

$$\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{1}{3} [\ln(t + \sqrt{t^2 + 4})]_0^1 = \frac{1}{3} (\ln(1 + \sqrt{5}) - \ln(0 + 2)) = \frac{1}{3} \cdot \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \approx 0.1604.$$

c) Hacemos el cambio de variable $t = e^x$, $dt = e^x dx = t dx$, $dx = \frac{dt}{t}$, si $x = 0$, $t = 1$ y si $x = 1$, $t = e$:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx = \int_1^e \frac{1}{1 + t^2} \, dt = [\arctan t]_1^e = \arctan e - \arctan 1 = \arctan e - \frac{\pi}{4} \approx 0.4329.$$

d) Hacemos el cambio de variable $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x} dx$, para $x = 1$, $t = 0$ y para $x = e$, $t = \ln e = 1$:

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx = \int_0^1 \sin t \, dt = [-\cos t]_0^1 = -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1 \approx 0.4597.$$

2. Resolver las integrales siguientes haciendo un cambio de variable adecuado:

a) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$
 b) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$

Solución

a) Hacemos el cambio siguiente: $t = \sqrt{x}$. Entonces, la relación entre los diferenciales será:

$$dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2t}, \Rightarrow dx = 2t dt.$$

Si $x = 0$, el valor de la nueva variable t vale $t = \sqrt{0} = 0$ y si $x = 4$, $t = \sqrt{4} = 2$. La integral en la nueva variable t será:

$$\int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2[t - \ln(1+t)]_0^2 = 2 \cdot (2 - \ln(3)) \approx 1.8028.$$

b) Hacemos el cambio $t = \sqrt{e^x - 1}$. Entonces, la relación entre los diferenciales será:

$$dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{t^2 + 1}{2t} dx, \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt.$$

Si $x = 0$, el valor de la nueva variable t vale $t = \sqrt{e^0 - 1} = 0$ y si $x = \ln 5$, $t = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2$. La integral en la nueva variable t será:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{(t^2 + 1) \cdot t}{(t^2 + 1) + 3} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt &= 2 \int_0^2 \frac{t^2}{t^2 + 4} dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4}\right) dt = 2 \cdot \left[t - 2 \arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^2 \\ &= 2 \cdot (2 - 2 \cdot \arctan 1) = 4 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi \approx 0.8584. \end{aligned}$$

3. Resolver las integrales siguientes usando la técnica de integración por partes:

- a) $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$.
- b) $\int_0^{2\pi} e^{-ax} \sin(bx) dx$, con $a > 0$.
- c) $\int_1^e x^n \cdot \ln x dx$, con $n \in \mathbb{N}$.
- d) $\int_0^2 x^3 \cdot \arctan x dx$.

Solución

a) Sean

$$\begin{aligned} u &= x, & du &= dx, \\ dv &= e^{-x}, & v &= -e^{-x}. \end{aligned}$$

La integral, aplicando la fórmula de integración por partes $\int u dv = u \cdot v - \int v du$, queda:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx &= [-x \cdot e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - (-e^{-1} - 1) \\ &= 1 - 2 \cdot e^{-1} \approx 0.2642. \end{aligned}$$

b) Sean

$$\begin{aligned} u &= \sin(bx), & du &= b \cos(bx) dx, \\ dv &= e^{-ax}, & v &= -\frac{1}{a} e^{-ax}. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión de integración por partes, la integral anterior será:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ax} \sin(bx) dx = \left[-\frac{1}{a} \sin(bx) e^{-ax} \right]_0^{2\pi} + \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos(bx) dx.$$

Volvemos a aplicar la expresión de la integración por partes a la nueva integral que nos ha salido:

$$\begin{aligned} u &= \cos(bx), & du &= -b \sin(bx) dx, \\ dv &= e^{-ax}, & v &= -\frac{1}{a} e^{-ax}. \end{aligned}$$

Así, la integral a calcular será:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-ax} \sin(bx) dx &= \left[-\frac{1}{a} \sin(bx) e^{-ax} \right]_0^{2\pi} + \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos(bx) dx \\ &= -\frac{1}{a} \sin(2\pi b) e^{-2\pi a} + \frac{b}{a} \left(\left[-\frac{1}{a} \cos(bx) e^{-ax} \right]_0^{2\pi} - \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} e^{-ax} \sin(bx) dx \right) \\ &= -\frac{1}{a} \sin(2\pi b) e^{-2\pi a} - \frac{b}{a^2} (\cos(2\pi b) e^{-2\pi a} - 1) - \frac{b^2}{a^2} \int_0^{2\pi} e^{-ax} \sin(bx) dx. \end{aligned}$$

Si despejamos la integral a calcular $\int_0^{2\pi} e^{-ax} \sin(bx) dx$ de la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \int_0^{2\pi} e^{-ax} \sin(bx) dx &= -\frac{1}{a} \sin(2\pi b) e^{-2\pi a} - \frac{b}{a^2} (\cos(2\pi b) e^{-2\pi a} - 1), \\ \int_0^{2\pi} e^{-ax} \sin(bx) dx &= \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left(-\frac{1}{a} \sin(2\pi b) e^{-2\pi a} - \frac{b}{a^2} (\cos(2\pi b) e^{-2\pi a} - 1) \right), \\ \int_0^{2\pi} e^{-ax} \sin(bx) dx &= \frac{1}{a^2 + b^2} (-a \sin(2\pi b) e^{-2\pi a} - b(\cos(2\pi b) e^{-2\pi a} - 1)). \end{aligned}$$

c) Sean

$$\begin{aligned} u &= \ln x, & du &= \frac{1}{x} dx, \\ dv &= x^n, & v &= \frac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión de integración por partes, la integral anterior será:

$$\begin{aligned} \int_1^e x^n \cdot \ln x \, dx &= \frac{1}{n+1} [\ln x \cdot x^{n+1}]_1^e - \frac{1}{n+1} \int_1^e x^n \, dx = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_1^e \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} (e^{n+1} - 1) = e^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

d) Sean

$$\begin{aligned} u &= \arctan x, & du &= \frac{1}{1+x^2} dx, \\ dv &= x^3, & v &= \frac{x^4}{4}. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión de integración por partes, la integral anterior será:

$$\int_0^2 x^3 \cdot \arctan x \, dx = \frac{1}{4} [\arctan x \cdot x^4]_0^2 - \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2} dx = 4 \cdot \arctan 2 - \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$

Observamos que nos queda una integral racional $\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2} dx$ donde el grado del numerador es mayor que el del denominador. Para resolver este tipo de integrales, primero tenemos que dividir el numerador entre el denominador de cara a transformarla en una integral de tal forma que el grado del numerador sea menor que el del denominador:

$$\begin{array}{r} x^4 \\ -x^4 - x^2 \\ \hline -x^2 \\ x^2 + 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

La integral $\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2} dx$ se calcula de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2} dx &= \int_0^2 (x^2 - 1) dx + \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^2 + [\arctan x]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} - 2 + \arctan 2 = \frac{2}{3} + \arctan 2. \end{aligned}$$

El valor de la integral pedida será, pues:

$$\int_0^2 x^3 \cdot \arctan x \, dx = 4 \cdot \arctan 2 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} + \arctan 2 \right) = \frac{15}{4} \arctan 2 - \frac{1}{6} \approx 3.9851.$$

4. Hallar los extremos relativos de la función siguiente:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad x > 0.$$

Solución

Para hallar los extremos relativos de la función anterior tenemos que derivarla e igualar la función derivada a cero para calcular los candidatos a extremos relativos. Usando el Teorema fundamental del Cálculo, tenemos que la función derivada vale:

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Los candidatos a extremos relativos cumplen:

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0, \Rightarrow \sin x = 0, \Rightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Veamos si se trata de máximos o mínimos relativos:

x	0	π	2π	3π	...	$2k\pi$	$(2k+1)\pi$	$(2k+2)\pi$...	∞
y'	+	-	+	-	...	+	-	+	...	
y	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow	...	\nearrow	\searrow	\nearrow	...	

Entonces los valores $x_{2k+1} = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$, corresponden a máximos relativos y los valores $x_{2k} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, a mínimos relativos.

5. Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $f_1(x) = \int_1^{\ln(x^2+1)} e^t dt.$

b) $f_2(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt.$

c) $f_3(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt.$

Solución

Hay que aplicar el resultado que nos da la derivada bajo el signo integral de funciones del tipo:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt, \quad F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x).$$

a) Basta considerar $f(x) = e^x$, $g(x) = 1$ y $h(x) = \ln(x^2 + 1)$:

$$f'_1(x) = e^{\ln(x^2+1)} \cdot h'(x) = (x^2 + 1) \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = 2x,$$

ya que en este caso $g'(x) = 0$ y sólo aparece un término en la expresión de $f'_1(x)$.

b) Basta considerar $f(x) = \sqrt{1+x^4}$, $g(x) = x$ y $h(x) = 0$:

$$f'_2(x) = -\sqrt{1+x^4} \cdot g'(x) = -\sqrt{1+x^4},$$

ya que en este caso $h'(x) = 0$ y sólo aparece un término en la expresión de $f'_2(x)$.

c) Basta considerar $f(x) = \cos(x^2)$, $g(x) = \frac{1}{x}$ y $h(x) = \sqrt{x}$:

$$f'_3(x) = \cos(\sqrt{x}^2) \cdot h'(x) - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot g'(x) = \cos(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}.$$