

# Problemas resueltos de derivación

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

## Section 1

### Regla de l'Hôpital

## Enunciado

Calcular los límites siguientes:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

# Solución del primer límite

Para calcular el primer límite,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ , primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos”  $x$  por  $\infty$ :

# Solución del primer límite

Para calcular el primer límite,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ , primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos”  $x$  por  $\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} =$$

# Solución del primer límite

Para calcular el primer límite,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ , primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos”  $x$  por  $\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = \left( \tan \frac{\pi}{2} \right)^0 =$$

# Solución del primer límite

Para calcular el primer límite,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ , primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos”  $x$  por  $\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = \left( \tan \frac{\pi}{2} \right)^0 = \infty^0.$$

# Solución del primer límite

Para calcular el primer límite,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ , primero veamos hacia dónde tiende si “sustituimos”  $x$  por  $\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = \left( \tan \frac{\pi}{2} \right)^0 = \infty^0.$$

Tenemos una indeterminación del tipo  $\infty^0$ .



# Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ , y tomando logaritmos tenemos que:

# Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ , y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right) =$$

# Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ , y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x} =$$

# Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ , y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x} = \frac{\infty}{\infty},$$

# Solución del primer límite

Para resolverla, definiendo  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ , y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x} = \frac{\infty}{\infty},$$

donde ahora tenemos una indeterminación del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ .

# Solución del primer límite

Para resolverla, aplicamos la regla de l'Hôpital:

# Solución del primer límite

Para resolverla, aplicamos la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} \cdot \left( \frac{\pi x}{2x+1} \right)'}{\tan \frac{\pi x}{2x+1}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} \cdot \left( \frac{\pi}{(2x+1)^2} \right)}{\tan \frac{\pi x}{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{(2x+1)^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos \frac{\pi x}{2x+1}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{(2x+1)^2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{2x+1}} = \frac{2\pi}{\infty \cdot \sin \pi} = \frac{2\pi}{\infty \cdot 0}.\end{aligned}$$

# Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:



# Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)^2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)'}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cos \frac{2\pi x}{2x+1}}{-\frac{4}{(2x+1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cdot (-1)}{0} = \infty.\end{aligned}$$

# Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)^2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)'}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cos \frac{2\pi x}{2x+1}}{-\frac{4}{(2x+1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cdot (-1)}{0} = \infty.\end{aligned}$$

Nuestro límite será, pues:

$$\ln L = \frac{2\pi}{\infty} = 0,$$

# Solución del primer límite

Resolvamos la última indeterminación aparte:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)^2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)'}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \frac{2\pi}{(2x+1)^2}}{-\frac{4}{(2x+1)^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cos \frac{2\pi x}{2x+1}}{-\frac{4}{(2x+1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\pi \cdot (-1)}{0} = \infty.\end{aligned}$$

Nuestro límite será, pues:

$$\ln L = \frac{2\pi}{\infty} = 0,$$

y, por tanto,  $L = e^0 = 1$ .

El segundo límite era el siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

# Solución del segundo límite

El segundo límite era el siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  tenemos una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ .

## Solución del segundo límite

El segundo límite era el siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  tenemos una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ .

Si aplicamos la regla de l'Hôpital, obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1+x)^{\frac{1}{x}} \right)'$$

## Solución del segundo límite

A continuación vamos a derivar la función  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ .

# Solución del segundo límite

A continuación vamos a derivar la función  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ .

Para ello, consideramos la función  $\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$ .



# Solución del segundo límite

A continuación vamos a derivar la función  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ .

Para ello, consideramos la función  $\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$ .

La derivada de la función anterior será:

## Solución del segundo límite

A continuación vamos a derivar la función  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ .

Para ello, consideramos la función  $\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$ .

La derivada de la función anterior será:

$$\begin{aligned} (\ln f(x))' &= \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{-(1+x) \ln(1+x) + x}{x^2(1+x)}. \end{aligned}$$

# Solución del segundo límite

Por tanto,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left( (1+x)^{\frac{1}{x}} \right)' = f(x) \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)} \\&= (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)}.\end{aligned}$$

# Solución del segundo límite

Por tanto,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left( (1+x)^{\frac{1}{x}} \right)' = f(x) \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)} \\&= (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)}.\end{aligned}$$

El límite a calcular valdrá:

# Solución del segundo límite

Por tanto,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' = f(x) \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)} \\&= (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)}.\end{aligned}$$

El límite a calcular valdrá:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)' &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2(1+x)} \\&= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{x^2 + x^3} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x) - 1 + 1}{2x + 3x^2} \\&= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x + 3x^2} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2 + 6x} = e \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}.\end{aligned}$$

## Section 2

### Cálculo de extremos

## Enunciado

Hallar los valores máximos y mínimos de las funciones siguientes:

- 1  $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$  para  $x$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .
- 2  $g(x) = |3x - x^2|$  para  $|x| \leq 2$ .

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:



Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

- 1  $[-1, 1]$  en el primer caso y

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

- 1  $[-1, 1]$  en el primer caso y
- 2  $[-2, 2]$  en el segundo caso.

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

- 1  $[-1, 1]$  en el primer caso y
- 2  $[-2, 2]$  en el segundo caso.

Los extremos se pueden alcanzar en el interior del intervalo o en los extremos del mismo.

Hemos de hallar los extremos absolutos (máximo y mínimo) de dos funciones continuas en un intervalo compacto:

- 1  $[-1, 1]$  en el primer caso y
- 2  $[-2, 2]$  en el segundo caso.

Los extremos se pueden alcanzar en el interior del intervalo o en los extremos del mismo.

Para hallar los posibles extremos en el interior del intervalo, hemos de resolver  $f'(x) = 0$  (primer caso) o  $g'(x) = 0$  (segundo caso).

En general, sean  $x_1, \dots, x_k$  los extremos hallados en el interior de un intervalo  $[a, b]$ ,

En general, sean  $x_1, \dots, x_k$  los extremos hallados en el interior de un intervalo  $[a, b]$ , es decir, valores que anulan la derivada.

En general, sean  $x_1, \dots, x_k$  los extremos hallados en el interior de un intervalo  $[a, b]$ , es decir, valores que anulan la derivada.

Para hallar el mínimo absoluto y el máximo absoluto, realizamos la tabla siguiente:

$a$	$x_1$	$\dots$	$x_k$	$b$
$f(a)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_k)$	$f(b)$

En general, sean  $x_1, \dots, x_k$  los extremos hallados en el interior de un intervalo  $[a, b]$ , es decir, valores que anulan la derivada.

Para hallar el mínimo absoluto y el máximo absoluto, realizamos la tabla siguiente:

$a$	$x_1$	$\dots$	$x_k$	$b$
$f(a)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_k)$	$f(b)$

El valor mínimo de la función  $f$  corresponderá al mínimo absoluto y el valor máximo, al máximo absoluto.



# Solución para la primera función

La función era  $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

## Solución para la primera función

La función era  $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

# Solución para la primera función

La función era  $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{5 - 4x}} \neq 0.$$

Vemos que no hay.

# Solución para la primera función

La función era  $f(x) = \sqrt{5-4x}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{5-4x}} \neq 0.$$

Vemos que no hay.

Por tanto, los extremos se alcanzan en los extremos del intervalo  $[-1, 1]$ :

-1	1
$f(-1) = \sqrt{9} = 3$	$f(1) = \sqrt{1} = 1$

## Solución para la primera función

La función era  $f(x) = \sqrt{5-4x}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo:

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{5-4x}} \neq 0.$$

Vemos que no hay.

Por tanto, los extremos se alcanzan en los extremos del intervalo  $[-1, 1]$ :

-1	1
$f(-1) = \sqrt{9} = 3$	$f(1) = \sqrt{1} = 1$

El mínimo absoluto será el punto  $(1, 1)$  y el máximo absoluto,  $(-1, 3)$ .

## Solución para la segunda función

La función era  $g(x) = |3x - x^2|$  para  $x \in [-2, 2]$ .

## Solución para la segunda función

La función era  $g(x) = |3x - x^2|$  para  $x \in [-2, 2]$ .

Veamos en primer lugar cuándo  $3x - x^2 \geq 0$  y cuándo  $3x - x^2 < 0$  ya que tenemos un valor absoluto:

## Solución para la segunda función

La función era  $g(x) = |3x - x^2|$  para  $x \in [-2, 2]$ .

Veamos en primer lugar cuándo  $3x - x^2 \geq 0$  y cuándo  $3x - x^2 < 0$  ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$



## Solución para la segunda función

La función era  $g(x) = |3x - x^2|$  para  $x \in [-2, 2]$ .

Veamos en primer lugar cuándo  $3x - x^2 \geq 0$  y cuándo  $3x - x^2 < 0$  ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Hemos de mirar los posibles cambios de signo en  $x = 0$  y  $x = 3$ :

## Solución para la segunda función

La función era  $g(x) = |3x - x^2|$  para  $x \in [-2, 2]$ .

Veamos en primer lugar cuándo  $3x - x^2 \geq 0$  y cuándo  $3x - x^2 < 0$  ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Hemos de mirar los posibles cambios de signo en  $x = 0$  y  $x = 3$ :

$-\infty$	$0$	$3$	$\infty$
<hr/>			
	$-$	$+$	$-$
<hr/>			

## Solución para la segunda función

La función era  $g(x) = |3x - x^2|$  para  $x \in [-2, 2]$ .

Veamos en primer lugar cuándo  $3x - x^2 \geq 0$  y cuándo  $3x - x^2 < 0$  ya que tenemos un valor absoluto:

$$3x - x^2 \geq 0, \Rightarrow x(3 - x) \geq 0.$$

Hemos de mirar los posibles cambios de signo en  $x = 0$  y  $x = 3$ :

$-\infty$	$0$	$3$	$\infty$
<hr/>			
	$-$	$+$	$-$
<hr/>			

Entonces  $3x - x^2 \geq 0$  si  $x \in [0, 3]$  y  $3x - x^2 < 0$  si  $x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ .

## Solución para la segunda función

Podemos escribir la función  $g(x)$  de la forma siguiente:

## Solución para la segunda función

Podemos escribir la función  $g(x)$  de la forma siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 3x - x^2, & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

## Solución para la segunda función

Podemos escribir la función  $g(x)$  de la forma siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 3x - x^2, & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo  $[-2, 2]$ :

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x \in (-2, 0), \\ 3 - 2x, & \text{si } x \in (0, 2). \end{cases}$$

## Solución para la segunda función

Podemos escribir la función  $g(x)$  de la forma siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 3x - x^2, & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Hallemos los posibles extremos en el interior del intervalo  $[-2, 2]$ :

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x \in (-2, 0), \\ 3 - 2x, & \text{si } x \in (0, 2). \end{cases}$$

El único valor que verifica  $g'(x) = 0$  es  $x = \frac{3}{2}$ .

## Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:



# Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

- $x = -2$ , por ser extremo del intervalo,

# Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

- $x = -2$ , por ser extremo del intervalo,
- $x = 0$ , porque la función  $g$  no es derivable en  $x = 0$  y hay que considerarlo,

# Solución para la segunda función

Los extremos absolutos se pueden alcanzar en los valores siguientes:

- $x = -2$ , por ser extremo del intervalo,
- $x = 0$ , porque la función  $g$  no es derivable en  $x = 0$  y hay que considerarlo,
- $x = \frac{3}{2}$ , porque está en el interior del intervalo y anula la derivada y,
- $x = 2$ , por ser extremo del intervalo.

## Solución para la segunda función

$-2$	$0$	$\frac{3}{2}$	$2$
$g(-2) = 10$	$g(0) = 0$	$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2.25$	$g(2) = 2$

## Solución para la segunda función

$-2$	$0$	$\frac{3}{2}$	$2$
$g(-2) = 10$	$g(0) = 0$	$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2.25$	$g(2) = 2$

El máximo absoluto se alcanza en el punto  $(-2, 10)$  y el mínimo absoluto,  $(0, 0)$ .