

Método de Newton-Raphson

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Método de Newton-Raphson para hallar ceros de funciones

Introducción

Una de las aplicaciones de las derivadas es el método de Newton-Raphson para hallar ceros de funciones.

Concretamente, nos planteamos el problema siguiente:

Problema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo (a, b) .
Sea $\alpha \in (a, b)$ un cero de la función f en el intervalo $[a, b]$, es decir, $f(\alpha) = 0$. ¿Cómo podemos hallar una aproximación de α ?

Método de Newton-Raphson

- El método que vamos a usar es el **método de Newton-Raphson**.

Método de Newton-Raphson

- El método que vamos a usar es el **método de Newton-Raphson**.
- Dicho método se basa en, dada una **aproximación inicial** x_0 , hallar la **recta tangente** a la función f que pasa por $(x_0, f(x_0))$,

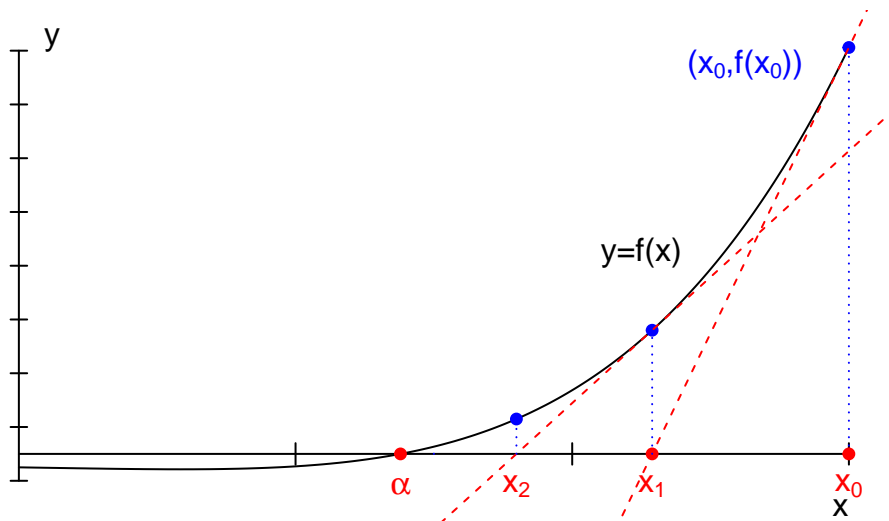
Método de Newton-Raphson

- El método que vamos a usar es el **método de Newton-Raphson**.
- Dicho método se basa en, dada una **aproximación inicial** x_0 , hallar la **recta tangente** a la función f que pasa por $(x_0, f(x_0))$,
- Seguidamente ver dónde corta dicha recta al eje X . El punto de corte será el valor x_1 .

Método de Newton-Raphson

- El método que vamos a usar es el **método de Newton-Raphson**.
- Dicho método se basa en, dada una **aproximación inicial** x_0 , hallar la **recta tangente** a la función f que pasa por $(x_0, f(x_0))$,
- Seguidamente ver dónde corta dicha recta al eje X . El punto de corte será el valor x_1 .
- A continuación, se hace lo mismo con el valor x_1 para hallar el valor x_2 y así sucesivamente.

Método de Newton-Raphson



Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Vamos a hallar la **fórmula recurrente** que verifica la **sucesión** $(x_n)_n$ que hemos introducido.

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Vamos a hallar la **fórmula recurrente** que verifica la **sucesión** $(x_n)_n$ que hemos introducido.
- Supongamos que tenemos el valor x_n . Vamos a hallar el **siguiente valor de la sucesión** x_{n+1} .

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Vamos a hallar la **fórmula recurrente** que verifica la **sucesión** $(x_n)_n$ que hemos introducido.
- Supongamos que tenemos el valor x_n . Vamos a hallar el **siguiente valor de la sucesión** x_{n+1} .
- La **pendiente** de la **recta tangente** de la función f en el punto $(x_n, f(x_n))$ vale $f'(x_n)$ y por tanto, la ecuación de la **recta tangente** a la función f en dicho punto será:

$$Y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (X - x_n),$$

donde (X, Y) es un punto cualquiera de la recta tangente en el punto $(x_n, f(x_n))$.

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Para hallar el punto x_{n+1} hemos de resolver $Y = 0$ o, si se quiere:

$$f(x_n) + f'(x_n) \cdot (X - x_n) = 0, \Rightarrow X = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Para hallar el punto x_{n+1} hemos de resolver $Y = 0$ o, si se quiere:

$$f(x_n) + f'(x_n) \cdot (X - x_n) = 0, \Rightarrow X = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- El valor de x_{n+1} será, pues $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$

Ejemplo de aplicación

- Para ilustrar el método anterior vamos a hallar el cero de la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = x^4,$$

donde la función $S(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ se llama **función sigmoide**.

Ejemplo de aplicación

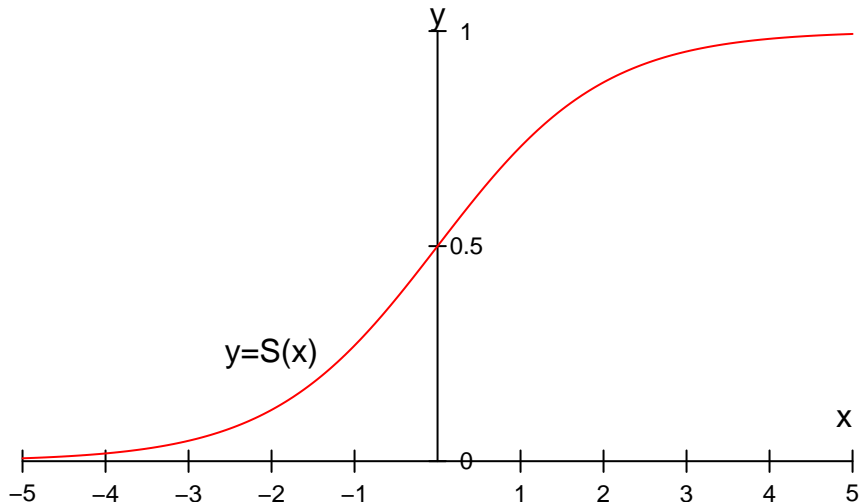
- Para ilustrar el método anterior vamos a hallar el cero de la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = x^4,$$

donde la función $S(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ se llama **función sigmoide**.

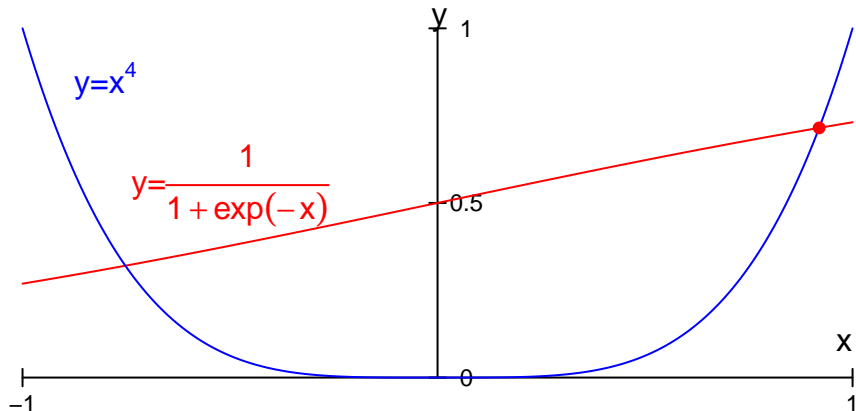
- Muchos **procesos naturales**, como los de las **curvas de aprendizaje de sistemas complejos**, muestran una progresión en el tiempo con unos niveles bajos al principio que van acelerándose hasta alcanzar un valor máximo. Dicha **transición** viene modelada muchas veces por la **función sigmoide**.

Función sigmoide



Ejemplo de aplicación

- Recordemos que el ejemplo planteado es hallar el punto de corte entre las funciones x^4 y la función sigmoide $\frac{1}{1+e^{-x}}$:



Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Recordemos que la **sucesión** $(x_n)_n$ se definía de la forma siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

a partir de un **valor inicial** x_0 .

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Recordemos que la **sucesión** $(x_n)_n$ se definía de la forma siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

a partir de un **valor inicial** x_0 .

- Consideremos $x_0 = 1$. Para hallar los demás términos de la sucesión, hemos de tener en cuenta que:

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{1 + e^{-x}}, \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Recordemos que la **sucesión** $(x_n)_n$ se definía de la forma siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

a partir de un **valor inicial** x_0 .

- Consideremos $x_0 = 1$. Para hallar los demás términos de la sucesión, hemos de tener en cuenta que:

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{1 + e^{-x}}, \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

- El siguiente término de la sucesión x_1 será:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1^4 - \frac{1}{1+e^{-1}}}{4 \cdot 1^3 - \frac{e^{-1}}{(1+e^{-1})^2}} \approx 0.92929.$$

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Hagamos un programa en python que nos calcule el valor α con una precisión ϵ , es decir, hallaremos x_n hasta que $|f(x_n)| < \epsilon$. Consideramos $\epsilon = 0.00001$ y $x_0 = 1$.

```
from math import *  
def f(x):  
    return(x**4-1/(1+exp(-x)))  
  
def der_f(x):  
    return(4*x**3-exp(-x)/(1+exp(-x))**2)  
  
x0=1.  
epsilon=0.00001  
x=x0  
n=0
```

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

```
print("El término {0:2} de la sucesión\
vale {1:.7f}".format(n,x))
```

```
## El término 0 de la sucesión vale 1.0000000
```

```
while abs(f(x)) >= epsilon:
    x=x-f(x)/der_f(x)
    n=n+1
    print("El término {0:2} de la sucesión\
vale {1:.7f}".format(n,x))
```

```
## El término 1 de la sucesión vale 0.9292890
```

```
## El término 2 de la sucesión vale 0.9196997
```

```
## El término 3 de la sucesión vale 0.9195356
```

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Observamos que el método ha convergido muy rápido, ha necesitado sólo tres iteraciones para darnos una aproximación con un error menor que 0.00001.