Método de Newton-Raphson

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Método de Newton-Raphson para hallar ceros de funciones

Introducción

Una de las aplicaciones de las derivadas es el método de Newton-Raphson para hallar ceros de funciones.

Concretamente, nos planteamos el problema siguiente:

Problema

Sea $f : [a, b] :\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo (a, b). Sea $\alpha \in (a, b)$ un cero de la función f en el intervalo $[a, b]$, es decir, $f(\alpha) = 0$. ¿Cómo podemos hallar una aproximación de α?

Método de Newton-Raphson

- El método que vamos a usar es el método de Newton-Raphson.

Método de Newton-Raphson

- El método que vamos a usar es el método de Newton-Raphson.
- Dicho método se basa en, dada una aproximación inicial x_0, hallar la recta tangente a la función f que pasa por $(x_0, f(x_0))$,

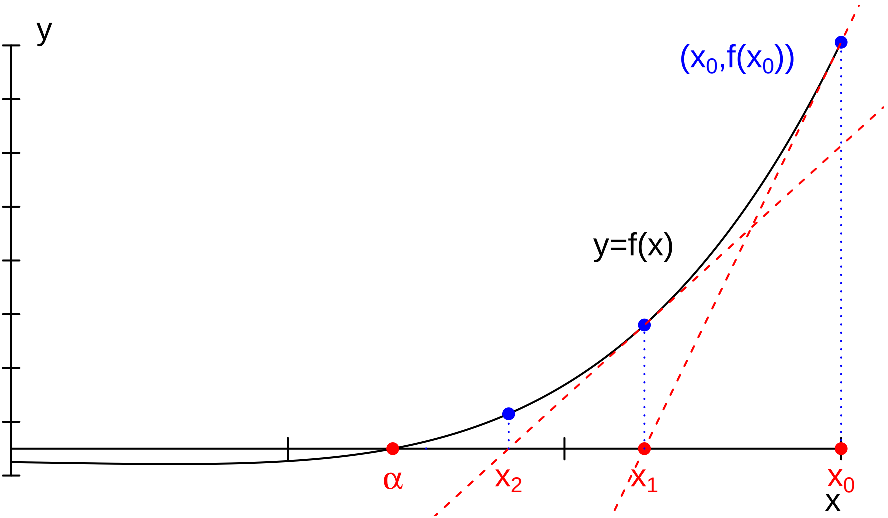
Método de Newton-Raphson

- El método que vamos a usar es el método de Newton-Raphson.
- Dicho método se basa en, dada una aproximación inicial x_0, hallar la recta tangente a la función f que pasa por $(x_0, f(x_0))$,
- Seguidamente ver dónde corta dicha recta al eje X. El punto de corte será el valor x_1.

Método de Newton-Raphson

- El método que vamos a usar es el método de Newton-Raphson.
- Dicho método se basa en, dada una aproximación inicial x_0, hallar la recta tangente a la función f que pasa por $(x_0, f(x_0))$,
- Seguidamente ver dónde corta dicha recta al eje X. El punto de corte será el valor x_1.
- A continuación, se hace lo mismo con el valor x_1 para hallar el valor x_2 y así sucesivamente.

Método de Newton-Raphson



Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Vamos a hallar la fórmula recurrente que verifica la sucesión $(x_n)_n$ que hemos introducido.

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Vamos a hallar la fórmula recurrente que verifica la sucesión $(x_n)_n$ que hemos introducido.
- Supongamos que tenemos el valor x_n. Vamos a hallar el siguiente valor de la sucesión x_{n+1}.

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Vamos a hallar la fórmula recurrente que verifica la sucesión $(x_n)_n$ que hemos introducido.
- Supongamos que tenemos el valor x_n. Vamos a hallar el siguiente valor de la sucesión x_{n+1}.
- La pendiente de la recta tangente de la función f en el punto $(x_n, f(x_n))$ vale $f'(x_n)$ y por tanto, la ecuación de la recta tangente a la función f en dicho punto será:

  $$Y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (X - x_n),$$

  donde (X, Y) es un punto cualquiera de la recta tangente en el punto $(x_n, f(x_n))$.

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Para hallar el punto x_{n+1} hemos de resolver $Y = 0$ o, si se quiere:

$$f(x_n) + f'(x_n) \cdot (X - x_n) = 0, \;\Rightarrow X = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Para hallar el punto x_{n+1} hemos de resolver $Y = 0$ o, si se quiere:

$$f(x_n) + f'(x_n) \cdot (X - x_n) = 0, \Rightarrow X = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- El valor de x_{n+1} será, pues $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

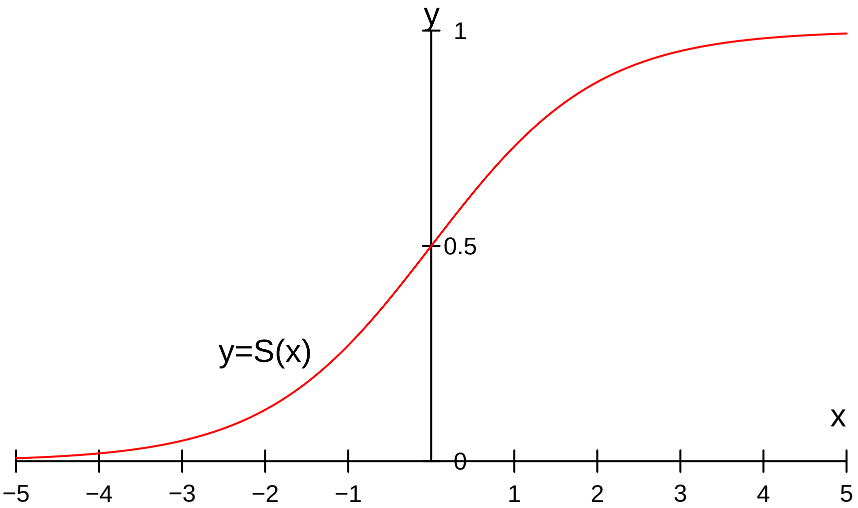
Ejemplo de aplicación

- Para ilustrar el método anterior vamos a hallar el cero de la ecuación siguiente:
$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = x^4,$$
donde la función $S(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ se llama función sigmoide.

Ejemplo de aplicación

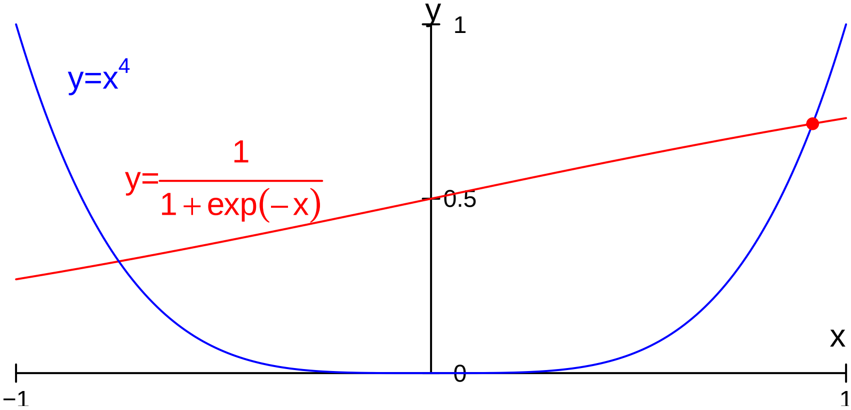
- Para ilustrar el método anterior vamos a hallar el cero de la ecuación siguiente:
$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = x^4,$$
donde la función $S(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ se llama función sigmoide.
- Muchos procesos naturales, como los de las curvas de aprendizaje de sistemas complejos, muestran una progresión en el tiempo con unos niveles bajos al principio que van acelerándose hasta alcanzar un valor máximo. Dicha transición viene modelada muchas veces por la función sigmoide.

Función sigmoide



Ejemplo de aplicación

- Recordemos que el ejemplo planteado es hallar el punto de corte entre las funciones x^4 y la función sigmoide $\frac{1}{1+e^{-x}}$:



Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Recordemos que la sucesión $(x_n)_n$ se definía de la forma siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

a partir de un valor inicial x_0.

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Recordemos que la sucesión $(x_n)_n$ se definía de la forma siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

a partir de un valor inicial x_0.

- Consideremos $x_0 = 1$. Para hallar los demás términos de la sucesión, hemos de tener en cuenta que:

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}, \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Recordemos que la sucesión $(x_n)_n$ se definía de la forma siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

  a partir de un valor inicial x_0.

- Consideremos $x_0 = 1$. Para hallar los demás términos de la sucesión, hemos de tener en cuenta que:

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}, \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

- El siguiente término de la sucesión x_1 será:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1^4 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-1}}}{4\cdot 1^3 - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{(1+\mathrm{e}^{-1})^2}} \approx 0.92929.$$

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Hagamos un programa en python que nos calcule el valor α con una precisión ϵ, es decir, hallaremos x_n hasta que $|f(x_n)| < \epsilon$. Consideramos $\epsilon = 0.00001$ y $x_0 = 1$.

```
from math import *
def f(x):
 return(x**4-1/(1+exp(-x)))

def der_f(x):
  return(4*x**3-exp(-x)/(1+exp(-x))**2)

x0=1.
epsilon=0.00001
x=x0
n=0
```

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

```
print("El término {0:2} de la sucesión\
 vale {1:.7f}".format(n,x))
```

```
## El término  0 de la sucesión vale 1.0000000
```

```
while abs(f(x)) >= epsilon:
  x=x-f(x)/der_f(x)
  n=n+1
  print("El término {0:2} de la sucesión\
 vale {1:.7f}".format(n,x))
```

```
## El término  1 de la sucesión vale 0.9292890
## El término  2 de la sucesión vale 0.9196997
## El término  3 de la sucesión vale 0.9195356
```

Cálculo de la sucesión $(x_n)_n$

- Observamos que el método ha convergido muy rápido, ha necesitado sólo tres iteraciones para darnos una aproximación con un error menor que 0.00001.