Problemas resueltos de derivación

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Section 1

Regla de l'Hôpital

Límites usando la regla de l'Hôpital

Enunciado

Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

Solución

Para calcular el primer límite, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, primero veamos hacia dónde tiende si "sustituimos" x por ∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)^{0}=\infty^{0}.$$

Tenemos una indeterminación del tipo ∞^0.

Solución

Para resolverla, definiendo $L = \lim_{x\to\infty} \left(\tan \dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, y tomando logaritmos tenemos que:

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x} = \frac{\infty}{\infty},$$

donde ahora tenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Solución

Para resolverla, aplicamos la regla de l'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)'}{\tan\frac{\pi x}{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}\cdot\left(\frac{\pi}{(2x+1)^2}\right)}{\tan\frac{\pi x}{2x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{(2x+1)^2\cdot\sin\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos\frac{\pi x}{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\pi}{(2x+1)^2\cdot\sin\frac{2\pi x}{2x+1}} = \frac{2\pi}{\infty\cdot\sin\pi} = \frac{2\pi}{\infty\cdot 0}$$