Ejercicios resueltos de integración. 2a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

a) Calcular el área entre las curvas $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = -3x^2 + 10$, para $-1 \leq x \leq 1$.

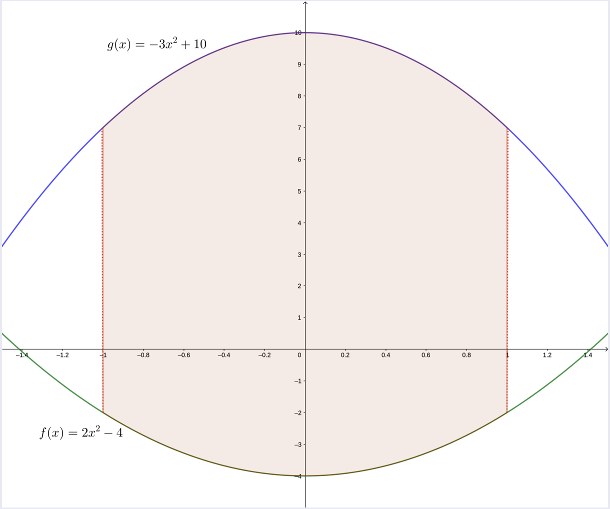
b) Calcular el área encerrada por las curvas $f(x) = x^4$ y $g(x) = -2x^2 + 3$.

Solución

Apartado a). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g para x entre -1 y 1:

Solución

Apartado a). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g para x entre -1 y 1:



Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx \quad =$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-3x^2+10-2x^2+4)\,dx \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-3x^2+10-2x^2+4)\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}(-5x^2+14)\,dx\end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-3x^2+10-2x^2+4)\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}(-5x^2+14)\,dx = \left[-5\frac{x^3}{3}+14x\right]_{-1}^{1}\\ &=\end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 10 - 2x^2 + 4)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-5x^2 + 14)\,dx = \left[-5\frac{x^3}{3} + 14x\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{5}{3} + 14 - \left(-\frac{5}{3} - 14\right) \\
&=
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

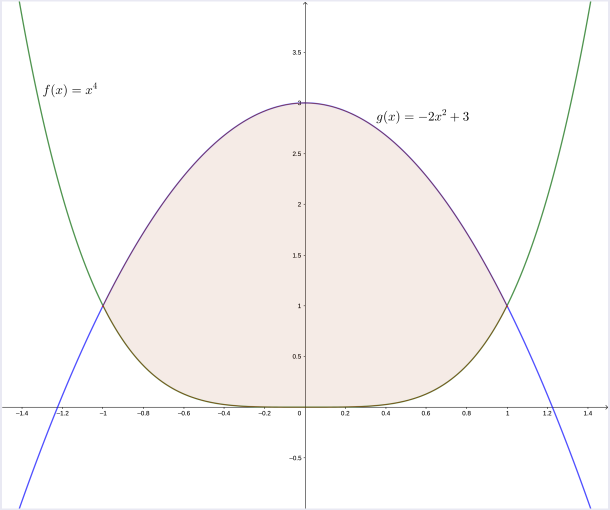
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-3x^2+10-2x^2+4)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}(-5x^2+14)\,dx = \left[-5\frac{x^3}{3}+14x\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{5}{3}+14-\left(-\frac{5}{3}-14\right) \\
&= -\frac{10}{3}+28=\frac{74}{3}\approx 24.6667.
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g:

Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos primero un esbozo de las gráficas de f y g:



Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) = g(x),$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) \;=\; g(x), \;\Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3,$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$f(x) \; = \; g(x), \; \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \; \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0,$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \Rightarrow x^4 = -2x^2+3, \Rightarrow x^4+2x^2-3=0, \\ x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x), \ \Rightarrow x^4 = -2x^2 + 3, \ \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0, \\
x^2 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} =
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \ \Rightarrow x^4 = -2x^2+3, \ \Rightarrow x^4+2x^2-3=0, \\ x^2 &= \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = 1, -3. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \ \Rightarrow x^4 = -2x^2+3, \ \Rightarrow x^4+2x^2-3=0, \\ x^2 &= \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = 1, -3. \end{aligned}$$

La única solución admisible es $x^2 = 1$,

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \ \Rightarrow x^4 = -2x^2+3, \ \Rightarrow x^4+2x^2-3=0, \\ x^2 &= \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = 1, -3. \end{aligned}$$

La única solución admisible es $x^2 = 1$, de donde $x = \pm 1$.

Solución (cont.)

A continuación, hemos de hallar los puntos de corte de las dos funciones que representarán los extremos de la integral a calcular:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \ \Rightarrow x^4 = -2x^2+3, \ \Rightarrow x^4+2x^2-3=0, \\ x^2 &= \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = 1, -3. \end{aligned}$$

La única solución admisible es $x^2 = 1$, de donde $x = \pm 1$.
Los puntos de corte serán, pues $(-1, 1)$ y $(1, 1)$, tal como se observa en la gráfica de las funciones f y g.

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx \quad =$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\int_{-1}^{1}(g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{1}(-2x^2 + 3 - x^4)\,dx$$

$$=$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-2x^2+3-x^4)\,dx \\ &= \left[-2\frac{x^3}{3}+3x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-2x^2+3-x^4)\,dx \\
&= \left[-2\frac{x^3}{3}+3x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2}{3}+3-\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{3}-3+\frac{1}{5}\right) \\
&=
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{1}(-2x^2+3-x^4)\,dx\\ &= \left[-2\frac{x^3}{3}+3x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}\\ &= -\frac{2}{3}+3-\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{3}-3+\frac{1}{5}\right)\\ &= -\frac{4}{3}+6-\frac{2}{5}=\frac{64}{15}\approx 4.2667.\end{aligned}$$

Ejercicio 2

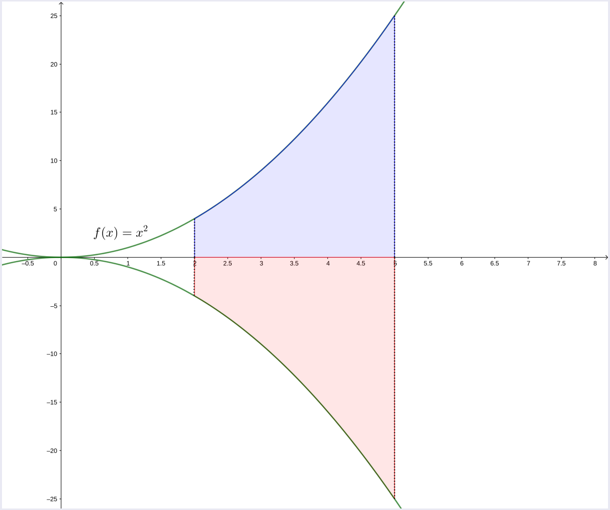
a) Calcular el volumen de revolución al girar la curva $y = x^2$ alrededor del eje X para $2 \leq x \leq 5$.
b) Calcular el volumen de revolución al girar la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje Y para $1 \leq x \leq 9$.
c) Calcular el volumen de revolución al girar la curva $y = x + 3$ alrededor del eje $y = 5$ para $0 \leq x \leq 5$.

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:



Solución (cont.)

El volumen pedido será:

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2\, dx$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 \, dx = \pi \int_2^5 x^4 \, dx =$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2\, dx = \pi \int_2^5 x^4\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^5 =$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_2^5 (x^2)^2 \, dx = \pi \int_2^5 x^4 \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_2^5 = \frac{\pi}{5} \left(5^5 - 2^5 \right)$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

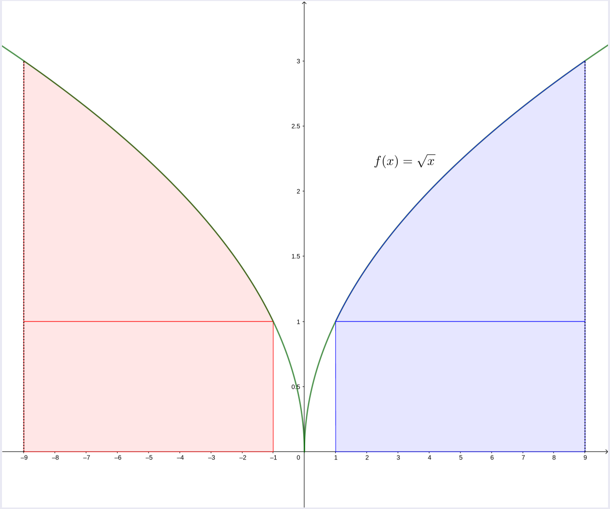
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^5 (x^2)^2 \, dx = \pi \int_2^5 x^4 \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_2^5 = \frac{\pi}{5} \left(5^5 - 2^5 \right) \\ &= \frac{3093\pi}{5} \approx 1943.3892. \end{aligned}$$

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico de la función para tener una idea de los que nos piden:



Solución (cont.)

El volumen pedido será:

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x}\, dx$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = 2\pi \int_1^9 x \cdot \sqrt{x}\, dx = 2\pi \int_1^9 x^{\frac{3}{2}}\, dx =$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_1^9 x\cdot\sqrt{x}\,dx = 2\pi\int_1^9 x^{\frac{3}{2}}\,dx = 2\pi\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^9 \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

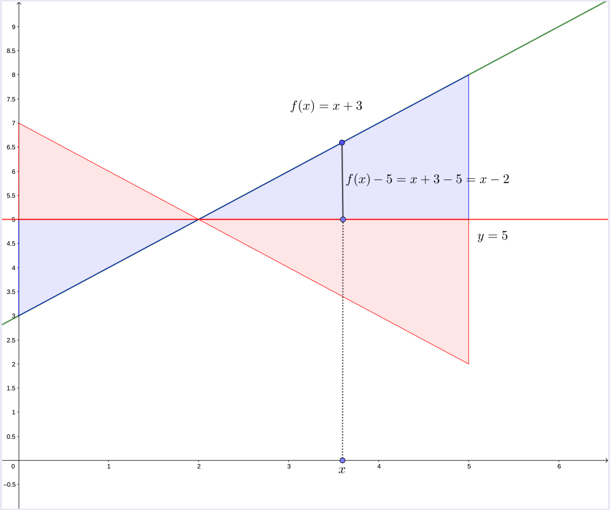
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^9 x\cdot\sqrt{x}\,dx = 2\pi\int_1^9 x^{\frac{3}{2}}\,dx = 2\pi\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^9 \\ &= \frac{4\pi}{5}\left(9^{\frac{5}{2}}-1^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{968\pi}{5} \approx 608.2123. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado c). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:

Solución (cont.)

Apartado c). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:



Solución (cont.)

El volumen pedido será:

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_0^5 (x-2)^2 \, dx$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$V = \pi \int_0^5 (x-2)^2\, dx = \pi \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^5 =$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^5 (x-2)^2\,dx = \pi\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^5 = \frac{\pi}{3}(3^3-(-2)^3) \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El volumen pedido será:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^5 (x-2)^2\,dx = \pi \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^5 = \frac{\pi}{3}(3^3 - (-2)^3) \\ &= \frac{35\pi}{3} \approx 36.6519. \end{aligned}$$

Ejercicio 3

a) Calcular el área de la superficie de revolución al girar la curva $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ alrededor del eje X para $0 \leq x \leq 4$.

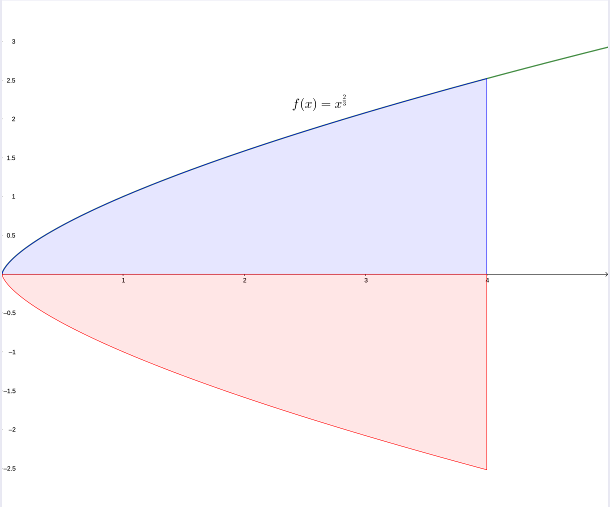
b) Calcular el área de la superficie de revolución al girar la curva $f(x) = \sqrt{x}$ alrededor del eje Y para $0 \leq x \leq 3$.

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:

Solución

Apartado a). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:



Solución (cont.)

El área pedida será:

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\, dx =$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi\int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{1+\frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\,dx$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{1+\frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\,dx \\ &= 2\pi\int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{9x^{\frac{2}{3}}+4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{1+\frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\,dx \\ &= 2\pi\int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{9x^{\frac{2}{3}}+4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = 2\pi\int_0^4 x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}}{3x^{\frac{1}{3}}}\,dx \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1+\frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\,dx \\ &= 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{9x^{\frac{2}{3}}+4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}}{3x^{\frac{1}{3}}}\,dx \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^4 x^{\frac{1}{3}} \sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}\,dx \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Para resolver la integral anterior aplicaremos la técnica de integración por partes arreglando un poco la integral primero:

Solución (cont.)

Para resolver la integral anterior aplicaremos la técnica de integración por partes arreglando un poco la integral primero:

$$A = \frac{2\pi}{3}\int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}\,dx$$

Solución (cont.)

Para resolver la integral anterior aplicaremos la técnica de integración por partes arreglando un poco la integral primero:

$$A = \frac{2\pi}{3}\int_0^4 x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}\,dx$$

Sean:

$$\begin{aligned} u &= x^{\frac{2}{3}}, & du &= \tfrac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\,dx, \\ dv &= x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}\,dx, & v &= \tfrac{1}{9}\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área será:

$$A = \frac{2\pi}{3}\left(\left[\frac{1}{9}x^{\frac{2}{3}}\cdot\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 - \frac{2}{27}\int_0^4 x^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\,dx\right)$$

Solución (cont.)

El área será:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2\pi}{3}\left(\left[\frac{1}{9}x^{\frac{2}{3}}\cdot\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4-\frac{2}{27}\int_0^4 x^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\,dx\right)\\
&= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{9}\cdot 4^{\frac{2}{3}}\cdot\left(9\cdot 4^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{15}\left[\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^4\right)
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

El área será:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2\pi}{3}\left(\left[\frac{1}{9}x^{\frac{2}{3}}\cdot\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4-\frac{2}{27}\int_0^4 x^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\,dx\right)\\
&= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{9}\cdot 4^{\frac{2}{3}}\cdot\left(9\cdot 4^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{15}\left[\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^4\right)\\
&= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{9}\cdot 4^{\frac{2}{3}}\cdot\left(9\cdot 4^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{405}\left(\left(9\cdot 4^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{5}{2}}-4^{\frac{5}{2}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

El área será:

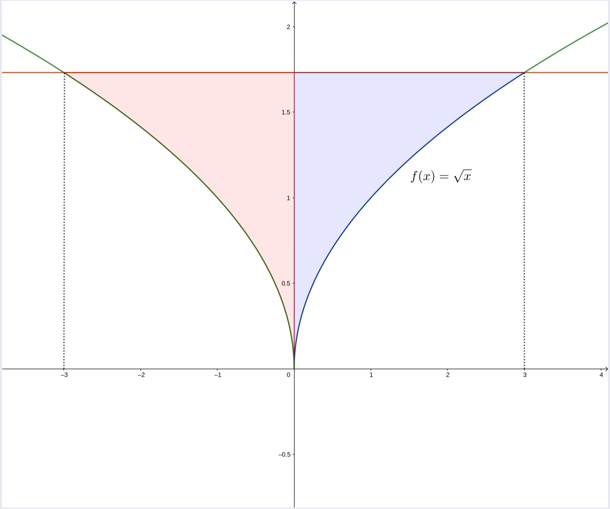
$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi}{3}\left(\left[\frac{1}{9}x^{\frac{2}{3}}\cdot\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4-\frac{2}{27}\int_0^4 x^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\,dx\right)\\ &= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{9}\cdot 4^{\frac{2}{3}}\cdot\left(9\cdot 4^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{15}\left[\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^4\right)\\ &= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{9}\cdot 4^{\frac{2}{3}}\cdot\left(9\cdot 4^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{405}\left(\left(9\cdot 4^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{5}{2}}-4^{\frac{5}{2}}\right)\right)\\ &\approx 43.1126. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:

Solución (cont.)

Apartado b). Hagamos un gráfico tal como hemos hecho antes:



Solución (cont.)

El área pedida será:

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1 + (2y)^2}\, dy =$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+(2y)^2}\, dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+4y^2}\, dy$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+(2y)^2}\, dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+4y^2}\, dy$$

Para hacer la integral anterior, consideramos el cambio de variable siguiente:

$$2y = \tan u,$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+(2y)^2}\, dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+4y^2}\, dy$$

Para hacer la integral anterior, consideramos el cambio de variable siguiente:

$$2y = \tan u, \quad \Rightarrow 2\, dy = \frac{1}{\cos^2 u}\, du,$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+(2y)^2}\, dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+4y^2}\, dy$$

Para hacer la integral anterior, consideramos el cambio de variable siguiente:

$$2y = \tan u, \quad \Rightarrow 2\, dy = \frac{1}{\cos^2 u}\, du, \quad \Rightarrow dy = \frac{1}{2\cos^2 u}\, du.$$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+(2y)^2}\, dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+4y^2}\, dy$$

Para hacer la integral anterior, consideramos el cambio de variable siguiente:

$$2y = \tan u, \quad \Rightarrow 2\, dy = \frac{1}{\cos^2 u}\, du, \quad \Rightarrow dy = \frac{1}{2\cos^2 u}\, du.$$

Cuando $y = 0$, el valor de u será $0 = \tan u$, $u = 0$

Solución (cont.)

El área pedida será:

$$A = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+(2y)^2}\, dy = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^2 \cdot \sqrt{1+4y^2}\, dy$$

Para hacer la integral anterior, consideramos el cambio de variable siguiente:

$$2y = \tan u, \ \ \Rightarrow 2\, dy = \frac{1}{\cos^2 u}\, du, \ \ \Rightarrow dy = \frac{1}{2\cos^2 u}\, du.$$

Cuando $y = 0$, el valor de u será $0 = \tan u$, $u = 0$ y cuando $y = \sqrt{3}$, el valor de u será $2\sqrt{3} = \tan u$, $u = \arctan(2\sqrt{3})$.

Solución (cont.)

La integral queda en la nueva variable u:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{1}{4}\tan^2 u \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{2\cos^2 u}\, du \\ &= \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La integral queda en la nueva variable u:

$$
\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{1}{4}\tan^2 u \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{2\cos^2 u}\, du \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{\sin^2 u}{\cos^5 u}\, du.
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

La integral queda en la nueva variable u:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{1}{4}\tan^2 u \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{2\cos^2 u}\, du \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{\sin^2 u}{\cos^5 u}\, du. \end{aligned}$$

Como la función a integral es impar en $\cos u$, hacemos el cambio siguiente:

$$\sin u = v,$$

Solución (cont.)

La integral queda en la nueva variable u:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{1}{4}\tan^2 u \cdot \frac{1}{\cos u}\cdot \frac{1}{2\cos^2 u}\, du \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{\sin^2 u}{\cos^5 u}\, du. \end{aligned}$$

Como la función a integral es impar en $\cos u$, hacemos el cambio siguiente:

$$\sin u = v, \quad \Rightarrow \cos u\, du = dv,$$

Solución (cont.)

La integral queda en la nueva variable u:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{1}{4}\tan^2 u \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{2\cos^2 u}\, du \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\arctan(2\sqrt{3})} \frac{\sin^2 u}{\cos^5 u}\, du. \end{aligned}$$

Como la función a integral es impar en $\cos u$, hacemos el cambio siguiente:

$$\sin u = v, \quad \Rightarrow \cos u\, du = dv, \quad \Rightarrow du = \frac{dv}{\cos u}.$$

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$ y cuando $u = \arctan(2\sqrt{3})$ el valor de v será $v = \sin(\arctan(2\sqrt{3}))$. Calculemos dicho valor:

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$ y cuando $u = \arctan(2\sqrt{3})$ el valor de v será $v = \sin(\arctan(2\sqrt{3}))$. Calculemos dicho valor: sea $\alpha = \arctan(2\sqrt{3})$, es decir, $\tan\alpha = 2\sqrt{3}$.

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$ y cuando $u = \arctan(2\sqrt{3})$ el valor de v será $v = \sin(\arctan(2\sqrt{3}))$. Calculemos dicho valor: sea $\alpha = \arctan(2\sqrt{3})$, es decir, $\tan\alpha = 2\sqrt{3}$. Por tanto $1 + \tan^2\alpha = 1 + 12 = 13 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, de donde $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$,

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$ y cuando $u = \arctan(2\sqrt{3})$ el valor de v será $v = \sin(\arctan(2\sqrt{3}))$. Calculemos dicho valor: sea $\alpha = \arctan(2\sqrt{3})$, es decir, $\tan\alpha = 2\sqrt{3}$. Por tanto $1 + \tan^2\alpha = 1 + 12 = 13 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, de donde $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$, y por tanto, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{13}} = \sqrt{\frac{12}{13}}$.

Solución (cont.)

Cuando $u = 0$, el valor de v será $v = 0$ y cuando $u = \arctan(2\sqrt{3})$ el valor de v será $v = \sin(\arctan(2\sqrt{3}))$. Calculemos dicho valor: sea $\alpha = \arctan(2\sqrt{3})$, es decir, $\tan\alpha = 2\sqrt{3}$. Por tanto $1 + \tan^2\alpha = 1 + 12 = 13 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, de donde $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$, y por tanto, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{13}} = \sqrt{\frac{12}{13}}$.

El valor de v para $u = \arctan(2\sqrt{3})$ será $v = \sqrt{\frac{12}{13}}$.

Solución (cont.)

La integral en la nueva variable v será:

$$A = \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{\cos^6 u}\, dv$$

Solución (cont.)

La integral en la nueva variable v será:

$$A = \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{\cos^6 u}\,dv = \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1-\sin^2 u)^3}\,dv$$

Solución (cont.)

La integral en la nueva variable v será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{\cos^6 u}\, dv = \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1-\sin^2 u)^3}\, dv \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1-v^2)^3}\, dv \end{aligned}$$

Solución (cont.)

La integral en la nueva variable v será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{\cos^6 u}\, dv = \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1-\sin^2 u)^3}\, dv \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1-v^2)^3}\, dv \end{aligned}$$

Se trata de una integral racional donde el grado del numerador es menor que el del denominador (no hace falta dividir)

Solución (cont.)

La integral en la nueva variable v será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{\cos^6 u}\,dv = \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1-\sin^2 u)^3}\,dv \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \frac{v^2}{(1-v^2)^3}\,dv \end{aligned}$$

Se trata de una integral racional donde el grado del numerador es menor que el del denominador (no hace falta dividir) y las raíces del denominador son $v=\pm 1$ y son triples.

Solución (cont.)

Hemos de descomponer la función a integrar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{(1-v^2)^3} &= \frac{A_1}{1-v}+\frac{A_2}{(1-v)^2}+\frac{A_3}{(1-v)^3}+\frac{A_4}{(1+v)} \\ &\quad +\frac{A_5}{(1+v)^2}+\frac{A_6}{(1+v)^3}.\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Hemos de descomponer la función a integrar de la forma siguiente:

$$\frac{v^2}{(1-v^2)^3} = \frac{A_1}{1-v}+\frac{A_2}{(1-v)^2}+\frac{A_3}{(1-v)^3}+\frac{A_4}{(1+v)} + \frac{A_5}{(1+v)^2}+\frac{A_6}{(1+v)^3}.$$

Los valores A_i son los siguientes:

$$A_1=-\frac{1}{16},\ A_2=-\frac{1}{16},\ A_3=\frac{1}{8},\ A_4=-\frac{1}{16},\ A_5=-\frac{1}{16},\ A_6=\frac{1}{8}.$$

Solución (cont.)

El área será:

$$A = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{16}\ln|1-v| - \frac{1}{16(1-v)} + \frac{1}{16(1-v)^2} - \frac{1}{16}\ln|1+v| + \frac{1}{16(1+v)} - \frac{1}{16(1+v)^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}}$$

Solución (cont.)

El área será:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{16}\ln|1-v| - \frac{1}{16(1-v)} + \frac{1}{16(1-v)^2} - \frac{1}{16}\ln|1+v| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16(1+v)} - \frac{1}{16(1+v)^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \\ &= \frac{\pi}{64}\left[\ln\left|\frac{1-v}{1+v}\right| - \frac{2v}{1-v^2} + \frac{4v}{(1-v^2)^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}} \end{aligned}$$

Solución (cont.)

El área será:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{16}\ln|1-v| - \frac{1}{16(1-v)} + \frac{1}{16(1-v)^2} - \frac{1}{16}\ln|1+v|\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{16(1+v)} - \frac{1}{16(1+v)^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}}\\
&= \frac{\pi}{64}\left[\ln\left|\frac{1-v}{1+v}\right| - \frac{2v}{1-v^2} + \frac{4v}{(1-v^2)^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{12}{13}}}\\
&= \frac{\pi}{64}\left(\ln\left(\frac{1-\sqrt{\frac{12}{13}}}{1+\sqrt{\frac{12}{13}}}\right) - \frac{2\sqrt{\frac{12}{13}}}{1-\frac{12}{13}} + \frac{4\sqrt{\frac{12}{13}}}{\left(1-\frac{12}{13}\right)^2}\right)
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

El área será:

$$A = \frac{\pi}{64}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{13}-\sqrt{12}}{\sqrt{13}+\sqrt{12}}\right) + 650\sqrt{\frac{12}{13}}\right) \approx 30.4631.$$

Ejercicio 4

Calcular la longitud de la curva $y = f(x) = \sqrt{x}$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(4, 2)$.