Problemas de derivabilidad de funciones. Fórmula de Taylor

1. Usando inducción, demostrar la regla de Leibniz para hallar la derivada n-ésima del producto de dos funciones:
$$(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x).$$

Solución

Veamos primero que la fórmula anterior es cierta para $n=1$:

$$(f\cdot g)'(x)=\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

Vemos que es la fórmula de derivada del producto. Por tanto, la expresión es cierta para $n=1$.

Suponemos ahora que la fórmula es cierta para n y hemos de verla para $n+1$ que sería:

$$(f\cdot g)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x).$$

Como sabemos por hipótesis de inducción que:

$$(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x),$$

derivando la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(n-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k+1)}(x)),\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k+1)}(x)\\
&= f^{(n+1)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k+1)}(x)+g^{(n+1)}(x)\\
&= f^{(n+1)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+g^{(n+1)}(x)\\
&= f^{(n+1)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(n-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+g^{(n+1)}(x)\\
&= f^{(n+1)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(n-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+g^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x),
\end{aligned}$$

tal como queríamos demostrar.

2. Si $x > 0$, demostrar que:
$$\left|(1+x)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right)\right| \leq \frac{5}{81}x^3.$$
Usar la desigualdad anterior para hallar aproximaciones de $\sqrt[3]{1.2}$ y de $\sqrt[3]{2}$.

Solución

Consideremos la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. Vamos a hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x)$ en $x_0 = 0$, es decir, el desarrollo de MacLaurin de $f(x)$ hasta grado 2.

Calculemos las tres primeras derivadas de la función $f(x)$:
$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (1+x)^{-\frac{2}{3}},\ f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot (1+x)^{-\frac{5}{3}},\ f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot (1+x)^{-\frac{8}{3}}.$$
Para $x_0 = 0$, el valor de las derivadas anteriores vale:
$$f'(0) = \frac{1}{3},\ f''(0) = -\frac{2}{9},\ f'''(0) = \frac{10}{27}.$$
El desarrollo de MacLaurin de $f(x)$ junto con la expresión del error será:
$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81} \cdot (1+c)^{-\frac{8}{3}} \cdot x^3,$$
con $c \in (0, x)$, ya que $x > 0$.

Como $c \in (0, x)$, podemos decir que el error está en:
$$\frac{5}{81} \cdot (1+x)^{-\frac{8}{3}} \cdot x^3 \leq \frac{5}{81} \cdot (1+c)^{-\frac{8}{3}} \cdot x^3 \leq \frac{5}{81} \cdot x^3.$$
Es decir:
$$0 \leq \frac{5}{81} \cdot (1+x)^{-\frac{8}{3}} \cdot x^3 \leq (1+x)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right) \leq \frac{5}{81} \cdot x^3.$$
Como $(1+x)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right)$ es positivo, podemos escribir que:
$$\left|(1+x)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right)\right| \leq \frac{5}{81}x^3,$$
tal como queríamos demostrar.

Para hallar una aproximación de $\sqrt[3]{1.2}$, aplicamos la expresión anterior para $x = 0.2$:
$$\left|(1.2)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0.2 - \frac{1}{9} \cdot 0.2^2\right)\right| \leq \frac{5}{81} \cdot 0.2^3,\ \Rightarrow \left|(1.2)^{\frac{1}{3}} - 1.0622\right| \leq 5 \times 10^{-4}.$$
Para hallar una aproximación de $\sqrt[3]{2}$, aplicamos la expresión anterior para $x = 1$:
$$\left|2^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right)\right| \leq \frac{5}{81},\ \Rightarrow \left|2^{\frac{1}{3}} - 1.2222\right| \leq 0.0617.$$

3. Si $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, demostrar que:

$$\left|\ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Usar la expresión anterior para calcular $\ln 1.5$ con un error menor que 0.001.

Solución

Vamos a hallar el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \ln(x+1)$ de grado n para $x_0 = 0$, es decir, el desarrollo de MacLaurin de orden n.

Calculemos primero las n primeras derivadas de la función $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},\ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ \text{en general, } f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Los valores de las n primeras derivadas en $x_0 = 0$ valen:

$$f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 2,\ \text{en general, } f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

El desarrollo de MacLaurin de orden n junto con la expresión del error para $f(x)$ será:

$$f(x) = \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1},$$

con $c \in (0,x)$. El valor absoluto del error puede ser acotado por:

$$\left|\frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

Por tanto:

$$\left|\ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

tal como queríamos demostrar.

Para aproximar $\ln 1.5$, aplicaremos la expresión anterior para $x = 0.5$. En primer lugar, hemos de hallar la n para la que el error cometido está acotado por 0.001:

$$\frac{0.5^{n+1}}{n+1} \leq 0.001.$$

Si probamos para distintas n, obtenemos la tabla siguiente:

n	Cota error
2	0.0417
3	0.0156
4	0.0062
5	0.0026
6	0.0011
7	5×10^{-4}

El valor de n mínimo para el que la cota del error es menor que 0.001 es $n = 7$.

El valor aproximado de $\ln(1.5)$ será:

$$\ln(1.5) \approx 0.5 - \frac{1}{2} \cdot 0.5^2 + \frac{1}{3} \cdot 0.5^3 - \frac{1}{4} \cdot 0.5^4 + \frac{1}{5} \cdot 0.5^5 - \frac{1}{6} \cdot 0.5^6 + \frac{1}{7} \cdot 0.5^7 \approx 0.4058.$$

4. Sea $I = (a, b)$ un intervalo abierto y $c \in I$. Sean f y g dos funciones definidas en I tal que las funciones derivadas $f^{(k)}$ y $g^{(k)}$ existen y son continuas en I, para $k = 0, 1, \ldots, n$. Supongamos que $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c) = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ y $g^{(n)} \neq 0$. Demostrar que:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

Solución

Consideremos los desarrollos de Taylor de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en $x = c$. Como $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c) = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$f(x) = \frac{f^n(\xi)}{n!}(x-c)^n, \quad g(x) = \frac{g^n(\eta)}{n!}(x-c)^n,$$

donde $\xi, \eta \in < x, c >$, es decir ξ, η están en el mínimo intervalo que contiene x y c.

El límite será:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\frac{f^n(\xi)}{n!}(x-c)^n}{\frac{g^n(\eta)}{n!}(x-c)^n} = \lim_{x \to c} \frac{f^n(\xi)}{g^n(\eta)}.$$

Como $x \to c$ y $\xi, \eta \in < x, c >$, se cumple que $\xi, \eta \to c$. Por tanto, el valor del límite anterior será:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^n(c)}{g^n(c)},$$

tal como queríamos ver.