Problemas de derivabilidad de funciones. Estudio local de funciones.

1. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$.

Solución

a) Dominio.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ al ser una función polinómica.

b) Puntos de discontinuidad.

No tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte:

- Eje de abscisas o eje X. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$$x^3 - 5x^2 + 12 = 0.$$

Probamos con Ruffini en $x = 2$:

	1	-5	0	12
2		2	-6	-12
	1	-3	-6	0

Vemos que $x = 2$. Para hallar las demás hemos de resolver la ecuación siguiente de segundo grado:

$$x^2 - 3x - 6 = 0,\ \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2} \approx -1.3723, 4.3723.$$

Entonces la función f pasa por los tres puntos siguientes: $(2, 0)$, $\left(\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}, 0\right)$.

- Eje de ordenadas o eje Y. El valor de $f(0)$ és $f(0) = 12$. Por tanto, la función f pasa por el punto $(0, 12)$.

d) Simetrías.

El valor de $f(-x)$ vale $f(-x) = -x^3 - 5x^2 + 12$, valor que no está relacionado con $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$. Por tanto, no tiene simetrías respecto al eje Y ni respecto al origen.

e) Asíntotas.

Al ser una función polinómica, la función $f(x)$ no tiene asíntotas.

f) Crecimiento y decrecimiento.

Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de hallar la función derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x.$$

Los posibles extremos se hallan resolviendo $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 10x = 0,\ \Rightarrow x(3x - 10) = 0,\ \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{10}{3}.$$

Hemos hallado dos candidatos a extremos. Hallemos a continuación la región de crecimiento y decrecimiento y el tipo de extremos que son los candidatos hallados:

x	$-\infty$		0		$\frac{10}{3}$		∞
y'		$+$		$-$		$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

La función es creciente en la región $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{10}{3}, \infty\right)$, es decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{10}{3}\right)$, tiene un máximo en el punto $(0, 12)$ y un mínimo en el punto $\left(\frac{10}{3}, \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 12\right) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{176}{27}\right) \approx (3.3333, -6.5185)$.

g) Concavidad y convexidad.

Para estudiar la concavidad y la convexidad, hemos de hallar la función derivada segunda:

$$f''(x) = 6x - 10.$$

Los posibles puntos de inflexión se hallan resolviendo $f''(x) = 0$:

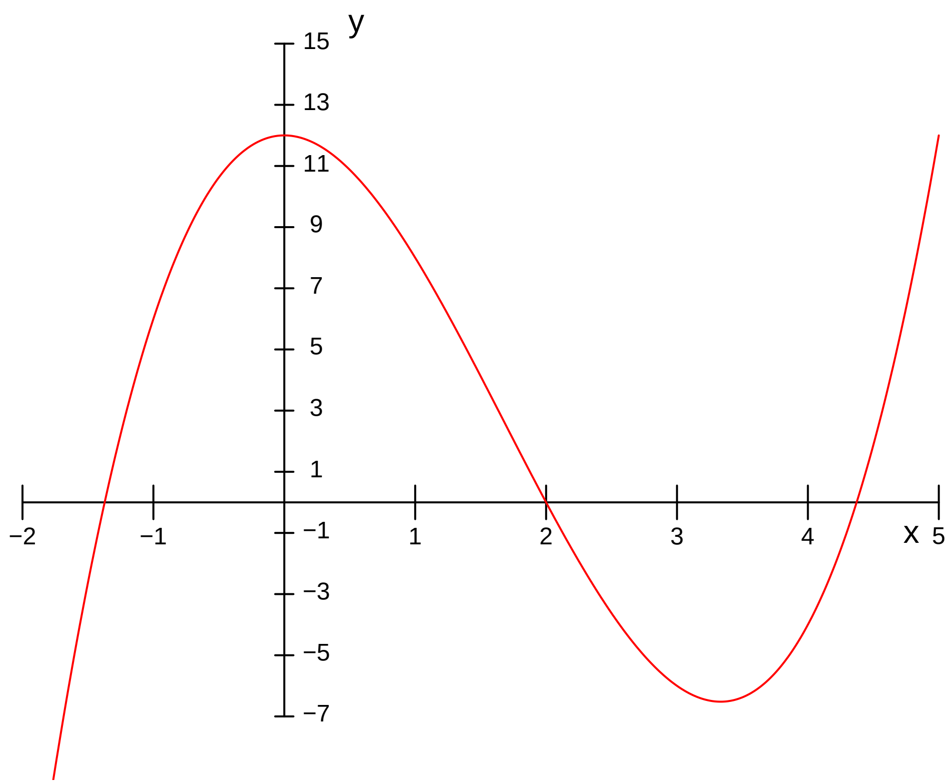
$$6x - 10 = 0, \Rightarrow x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \approx 1.6667.$$

Hemos hallado un candidato a punto de inflexión. Hallemos a continuación la región de concavidad y convexidad:

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		∞
y''		$-$		$+$	
y		$\cap$		$\cup$	

La función será cóncava en el intervalo $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$, convexa en el intervalo $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$ y tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{5}{3}, \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 12\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{74}{27}\right) \approx (1.6667, 2.7407)$.

Usando todas propiedades anteriores ya podemos dibujar la función $y = f(x)$:


y
15
13
11
9
7
5
3
1
−1
−3
−5
−7
−2
−1
1
2
3
4
x
5

2. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

Solución

a) Dominio.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ al ser una función racional donde el denominador no tiene raíces reales ya que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales.

b) Puntos de discontinuidad.

No tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte:

- Eje de abscisas o eje X. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$$\frac{x+1}{x^2+1} = 0, \Rightarrow x + 1 = 0, \Rightarrow x = -1.$$

  Corta el eje X en el punto $(-1, 0)$.
- Eje de ordenadas o eje Y. El valor de $f(0)$ és $f(0) = \frac{0+1}{0^2+1} = 1$. Por tanto, la función f pasa por el punto $(0, 1)$.

d) Simetrías.

El valor de $f(-x)$ vale $f(-x) = \frac{-x+1}{x^2+1}$, valor que no está relacionado con $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Por tanto, no tiene simetrías respecto al eje Y ni respecto al origen.

e) Asíntotas.

- Horizontales. Son de la forma $y = b$ donde b vale:

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0.$$

  Por tanto, tiene la asíntota horizontal $y = 0$ que corresponde al eje X.
- Verticales. No tiene ya que no hay valores que anulen el denominador de la función $f(x)$ que serían los candidatos a las asíntotas verticales $x = a$.
- Oblicuas. Son de la forma $y = mx + n$, donde m vale:

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x \cdot (x^2+1)} = 0.$$

  Como la pendiente es cero, sería una asíntota horizontal y éstas ya están estudiadas.

f) Crecimiento y decrecimiento.

Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de hallar la función derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x \cdot (x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

Los posibles extremos se hallan resolviendo $f'(x) = 0$:

$$-x^2 - 2x + 1 = 0, \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = \frac{-2 \mp 2\sqrt{2}}{2} = -1 \mp \sqrt{2} \approx -2.4142,\ 0.4142.$$

Hemos hallado dos candidatos a extremos. Hallemos a continuación la región de crecimiento y decrecimiento y el tipo de extremos que son los candidatos hallados:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		∞
y'		$-$		$+$		$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

La función es creciente en la región $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$, es decreciente en la región $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},\infty\right)$, tiene un mínimo en el punto

$$\left(-1-\sqrt{2},\frac{-1-\sqrt{2}+1}{(-1-\sqrt{2})^2+1}\right)=\left(-1-\sqrt{2},\frac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right)\approx(-2.4142,-0.2071),$$

y un máximo en el punto

$$\left(-1+\sqrt{2},\frac{-1+\sqrt{2}+1}{(-1+\sqrt{2})^2+1}\right)=\left(-1+\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\right)\approx(0.4142,1.2071).$$

g) Concavidad y convexidad.

Para estudiar la concavidad y la convexidad, hemos de hallar la función derivada segunda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{(-2x-2)\cdot(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^4} = \tfrac{(-2x-2)\cdot(x^2+1)-2(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \tfrac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Los posibles puntos de inflexión se hallan resolviendo $f''(x)=0$:

$$(x-1)(x^2+4x+1)=0,\ \Rightarrow x=1,\ x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=-2\pm\sqrt{3}\approx-3.7321,\ -0.2679.$$

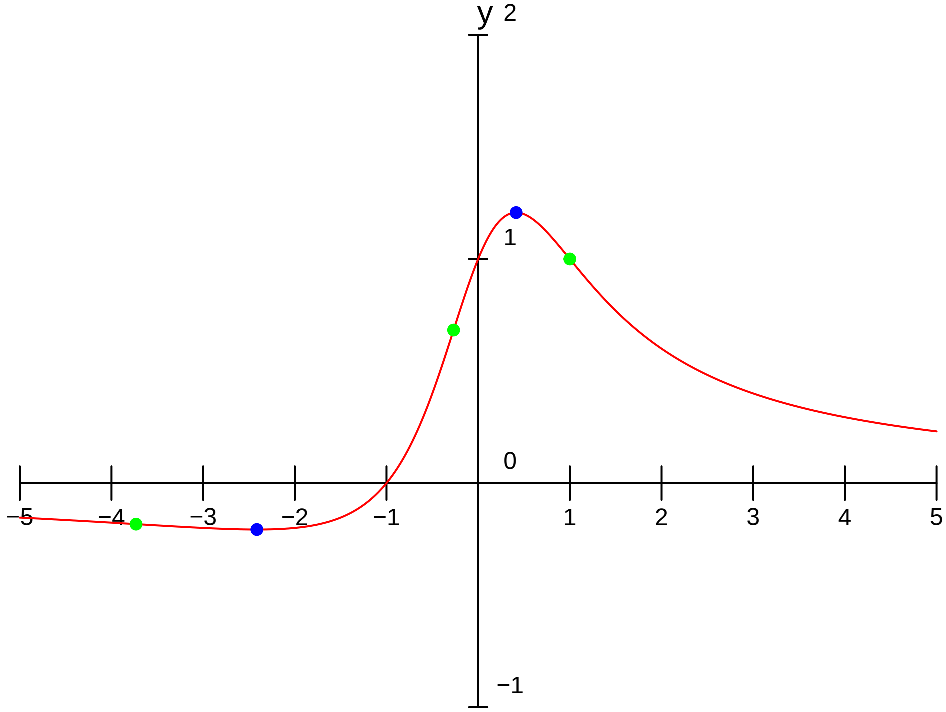
Hemos hallado un candidato a punto de inflexión. Hallemos a continuación la región de concavidad y convexidad:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1		∞
y''		$-$		$+$		$-$		$+$	
y		$\bigcap$		$\bigcup$		$\bigcap$		$\bigcup$	

La función será cóncava en la región $\left(-\infty,-2-\sqrt{3}\right)\cup\left(-2+\sqrt{3},1\right)$, convexa en la región $\left(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\right)\cup(1,\infty)$ y tiene tres puntos de inflexión en

- $$\left(-2-\sqrt{3},\frac{-2-\sqrt{3}+1}{(-2-\sqrt{3})^2+1}\right)=\left(-2-\sqrt{3},\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}\right)\approx(-3.7321,-0.183).$$
- $$\left(-2+\sqrt{3},\frac{-2+\sqrt{3}+1}{(-2+\sqrt{3})^2+1}\right)=\left(-2+\sqrt{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}\right)\approx(-0.2679,0.683).$$
- $$\left(1,\frac{1+1}{1^2+1}\right)=(1,1)\,.$$

Usando todas propiedades anteriores ya podemos dibujar la función $y=f(x)$ donde hemos señalado en azul los extremos relativos y en verde, los puntos de inflexión:


y
2
1
0
−1
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5

3. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = \ln(\cos^2 x)$.

Solución

4. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Solución