

Ejercicios resueltos de integración. Integración impropia. 3a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

Ejercicio 1

Estudiar la convergencia de las integrales siguientes y hallar su valor en caso de que sean convergentes:

a) $\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx.$

b) $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$

Solución

Apartado a). Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto singular en $x = 8$.

Solución

Apartado a). Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto singular en $x = 8$.

Para estudiar la convergencia, apliquemos el criterio del límite comparando las funciones siguientes:

Solución

Apartado a). Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto singular en $x = 8$.

Para estudiar la convergencia, apliquemos el criterio del límite comparando las funciones siguientes:

$$\frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}.$$

Solución

Apartado a). Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto singular en $x = 8$.

Para estudiar la convergencia, apliquemos el criterio del límite comparando las funciones siguientes:

$$\frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}} = \lim_{x \rightarrow 8} x + 4 = 12,$$

las dos integrales tienen el mismo criterio,

Solución

Apartado a). Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto singular en $x = 8$.

Para estudiar la convergencia, apliquemos el criterio del límite comparando las funciones siguientes:

$$\frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}}} = \lim_{x \rightarrow 8} x + 4 = 12,$$

las dos integrales tienen el mismo criterio, es decir, una es convergente si, y sólo si, la otra lo es.

Solución (cont.)

Estudiamos la convergencia de la integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx$$

Solución (cont.)

Estudiamos la convergencia de la integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx = \lim_{t \rightarrow 8} \int_4^t (x-8)^{-\frac{1}{3}} dx$$

Solución (cont.)

Estudiemos la convergencia de la integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx = \lim_{t \rightarrow 8} \int_4^t (x-8)^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{t \rightarrow 8} \left[\frac{(x-8)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right]_4^t$$

Solución (cont.)

Estudiamos la convergencia de la integral impropia:

$$\begin{aligned}\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx &= \lim_{t \rightarrow 8} \int_4^t (x-8)^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{t \rightarrow 8} \left[\frac{(x-8)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right]_4^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 8} \left[\frac{(x-8)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_4^t\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Estudiamos la convergencia de la integral impropia:

$$\begin{aligned}\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx &= \lim_{t \rightarrow 8} \int_4^t (x-8)^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{t \rightarrow 8} \left[\frac{(x-8)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right]_4^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 8} \left[\frac{(x-8)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_4^t = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 8} \left((t-8)^{\frac{2}{3}} - (-4)^{\frac{2}{3}} \right)\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Estudiamos la convergencia de la integral impropia:

$$\begin{aligned}\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx &= \lim_{t \rightarrow 8} \int_4^t (x-8)^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{t \rightarrow 8} \left[\frac{(x-8)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right]_4^t \\&= \lim_{t \rightarrow 8} \left[\frac{(x-8)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_4^t = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 8} \left((t-8)^{\frac{2}{3}} - (-4)^{\frac{2}{3}} \right) \\&= -\frac{3\sqrt[3]{16}}{2} = -3\sqrt[3]{2}.\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Como la integral impropia $\int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx$ es impropia, nuestra integral impropia $\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx$ también lo será ya que hemos visto que tienen el mismo carácter.

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx =$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx = \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx$$

=

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\begin{aligned}\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx &= \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \int_4^8 \frac{x-8}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx + \int_4^8 \frac{12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\begin{aligned}\int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx &= \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\&= \int_4^8 \frac{x-8}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx + \int_4^8 \frac{12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\&= \int_4^8 (x-8)^{\frac{2}{3}} dx + 12 \int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\begin{aligned} \int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx &= \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \int_4^8 \frac{x-8}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx + \int_4^8 \frac{12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \int_4^8 (x-8)^{\frac{2}{3}} dx + 12 \int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \left[\frac{(x-8)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_4^8 + 12 \cdot (-3\sqrt[3]{2}) \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\begin{aligned} \int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx &= \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \int_4^8 \frac{x-8}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx + \int_4^8 \frac{12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \int_4^8 (x-8)^{\frac{2}{3}} dx + 12 \int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \left[\frac{(x-8)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_4^8 + 12 \cdot (-3\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{4^5} - 36\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Hallemos el valor de nuestra integral impropia:

$$\begin{aligned} \int_4^8 \frac{x+4}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx &= \int_4^8 \frac{x-8+12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \int_4^8 \frac{x-8}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx + \int_4^8 \frac{12}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \int_4^8 (x-8)^{\frac{2}{3}} dx + 12 \int_4^8 \frac{1}{(x-8)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \left[\frac{(x-8)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_4^8 + 12 \cdot (-3\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{4^5} - 36\sqrt[3]{2} \\ &= \frac{3}{5} \cdot 8\sqrt[3]{2} - 36\sqrt[3]{2} = -\frac{156}{5}\sqrt[3]{2} \approx -39.3095. \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Calcular la longitud de la curva $y = f(x) = \sqrt{x}$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(4,2)$.

Longitud de una curva

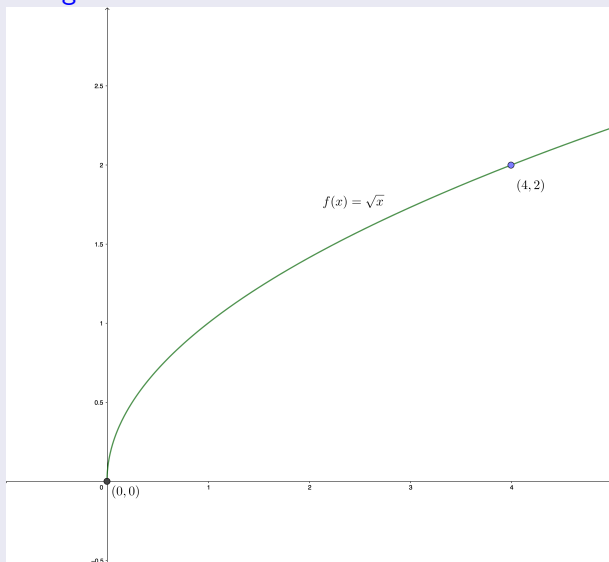
Solución

Hagamos un gráfico tal como hemos hecho anteriormente:

Longitud de una curva

Solución

Hagamos un gráfico tal como hemos hecho anteriormente:



Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva pedida será:

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx =$$

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx.$$

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx.$$

Fijarse que se trata de una integral impropia de segunda especie con una singularidad en $x = 0$.

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx.$$

Fijarse que se trata de una integral impropia de segunda especie con una singularidad en $x = 0$.

Para resolver la integral anterior hacemos el cambio de variable siguiente:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = t,$$

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx.$$

Fijarse que se trata de una integral impropia de segunda especie con una singularidad en $x = 0$.

Para resolver la integral anterior hacemos el cambio de variable siguiente:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = t, \Rightarrow x = \frac{1}{4(t^2 - 1)},$$

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva pedida será:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx.$$

Fijarse que se trata de una integral impropia de segunda especie con una singularidad en $x = 0$.

Para resolver la integral anterior hacemos el cambio de variable siguiente:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = t, \Rightarrow x = \frac{1}{4(t^2 - 1)}, \Rightarrow dx = -\frac{t}{2(t^2 - 1)^2} dt.$$

Solución

Los extremos de integración serán en la nueva variable t :

Solución

Los extremos de integración serán en la nueva variable t :

$x = 0$: en este caso $t \rightarrow \infty$.

$x = 4$: en este caso $t = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

Solución

Los extremos de integración serán en la nueva variable t :

$x = 0$: en este caso $t \rightarrow \infty$.

$x = 4$: en este caso $t = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

La integral a calcular en la nueva variable t será:

$$L = \int_{\infty}^{\frac{\sqrt{17}}{4}} \left(-\frac{t^2}{2(t^2 - 1)^2} \right) dt =$$

Solución

Los extremos de integración serán en la nueva variable t :

$x = 0$: en este caso $t \rightarrow \infty$.

$x = 4$: en este caso $t = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

La integral a calcular en la nueva variable t será:

$$L = \int_{\infty}^{\frac{\sqrt{17}}{4}} \left(-\frac{t^2}{2(t^2 - 1)^2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt.$$

Longitud de una curva

Solución

Los extremos de integración serán en la nueva variable t :

$x = 0$: en este caso $t \rightarrow \infty$.

$x = 4$: en este caso $t = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

La integral a calcular en la nueva variable t será:

$$L = \int_{\infty}^{\frac{\sqrt{17}}{4}} \left(-\frac{t^2}{2(t^2 - 1)^2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt.$$

Se trata de una integral racional en el que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Solución

Por tanto, hemos de descomponer la función a integral de la forma siguiente usando que la descomposición del denominador es:

$$(t^2 - 1)^2 = (t - 1)^2 \cdot (t + 1)^2.$$

Solución

Por tanto, hemos de descomponer la función a integral de la forma siguiente usando que la descomposición del denominador es:

$$(t^2 - 1)^2 = (t - 1)^2 \cdot (t + 1)^2.$$

$$\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} = \frac{A_1}{t - 1} + \frac{A_2}{(t - 1)^2} + \frac{A_3}{t + 1} + \frac{A_4}{(t + 1)^2}.$$

Solución

Por tanto, hemos de descomponer la función a integral de la forma siguiente usando que la descomposición del denominador es:

$$(t^2 - 1)^2 = (t - 1)^2 \cdot (t + 1)^2.$$

$$\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} = \frac{A_1}{t - 1} + \frac{A_2}{(t - 1)^2} + \frac{A_3}{t + 1} + \frac{A_4}{(t + 1)^2}.$$

Los valores A_i son los siguientes:

Solución

Por tanto, hemos de descomponer la función a integral de la forma siguiente usando que la descomposición del denominador es:

$$(t^2 - 1)^2 = (t - 1)^2 \cdot (t + 1)^2.$$

$$\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} = \frac{A_1}{t - 1} + \frac{A_2}{(t - 1)^2} + \frac{A_3}{t + 1} + \frac{A_4}{(t + 1)^2}.$$

Los valores A_i son los siguientes:

$$A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{4}, \quad A_3 = -\frac{1}{4}, \quad A_4 = \frac{1}{4}.$$

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva será:

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \ln |t - 1| - \frac{1}{4(t - 1)} - \frac{1}{4} \ln |t + 1| - \frac{1}{4(t + 1)} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty}$$

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva será:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \ln |t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4} \ln |t+1| - \frac{1}{4(t+1)} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{8} \left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{2t}{t^2-1} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \end{aligned}$$

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva será:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \ln |t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4} \ln |t+1| - \frac{1}{4(t+1)} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{8} \left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{2t}{t^2-1} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} = -\frac{1}{8} \left(\ln \left| \frac{\frac{\sqrt{17}}{4}-1}{\frac{\sqrt{17}}{4}+1} \right| - \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{17}{16}-1} \right) \end{aligned}$$

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva será:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \ln |t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4} \ln |t+1| - \frac{1}{4(t+1)} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{8} \left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{2t}{t^2-1} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} = -\frac{1}{8} \left(\ln \left| \frac{\frac{\sqrt{17}}{4}-1}{\frac{\sqrt{17}}{4}+1} \right| - \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{17}{16}-1} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(8\sqrt{17} - \ln \left(\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4} \right) \right) \end{aligned}$$

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva será:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \ln |t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4} \ln |t+1| - \frac{1}{4(t+1)} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{8} \left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{2t}{t^2-1} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} = -\frac{1}{8} \left(\ln \left| \frac{\frac{\sqrt{17}}{4}-1}{\frac{\sqrt{17}}{4}+1} \right| - \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{17}{16}-1} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(8\sqrt{17} - \ln \left(\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4} \right) \right) = \sqrt{17} - \frac{1}{8} \ln \left(\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4} \right) \end{aligned}$$

Longitud de una curva

Solución

La longitud de la curva será:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \ln |t-1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4} \ln |t+1| - \frac{1}{4(t+1)} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{8} \left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{2t}{t^2-1} \right]_{\frac{\sqrt{17}}{4}}^{\infty} = -\frac{1}{8} \left(\ln \left| \frac{\frac{\sqrt{17}}{4}-1}{\frac{\sqrt{17}}{4}+1} \right| - \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{17}{16}-1} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(8\sqrt{17} - \ln \left(\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4} \right) \right) = \sqrt{17} - \frac{1}{8} \ln \left(\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}+4} \right) \\ &\approx 4.6468. \end{aligned}$$