Problemas de derivabilidad de funciones. Estudio local de funciones.

1. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$.

Solución

a) Dominio.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ al ser una función polinómica.

b) Puntos de discontinuidad.

No tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte:

- Eje de abscisas o eje X. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$$x^3 - 5x^2 + 12 = 0.$$

Probamos con Ruffini en $x = 2$:

	1	-5	0	12
2		2	-6	-12
	1	-3	-6	0

Vemos que $x = 2$. Para hallar las demás hemos de resolver la ecuación siguiente de segundo grado:

$$x^2 - 3x - 6 = 0, \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2} \approx -1.3723, 4.3723.$$

Entonces la función f pasa por los tres puntos siguientes: $(2, 0)$, $\left(\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}, 0\right)$.

- Eje de ordenadas o eje Y. El valor de $f(0)$ és $f(0) = 12$. Por tanto, la función f pasa por el punto $(0, 12)$.

d) Simetrías.

El valor de $f(-x)$ vale $f(-x) = -x^3 - 5x^2 + 12$, valor que no está relacionado con $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$. Por tanto, no tiene simetrías respecto al eje Y ni respecto al origen.

e) Asíntotas.

Al ser una función polinómica, la función $f(x)$ no tiene asíntotas.

f) Crecimiento y decrecimiento.

Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de hallar la función derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x.$$

Los posibles extremos se hallan resolviendo $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 10x = 0, \Rightarrow x(3x - 10) = 0, \Rightarrow x = 0, \ x = \frac{10}{3}.$$

Hemos hallado dos candidatos a extremos. Hallemos a continuación la región de crecimiento y decrecimiento y el tipo de extremos que son los candidatos hallados:

x	$-\infty$		0		$\frac{10}{3}$		∞
y'		$+$		$-$		$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

La función es creciente en la región $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{10}{3}, \infty\right)$, es decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{10}{3}\right)$, tiene un máximo en el punto $(0, 12)$ y un mínimo en el punto $\left(\frac{10}{3}, \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 12\right) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{176}{27}\right) \approx (3.3333, -6.5185)$.

g) Concavidad y convexidad.

Para estudiar la concavidad y la convexidad, hemos de hallar la función derivada segunda:

$$f''(x) = 6x - 10.$$

Los posibles puntos de inflexión se hallan resolviendo $f''(x) = 0$:

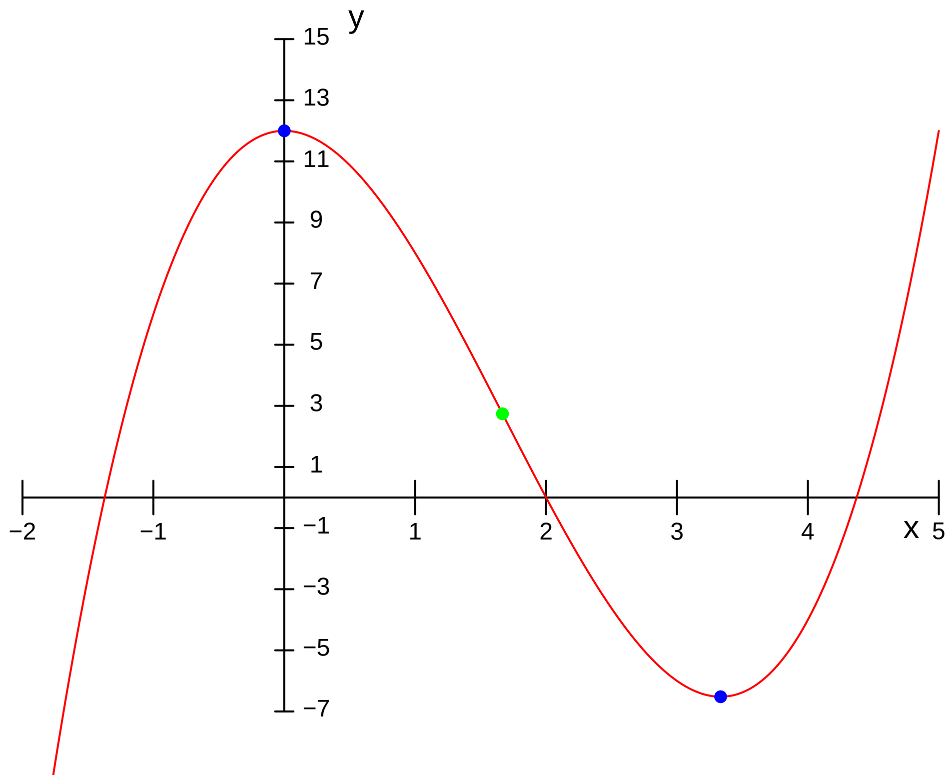
$$6x - 10 = 0, \Rightarrow x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \approx 1.6667.$$

Hemos hallado un candidato a punto de inflexión. Hallemos a continuación la región de concavidad y convexidad:

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		∞
y''		$-$		$+$	
y		$\bigcap$		$\bigcup$	

La función será cóncava en el intervalo $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$, convexa en el intervalo $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$ y tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{5}{3}, \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 12\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{74}{27}\right) \approx (1.6667, 2.7407)$.

Usando todas propiedades anteriores ya podemos dibujar la función $y = f(x)$ donde hemos indicado en azul los extremos y en verde el punto de inflexión:


y
15
13
11
9
7
5
3
1
−1
−3
−5
−7
−2
−1
1
2
3
4
x
5

2. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

Solución

a) Dominio.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ al ser una función racional donde el denominador no tiene raíces reales ya que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales.

b) Puntos de discontinuidad.

No tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$.

c) Puntos de corte:

- Eje de abscisas o eje X. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$$\frac{x+1}{x^2+1} = 0, \Rightarrow x + 1 = 0, \Rightarrow x = -1.$$

  Corta el eje X en el punto $(-1, 0)$.
- Eje de ordenadas o eje Y. El valor de $f(0)$ és $f(0) = \frac{0+1}{0^2+1} = 1$. Por tanto, la función f pasa por el punto $(0, 1)$.

d) Simetrías.

El valor de $f(-x)$ vale $f(-x) = \frac{-x+1}{x^2+1}$, valor que no está relacionado con $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Por tanto, no tiene simetrías respecto al eje Y ni respecto al origen.

e) Asíntotas.

- Horizontales. Son de la forma $y = b$ donde b vale:

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0.$$

  Por tanto, tiene la asíntota horizontal $y = 0$ que corresponde al eje X.
- Verticales. No tiene ya que no hay valores que anulen el denominador de la función $f(x)$ que serían los candidatos a las asíntotas verticales $x = a$.
- Oblicuas. Son de la forma $y = mx + n$, donde m vale:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x\cdot(x^2+1)} = 0.$$

  Como la pendiente es cero, sería una asíntota horizontal y éstas ya están estudiadas.

f) Crecimiento y decrecimiento.

Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de hallar la función derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x\cdot(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

Los posibles extremos se hallan resolviendo $f'(x) = 0$:

$$-x^2 - 2x + 1 = 0, \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = \frac{-2 \mp 2\sqrt{2}}{2} = -1 \mp \sqrt{2} \approx -2.4142,\ 0.4142.$$

Hemos hallado dos candidatos a extremos. Hallemos a continuación la región de crecimiento y decrecimiento y el tipo de extremos que son los candidatos hallados:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		∞
y'		$-$		$+$		$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

La función es creciente en la región $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$, es decreciente en la región $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},\infty\right)$, tiene un mínimo en el punto

$$\left(-1-\sqrt{2},\frac{-1-\sqrt{2}+1}{(-1-\sqrt{2})^2+1}\right)=\left(-1-\sqrt{2},\frac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right)\approx(-2.4142,-0.2071),$$

y un máximo en el punto

$$\left(-1+\sqrt{2},\frac{-1+\sqrt{2}+1}{(-1+\sqrt{2})^2+1}\right)=\left(-1+\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\right)\approx(0.4142,1.2071).$$

g) Concavidad y convexidad.

Para estudiar la concavidad y la convexidad, hemos de hallar la función derivada segunda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{(-2x-2)\cdot(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^4} = \tfrac{(-2x-2)\cdot(x^2+1)-2(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \tfrac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Los posibles puntos de inflexión se hallan resolviendo $f''(x)=0$:

$$(x-1)(x^2+4x+1)=0,\ \Rightarrow x=1,\ x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=-2\pm\sqrt{3}\approx-3.7321,\ -0.2679.$$

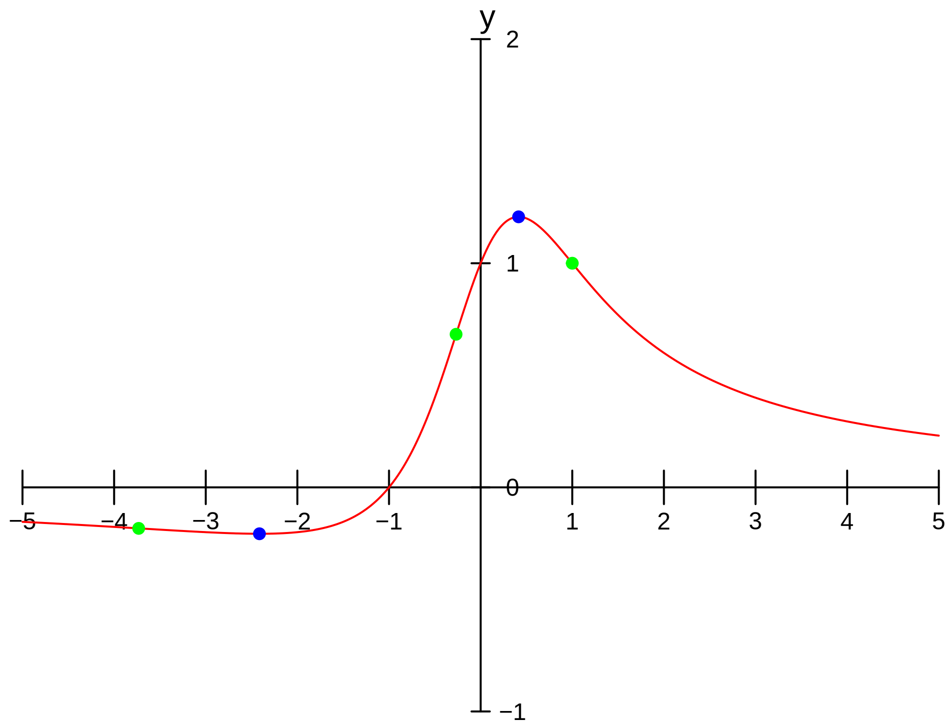
Hemos hallado un candidato a punto de inflexión. Hallemos a continuación la región de concavidad y convexidad:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1		∞
y''		$-$		$+$		$-$		$+$	
y		$\bigcap$		$\bigcup$		$\bigcap$		$\bigcup$	

La función será cóncava en la región $\left(-\infty,-2-\sqrt{3}\right)\cup\left(-2+\sqrt{3},1\right)$, convexa en la región $\left(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\right)\cup(1,\infty)$ y tiene tres puntos de inflexión en

- $$\left(-2-\sqrt{3},\frac{-2-\sqrt{3}+1}{(-2-\sqrt{3})^2+1}\right)=\left(-2-\sqrt{3},\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}\right)\approx(-3.7321,-0.183).$$
- $$\left(-2+\sqrt{3},\frac{-2+\sqrt{3}+1}{(-2+\sqrt{3})^2+1}\right)=\left(-2+\sqrt{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}\right)\approx(-0.2679,0.683).$$
- $$\left(1,\frac{1+1}{1^2+1}\right)=(1,1)\,.$$

Usando todas propiedades anteriores ya podemos dibujar la función $y=f(x)$ donde hemos señalado en azul los extremos relativos y en verde, los puntos de inflexión:


y
2
1
0
−1
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5

3. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = \ln(\cos^2 x)$.

Solución

a) Dominio.

La función estará definida en todos aquellos valores en los que $\cos^2 x > 0$ ya que si $\cos^2 x = 0$, la función logaritmo no existe y no hace falta que nos preocupemos para los casos en que $\cos^2 x < 0$ ya que el cuadrado de un número siempre es positivo.

Veamos cuando ocurre que $\cos^2 x = 0$, o cuando $\cos x = 0$. Esto pasará si

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

El dominio de la función f será, pues, $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Puntos de discontinuidad.

Hemos de estudiar los puntos $\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Sea $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+n\pi} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+n\pi} \ln(\cos^2 x) = -\infty,$$

ya que $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$. Los puntos $\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ serán pues puntos de discontinuidad de la función f.

c) Puntos de corte:

- Eje de abscisas o eje X. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$$\ln(\cos^2 x) = 0,\ \Rightarrow \cos^2 x = 1,\ \Rightarrow \cos x = \pm 1,\ \Rightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

  Corta el eje X en los puntos $(n\pi, 0)$, con $n \in \mathbb{Z}$.
- Eje de ordenadas o eje Y. El valor de $f(0)$ és $f(0) = \ln(\cos^2 0) = 0$. Por tanto, la función f pasa por el punto $(0,0)$.

d) Simetrías.

El valor de $f(-x)$ vale $f(-x) = \ln(\cos^2(-x))$, valor que coincide con $f(x)$. Por tanto, la función es simétrica respecto al eje Y.

e) Asíntotas.

- Horizontales. Son de la forma $y = b$ donde b vale:

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \ln(\cos^2 x).$$

  El límite anterior no existe ya que por ejemplo podemos considerar la sucesión $x_n = n\pi$ que tiende a infinito pero $\lim_{n \to \infty} \ln(\cos^2 x_n) = \lim_{n \to \infty} \ln 1 = 0$, y la sucesión $y_n = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ que tiende también a infinito pero $\lim_{n \to \infty} \ln(\cos^2 y_n) = \lim_{n \to \infty} \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$. Como los dos límites anteriores no coinciden, el límite anterior no existe. Por tanto, no tiene asíntotas horizontales.
- Verticales. Son de la forma $x = a$ tal que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$. Anteriormente hemos visto que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+n\pi} f(x) = -\infty.$$

  Por tanto, tiene como asíntotas verticales $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$.
- Oblicuas. Son de la forma $y = mx + n$, donde m vale:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(\cos^2 x)}{x} = 0,$$

ya que:

$$0 \leq \frac{|\ln(\cos^2 x)|}{x} \leq \frac{|\ln \sqrt{x}|}{x} = \frac{\ln x}{2x},$$

para $x > 1$, y como $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$, por el criterio del sandwich, el límite vale 0. Como la pendiente es cero, sería una asíntota horizontal y éstas ya están estudiadas.

f) Crecimiento y decrecimiento.

Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de hallar la función derivada:

$$f'(x) = \frac{-2\cos x \sin x}{\cos^2 x} = -2\frac{\sin x}{\cos x} = -2\tan x.$$

Los posibles extremos se hallan resolviendo $f'(x) = 0$:

$$-2\tan x = 0, \Rightarrow x = n\pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Hemos hallado los candidatos a extremos. Hallemos a continuación la región de crecimiento y decrecimiento y el tipo de extremos que son los candidatos hallados:

x	$-\infty$	$\dots$	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	$\dots$	∞
y'				$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$			
y				$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$			

La función es decreciente en la región

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left(n\pi, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \right),$$

es creciente en la región

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, (n+1)\pi \right),$$

y tiene máximos relativos en los puntos $(n\pi, 0)$.

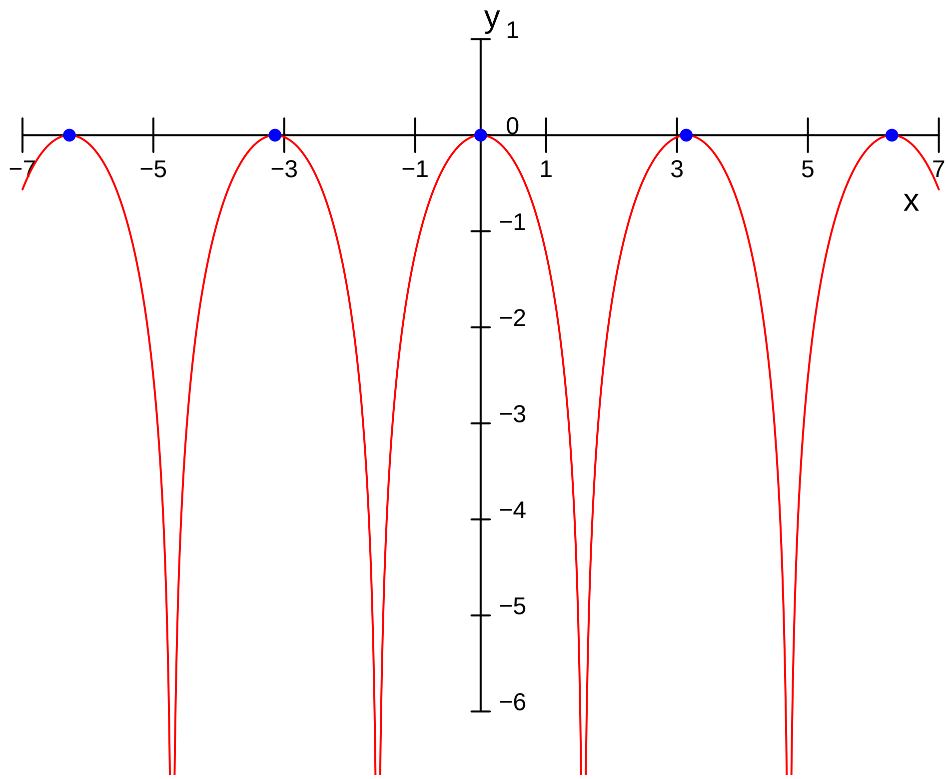
g) Concavidad y convexidad.

Para estudiar la concavidad y la convexidad, hemos de hallar la función derivada segunda:

$$f''(x) = -\frac{2}{\cos^2 x}.$$

Como $f''(x) < 0$, la función será cóncava en todo punto de su dominio.

Usando todas propiedades anteriores ya podemos dibujar la función $y = f(x)$ donde hemos señalado en azul los extremos relativos:


y
1
0
−7
−5
−3
−1
1
3
5
7
x
−1
−2
−3
−4
−5
−6

4. Realizar un estudio completo y la gráfica correspondiente de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Solución

a) Dominio.

El dominio de la función es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ al ser una función racional donde el denominador se anula en el punto $x = 1$.

b) Puntos de discontinuidad.

El único punto a estudiar es $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty.$$

Por tanto, el punto $x = 1$ es un punto de discontinuidad.

c) Puntos de corte:

- Eje de abscisas o eje X. Hemos de resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$$\frac{x^2}{x-1} = 0, \Rightarrow x = 0.$$

  Corta el eje X en el punto $(0, 0)$.
- Eje de ordenadas o eje Y. El valor de $f(0)$ és $f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$. Por tanto, la función f pasa por el punto $(0, 0)$.

d) Simetrías.

El valor de $f(-x)$ vale $f(-x) = \frac{x^2}{-x-1}$, valor que no está relacionado con $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Por tanto, no tiene simetrías respecto al eje Y ni respecto al origen.

e) Asíntotas.

- Horizontales. Son de la forma $y = b$ donde b vale:

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty.$$

  Por tanto, no tiene asíntotas horizontales.
- Verticales. Son de la forma $x = a$ donde $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$. Hemos visto anteriormente que $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$. Por tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.
- Oblicuas. Son de la forma $y = mx + n$, donde m vale:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1.$$

  El valor de n vale:

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1.$$

  Por tanto, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

f) Crecimiento y decrecimiento.

Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hemos de hallar la función derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Los posibles extremos se hallan resolviendo $f'(x) = 0$:

$$x^2 - 2x = 0, \Rightarrow x(x-2) = 0, \Rightarrow x = 0, 2.$$

Hemos hallado dos candidatos a extremos. Hallemos a continuación la región de crecimiento y decrecimiento y el tipo de extremos que son los candidatos hallados:

x	$-\infty$		0		1		2		∞
y'		$+$		$-$		$-$		$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

La función es creciente en la región $(-\infty, 0) \cup (2, \infty$, es decreciente en la región $(0, 1) \cup (1, 2)$, tiene un máximo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo en el punto $\left(2, \frac{2^2}{2-1}\right) = (2, 4)$.

g) Concavidad y convexidad.

Para estudiar la concavidad y la convexidad, hemos de hallar la función derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

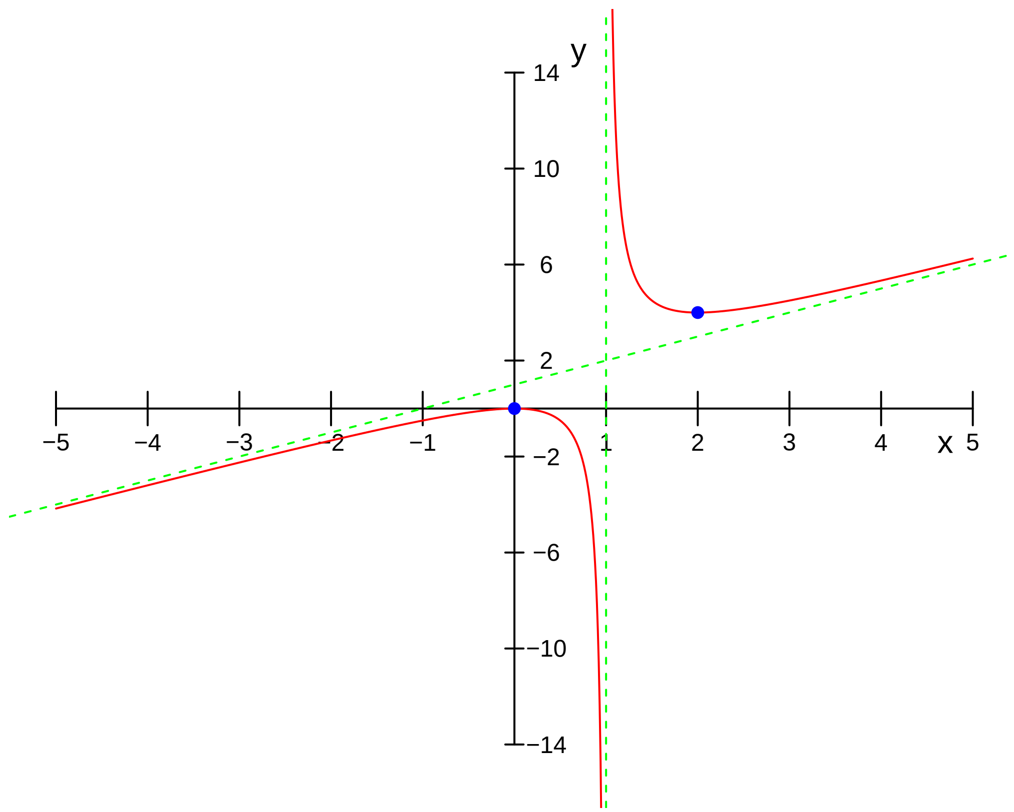
No hay puntos de inflexión ya que $f''(x) \neq 0$ para todo valor de x.

Hallemos a continuación la región de concavidad y convexidad:

x	$-\infty$		1		∞
y''		$-$		$+$	
y		$\bigcap$		$\bigcup$	

La función será cóncava en la región $(-\infty, 1)$ y convexa en la región $(1, \infty)$.

Usando todas propiedades anteriores ya podemos dibujar la función $y = f(x)$ donde hemos señalado en azul los extremos relativos y en verde las asíntotas:


y
14
10
6
2
−2
−6
−10
−14
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
x