Suma de series

1. Calcula la suma de la serie siguiente:
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Solución

Se trata de una serie geométrica de razón $1-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.2929 < 1$. Usando la expresión $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n = \frac{r^{n_0}}{1-r}$, tenemos que:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1+\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}-2 \approx 0.1213.$$

2. Calcula la suma de la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)},$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$.

Solución

Primeramente descomponemos la fracción $\frac{1}{(n+a)(n+a+1)}$ como:

$$\frac{1}{(n+a)(n+a+1)} = \frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+a+1}.$$

Entonces se trataría de una serie telescópica de la forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1}$, con $b_n = \frac{1}{a+n}$. Su suma será:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)} = b_1 = \frac{1}{a+1}.$$

3. Calcula la suma de la serie siguiente:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n-1)}.$$

Solución

Descomponemos $\frac{1}{(n+2)(n-1)}$ de la forma:

$$\frac{1}{(n+2)(n-1)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n-1} = \frac{A(n-1)+B(n+2)}{(n+2)(n-1)}.$$

Para hallar los coeficientes A y B imponemos que $A(n-1)+B(n+2)=1$, de donde $A=-\frac{1}{3}$ y $B=\frac{1}{3}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n-1)} &= \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right).\end{aligned}$$

Nos queda la suma de tres series telescópicas multiplicadas por una constante. Su valor será:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{36}.$$

4. Calcula la suma de la serie siguiente:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-2}{3^n}.$$

Solución

La serie anterior serie una serie aritmético geométrica de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(n)r^n$, con $P(n)=n^2+n-2$ y $r=\frac{1}{3}$.

Para hallar su suma, la separamos de la forma siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-2}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}.$$

Sea $r=\frac{1}{3}$. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}r^n$ es una serie geométrica de suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n=\frac{r}{1-r}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}.$$

El valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}nr^n$ se puede obtener de los apuntes a partir de la expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nr^n=\frac{r}{(1-r)^2}=\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{3}{4}.$$

Por último, para hallar la suma $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2r^n$, con $r=\frac{1}{3}$, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
rS &=\sum_{n=1}^{\infty}n^2r^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^2r^n=\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-2n+1)r^n=\sum_{n=2}^{\infty}n^2r^n-2\sum_{n=2}^{\infty}nr^n+\sum_{n=2}^{\infty}r^n\\
&=(S-r)-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}nr^n-r\right)+\frac{r^2}{1-r}=S+r-\frac{2r}{(1-r)^2}+\frac{r^2}{1-r}=S-\frac{r(r+1)}{(1-r)^2},
\end{aligned}$$

donde deducimos:
$$(r-1)S=-\frac{r(r+1)}{(1-r)^2},\ \Rightarrow S=\frac{r(r+1)}{(1-r)^3}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{8}{27}}=\frac{3}{2}.$$

En resumen, el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-2}{3^n}$ será:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-2}{3^n}=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{4}.$$

5. Calcula la suma de la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)},$$

donde $a > 0$

Solución

La serie anterior es hipergeométrica ya que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)(a+n)}}{\frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}} = \frac{n+1}{n+a} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma},$$

con $\alpha = 1$, $\beta = 1$ y $\gamma = a$.

La suma de la serie valdrá:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} = \frac{a_1\gamma}{\gamma-(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{1}{a}\cdot a}{a-(1+1)} = \frac{1}{a-2}.$$