

# Ejercicios resueltos de derivación. 2a parte.

Juan Gabriel Gomila, Arnau Mir y Llorenç Valverde

## Ejercicio 1

- a) Desarrollar la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}$  en desarrollo de MacLaurin de grado  $n$  dando el error cometido.
- b) Dar una estimación de  $\frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$  con 4 valores exactos.

## Solución

Apartado a).

## Solución

Apartado a).

En los apuntes vimos que el desarrollo de Taylor de la función  $f(x) = (x + C)^\alpha$  alrededor de  $x = x_0$  era:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \cdot (x_0 + C)^{\alpha-k} \cdot (x - x_0)^k,$$

donde  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}$ .

## Solución (cont.)

En nuestro caso,  $C = 1$ ,  $\alpha = -\frac{1}{4}$  y  $x_0 = 0$ :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

## Solución (cont.)

En nuestro caso,  $C = 1$ ,  $\alpha = -\frac{1}{4}$  y  $x_0 = 0$ :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

## Solución (cont.)

En nuestro caso,  $C = 1$ ,  $\alpha = -\frac{1}{4}$  y  $x_0 = 0$ :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

donde  $i!!!! = i \cdot (i-4) \cdot (i-8) \cdots 1$ .

# Fórmula de Taylor

## Solución (cont.)

En nuestro caso,  $C = 1$ ,  $\alpha = -\frac{1}{4}$  y  $x_0 = 0$ :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{-\frac{1}{4}}{k} \cdot x^k,$$

con

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{4}}{k} &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{4} - k + 1\right)}{k!} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdots \left(-\frac{(4k-3)}{4}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

donde  $i!!!! = i \cdot (i-4) \cdot (i-8) \cdots 1$ .

Ejemplos:  $5!!!! = 5 \cdot 1 = 5$ ,  $8!!!! = 8 \cdot 4 = 32$ .



# Fórmula de Taylor

## Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

## Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$R_n(x - x_0) = \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c + C)^{\alpha-n-1} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

## Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} R_n(x - x_0) &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c + C)^{\alpha-n-1} \cdot (x - x_0)^{n+1} \\ &= \binom{-\frac{1}{4}}{n+1} \cdot (1 + c)^{-\frac{1}{4}-n-1} \cdot x^{n+1} \end{aligned}$$

## Solución (cont.)

El desarrollo de Taylor queda de la forma siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (4k-3)!!!!}{4^k \cdot k!} \cdot x^k.$$

El error cometido viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} R_n(x - x_0) &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot (c + C)^{\alpha-n-1} \cdot (x - x_0)^{n+1} \\ &= \binom{-\frac{1}{4}}{n+1} \cdot (1 + c)^{-\frac{1}{4}-n-1} \cdot x^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (4n+1)!!!!}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot (1 + c)^{-n-\frac{5}{4}} \cdot x^{n+1}, \end{aligned}$$

donde  $c \in \langle 0, x \rangle$ .

## Solución (cont.)

Apartado b).

## Solución (cont.)

Apartado b).

En el apartado b) nos piden hallar  $f(0.1) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$  con un error menor o igual que  $10^{-4}$ .

## Solución (cont.)

Apartado b).

En el apartado b) nos piden hallar  $f(0.1) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$  con un error menor o igual que  $10^{-4}$ .

Primero tenemos que hallar el grado del polinomio  $n$  tal que  $|f(0.1) - P_n(0.1)| \leq 10^{-4}$ .

## Solución (cont.)

Apartado b).

En el apartado b) nos piden hallar  $f(0.1) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+0.1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$  con un error menor o igual que  $10^{-4}$ .

Primero tenemos que hallar el grado del polinomio  $n$  tal que  $|f(0.1) - P_n(0.1)| \leq 10^{-4}$ .

Es decir:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)!!!!}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot (1+c)^{-n-\frac{5}{4}} \cdot 0.1^{n+1} \right| \leq 10^{-4},$$

con  $c \in (0, 0.1)$ .



## Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de  $c$  ya que  $c$  es desconocido:

## Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de  $c$  ya que  $c$  es desconocido:

$$(1 + c)^{-n - \frac{5}{4}} = \frac{1}{(1 + c)^{n + \frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para  $c = 0$ .

## Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de  $c$  ya que  $c$  es desconocido:

$$(1 + c)^{-n - \frac{5}{4}} = \frac{1}{(1 + c)^{n + \frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para  $c = 0$ .  
Así el error puede acotarse por:

$$\left| \frac{(4n + 1)!!!! \cdot 0.1^{n+1}}{4^{n+1} \cdot (n + 1)!} \right| = \left| \frac{(4n + 1)!!!!}{40^{n+1} \cdot (n + 1)!} \right| \leq 10^{-4}.$$

## Solución (cont.)

Acotemos la parte que depende de  $c$  ya que  $c$  es desconocido:

$$(1 + c)^{-n - \frac{5}{4}} = \frac{1}{(1 + c)^{n + \frac{5}{4}}} \leq 1,$$

ya que el máximo valor de la fracción anterior se alcanza para  $c = 0$ .  
Así el error puede acotarse por:

$$\left| \frac{(4n + 1)!!!! \cdot 0.1^{n+1}}{4^{n+1} \cdot (n + 1)!} \right| = \left| \frac{(4n + 1)!!!!}{40^{n+1} \cdot (n + 1)!} \right| \leq 10^{-4}.$$

Hagamos un programa en python que nos halle el  $n$ :

# Fórmula de Taylor

```
from math import *  
def fourthfactorial(n):  
    if n in (1, 2, 3, 4):  
        return n  
    else:  
        if n == 0:  
            return 1  
        else:  
            return n * fourthfactorial(n-4)
```

# Fórmula de Taylor

```
def calculo_n(error):  
    x=0.1  
    m=2  
    cota_error=(fourthfactorial(4*m+1)/(4.**m+1)*  
                factorial(m+1))*(x**(m+1))  
    while(cota_error >= error):  
        m=m+1  
        cota_error=(fourthfactorial(4*m+1)/(4.**m+1)*  
                    factorial(m+1))*(x**(m+1))  
    return(m)  
  
calculo_n(0.0001)  
3
```

## Solución (cont.)

El valor de  $n$  será 3 y por tanto  $P_3(0.1)$  valdrá:

```
def termino_k(x,k):  
    y=(-1)**k*fourthfactorial(4*k-3)/  
        (4.**k*factorial(k))*x**k  
    return(y)
```

# Fórmula de Taylor

```
def Pn(x,n):  
    p=1  
    k=1  
    while k <= n:  
        p=p+termino_k(x,k)  
        k=k+1  
    return(p)
```

```
Pn(0.1,3)  
0.9764453125
```



## Ejercicio 2

Desarrollar en polinomios de Taylor las funciones siguientes alrededor del punto  $x_0$  hasta la  $n$  indicada y realizar un gráfico de la función y los polinomios de Taylor obtenidos:

- a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 4$  hasta  $n = 4$ .
- b)  $f(x) = e^{-x^2}$ ,  $x_0 = 0$  hasta  $n = 4$ .
- c)  $f(x) = \ln(1 + 2x)$ ,  $x_0 = 1$  hasta  $n = 4$ .

# Fórmula de Taylor

## Solución

En general, dada una función  $f(x)$ ,  $n + 1$ -veces derivable, el polinomio de Taylor de grado  $n$  alrededor de  $x = x_0$  vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

## Solución

En general, dada una función  $f(x)$ ,  $n + 1$ -veces derivable, el polinomio de Taylor de grado  $n$  alrededor de  $x = x_0$  vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Apartado a). La función  $f$  vale  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 4$  y  $n = 4$ .

# Fórmula de Taylor

## Solución

En general, dada una función  $f(x)$ ,  $n + 1$ -veces derivable, el polinomio de Taylor de grado  $n$  alrededor de  $x = x_0$  vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Apartado a). La función  $f$  vale  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 4$  y  $n = 4$ .  
Calculemos las cuatro primeras derivadas de  $f(x)$ :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}},$$

# Fórmula de Taylor

## Solución

En general, dada una función  $f(x)$ ,  $n + 1$ -veces derivable, el polinomio de Taylor de grado  $n$  alrededor de  $x = x_0$  vale:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Apartado a). La función  $f$  vale  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 4$  y  $n = 4$ .  
Calculemos las cuatro primeras derivadas de  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}, & f''(x) &= -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}, & f^{(iv)}(x) &= -\frac{15}{16} \cdot x^{-\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

## Solución (cont.)

Las derivadas en  $x = x_0 = 4$  valen:

## Solución (cont.)

Las derivadas en  $x = x_0 = 4$  valen:

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

## Solución (cont.)

Las derivadas en  $x = x_0 = 4$  valen:

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$f''(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{32},$$



## Solución (cont.)

Las derivadas en  $x = x_0 = 4$  valen:

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$f''(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{32},$$

$$f'''(4) = \frac{3}{8} \cdot 4^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3}{256},$$

## Solución (cont.)

Las derivadas en  $x = x_0 = 4$  valen:

$$f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$f''(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{32},$$

$$f'''(4) = \frac{3}{8} \cdot 4^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3}{256},$$

$$f^{(iv)}(4) = -\frac{15}{16} \cdot 4^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2^7} = -\frac{15}{2048}.$$

## Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$P_4(x) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{2! \cdot 32} \cdot (x - 4)^2$$

## Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$\begin{aligned} P_4(x) = & 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{2! \cdot 32} \cdot (x - 4)^2 \\ & + \frac{3}{3! \cdot 256} \cdot (x - 4)^3 - \frac{15}{4! \cdot 2048} \cdot (x - 4)^4 \end{aligned}$$

## Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$\begin{aligned}P_4(x) &= 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{2! \cdot 32} \cdot (x - 4)^2 \\&\quad + \frac{3}{3! \cdot 256} \cdot (x - 4)^3 - \frac{15}{4! \cdot 2048} \cdot (x - 4)^4 \\&= 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{64} \cdot (x - 4)^2\end{aligned}$$

## Solución (cont.)

El polinomio de Taylor de grado 4 será:

$$\begin{aligned}P_4(x) &= 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{2! \cdot 32} \cdot (x - 4)^2 \\&\quad + \frac{3}{3! \cdot 256} \cdot (x - 4)^3 - \frac{15}{4! \cdot 2048} \cdot (x - 4)^4 \\&= 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) - \frac{1}{64} \cdot (x - 4)^2 \\&\quad + \frac{1}{512} \cdot (x - 4)^3 - \frac{5}{16384} \cdot (x - 4)^4.\end{aligned}$$

# Fórmula de Taylor

## Solución (cont.)

