Problemas de derivabilidad de funciones. Teoremas de derivabilidad

1. Consideremos el polinomio de grado 4, $p_4(x) = x^4 - a^2x^2 + b$ donde a y b son valores reales. Demostrar que $p_4(x)$ tiene tres extremos relativos, dos mínimos y un máximo.

   Solución
   Para hallar los extremos hallemos la derivada de $p_4(x)$ y calculemos los valores que la anulan:

   $$p_4'(x) = 4x^3 - 2a^2x = 0, \Rightarrow 2x \cdot (2x^2 - a^2) = 0, \Rightarrow x = -\frac{|a|}{\sqrt{2}}, 0, \frac{|a|}{\sqrt{2}}.$$

   Para saber si son máximos o mínimos, miramos el signo de $p_4''(x)$:

   $$p_4''(x) = 12x^2 - 2a^2.$$

   Para $x = -\frac{|a|}{\sqrt{2}}$, $p_4''\left(-\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = 12 \cdot \frac{a^2}{2} - 2a^2 = 4a^2 > 0$. Se trataría de un mínimo.
   Para $x = 0$, $p_4''(0) = -2a^2 < 0$. Se trataría de un máximo.
   Para $x = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$, $p_4''\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right) = 12 \cdot \frac{a^2}{2} - 2a^2 = 4a^2 > 0$. Se trataría de un mínimo.
   Por tanto, $p_4(x)$ tiene dos mínimos y un máximo.

2. Demostrar que para todo valor $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

Solución
Sea $f(x) = \cos x$. Supongamos para fijar ideas que $x < y$. Como $f(x)$ es derivable y continua en $\mathbb{R}$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a la función $f(x)$ en el intervalo (x, y) y obtener:

$$f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y), \Rightarrow \cos x - \cos y = -\sin c \cdot (x - y), \Rightarrow |\cos x - \cos y| = |\sin c| \cdot |x - y| \leq |x - y|,$$

tal como queríamos ver.

3. Dar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$,
   b) $h(x) = x^3 - 3x - 4$,
   c) $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$.

Solución
Para hallar los extremos de $f(x) = x^2 - 3x + 5$, primero tenemos que derivar e igualar la derivada a cero:

$$f'(x) = 2x - 3 = 0, \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Miremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento a partir de la tabla siguiente:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		∞
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

La función $f(x)$ crece en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, decrece en el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y tiene un mínimo en el punto $\left(\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 5\right) = (1.5, 2.75)$.
Hagamos lo mismo para la función $h(x) = x^3 - 3x - 4$:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$

Tabla:

x	$-\infty$		-1		1		∞
y'		$+$		$-$		$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

La función $h(x)$ crece en la región $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, decrece en el intervalo $(-1, 1)$, tiene un máximo en $(-1, -2)$ y un mínimo en $(1, -6)$.
Función $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$:

$$k'(x) = 4x^3 + 4x = 0, \Rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0, \Rightarrow x = 0.$$

Tabla:

x	$-\infty$		0		∞
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

La función $k(x)$ crece en el intervalo $(0, \infty)$, decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y tiene un mínimo en el punto $(0, -4)$.

4. Dar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:
   a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$,
   b) $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}$ para $x > 0$,
   c) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ para $x \in \mathbb{R}$.
5. Sean $a > b > 0$ números reales y $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo con $n \geq 2$. Demostrar que $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a-b)^{\frac{1}{n}}$. Indicación: demostrar que la función $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente para $x \geq 1$ y evaluarla en $x = 1$ y $x = \frac{a}{b}$.
6. Sea $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$. Supongamos que $f(0) = 0,\ f(1) = f(2) = 1$.
   a) Demostrar que existe un valor $c_1 \in (0,1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.
   b) Demostrar que existe un valor $c_2 \in (1,2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.
   c) Demostrar que existe un valor $c_3 \in (0,2)$ tal que $f'(c_3) = \frac{1}{3}$.
7. Usando la regla de L'Hôpital calcular los límites siguientes:
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1 - \cos x}$,
   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$,
   c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}$, con n valor entero, $n \geq 1$,
   d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$.
8. Descomponer un número a en dos sumandos x e y tal que el valor de $x^2 + y^2$ sea mínimo.
9. Determinar las dimensiones que ha de tener un bote cilíndrico de 2 litros de capacidad para que se construya con la cantidad mínima de material.
10. De todos los rectángulos de igual perímetro, ¿cuál es el que tiene área mayor?